

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – UFPB
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – CCEN
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – CPGF



Tese de Doutorado em Física

Estruturas Não-riemannianas e a Imersão do Espaço-tempo em Dimensões Superiores

Lucio Fabio Pereira da Silva

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Fevereiro de 2012

S586e Silva, Lucio Fabio Pereira da.
Estruturas não-riemannianas e a imersão do espaço-tempo
em dimensões superiores / Lucio Fabio Pereira da Silva.--
João Pessoa, 2012.
140f.
Orientador: Carlos Augusto Romero Filho
Tese (Doutorado) – UFPB/CCEN
1. Física. 2. Geometrias. 3. Imersões isométricas.
4. Equações de Gauss-Codazzi. 5. EPD. 6. Teoria de campo.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Lúcio Fábio Pereira da
Silva**, candidato ao Título de Doutor em Física
na Área de Concentração Gravitação e
Cosmologia.

1 Aos vinte e oito dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e doze, às 15:00, na sala de
2 reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora
4 constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de
5 Gravitação e Cosmologia, o Sr. **Lúcio Fábio Pereira da Silva**. A comissão
6 examinadora foi composta pelos professores doutores: *Carlos Augusto Romero Filho*
7 (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Valdir Barbosa Bezerra*
8 (UFPB), *Edmundo Marinho do Monte* (UFPB), *Levi Lopes de Lima* (UFC) e *Henrique*
9 *Pereira de Oliveira* (UERJ). Dando início aos trabalhos, o Prof. *Carlos Augusto*
10 *Romero Filho* comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a
11 palavra ao candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de
12 tese intitulado "*Estruturas não-riemannianas e a imersão do espaço-tempo em*
13 *dimensões superiores*". Concluída a exposição, o candidato foi argüido pela Banca
14 Examinadora que emitiu o seguinte parecer: "**aprovado com distinção**". Assim sendo,
15 deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em
16 Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, servindo de
17 Secretário, lavrei a presente ata que vai assinada por mim mesmo e pelos membros da
18 Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, 28 de fevereiro de 2012.
19

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
Orientador - UFPB

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
UFPB

Prof. Dr. Edmundo Marinho do Monte
UFPB

Prof. Dr. Levi Lopes de Lima
UFC

Prof. Dr. Henrique Pereira de Oliveira
UERJ

Danilo Wilson Lemos Menezes
Secretário

Carlos Augusto Romero Filho
Valdir Barbosa Bezerra
Edmundo Marinho do Monte
Levi Lopes de Lima
Henrique Pereira de Oliveira
Danilo Wilson Lemos Menezes

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – UFPB
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – CCEN
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – CPGF

Estruturas Não-riemannianas e a Imersão do Espaço-tempo em
Dimensões Superiores

Lucio Fabio Pereira da Silva

Tese de Doutorado apresentada à Co-
ordenação do Programa de Pós-graduação
em Física da Universidade Federal da
Paraíba(UFPB) como parte dos requisi-
tos para a obtenção do grau de Doutor
em Física.

Orientador: Dr. Carlos Augusto Romero Filho

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Fevereiro de 2012

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Dr. Carlos Romero pela orientação, atenção e a ajuda nas horas decisivas.

Agradeço aos professores da Pós-Graduação em Física da UFPB pela valiosa aprendizagem que tive.

Aos meus colegas e amigos da Pós-Graduação, agradeço pela força, conselhos, ajudas, auxílios e incentivos.

Rendo especiais agradecimentos a Marco Aurélio do Santos, pela amizade, interação e ajudas.

Agradeço com amor e carinho a Danielle Loiola pelo companheirismo, amor e dedicação que sempre me reservou nos anos em que estivemos juntos.

Agradeço aos meus pais pelo suporte que sempre me colocaram a disposição.

Agradeço a FAPEAM pelo apoio financeiro.

Resumo

Consideramos a geometria de uma conexão afim e abordamos como exemplos, as geometrias de Weyl e Riemann-Cartan, esta ultima considerando o caso em que a torção é semi-simétrica. Após uma exposição moderna das propriedades destas geometrias, abordamos o problema de imersões isométricas em espaços de Weyl e de torção semi-simétrica. Introduzimos um roteiro para a obtenção da curvatura extrínseca, operador de Weingarten e das equações de Gauss-Codazzi para tais espaços. Em seguida, analisamos as propriedades de uma estrutura de Weyl em um espaço produto distorcido (EPD) e analisamos as geodésicas das folhas em tal espaço. Consideramos, também, o caso particular quando o espaço ambiente para um (EPD) com uma geometria de Riemann-Cartan. Mostramos como o confinamento e as propriedades de estabilidade de geodésicas próximas ao mundo-brana podem ser afetadas pela torção do *bulk*. Deste modo, construímos um análogo clássico do confinamento quântico inspirado em modelos de teoria de campo, substituindo um campo escalar por um campo de torção.

Abstract

We consider the geometry of affine connections and take, as particular examples, Weyl and Riemann-Cartan geometries. In a modern geometrical approach, we take up the problem of local embedding of manifolds in Weyl spaces and in spaces endowed with semi-symmetric torsion. We then obtain the extrinsic curvature, Weingarten operator and Gauss-Codazzi equations in the mentioned non-riemannian spaces. We investigate some important properties of a Weyl structure in the case of a warped product and carry out an analysis of the geodesics in a foliation defined in such a space. We consider the particular case when the embedding space is a warped product manifold and has a Riemann-Cartan geometry. As an application, we show that the torsion field of de *bulk* may provide a mechanism of geometrical confinement. In this way, we exhibit a classical analogue of the quantum confinement induced by scalar fields.

Quem te fez caboclo sonhar?
Quem te arremessou nesse mar de solidão?
Sobre a lua tão faceira sempre a beira do rio
Vem tirar o pão nessa imensidão.
Casa, curumim a brincar
Natureza e homem em comunhão
Frente aos olhos a incerteza de quem nunca viu
Mora a felicidade e paz, em lugar sem ambição
Eu vi a mata acordar eu vi o sol derramar
Seus raios sobre os açazeiros
Um remo rude a remar
Canoa rio deslizar levando vida
Simples anseios de viver
Musica : Comunhão
Autor: Carlos Batata

Lista de Figuras

3.1	Base do espaço tangente em $p \in M$	11
4.1	Curvatura de Riemann	36
8.1	Espaço produto distorcido.	83
9.1	O ponto de equilíbrio E no caso onde $f(l_0) > 0$	98
9.2	Quando $f''(l_0) < 0$ o ponto de equilíbrio é um ponto de sela. Neste caso o confinamento é altamente instável. A única exceção corresponde às linhas AE e BE , ao longo das quais as partículas são atraídas de volta para a folha. . .	98
9.3	O efeito do campo de torção é "fechar" os caminhos no diagrama de fase, com o aparecimento de uma hipersuperfície atratora, retratada no diagrama como o equilíbrio ponto E	103
11.1	Retratos de fase estáveis típicos	118
11.2	Retratos de fase instáveis típicos	119

Lista de Tabelas

Sumário

Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	vi
1 Introdução	1
1.1 Física e Geometria	1
2 O Problema do Espaço	4
2.1 A questão da dimensionalidade do espaço	6
3 Prolegômenos Matemáticos	7
3.1 Definição de Variedade Diferenciável	8
3.2 Aplicações entre variedades	9
3.3 Espaço Tangente	9
3.4 Curvas	10
3.5 Aplicações entre Variedades	11
3.6 Fibrados Vetoriais e Campos Vetoriais	14
3.6.1 Colchetes de Lie	16
3.7 Métrica semi-riemanniana	18
3.7.1 Construções elementares associadas às métricas semi-riemannianas . .	20
3.8 Isometrias	23
4 Geometria de uma conexão afim	25
4.1 Conexão Afim	27
4.1.1 Derivada covariante de campos tensoriais	29
4.2 Não-metricidade	31
4.2.1 Geodésicas	32
4.2.2 Torção	35
4.2.3 Tensor de Riemann	36
4.3 Geometria não-métrica sem torção	39
4.3.1 Conexão de Levi-Civita	40
4.4 Geometria de Weyl	42
4.5 Geometria de Riemann-Cartan	52
4.6 Geometria da torção Semi-simétrica	54

5	Imersões Isométricas	56
5.1	Definição e Propriedades	58
5.1.1	Conexão induzida	60
5.1.2	A segunda forma fundamental	61
5.1.3	Subvariedades totalmente umbílicas	65
5.1.4	Subvariedades totalmente geodésicas	65
6	Imersões em Espaços de Weyl	68
6.1	Subvariedades em espaços de Weyl	68
7	Subvariedades com conexão semi-simétrica	74
7.1	Equações fundamentais	76
8	<i>EPD</i> com estrutura de Weyl	79
8.1	Geodésicas em <i>EPD</i> com estrutura de Weyl	87
8.2	Curvatura em espaços produtos distorcidos	89
9	Confinamento de geodésicas em hipersuperfícies em Riemann-Cartan	93
9.1	Movimento geodésico em um <i>EPD</i> riemanniano.	94
9.2	Análise qualitativa do movimento na quinta dimensão	95
9.2.1	Movimento geodésico pentadimensional de partículas massivas nas imediações de uma hipersuperfície tetradimensional	96
9.3	Movimento geodésico na presença de torção	100
10	Conclusão	104
11	Apêndice	106
11.1	Tensores	106
11.1.1	Interpretações	108
11.1.2	Bases e componentes tensoriais	109
11.1.3	Contração	111
11.2	Sistemas Dinâmicos	115
11.2.1	Sistemas autônomos	115
11.3	Sistemas não lineares	117
	Referências Bibliográficas	120

Capítulo 1

Introdução

1.1 Física e Geometria

Historicamente, a partir da formulação da teoria da Relatividade Geral(RG), a geometria tem desempenhado um papel extremamente poderoso na representação teórica da realidade física. Pode-se dizer que a geometrização do campo de gravitação inaugurou um novo método de investigação teórica, encontrando importante aplicações na Física contemporânea. Na verdade, essa interação entre Geometria e Física não se dá em sentido único: o desenvolvimento de uma dessas disciplinas impulsiona o avanço da outra, e vice-versa. Isto é, particularmente verdadeiro no que diz respeito à Geometria e a teoria da gravitação. Por exemplo, o aparecimento das chamadas geometrias não-riemmanianas tem levado a idéias fecundas na representação das noções modernas do espaço-tempo, quer seja na busca de uma teoria unificada das interações fundamentais da Natureza, quer seja em outras questões fundamentais ligadas à quantização de Gravitação e à Cosmologia Moderna.

Na presente tese, seguindo a tendência moderna de buscar na geometria conceitos que se adaptem à descrição atual dos fenômenos físicos, investigamos algumas estruturas não-riemmanianas já conhecidas desde o início do século XX [1][2][3]. De fato, a geometria riemmaniana se mostrou eficiente na descrição da dinâmica do campo gravitacional. Contudo, faltam-lhe graus de liberdade para descrever as outras interações da Física. Graus de liberdade, no entanto, podem advir de estruturas não-riemmanianas, tais como não-metricidade e existência de torção. Segue-se que o problema da imersão do espaço-tempo, tão discutido nos dias de hoje, reveste-se de uma imensa riqueza quando tratado no contexto de

geometrias mais gerais. Um exemplo claro desse fato está na abordagem do problema do confinamento de partículas e fótons em hipersuperfícies que representam o modelo dos temas de branas[4][5].

Uma característica comum das modernas teorias que tratam da imersão do espaço-tempo é a escolha dos chamados *espaços produto distorcidos* (EPD), os quais podem ser vistos como construções topológicas que levam a uma forma especial do tensor métrico. Um dos resultados originais da presente tese corresponde a uma re-elaboração da teoria geométrica dos espaços distorcidos no contexto de variedades de Weyl e Riemann-Cartan. Nesta tese, começamos com a extensão do problema de imersão isométrica para variedades dotadas de não-metricidade e torção. Neste contexto, investigamos a *segunda forma fundamental*, o *operador de Weingarten*, as equações de Gauss-Codazzi, e outros conceitos geométricos fundamentais. Também estudamos as propriedades de umblicidade, de subvariedades em espaços de Weyl e em variedades de Riemann-Cartan semi-simétricas com vistas ao problema do confinamento de fótons em branas.

O desenvolvimento da geometria diferencial no último século levou à descoberta de um vasto número de geometrias não-riemannianas. A riqueza que estas geometrias possuem na forma de novas estruturas geométricas (além das conexões afins e da métrica riemanniana) pode ser útil na formulação de novas teorias físicas, na medida em que introduzem graus extras de liberdade, por exemplo, para a descrição da Física dos campos não-gravitacionais. Claro que este é um fato bem conhecido e foi por muito tempo explorado por Einstein e outros, em sua busca de uma teoria do campo unificado [7][8]. No entanto, acreditamos que ainda é de interesse investigar geometrias não-riemannianas em um contexto mais moderno, ou seja, considerando teorias multi-dimensionais. Por exemplo, estudo de geodésicas em um espaço-tempo penta-dimensional com geometria de Weyl. Um dos resultados dessa abordagem é que, é possível estabelecer um análogo clássico de confinamento quântico [4] por meios puramente geométricos [6].

A presente tese está assim organizada: No capítulo 1, apresentamos algumas motivações e retrospectivas históricas acerca da geometria do espaço físico e da sua dimensionalidade. No capítulo 2, apresentamos algumas noções básicas de geometria diferencial, com o objetivo de fixar notações e apresentar alguns conceitos geométricos que serão utilizados no decorrer da tese. No capítulo 3, fazemos um apanhado do conceito de conexão afim, suas propriedades e alguns exemplos de geometrias afins, como as definidas pelas conexões de

Levi-Civita, Weyl, Riemann-Cartan e semi-simétrica. No capítulo 4, apresentamos o aparato conceitual das imersões isométricas, chamando a atenção para algumas consequências da existência de torção ou não-metricidade. No capítulo 5, descrevemos um roteiro das imersões em espaço de Weyl, e em seguida, no capítulo 6, investigamos, as imersões em variedades com conexão semi-simétricas chamando a atenção para a umbilicidade das subvariedades, caso de conexões de Weyl e de conexão semi-simétricas. No capítulo 7, apresentamos os espaços produtos distorcidos (EPD) com uma estrutura de Weyl generalizando os resultados já conhecidos na literatura [9], chamando a atenção para o comportamento das geodésicas das folhas horizontais e verticais. No capítulo 8, apresentamos o confinamento de geodésicas em Riemann-Cartan como uma das aplicações dos desenvolvimentos anteriores [10] . No capítulo 9, apresentamos nossas conclusões, apontando perspectivas futuras. Por fim, incluímos um apêndice com duas seções, a primeira sobre tensores e operações algébricas e a segunda sobre sistemas dinâmicos.

Capítulo 2

O Problema do Espaço

O *Problema do espaço* consiste em determinar a geometria do *espaço físico*, ou seja, a geometria inerente a própria natureza, e porque é que existe tal geometria. O problema do espaço já havia sido abordado na Grécia antiga. Lá, tacitamente, admitia-se, que a geometria do mundo plana, o que culminou na compilação do conhecimento geométrico "antigo" na geometria euclidiana. Durante a idade média e no Renascimento a formulação axiomática da geometria euclidiana começou a ser debatida, o que resultou no surgimento de geometrias não-euclidianas no início do século XIX. A conclusão foi que poderíamos conceber dois tipos de geometrias: a geometria física, que ocorre na natureza, e as geometrias abstratas, meramente lógicas, as quais podem ser formuladas em uma forma puramente axiomáticas sem necessariamente ter uma contrapartida na Natureza.

Em 1854, Riemann[11] tentou responder a pergunta: *por que todas essas geometrias são lógica e matematicamente possíveis?* Embora Riemann não tenha conseguido apresentar uma resposta peremptória à essa pergunta, conseguiu elaborá-la em uma linguagem matemática precisa, e também desenvolveu as bases do que viria a se tornar a atual geometria riemanniana. Além disso, uma observação importante feita por Riemann é que a geometria física deve ser determinada empiricamente, e não pode ser obtida *a priori*.

Em 1868, von Helmholtz tentou determinar qual das geometrias riemannianas possíveis é a que se manifesta na Natureza. A conclusão de seu argumento, baseada na existência de corpos rígidos, é que apenas a geometria euclidiana é possível fisicamente. O trabalho de von Helmholtz [12] tem o mérito de ser o primeiro em que se aborda explicitamente o problema do espaço. No entanto, o argumento de Helmholtz é um tanto quanto falacioso

porque supõe precisamente o que se quer demonstrar, portanto, não pode ser considerado como um argumento válido [13].

Mesmo ainda sem ter sido resolvido de forma satisfatória, o problema do espaço foi esquecido até o início do século XX, quando em 1915 Einstein desenvolveu a teoria da Relatividade Geral, que propõe que a geometria física seja riemanniana. A questão que, então, se colocou, deixou de ser qual geometria riemanniana ocorre na natureza, mas sim, determinar por que essa geometria é riemanniana?

Deve-se a H. Poincaré uma intrigante análise do problema e uma resposta que não o resolve inteiramente. Segundo ele, os princípios da geometria não são derivados da experiência, nem são juízos cuja verdade se imponha irrestritamente ao espírito, como os juízos lógicos; são convenções em cuja escolha a experiência nos guia, são definições dissimuladas [15]. De forma que nenhuma geometria é mais "verdadeira" que outra no que concerne a representação da realidade física. Mas a experiência aparentemente nos tem sugerido que a geometria riemanniana é mais "cômoda".

O problema foi reformulado em 1923 por H. Weyl, que aliás foi quem lhe deu o nome: *das Raumproblem*, que quer dizer, "Problema do Espaço". Para Weyl, mais fundamental que explicar por quê a geometria física seria ou não riemanniana é explicar o caráter fundamental da métrica da geometria física [14]. No entanto, Weyl estava realmente interessado em justificar a geometria que ele tinha introduzido recentemente. A geometria de Weyl que levou posteriormente ao conceito de teorias de calibre e que abordaremos com mais detalhes ao longo deste trabalho

Como sabemos a física teórica teve desenvolvimentos importantes durante o século XX. Além da Relatividade geral, a Mecânica Quântica foi desenvolvida, a qual foi capaz de explicar os processos atômicos e moleculares. A quantização do campo eletromagnético deu origem a eletrodinâmica quântica, cuja precisão é até hoje a teoria mais fina da Física. Neste contexto, as tentativas para resolver o problema do espaço, pelo menos no que diz respeito a natureza da geometria do espaço-tempo, adentraram os fundamentos teóricos da Relatividade geral e da Mecânica Quântica. De fato, algumas questões inerentes a natureza do espaço-tempo ainda encontram-se por resolver. Por exemplo, a quantização do campo gravitacional não se fez possível dentro do programa de quantização das demais interações, devido a diversas inconsistências matemáticas. Isso levou a física teórica a considerar outras teorias em que o campo gravitacional aparece quantizado, como por exemplo a Teoria das

2.1 A questão da dimensionalidade do espaço

A idéia de que o nosso espaço-tempo pode ter mais de quatro dimensões tem se tornado um tema recorrente na pesquisa em Física teórica contemporânea. Tal idéia foi primeiro conjecturada por Nordström [17], em 1914 (antes da conclusão da RG), cujo objetivo era a unificação da gravitação e do eletromagnetismo. A mesma idéia básica foi retomada alguns anos mais tarde pelo matemático T. Kaluza [19]. Kaluza, assumiu a existência de uma quinta dimensão, e foi capaz de mostrar que as equações básicas do eletromagnetismo (equações de Maxwell) também poderiam ser deduzidas das equações de Einstein escritas em um espaço de cinco dimensões. A teoria de Kaluza, mais tarde conhecida como a teoria Kaluza-Klein (após a contribuição do físico Klein)[20] tornou-se o ponto de partida para muitas teorias de dimensões superiores. Nos anos setenta, a teoria de Kaluza-Klein foi generalizada para incluir campos de calibre mais gerais [21][22], o que exigiu a introdução de outras dimensões além da quinta já proposta pela teoria de Kaluza. Estes novos desenvolvimentos levaram à teoria das cordas nos anos oitenta [24], e também às teorias de dimensões superiores na década de noventa. Entre estas, destaca-se a teoria das D-branas [26], o cenário *mundo-brana* [27][28] e o modelo de *matéria induzida* [29].

Na maioria das teorias que utilizam dimensões extras, o espaço-tempo 4-dimensional é concebido como uma hipersuperfície imersa em uma variedade de dimensão maior, muitas vezes denominada na literatura por *bulk*[30]. Quanto à geometria desta hipersuperfície, em geral, tem sido assumido uma estrutura riemanniana. Esta hipótese é, talvez, essencial para evitar possíveis conflitos com a teoria bem estabelecida da relatividade geral que opera em um ambiente riemanniano. Entretanto, podemos encontrar na literatura vários trabalhos que utilizam geometrias não-riemannianas como a de Weyl para descrever fenômenos anômalos na cosmologia e na astrofísica como, por exemplo [31][32][33][34][35]. Por outro lado, no quadro de dimensões superiores, com muito poucas exceções, não tem havido discussão sobre o tipo de geometria do *bulk*. Poucas tentativas de ampliar esse cenário têm aparecido recentemente na literatura, onde a geometria de Weyl e Riemann-Cartan são considerados como possibilidades viáveis para a geometria do *bulk*[36][37][38],[39][40][41].

Capítulo 3

Prolegômenos Matemáticos

Aqui não será possível apresentar mais que um rudimento do vasto e interessante mundo da geometria diferencial. Vamos apenas fazer desfilar algumas das idéias de certos resultados mais diretamente relacionados com o que nos interessa: o carácter geométrico da teoria clássica de campos.

Primordialmente, o estudo de superfícies regulares inalga a nossa intuição da geometria diferencial, contudo, o conceito de variedade diferenciável nos permite generalizar e formalizar a definição de superfície, independentemente do espaço exterior. O vocabulário da disciplina faz uso de terminologias usuais em topografia: a representação plana da superfície da Terra é um problema que tem ocupado um papel central na geometria durante a história. As regiões da Terra são representadas por cartas ou mapas, que são colecionadas em um livro para formar um atlas, um conjunto de cartas para todo o planeta. É importante salientar, que esse conceito além de ser multi-dimensional foi introduzido por Riemann de forma a fazer a distinção entre a existência de um contínuo espacial e sua estrutura métrica. Isso é, a estrutura métrica é uma estrutura distinta ao conceito de variedade diferenciável.

Falando em espaço contínuo, é difícil imaginar um problema físico que não envolva um certo tipo do espaço contínuo. Por exemplo o espaço tridimensional físico, espaço-tempo em quatro dimensões, o espaço de fase para um problema em mecânica clássica ou quântica, o espaço de todos os estados de equilíbrio termodinâmico, ou algum espaço ainda mais abstrato.

É importante ressaltar, que em todo essas notas, as variedades diferenciáveis aqui con-

sideradas satisfazem sempre os *Axiomas de Hausdorff*¹ e o *Axioma da base enumerável*².

Para termos práticos em nossas notas a palavra "diferenciável" significará de classe C^∞ . Escreveremos $M^n = M$ para indicar uma variedade diferenciável, n indicará a dimensão de M . Utilizaremos também a convenção de Einstein, que implica na omissão do somatório, quando um índice é repetido duas vezes num mesmo termo de uma equação, entendendo-se que há uma somatória sobre todos os valores desses índices.

3.1 Definição de Variedade Diferenciável

Uma variedade diferenciável n -dimensional é um conjunto M munido de uma família $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tal que:

1. Cada $\varphi_\alpha : U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um mapeamento injetor de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M e é denominado uma parametrização local de M .
2. $\bigcup_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha) = M$.
3. Se $W = \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, a aplicação $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$ é um difeomorfismo⁴ entre os abertos $\varphi_\alpha^{-1}(W)$ e $\varphi_\beta^{-1}(W)$, contidos em $\mathbb{R}^n$.
4. A família $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é denominada **atlas** de M e deve ser maximal em relação às condições anteriores.

O atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ também denominado *estrutura diferenciável*, induz de forma natural uma topologia em M , definindo-se que $W \subseteq M$ é *aberto* se $\varphi_\alpha^{-1}(W) \cap \varphi_\alpha(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto para todo $\alpha \in \{0, 1, \dots, n\}$. De fato, segue de (1) que M e $\emptyset$ são abertos. As condições relativas à união e à interseção finita de abertos decorrem das relações

$$\varphi_\alpha^{-1}\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) = \bigcup_\alpha \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha),$$

¹*Axioma de Hausdorff*: Dados dois pontos distintos de M existem vizinhanças destes dois pontos que não se intersectam.

²Axioma da base enumerável: M pode ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas (diz-se então que M tem base enumerável).

³Continuamente derivável em todas as ordens.

⁴Função diferenciável com inversa diferenciável

$$\varphi_\alpha^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} U_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha} \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha),$$

A idéia por trás do conceito de variedade diferenciável é a de um espaço que pode ser curvo e possuir topologias complicadas, mas que localmente se assemelha ao $\mathbb{R}^n$. Dessa forma, as condições (1)-(3) da **Definição 1** garantem que toda variedade pode ser mapeada mediante cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, desde que cartas distintas possam ser transformadas uma nas outras quando sobrepostas. O propósito da condição (4) é evitar que dois espaços equivalentes, munidos de atlas diferentes, figurem como variedades distintas.

De agora em diante, quando nos referirmos a uma n -variedade diferenciável, o faremos indicando por M^n , o índice n indicando a dimensão de M .

3.2 Aplicações entre variedades

Definição 1 *Sejam M^n e N^m duas variedades e uma aplicação $f : M \rightarrow N$, f é dita diferenciável em $p \in M$ se dada uma carta $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ em $f(p)$ existe uma outra carta $\varphi_\beta : U_\beta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ em p tal que $f(\varphi_\beta(U_\beta)) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$, aplicação $\varphi_\alpha^{-1} \circ f \circ \varphi_\beta : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\varphi_\beta^{-1}(p)$. A aplicação f é diferenciável em um aberto de M se é diferenciável em todos os pontos desse aberto.*

3.3 Espaço Tangente

O conceito de espaço tangente surge como uma generalização do que na teoria das superfícies em $\mathbb{R}^3$, chamamos plano tangente. A noção de vetor tangente a uma variedade também nos permitirá generalizar o conceito de derivadas direcionais em $\mathbb{R}^n$. Existem várias formas equivalentes de definir o conceito de vetor tangente a uma variedade. Aqui vamos seguir um caminho que, embora possa parecer abstrato a primeira vista, vai nos permitir construir os conceitos necessários para introduzir a noção de derivada direcional de um tensor em uma variedade de uma forma mais direta.

Definição 2 *Sejam $p \in M$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida em M , com $\mathcal{D}(M)$ sendo o conjunto de todas as funções diferenciáveis de M em $\mathbb{R}$. O vetor tangente a*

M no ponto p é uma aplicação

$$v : \mathcal{D}(M) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad \mapsto v_p(f),$$

tal que sejam satisfeitas

i)

$$v(af + bg) = av(f) + bv(g), (\text{Condição de linearidade}).$$

ii)

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g) \text{ para } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } f, g \in \mathcal{D}(M). \text{ (Regra de Leibniz).}$$

Definimos como sendo o espaço tangente à variedade no ponto $p \in M$ o conjunto $T_p M$ de todos vetores tangentes em $p \in M$.

3.4 Curvas

Definição 3 Seja M uma variedade diferenciável. Então, uma aplicação

$$\alpha : t \in I_\epsilon =]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow M$$

é chamada de curva. Dizemos que a curva α é diferenciável em $0 \in I_\epsilon$ se existir uma carta local (U, φ) de M em torno de $p = \alpha(0)$ tal que a curva $c_\varphi(t) = \varphi^{-1} \circ \alpha : I_\epsilon \longrightarrow \mathbb{R}^n$ seja diferenciável na origem. O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}(M).$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow M$ com $p = \alpha(0)$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por $T_p M$.

Se escolhermos um sistema de coordenadas locais $\varphi_a : U_\alpha \longrightarrow M^n$ em $p = \varphi_a(0)$, podemos exprimir a função f e a curva α nesta parametrização por

$$(f \circ \varphi_a)(q) = f(x^1, \dots, x^n), \quad q = (x^1, \dots, x^n) \in U_\alpha,$$

e

$$\varphi^{-1} \circ \alpha(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)),$$

respectivamente. Portanto, restringido f a $\alpha(t)$, obtemos

$$\frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \Big|_q = \frac{d}{dt} f(x^1(t), \dots, x^n(t)) \Big|_q = \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} &= \dot{x}^i(q) \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \left(\dot{x}^i(q) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_q \right) (f) \\ &= \alpha'(0)(f). \end{aligned} \quad (3.2)$$

É possível mostrar que o conceito de tangência entre curvas não depende da carta local escolhida, e ainda, que a noção de tangência entre curvas define uma relação de equivalência. No entanto, por hora, nos basta a definição acima [42].

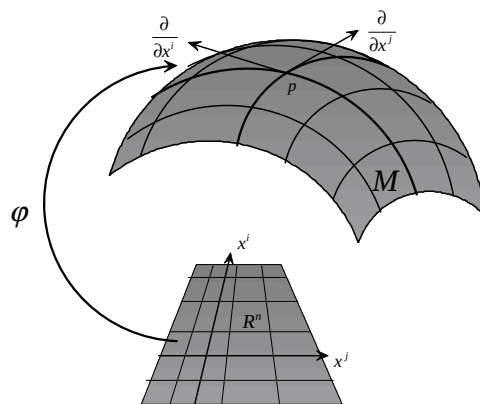


Figura 3.1: Base do espaço tangente em $p \in M$.

3.5 Aplicações entre Variedades

De posse da noção de espaço tangente, podemos estender às variedades diferenciáveis a noção de diferencial de uma aplicação. Recordemos que a ideia básica do cálculo diferencial é aproximar objetos suaves por objetos lineares. Para a introdução da noção de espaço tangente em $p \in M$, a variedade M foi definida de tal forma, que, nas proximidades de cada ponto $p \in M$, M é localmente $T_p M$. Agora, aproximamos um aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow N$ nas proximidades de cada ponto $p \in M$ por uma transformação linear de espaços tangentes.

Proposição 1 *Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis e seja $\varphi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M$ e cada $v \in T_p M$, escolha uma curva $\alpha(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com*

$\alpha(0) = p$, $\dot{\alpha}(0) = v$. consideremos a curva $\beta = \varphi \circ \alpha$ curva em N . A aplicação (**diferencial** de φ) $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$ dada por $d\varphi_p(v) = \dot{\beta}(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de $\alpha(t)$.

Prova: Tomemos $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ e $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^m$ sistemas de coordenadas locais em p e $\varphi(p)$ respectivamente. Escrevendo φ nestes sistemas temos

$$\begin{aligned}\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}(q) &= (y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^m(x^1, \dots, x^n)) \\ q &= (x^1, \dots, x^n) \in U, \quad (y^1, \dots, y^m) \in V.\end{aligned}$$

Todavia, escrevendo α em $\mathbf{x}$, obtemos

$$\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)).$$

Portanto,

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \beta(t) = (y^1(x^1(t), \dots, x^n(t)), \dots, y^m(x^1(t), \dots, x^n(t))).$$

Com efeito, a expressão de $\dot{\beta}(0)$ na base $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ de $T_{\varphi(p)} N$, associada ao sistema de coordenadas $\mathbf{y}$, é dada por

$$\left. \frac{d}{dt} \beta(t) \right|_0 = \left. \frac{d}{dt} (y^1(x^1(t), \dots, x^n(t)), \dots, y^m(x^1(t), \dots, x^n(t))) \right|_0 \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}\dot{\beta}(0) &= \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^i} \dot{x}^i(0), \dots, \frac{\partial y^m}{\partial x^i} \dot{x}^i(0) \right) \\ &= \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)_{m \times n} v^j.\end{aligned} \quad (3.4)$$

A relação (3.3) mostra imediatamente que $\dot{\beta}(0)$ não depende da escolha de uma curva α em particular.

Portanto, $d\varphi_p$ é uma aplicação linear de $T_p M$ e $T_{\varphi(p)} N$, cuja matriz jacobiana nas bases associadas aos sistemas de coordenadas locais $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é precisamente a matriz

$$\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)_{m \times n}$$

Observemos primeiro que se $v \in T_p M$, então, a aplicação $d\varphi(v) : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ envia cada $g \in \mathcal{D}(M)$ a um vetor tangente $v(g \circ \varphi) \in T_{\varphi(p)} N$. Para provar a propriedade de Leibniz, por exemplo, tomemos $f, g \in \mathcal{D}(M)$ e em seguida,

$$\begin{aligned}d\varphi(v)(fg) &= v(fg \circ \varphi) = v((f \circ \varphi)(g \circ \varphi)) = v(f \circ \varphi)g(\varphi) + f(\varphi)v(g \circ \varphi) \\ &= [d\varphi(v)f]g(\varphi) + f(\varphi)[d\varphi(v)g].\end{aligned}$$

Definição 4 *Sejam M e N duas variedades diferenciáveis e $\varphi : M \rightarrow N$ uma aplicação bijetora. Diz-se que φ é um difeomorfismo entre M e N se φ e φ^{-1} são diferenciáveis.*

Aplicações identidade em variedades, composições de difeomorfismos, e inversas dos difeomorfismos são difeomorfismos. Se existe um difeomorfismo φ de $M \rightarrow N$, Então M e N são ditas difeomorfas em φ . A teoria de variedade diferenciáveis pode ser definida como o estudo daqueles objetos preservados por difeomorfismos. Deste modo, variedades difeomorfas são as mesmas do ponto de vista de teoria de variedade.

Definição 5 *Seja $\varphi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Denominamos diferencial de φ em $p \in M$ à transformação linear $d_p\varphi : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$ definida por:*

$$d\varphi_p(v)(f) \equiv v(f \circ \varphi),$$

onde $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é qualquer função diferenciável definida numa vizinhança de p .

Notação 1 *Ao longo do trabalho poderemos usar também a notação φ_* pra designar a diferencial e φ^* para designar sua inversa ou **pulbak** quando existir.*

As propriedades da diferencial de uma aplicação entre variedades caracterizam os predicados locais da aplicação. A seguinte definição distingue os tipos principais de aplicações diferenciáveis:

Definição 6 [43] *Seja $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^m$ uma aplicação diferenciável.*

- (a) φ diz-se uma **imersão** se $\varphi_* : T_pM_1 \rightarrow T_{\varphi(p)}M_2$ é injetiva, para todo o $p \in M_1$. Neste caso deveremos ter $n \leq m$;
- (b) Se φ é uma imersão e além disso, é um homeomorfismo sobre $f(M_1) \subset M_2$, quando nesta se considera a topologia induzida pela topologia de M_2 , diz-se que f é um **mergulho**.
- (c) φ diz-se uma **submersão** se $\varphi_* : T_pM_1 \rightarrow T_{\varphi(p)}M_2$ é sobrejetiva, para todo $p \in M_1$. Neste caso deveremos ter $n \geq m$;
- (d) φ diz-se um **étale**⁵ se $\varphi_* : T_pM_1 \rightarrow T_{\varphi(p)}M_2$ é um isomorfismo para todo o $p \in M_1$.

⁵Visto que uma *étale* não é mais que uma aplicação que é, simultaneamente, uma imersão e uma submersão, basicamente uma *étale* é a mesma coisa que um difeomorfismo local.

As imersões, submersões e étales possuem formas canônicas locais. Todas elas são casos particulares de um teorema geral denominado **teorema do posto**. O posto de uma transformação linear T entre dois espaços vetoriais A e B é a dimensão de sua imagem, isto é, o número máximo de vetores de sua base, ou, equivalentemente, o número máximo de colunas linearmente independentes de uma matriz dessa transformação T . O posto de uma aplicação diferenciável $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ em um ponto $x \in U$ é, por definição o posto de sua diferencial $\varphi_* : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Teorema 1 *Seja $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável e $p \in M_1$. Se a aplicação $\varphi_* : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ tem posto constante r , para todo o ponto q na vizinhança de p , então, existem coordenadas locais $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ centradas em p e coordenadas locais $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^m)$ centradas em $f(p)$, tais que:*

$$\psi^{-1} \circ \varphi \circ \phi(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0).$$

Aqui omitiremos a prova deste teorema, para não onerar desnecessariamente nossa exposição. Para maiores esclarecimentos consultar[45].

3.6 Fibrados Vetoriais e Campos Vetoriais

Definição 7 *Seja M^n uma variedade e o conjunto $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\}$ é uma variedade de dimensão $2n$ denominada **fibrado tangente**⁶ de M .*

Definição 8 *Um campo vetorial X em uma variedade diferenciável M é uma aplicação do tipo*

$$p \in M \longmapsto X_p \in T_p M.$$

Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM .

Muitas vezes é conveniente pensar um campo vetorial como uma aplicação $X : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ de modo que:

$$(Xf)(p) = X_p f.$$

⁶Este é o espaço natural quando estamos tratando de questões que envolvem posições e velocidades, como no caso da Mecânica analítica. Por enquanto, nos basta saber que podemos reunir os espaços tangente de M em uma variedade diferenciável. Mais adiante, após introduzirmos outros conceitos, voltaremos a nos defrontar com essas estruturas.

Dizemos que X é diferenciável se $Xf \in \mathcal{D}(M)$ para todo $f \in \mathcal{D}(M)$. Denotaremos por $T(M)$ o espaço dos campos vetoriais diferenciáveis em M . Cada campo vetorial é uma aplicação $\mathbb{R}$ -linear de $\mathcal{D}(M)$ em $\mathcal{D}(M)$, isto é:

$$X(fg) = gXf + fXg.$$

Inversamente, toda aplicação com esta propriedade é um campo vetorial diferenciável. Pode-se escrever em um dado sistema de coordenadas locais

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (3.5)$$

onde cada $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ é a base associada a φ_α , $i = 1, \dots, n$.

Campos vetoriais e curvas integrais

Conforme definimos anteriormente, um campo vetorial é uma regra que associa um vetor a cada ponto de M . Todavia, cada ponto de M possui seu próprio espaço vetorial tangente, e assim, um campo vetorial seleciona um vetor de cada espaço. Mas, se uma dada curva possui um vetor tangente em cada ponto, nos vem, a seguinte questão: Como saber se a resíproca é verdadeira, isso é, se dado um campo vetorial arbitrário, será possível começar em um ponto p e encontrar uma curva cujo vetor tangente em qualquer ponto é sempre o campo vetorial? A resposta é sim, para campos de vetores diferenciáveis, essas curvas são denominadas curvas integrais do campo vetorial.

A resposta a nossa questão está ligada à existência do *fluxo local* de um campo vetorial.

Teorema 2 *Seja $X \in TM$ e seja $p \in M$. Então existem uma vizinhança $U \subset M$ de p , um intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon) \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, e uma aplicação diferenciável $\varphi : \mathbb{R} \times U \rightarrow M$ tais que a curva $t \rightarrow \varphi(t, q)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $q \in U$, é a única curva que satisfaz*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = X(\varphi(t, q)) \text{ e } \varphi(0, q) = q.$$

Uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ que satisfaz às condições $\dot{\alpha}(t) = X(\alpha(t))$ e $\alpha(0) = q$ é chamada a *trajetória* do campo X que passa por q , em $t = 0$. O teorema acima assegura que por cada ponto de uma certa vizinhança passa uma única trajetória de X e que a aplicação assim obtida depende diferencialmente de t e da "condição inicial" q . Comumente se utiliza a notação $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ e denominamos $\varphi_t : U \rightarrow M$ o fluxo local de X em M .

Devido a características garantidas pelo teorema acima sabemos que aplicação φ_t é um difeomorfismo, salientamos ainda o fato de que φ_0 é a aplicação identidade, os difeomorfismos φ_t formam um grupo local, pois:

$$\varphi_{t+A} = \varphi_t \circ \varphi_A, \quad \varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}.$$

Dizemos que os difeomorfismos φ_t definem um grupo local. Desta forma, o nosso campo vetorial X origina um grupo local uniparamétrico de difeomorfismos.

3.6.1 Colchetes de Lie

Lema 1 *Dados dois campos vetoriais X e Y em M , existe um único campo de vetores de M , denotado por $[X, Y]$ e chamado colchete de Lie, tal que para todo $f \in \mathcal{D}(M)$ temos $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$.*

Prova: Basta determinar uma (única) expressão local de um campo com esta propriedade. De fato, se $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ são expressões locais de X e Y num sistema de coordenadas (U, φ) de M , temos:

$$X(Yf) = X \left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} Y^j. \quad (3.6)$$

Por outro lado,

$$Y(Xf) = Y \left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} + Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} X^i.$$

Portanto,

$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (3.7)$$

define um campo sobre M .

Esta operação possui as seguintes propriedades:

Proposição 2 *Se X, Y e $Z \in TM$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$, então:*

(a) $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticomutatividade),

(b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (linearidade)

(c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidade de Jacobi)

$$(d) [fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

O colchete $[X, Y]$ pode também ser interpretado como uma derivação de Y ao longo das "trajetórias" de X . Esta interpretação emerge da seguinte proposição:

Proposição 3 *Sejam $X, Y \in TM$, seja $p \in M$, e seja φ_t o fluxo local de X em uma vizinhança U de p . Então*

$$[X, Y](p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y - d\varphi_t(Y)](\varphi_t(p)).$$

Prova: Tomamos $f \in \mathcal{D}(M)$ então:

$$\begin{aligned} [X, Y]f &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y - d\varphi_t(Y)]f(\varphi_t(p)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(Yf)(\varphi_t(p)) - (d\varphi_t(Y)f)(\varphi_t(p))] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(Yf)(\varphi_t(p)) - Y(f \circ \varphi_t)(p)] \end{aligned}$$

Expandindo $(f \circ \varphi_t)(p)$ como

$$(f \circ \varphi_t)(p) = f(p) + tXf(p) + t^2 \dots$$

temos

$$\begin{aligned} [X, Y]f &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(Yf)(\varphi_t(p)) - Yf(p) - tYXf(p) - t^2 \dots] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(Yf)(\varphi_t(p)) - (Yf)(p)] - YXf(p) \\ &= XYf(p) - YXf(p) \\ &= ([X, Y])f(p). \end{aligned}$$

Definição 9 *Seja M uma variedade diferenciável e $p \in M$. O espaço $T_p M$ denomina-se espaço tangente a M em p . O dual $T_p^* M$ é denominado espaço cotangente a M em p e seus elementos são chamados de 1-formas.*

Teorema 3 *Seja M uma variedade n -dimensional. Os conjuntos $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} : i = 1, \dots, n \right\}$ (via isomorfismo) e $\{dx^j : j = 1, \dots, n\}$ são bases duais para $T_p M$ e $T_p^* M$, respectivamente, denominadas bases locais de coordenadas (ou canônicas).*

Prova: O conjunto $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i} : i = 1, \dots, n\right\}$ é base para $T_p M$. Seja $df \in T_p^* M$, definido por

$$df(v) = v(f). \quad (3.8)$$

$\in \mathbb{R}$. Como a dimensão de $T_p M$ é finita, a afirmação de que o conjunto $\{dx^j : j = 1, \dots, n\}$ é uma base de $T_p^* M$ decorre da equação(3.8), fazendo-se $f = x^j$ e $v = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

O dual $T_p^* M$ é denominado espaço cotangente a M em p e seus elementos são denominados 1-formas.

3.7 Métrica semi-riemanniana

Definição 10 Uma métrica semi-riemanniana g em uma variedade diferenciável M de dimensão n é definida como um campo tensorial, do tipo $(0, 2)$, simétrico e não degenerado, isto é, uma correspondência que associa à cada ponto p de M uma forma bilinear g tal que: $g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo às seguintes propriedades:

- $g(V, W) = g(W, V), \forall V, W \in T_p M$;
- Se $g(V, W) = 0, \forall W \in T_p M$, então, V é um campo vetorial nulo.

Definição 11 Definimos a **assinatura** de uma métrica semi-riemanniana g de M , como o número $A(0 \leq A \leq n = \dim(M))$ dado por

$$A(g) = m - k$$

onde m é o número de autovalores positivos de g e k o número de autovalores negativos de g .

Se o campo tensorial g é não degenerado e contínuo, então a assinatura do tensor métrico g é constante em todo M . É sempre possível escolher uma base adequada $\{E_\alpha\}$ em $T_p M$, para a qual as componentes do tensor métrico covariante assumem os valores ± 1 , ou seja,

$$g_{\alpha\beta} = g(E_\alpha, E_\beta) = \eta_{\alpha\beta}$$

os elementos $\eta_{\alpha\beta}$ são definidos por

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag.} \left(\underbrace{+1, \dots, +1}_{\frac{1}{2}(n+A)}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{\frac{1}{2}(n-A)} \right),$$

n a dimensão da variedade.

Definição 12 Uma métrica g é dita *rimanniana* se $A(g) = n$.

Notemos que essa definição equivale a dizer que a mesma é positivo definida.

Definição 13 [46] Uma métrica g *semi-riemanniana* é dita *lorentziana* (espaço-tempo) se $A = 2 - n$. Ou ainda, seja $X \in T_p M$ um vetor não nulo, então X é de uma em três classes distintas:

- Se $g(X, X) > 0$; X é do tipo "tempo".
- Se $g(X, X) < 0$; X é do tipo "espaço".
- Se $g(X, X) = 0$; X é do tipo "luz".

Se a métrica é não degenerada e contínua, os vetores de tipo luz de $T_p M$ formam em cada ponto de M um duplo cone (o cone de luz), o qual separa os vetores do tipo tempo dos do tipo espaço. Esta separação dá origem a "**estrutura causal**" nessa variedade.

Dada uma métrica g em M , podemos definir a "norma" de um vetor $X_p \in T_p M$ do tipo espaço ou do tipo tempo como

$$|\cdot|_g : T_p M \xrightarrow[X]{} \mathbb{R} \quad \mapsto |X|_g := \sqrt{|g(X, X)|}$$

A partir desta definição, podemos introduzir o conceito de ângulo entre os vetores pela relação:

$$\cos \angle(X_p, Y_p) := \frac{g(X_p, Y_p)}{[|g(X_p, X_p)| |g(Y_p, Y_p)|]^{1/2}},$$

$\forall X_p, Y_p \in T_p M$, com $|X_p| \neq 0$ e $|Y_p| \neq 0$.

Portanto, dizemos que dois vetores $\forall X_p, Y_p \in T_p M$ são ortogonais quando satisfazem a condição $g(X_p, Y_p) = 0$.

Em um sistema de coordenadas locais $\{x^\alpha\}$ ao qual estão associadas as bases $\{\partial_\alpha\}$ e $\{dx^\alpha\}$ temos

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta$$

$$g_{\alpha\beta} = g(\partial_\alpha, \partial_\beta)$$

As quantidades definidas pela métrica no espaço tangente estão relacionados com a medida na variedade pela seguinte definição:

Definição 14 A restrição de uma curva $\alpha(t)$ a um intervalo fechado $[a, b] \subset I$ chama-se um **segmento**. O comprimento entre dois pontos $p = \alpha(a)$ e $q = \alpha(b)$ em M , é dado por

$$ds = \int \sqrt{|g(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})|} dt.$$

Em coordenadas $\{x^\alpha\}$ a equação acima toma a forma explícita

$$ds = \int \left| g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \right|^{1/2} dt$$

e, portanto, podemos escrever, simbolicamente, a distância ao longo de uma curva entre dois pontos infinitamente próximos um do outro, sob a forma

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Em termos de componentes da métrica g dizer que a métrica é não degenerada significa dizer que

$$\det |g_{\alpha\beta}| \neq 0.$$

3.7.1 Construções elementares associadas às métricas semi-riemannianas

Uma das propriedades elementares mais importantes das métricas semi-riemannianas é que elas nos permitem converter vetores em covetores e vice-versa. Dada uma métrica g em M , esta define uma aplicação de $T(M) \mapsto T^*(M)$ levando um vetor X em um covetor $X^\flat$ definido por

$$X^\flat(Y) := g(X, Y).$$

Em coordenadas

$$X^\flat = g(X^i \partial_{i,\cdot}) = g_{ij} X^i dx^j.$$

Usualmente escrevemos $X^\flat$ em coordenadas como $X^\flat = X_j dx^j$, onde

$$X_j := g_{ij} X^i.$$

Diz-se, então, que $X^\flat$ é obtido de X via *abaixamento de índice*. (por isso a operação é designada pela anotação musical $\flat$ (*bemol*). A matriz de bemol em termos de uma base de coordenada é a própria matriz g . Já que a matriz de g é inverssível; denotamos o inverso do operador *bemol* a aplicação de $\omega \in T^*(M) \mapsto \omega^\sharp \in T(M)$, chamado *sustenido* tal que

$$\omega(Y) = g(\omega^\sharp, Y).$$

Em coordenadas, $\omega^\sharp$ tem componentes

$$\omega^i := g^{ij} \omega_j,$$

onde, por definição, g^{ij} são as componentes da matriz inversa $(g_{ij})^{-1}$. Diz-se então que $\omega^\sharp$ é obtido via *levantamento de índice*.

Provavelmente a aplicação mais importante do operador agudo se dá na extensão do operador gradiente clássico para variedades semi-riemannianas. Se $f \in \mathcal{D}(M)$ em uma variedade semi-riemanniana (M, g) , o gradiente de f é o campo de vetor $\text{grad}(f) := df^\sharp$. Dizemos, então, que $\text{grad}(f)$ foi obtido de df por levantamento de índice. Examinando as definições, podemos ver que $\text{grad}(f)$ é caracterizado por

$$df(Y) = Y(f) = g(\text{grad}(f), Y) \quad \forall Y \in TM. \quad (3.9)$$

Sua expressão em coordenadas é

$$\text{grad}(f) = g^{ij} \partial_i f \partial_j.$$

Os operadores bemol e agudo podem ser aplicados a tensores de qualquer grau, em qualquer posição de índice, convertendo tensores covariantes em contravariantes ou vice-versa. Por exemplo, dado o 3-tensor misto $B_{i \, k}^{\, l}$, podemos abaixar seu índice do meio para obter um 3-tensor B_{ijk} covariante, isso é

$$B_{ijk} = g_{jl} B_{i \, k}^{\, l}.$$

Na notação independente de coordenadas temos

$$B^b(X, Y, Z) := B(X, Y^b, Z).$$

(Claro, se um tensor tem mais de um índice superior, a anotação bemol não nos diz qual dos índices foi abaixado. Em tais casos, temos que explicar em palavras o que é queremos dizer.)

Nessas condições, podemos definir o tensor $g^{\alpha\beta}$ tal que

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\lambda} = \delta_\lambda^\alpha, \quad (3.10)$$

ou seja, a matriz $(g^{\alpha\beta})$ formada pelas componentes do tensor é a inversa da matriz $(g_{\alpha\beta})$ formada pelas componentes de g . As componentes $g^{\alpha\beta}$ são chamadas de componentes do tensor métrico contravariante, o que significa que podemos estabelecer um isomorfismo entre as componentes dos tensores covariante e contravariante como segue:

Lema 2 *Seja g uma métrica não degenerada. Dado $X \in T_p M$, então, a transformação*

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \rightarrow & T_p^* M \\ X & \mapsto & C_1^1(g \otimes X) \end{array}$$

define um isomorfismo.

Se $g_{\alpha\beta}$ e X^β são as componentes do tensor métrico g e do vetor X , então, as componentes da 1-forma $C_1^1(g \otimes X)$ ⁷, as quais denominamos por X_α são dadas por

$$X_\alpha = g_{\alpha\beta} X^\beta. \quad (3.11)$$

Uma vez que a métrica é não degenerada, usando (3.10) podemos determinar as componentes do vetor X em termos das componentes do $C_1^1(g \otimes X)$, então

$$\begin{aligned} g^{\mu\alpha} X_\alpha &= g^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} X^\beta \\ &= \delta_\beta^\mu X^\beta \\ &= X^\mu. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Essa transformação e sua inversa são conhecidas na literatura como "subir" e "baixar" índices. Assim, dada uma métrica não degenerada podemos dizer que as componentes covariantes X_α e contravariantes X^α de um "vetor" X , estão relacionadas biunivocamente pelas equações (3.11) e (3.12). Esta operação pode ser estendida para levantar e baixar qualquer índice tensorial (ou índices de aplicações sucessivas de uma mesma operação). Por exemplo, considere um tensor de ordem 3 do tipo T_1^2 , com componentes $T_\gamma^{\alpha\beta}$, então, aplicando as equações (3.11) e (3.12) obtemos os seguintes tensores:

$$T^{\alpha\beta\gamma} = g^{\sigma\gamma} T_\sigma^{\alpha\beta}$$

$$T_{\beta\gamma}^\alpha = g_{\beta\sigma} T_\gamma^{\alpha\sigma}$$

$$T_\alpha{}^\beta{}_\gamma = g_{\alpha\sigma} T_\gamma^{\sigma\beta}$$

$$T_{\alpha\beta}{}^\gamma = g_{\alpha\sigma} g_{\beta\rho} g^{\gamma\eta} T^{\sigma\rho}_\eta$$

⁷A operação C_1^1 de contração, está explicada no apêndice

$$T_{\alpha}{}^{\beta\gamma} = g_{\alpha\sigma} g^{\gamma\eta} T^{\sigma\beta}_{\eta}.$$

Esse isomorfismo induzido pelo tensor métrico, significa necessariamente que temos de considerar que todos os tensores de ordem 3, cujas componentes estão relacionadas pelas equações acima, como representações diferentes de um mesmo objeto abstrato T . Dora-vante, vamos assumir isso para todos os tensores. Devemos notar que, neste caso, é necessário respeitar a ordem dos índices nos componentes de ambos os tensores covariantes e contravariantes. Um caso particular importante é o tensor métrico g , onde as componentes covariantes $g^{\alpha\beta}$, contravariantes $g_{\alpha\beta}$, e mistas δ^{α}_{β} relacionadas pela equação (3.10) são representações diferentes do mesmo objeto geométrico, o tensor g .

Lema 3 *Em qualquer variedade semi-riemanniana (M^n, g) orientada⁸, há uma única n -forma dV satisfazendo a propriedade que $dV(E_1, \dots, E_n) = 1$, com $(E_1, \dots, E_n)$ base ortonormal orientada em $T_p M$.*

Esta n -forma dV (algumas vezes denotada por dV_g para maior clareza) é chamada de elemento de volume (semi-riemanniano).

Prova: Para provar o lema acima, basta mostrar que a expressão de dV em relação a qualquer referencial local $\{E_i\}$ é

$$dV = \sqrt{-g} dE^1 \wedge \dots \wedge dE^n,$$

onde g é o determinante de (g_{ij}) e $\{E^i\}$ é o dual de $\{E_i\}$.

A importância fundamental do elemento de volume semi-riemanniano se assenta no fato de que ele nos permite integrar funções e não apenas formas diferenciais.

3.8 Isometrias

Uma isometria é o tipo especial de aplicação que expressa a noção de isomorfismo para variedades semi-riemannianas, isso é, as isometrias estabelecem uma noção de equivalência entre variedades semi-riemannianas.

⁸Diz-se que M é orientável se M admite uma estrutura diferenciável $\{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}$ tal que:

Para todo par α, β , com $\varphi_{\alpha}(U_{\alpha}) \cap \varphi_{\beta}(U_{\beta}) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $\varphi_{\beta} \circ \varphi_{\alpha}^{-1}$ tem determinante positivo.

Definição 15 *Sejam M e N variedades semi-riemannianas com tensores métrico g_M e g_N .*

Uma isometria de M em N é um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$ tal que

$$\varphi^*(g_N) = g_M.$$

Explicitamente isso quer dizer que

$$g_M(u, v)_p = g_M(d\varphi(u), d\varphi(v))_{\varphi(p)}, \text{ para todo } p \in M \text{ e } u, v \in T_p M.$$

Uma isometria $\varphi : (M, g) \rightarrow (M, g)$ é chamada de isometria de M . Uma composição de isometrias e a inversa de uma isometria são isometria. Então, o conjunto de isometrias de M é um grupo, chamado de grupo de isometrias de M geralmente denotado por $\mathcal{I}(M)$.

Capítulo 4

Geometria de uma conexão afim

A noção de derivada covariante traz consigo várias consequências para a geometria em uma variedade diferenciável. Dela emergem conceitos como curvatura e transporte paralelo, que podem ser definidos em situações mais gerais que a geometria riemanniana. Para este propósito é suficiente definir uma noção de derivação de campos vetoriais com certas propriedades denominada conexão afim. O estudo das propriedades de conexões afins estimulou a criação de várias "estruturas geométricas" (em variedades diferenciáveis) mais gerais que a geometria riemanniana.

Como já foi mencionado anteriormente, o caminho para a construção de novas teorias físicas que possam compreender os fenômenos gravitacionais e cosmológicos que atualmente não encontram na RG sua explicação derradeira, pode residir na concepção de uma nova geometria para o espaço-tempo de dimensão arbitrária.

Como dito acima, esta estrutura suplementar que introduzimos em uma variedade diferenciável nos permite determinar a variação covariante dos campos tensoriais. Além disso, este objeto geométrico figura nas principais "realizações" das geometrias que aqui objetivamos explorar. Para entendermos o porquê disto, faremos uma ligeira revisão histórica e conceitual deste conceito.

Em certo sentido, os estudos "primitivos" da teoria das conexões começaram com Christoffel, em 1869. Christoffel introduziu o que hoje conhecemos como símbolos de Christoffel e também o que hoje conhecemos como o tensor de Riemann–Christoffel [56][13]. O trabalho de Grassmann acerca da geometria afim abstraiu os conceitos de linhas paralelas, elementos de plano, etc.

Em 1917, Hessenberg [63] desenvolveu uma geometria diferencial baseada em uma n -upla de vetores independentes e desenvolveu um tipo de diferenciação baseada nisso. O artigo de *Hessenberg* [62] começa com uma referência à teoria da relatividade:

[...]Devido à importância que as formas diferenciais quadráticas desempenham na teoria da relatividade, a questão de se e como o aparelho formal e difícil desta teoria pode ser simplificado, ou senão ultrapassado, ganhando novo significado (p. 187) "[63] (Hessenberg 1917).

Ao referir-se ao cálculo de transformações de Christoffel [62], Hessenberg afirma que seu objetivo é

[...]substituí-lo por um argumento geométrico (p. 187) [63] (Hessenberg 1917).

Ele critica o "métodos formais de formação" de várias quantidades, porque não trazem à tona o significado essencialmente intuitivo dos invariantes e covariantes tão necessários à geometria e à Física. Ele destaca o artigo de Grassmann,

[...] O acesso ao seu significado geométrico é mostrado de forma que, para mim, parece surpreendentemente simples por meio de idéias de Grassmann"(p. 192) [63] (Hessenberg 1917).

Outro extraordinário avanço para a geometria aconteceu quando Levi-Civita, em 1917, reinterpretou o cálculo puramente tensorial de Ricci (lemma de Ricci) [64] como uma descrição analítica de um conceito que ele chamou de transporte paralelo. Com efeito, ele transpôs o conceito de "campo vetorial paralelo", ao longo de uma curva definida em um espaço euclidiano ordinário E^3 , para o caso generalizado de uma curva imersa em uma variedade riemanniana n — dimensional.

Depois da introdução de paralelismo Riemanniano por Hessenberg e Levi-Civita e independentemente por Schouten 1918 [65], sua generalização se apresentou como um passo natural. Já que a abstração (a distância) do paralelismo afim do paralelismo em geometria Euclidiana já havia sido implementada, a abstração (infinitesimal) em uma variedade riemanniana é imediatamente sugerida por analogia. Em 1918, Weyl define uma conexão afim em uma variedade. Em 1919, König[68], analisando o conceito à luz da contribuição de Weyl, chamou a atenção para o fato que a conexão afim definida por Weyl [67] não é necessariamente simétrica. Até agora, esta é a primeira referência para o uso de uma conexão assimétrica, embora evidentemente fosse considerado por Weyl, que não a usava pelas razões previamente mencionadas[3].

Em 1923, Elie Joseph Cartan[69] generaliza a noção de conexão e impulsiona o estudo de maneira grandiosa. Em seu trabalho apresenta vários tipos de conexões: linear, linha, afim projetiva e conforme. A idéia de Cartan foi associar a cada ponto da variedade, um espaço homogêneo, de mesma dimensão que a variedade e em algum sentido tangente a ela. Introduz a holonomia e especifica as noções de curvatura e torção de uma conexão afim em termo de formas diferenciais. Cartan também mostrou que sua nova noção de conexão poderia ser aplicada às geometrias do programa de "Erlangen", de Felix Klein¹.

Em 1950, Jean-Louis Koszul concebeu uma estrutura algébrica para considerar uma conexão como um operador diferencial. Esta definição, hoje chamada de conexão de Koszul, foi posteriormente adotada pela maioria da comunidade de geômetras, uma vez que nela efetiva-se a correspondência analítica entre diferenciação covariante e o transporte paralelo em uma linguagem algébrica. A teoria de conexões será concluída por volta de 1950 por Charles Ehresmann [71], com a consumação da teoria das conexões em fibrados.

4.1 Conexão Afim

Neste ponto, seguimos com a exposição usual da teoria de conexões.

Definição 16 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade M é uma aplicação*

$$\nabla : \underset{(X,Y)}{TM \times TM} \rightarrow \underset{\nabla_X Y}{TM}$$

tal que:

(I) $\nabla_X Y$ é um tensor no argumento X , isto é

$$\nabla_{fV+gW}Z = f\nabla_V Z + g\nabla_W Z$$

$\forall f, g \in \mathcal{D}(M)$, $\forall X, Y, Z \in TM$. Isto significa que o operador ∇_X (derivada) em p depende apenas da direção X no ponto p .

(ii) $\nabla_X Y$ é linear em Y , isso é

$$\nabla_X(\alpha Y + Z) = \alpha \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall X, Y, Z \in TM.$$

¹Em 1872, Felix Klein propôs o seu famoso programa Erlanger que declara: a geometria é o estudo de invariantes com respeito a um grupo de transformação.

(iii) $\nabla_V(fW) = f\nabla_VW + V(f)W$, onde $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Da propriedade (i) temos que ∇Y é um campo tensorial de tipo $(1, 1)$, a derivada covariante de Y , que, quando associado ao com o campo vetorial X produz o vetor $\nabla_X Y$. Portanto, a propriedade (iii) pode ainda ser escrita como

$$\nabla(fY) = df \otimes Y + f\nabla Y.$$

Podemos expressar a conexão em termos de uma carta ou sistema de coordenadas locais (U, φ) de M . Mais precisamente, se $X, Y \in TM$, então, representamos campos usando esse sistema de coordenadas como $X = X^i \partial_i$ e $Y = Y^j \partial_j$. Portanto, se denotamos $\frac{\partial}{\partial x_i}$ por ∂_i e se ∇ é uma conexão afim sobre M , teremos $\nabla_X Y$ escrito na seguinte forma

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i \partial_i} Y = X^i \nabla_{\partial_i} (Y^j \partial_j) = X^i Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j + X^i \partial_i (Y^j) \partial_j. \quad (4.1)$$

Como $\nabla_{\partial_i} \partial_j$ é um campo vetorial, temos que em um ponto $p \in M$, podemos escrever

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j := \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Os coeficientes $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(p)$ são funções diferenciáveis, e são denominados **coeficientes da conexão** no sistema de coordenadas locais considerado. Assim, teremos a expressão (4.1)

$$\nabla_X Y = \{X^i Y^j \Gamma_{ij}^k + X^i \partial_i (Y^k)\} \partial_k, \quad (4.2)$$

o que mostra que $\nabla_X Y$ em um ponto p de M depende apenas de $X^i(p)$, $Y^j(p)$ e das derivadas $\partial_i (Y^k)(p)$.

Em termos de componentes temos

$$(\nabla_X Y)^k = X^i Y^j \Gamma_{ij}^k + X^i \partial_i (Y^k).$$

Notação 2 *É comum na literatura caracterizar a derivada covariante das componentes de um campo vetorial, pela expressão acima.*

A noção de conexão fornece, portanto, uma maneira de derivar vetores na direção de vetores.

Precisamos, agora, introduzir o conceito de *derivada covariante* de um campo vetorial $V \in TM$ ao longo de uma curva particular. Para esse fim, façamos, então, a seguinte proposição:

Definição 17 *Seja M uma variedade munida de uma conexão afim ∇ . Existe, então, uma única correspondência que associa a um campo vetorial V definido ao longo de uma curva $\gamma(t)$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de $\gamma(t)$, denominado derivada covariante de V ao longo de $\gamma(t)$, tal que:*

- $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$;
- $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde $W \in TM$ ao longo de γ e $f \in \mathcal{D}(M)$ restrita ao longo de $\gamma(t)$;
- Se V é induzido por $Y \in TM$, isto é $V(t) = Y(\gamma(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} Y$.

Aqui introduzimos esses atributos inerentes à derivada covariante via uma definição. No entanto, os mesmos podem ser alcançados via uma proposição, demonstrável a partir das propriedades da conexão afim. Numa variedade diferenciável não existe intrinsecamente a noção de paralelismo entre vetores definidos em pontos diferentes. A proposição a seguir define tal noção.

Definição 18 *Dizemos que $X \in TM$ é paralelo se a derivada covariante de X ao longo de γ é tal que*

$$\frac{DX}{dt} = 0. \quad (4.3)$$

Ou ainda pode-se dizer que X foi transportado paralelamente ao longo de γ .

4.1.1 Derivada covariante de campos tensoriais

Uma conexão afim em M fornece uma maneira de definir a derivada covariante de campos tensoriais. De fato, qualquer conexão afim em M induz automaticamente as conexões em todos os fibrados tensoriais em M . Isso nos dá uma forma de calcular as derivadas covariantes de qualquer campo tensorial.

Lema 4 *Seja ∇ uma conexão afim em M . Existe uma única conexão em cada fibrado tensorial $T_s^r(M)$, também denotada por ∇ , de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas.*

I) Em TM , ∇ é a mesma conexão de M .

II) Em $\mathcal{D}(M)$, ∇ é dado pela diferenciação ordinária de funções:

$$\nabla_X f = X(f).$$

III) ∇ obedece à regra de Leibniz em relação ao produto tensorial:

$$\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G). \text{ onde } F, G \in T_s^r(M).$$

IV ∇ comuta com contrações

$$\nabla_X(\mathbf{C}(F)) = \nabla_X(\mathbf{C}(F)),$$

onde $\mathbf{C}$ denota a contração com respeito a algum par de índices.

Essa conexão também satisfaz:

V Para $Y \in TM$ e ω uma 1-forma,

$$\nabla_X(\omega(Y)) = (\nabla_X \omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y).$$

VI Para $F \in T_A^r(M)$, campos vetoriais Y_i e 1-formas ω^j ,

$$\begin{aligned} (\nabla_X F)(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_A) &= X(F(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_A)) - \\ &\quad - \sum_{j=1}^r F(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^j, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_A) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^A F(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, \nabla_X Y^i, Y_A). \end{aligned}$$

Demonstração: Primeiramente, notemos que as propriedades (I)-(IV) implicam (V) e (VI).

Para uma 1-forma ω e um campo vetorial Y , $\omega = \mathbf{C}(\omega \otimes Y)$. Logo, por (IV e (III),

$$\nabla_X(\omega(Y)) = \mathbf{C}(\nabla_X(\omega \otimes Y)) = \mathbf{C}((\nabla_X \omega) \otimes Y + \omega \otimes (\nabla_X Y)),$$

e, portanto a afirmamação (V) segue das anteriores. (II) e (V) implicam (VI). Como (VI) define uma conexão em $T_A^r(M)$, (VI) vale para campos tensoriais arbitrários. Dessa forma, (VI) é a única conexão que satistaz (I) - (IV).

4.2 Não-metricidade

Definição 19 *Seja M uma variedade diferenciável com uma métrica semi-riemanniana $g(\cdot, \cdot)$. A conexão é dita não métrica, quando para toda curva diferenciável $\lambda(t)$ e quaisquer pares de campos vetoriais X e Y paralelos ao longo de $\lambda(t)$ e $Z = \dot{\lambda}(t)$ campo tangente de $\lambda(t)$, tivermos*

$$\left. \frac{d}{dt} g(X, Y) \right|_{\lambda(t)} \neq 0. \quad (4.4)$$

Proposição 4 *Seja M uma variedade diferenciável com uma métrica semi-riemanniana $g(\cdot, \cdot)$, Uma conexão ∇ em M é dita não métrica se e somente se para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $\lambda : I \rightarrow M$ tem-se que*

$$\frac{d}{dt} g(V, W) = \left(\frac{D}{dt} g \right) (V, W) + g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right), \quad t \in I. \quad (4.5)$$

Demonstração: A equação (4.5) certamente implica em (4.4), posto que, sendo V, W paralelos em $\lambda(t)$ temos que (4.5) torna-se

$$\frac{d}{dt} g(V, W) = \left(\frac{D}{dt} g \right) (V, W). \quad (4.6)$$

Portanto, mostraremos apenas a recíproca. Escolhemos uma base $\{e_1(t_0), \dots, e_n(t_0)\}$ de $T_{\lambda(t_0)}M$, $t_0 \in I$. E façamos a extensão paralela de cada um dos vetores desta base ao longo de $\lambda(t)$.

Com efeito, podemos escrever

$$V = V^i e_i, \quad W = W^j e_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

Segue-se daí que

$$\frac{DV}{dt} = \frac{dV^i}{dt} e_i, \quad \frac{DW}{dt} = \frac{dW^j}{dt} e_j.$$

Logo

$$\begin{aligned} g\left(\frac{DV}{dt}, W\right) + g\left(V, \frac{DW}{dt}\right) &= \left(\frac{dV^i}{dt} W^j + V^i \frac{dW^j}{dt}\right) g_{ij} \\ &= \frac{d}{dt} (V^i W^j) g_{ij} \\ &= \frac{d}{dt} (V^i W^j g_{ij}) - \frac{dg_{ij}}{dt} V^i W^j \\ &= \frac{d}{dt} g(V, W) - \left(\frac{D}{dt} g\right) (V, W). \end{aligned}$$

Conseqüentemente, temos o seguinte corolário:

Corolário 1 *Seja $Q(Z, X, Y) = (\nabla_Z g)(X, Y)$ uma aplicação trilinear $Q : TM \times TM \times TM \rightarrow TM$, denominada não-metricidade. Dizemos que uma conexão é não-métrica, se e só se,*

$$Q(Z, X, Y) = Z(g(X, Y)) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y), \quad Z, X, Y \in TM. \quad (4.7)$$

Podemos notar que, além disso, Q é simétrica nos dois últimos argumentos. De fato, esta simetria vem de sua relação com g .

4.2.1 Geodésicas

Uma conexão afim ∇ em M permite definir de maneira invariante a derivada direcional de um campo vetorial ao longo de uma curva, e assim calcular a aceleração de uma curva com respeito a essa conexão. Basicamente uma geodésica é uma curva em M na qual seu vetor tangente é paralelo a si mesmo, segundo o paralelismo instituído pela conexão ∇ .

Definição 20 *Uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ em uma variedade diferenciável M munida de uma conexão afim ∇ é dita uma geodésica se pra todo $t \in I$ temos $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$.*

Vamos agora determinar a expressão nas coordenadas. Para isto, tomemos um sistema de coordenadas locais (U, x) em torno de $\gamma(t_0)$ em U ,

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

e agora façamos uso da definição de geodésicas, isto é

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{dx_k}{dt} \right) + \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right\} \partial_k = 0$$

Portanto temos:

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} = 0. \quad (4.8)$$

Podendo ainda ser expressa como:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0, \quad (4.9)$$

com $\dot{\gamma} = dx \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$.

Esse sistema de equações fornece as soluções procuradas. Da unicidade das soluções desse sistema resulta a propriedade pela qual um campo vetorial paralelo é tangente a uma dada

curva da variedade, constituindo-se assim uma condição necessária e suficiente para a curva ser uma geodésica.

Dado $p \in M$, a equação (4.9) constitui um problema de valor inicial, com dados iniciais

$$x(0) = p, \quad \dot{\gamma}(0) = v \in T_p M, \quad (4.10)$$

solúvel, visto que o teorema da existência e da unicidade de EDO's assim o garante. Com efeito, rudemente podemos dizer que quando nos deslocamos sobre uma geodésica caminhamos ao longo da "*mesma direção*". Neste sentido, as geodésicas são generalizações das linhas retas do espaço euclidiano. Todavia, do ponto de vista global, sendo M uma variedade semi-riemanniana, decorre então que as geodésicas se comportam de modo bem diferente das linhas retas da geometria euclidiana.

Na definição acima, está implícito que por uma geodésica se entende uma geodésica parametrizada. Existe uma família de parametrizações preferenciais para uma geodésica, as quais permitem que $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ ao longo de γ . De fato, se $\tau = f(t)$ for uma reparametrização $\tilde{\gamma}$ de γ , então

$$\nabla_{\frac{d\tilde{\gamma}}{d\tau}} \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tau} = -\frac{\ddot{f}}{\dot{f}^2} \tilde{\gamma}',$$

Prova-se que existe uma função diferenciável α tal que toda geodésica admite uma reparametrização de forma que

$$\nabla_{\frac{d\gamma}{d\tau}} \frac{d\gamma}{d\tau} = \alpha(\tau) \frac{d\gamma}{d\tau}. \quad (4.11)$$

Então, a menos de uma constante aditiva, a (única) aplicação $f(\tau)$ dada pela solução da equação diferencial.

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} = -\alpha(\tau) \left(\frac{df}{d\tau} \right)^2, \quad (4.12)$$

é uma reparametrização local (enquanto for inversível) de uma geodésica.

Assim, somos levados a seguinte definição:

Definição 21 *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva. Então, γ é uma pré-geodésica se existir uma reparametrização $f : I \rightarrow J$ tal que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ f : J \rightarrow M$ seja uma geodésica.*

Pela definição acima, γ é uma pré-geodésica se, e somente se, a relação (4.12) for satisfeita para alguma função α .

Definição 22 *Quanto às geodésicas em uma variedade lorentziana, distinguimos três situações:*

1. Quando $\epsilon > 0$, γ é uma geodésica temporal e existe uma parametrização tal que

$$g(v, v) = g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 1;$$

2. Quando $\epsilon = 0$, γ é uma geodésica nula ou tipo luz e existe uma parametrização tal que

$$g(v, v) = g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0;$$

3. Finalmente, quando $\epsilon < 0$, γ é uma geodésica espacial e existe uma parametrização tal que

$$g(v, v) = g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = -1;$$

De forma resumida podemos dizer, que sempre é possível reparametrizar uma geodésica, de modo a termos

$$g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = \epsilon, \quad (4.13)$$

onde $\epsilon = 0, \pm 1$.

Partículas materiais (massa de repouso não nula) descrevem trajetórias de tipo tempo, isto é, com $\epsilon = 1$, enquanto que as partículas sem massa (isto é, fótons, grávitons) descrevem trajetórias de tipo-luz, isto é, com $\epsilon = 0$. Trajetórias com $\epsilon = -1$ não têm realidade física, uma vez que um movimento representado por elas violaria a casualidade.

É de se esperar que se γ for uma geodésica, isto é, se sua aceleração for nula, sua parametrização afim seja tal que a norma de sua velocidade seja constante. Contudo, como a aceleração de uma curva depende da conexão tomada em M , a norma do vetor velocidade de uma geodésica também dependerá. Veremos que para a conexão de Levi-Civita as geodésicas têm velocidade constante, enquanto que para conexões mais gerais (em particular para a conexão de Weyl) isso deixa de ser verdade.

Pela equação (4.7), teremos

$$\gamma' g(\gamma', \gamma') = g(\nabla_{\gamma'} \gamma', \gamma') + g(\gamma', \nabla_{\gamma'} \gamma') - Q(\gamma', \gamma', \gamma').$$

Como γ é uma geodésica temos que $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$, portanto

$$\gamma'g(\gamma', \gamma') = -Q(\gamma', \gamma', \gamma').$$

No caso lorentziano teremos que as geodésicas do tipo nulas permanecem como o modulo de seu vetor tangente nulo, já as demais sofrem alterações devido a não metricidade.

4.2.2 Torção

A torção é uma característica da conexão afim e está associada à parte antisimétrica da mesma. Geometricamente, podemos interpretar a torção como discrepância no fechamento dos paralelogramos infinitesimais no plano tangente.

Para introduzirmos o conceito de torção, tomemos o colchete $[X, Y]$ e aplicamos o mesmo em uma função $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$. Então teremos para uma conexão métrica:

$$[X, Y]\phi = X(Y(\phi)) - Y(X\phi) \quad (4.14)$$

$$g([X, Y], \text{grad } \phi) = Xg(Y, \text{grad } \phi) - Yg(X, \text{grad } \phi),$$

onde usamos a propriedade (3.9). Em seguida tomemos a expressão (4.7) e apliquemos a (4.14). Então,

$$[X, Y]\phi = g(\nabla_X Y, \text{grad } \phi) + g(Y, \nabla_X \text{grad } \phi) - g(\nabla_Y X, \text{grad } \phi) - g(X, \nabla_Y \text{grad } \phi)$$

$$g([X, Y], \text{grad } \phi) = g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, \text{grad } \phi) + g(Y, \nabla_X \text{grad } \phi) - g(X, \nabla_Y \text{grad } \phi)$$

$$g(X, \nabla_Y \text{grad } \phi) - g(Y, \nabla_X \text{grad } \phi) = g(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \text{grad } \phi)$$

$$H^\phi(X, Y) - H^\phi(Y, X) = T(X, Y)\phi.$$

Aqui usamos a definição do Hessiano

$$H^\phi(X, Y) = g(X, \nabla_Y \text{grad } \phi).$$

Agora, definimos a aplicação torção da seguinte maneira:

Definição 23 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . A aplicação*

$$T : TM \times TM \times TM$$

dada por:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

é chamada de torção.

Esta aplicação leva à definição do *tensor de torção*, já que T induz em $p \in M$ uma aplicação bilinear $T_p : TM_p \times TM_p \rightarrow TM_p$, onde $T_p(X, Y)$ só depende do valor de X e Y em p .

Uma conexão ∇ é dita compatível com a métrica se, $Q = 0$, isto é, $\nabla_X g = 0$ para todo $X \in TM$ e sem torção (ou simétrica) no caso de $T = 0$.

4.2.3 Tensor de Riemann

A geometria das superfícies de $\mathbb{R}^3$ nos diz que a forma de uma superfície depende de como ele se desvia do plano tangente local. Esta variação do plano tangente local pode ser estudada através da variação do vetor normal à superfície, e é chamada de curvatura extrínseca da superfície. É extrínseca porque depende de uma propriedade que se encontra fora da superfície, contudo, graças ao *teorema Egregium* de Gauss, pode-se mostrar que a curvatura de Gauss depende apenas da primeira forma fundamental (ou métrica da superfície).

Em uma variedade diferenciável o conceito de curvatura intrínseca está ligada a conexão ou mesmo ao conceito de transporte paralelo ao longo de curvas na variedade.

Consideremos duas curvas em uma variedade M , α e β com seus campos vetoriais U e V , se interceptando em um ponto A . Em seguida, fazemos um deslocamento paralelo de V e U ao longo das α curvas e β , respectivamente, como indicado na figura abaixo:

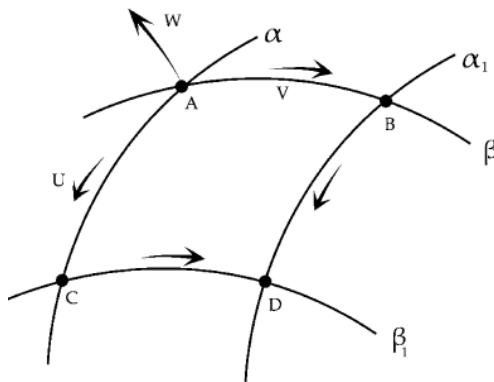


Figura 4.1: Curvatura de Riemann

Nos pontos B e C traçamos curvas α_1 e β_1 com vetores tangente paralelos de U e V , respectivamente, obtendo um paralelogramo. Em seguida, consideremos uma terceiro campo vetorial W (linearmente independente a U e V), no ponto A , e arrastamos ao longo da curva

β de A para B . Em seguida, arrastamos de B para D ao longo da curva α_1 . O resultado dessa operação é o campo vetorial dado pela definição:

Definição 24 A curvatura $R(, ,)$ de uma variedade semi-riemanniana M é uma aplicação $R : TM \times TM \times TM$ dada por :

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (4.15)$$

Uma vez fixados $X, Y \in TM$, podemos considerar o operador curvatura $R(X, Y)$ dado por $R(X, Y) : TM \rightarrow TM$, tal que $R(X, Y)Z = R(X, Y, Z)$.

Lema 5 Seja ∇ uma conexão afim em M e R a curvatura riemanniana. Então, para todo $X, Y, Z \in TM$ temos

(a) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$

(b) Se ∇ for simétrica, então

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

Esta relação é conhecida como primeira identidade de Bianchi, para todo $X, Y, Z \in TM$, e para uma conexão sem torção.

Proposição 5 Vale a segunda identidade de Bianchi, isto é,

$$(\nabla_Z R)(X, Y) + (\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) = 0$$

e para uma conexão livre de torção.

Como o tensor de curvatura em si pode ser bastante complicado, é útil considerar algumas de suas contrações, que trazem informações importantes acerca da curvatura na variedade da conexão escolhida. Vamos agora definir o tensor de Ricci e a curvatura escalar.

Definição 25 Dada uma base ortonormal $\{e_i\}$ em $T_p M$, temos que:

1. A tensor de Ricci em $p \in M$ é definido por

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^m g(R(e_i, X)Y, e_i). \quad (4.16)$$

O tensor de Ricci é bilinear não necessariamente simétrico, isto de fato depende da conexão escolhida.

1. O escalar de curvatura R é definido como

$$R = \sum_{j=1}^m Ric_p(e_j, e_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m g(R(e_i, e_j)e_j, e_i), \quad (4.17)$$

4.3 Geometria não-métrica sem torção

No que diz respeito a medida dos comprimentos em diferentes pontos de uma variedade, temos certos postulados, tais como "podemos comparar o comprimentos medidos em pontos diferentes do espaço" esses postulados encontram-se no cerne da geometria riemanniana. Para quem sabe resguardar sua ligação profunda com a geometria das superfícies no espaço Euclidiano, contudo, como já foi exposto de um ponto de vista histórico, são possíveis geometrias em que a comparação de comprimentos infinitesimais seja determinada pelo tensor de não-metricidade.

Proposição 6 *Dada uma variedade com métrica semi-riemanniana (M, g) , existe uma única conexão afim ∇ satisfazendo as condições*

a) $\nabla g = Q$;

b) $T(X, Y) = 0$.

Demonstração: Suponhamos inicialmente a existência de uma tal ∇ . Então, devido a (4.7) podemos fazer

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - Q(X, Y, Z), \quad (4.18)$$

$$Yg(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) - Q(Y, Z, X), \quad (4.19)$$

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) - Q(Z, X, Y), \quad (4.20)$$

Somando (4.18) e (4.19) e subtraindo (4.20), teremos que:

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) - \\ &\quad - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) - Q(X, Y, Z) - Q(Y, Z, X) + Q(Z, X, Y), \end{aligned}$$

ou ainda como ∇ é livre de torção, temos

$$2g(Z, \nabla_Y X) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - [Q(X, Y, Z) + Q(Y, Z, X) - Q(Z, X, Y)] \quad (4.21)$$

$$- [g([X, Z], Y) + g([X, Y], Z) + g([Y, Z], X)]. \quad (4.22)$$

A expressão (4.21) mostra que ∇ está univocamente determinada por g e Q . Portanto, caso exista, ela será única.

Para mostrar a existência, podemos definir ∇ por (4.21). Verifica-se, após breves manipulações, que ∇ está bem definida e que satisfaz às propriedades desejadas.

O caso especial em que $Q = 0$ e $T = 0$ é o caso de uma conexão riemanniana (ou de Levi Civita), isto é, uma conexão de riemanniana é ao mesmo tempo livre torção e onde o tensor métrico é transportado paralelamente.

4.3.1 Conexão de Levi-Civita

Mesmo após termos definido o conceito de conexão afim em uma variedade diferenciável, notamos a existência de certa arbitrariedade quanto a esse conceito. Em uma variedade semi-riemanniana que está munida de um conceito de métrica, que por sua vez, nos permite medir o comprimento de vetores, temos que estabelecer a maneira pela qual se darão as relações entre estes dois conceitos. Se optarmos por uma conexão tal que o comprimento dos vetores definido por $g(X, Y)$ se mantenha constante ao transportarmos os vetores paralelamente $\nabla_{\dot{\gamma}} X = 0$, $\nabla_{\dot{\gamma}} Y = 0$, ao longo de uma curva γ , então, esta conexão é denominada por *conexão de Levi-Civita* ou riemanniana. Decorrerá daí, que a conexão de Levi-Civita estará completamente determinada em virtude do extraordinário teorema de Levi-Civita.

Definição 26 *Seja M uma variedade semi-riemanniana munida de uma conexão afim ∇ e uma métrica g . ∇ é dita compatível com g , se*

$$\nabla_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \text{ para todo } X, Y, Z \in TM. \quad (4.23)$$

Proposição 7 *Dada uma variedade semi-riemanniana (M, g) , existe uma única conexão ∇ , chamada de conexão de Levi-Civita, tal que:*

- *A torção T é identicamente nula, isto é, ∇ é simétrica.*

- ∇ é compatível com a métrica.

Prova: Usando 4.23 podemos escrever as seguintes igualdades:

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad (4.24)$$

$$Yg(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X), \quad (4.25)$$

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y), \quad (4.26)$$

Após algumas manipulações triviais, chegamos à seguinte equação:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + \quad (4.27)$$

$$+ g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X). \quad (4.28)$$

Essa é a equação de Koszul, que por sua vez, indica que ∇ está unicamente determinada por g .

Também podemos escrever, convenientemente,

$$2g(\nabla_X Y, Z) = F(X, Y, Z), \quad (4.29)$$

onde

$$F(X, Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X). \quad (4.30)$$

A conexão mencionada no teorema acima é denominada *conexão de Levi-Civita* (ou riemanniana) de M [49],

Seja (U, x^i) qualquer sistema de coordenada local. Substituindo (3.7) e (4.2) em (4.30) após algumas manipulações segue-se que:

$$\Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} \quad (4.31)$$

que é exatamente a expressão dos símbolos de *Christoffel de primeira espécie*.

Ou ainda, tendo em vista que a matriz (g_{lk}) admite uma inversa (g^{lk}) , temos:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{km} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} \quad (4.32)$$

A equação (4.32) é a expressão já bem conhecida dos *símbolos de Christoffel de segunda espécie* em termos da métrica.

Proposição 8 *Seja $\varphi : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ uma isometria. Então:*

(a) *φ leva a conexão riemanniana ∇ de g na conexão riemanniana $\tilde{\nabla}$ de $\tilde{g}$, no sentido de*

$$\varphi_*(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{(\varphi_* X)}(\varphi_* Y) \quad \text{com } X, Y \in TM.$$

(b) *Seja γ uma curva em M e V um campo vetorial ao longo de γ , então*

$$\varphi_* \left(\frac{D}{dt} V \right) = \frac{\tilde{D}}{dt} (\varphi_* V).$$

(c) *φ leva geodésicas em geodésicas: se γ é a geodésica em M com ponto inicial p e velocidade inicial $V(p)$, então, $\varphi \circ \gamma$ é uma geodésica em $\tilde{M}$ com ponto inicial $\varphi(p)$ e velocidade inicial $\varphi_* V(p)$.*

Para parte (a), define-se uma aplicação

$$\varphi^* \tilde{\nabla} : TM \times TM \rightarrow TM$$

por

$$(\varphi^* \tilde{\nabla})_X Y = \varphi_*^{-1} \left(\tilde{\nabla}_{(\varphi_* X)} (\varphi_* Y) \right).$$

Mostra-se que $\varphi^* \tilde{\nabla}$ é uma conexão em M (chamada de a conexão "pullback"), e que é simétrica e compatível com g . Então $\varphi^* \tilde{\nabla} = \nabla$ por causa da unicidade da conexão riemanniana. Para parte (b), define-se um operador $\varphi^*(\tilde{D}/dt) : TM \times TM \rightarrow TM$ de uma forma semelhante e mostra-se que é igual a $\tilde{D}/dt$.

4.4 Geometria de Weyl

Em 1918 Hermann Weyl, no intento de estabelecer uma teoria unificada dos campos gravitacional e eletromagnético, formulou uma teoria geométrica do espaço-tempo.

Dado que na teoria da relatividade geral o tensor métrico g representa o potencial gravitacional e a teoria é invariante por transformações gerais de coordenadas, então, Weyl mostrou como g que pudesse ser vinculada a invariância de calibre, tal qual se faz com as equações do eletromagnetismo.

O extraordinário é que Weyl encontrou a pista que perseguia ao eliminar o postulado concernente a comparação das longitudes introduzindo um fator não-métrico dado por uma

1-forma ω denominada campo de Weyl, que na teoria original de Weyl representa o potencial eletromagnético.

Einstein apresentou o artigo de Weyl [66], a Academia de Ciências de Berlim. Ele acrescentou um breve comentário crítico para explicar por que ele duvidava da viabilidade da interpretação física proposta por Weyl.

Como a unificação de Weyl era construída fundamentalmente sobre a propriedade da simetria do campo de calibre, e esta ideia acabou por ser de importância duradoura, embora não em sua forma original. Poucas semanas depois, em um segundo artigo [67], Weyl apresentou o mesmo tema colocando a sua teoria na perspectiva mais ampla da geometria diferencial. Weyl generaliza as idéias de Levi-Civita de transporte paralelo em uma variedade riemanniana à de uma conexão afim (logicamente) independente de qualquer métrica.

Idéias básicas de Weyl para a generalização da geometria riemanniana em seus artigos de 1918 podem ser listadas como se segue:

1. Generalizar o conceito de deslocamento paralelo de Levi-Civita para variedades riemannianas para um tipo abstrato de "deslocamento paralelo", não ligado a priori a uma estrutura métrica, $\Gamma = (\Gamma_{jk}^i)$ denominado conexão afim.
2. Construir a geometria do ponto de vista puramente infinitesimal, isso é, a possibilidade de comparar diretamente quantidades métricas (observáveis físicos) em diferentes pontos da variedade M deve ser considerada um defeito da geometria riemanniana, que é devido à sua origem histórica na teoria superfície gaussiana.

Um dos maiores divulgadores da teoria de Weyl foi Eddington que incluiu uma exposição da teoria de uma generalização em seu livro [1]. Uma primeira exposição moderna da geometria de Weyl é encontrada no artigo de 1970 por Gerald B. Folland[72] seguido por [73], [74].

Definimos a equivalência conforme das métricas riemannianas da seguinte maneira:

Definição 27 *Duas métricas riemannianas g e $\tilde{g}$ em M são **conformalmente equivalentes** se e só se $\tilde{g} = e^f g$ onde f é uma função suave em M . (O uso da função exponencial é um modo de assegurar a positividade e seu uso nos trará outras vantagens que ficarão claras mais adiante).*

Uma **estrutura conforme** em M é uma classe de equivalência $[g]$ de métricas riemannianas em M . Uma variedade com uma estrutura conforme é chamada de *variedade conforme*.

Se a $\dim(M) \geq 3$, temos que duas métricas lorentzianas pertencem à mesma estrutura conforme se, e somente se, possuírem a mesma *estrutura causal*, pois uma transformação conforme não altera os cones de luz. No caso de métricas riemannianas (positivas definidas), uma estrutura conforme preserva os ângulos entre vetores e a razão entre suas normas.

Note que uma aplicação $f : M \longrightarrow \bar{M}$ é conforme se preserva ângulos entre vetores. Por exemplo, para dois vetores $u, v \in T_p \bar{M}$,

$$\cos \bar{\theta} = \frac{\bar{g}_{ij} u^i v^j}{\sqrt{\bar{g}_{ab} u^a u^b} \sqrt{\bar{g}_{kl} v^k v^l}} = \frac{e^f g_{ij} u^i v^j}{e^j \sqrt{g_{ab} u^a u^b} \sqrt{g_{kl} v^k v^l}} = \cos \theta.$$

O seguinte lema mostra como uma transformação conforme altera a conexão de Levi-Civita:

Lema 6 Se $\bar{g} = e^f g$, então $\bar{\nabla} = \nabla + B$ com o campo tensorial simétrico $(2, 1)$ B dado por

$$B(X, Y) := \frac{1}{2} [df(X) + df(Y) - g(X, Y) \text{grad } f]. \quad (4.33)$$

Prova: Como $(\nabla_X g)(Y, Z) = 0$ teremos então

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X \bar{g})(Y, Z) &= X \bar{g}(Y, Z) - \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z) - \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X Z) \\ &= d\Omega(X)g(Y, Z) + \bar{g}(B(X, Y), Z) + \bar{g}(Y, B(X, Z)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

esta é a conexão de Levi-Civita para $\bar{g}$.

Dada uma conexão na variedade, um método de compararmos comprimentos de vetores em diferentes pontos é a partir do transporte paralelo segundo a mesma. No entanto, apesar de cada métrica da estrutura conforme $[g]$ de M definir a conexão de Levi-Civita associada, essas conexões são diferentes para diferentes métricas de $[g]$. Desse modo, ainda não temos uma conexão linear na variedade que, de certo modo, reproduza as características de sua estrutura de Weyl.

Definição 28 Uma **estrutura de Weyl** em uma variedade conforme $(M, [g])$ é uma aplicação $F : [g] \rightarrow \Lambda^1(M)^2$ satisfazendo

$$F(e^f g) = F(g) + df, \text{ com } f \in \mathcal{D}(M)$$

² $\Lambda^1(M)$ é o espaço das 1-formas diferenciáveis em M .

isto é, onde g é um elemento da classe $[g]$. Uma variedade com uma estrutura de Weyl é chamada uma **variedade de Weyl**. Uma métrica g e uma 1-forma ω determinam uma única estrutura de Weyl, definida a partir de $F(g) = \omega$.

A estrutura de Weyl em uma variedade com métrica semi-riemanniana pode ser entendida da seguinte forma: as grandezas geométricas fundamentais deverão ter uma dupla invariância:

i) Invariantes por *difeomorfismos*.

ii) Invariantes por *transformações de Weyl*. Isto é para cada mudança conforme da métrica

$$\tilde{g} = e^f g \text{ temos associada uma transformação em } \omega \text{ tal que } \tilde{\omega} = \omega + df.$$

Transporte paralelo de Weyl

Medida é comparação, assim, para Weyl, quando comprimentos em diferentes pontos têm de ser comparados, é necessário leva-los ao um mesmo ponto, contudo, contudo, o resultado pode depender da curva percorrida ao delocar-se de um ponto para outro. Vejamos como se dá a translação do comprimento de um vetor(de um espaço tangente $T_p M$) ao longo de uma curva no caso de uma geometria de Weyl. Uma visão geométrica interessante das propriedades do transporte paralelo de Weyl é a seguinte: seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇^ω , uma métrica g e um campo de Weyl ω . Se ∇^ω é Weyl-compatível, então, para todo par V e $U \in TM$ ambos paralelos ao longo da curva diferenciável $\alpha(\lambda)$, $\alpha : I \rightarrow M$, tomemos uma métrica $g \in [g]$ em $T_a M$ e, então adotamos a seguinte relação de não-metricidade na relação em (4.6), assim, temos então,

$$\left(\frac{d}{d\lambda}g\right)(U, V) = \omega\left(\frac{d}{d\lambda}\right)g(U, V), \text{ para todo } \lambda \in I, \quad (4.34)$$

onde $\frac{d}{d\lambda}$ é o campo vetorial tangente à curva $\alpha(\lambda)$.

Nota 1 Esta relação de não métricidade é invariante frente às transformações de Weyl

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}((e^f g)(U, V)) &= \tilde{\omega}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)e^f g(U, V) \\ e^f\left(\frac{d}{d\lambda}g\right)(U, V) &= \omega\left(\frac{d}{d\lambda}\right)e^f g(U, V) + df\left(\frac{d}{d\lambda}\right)e^f g(U, V) - e^f g(U, V)\frac{d}{d\lambda}(f) \\ \left(\frac{d}{d\lambda}g\right)(U, V) &= \omega\left(\frac{d}{d\lambda}\right)g(U, V). \end{aligned}$$

Integrando (4.34) ao longo da curva $\alpha(\lambda)$, a partir de um ponto $a = \alpha(\lambda_0)$, obteremos

$$\bar{g}(V(\lambda), U(\lambda)) = g(V(\lambda_0), U(\lambda_0)) e^{\int_{\lambda_0}^{\lambda} \omega(\frac{d}{d\tau}) d\tau}. \quad (4.35)$$

Consideremos o conjunto de todas as curvas fechadas $\alpha : [a; b] \in \mathbb{R} \rightarrow M$, ou seja, com $\alpha(a) = \alpha(b)$. Com efeito, a equação

$$\bar{g}(V(b), U(b)) = g(V(a), U(a)) e^{\int_a^b \omega(\frac{d}{d\tau}) d\tau}, \quad (4.36)$$

$\bar{g}$ é a translação de g_a para o ponto b ao longo de $\alpha(\lambda)$

Notemos que a expressão é consistente, isto é, independe da escolha de $g \in [g]$. De fato, seja $f \in \mathcal{D}(M)$, tal que $f(p) = 1$. Se ainda quisermos que os elementos deste grupo correspondam puramente a uma isometria, então, devemos ter que

$$\oint \omega(\frac{d}{d\tau}) d\tau = 0,$$

para qualquer curva fechada.

Portanto, a partir do teorema de Stokes, ω deve ser uma forma exata, ou seja, existe uma função escalar ϕ , tal que $\omega = d\phi$. Este caso, é frequentemente chamado na literatura de Weyl integrável.

Em uma **variedade de Weyl** M^m munida da conexão afim ∇^ω e uma métrica riemanniana g , ∇^ω é dita ω -compatível com g , se

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + \omega(X)g(Y, Z), \quad (4.37)$$

para todo $X, Y, Z \in TM(M)$,

onde temos que

$$(\nabla_X^\omega g)(Y, Z) = \omega(X)g(Y, Z).$$

Proposição 9 *Dada uma variedade de Weyl (M, g, ∇^ω) existe uma única conexão ∇^ω , denominada conexão de Weyl de M , tal que:*

1. A torção T é identicamente nula, ou ainda, podemos dizer que ∇^ω é simétrica.
2. ∇^ω é ω -compatível dada por

$$\nabla_Y^\omega X = \nabla_Y X - \frac{1}{2}[\omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X, Y)\omega^\sharp].$$

onde denotamos por ∇ a conexão de Levi-Civita de g .

Demonstração

Tomemos a equação (4.21) e tomamos $Q = \omega \otimes g$ e logo teremos que

$$2g(Z, \nabla_Y^\omega X) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - [\omega(X)g(Y, Z) + \omega(Y)g(Z, X) - \omega(Z)g(X, Y)] - [g([X, Z], Y) + g([X, Y], Z) + g([Y, Z], X)];$$

$$\begin{aligned} g(Z, \nabla_Y^\omega X) &= g(Z, \nabla_Y X) - \frac{1}{2}[\omega(X)g(Y, Z) + \omega(Y)g(Z, X) - \omega(Z)g(X, Y)] \\ &= g(Z, \nabla_Y X) - \frac{1}{2}[\omega(X)g(Y, Z) + \omega(Y)g(Z, X) - g(\omega^\sharp, Z)g(X, Y)] \\ &= g(Z, \nabla_Y X) - [g(\frac{1}{2}\omega(X)Y, Z) + g(\frac{1}{2}\omega(Y)X, Z) - g\left(\frac{1}{2}g(X, Y)\omega^\sharp, Z\right)] \\ &= g(Z, \nabla_Y X) - g\left(\left[\frac{1}{2}\omega(X)Y + \frac{1}{2}\omega(Y)X - \frac{1}{2}g(X, Y)\omega^\sharp\right], Z\right) \\ &= g(Z, \nabla_Y X) - \frac{1}{2}[\omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X, Y)\omega^\sharp]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla_Y^\omega X = \nabla_Y X - \frac{1}{2}[\omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X, Y)\omega^\sharp], \quad (4.38)$$

A fórmula (4.38) é invariante por transformações de Weyl, pois, a parte $\nabla_Y X$ que depende apenas da métrica g se transforma via uma transformação conforme $e^f g$, com a adição do termo (4.33). Assim, temos:

$$\tilde{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + \frac{1}{2}[df(X) + df(Y) - g(X, Y) \text{grad } f].$$

O termo $\frac{1}{2}[\omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X, Y)\omega^\sharp]$ se transforma da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\tilde{\omega}(X)Y + \tilde{\omega}(Y)X - e^f g(X, Y)\tilde{\omega}^\sharp] &= \frac{1}{2}[\omega(X)Y + \omega(Y)X - e^f g(X, Y)\omega^\sharp] + \\ &+ \frac{1}{2}[df(X) + df(Y) - g(X, Y) \text{grad } f]. \end{aligned}$$

Denotamos por ∇ a conexão de Levi-Civita de g e $\omega^\sharp$ é o dual de ω . Além disso, como $\nabla_Y^\omega X$ é invariante por transformações de Weyl a curvatura R^ω desta conexão também o será.

Escrevemos o tensor de curvatura R^ω de ∇^ω da seguinte forma

$$R^\omega(X, Y, Z) = \nabla_X^\omega \nabla_Y^\omega Z - \nabla_Y^\omega \nabla_X^\omega Z - \nabla_{[X, Y]}^\omega Z$$

Calculando separadamente os três termos:

$$\nabla_Y^\omega \nabla_X^\omega Z = \nabla_Y^\omega [\nabla_X Z - \frac{1}{2} \{ \omega(Z)X + \omega(X)Z - g(Z, X)\omega^\sharp \},$$

com

$$\nabla_Y^\omega \nabla_X Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \frac{1}{2} [\omega(\nabla_X Z)Y + \omega(Y)\nabla_X Z - g(\nabla_X Z, Y)\omega^\sharp], \quad (4.39)$$

e

$$\begin{aligned} & \nabla_Y^\omega [\frac{1}{2} \{ \omega(Z)X + \omega(X)Z - g(Z, X)\omega^\sharp \}] = \\ &= \frac{1}{2} [Y(\omega(Z))X + \omega(Z)\nabla_Y^\omega X + Y(\omega(X))Z + \omega(X)\nabla_Y^\omega Z + -Y(g(Z, X))\omega^\sharp - g(Z, X)\nabla_Y^\omega \omega^\sharp \\ &= \frac{1}{2} \{ Y(\omega(Z))X + \omega(Z)\nabla_Y X + \frac{1}{2} [\omega(Z)\omega(X)Y + \omega(Z)\omega(Y)X - \\ &\quad - \omega(Z)g(X, Y)\omega^\sharp] + Y(\omega(X))Z + \omega(X)\nabla_Y Z + \frac{1}{2} [\omega(X)\omega(Z)Y \\ &\quad + \omega(X)\omega(Y)Z - \omega(X)g(Z, Y)\omega^\sharp] - Y(g(Z, X))\omega^\sharp - g(Z, X)\nabla_Y \omega^\sharp - \\ &\quad - \frac{1}{2} g(Z, X) [\omega(\omega^\sharp)Y + \omega(Y)\omega^\sharp - g(\omega^\sharp, Y)\omega^\sharp] \} \\ &= \frac{1}{2} [Y(\omega(Z))X + \omega(Z)\nabla_Y X + Y(\omega(X))Z + \omega(X)\nabla_Y Z - Y(g(Z, X))\omega^\sharp \\ &\quad - g(Z, X)\nabla_Y \omega^\sharp + \omega(Z)\omega(X)Y] + \frac{1}{4} \{ \omega(Z)\omega(Y)X - \omega(Z)g(X, Y)\omega^\sharp - g(Z, X) |\omega|^2 Y \}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \nabla_Y^\omega \nabla_X^\omega Z &= \nabla_Y \nabla_X Z + \frac{1}{2} \{ \omega(\nabla_X Z)Y + \omega(Y)\nabla_X Z - g(\nabla_X Z, Y)\omega^\sharp \} + \frac{1}{2} \{ Y(\omega(Z))X + \omega(Z)\nabla_Y X + \\ &\quad + Y(\omega(X))Z + \omega(X)\nabla_Y Z - Y(g(Z, X))\omega^\sharp - g(Z, X)\nabla_Y \omega^\sharp + \omega(Z)\omega(X)Y \} + \\ &\quad + \frac{1}{4} \{ \omega(Z)\omega(Y)X - \omega(Z)g(X, Y)\omega^\sharp - g(Z, X) |\omega|^2 Y \}. \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \nabla_X^\omega \nabla_Y^\omega Z &= \nabla_X \nabla_Y Z + \frac{1}{2} [\omega(\nabla_Y Z)X + \omega(X)\nabla_Y Z - g(\nabla_Y Z, X)\omega^\sharp] + \frac{1}{2} [X(\omega(Z))Y + \\ &\quad \omega(Z)\nabla_X Y + X(\omega(Y))Z + \omega(Y)\nabla_X Z - X(g(Z, Y))\omega^\sharp - g(Z, Y)\nabla_X \omega^\sharp + \omega(Z)\omega(Y)X] + \\ &\quad + \frac{1}{4} \{ \omega(Z)\omega(X)Y - \omega(Z)g(X, Y)\omega^\sharp - g(Z, Y) |\omega|^2 X \} \end{aligned}$$

E ainda, o terceiro termo

$$\nabla_{[X,Y]}^\omega Z = \nabla_{[X,Y]} Z - \frac{1}{2} \{ \omega(Z) [X, Y] + \omega([X, Y]) Z - g(Z, [X, Y]) \omega^\# \} \quad (4.40)$$

$$= \nabla_{[X,Y]} Z - \frac{1}{2} \{ \omega(Z) \nabla_X Y - \omega(Z) \nabla_Y X + \omega([X, Y]) Z - g(Z, \nabla_X Y) \omega^\# + \quad (4.41)$$

$$+ g(Z, \nabla_Y X) \omega^\# \}. \quad (4.42)$$

Temos, então³, que: $\nabla_X^\omega \nabla_Y^\omega Z - \nabla_Y^\omega \nabla_X^\omega Z - \nabla_{[X,Y]}^\omega Z =$

$$\begin{aligned} & \nabla_X \nabla_Y Z + \frac{1}{2} \{ \omega(\nabla_Y Z) X + \underbrace{\omega(X) \nabla_Y Z - g(\nabla_Y Z, X) \omega^\#}_1 + \frac{1}{2} \{ X(\omega(Z)) Y + \underbrace{\omega(Z) \nabla_X Y + }_2 \\ & X(\omega(Y)) Z + \\ & + \underbrace{\omega(Y) \nabla_X Z - X(g(Z, Y)) \omega^\# - g(Z, Y) \nabla_X \omega^\# + \omega(Z) \omega(Y) X}_3 + \frac{1}{4} \{ \underbrace{\omega(Z) \omega(X) Y - \omega(Z) g(X, Y) \omega^\# - }_7 \\ & - g(Z, Y) |\omega|^2 X \} - \nabla_Y \nabla_X Z + \frac{1}{2} \{ -\omega(\nabla_X Z) Y - \underbrace{\omega(Y) \nabla_X Z + g(\nabla_X Z, Y) \omega^\#}_3 + \frac{1}{2} \{ -Y(\omega(Z)) X - \\ & - \underbrace{\omega(Z) \nabla_Y X - Y(\omega(X)) Z - \omega(X) \nabla_Y Z + Y(g(Z, X)) \omega^\# + g(Z, X) \nabla_Y \omega^\# - \underbrace{\omega(Z) \omega(X) Y}_7 \} + \\ & \frac{1}{4} \{ -\underbrace{\omega(Z) \omega(Y) X}_6 + \underbrace{\omega(Z) g(X, Y) \omega^\#}_5 + g(Z, X) |\omega|^2 Y \} - \nabla_{[X,Y]} Z + \frac{1}{2} \{ -\underbrace{\omega(Z) \nabla_X Y + }_2 \\ & \underbrace{\omega(Z) \nabla_Y X - \omega([X, Y]) Z + g(Z, \nabla_X Y) \omega^\# - g(Z, \nabla_Y X) \omega^\#}_4 \}. \\ & = R(X, Y) Z + \frac{1}{2} \{ [\omega(\nabla_Y Z) - Y(\omega(Z)) + \frac{1}{2}(\omega(Z) \omega(Y)) - g(Z, Y) |\omega|^2] X + [X(\omega(Z)) - \\ & \omega(\nabla_X Z) \\ & + \frac{1}{2}(\omega(Z) \omega(X) Y + g(Z, X) |\omega|^2] Y + [X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])] Z + \\ & + \underbrace{g(\nabla_X Z, Y) + g(Z, \nabla_X Y) - X(g(Z, Y))}_{-\omega(X)g(Z,Y)} + \underbrace{Y(g(Z, X)) - g(\nabla_Y Z, X) - g(Z, \nabla_Y X)}_{\omega(Y)g(Z,X)} \} \omega^\# + \\ & + g(Z, X) \nabla_Y \omega^\# - g(Z, Y) \nabla_X \omega^\# \}. \\ & = R(X, Y) Z + \frac{1}{2} \{ [\omega(\nabla_Y Z) - Y(\omega(Z)) + \frac{1}{2}(\omega(Z) \omega(Y)) - g(Z, Y) |\omega|^2] X + [X(\omega(Z)) - \\ & \omega(\nabla_X Z) + \\ & \frac{1}{2}(\omega(Z) \omega(X) + g(Z, X) |\omega|^2] Y + [X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])] Z + \\ & + [\omega(Y) g(Z, X) - \omega(X) g(Z, Y)] \omega^\# + g(Z, X) \nabla_Y \omega^\# - g(Z, Y) \nabla_X \omega^\# \}. \end{aligned}$$

Todavia, para que possamos prosseguir em nossas simplificações, vejamos o seguinte

³Para que o leitor acompanhe melhor as simplificações introduzimos números abaixo dos termos equivalentes .

cálculo

$$Y\omega(X) = (\nabla_Y^\omega \omega)(X) + \omega(\nabla_Y^\omega X) \quad (4.43)$$

$$= g(\nabla_Y^\omega \omega)^\sharp, X) + \omega(\nabla_Y X) + \frac{1}{2}[\omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X, Y)\omega^\sharp] \quad (4.44)$$

$$= g(\nabla_Y^\omega \omega)^\sharp, X) + \omega(\nabla_Y X) + \omega(X)\omega(Y) - \frac{1}{2}g(X, Y)|\omega|^2 \quad (4.45)$$

$$= g(\nabla_Y^\omega \omega^\sharp, X) + g(\omega(Y)\omega^\sharp, X) + \omega(\nabla_Y X) + \omega(X)\omega(Y) - \frac{1}{2}g(X, Y)|\omega|^2 \quad (4.46)$$

$$= g(\nabla_Y \omega^\sharp, X) + \omega(\nabla_Y X) + 2\omega(X)\omega(Y) + \frac{1}{2}g(X, Y)|\omega|^2 \quad (4.47)$$

e

$$X\omega(Y) = (\nabla_X^\omega \omega)(Y) + \omega(\nabla_X^\omega Y) \quad (4.48)$$

Subtraindo (4.48) de (4.43) temos

$$\begin{aligned} Y\omega(X) - X\omega(Y) &= (\nabla_Y^\omega \omega)(X) - (\nabla_X^\omega \omega)(Y) - \omega([X, Y]) \\ &= g((\nabla_Y^\omega \omega)^\sharp, X) - g((\nabla_X^\omega \omega)^\sharp, Y) - \omega([X, Y]) \\ &= g((\nabla_Y^\omega \omega)^\sharp, X) - g((\nabla_X^\omega \omega)^\sharp, Y) - \omega([X, Y]) \\ &= g((\nabla_Y^\omega \omega)^\sharp, X) - g((\nabla_X^\omega \omega)^\sharp, Y) - \omega([X, Y]) \\ &= g(\nabla_Y^\omega \omega^\sharp, X) - g(\nabla_X^\omega \omega^\sharp, Y) + g(\omega(Y)\omega^\sharp, X) - g(\omega(X)\omega^\sharp, Y) - \\ &\quad - \omega([X, Y]) \\ &= g(\nabla_Y^\omega \omega^\sharp, X) - g(\nabla_X^\omega \omega^\sharp, Y) - \omega([X, Y]) \\ &= g(\nabla_Y \omega^\sharp + \omega(\omega^\sharp)Y, X) - g(\nabla_X \omega^\sharp + \omega(\omega^\sharp)X, Y) - \omega([X, Y]) \\ &= g(\nabla_Y \omega^\sharp, X) - g(\nabla_X \omega^\sharp, Y) - \omega([X, Y]). \end{aligned}$$

Com efeito, temos

$$\begin{aligned} R^\omega(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - \frac{1}{2}\{[(\nabla_X \omega)(Z) + \frac{1}{2}\omega(X)\omega(Z)]Y - \frac{1}{2}\{[(\nabla_Y \omega)(Z) + \frac{1}{2}\omega(Y)\omega(Z)]X + \\ &\quad + \frac{1}{2}\{[(\nabla_X \omega)(Y) - (\nabla_Y \omega)(X)]Z - g(Y, Z)(\nabla_X \omega^\sharp + \frac{1}{2}\omega(X)\omega^\sharp) + \\ &\quad + g(X, Z)(\nabla_Y \omega^\sharp + \frac{1}{2}\omega(Y)\omega^\sharp) - \frac{1}{4}|\omega|^2(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y), \end{aligned}$$

A fórmula anterior implica a seguinte relação entre o campo tensorial de curvatura R^ω da conexão de Weyl ∇^ω e o campo tensorial de curvatura riemanniana R de ∇ :

$$R^\omega(X, Y)Z = R(X, Y)Z + \Sigma(X, Y)Z - \Sigma(Y, X)Z$$

onde

$$\begin{aligned}\Sigma(X, Y)Z &= \frac{1}{2}\{(\nabla_X \omega)(Y)Z + (\nabla_X \omega)(Z)Y + \omega(Y)\omega(Z)X\} - \\ &g(Y, Z)\nabla_X \omega^\sharp - \frac{1}{4}|\omega|^2 g(Y, Z)X - \frac{1}{2}g(X, Z)\omega(Y)\omega^\sharp.\end{aligned}$$

Para uma geometria de Weyl, além das propriedades já referidas a uma conexão sem torção, temos ainda a seguintes propriedade do tensor de Riemann com $g(R^\omega(X, Y)Z, Z) = R^\omega(X, Y, Z, Z)$:

$$R^\omega(A, B, C, D) + R^\omega(A, B, D, C) = -2d\omega(A, B)g(C, D),$$

e

$$2d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]).$$

Quanto ao tensor de Ricci, temos que a relação entre as curvaturas $Ric(R^\omega)$ e $Ric(R)$ é dada por

$$Ric^\omega(Y, Z) = Ric(Y, Z) + (1 - m)(\nabla_Z \omega)Y + \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned}&+ (\nabla_Y \omega)Z + (m - 2)\omega(Y)\omega(Z) + \\ &+ (\operatorname{div} \omega^\sharp - (m - 2)|\omega|^2)g(Y, Z); \quad (4.50)\end{aligned}$$

onde $m = \dim M$. Normalmente, o tensor de Ricci de uma estrutura de Weyl não é simétrico.

Se a parte simétrica da curvatura de Ricci de ∇^ω for proporcional (com fator de escala Λ como uma função suave em M , não necessariamente constante) à métrica g da classe conforme $[g]$, então, (M, g, ∇^ω) é denominada **variedade de Einstein-Weyl**, isso é

$$\frac{2 - m}{2}((\nabla_Y \omega)Z + (\nabla_Z \omega)Y) + (m - 2)\omega(Y)\omega(Z) + Ric(Y, Z) = \Lambda g(Y, Z).$$

Para uma $g \in [g]$ de uma variedade de Weyl (M, g, ∇^ω) , definimos o tensor pseudo-Schwarz $T_g(\omega)$ como

$$\begin{aligned}T_g(\omega)(Y, Z) &= (1 - m)(\nabla_Y \omega)Z + (\nabla_Z \omega)Y + (m - 2)\omega(Y)\omega(Z) \\ &+ \frac{1}{m}(\operatorname{div} \omega^\sharp - (m - 2)|\omega|^2)g(Y, Z)\end{aligned}$$

Este tensor pseudo-Schwarz é um campo tensorial de ordem 2 com traço nulo[79], não necessariamente simétrico. O tensor pseudo-Schwarz $T_g(\omega)$ é simétrico se, e só se, ω é fechada[78].

De posse desse tensor podemos escrever a equação

$$Ric^\omega(Y, Z) = Ric(Y, Z) + T_g(\omega)(Y, Z) + \quad (4.51)$$

$$+ \frac{m-1}{m}(\operatorname{div} \omega^\sharp - (m-2)|\omega|^2)g(Y, Z). \quad (4.52)$$

Por outro lado, temos que a curvatura escalar é dada por

$$R^\omega = R + (m-1)(\operatorname{div} \omega^\sharp - (m-2)|\omega|^2).$$

Notemos ainda que, o tensor de Ricci é invariante frente às transformações de Weyl, dada sua definição em (4.16) a curvatura escalar não é invariante por transformações de Weyl, e dada sua definição em (4.17) temos que

$$\tilde{R}^\omega = e^f R^\omega.$$

4.5 Geometria de Riemann-Cartan

Nesta seção, vamos rever algumas definições básicas e fatos matemáticos da geometria de Riemann-Cartan. Como veremos, esta pode ser vista como uma espécie de generalização da geometria riemanniana, e alguns teoremas que serão apresentados aqui, são simples extensões de teoremas correspondentes da geometria riemanniana. No entanto, essas extensões podem apresentar novas aplicações físicas, especialmente no que concerne ao movimento geodésico, que discutiremos posteriormente.

A característica fundamental da geometria de Riemann-Cartan é a existência de torção, que como já mencionada anteriormente é dada por:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \quad (4.53)$$

Supomos ainda que a condição de metricidade é riemanniana, isto é,

$$Q = \nabla g = 0.$$

Para estabelecer uma ligação entre a conexão afim ∇ e a métrica, obteremos uma extensão do teorema de Levi-Civita precisamos de uma melhor definição.

Teorema 4 *Dada uma variedade de Riemann-Cartan M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições*

(a) $T(X, Y) \neq 0 \forall X, Y \in TM$.

(b) ∇ é compatível com a métrica g de M .

Prova : Da mesma forma como já fizemos em casos anteriores, vamos supor que ∇ existe. Então, como $Q = 0$ temos

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X^T Y, Z) + g(Y, \nabla_X^T Z), \quad (4.54)$$

$$Yg(Z, X) = g(\nabla_Y^T Z, X) + g(Z, \nabla_Y^T X), \quad (4.55)$$

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z^T X, Y) + g(X, \nabla_Z^T Y), \quad (4.56)$$

Novamente somando as duas primeiras equação e e subtraindo a terceira, e usando a definição da torção, teremos

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) &= g(\nabla_X^T Y + \nabla_Y^T X, Z) + g(\nabla_X^T Z - \nabla_Z^T X, Y) + \\ &\quad + g(\nabla_Y^T Z - \nabla_Z^T Y, X) \\ &= g(\nabla_X^T Y + T(Y, X) + \nabla_X^T Y + [Y, X], Z) + g(T(X, Z) + [X, Z], Y) + \\ &\quad + g(T(Y, Z) + [Y, Z], X), \\ &= 2g(\nabla_X^T Y, Z) + g(T(Y, X) + [Y, X], Z) + g(T(X, Z) + [X, Z], Y) + \\ &\quad + g(T(Y, Z) + [Y, Z], X), \end{aligned}$$

onde utilizamos (4.53). Simplificando a equação acima, teremos ainda que

$$g(Z, \nabla_Y^T X) = g(Z, \nabla_Y X) + \frac{1}{2}[g(T(X, Y), Z) + g(T(Z, X), Y) + g(T(Z, Y), X)]; \quad (4.57)$$

Aqui estamos denotando por ∇^T é a conexão de Cartan, e por ∇ a conexão de Levi-Civita. Definimos o tensor de contorção K da seguinte maneira:

$$g(K(Y, X), Z) = -\frac{1}{2}[g(T(X, Y), Z) + g(T(Z, X), Y) + g(T(Z, Y), X)]. \quad (4.58)$$

Assim, podemos escrever

$$g(Z, \nabla_Y^T X) = g(Z, \nabla_Y X) - g(K(Y, X), Z),$$

e, finalmente,

$$\nabla_Y^T X = \nabla_Y X - K(Y, X). \quad (4.59)$$

Então, concluímos que a conexão não será determinada somente pela métrica e suas derivadas, pois, também dependerá da contorção.

Mas adiante, estudaremos as condições primeiras para uma imersão isométrica em um espaço de Riemann-Cartan e estudaremos o confinamento geodésico em hipersuperfícies. A seguir, veremos um caso bem peculiar desta geometria em que a torção é dada por uma 1-forma.

4.6 Geometria da torção Semi-simétrica

Em 1924, A. Friedmann e Schouten [81] introduziram a ideia de uma conexão linear semi-simétrica. Uma conexão linear é dita ser uma conexão semi-simétrica se a sua torção é da forma

$$T(X, Y) = \sigma(X)Y - \sigma(Y)X \quad (4.60)$$

onde $\sigma \in \Lambda^1(M)$ e $X, Y \in TM$. Em consequência de (4.58) e de (4.60), temos portanto;

$$\begin{aligned} g(K(Y, X), Z) &= \frac{1}{2}[g(\sigma(X)Y - \sigma(Y)X, Z) + g(\sigma(Z)X - \sigma(X)Z, Y) + g(\sigma(Z)Y - \sigma(Y)Z, X)] \\ &= \frac{1}{2}[g(\sigma(X)Y, Z) - g(\sigma(Y)X, Z) + g(\sigma(Z)X, Y) - g(\sigma(X)Z, Y) + g(\sigma(Z)Y, X) \\ &\quad - g(\sigma(Y)Z, X)] \\ &= g(\sigma(Z)Y, X) - g(\sigma(Y)Z, X) \\ &= -g(\sigma(Y)X, Z) + g(g(X, Y)\sigma^\sharp, Z) \end{aligned}$$

Então,

$$K(Y, X) = -\sigma(X)Y + g(X, Y)\sigma^\sharp,$$

e, levando em conta (4.59), temos

$$\nabla_Y^\sigma X = \nabla_Y X + \sigma(X)Y - g(X, Y)\sigma^\sharp.$$

onde $\sigma(X) = g(X, \sigma^\sharp)$ e ∇ é a conexão de Levi-Civita.

A curvaturas riemannianas da conexão ∇^σ denotada por R^σ e a curvatura da conexão ∇ de Levi-Civita denotada por R estão relacionadas por [82],[83]

$$\begin{aligned} R^\sigma(X, Y, Z, W) = & R(X, Y, Z, W) - g(X, W)\theta(Y, Z) + g(Y, W)\theta(X, Z) - g(Y, Z)\theta(X, W) + \\ & + g(X, Z)\theta(Y, W), \end{aligned}$$

onde

$$\theta(Y, Z) = (\nabla_X \sigma)Y - \sigma(X)\sigma(Y) + \frac{1}{2}g(X, Y).$$

Os tensores de Ricci Ric^σ e Ric estão relacionados por

$$\begin{aligned} Ric^\sigma(X, Y) = & Ric(X, Y) - (n-2)g(Y, \nabla_X \sigma^\sharp) + (n-2)\sigma(X)\sigma(Y) - (n-2)|\sigma^\sharp|^2 g(X, Y) + \\ & (4.61) \end{aligned}$$

$$+ g(X, Y) \operatorname{div} \sigma^\sharp.$$

Em virtude de (4.61) e da simetria de Ric temos que

$$Ric^\sigma(X, Y) - Ric^\sigma(Y, X) = (n-2)[(\nabla_Y \sigma^\sharp)(X) - (\nabla_X \sigma^\sharp)(Y)].$$

Consequentemente se Ric^σ é simétrico, para $n \geq 3$,

$$(\nabla_Y \sigma^\sharp)(X) - (\nabla_X \sigma^\sharp)(Y) = 0.$$

Isso mostra que $d\sigma = 0$, isto é, σ é fechada.

Capítulo 5

Imersões Isométricas

Geralmente quando falamos de teorias de branas mundo, conjecturamos que o espaço-tempo 4-dimensional descrito pela **RG** está imerso em um espaço de dimensão $n > 4$, cuja geometria é riemanniana.

Esta conjectura surgiu em 1998 com os trabalhos de **Arkani-Hamed, G. Dvali e G. Dimopolous**[30], ou abreviadamente **ADD**, propondo de forma *sui generis* uma solução para o problema da hierarquia das interações fundamentais. O problema da hierarquia surge ao se tentar explicar por quê a interação gravitacional é muito mais fraca quando comparada às demais interações fundamentais e de como podemos unificá-las a partir de uma teoria física mais geral, incluindo aspectos quânticos e gravitacionais. Como apontado pelo esquema de *ADD*, a escala de Planck para a gravitação forte é desprovida de caráter experimental. Portanto não impede a elaboração de uma teoria gravitacional em escala de energia menor, igual às demais interações, em escala Tev, o que implica que as dimensões extras devem ser maiores que o comprimento de Planck ($L_{planck} \simeq 10^{-33}\text{cm}$)[30]. Em resumo, a proposta de *ADD* à uma teoria de Branas-mundo contém três postulados básicos:

- a) Existe uma variedade maior ou ambiente (*bulk*), com dimensão $n > 4$, que é solução das equações de Einstein.
- b) O espaço-tempo quadridimensional é imerso no espaço ambiente.
- c) Em escala Tev, a gravitação descrita pela métrica da variedade de 4 dimensões imersa oscila no espaço ambiente e as ondas geradas propagam-se no espaço ambiente.

A partir de então muitos outros trabalhos sobre Branas-mundo foram propostos, como por exemplo o modelo Randall-Sundrum[27].

Em 1999, **L. Randall e R. Sundrum** propõem um modelo alternativo ao esquema de *ADD*. O primeiro modelo conhecido como RS-I é construído com um *bulk* de curvatura constante em cinco dimensões em um espaço-tempo do tipo anti-de Sitter, ou, simplesmente, ADS_5 .

$$R_{AB}^5 = -\Lambda g_{AB}^5.$$

Também, nos anos 90, uma nova versão não-compacta da teoria de Kaluza-Klein, denominada **Matéria Induzida**, foi sugerida por **Paul Wesson** e colaboradores. Já neste cenário o "*bulk*" de cinco dimensões, é *Ricci-Flat* ou seja

$$R_{AB}^5 = 0;$$

sendo que a quinta dimensão, não-compacta, é a responsável pela existência da matéria no universo 4 dimensional. Em outras palavras, o que chamamos de matéria seria, em última instância, meramente geometria, a qual se manifesta como substância quando observada por seres que vivem numa hipersuperfície de quatro dimensões.

Em uma série de trabalhos interessantes [29], Wesson e seu grupo mostraram como o modelo cosmológico pode ser obtido a partir de espaço vazio por um mecanismo de imersão. Mas, na verdade, não havia garantia de que qualquer tensor energia-momento pudesse ser obtido desta forma.

Falando em termos matemáticos, a validade do programa de Wesson não estava garantida, a menos que se pudesse provar que qualquer solução das equações de campo de Einstein possa ser isometricamente imersa em um espaço Ricci-flat de cinco dimensões.

De fato, isso acontece, (resguardadas as devidas analiticidades das funções envolvidas) graças ao conteúdo de um teorema conhecido como o *teorema de Campbell-Magaard* [85][86]. Embora muito pouco conhecido, o teorema foi descoberto pelo matemático Inglês John Campbell em 1926 [84] e à prova completa foi dada somente em 1963 por Lorenz Magaard [85][86]. Mas, o teorema, que garante a consistência matemática da teoria de Wesson, não se aplica ao modelo de Randall-Sundrum. Seria necessário generalizá-lo. A generalizações do teorema de *Campbell-Magaard* foram demonstradas em 2001 por Romero e Dahia [86]. Romero e Dahia conseguiram demonstrar não apenas um, mas três tipos diferentes de generalização do teorema, um dos quais se aplica ao modelo de Randall-Sundrum.

Façamos, uma breve retrospectiva histórica da teoria de imersão.

O problema da imersão de uma variedade riemanniana n -dimensional localmente em uma variedade euclidiana foi discutido pela primeira vez por Schläfli em [89] 1873. Schläfli conjecturou que uma variedade riemanniana que não possui curvatura com métrica analítica e definida positiva pode ser imersa localmente e isometricamente como uma subvariedade em um espaço Euclidiano E^m , onde $m = n(n + 1)/2$. Isto é, uma variedade riemanniana 4-dimensional está imersa em um espaço euclidiano de $m = 4(4 + 1)/2 = 10$ dimensões.

Em 1926, Janet usou um método de prova baseado num desenvolvimento de séries de potência positivas convergentes, ou seja, analítico [90]. Porém, a prova estava incompleta, pois apenas resolve o problema local para variedades riemannianas bidimensionais com métrica analítica.

E.Cartan, em 1927, estendeu o resultado para uma variedade n -dimensional, com métrica analítica. A dimensionalidade necessária para a imersão foi a mesma encontrada por **Schläfli** ($m = n(n + 1)/2$) [91].

Em 1954, J.Nash mostrou que uma variedade C^1 [92] pode ser imersa em espaço euclidiano de $2n$ dimensões e em 1956, tratou o caso de C^k [93] para $3 \leq k \leq \infty$. Ele demonstrara como fazer a imersão local de uma variedade diferenciável mantendo sua regularidade, não necessitando mais de uma métrica analítica. Greene [94] estendeu o teorema de Nash para métricas semi-riemannianas.

A dimensão m do espaço-ambiente para uma imersão isométrica e local de uma variedade M^n depende das funções de imersão. Se utilizarmos o teorema de Janet-Cartan com funções analíticas, o espaço-total terá o número de dimensões $m \leq n(n + 1)/2$.

Portanto, se utilizarmos o teorema de Nash-Greene com funções diferenciáveis, o número de dimensões do espaço-ambiente cresce para $m \leq n(n + 3)/2$.

5.1 Definição e Propriedades

Seja $(M, \bar{g}, \bar{\nabla})$ uma variedade semi-riemanniana. Dada uma variedade N e $i : N \longrightarrow M$ uma imersão, ou seja, dado $p \in M$ a derivada $i_* : T_p N \rightarrow T_{i(p)} M$ é injetiva. Nestas condições, podemos munir a variedade N de uma métrica semi-riemanniana g através da definição

$$g_p(X_p, Y_p) = i^* \bar{g}(\bar{X}, \bar{Y}), \quad \bar{X}, \bar{Y} \in T_{i(p)} M.$$

Dizemos, então, que a variedade N tem a métrica induzida pela variedade semi-riemanniana M e, portanto, $i(N)$ é denominada subvariedade semi-riemanniana de M . A aplicação i é dita uma imersão isométrica.

Observemos que dados $p \in N$ e $X_p \in T_p N$, em razão de g , dispomos de uma decomposição natural em p dada por $T_p M = T_p N \oplus (T_p N)^\perp$, onde $(T_p N)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p N$ em $T_p M$. Podemos, assim, escrever $Y_p \in T_p M$ da seguinte forma

$$Y_p = Y_p^\top + Y_p^\perp, \text{ onde } Y_p^\top \in T_p N \text{ e } Y_p^\perp \in (T_p N)^\perp.$$

Os vetores em $(T_p N)^\perp$ são ditos **normais** a N em p e, naturalmente, $Y_p \in T_p N$ é dito **tangente** a N em p .

Desta forma, um campo de vetores $X \in TM$ é dito **normal a N** , se $X_p \in (T_p N)^\perp$ para todo $p \in N$ e denotamos o conjunto de tais campos por $(TN)^\perp$. Temos portanto uma decomposição natural em soma direta:

$$TM = (TN) \oplus (TN)^\perp.$$

Consideremos uma imersão $i : N \rightarrow M$, onde M é uma variedade com conexão $\bar{\nabla}$. Sejam X e Y campos vetoriais de N . Dados p em N e U , uma vizinhança de p onde i é injetiva, temos que $i_*(X)$ e $i_*(Y)$ são campos vetoriais definidos ao em $i(U)$. Podemos estendê-los a campos vetoriais $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ definidos numa vizinhança de $i(p)$ em M . Como $(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})_p$ depende apenas de $\bar{X}_p = X_p$ e de $\bar{Y}$ ao longo de uma curva em $i(U)$, temos que a definição não depende da extensão.

Não é difícil mostrar que podemos tomar a parte tangente de $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}$ dada por $\nabla_X Y$ como conexão induzida em N , seja ela não-métrica ou Riemann-Cartan ambas induzem na subvariedade uma conexão do mesmo tipo.

Proposição 10 *Sejam $\bar{f} \in \mathcal{D}(M)$ e $\bar{X} \in TM$. Temos que $\bar{X}(\bar{f})|_N = X(f) \in \mathbb{R}$, sendo $f \in \mathcal{D}(N)$ e $X \in T(N)$.*

Demonstração: Se $\bar{X}$ é a extensão de X e $\bar{f}$ é a extensão de f , esse resultado é consequência imediata da própria definição de extensão.

A proposição acima tem imediatas consequências, tais como: Sejam $X, Y \in T(N)$ e $\bar{X}, \bar{Y} \in TM$ suas respectivas extensões, então:

$$\mathbf{i} [\bar{X}, \bar{Y}]|_M = [X, Y], \quad X, Y \in T(N),$$

ii $\bar{g}(\bar{X}, \bar{Y})|_M = g(X, Y)$,

5.1.1 Conexão induzida

Seja M uma variedade e N uma subvariedade semi-riemanniana de M , a conexão afim $\bar{\nabla}$ de M induz naturalmente uma aplicação de $\nabla : T(N) \times T(N) \rightarrow T(N)$ denominada *conexão induzida* em $N \subset M$.

Se $Y \in T(N)$ e $X \in T(N)$, $\bar{\nabla}_Y X$ não tem significado imediato, posto que Y e X não estão em TM . Porém, para cada $p \in M$ sendo $\bar{Y}$ e $\bar{X}$ extensões locais suaves de Y e X respectivamente em uma vizinhança coordenada U_α de p em $\bar{M}$. Define-se $\bar{\nabla}_Y X$ em $U_\alpha \cap N$ como sendo a restrição de $\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}$ a $U_\alpha \cap N$.

Lema 7 $\bar{\nabla}_Y X$ é um campo vetorial bem definido em N .

Demonstração: Como a restrição de um campo de vetorial, $\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}|_{U_\alpha \cap N}$ é suave, basta mostrar que a mesma independe da escolha de extensões. Em termos de um sistema de coordenada em U_α escrevemos $\bar{X} = \bar{X}^i \bar{\partial}_i$. Então,

$$\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X} = \bar{Y}(\bar{X}^i) \bar{\partial}_i + \bar{X}^i \bar{\nabla}_{\bar{Y}}(\bar{\partial}_i). \quad (5.1)$$

Mas em

$$p \in U_\alpha \cap N, \quad (\bar{Y} \bar{X}^i)(p) = \bar{Y}_p(\bar{X}^i) = Y_p(X^i) \quad (5.2)$$

e

$$\bar{\nabla}_{\bar{Y}}(\bar{\partial}_i)|_p = \bar{\nabla}_{\bar{Y}^j \bar{\partial}_j}(\bar{\partial}_i)|_p = \bar{Y}^j(p) \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_j}(\bar{\partial}_i)|_p = \quad (5.3)$$

$$= Y^j(p) \Gamma_{ji}^k(p) \bar{\partial}_k = Y^j(p) \Gamma_{ji}^k(p) \partial_k. \quad (5.4)$$

Assim, a restrição $\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}|_{U_\alpha \cap N}$ depende apenas de Y e X .

Definição 29 Sejam $X, Y \in T(N)$ e $\bar{X}, \bar{Y} \in TM$ suas respectivas extensões. Então, definimos a conexão induzida ∇ em N por M como

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\top \quad (5.5)$$

Corolário 2 Sendo ∇ a conexão induzida de $M \subset \bar{M}$. Se $X, Y, Z \in TM$, temos:

1. $\nabla_Y X$ é $D(N)$ -linear em Y .

2. $\nabla_Y X$ é $\mathbb{R}$ -linear em X .

3. $\nabla_Y(fX) = (Yf)X + f\nabla_Y X$ para $f \in D(N)$.

Demonstração: Para todo ponto $p \in N$, estendamos a M campos vetoriais e funções a uma vizinhança de p em M . As cinco propriedades acima descritas, correspondem às propriedades da conexão em $p \in M$. Portanto, a restrição a N dá os resultados acima, pois:

a) $\bar{\nabla}_Y X = \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X} |_N$.

b) $\bar{X}(\bar{f}) = X(f) |_N$.

c) $g(\bar{X}, \bar{Y}) |_N = \bar{g}(X, Y)$.

d) $[\bar{X}, \bar{Y}] |_N = [X, Y]$.

Um fato básico aqui é que para X, Y , ambos tangentes a N , a derivada covariante $\bar{\nabla}_Y X$ não é necessariamente tangente a N . Então, é natural perguntar o que são $(\bar{\nabla}_Y X)^\perp$ e $(\bar{\nabla}_Y X)^\top$.

5.1.2 A segunda forma fundamental

Agora faremos uma primeira abordagem da **segunda forma fundamental**, mas não faremos restrições à conexão afim quanto a sua torção e não-metricidade, pois pretendemos preparar o terreno para os capítulos posteriores, onde abordaremos as equações fundamentais das imersões isométricas em espaços de Weyl e Rimann-Cartan semi-simétrico.

Definição 30 A segunda forma fundamental de M é definida como sendo a aplicação $B : TM \times TM \longrightarrow TM^\perp$ dada por

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y, \quad (5.6)$$

que é um campo local de $\bar{M}$ normal a N .

A segunda forma fundamental $B(X, Y)$ não depende das extensões $\bar{X}$ e $\bar{Y}$, pois, $\nabla_X Y$ não depende das extensões, $\bar{X}$ e $\bar{Y}$, e vemos que $B(X, Y)$ também não depende das extensões $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ [42].

Proposição 11 *A segunda forma fundamental B de uma imersão isométrica é $\mathcal{D}(M)$ -bilinear.*

De fato, se $f \in \mathcal{D}(M)$, $X, Y \in TM$ e $\bar{f} \in \mathcal{D}(M)$ é uma extensão local de f , levando em conta as propriedades de linearidade de uma conexão, conclui-se, facilmente, que B é aditiva em X e Y .

Quanto à simetria, observemos que usando a simetria de ambas as conexões ∇ e $\bar{\nabla}$, temos

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y = \quad (5.7)$$

$$= \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X} + [\bar{X}, \bar{Y}] + \bar{T}(\bar{X}, \bar{Y}) - (\nabla_Y X + [X, Y] + T(X, Y)) \quad (5.8)$$

$$= \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X} - \nabla_Y X + \bar{T}(\bar{X}, \bar{Y})|_N - T(X, Y) + \underbrace{[\bar{X}, \bar{Y}]|_M}_{=0} - [X, Y] \quad (5.9)$$

$$= B(Y, X) + \bar{T}(\bar{X}, \bar{Y})|_N - T(X, Y), \quad (5.10)$$

$$= B(Y, X) + (\bar{T}(\bar{X}, \bar{Y})|_N)^\perp \quad (5.11)$$

onde $\bar{T}$ é a suposta torção de M e T é a torção induzida em N . Assim, se pudermos garantir que

$$\bar{T}(\bar{X}, \bar{Y})|_N = T(X, Y), \quad (5.12)$$

garantiremos a simetria da segunda forma, isso é

$$B(X, Y) = B(Y, X).$$

Nota 2 *A simetria é importante para a auto-adjunção do operador Weingarten A_η , que definiremos adiante. Lembremos que se A_η é auto-adjunto, tem auto-valores reais, assim a curvatura média H que é o seu traço, é real. Trivialmente poderíamos fazer*

$$(\bar{T}(\bar{X}, \bar{Y})|_M)^\perp = 0.$$

Mas esta não é a única opção. Veremos mais adiante que uma torção do tipo

$$\bar{T}(X, Y) = \bar{\omega}(X)Y - \bar{\omega}(Y)X, \quad (5.13)$$

conhecida como semi-simétrica, também satisfaz esta propriedade.

Quanto à $\mathcal{D}(M)$ -bilinearidade de B , podemos dizer que para $f \in \mathcal{D}(M)$.

$$B(fX, Y) = fB(X, Y)$$

posto que

$$\begin{aligned} B(X, fY) &= \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{f} \bar{Y} - \nabla_X(fY) = \\ &= \bar{f} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - f \nabla_X Y + \underbrace{\bar{X}(\bar{f})|_M Y - X(f)Y}_{=0} = fB(X, Y) \end{aligned}$$

Similarmente, temos que $B(X, fY) = fB(X, Y)$.

Agora podemos definir uma aplicação H_η , a qual expressa o valor da projeção normal de $B(X, Y)$ em $p \in N$.

Definição 31 *Seja $p \in N$ e $\eta \in (T_p N)^\perp$. E η uma extensão local de normal a N . A aplicação $H_\eta : T_p N \times T_p N \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$H_\eta(X, Y) = \bar{g}(B(X, Y), \eta), \quad X, Y \in T_p N \quad (5.14)$$

é denominada de curvatura extrínseca de N .

Observemos que à aplicação bilinear H_η que pode associar-se com uma aplicação linear auto-adjunta $A_\eta : T_p N \rightarrow T_p N$ denominada *aplicação de Weingarten na direção η* definida por

$$\bar{g}(A_\eta(X), Y) = H_\eta(X, Y) = \bar{g}(B(X, Y), \eta)_p. \quad (5.15)$$

A proposição abaixo fornece uma expressão de A_η em termos da derivada covariante da normal N .

Proposição 12 *Seja $\bar{Q}$ a não-metricidade de M e N uma subvariedade de M , em um ponto $p \in N$ com $X \in T_p N$ e $\eta \in (T_p N)^\perp$. Então, se $\bar{Q}(\bar{X}, \bar{Y}, \eta)|_p = 0$ temos que:*

$$A_\eta(X) = -(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \eta)^\top. \quad (5.16)$$

Demonstração: Sejam $X, Y \in T_p M$ e $\bar{X}, \bar{Y}$ extensões locais de X, Y , respectivamente, e tangentes a M . Então, $\bar{g}(\eta, \bar{Y}) = 0$, e, portanto,

$$\begin{aligned}
 \bar{g}(A_\eta(X), Y) &= \bar{g}(B(X, Y)|_p, \eta) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y, \eta)|_p = \\
 &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, \eta)|_p - \underbrace{\bar{g}(\nabla_X Y, \eta)|_p}_{=0} = \\
 &= \bar{Q}(\bar{X}, \bar{Y}, \eta)|_p + \underbrace{\bar{X}\bar{g}(Y, \eta)|_p}_{=0} - \bar{g}(\bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}}\eta)|_p = \\
 &= \bar{Q}(\bar{X}, \bar{Y}, \eta)|_p - \bar{g}(\bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}}\eta)|_p = \bar{Q}(\bar{X}, \bar{Y}, \eta)|_p + \bar{g}(-\bar{\nabla}_X \eta, \bar{Y})|_p \\
 &= \bar{Q}(\bar{X}, \bar{Y}, \eta)|_p + \bar{g}(-(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\eta)^\top, \bar{Y});
 \end{aligned}$$

para todo $\bar{Y} \in T_p M$.

Nota 3 Aqui notamos que para que o operador de Weingarten A tenha sua interpretação geométrica convencional como variação do vetor normal, teremos que

$$\bar{Q}(\bar{X}, \bar{Y}, \eta)|_p = 0.$$

Isto acontece por exemplo nas imersões em variedades de Weyl que exploraremos mais adiante, pois,

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}(\bar{X}, \bar{Y}, \eta)|_p &= \omega(\bar{X})\bar{g}(\bar{Y}, \eta)|_p \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Observemos que, denotando $(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\eta)^\perp$ por $\bar{\nabla}_{\bar{X}}^\perp \eta$, e usando a aplicação de Weingarten A podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla}_{\bar{X}}\eta &= (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\eta)^\top + (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\eta)^\perp \\
 &= -A_\eta(X) + \bar{\nabla}_{\bar{X}}^\perp \eta.
 \end{aligned}$$

Temos, assim, duas fórmulas que serão usadas a seguir:

- 1) $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} = B(X, Y) + \nabla_X Y$; (fórmula de Gauss)
- 2) $\bar{\nabla}_X \eta = -A_\eta(X) + \bar{\nabla}_X^\perp \eta$. (fórmula de Weingarten)

A partir das fórmulas de Gauss e de Weingarten, podemos deduzir as equações fundamentais de uma imersão isométrica, denominadas de equações de Gauss, Codazzi e Ricci. Encontraremos essas equações fundamentais mais adiante quando dissertarmos a respeito de subvariedades em espaços de Weyl.

5.1.3 Subvariedades totalmente umbílicas

Em uma variedade semi-riemanniana, uma subvariedade tem um ponto umbílico p se, neste ponto p , a segunda forma fundamental é um múltiplo da primeira forma fundamental. Uma subvariedade é chamada totalmente umbílica se todos os seus pontos são umbílicos.

Definição 32 *Um ponto p de $M \subset \bar{M}$ é umbílico se existe um vetor normal $k \in T_p(M)^\perp$ tal que*

$$B(X, Y) = g(X, Y)k, \text{ para todo } X, Y \in TM,$$

onde k é chamado de vetor curvatura normal de M em p .

Uma subvariedade totalmente umbílica é totalmente geodésica para $k = 0$.

No caso de variedades Lorentzianas temos:

Lema 8 *Sejam $N \subset M$ uma subvariedade Lorentziana e totalmente umbílica. Toda geodésica do tipo luz de N é geodésica de M*

Demonstração: Se tomarmos $X(t)$ campo tangente ao uma geodésica do tipo luz em M

$$B(X, X) = g(X, X)k = \bar{\nabla}_X X - \nabla_X X$$

como $g(X, X) = 0$ e também $\nabla_X X = 0$, então:

$$\bar{\nabla}_X X = 0.$$

No caso de subvariedades do tipo-tempo ou do tipo-espaço, o quadro não é diferente de uma variedade riemanniana. Para a métricas Lorentziana, a fórmula $B(X, X) = g(X, X)k$ mostra que a subvariedade N encurva-se na direção de k nas direções do tipo-espaço, e afasta-se k nas do tipo-tempo ou vise-versa dependendo de sua assinatura; nas direções do tipo-luz teremos que $B(X, X) = g(X, X)k = 0$, assim subvariedades umbílicas do tipo-luz são geodésicas [75].

5.1.4 Subvariedades totalmente geodésicas

Uma subvariedade N de uma variedade riemanniana M é dita ser totalmente geodésica se cada geodésica partindo de um ponto p em N e tangente a N nesse ponto permanece sempre contida em N .

Em geral uma variedade semi-riemanniana genérica não admite qualquer subvariedade desta natureza, exceto para as curvas (geodésicas). Subvariedades totalmente geodésicas só aparecem em contextos especiais como as *formas espaciais*¹ onde subvariedades totalmente geodésicas são mais abundantes [76]. Outra circunstância onde subvariedades totalmente geodésicas aparecem é nos produtos riemannianos: qualquer subvariedade bidimensional que é o produto de uma linha geodésica horizontal, com uma linha geodésica vertical é uma superfície totalmente geodésica. Portanto, há muitos deles. Por exemplo, o produto de duas geodésicas periódicas será um 2-toro plano. Mas, nos produtos, também existem diferentes subvariedades totalmente geodésicas: todas as horizontais e verticais [76] subvariedades: $M \times \{n\}$ e $\{m\} \times N$ em $M \times N$.

Aqui a terminologia é dada pela seguinte proposição.

Proposição 13 *Uma imersão $i : N \rightarrow M$ é geodésica em $p \in N$ se, e só se, toda geodésica γ de N partindo de p é geodésica em p , é uma geodésica de M em p .*

Prova [42]: Sejam $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = X$. Sejam η uma extensão local, normal a N , de um vetor normal η em p , e $\bar{X}$ uma extensão local, tangente a M , de $\gamma'(t)$. Como $\bar{g}(\bar{X}, \eta) = 0$, obteremos em p ,

$$\begin{aligned} H_\eta(X, X) &= g(A_\eta(X), X) = -\bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\eta, \bar{X}) \\ &= -\bar{X}\bar{g}(\eta, X) + \bar{g}(\eta, \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{X}) = \bar{g}(\eta, \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{X}). \end{aligned}$$

Daí decorre que f é totalmente geodésica em p se, e só se, para todo $X \in T_p N$, a geodésica γ de N que é tangente a X em p satisfaz à condição: $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{X}(p)$ não tem componente normal. Portanto, f é totalmente geodésica em p se e só se toda geodésica γ de N partindo de p é geodésica de M em p .

Podemos ainda ver que : toda geodésica γ de N partindo de p é geodésica de M em p , se, e só se, e a segunda forma fundamental B for nula em p .

Tomemos $\dot{\gamma}$ vetor tangente ao longo de γ . Logo;

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0. \quad (5.17)$$

Por outra parte, podemos fazer

¹As variedades completas com curvatura seccional constante são chamadas formas espaciais.

$$B(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} - \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \quad (5.18)$$

Como B é nula em p , $B(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ também o será; portanto:

$$\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0. \quad (5.19)$$

Definição 33 Dizemos que N é uma subvariedade **totalmente geodésica** se é geodésica em todos os seus pontos.

Resumidamente, uma subvariedade semi-riemanniana N de M é totalmente geodésica se $B = 0$ para todo $p \in N$. Então, uma subvariedade N totalmente geodésica é extrinsecamente plana: observadores em M não percebem uma curvatura em N . Isto não é dizer que N é intrinsecamente plana.

Capítulo 6

Imersões em Espaços de Weyl

Agora que sabemos como funciona o mecanismo de imersão de subvariedades em geometria riemanianas, pretendemos mostrar o roteiro inerente a obtenção das equações de Gauss, Codazzi, Ricci para a imersão isométrica em variedades de Weyl. Este constitui um primeiro passo para a consideração de teoremas de imersão que devem ser observados no caso da formulação de uma teoria de branas ou matéria induzida em um *bulk* com geometria de Weyl.

Historicamente, as imersões e submersões em espaços de Weyl começaram a ser exploradas em 1952 por V. Hlavatý [95], e mais tarde por H. Pedersen[96],[97]. Outros trabalhos [99],[100], [98] exploram o tema, principalmente, interessados nas estruturas de Einstein-Weyl. Em [6] os autores do trabalho abordam o tema com o seguinte questionamento: é possível ter uma subvariedade riemanniana mergulhada em um *bulk* de Weyl?

6.1 Subvariedades em espaços de Weyl

Seja uma variedade de Weyl $(M, [\bar{g}], \bar{\nabla}^{\bar{\omega}})$ e seja $i : N \rightarrow M$ uma subvariedade imersa de M . Então é possível trazer a estrutura conforme de M para N [97]. Seja $g = i^*\bar{g}$ com $\pi : i^*TM \rightarrow TN$ a projeção ortogonal. Obtemos a conexão sem torção ∇^ω em TN da seguinte maneira

$$\nabla_X^\omega Y \equiv \pi(\bar{\nabla}_{\bar{X}}^{\bar{\omega}} \bar{Y}) \text{ com } \bar{X}, \bar{Y} \in TM \text{ e com } \omega = i^*\bar{\omega}. \quad (6.1)$$

Proposição 14 *Se $\bar{\nabla}^{\bar{\omega}}$ é livre de torção e $\bar{\omega}$ -compatível com a métrica $\bar{g}$, então, temos que ∇^ω é sem torção e ω -compatível com a métrica g .*

Prova: Começemos com equação que exprime a condição de compatibilidade de Weyl, equação (4.37):

$$\bar{X}\bar{g}(\bar{Y}, \bar{Z}) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{X}}^{\bar{\omega}}\bar{Y}, \bar{Z}) + \bar{g}(\bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}}^{\bar{\omega}}\bar{Z}) + \bar{\omega}(\bar{X})\bar{g}(\bar{Y}, \bar{Z}), \quad (6.2)$$

onde $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in TM$. Agora, suponhamos que $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ são extensões locais dos campos $X, Y, Z \in TN$. Então, em $p \in M$, tem-se

$$\bar{g}(\bar{Y}, \bar{Z}) = g(Y, Z) \text{ e } \bar{\omega}(\bar{X}) = \omega(X)$$

onde levamos em conta que $g = i^*\bar{g}$. Por outro lado, calculando separadamente cada termo do lado direito da equação (6.2) em p , obtemos

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{X}}^{\bar{\omega}}\bar{Y}, \bar{Z}) &= \bar{g}(\pi(\bar{\nabla}_{\bar{X}}^{\bar{\omega}}\bar{Y}) + (\bar{\nabla}_{\bar{X}}^{\bar{\omega}}\bar{Y})^\perp, \bar{Z}) + \bar{g}(\bar{Y}, \pi(\bar{\nabla}_{\bar{X}}^{\bar{\omega}}\bar{Z}) + (\bar{\nabla}_{\bar{X}}^{\bar{\omega}}\bar{Z})^\perp) + \bar{\omega}(\bar{X})\bar{g}(\bar{Y}, \bar{Z}) \\ &= g(\nabla_X^\omega Y, Z) + \bar{g}(Y, \nabla_X^\omega Z) + \omega(X)g(Y, Z) \end{aligned}$$

Portanto, teremos

$$\nabla_Y^\omega X = \nabla_Y X + \frac{1}{2}[\omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X, Y)\omega^\sharp],$$

onde denotamos por ∇ a conexão de Levi-Civita de g .

Chamamos (6.1) estrutura de Weyl induzida em N pela estrutura de Weyl $\nabla^{[g]}$ de M . Além disso, ∇^ω é compatível com a estrutura conforme $[g]$ de N (que motiva a notação) isto é, satisfaz a invariância da equação

$$\nabla^\omega g = \omega \otimes g.$$

Podemos considerar agora a seguinte versão das fórmulas de Gauss e Weingarten para imersões isométricas em variedades de Weyl.

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\bar{X}}^{\bar{\omega}}\bar{Y} &= \tilde{B}(X, Y) + \nabla_X^\omega Y, \text{ (Fórmula de Gauss)} \\ \bar{\nabla}_{\bar{X}}^{\bar{\omega}}\bar{\eta} &= -\tilde{A}_\eta(X) + \nabla_X^{\bar{\omega}^\perp}\eta. \text{ (Fórmula de Weingarten)} \end{aligned}$$

Os objetos conformalmente invariantes $\tilde{B}$ e $\tilde{A}$ são relacionados aos seus "equivalentes" riemannianos **segunda forma fundamental** B e A o **operador de Weingarten** associados a imersão isométrica $i : (N, g) \rightarrow (M, \bar{g})$, pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\tilde{B}(X, Y) &= \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X^\omega Y \\
&= \bar{\nabla}_Y X + \frac{1}{2} [\bar{\omega}(X)Y + \bar{\omega}(Y)X - \bar{g}(X, Y)\bar{\omega}^\#] - \\
&\quad - \nabla_Y X - \frac{1}{2} [\omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X, Y)\omega^\#] \\
&= B(X, Y) - \frac{1}{2} g(X, Y)(\bar{\omega}^\#)^\perp,
\end{aligned}$$

onde B é segunda forma devido a conexão de Levi-Civita.

$$\tilde{B} = B - \frac{1}{2} g \otimes (\bar{\omega}^\#)^\perp.$$

Assim, N é totalmente umbílica se é umbílica com respeito a ∇ .

Lembremos ainda que

$$\bar{g}(\tilde{B}(X, Y), \eta) = g(\tilde{A}_\eta(X), Y).$$

Para subvariedades riemannianas temos que

$$H = \frac{1}{n} \text{tr}_{\bar{g}} B, \quad (n = \dim N),$$

é o vetor de curvatura média com respeito a $\bar{g}$.

Consideremos a curvatura normal $\tilde{H}$ definida como

$$\begin{aligned}
\tilde{H} &= \frac{1}{n} \text{tr}_g \tilde{B} \\
&= \frac{1}{n} (\text{tr}_g B) - \frac{1}{2} \text{tr}_g (\omega^\#)^\perp \\
&= H - \frac{1}{2} \text{tr}_g (\omega^\#)^\perp.
\end{aligned}$$

Então, as condições $\tilde{B} = 0$ e $\tilde{H} = 0$ são invariantes por transformações de Weyl e definem, respectivamente, as subvariedades de Weyl totalmente geodésicas e Weyl-mínimas. Além disso, uma subvariedade de Weyl N é dita totalmente umbílica se

$$\tilde{B} = g(X, Y)k \text{ ou } B = 0.$$

Nesse contexto, temos que $(\nabla^\omega)^\perp$ é uma conexão no fibrado normal $TM^\perp$ compatível com a relação

$$\nabla^{\bar{\omega}^\perp} \bar{g}^\perp = \bar{\omega}^\perp \otimes \bar{g}^\perp,$$

onde $\bar{g}^\perp$ é a métrica de $TM^\perp$ induzida de $\bar{g}$.

A partir das fórmulas de Gauss e de Weingarten podemos deduzir as equações fundamentais de uma imersão isométrica, denominadas de equações de Gauss, Codazzi e Ricci. Para esse fim, tomemos $X, Y, Z \in TM$. Então,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X^\omega \bar{\nabla}_Y^\omega Z &= \bar{\nabla}_X^\omega \nabla_Y^\omega Z + \bar{\nabla}_X^\omega \tilde{B}(Y, Z) \\ &= \nabla_X^\omega \nabla_Y^\omega Z + \tilde{B}(X, \nabla_Y^\omega Z) - \tilde{A}_{\tilde{B}(Y, Z)}(X) + \nabla_X^{\omega^\perp} \tilde{B}(Y, Z),\end{aligned}\tag{6.3}$$

onde a primeira igualdade segue da fórmula de Gauss e a segunda igualdade, das fórmulas de Gauss e Weingarten.

Analogamente,

$$\bar{\nabla}_Y^\omega \bar{\nabla}_X^\omega Z = \nabla_Y^\omega \nabla_X^\omega Z + \tilde{B}(Y, \nabla_X^\omega Z) - \tilde{A}_{\tilde{B}(X, Z)}(Y) + \nabla_Y^{\omega^\perp} \tilde{B}(X, Z).\tag{6.4}$$

Novamente, da fórmula de Gauss segue

$$\bar{\nabla}_{[X, Y]}^\omega Z = \nabla_{[X, Y]}^\omega Z + \tilde{B}([X, Y], Z).\tag{6.5}$$

Subtraindo (6.4) e (6.5) de (6.3), obtemos

$$\bar{R}^\omega(X, Y)Z = R^\omega(X, Y)Z - \tilde{A}_{\tilde{B}(Y, Z)}(X) +\tag{6.6a}$$

$$+ \tilde{A}_{\tilde{B}(X, Z)}(Y) + \nabla_X^{\omega^\perp} \tilde{B}(Y, Z) - \tilde{B}(Y, \nabla_X^\omega Z)\tag{6.6b}$$

$$- (\nabla_Y^{\omega^\perp} \tilde{B}(X, Z) - \tilde{B}(X, \nabla_Y^\omega Z)) - \tilde{B}([X, Y], Z).\tag{6.6c}$$

onde denotamos por $\bar{R}^\omega$ e R^ω os tensores de curvatura de M e N respectivamente.

Tomando as componentes tangenciais e normais de (6.6a), obtemos duas equações:

Equação de Gauss:

$$\begin{aligned}\bar{g}(\bar{R}^\omega(X, Y)Z, W) &= \bar{g}(R^\omega(X, Y)Z, W) - \bar{g}(\tilde{A}_{\tilde{B}(Y, Z)}(X), W) + \\ &\quad + \bar{g}(\tilde{A}_{\tilde{B}(X, Z)}(Y), W) \\ &= \bar{g}(R^\omega(X, Y)Z, W) - \bar{g}(\tilde{B}(X, W), \tilde{B}(Y, Z)) + \\ &\quad + \bar{g}(\tilde{B}(Y, W), \tilde{B}(X, Z)).\end{aligned}\tag{6.7}$$

para $W \in T(N)$.

Equação de Codazzi:

A segunda forma fundamental pode ser considerada como um tensor

$$\tilde{B} : TM \times TM \times TM^\perp \rightarrow \mathcal{D}(M),$$

definido por

$$\tilde{B}(X, Y, \eta) = \bar{g}(\tilde{B}(X, Y), \eta).$$

Para uma conexão de Weyl, sua derivada covariante é dada por

$$(\bar{\nabla}_X^\omega \tilde{B})(Y, Z, \eta) = X(\tilde{B}(Y, Z, \eta)) - \tilde{B}(\nabla_X^\omega Y, Z, \eta) - \tilde{B}(Y, \nabla_X^\omega Z, \eta) - \tilde{B}(Y, Z, \nabla_X^{\omega^\perp} \eta)$$

Primeiramente podemos notar que

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X^\omega \tilde{B})(Y, Z, \eta) &= X(\tilde{B}(Y, Z, \eta)) - \tilde{B}(\nabla_X^\omega Y, Z, \eta) - \tilde{B}(Y, \nabla_X^\omega Z, \eta) - \tilde{B}(Y, Z, \nabla_X^{\omega^\perp} \eta) \\ &= \bar{g}(\nabla_X^{\omega^\perp} \tilde{B}(Y, Z), \eta) - \omega(X) \bar{g}(\tilde{B}(Y, Z), \eta) - \tilde{B}(\nabla_X^\omega Y, Z, \eta) - \tilde{B}(Y, \nabla_X^\omega Z, \eta), \end{aligned}$$

onde $\eta \in (TM)^\perp$.

Tomando a parte normal da equação (6.6a), temos

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{R}^\omega(X, Y)Z, \eta) &= \bar{g}(\nabla_X^{\omega^\perp} \tilde{B}(Y, Z), \eta) - \bar{g}(\tilde{B}(Y, \nabla_X^\omega Z), \eta) - (\bar{g}(\nabla_Y^{\omega^\perp} \tilde{B}(X, Z), \eta) - \\ &\quad - \bar{g}(\tilde{B}(X, \nabla_Y^\omega Z), \eta)) - \bar{g}(\tilde{B}([X, Y], Z), \eta) \\ &= \bar{g}(\nabla_X^{\omega^\perp} \tilde{B}(Y, Z), \eta) - \bar{g}(\tilde{B}(Y, \nabla_X^\omega Z), \eta) - \bar{g}(\tilde{B}(\nabla_X^\omega Y, Z), \eta) - \bar{g}(\nabla_Y^{\omega^\perp} \tilde{B}(X, Z), \eta) + \\ &\quad + \bar{g}(\tilde{B}(X, \nabla_Y^\omega Z), \eta) + \bar{g}(\tilde{B}(\nabla_Y^\omega X, Z), \eta) \\ \bar{g}(\bar{R}^\omega(X, Y)Z, \eta) &= (\nabla_Y^\omega B)(X, Z, \eta) - (\nabla_X^\omega B)(Y, Z, \eta) + \omega(X)B(Y, Z) - \omega(X)B(Y, Z). \end{aligned}$$

Equação de Ricci

Para obter a equação de Ricci, temos

$$\begin{aligned} \bar{R}^\omega(X, Y)\eta &= \bar{\nabla}_X^\omega \bar{\nabla}_Y^\omega \eta - \bar{\nabla}_Y^\omega \bar{\nabla}_X^\omega \eta - \bar{\nabla}_{[X, Y]}^\omega \eta \\ &= \bar{\nabla}_X^\omega (\bar{\nabla}_Y^{\omega^\perp} \eta - \tilde{A}_\eta Y) - \bar{\nabla}_Y^\omega (\bar{\nabla}_X^{\omega^\perp} \eta - \tilde{A}_\eta X) \\ &\quad - \bar{\nabla}_{[X, Y]}^{\omega^\perp} \eta + \tilde{A}_\eta [X, Y] \\ &= \bar{R}^{\omega^\perp}(X, Y)\eta - \tilde{A}_{\bar{\nabla}_Y^{\omega^\perp} \eta} X - \nabla_X^\omega (\tilde{A}_\eta Y) - \tilde{B}(\tilde{A}_\eta Y, X) \\ &\quad - \tilde{A}_{\bar{\nabla}_X^{\omega^\perp} \eta} Y + \nabla_Y^\omega (\tilde{A}_\eta X) + \tilde{B}(\tilde{A}_\eta X, Y) + \tilde{A}_\eta [X, Y] \end{aligned}$$

Multiplicando a expressão por $\zeta \in (TM)^\perp$, observando que $\bar{g}(\tilde{B}(X, Y), \eta) = g(\tilde{A}_\eta X, Y)$ e $g(\tilde{A}_\eta X, Y) = g(X, \tilde{A}_\eta Y)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\bar{R}^\omega(X, Y)\eta, \zeta) &= \bar{g}(R^\omega(X, Y)\eta, \zeta) - \bar{g}(\tilde{B}(\tilde{A}_\eta Y, X), \zeta) \\
&\quad + \bar{g}(\tilde{B}(Y, \tilde{A}_\eta X), \zeta) \\
&= \bar{g}(R^\omega(X, Y)\eta, \zeta) - \bar{g}(\tilde{A}_\zeta \tilde{A}_\eta Y, X) \\
&\quad + \bar{g}(\tilde{A}_\zeta \tilde{A}_\eta Y, X) \\
&= \bar{g}(R^\omega(X, Y)\eta, \zeta) + \bar{g}([\tilde{A}_\zeta, \tilde{A}_\eta]Y, X).
\end{aligned}$$

Capítulo 7

Subvariedades com conexão semi-simétrica

K. Yano [83] mostrou que em uma variedade riemanniana com conexão semi-simétrica o tensor curvatura anula-se se, e somente se, variedade for conformalmente plana. Mais tarde, T. Imai [101],[102] estudou algumas propriedades de hipersuperfícies em uma variedade riemanniana com conexão semi-simétrica, e também as equações de Gauss-Codazzi com relação à conexão semi-simétrica induzida na hipersuperfície. O objetivo deste capítulo é mostrar um exemplo de imersão em um espaço com torção e também mostrar o roteiro de obtenção das equações de Gauss e Codazzi para uma subvariedade N^n imersa em uma variedade de Riemann-Cartan $M^{(n+p)}$ com conexão semi-simétrica.

Como já fizemos uma exposição das imersões isométricas e da conexão semi-simétrica, usaremos tudo que já expomos nos capítulos anteriores, fazendo algumas ressalvas quando necessário.

Seja N^n é uma variedade semi-riemanniana isometricamente imersa em uma variedade semi-riemanniana $M^{(n+p)}$.

A conexão semi-simétrica $\bar{\nabla}^\sigma$ de M induz em N uma conexão ∇^θ dada por

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}^\sigma \bar{Y} = \tilde{B}(X, Y) + \nabla_X^\theta Y, \text{ com } \theta = i^* \sigma \text{ e } g = i^* \bar{g}, \quad (7.1)$$

onde $X, Y \in T(N)$ e $\tilde{B}$ é a segunda forma fundamental em relação a conexão semi-simétrica de M .

Como

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}(X, Y) &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}^{\sigma} \bar{Y} - \nabla_X^{\theta} Y \\
 &= \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} + \sigma(\bar{Y})\bar{X} - \bar{g}(\bar{X}, \bar{Y})\sigma^{\sharp} - (\nabla_X Y + \theta(Y)X - g(X, Y)\theta^{\sharp}) \\
 &= B(X, Y) - g(X, Y)(\sigma^{\sharp})^{\perp}.
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Aqui notamos que o termo correspondente à contribuição da conexão semi-simétrica é de natureza umbílica. Vamos mostrar agora que $\tilde{B}$ é simétrica. Para isso precisamos mostrar que a torção semi-simétrica satisfaz (5.12), isto é,

$$\bar{T}(\bar{X}, \bar{Y})|_N = T(X, Y).$$

Pela definição (4.60) temos

$$\bar{T}(\bar{X}, \bar{Y})|_N = (\sigma(\bar{X})\bar{Y} - \sigma(\bar{Y})\bar{X})|_N = \theta(X)Y - \theta(Y)X = T(X, Y) \text{ em } N \tag{7.3}$$

Aqui usamos os seguintes fatos

$$\sigma(\bar{X}) = \bar{g}(\bar{X}, \sigma^{\sharp})|_N = g(X, (\sigma^{\sharp})^{\perp}) = g(X, \theta^{\sharp}). \text{ e que } \bar{Y}, \bar{X} \text{ são extensões de } X, Y \in T(N).$$

Proposição 15 *A conexão induzida em uma subvariedade de uma variedade de Riemann-Cartan, com conexão de semi-simétrica, também é uma conexão semi-simétrica.*

A prova desta proposição é verificada da mesma maneira que a conexão induzida da estrutura de Weyl.

A equação de Weingarten (com respeito a ∇^{σ}) é dada por

$$\nabla_X^{\sigma} \eta = -\tilde{A}_{\eta}(X) + \nabla_X^{\sigma^{\perp}} \eta, \text{ onde } X \in T(N). \tag{7.4}$$

Com $\tilde{B}(X, Y) = g(\tilde{A}_{\eta}(X), Y)$

De forma análoga aos casos riemanniano e de Weyl, a curvatura normal com respeito a conexão ∇^{σ} é dada por

$$\tilde{H} = \frac{1}{n} \text{tr}_g \tilde{B}.$$

De (7.2) temos

$$\tilde{H} = H - \frac{1}{2} \text{tr}_g (\sigma^{\sharp})^{\perp} \tag{7.5}$$

Proposição 16 *A curvatura média normal $\tilde{H}$ de N com respeito à conexão semi-simétrica coincide com H se, e somente se, o campo vetorial $\sigma^{\sharp}$ é tangente a N .*

Este resultado decorre de (7.5).

Proposição 17 *Uma subvariedade N de uma variedade semi-simétrica M é totalmente umbílica se, e somente se, é totalmente umbílica com relação à conexão de Levi-Civita ∇ de M .*

Prova: Como $\tilde{B}(X, Y)$ já é umbílica da parte que depende da 1-forma σ , basta que $B(X, Y)$ seja umbílica ou geodésica, para que a proposição acima seja verdadeira.

7.1 Equações fundamentais

Para uma variedade de Riemann-Cartan, com uma torção que satisfaça a condição (5.12), podemos usar as fórmulas de Gauss e Weingarten para deduzir as equações fundamentais de uma imersão isométrica levando em conta a torção.

Sejam $X, Y, Z \in TN$, então

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X^T \bar{\nabla}_Y^T Z &= \bar{\nabla}_X^T \nabla_Y^T Z + \bar{\nabla}_X^T \tilde{B}(Y, Z) \\ &= \nabla_X^T \nabla_Y^T Z + \tilde{B}(X, \nabla_Y^T Z) - \tilde{A}_{\tilde{B}(Y, Z)}(X) + D_X^\perp \tilde{B}(Y, Z),\end{aligned}\tag{7.6}$$

onde a primeira igualdade segue da fórmula de Gauss e a segunda igualdade combinamos, Gauss e Weingarten.

Analogamente:

$$\bar{\nabla}_Y^T \bar{\nabla}_X^T Z = \nabla_Y^T \nabla_X^T Z + \tilde{B}(Y, \nabla_X^T Z) - \tilde{A}_{\tilde{B}(X, Z)}(Y) + D_Y^\perp \tilde{B}(X, Z).\tag{7.7}$$

Novamente da fórmula de Gauss segue:

$$\bar{\nabla}_{[X, Y]}^T Z = \nabla_{[X, Y]}^T Z + \tilde{B}([X, Y], Z).\tag{7.8}$$

Subtraindo (7.7) e (7.8) de (7.6) obtemos

$$\begin{aligned}\bar{R}^T(X, Y)Z &= R^T(X, Y)Z - \tilde{A}_{\tilde{B}(Y, Z)}(X) + \tilde{A}_{\tilde{B}(X, Z)}(Y) + D_X^\perp \tilde{B}(Y, Z) - \tilde{B}(Y, \nabla_X^T Z) - \\ &\quad - (D_Y^\perp \tilde{B}(X, Z) - \tilde{B}(X, \nabla_Y^T Z)) - \tilde{B}([X, Y], Z),\end{aligned}$$

onde $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ são, respectivamente a segunda forma e o operador de Weingarten em relação à conexão com torção, e estamos denotando por $\bar{R}^T$ e R^T os tensores de curvatura de M e N , respectivamente.

Temos, ainda,

$$\bar{R}^T(X, Y)Z = R^T(X, Y)Z - \tilde{A}_{\tilde{B}(Y, Z)}(X) + \tilde{A}_{\tilde{B}(X, Z)}(Y) + D_X^\perp \tilde{B}(Y, Z) - \tilde{B}(Y, \nabla_X^T Z) - (D_Y^\perp \tilde{B}(X, Z) - \tilde{B}(X, \nabla_Y^T Z)) - \tilde{B}(\nabla_X^T Y - \nabla_Y^T X - T(X, Y), Z) \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} &= R^T(X, Y)Z - \tilde{A}_{\tilde{B}(Y, Z)}(X) + \tilde{A}_{\tilde{B}(X, Z)}(Y) + (D_X^\perp \tilde{B}(Y, Z) - \tilde{B}(\nabla_X^T Y, Z) - \tilde{B}(Y, \nabla_X^T Z)) - \\ & (D_Y^\perp \tilde{B}(X, Z) - \tilde{B}(X, \nabla_Y^T Z) - \tilde{B}(\nabla_Y^T X, Z)) + \tilde{B}(T(X, Y), Z). \end{aligned}$$

Tomando as componentes tangenciais e normais de (7.9), obtemos duas equações:

• **Equação de Gauss:**

$$\bar{g}(\bar{R}^T(X, Y)Z, W) = \bar{g}(R^T(X, Y)Z, W) - \bar{g}(\tilde{A}_{\tilde{B}(Y, Z)}(X), W) + \bar{g}(\tilde{A}_{\tilde{B}(X, Z)}(Y), W) \quad (7.10)$$

para $W \in TN$.

• **Equação de Codazzi:**

$$(\bar{R}^T(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^T \tilde{B})(Y, Z) - (\nabla_Y^T \tilde{B})(X, Z) + \tilde{B}(T(X, Y), Z). \quad (7.11)$$

Notamos que $D^\perp$ é uma conexão com torção no fibrado normal $TM^\perp$.

Agora particularizemos para uma conexão semi-simétrica, tal que $\bar{\nabla}^\sigma$ e ∇^θ sejam as conexões de M e N , respectivamente. Os tensores de curvatura de $\bar{\nabla}^\sigma$ e ∇^θ são definidos, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \bar{R}^\sigma(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z} &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}^\sigma \nabla_{\bar{Y}}^\sigma \bar{Z} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}}^\sigma \nabla_{\bar{X}}^\sigma \bar{Z} - \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]}^\sigma \bar{Z}, \\ R^\theta(X, Y)Z &= \nabla_X^\theta \nabla_Y^\theta Z - \nabla_Y^\theta \nabla_X^\theta Z - \nabla_{[X, Y]}^\theta Z. \end{aligned}$$

Em seguida, a partir de (7.10), obtemos a equação de Gauss em relação a $\bar{\nabla}^\sigma$ e ∇^θ :

$$\bar{R}^\sigma(W, Z, X, Y) = R^\theta(W, Z, X, Y) + \{\tilde{B}(X, Z)\tilde{B}(Y, W) - \tilde{B}(Y, Z)\tilde{B}(X, W)\}, \quad (7.12)$$

com $W, Z, X, Y \in TM$. A partir de (7.11) obtemos a equação de Codazzi em relação a $\bar{\nabla}^\sigma$ e ∇^θ :

$$\bar{R}^\sigma(\eta, Z, X, Y) = (\nabla_{\tilde{X}}^\theta \tilde{B})(Y, Z) - (\nabla_Y^\theta \tilde{B})(X, Z) + \tilde{B}(\sigma(Y)X - \sigma(X)Y, Z),$$

para $X, Y, Z \in T(N)$.

Agora, vamos supor que M é uma variedade de Riemann-Cartan semi-simétrica conformalmente plana, e que N é uma subvariedade totalmente umbílica. Então, podemos assumir que $\bar{R}^\sigma = 0$ [83], e também que $\tilde{B} = gk$, onde k é o campo de curvatura normal. Em seguida, a partir de (7.12) obtemos

$$R^\theta(W, Z, X, Y) = \{g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)\} |k|^2,$$

o que implica que N é conformalmente plana ($n > 3$) [101].

Assim, em uma variedade Riemann-Cartan semi-simétrica podemos dizer:

Proposição 18 *Uma subvariedade totalmente umbílica imersa em uma variedade Riemann-Cartan semi-simétrica, conformalmente plana, é também conformalmente plana.[102]*

Capítulo 8

EPD com estrutura de Weyl

O conceito de *espaços produtos distorcidos* (*EPD*) foi definido por O'Neill e Bishop em 1969, onde foi utilizado na construção de variedades riemannianas com curvatura seccional negativa [105]. Na Física, esse "cenário" tornou-se muito popular na construção de modelos como os de Randall-Sundrum[27] e supergravidade [106]. De fato, na literatura de dimensões superiores, pode ser encontrado um grande número de trabalhos que utilizam (*EPD*), como por exemplo [107][108][109] onde, é estudado o confinamento geodésico em hipersuperfícies, ou ainda, para mostrar como é possível gerar a aceleração cosmológica [110]. Convém ainda mencionar, que o estudo de espaço-tempo do tipo (*EPD*) é de grande interesse na relatividade geral, pois eles compreendem um amplo conjunto de soluções exatas para as equações de campo de Einstein, tais como: Bertotti-Robinson, Robertson-Walker, Schwarzschild, Reissner-Nordstrom, de Sitter, etc [9].

Em [111] os autores estudam o confinamento de geodésicas em hipersuperfícies para um (*EPD*) $fM^4 \times \mathbb{R}$ com estrutura de Weyl integrável. Convém ainda mencionar, o trabalho pioneiro de Paul Gauduchon, de 1995, que explora variedades do tipo $S^1 \times S^2$ [112]. Um dos objetivos deste capítulo é a extensão dos principais resultados encontrados por [113] para um (*EPD*) n -dimensional, agora para (*EPD*) com estrutura de Weyl.

Antes de tudo, vamos apresentar alguns dos fundamentos da teoria de espaços produtos. Em primeira instância, trataremos aqui de saber, se o produto cartesiano de duas ou mais variedades diferenciáveis é, por sua vez, uma variedade diferenciável. Iniciemos por analisar a seguinte proposição:

Proposição 19 *Sejam M_1 e M_2 duas variedades diferenciáveis, e $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ e $B =$*

$\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ seus respectivos atlases. Temos que $M_1 \times M_2$ é uma variedade, com atlas dado por $A \times B = \{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$

Tal resultado decorre imediatamente do fato do produto cartesiano de conjuntos abertos de um espaço euclidiano ser um conjunto aberto, e do produto cartesiano de aplicações diferenciáveis ser diferenciável. Com efeito, chamemos por variedade-produto a variedade resultante do produto de uma ou mais variedades, nas condições do enunciado da proposição acima.

Utilizando um sistema de coordenadas do produto em $(p, q) \in M_1 \times M_2$ com $p \in M_1$ e $q \in M_2$, não é difícil conferir que:

(a) As projeções naturais:

$$\pi : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1 \text{ enviando } (p, q) \text{ para } p,$$

$$\sigma : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2 \text{ enviando } (p, q) \text{ para } q,$$

são submersões.

(b) Para cada $(p, q) \in M_1 \times M_2$ fixo, as folhas

$$M_1 \times q = \{(r, q) \in M_1 \times M_2 : r \in M_1\}, \text{ folha vertical,}$$

$$p \times M_2 = \{(p, b) \in M_1 \times M_2 : b \in M_2\}, \text{ folha horizontal,}$$

são subvariedades de $M_1 \times M_2$.

(c) Para cada (p, q)

$$\pi|_{(M_1 \times q)} \text{ é um difeomorfismo de } M_1 \times q \text{ em } M_1,$$

$$\sigma|_{(p \times M_2)} \text{ é um difeomorfismo de } p \times M_2 \text{ em } M_2.$$

(d) Os espaços tangentes

$$T_{(p,q)}M_1 \equiv T_{(p,q)}(M_1 \times q) \quad \text{e} \quad T_{(p,q)}M_2 \equiv T_{(p,q)}(p \times M_2),$$

são subespaços do espaço tangente de $M_1 \times M_2$ em (p, q) .

Lema 9 $T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ é a soma direta dos subespaços $T_{(p,q)}M_1$ e $T_{(p,q)}M_2$. Isso quer dizer que cada elemento z de $T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ tem uma expressão única, tal que:

$$z = u + v \quad \text{onde } u \in T_{(p,q)}M_1 \text{ e } v \in T_{(p,q)}M_2.$$

Prova: Como $\pi|_{p \times M_2}$ é constante, $d\pi_{(p,q)} : T_{(p,q)}M_2 \rightarrow T_p(M_1)$ é uma aplicação nula. Entretanto, $d\pi_{(p,q)} : T_{(p,q)}(M_1)$ é um isomorfismo de $T_{(p,q)}M_1$ em $T_p(M_1)$. Assim $T_{(p,q)}(M_1) \cap T_{(p,q)}(M_2) = \emptyset$. Segue, então, que, como $T_{(p,q)}(M_1)$ de dimensão m e $T_{(p,q)}(M_2)$ de dimensão n são subespaços de $T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ de dimensão $m + n$, então:

$$T_{(p,q)}(M_1 \times M_2) = T_pM_1 \times T_qM_2.$$

Definição 34 Se $f \in D(M_1)$, o levantamento de f para $M_1 \times M_2$ é:

$$\tilde{f} = f \circ \pi \in D(M_1 \times M_2).$$

Definição 35 Se $v \in T_pM_1$ e $q \in M_2$, então, o levantamento $\tilde{v}$ de v em p para (p, q) é o único vetor em $T_{(p,q)}M_1$ tal que

$$d\pi(\tilde{v}) = v.$$

Definição 36 Se $X \in \mathcal{L}(M_1)$ é o levantamento de X para $\mathcal{L}(M_1 \times M_2)$, o campo vetorial $\tilde{X}$ é denominado **levantamento vertical** de X , cujo valor em cada (p, q) é o levantamento de X_p para (p, q) . Assim, o levantamento de $X \in \mathcal{L}(M_1)$ para $M_1 \times M_2$ é o único elemento de $\mathcal{L}(M_1 \times M_2)$ que se π -relaciona com X e se σ -relaciona com o campo vetorial nulo em M_2 .

Definição 37 Se $V \in \mathcal{L}(M_2)$, o levantamento de V para $M_1 \times M_2$ é o campo vetorial $\tilde{V}$ denominado **levantamento horizontal** de V , cujo valor em cada (p, q) é o levantamento de V_q para (p, q) . Assim o levantamento de $V \in \mathcal{L}(M_2)$ para $M_1 \times M_2$ é o único elemento de $\mathcal{L}(M_1 \times M_2)$ que se σ -relaciona com V e se π -relaciona com o campo vetorial nulo em M_1 .

Denominaremos por $\mathcal{L}(M_1)$ o conjunto dos *levantamentos horizontais* e por $\mathcal{L}(M_2)$ o conjunto dos *levantamento verticais*.

Corolário 3 Se $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{L}(M_1)$, então, $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]} \in \mathcal{L}(M_1)$, e similarmente para $\mathcal{L}(M_2)$.

Se $\tilde{X} \in \mathcal{L}(M_1)$ e $\tilde{V} \in \mathcal{L}(M_2)$, o $[\tilde{X}, \tilde{V}] = [X, V] = 0$.

Prova: (1) decorre diretamente da linearidade da operação *levantamento* ($\sim$). Enquanto que (2), pode ser facilmente demonstrada usando-se uma base coordenada.

Como pretendemos que estes resultados sejam aplicados a teorias do tipo **Kaluza-Klein** não-compactas, adotaremos o seguinte esquema:

Dadas duas variedades (uma riemanniana e uma lorentziana) (M_1, g_1) e (M_2, g_2) e dada uma função suave $f : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ (doravante chamada de função de distorção), pode-se construir uma variedade de Lorentziana (M, g) , definida como $M = M_1 \times M_2$, e $g = g_1 \oplus e^f g_2$.

Chamamos (M, g) um *espaço produto distorcido* e o denotamos por $M \equiv M_1 \times_f M_2$. O caso em que $\dim M = 4$ (M, g) é um espaço-tempo ordinário, e, portanto, é chamado de "espaço-tempo produto distorcido" (ou simplesmente espaço-tempo distorcido).

1. Definição 38 Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) variedades com métricas semi-riemannianas e $f : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e diferenciável. A variedade produto $M = M_1 \times_f M_2$ é um produto distorcido se estiver munida da seguinte métrica:

$$g(u, v)_{(p, q)} = g_1(d\pi(u), d\pi(v))_p + e^f g_2(d\sigma(u), d\sigma(v))_q \quad (8.1)$$

para todo $(p, q) \in M_1 \times M_2$, $u, v \in T_{(p, q)}(M_1 \times M_2)$.

Aqui chamaremos M^2 de *base* de M , e M^1 , de *fibra*. Objetivamos apresentar a geometria de M em termos da função de distorção F e as geometrias de M^1 e M^2 .

Como no caso de um produto semi-riemanniano, é fácil ver que as folhas horizontais $p \times M^2 = \pi^{-1}(p)$ e as folhas verticais $M^1 \times q = \sigma^{-1}(q)$ são subvariedades semi-riemannianas de M .

A métrica distorcida é caracterizada por:

(1) Para cada $q \in M^2$, a aplicação $\pi|_{(M^1 \times q)}$ é uma isometria em M^1 .

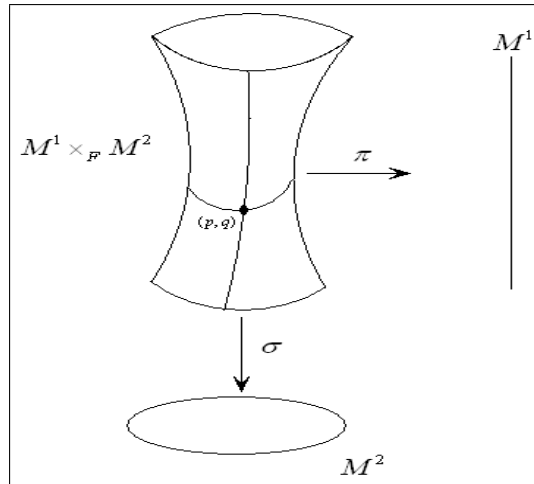


Figura 8.1: Espaço produto distorcido.

- (2) Para cada $p \in M^1$, a aplicação $\sigma|_{(p \times M^2)}$ é uma *homotetia*¹ positiva em M^2 .
- (3) Para cada $(p, q) \in M$, a fibra $M^1 \times q$ e a folha $p \times M^2$ são ortogonais em (p, q) .

Os campos tangentes às folhas horizontais (ou *bases*) $p \times M^2$ são denominados *horizontais*; os campos tangentes às folhas verticais $M^1 \times q$ (ou fibras) são denominados *verticais*.

Denotamos por $T^v(M)$ e $T^h(M)$ os conjuntos dos campos vetoriais tangentes a M respectivamente, horizontais e verticais. Imediatamente, temos que $T^v(M)$ e $T^h(M)$ são subespaços de TM e que vale a soma direta ortogonal

$$TM = T^v(M) \oplus T^h(M).$$

Assim, fazendo uso da notação da teoria de submersões riemannianas[114], as equações fundamentais serão definidas por meio das projeções verticais e horizontais:

$$\mathbf{v} : TM \rightarrow T^v(M) \text{ e } \mathbf{h} : TM \rightarrow T^h(M).$$

Se $E \in T_p M$, denotamos, respectivamente, por $\mathbf{v}(E)$ e $\mathbf{h}(E)$ as projeções ortogonais de E .

Lembremos a noção de levantamento de um campo vetorial em M^1 e M^2 para $M^1 \times M^2$, onde os conjuntos de todos os levantamentos são denotados por $\mathcal{L}(M^1)$ (verticais) e

¹**Homotetia** significa ampliação(positiva) ou redução(negativa) das distâncias dos pontos de um espaço em relação a um ponto fixo.

$\mathcal{L}(M^2)$ (horizontais). Por simplicidade, utilizamos a mesma notação para um campo vetorial e seu levantamento.

A relação do produto distorcido com a fibra M^1 é quase tão simples quanto no caso do produto semi-riemanniano; todavia, a relação com a base M^2 geralmente envolve a função de distorção.

Veremos, agora, como se dão as relações entre as geometrias das folhas horizontas e verticais, quando M possui uma estrutura de Weyl. Aqui adotaremos a seguinte notação:

Seja ω o campo de Weyl de M , então;

$$\rho = \mathbf{v}(\omega) \in \mathcal{L}(M^1) \text{ e } \theta = \mathbf{h}(\omega) \in \mathcal{L}(M^2). \text{ Como } f : M_1 \rightarrow \mathbb{R} \text{ então } \text{grad } f \in \mathcal{L}(M^1)$$

Proposição 20 *Seja (M, g, ∇^ω) com $\nabla g = -2\omega \otimes g$, uma variedade de Weyl, tal que : $M = M_1 \times_f M_2$. Se $X, Y \in \mathcal{L}(M_1)$, e $V, W \in \mathcal{L}(M_2)$. Então, temos o seguinte:*

$$(1) \quad \mathbf{v}(\nabla_X^\omega Y) \in \mathcal{L}(M_1) \text{ é o levantamento de } \nabla_X^\rho Y \text{ em } M_1,$$

$$(2) \quad \mathbf{h}(\nabla_X^\omega Y) = B^1(X, Y) = -g(X, Y)\theta^\sharp,$$

$$(3) \quad \nabla_X^\omega V = \nabla_V^\omega X = g(\tfrac{1}{2} \text{grad } f + \rho^\sharp, X)V + g(\theta^\sharp, V)X,$$

$$(4) \quad \mathbf{h}(\nabla_V^\omega W) \in \mathcal{L}(M_2) \text{ é o levantamento de } \nabla_V^\theta W \text{ em } M_2,$$

$$(5) \quad \mathbf{h}(\nabla_V W) = B^2(V, W) = -g(W, V)(\tfrac{1}{2} \text{grad } f + \rho^\sharp) \text{ em } M_2.$$

Neste ponto, chamemos a atenção de que (1) e (4) seguem das conexões induzidas pela estrutura de Weyl de (M, g, ∇^ω) . Esse problema foi discutido anteriormente no capítulo sobre imersões em espaços de Weyl.

Para demonstrar (2) consideremos a fórmula de Koszul para a conexão de Weyl

$$\begin{aligned} 2g(Z, \nabla_Y^\omega X) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + 2[\omega(X)g(Y, Z) + \omega(Y)g(Z, X) - \\ &\quad - \omega(Z)g(X, Y)] - [g([X, Z], Y) + g([X, Y], Z) + g([Y, Z], X)]; \end{aligned}$$

Introduzindo os campos básicos $X, Y \in \mathcal{L}(M_1)$, e $V, W \in \mathcal{L}(M_2)$, temos

$$2g(V, \nabla_Y^\omega X) = Xg(Y, V) + Yg(V, X) - Vg(X, Y) + \omega(X)g(Y, V) + \omega(Y)g(V, X) - \\ - \omega(V)g(X, Y) - g([X, V], Y) + g([X, Y], V) + g([Y, V], X);$$

Como para o produto de variedades temos $[X, V] = 0$, quando $X \in \mathcal{L}(M_1)$, e $V \in \mathcal{L}(M_2)$ e devido a (8.1), temos que $Vg(X, Y) = Vg_1(X, Y) = 0$. Teremos, portanto,

$$2g(V, \nabla_Y^\omega X) = -2\omega(V)g(X, Y) \\ = -g(\omega^\sharp, V)g(X, Y).$$

Assim,

$$\mathbf{v}(\nabla_Y^\omega X) = B^1(X, Y) = -g(X, Y)\theta^\sharp.$$

A demonstração de (3), segue em duas partes. Primeiro, calculemos a parte vertical:

$$2g(Y, \nabla_X^\omega V) = Vg(X, Y) + Xg(Y, V) - Yg(V, X) + 2(\omega(V)g(X, Y) + \omega(X)g(Y, V) - \\ - \omega(Y)g(V, X)) - g([V, Y], X) + g([V, X], Y) + g([X, Y], V)].$$

Daí segue que

$$g(Y, \nabla_X^\omega V) = g(\omega(V)X, Y),$$

e, assim

$$\mathbf{v}(\nabla_X^\omega V) = \omega(V)X = g(\omega^\sharp, V)X.$$

Agora, calculemos a parte horizontal:

$$2g(W, \nabla_X^\omega V) = Vg(X, W) + Xg(W, V) - Wg(V, X) + 2(\omega(V)g(X, W) + \omega(X)g(W, V) - \\ - \omega(W)g(V, X)) - g([V, W], X) + g([V, X], W) + g([X, W], V)].$$

Temos, então,

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X^\omega V, W) &= X(g(V, W)) + 2g(\omega(X)V, W) \\
&= X(e^f g_2(V, W)) + 2g(g(\omega^\sharp, X)V, W) \\
&= g(\text{grad } f, X)g(V, W) + 2g(g(\omega^\sharp, X)V, W) \\
&= g((g(\text{grad } f + \omega^\sharp, X)V, W),
\end{aligned}$$

assim,

$$\mathbf{h}(\nabla_X^\omega V) = g\left(\frac{1}{2}\text{grad } f + \omega^\sharp, X\right)V.$$

Portanto,

$$\nabla_X^\omega V = g(\text{grad } f + \omega^\sharp, X)V + g(\omega^\sharp, V)X.$$

Para mostrar a simetria, basta considerar que $[X, V] = 0$. Logo

$$\nabla_X^\omega V = \nabla_V^\omega X = g\left(\frac{1}{2}\text{grad } f + \omega^\sharp, X\right)V + g(\omega^\sharp, V)X.$$

Para demonstrar (5) façamos

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_W V, X) &= Wg(V, X) + Vg(X, W) - Xg(W, V) + g([W, V], X) + g([X, W], V) - \\
&\quad - g([V, X], W) + 2(\omega(W)g(V, X) + \omega(V)g(X, W) - \omega(X)g(W, V)) \\
&= -Xg(W, V) - 2\omega(X)g(W, V) \\
&= -g(W, V)(\text{grad } f, X) + 2g(\omega^\sharp, X)g(W, V) \\
&= -g(g(W, V)\text{grad } f, X) + g(2g(W, V)\omega^\sharp, X) \\
&= -g(g(W, V)(\text{grad } f + 2\omega^\sharp, X).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{v}(\nabla_W V) = B^2(W, V) = -g(W, V)\left(\frac{1}{2}\text{grad } f + \rho^\sharp\right).$$

Corolário 4 *Seja um espaço produto distorcido com estrutura de Weyl $(M_1 \times_f M_2, \nabla^\omega)$, com $p \in M_1$ e $q \in M_2$. As folhas $M_1 \times q$ e $p \times M_2$ são totalmente umbílicas.*

Podemos associar os operadores de Weingarten

$$\nabla_X^\omega U = -A_U^1(X) + \mathbf{h}(\nabla_X^\omega U).$$

$$\nabla_U^\omega X = -A_X^2(U) + \mathbf{v}(\nabla_U^\omega X).$$

Podemos ainda calcular sua forma explícita, dado o resultado (3) da proposição acima. Assim,

$$\begin{aligned} A_U^1(X) &= -\mathbf{v}(\nabla_X^\omega U) = -g(\theta^\sharp, V)X, \\ A_X^2(U) &= -\mathbf{h}(\nabla_U^\omega X) = g\left(\frac{1}{2} \text{grad } f + \rho^\sharp, X\right)U. \end{aligned}$$

Ou, ainda, como múltiplos da identidade, temos

$$A_U^1 = -g(\theta^\sharp, V) \cdot \mathbf{I} \text{ e } A_X^2 = g\left(\frac{1}{2} \text{grad } f + \rho^\sharp, X\right) \cdot \mathbf{I}.$$

8.1 Geodésicas em *EPD* com estrutura de Weyl

Se γ é uma curva em $(M_1 \times_f M_2, \nabla^\omega)$, ela pode ser decomposta em $\gamma(\lambda) = (\alpha(\lambda), \beta(\lambda))$, onde α e β são as projeções em M_1 e M_2 , respectivamente. Procuraremos as condições para que γ seja uma geodésica (auto-paralela) em M . Assim, enunciemos a seguinte proposição.

Proposição 21 *Uma curva $\gamma = (\alpha, \beta)$ em $(M_1 \times_f M_2, \nabla^\omega)$ é uma geodésica se, e somente se,*

$$(1) \quad \alpha'' = g(\beta', \beta')\left(\frac{1}{2} \text{grad } f + \rho^\sharp\right) - 2g(\rho^\sharp, \beta')\alpha', \text{ em } M_1;$$

$$(2) \quad \beta'' = g(\alpha', \alpha')\theta^\sharp - g(\text{grad } f + 2\rho^\sharp, \alpha')\beta' \text{ em } M_2.$$

Prova:

O resultado é de carácter local, e assim, basta tomar um intervalo na vizinhança de $p \in M$.

Notemos que se $\gamma(p)$ não é nem horizontal, nem vertical, então, sendo (α, β) curvas regulares, podemos supor que α é uma curva integral de X em M_1 e β é uma curva integral de V em M_2 . Com $X \in \mathcal{L}(M_1)$ e $V \in \mathcal{L}(M_2)$, γ é uma curva integral de $\gamma' = X + V$, Assim,

$$\gamma'' = \nabla_{\gamma'}^\omega \gamma' = \nabla_{X+V}^\omega (X + V) = \nabla_X^\omega X + \nabla_X^\omega V + \nabla_V^\omega X + \nabla_V^\omega V$$

Evidentemente $\gamma'' = 0$ se, e somente se, $\mathbf{h}(\gamma'') = 0$ e $\mathbf{v}(\gamma'') = 0$ isto é,

$$\nabla_X^\rho X + B^2(V, V) + 2\mathbf{v}(\nabla_V^\omega X) = 0.$$

$$\nabla_V^\theta V + B^1(X, X) + 2\mathbf{h}(\nabla_V X) = 0.$$

Assim, pela proposição anterior, temos

$$\begin{aligned}\nabla_X^\rho X &= g(V, V)\left(\frac{1}{2}\text{grad } f + \rho^\sharp\right) - 2g(\theta^\sharp, V)X \\ &= g(\beta', \beta')\left(\frac{1}{2}\text{grad } f + \rho^\sharp\right) - 2g(\theta^\sharp, \beta')\alpha' .\end{aligned}$$

E ainda

$$\begin{aligned}\nabla_V^\theta V &= -B^1(X, X) - 2\mathbf{h}(\bar{\nabla}_V X) \\ &= g(\alpha', \alpha')\theta^\sharp - g(\text{grad } f + 2\theta^\sharp, \alpha')\beta' .\end{aligned}$$

Podemos fazer algumas suposições para saber quando as curvas α e β serão geodésicas em M_1 e M_2 ; Assim,

(1) Para a curva vertical, α , podemos ainda constatar que

$$\alpha'' = g(\beta', \beta')\left(\frac{1}{2}\text{grad } f + \rho^\sharp\right) - 2g(\theta^\sharp, \beta')\alpha' .$$

A parte $-2g(\theta^\sharp, \beta')\alpha'$ pode ser retirada por uma reparametrização, de acordo com (4.11). Todavia a parte $g(\beta', \beta')(\frac{1}{2}\text{grad } f + \rho^\sharp)$ não é absorvida pela reparametrização, e, não se anula, a menos que

$$\rho^\sharp = -\frac{1}{2}\text{grad } f, \text{ ou } g(\beta', \beta') = 0.$$

Assim, teríamos que, ou a parte vertical do campo de Weyl seria integrável; nesse caso, devido ao resultado da proposição acima, teríamos que as folhas horizontais M_2 seriam geodésicas, pois

$$B^2(V, W) = -g(W, V)\left(\frac{1}{2}\text{grad } f + \rho^\sharp\right) = 0,$$

ou β' seria do tipo luz.

Assim, reparametrizando e impondo as condições acima, teríamos

$$\alpha'' = 0.$$

(2) Para o caso de β teríamos

$$\beta'' = g(\alpha', \alpha')\theta^\sharp - g(\text{grad } f + 2\rho^\sharp, \alpha')\beta',$$

O termo $-g(\text{grad } f + 2\rho^\sharp, \alpha')\beta'$ anula-se pela mesma condição de integrabilidade imposta a $\rho^\sharp$. Todavia, o termo $g(\alpha', \alpha')\theta^\sharp$ só se anula quando $\omega^\sharp$ é vertical, isso é, $\theta^\sharp$ é um vetor nulo; nesse caso, teríamos que as folhas verticais seriam geodésicas.

8.2 Curvatura em espaços produtos distorcidos

Neste seção, vamos expressar a curvatura de $(M_1 \times_f M_2, \nabla^\omega)$ de f , do campo de Weyl ω (componentes do ρ, θ) e das curvaturas de M_1 e M_2 . Para auxiliar neste cálculo, faremos uso (com algumas adaptações) das equações fundamentais de Gauss, Codazzi e Ricci, que já apresentamos anteriormente em duas ocasiões distintas.

(a) equações de Gauss(6.7):

$$\begin{aligned} g(R^\omega(X, Y)Z, Z') &= (R^\rho(X, Y)Z, Z') - g(B^1(X, Z'), B^1(Y, Z)) + \\ &+ g(B^1(X, Z), B^1(Y, Z')), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(R^\omega(U, V)W, W') &= g(R^\theta(U, V)W, W') - g(B^2(U, W'), B^2(V, W)) + \\ &+ g(B^2(U, W), B^2(V, W')). \end{aligned}$$

(b) equações de Codazzi

$$\begin{aligned} g(R^\omega(X, Y)Z, V) &= -2[(\nabla_Y B^1)(X, Z, V) - (\nabla_X B^1)(Y, Z, V) - \\ &- \omega(Y)g(B^1(X, Z), V) - \omega(X)g(B^1(Y, Z), V)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(R^\omega(U, V), W, X) &= -2[(\nabla_V B^2)(U, W, X) - (\nabla_U B^2)(V, W, X) + \\ &+ \omega(V)g(B^2(U, W), X) - \omega(U)g(B^2(V, W), X)]. \end{aligned}$$

(c) equação de Ricci

$$g(R^\omega(X, Y)U, V) = g(R^\theta(X, Y)U, V) + g([A_U^1, A_V^1]X, Y),$$

$$g(R^\omega(U, V)X, Y) = g(R^\rho(U, V)X, Y) + g([A_X^2, A_Y^2]U, V).$$

Após as devidas substituições e cálculo direto, temos

•

$$g(R^\omega(X, Y)Z, Z') = g(R^\rho(X, Y)Z, Z') + g(\rho^\sharp, \rho^\sharp)\{g(X, Z)g(Y, Z') - g(X, Z')g(Y, Z)\}$$

•

$$g(R^\omega(U, V)W, W') = g(R^\theta(U, V)W, W') + g((\frac{1}{2}\text{grad } f + \rho^\sharp), (\frac{1}{2}\text{grad } f + \rho^\sharp))\{(g(U, W)g(V, W') - g(U, W')g(V, W))\},$$

•

$$g(R^\omega(X, Y)Z, V) = \omega(V) \left\{ g(X, \frac{1}{2}\text{grad } f + \rho^\sharp)g(Y, Z) - g(Y, \frac{1}{2}\text{grad } f + \rho^\sharp)g(X, Z) \right\},$$

•

$$g(R^\omega(U, V)W, X) = -\{\omega(U)g(V, W) - \omega(V)g(U, W)\}g(X, \frac{1}{2}\text{grad } f + \rho^\sharp),$$

•

$$g(R^\omega(X, Y)U, V) = -2d\omega(X, Y)g(U, V).$$

•

$$g(R^\omega(U, V)X, Y) = -2d\omega(U, V)g(X, Y).$$

Agora, que estamos de posse das componentes

$$R^\omega(X, Y, Z, Z'), R^\omega(U, V, W, W'), R^\omega(X, Y, Z, V), \\ R^\omega(U, V, W, X), R^\omega(X, Y, U, V), R^\omega(U, V, X, Y);$$

calcularemos as demais. Podemos lançar mão da seguinte propriedade do tensor de Riemann na geometria de Weyl:

$$R^\omega(A, B, C, D) + R^\omega(A, B, D, C) = -4d\omega(A, B)g(C, D),$$

o que nos permite calcular as curvaturas abaixo:

•

$$g(R^\omega(X, Y)V, Z) = -g(R^\omega(X, Y)Z, V) = -\omega(V)\{g(X, \frac{1}{2}\text{grad } f - \rho^\sharp)g(Y, Z) - \\ - g(Y, \frac{1}{2}\text{grad } f - \rho^\sharp)g(X, Z)\};$$

$$g(R^\omega(U, V)X, W) = \{\omega(U)g(V, W) - \omega(V)g(U, W)\} (g(X, \frac{1}{2}\text{grad } f + \rho^\sharp)).$$

Continuando, temos que

•

$$g(R^\omega(X, V)Y, Z) = \omega(V)\{g(X, Y)g(Z, \frac{1}{2}\text{grad } f + \rho^\sharp) + g(X, Z)g(Y, \frac{1}{2}\text{grad } f + \rho^\sharp) - \\ - g(X, \text{grad } f)g(Y, Z)\}.$$

E ainda

•

$$g(R^\omega(V, X)Y, Z) = -g(R(X, V)Y, Z),$$

•

$$g(R^\omega(X, U)Y, V) = -H_f^\omega(X, Y)g(U, V) - g(X, Y)[(\nabla_U^\omega \omega)(V) + \omega(U)\omega(V)] - \\ - g(U, V)[(\nabla_X^\omega \omega)(Y) + \omega(X)\omega(Y) + X(f)\omega(Y) + Y(f)\omega(X)] - \\ - g(X, Y)g(U, V)[\omega(\text{grad } f) + g(\omega^\sharp, \omega^\sharp)],$$

onde $H_f^\rho(X, Y)$ é o Hessiano de f com a conexão de Weyl.

Proposição 22 *Seja $(M_1 \times_f M_2, \nabla^\omega)$ um (EPD) com estrutura de Weyl, e R^ω sua curvatura com relação à conexão de Weyl. Se $X, Y, Z, \in \mathcal{L}(M_1)$ e $U, V, W \in \mathcal{L}(M_2)$, então:*

1. $R^\omega(X, Y)Z = R^\rho(X, Y)Z - |\rho^\sharp|^2 \{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\} + \{g(\frac{1}{2}\text{grad } f + \rho^\sharp, X)g(Y, Z) - \\ - g(\frac{1}{2}\text{grad } f + \rho^\sharp, Y)g(X, Z)\}\rho^\sharp.$
2. $R^\omega(U, V)W = R^\theta(U, V)W - |\frac{1}{2}\text{grad } f + \rho^\sharp|^2 \{g(U, V)W - g(V, W)U\} - \{g(\theta^\sharp, U)g(V, W) - \\ - g(\theta^\sharp, V)g(U, W)\}(\frac{1}{2}\text{grad } f + \rho^\sharp).$

$$\begin{aligned}
3. \quad R^\omega(V, X)Y &= H_f^\rho(X, Y)V + g(X, Y)\{\mathbf{v}(\nabla_V^\omega \omega^\#) - \omega(V)\rho^\#\} + \{(\nabla_X^\omega \omega)(Y) + \omega(X)\omega(Y) + \\
&\quad X(f)\omega(Y) + \\
&\quad + Y(f)\omega(X) + \omega(\text{grad } f) + g(\omega^\#, \omega^\#)\}V.
\end{aligned}$$

A prova desta proposição decorre dos cálculos anteriores.

Capítulo 9

Confinamento de geodésicas em hipersuperfícies em Riemann-Cartan

A investigação detalhada do comportamento qualitativo das soluções para o sistema referente ao movimento geodésico em (EPD) foi realizado nos casos em que o *bulk* é penta-dimensional em geometria riemanniana em [10][109], em geometria de Weyl em [6]. Aqui, vamos voltar nossa atenção para o caso em que o *bulk* é uma variedade de Riemann-Cartan, ou seja, dotado de torção. Uma das motivações para estudar o movimento geodésico na presença de torção é a seguinte. Como é sabido, no cenário mundo-brana a estabilidade do confinamento de campos de matéria no nível quântico é possível, assumindo uma interação da matéria com um campo escalar. Um exemplo de como este mecanismo funciona é bem ilustrado por um modelo de campo hipotético concebido por Rubakov, em que férmions podem ser confinados em uma brana, interagindo com um campo escalar que depende apenas da dimensão extra [4]. Por outro lado, o tipo de confinamento em que estamos interessados é puramente geométrico, e isso significa que a única força atuando sobre as partículas é a força gravitacional. Em uma contexto puramente clássico (não-quântico), gostaríamos de ter um mecanismo eficaz, que não seja a presença de um campo escalar *ad hoc*, para impedir a fuga das partículas massivas da hipersuperfícies. Duas possibilidades de implementar um programa deste tipo já foram estudados. Um deles é supor uma interação direta entre as partículas e um campo escalar [119]. Seguindo esta abordagem, demonstra-se que o confinamento estável em uma brana com espessura é possível através de uma modificação da lagrangiana da partícula. Uma segunda abordagem recorre apenas à geometria: por

exemplo, a uma estrutura geométrica de Weyl. Neste caso, é o campo de Weyl que fornece o mecanismo necessário para o confinamento e a estabilização do movimento de partículas na brana [6]. Nesta fase, gostaríamos de saber se o confinamento clássico de partículas e fótons também pode ser obtido através de um campo de torção ou seja, uma geometria de Riemann-Cartan.

A seguir, fazemos uma pequena revisão do confinamento geodésico no caso riemanniano [108].

9.1 Movimento geodésico em um *EPD* riemanniano.

Consideremos um *EPD* penta-dimensional $M^5 =_f M^4 \times \mathbb{R}$ com métrica $\bar{g} = e^f h \oplus k$, onde M^4 é o espaço-tempo com assinatura $(+ - - -)$. Adotaremos coordenadas locais $\{y^a = (x^\alpha, y^4)\}$ para $p \in M^5$. Usaremos técnicas da teoria de sistemas dinâmicos (ver seção 2 do apêndice). Especificamente estamos a considerar, nessa seção, que M^5 possui o seguinte elemento de linha

$$ds^2 = e^{2f} h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - dy^2, \quad (9.1)$$

onde $f = f(y)$ e $h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}(x)$.

Em coordenadas locais, a equação das geodésicas em M^5 é dada por

$$\frac{d^2 y^a}{d\lambda^2} + {}^{(5)}\Gamma_{bc}^a \frac{dy^b}{d\lambda} \frac{dy^c}{d\lambda} = 0. \quad (9.2)$$

Para esta métrica temos que:

$${}^{(5)}\Gamma_{44}^\mu = 0 \quad (9.3)$$

$${}^{(5)}\Gamma_{4\nu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\beta} g_{\beta\nu,4} = \frac{df}{dy} \delta_\nu^\mu = f' \delta_\nu^\mu. \quad (9.4)$$

O movimento 4-dimensional é dado por:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + {}^{(4)}\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = -2f' \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda}. \quad (9.5)$$

É evidente que se tomarmos que $y = y_0 = \text{constante}$, o lado direito fica identicamente nulo. Contudo, o movimento na dimensão extra é dado por:

$$\frac{d^2y}{d\lambda^2} + f' e^{2f} h_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (9.6)$$

De (9.1), podemos tomar

$$\epsilon = e^{2f} h_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} - \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2. \quad (9.7)$$

Assim, a equação (9.6) reduz-se à equação:

$$\frac{d^2y}{d\lambda^2} + f' \left(\epsilon + \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 \right) = 0. \quad (9.8)$$

A equação (9.8) diz respeito à parte pentadimensional do movimento geodésico. Como já exposto, os valores de ϵ definem que tipo de geodésica estaremos a estudar. Decerto, nos interessamos por partículas cujo movimento satisfaz o princípio da causalidade. Assim os valores de ϵ deverão ser 0 ou 1. A equação (9.8) é uma equação diferencial de segunda ordem, que em princípio, pode ser resolvida se admitirmos conhecida a função $f' = f'(y)$. Reciprocamente, se $y = y(\lambda)$ é então conhecido, conseqüentemente $f = f(y)$ será determinado (a menos de uma constante de integração), contanto que possamos escrever $\lambda = \lambda(y)$.

9.2 Análise qualitativa do movimento na quinta dimensão

Recordemos que a hipersuperfície fixa as condições de limite para o fator de distorção. Se o fator de distorção $f = f(y)$ não é conhecido *a priori*, não disporemos de uma maneira para obter informações conclusivas sobre o movimento na quinta dimensão. Contudo, aqui mostraremos que uma análise qualitativa via sistemas dinâmicos nos fornecerá informações relevantes sobre tal movimento.

Para efetuar a análise definimos a variável $q = \frac{dy}{d\lambda}$ e, assim, passamos a considerar (9.8) como o seguinte sistema dinâmico autônomo (vide seção 2 do apêndice).

$$\frac{dy}{d\lambda} = q, \quad (9.9)$$

$$\frac{dq}{d\lambda} = F(q, y), \quad (9.10)$$

com

$$F(q, y) = -f'(\epsilon + q^2). \quad (9.11)$$

Na investigação de sistemas dinâmicos, os *pontos de equilíbrio* desempenham um papel fundamental, que, neste caso particular do sistema dinâmico, é caracterizado por

$$q = 0 \quad (9.12)$$

$$F(q, y) = 0. \quad (9.13)$$

O conhecimento desses pontos, juntamente com as propriedades de estabilidade, permite inferir algumas informações relativas aos tipos de comportamentos permitidos ao sistema. Assim, se para uma geodésica particular conhecemos t como uma função do parâmetro λ , isto é, $t = t(\lambda)$, então, como $\frac{dt}{d\lambda} \neq 0$ e, sabendo *a priori* o comportamento de $y = y(\lambda)$, a análise qualitativa nos permitirá deduzir a evolução temporal do movimento de uma partícula (ou feixes de luz) na quinta dimensão.

9.2.1 Movimento geodésico pentadimensional de partículas massivas nas imediações de uma hipersuperfície tetradimensional

Iniciemos por considerar o caso das partículas, com massa de repouso não-nula ($\epsilon = 1$), cujo movimento na quinta dimensão é governado pelo sistema dinâmico:

$$\frac{dy}{d\lambda} = q \quad (9.14)$$

$$\frac{dq}{d\lambda} = -f'(1 + q^2). \quad (9.15)$$

O ponto de equilíbrio é determinado por $q = 0$ e os zeros da função $f'(y)$ (se existirem), que denotamos, genericamente, por y_0 . Estas soluções são interpretadas como pontos críticos no diagrama de fase, e correspondem a curvas que se mantêm completamente em uma hipersuperfície (ou folha) Σ_0 de uma folheação $y = \text{constante}$, em M^5 .

A existência de pontos de equilíbrio do sistema dinâmico (9.14) tem a importante consequência de que as geodésicas do *bulk* e as da hipersuperfície ($y = y_0 = \text{constante}$) coincidem. Em [113] para métrica (9.1) a da hipersuperfície Σ_0 tem curvatura extrínseca dada por

$$B_N(\partial_\alpha, \partial_\beta) = -f' e^{2f} h_{\alpha\beta}(x), \quad (9.16)$$

que é claramente nula para os pontos de equilíbrio, onde $f' = 0$. Então, na ausência de pontos de equilíbrio, (i.e. $f' \neq 0$), a curvatura extrínseca não se anula. Com efeito, a hipersuperfície não será geodésica em nenhum ponto.

Para obter informações sobre os possíveis modos de comportamento de partículas e raios de luz em tais hipersuperfícies é importante estudar a natureza e estabilidade dos correspondentes pontos de equilíbrio. Isto pode ser feito linearizando-se as equações (9.14) (ver seção 2 do apêndice). Temos, então, as equações:

$$\frac{dy}{d\lambda} = q, \quad (9.17)$$

$$\frac{dq}{d\lambda} = -f''(y_0)y(1 + q^2), \quad (9.18)$$

que podem ser representados pela equação matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f''(y_0)(1 + q^2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ q \end{pmatrix}$$

cujo polinômio característico é:

$$\lambda^2 + f''(y_0)y(1 + q^2) = 0$$

Estudando os autovalores da correspondente matriz jacobiana nos pontos de equilíbrio e supondo que a função $f'(y)$ se anula em pelo menos algum ponto y_0 , podemos prontamente mostrar que os correspondentes autovalores são determinados pelo sinal da segunda derivada $f''(y_0)$. Assim, as seguintes possibilidades emergem para os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico:

Caso I. Se $f''(y_0) > 0$, então, o ponto de equilíbrio ($q = 0, y = y_0$) é um *vórtice* ou *centro* (ver **figura 9.1**). Este representa o caso no qual as soluções próximas ao ponto de equilíbrio tem a topologia de um círculo. Neste caso, o diagrama de fase consiste em curvas fechadas que descrevem o movimento da partícula oscilando em torno da hipersuperfície $\Sigma_0(y = y_0)$, indefinidamente (ver figura 9.1).

As amplitudes das oscilações dependerão somente das condições iniciais. Notemos que a existência de tais movimentos cíclicos é independente do espaço-tempo tetradimensional, exceto pelas condições $f'(y_0) = 0$ e $f''(y_0) > 0$, o fator de distorção $f(y)$ continuando completamente arbitrário. A presença de tais pontos de equilíbrio tem como consequência o

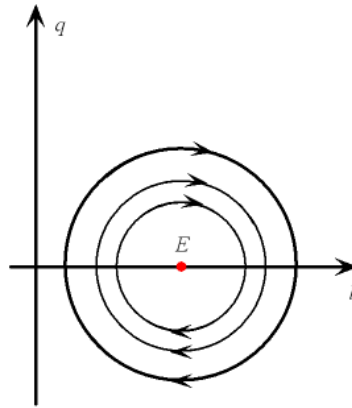


Figura 9.1: O ponto de equilíbrio E no caso onde $f(l_0) > 0$.

quase-confinamento de partículas o que pode ser entendido como um exemplo de *hipersuperfícies quase totalmente geodésicas*.

Caso II. Se $f''(y_0) < 0$, então, o ponto $(q = 0, y = y_0)$ é um *ponto de sela*. Neste caso, a solução correspondente ao ponto de equilíbrio E é instável. Isto quer dizer que a menor perturbação leva a uma divergência exponencial das soluções. (ver figura 9.3).

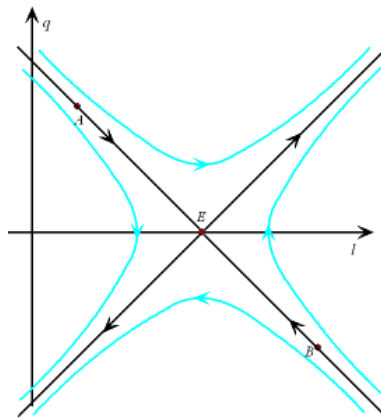


Figura 9.2: Quando $f''(l_0) < 0$ o ponto de equilíbrio é um ponto de sela. Neste caso o confinamento é altamente instável. A única exceção corresponde às linhas AE e BE , ao longo das quais as partículas são atraídas de volta para a folha.

Um exemplo deste confinamento altamente instável é dado pelo fator de distorção

$$f(y) = -b \ln \cosh(cy), \quad (9.19)$$

onde b e c são constantes positivas. Aqui temos um único ponto de equilíbrio, em $y = 0$. É fácil verificar que $f''(0) < 0$ neste caso. Aproveitando este exemplo, notamos que para

grandes valores de y o fator de distorção (9.19) aproxima-se daquele presente na métrica de Randall-Sundrum [27],[28]

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - dy^2 \quad (9.20)$$

onde k é uma constante. Neste caso $f'(y) = \mp k$, conforme o valor de y seja positivo ou negativo. Então, para $y \neq 0$ não existem pontos de equilíbrio e, portanto, não há confinamento de partículas devido, puramente, a efeitos geométricos. No entanto, neste limite de fina espessura, se assumirmos nulo o valor da curvatura extrínseca da brana $y = 0$, então, (9.14) implica em confinamento. Todavia, como apontado em [115] este é confinamento é altamente instável no sentido de que qualquer perturbação transversal no movimento das partículas massivas ao longo da brana acarretará uma fuga para a dimensão extra. Porém, este caso está fora do elenco das métricas que estamos considerando aqui, pois, o fator de distorção não é suave (a primeira derivada de $f(y)$ com respeito à coordenada extra não é contínua em $y = 0$).

Caso III. Se $f''(y_0) = 0$, então, ambos os autovalores são nulos, o que corresponde a um caso degenerado. Para continuar analisando qualitativamente as soluções próximas do ponto de equilíbrio, neste caso, necessitaríamos conhecer a derivada terceira (ou de ordem superior) da função $f(y)$. Não desejamos considerar este caso em sua generalidade. No entanto, se $f(y)$ é constante (caso IV), então, podemos, facilmente, desenhar um diagrama de fase global do sistema.

Caso IV. Se $f(y) = \text{constante}$, então $f'(y)$ se anula para todos os valores de y , o que implica que há uma infinidade de pontos de equilíbrio não-isolados, ou seja, temos uma linha contínua de pontos de equilíbrio ($q = 0$). Perturbações ao longo desta linha são neutramente estáveis, o que implica que partículas colocadas em qualquer uma das hipersuperfícies da folheação, $y = y_0 = \text{const}$, irão permanecer lá, a menos que adquiram uma velocidade transversal à hipersuperfície.

Caso V. Se não temos pontos de equilíbrio, ou seja, se no fator de distorção $f(y)$ não existe ponto de retorno para nenhum valor de y , então, não podemos ter confinamento clássico de partículas nas hipersuperfícies devido somente a efeitos geométricos. Um exemplo desta situação é ilustrado pelo fator de distorção

$$f(y) = \frac{1}{2} \ln (\Lambda y^2/3) \quad (9.21)$$

considerado na referência [116].

Notamos que mesmo quando não há pontos de equilíbrio, a representação da dinâmica ainda pode ser obtida se $f(y)$ é conhecido, obtendo-se a primeira integral do sistema definido por (9.9) e (9.10). Isto pode ser facilmente feito escrevendo-se este sistema como a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dq} = -\frac{q}{f'^2(\epsilon + q^2)}, \quad (9.22)$$

a qual pode ser prontamente integrada, levando a

$$f(y) = -\ln \sqrt{\epsilon + q^2} + B, \quad (9.23)$$

onde B é uma constante de integração.

9.3 Movimento geodésico na presença de torção

Consideremos o *EPD* penta-dimensional $M^5 = \mathbb{R} \times_f M^4$, com métrica $\bar{g} = k \oplus e^f g$ e torção $\bar{T}$, onde M^4 é o espaço-tempo com assinatura $(+ - - -)$. Adotando coordenadas locais $\{y^a = (y^4, x^\alpha)\}$ para $p \in M^5$, o elemento de linha correspondente ao tensor métrico $\bar{g}$ será escrito como

$$ds^2 = \bar{g}_{ab} dy^a dy^b,$$

ou ainda

$$ds^2 = e^f g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - (dy^4)^2.$$

Em coordenadas locais, a equação das geodésicas em M^5 é dada por

$$\frac{d^2 y^a}{d\lambda^2} + {}^{(5)}\Gamma_{bc}^a \frac{dy^b}{d\lambda} \frac{dy^c}{d\lambda} = 0, \quad (9.24)$$

onde λ é um parâmetro afim e ${}^{(5)}\Gamma_{bc}^a$ são as componentes da conexão que de acordo com (4.59), em coordenadas temos ${}^{(5)}\Gamma_{bc}^a = \{_{bc}^a\} - K_{bc}^a$, com $\{_{bc}^a\}$, sendo os símbolos de Christoffel e K_{bc}^a os componentes da contorção. Em virtude de (5.12), e adotando $K_{b4}^4 = 0$, o movimento das partículas massivas na quinta dimensão é dado por

$$\frac{d^2 y}{d\lambda^2} + f' \left(1 + \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 \right) = K_{(\alpha\beta)}^4 \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} + K_{4\alpha}^4 \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda}, \quad (9.25)$$

onde $K_{(\alpha\beta)}^4$ denota a parte simétrica de $K_{\alpha\beta}^4$.

A equação (9.25) não descreve o movimento ao longo da dimensão extra desacoplado do seu movimento no espaço-tempo tetra-dimensional. Entretanto, existem alguns casos particulares nos quais, o movimento na quinta dimensão é independente do movimento das demais dimensões. Claro, o caso trivial, seria quando $K_{(\alpha\beta)}^4$ e $K_{4\alpha}^4 = \bar{T}_{\alpha 4}^4$ são nulos. Nessa situação, o campo de torção não influencia o movimento da partícula ao longo da quinta dimensão. Um caso mais interessante, é quando $K_{(\alpha\beta)}^4$ é proporcional a $e^f g_{\alpha\beta}$, como por exemplo, $K_{(\alpha\beta)}^4 = \psi(y)e^f g_{\alpha\beta}$ e $K_{4\alpha}^4 = 0$. Então, a equação (9.25) fica

$$\frac{d^2 y}{d\lambda^2} + \left(1 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2\right) (f'(y) - \psi(y)) = 0. \quad (9.26)$$

A presença de $\psi(y)$ modifica a dinâmica dos sistema (9.8) levando a uma nova representação no plano de fase onde os pontos de equilíbrio e as propriedades de estabilidade da solução devam mudar completamente. Para ilustrar, consideremos o caso de uma variedade riemanniana $\bar{M}$ penta-dimensional, com métrica do tipo Mashhoon-Wesson[119]:

$$ds^2 = \frac{\Lambda^2}{3} y^2 g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - dy^2. \quad (9.27)$$

Foi mostrado em [6] que nesse caso não existe confinamento de partículas nas hipersuperfícies $y = \text{const.}$ Agora, analisemos o caso em que

$$K_{\alpha\beta}^4 = \psi(y)g_{\alpha\beta} + L_{\alpha\beta}, \quad (9.28)$$

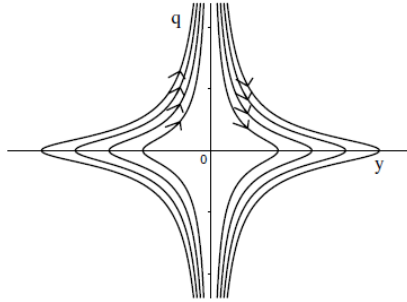
com $L_{\alpha\beta}$ anti-simétrico. Com essa escolha, vamos mostrar que é possível criar um mecanismo de confinamento induzido somente pela contorção. Com este objetivo em mente, vamos definir

$$\psi(y) = \frac{1}{y} - a(y - y_0), \quad (9.29)$$

onde a é uma constante. Neste caso, todas as geodésicas do tipo-tempo estão limitadas a M^4 . Além disso, a estabilidade do confinamento neste caso é regida inteiramente pelo sinal da constante a . Novamente, todos estes resultados podem ser obtidos da análise do sistema dinâmico (9.9)(9.10) realizada na vizinhança dos pontos de equilíbrio, agora com a função $F(q, y)$ modificada devido à presença de torção. O novo sistema dinâmico é dado por

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\lambda} &= q \\ \frac{dq}{d\lambda} &= -(1 + q^2)(f'(y) - \psi(y)). \end{aligned} \quad (9.30)$$

Para o caso da métrica (9.27) de Mashhon-Wesson $f'(y) = \frac{1}{y}$, sem o campo de torção. Nesse caso é claro que não há pontos de equilíbrio (já que $f'(y)$ não tem raízes). Isso significa que nenhuma contenção de partículas massivas é possível, nas hipersuperfícies $y = y_0 = \text{const.}$



Quando não há torção não existem pontos de equilíbrio. As partículas entram através das folhas sem ser aprisionadas pela hipersuperfície Σ .

Por outro lado, se "ligarmos" o campo de torção dada por (9.28), é usarmos (9.29), o sistema (9.30) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\lambda} &= q \\ \frac{dq}{d\lambda} &= -a(y - y_0)(1 + q^2). \end{aligned} \tag{9.31}$$

Em relação ao sistema dinâmico acima, temos um ponto de equilíbrio E em $q = 0, y = y_0$. Esta solução corresponde à linha de universo de uma partícula massiva presa sob a ação do campo de torção na hipersuperfície $y = y_0$. É notório que se $a > 0$, então, o ponto de equilíbrio E corresponde a um *centro*. Em outras palavras, as soluções próximas, E , possuem a topologia de um círculo no diagrama de fase do sistema dinâmico (9.31).

As curvas fechadas no plano de fase descrevem o movimento de partículas oscilando em torno da hipersuperfície $y = y_0$. Neste caso, estamos na presença de uma espécie quase-confinamento, onde as partículas nas proximidades de $y = y_0$ irão oscilar em torno deste ponto, entrando e saindo da hipersuperfície indefinidamente. Por outro lado, se $a < 0$, E é um *ponto de sela*. Neste caso, embora as partículas ainda estejam restritas pelo campo de torção a mover-se sobre Σ , fora deste o confinamento é altamente instável. Praticamente, qualquer pequena perturbação no movimento 5-dimensional da partícula pode fazer com que ela escape de Σ .

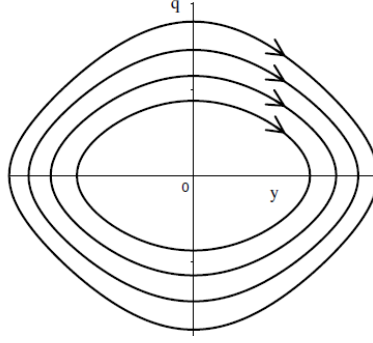


Figura 9.3: O efeito do campo de torção é "fechar" os caminhos no diagrama de fase, com o aparecimento de uma hipersuperfície atratora, retratada no diagrama como o equilíbrio ponto E .

Antes de concluir esta seção, vamos considerar a questão de saber se (9.28) representa uma escolha possível, ou seja, uma escolha legítima para as componentes do campo de contorção. Para responder a esta questão basta escolher todos os componentes do tensor de torção da seguinte maneira:

$$T_{\beta\alpha}^{\alpha} = -\delta_{\beta}^{\alpha}\psi(y), \quad T_{\alpha\beta}^4 = 2L_{\alpha\beta}. \quad (9.32)$$

Um cálculo simples é suficiente para nos convencer de que (9.32) vai levar a (9.28).

Capítulo 10

Conclusão

Podemos dizer que a concepção e o desenvolvimento da presente tese foram motivados pelo seguinte princípio: a crença de que a contribuição que a geometria contemporânea pode dar à Física moderna não se limita ao restrito universo da geometria riemanniana. Acreditamos que a complexidade das novas teorias do espaço-tempo, as quais buscam desesperadamente uma unificação da gravitação com as demais interações fundamentais da Natureza ainda podem fazer uso da riqueza de possibilidades que hoje nos é oferecida pelas chamadas estruturas não-riemannianas. Aqui é importante salientar que, quando nos referimos a “estruturas não-riemannianas” estamos, na verdade, nos restringindo àquelas geometrias que diferem da geometria riemanniana apenas no que diz respeito à escolha da conexão afim. Portanto, não estamos considerando esquemas ainda mais gerais como a geometria de Finsler, geometria não-comutativa, etc. Mesmo assim, é surpreendente constatar como as mais simples generalizações da teoria formulada por Riemann, tais como a geometria de Weyl e a geometria de Riemann-Cartan, possuem novos graus de liberdade que podem, de certa maneira “geometrizar” certos processos físicos, sem a necessidade de postular, de maneira *ad hoc*, a existência de campos sem nenhuma vinculação com a natureza geométrica do espaço-tempo. Um exemplo bem ilustrativo dessa afirmação nos é dada pelo confinamento clássico de partículas numa brana o qual pode ser induzido por um campo de torção convenientemente escolhido.

Assim, nesta tese chamamos a atenção para aspectos ainda pouco explorados da geometria de Weyl e de Riemann-Cartan, trazendo a tona suas formulações independentes de coordenadas locais pouco utilizadas na Física, assim como suas possíveis aplicações em teorias

de dimensões superiores. De certo modo, podemos dizer que nosso trabalho tem um caráter híbrido. Se por um lado, nosso objetivo em última instância é a investigação física do espaço-tempo, ao longo do caminho inevitavelmente tivemos de nos deparar com noções, teoremas e fatos matemáticos ainda desconhecidos. Consideramos que a descoberta, formulação e demonstração desses fatos puramente matemáticos fazem parte de nossa contribuição original à presente tese. Assim, por exemplo, podemos citar, dentre os resultados que obtivemos: a formulação da teoria de imersões isométricas considerando variedades de Riemann-Cartan e com não-metricidade, juntamente com a concepção de subvariedades umbílicas e geodésicas para variedades de Weyl e Riemann-Cartan semi-simétricas; a obtenção das equações de Gauss-Codazzi nesses espaços; geodésicas e curvatura em espaços produtos distorcidos (EPDs) com estrutura de Weyl, e outros tópicos. Como aplicação, mostramos como a umbilicidade das subvariedades que descrevem o espaço-tempo em algumas teorias de dimensões superiores é determinante no confinamento dos fótons. Finalmente, aplicando o formalismo não-riemanniano à Física, mostramos como é possível realizar o confinamento de partículas em hipersuperfícies (branas) através da presença de um campo de torção. Este tipo de confinamento é, digamos, um análogo geométrico do confinamento obtido por Rubakov, em 1988[4], através de um campo escalar físico cujo papel confinante é aqui desempenhado pela torção do espaço-tempo.

Capítulo 11

Apêndice

11.1 Tensores

A noção de campo tensorial em uma variedade generaliza as noções de funções de valor real, campo vetorial e 1-forma. Tensores ocorrem em muitas formas diferentes, mas a sua propriedade característica é sempre a multilinearidade.

Definição 39 *Define-se o produto cartesiano B_r^s de $r(T_p M^*)$ por $s(T_p M)$ da seguinte maneira:*

$$B_r^s := \underbrace{T_p^* M \times \dots \times T_p M^*}_r \times \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_s$$

Isto é,

$$B_r^s = \{(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s)\}$$

Definição 40 *Um tensor T do tipo (r, s) em $p \in M$ é um funcional linear sobre B_r^s , isso é*

$$T : B_r^s \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) \rightarrow T(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s)$$

e linear nas componentes.

O espaço de todos os tensores em $p \in M$ é denominado o produto tensorial $T_A^r(p)$

$$T_s^r(M) := \underbrace{T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p M^*}_r \times \underbrace{T_p M \otimes \dots \otimes T_p M}_s$$

Definição 41 *Sejam T e $\tilde{T} \in T_s^r(p)$ dois tensores do mesmo tipo. Definimos a soma $(T + \tilde{T})$ por*

$$(T + \tilde{T}) = T(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) + \tilde{T}(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s),$$

e o produto por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, por

$$(\alpha T)(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s) := \alpha T(\omega^1, \dots, \omega^r, Y_1, \dots, Y_s)$$

Com essas regras, $T_s^r(p)$ é um espaço vetorial real de dimensão $r + s$.

Sejam

$$X_i \in T_p M \text{ com } i = 0, \dots, r,$$

$$\omega^j \in T_p^* M \text{ com } j = 0, \dots, s$$

Denotemos por

$$(X_1 \otimes X_2 \otimes \dots \otimes X_r \otimes \omega^1 \otimes \omega^2 \otimes \dots \otimes \omega^s)$$

o elemento de $T_s^r(p)$, que quando atua sobre

$$(\eta^1, \dots, \eta^r, Y_1, \dots, Y_s) \in B_r^s$$

dá o número

$$(X_1 \otimes \dots \otimes X_r \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^s)(\eta^1, \dots, \eta^r, Y_1, \dots, Y_s) := \\ X_1(\eta^1) \dots X_r(\eta^r) \omega^1(Y_1) \dots \omega^s(Y_s).$$

Similarmente, se $T \in T_s^r(p)$ e $A \in T_l^k(p)$, então, denotaremos por $T \otimes A$ o elemento de $T_{s+l}^{r+k}(p)$ que transforma $(\omega^1, \dots, \omega^r, \dots, \omega^{r+k}, X_1, \dots, X_A, \dots, X_{s+l})$ no número real

$$T \otimes A(\omega^1, \dots, \omega^r, \dots, \omega^{r+k}, X_1, \dots, X_A, \dots, X_{s+l}) = \\ T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) A(\omega^1, \dots, \omega^k, X_1, \dots, X_l).$$

Então, $T \otimes A$ é um tensor do tipo $(r + k, s + l)$, o chamado produto tensorial de T e A . Se $k = l = 0$, A é uma função $f \in \mathcal{D}(M)$, e então, teremos

$$T \otimes f = fT.$$

Assim, se A é também do tipo $(0,0)$, o produto tensorial reduz-se a multiplicação ordinária em $\mathcal{D}(M)$.

Evidentemente, o produto tensorial é $\mathcal{D}(M)$ –bilinear, ou seja, se T e $\tilde{T}$ são do mesmo tipo, então

$$(fT + g\tilde{T}) \otimes B = f(T \otimes B) + g(\tilde{T} \otimes B),$$

havendo uma propriedade semelhante para B . Além disso, é imediato constatar a partir da definição, que o produto tensorial é associativo. Assim, $A \otimes B \otimes C$ está bem definido para tensores de quaisquer tipos. No entanto, o produto tensorial geralmente não é comutativo. Por exemplo, em coordenadas locais $\{x^i\}$ teremos,

$$\begin{aligned} dx^1 \otimes dx^2(\partial_1, \partial_2) &= dx^1(\partial_1)dx^2(\partial_2) = 1, \\ dx^2 \otimes dx^1(\partial_1, \partial_2) &= dx^2(\partial_1)dx^1(\partial_2) = 0; \end{aligned}$$

portanto, $dx^1 \otimes dx^2 \neq dx^2 \otimes dx^1$. Por outro lado, as funções comutam no produto como um todo:

$$f(A \otimes B) = fA \otimes B = A \otimes fB.$$

Com este produto $\otimes$ o espaço dos tensores em p forma uma álgebra sobre $\mathbb{R}$.

11.1.1 Interpretações

Se $\omega \in T^*(M)$ e $X \in TM$, a função $\omega(X)$ é $\mathcal{D}(M)$ –linear em TM ; portanto é um campo tensorial $(0,1)$. De fato, pode-se mostrar que cada campo tensorial $(0,1)$ está associado a uma 1–forma. Então, escrevemos simplesmente

$$T_1^0(M) = T^*(M).$$

Há duas interpretações menos óbvias que serão usadas freqüentemente.

1. Se $V \in TM$ temos, por definição, que

$$V(\omega) = \omega(V) \quad \forall \omega \in T^*(M).$$

A aplicação $V : T^*(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ é $\mathcal{D}(M)$ –linear, portanto, é um $(1,0)$ campo tensorial. Cada campo tensorial $(1,0)$ em M surge, desta forma, a partir de um único campo vetorial. Então, escrevemos

$$T_0^1(M) = TM.$$

2. Se $A : TM^s \rightarrow \mathcal{D}(M)^1$ é $\mathcal{D}(M)$ –linear, define-se $\bar{A} : T^*(M) \times TM^s \rightarrow \mathcal{D}(M)$ por

$$\bar{A}(\omega, X_1, \dots, X_s) = \omega(A(X_1, \dots, X_s)), \quad \forall \omega \in T^*(M).$$

$\bar{A}$ é evidentemente $\mathcal{D}(M)$ –multilinear, sendo, portanto um campo tensorial de ordem $(1, s)$. Devemos considerar A como um campo tensorial, utilizando a fórmula acima somente quando necessário.

Tensores de ordem $(0, s)$ são denominado *covariantes*, enquanto tensores de ordem $(r, 0)$ com $r > 1$ são contravariantes. Por exemplo, funções com valor real e 1–formas são covariantes; campos de vetoriais são *contravariante*. Um tensor de ordem (r, s) é *misto* se nem r e nem s são nulos. Observemos que a definição de produto tensorial mostra que, se A é covariante e B contravariante então, $A \otimes B = B \otimes A$.

11.1.2 Bases e componentes tensoriais

Lema 10 *Sejam $\{e^i\}$ e $\{e_j\}$ duas bases duais de $T_p M$ e $T_p^* M$, respectivamente, então*

$$\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}\}$$

com $i_k, j_l = 1, \dots, n$, é uma base de $T_s^r(p)$.

De forma que se $T \in T_s^r(p)$, escrevemos

$$T = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s},$$

onde $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ são as componentes de T nessa base.

Usualmente, T é chamado de tensor r vezes contravariante e s vezes covariante, e os componentes são dadas por:

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s})$$

¹onde $\Xi(M)^s := \underbrace{\Xi(M) \times \dots \times \Xi(M)}_{s\text{-vezes}}$

A álgebra do espaço vetorial $T_s^r(p)$ pode ser escrita em termos de componentes de tensores em uma base coordenada como segue:

$$\begin{aligned} (T + A)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= T_{j_1 \dots j_A}^{i_1 \dots i_r} + A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \\ (aT)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= aT_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \end{aligned}$$

Com o produto $\otimes$ para $T \in T_A^r(p)$ e $A \in T_l^k(p)$, temos

$$(T \otimes A)_{j_1 \dots j_{s+l}}^{i_1 \dots i_{r+k}} = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} A_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$$

Decorre da definição de variedade que as componentes dos tensores estão definidas a menos de mudança de coordenadas, ou seja, difeomorfismos que transformam as componentes quando a base coordenada de $T_s^r(M)$ muda.

Então, se $\{\tilde{e}^i\}$ e $\{\tilde{e}_j\}$ são duas bases duais de $T_p M$ e $T_p^* M$, respectivamente, elas podem ser reescritas em termo das bases $\{e^a\}$ e $\{e_b\}$ de forma

$$\begin{aligned} \tilde{e}^i &= \Lambda_a^i e^a \\ \tilde{e}_j &= \Lambda_j^b e_b \end{aligned}$$

onde Λ_a^i e Λ_j^b são matrizes $n \times n$ não-singulares. Como as bases $\{\tilde{e}^i\}$ e $\{\tilde{e}_j\}$ são duais, temos

$$\begin{aligned} \delta_j^i &= \tilde{e}^i(\tilde{e}_j) = \Lambda_a^i e^a(\Lambda_j^b e_b) = \Lambda_a^i \Lambda_j^b e^a(e_b) = \Lambda_a^i \Lambda_j^b \delta_b^a \\ \delta_j^i &= \Lambda_a^i \Lambda_j^a. \end{aligned}$$

Isso quer dizer que Λ_a^i e Λ_j^b são matrizes mutualmente inversas.

As componentes do tensor $T \in T_s^r(p)$ nas bases $\{\tilde{e}^i\}$ e $\{\tilde{e}_j\}$ são dadas por

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s})$$

e estão relacionadas às componentes de T nas bases $\{\tilde{e}^i\}$ e $\{\tilde{e}_j\}$, por

$$\begin{aligned} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= T(\Lambda_{a_1}^{i_1} e^{a_1} \otimes \dots \otimes \Lambda_{a_r}^{i_r} e^{a_r} \otimes \Lambda_{j_1}^{b_1} e_{b_1} \otimes \dots \otimes \Lambda_{j_A}^{b_A} e_{b_s}) \\ &= \Lambda_{a_1}^{i_1} \dots \Lambda_{a_r}^{i_r} \Lambda_{j_1}^{b_1} \dots \Lambda_{j_A}^{b_s} T(e^{a_1} \otimes \dots \otimes e^{a_r} \otimes e_{b_1} \otimes \dots \otimes e_{b_s}) \\ &= \Lambda_{a_1}^{i_1} \dots \Lambda_{a_r}^{i_r} \Lambda_{j_1}^{b_1} \dots \Lambda_{j_A}^{b_s} T_{b_1 \dots b_s}^{a_1 \dots a_r}. \end{aligned}$$

11.1.3 Contração

Há uma notável operação denominada *contração* que diminui a ordem dos tensores de ordem (r, s) para tensores de ordem $(r - 1, s - 1)$. A definição geral decorre do seguinte caso especial.

Lema 11 *Há uma única aplicação $\mathcal{D}(M)$ –linear $\mathbf{C} : T_1^1(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$, denominados $(1, 1)$ contração, de tal forma que $\mathbf{C}(X \otimes \omega) = \omega(X) \forall X \in TM$ e $\omega \in T^*(M)$.*

Prova: Uma vez que $\mathbf{C}$ é $\mathcal{D}(M)$ –linear, $\mathbf{C}$ será uma operação pontual. Em coordenadas locais, o campo tensorial A de ordem $(1, 1)$ pode ser escrito como

$$A = A^i{}_j (\partial_i \otimes dx^j).$$

Uma vez que $\mathbf{C}(\partial_i \otimes dx^j)$ deve ser $dx^j(\partial_i) = \delta_i^j$, temos

$$\mathbf{C}(A) = A^i{}_i = A(\partial_i \otimes dx^i).$$

Então, $\mathbf{C}$ tem as propriedades necessárias pelo menos nestas coordenadas locais. Para obter a aplicação desejada de maneira global basta mostrar que esta definição é independente da escolha do sistema de coordenadas. Logo, escolhendo um outro sistema de coordenadas locais $\{y^k\}$ temos

$$\begin{aligned} A\left(\frac{\partial}{\partial y^k} \otimes dy^k\right) &= A\left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i} dx^i, \frac{\partial x^j}{\partial y^k} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial y^k} A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_i^j A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= A\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^i}\right). \end{aligned}$$

Evidentemente a contração $(1, 1)$ está intimamente relacionada à noção de traço matricial, como veremos mais adiante.

Para estender uma contração $\mathbf{C}$ para tensores de tipo superior, basta especificar um índice covariante e um índice contravariante, e aplicar $\mathbf{C}$ a estes.

Suponha que $A \in T_s^r(M)$ e $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq s$. Fixemos as 1–formas $\omega^1, \dots, \omega^{r-1}$ e os campos vetoriais $X_1, \dots, X_{s-1}$. Então, a função

$$(\omega, X) \rightarrow A(\omega^1, \dots, \omega^i, \dots, \omega^{r-1}, X_1, \dots, X_j, \dots, X_{s-1})$$

é um tensor $(1, 1)$ que pode ser escrita como

$$A(\omega^1, \dots, \cdot, \dots, \omega^{r-1}, X_1, \dots, \cdot, \dots, X_{s-1}),$$

uma contração aplicando a A , produz uma função real denotada por

$$(\mathbf{C}_j^i A)A(\omega^1, \dots, \cdot, \dots, \omega^{r-1}, X_1, \dots, \cdot, \dots, X_{s-1}).$$

Evidentemente $\mathbf{C}_j^i A$ é $\mathcal{D}(M)$ -multilinear nos seus argumentos. Por isso, $\mathbf{C}_j^i A$ é um tensor do tipo $(r-1, s-1)$, a chamada de contração (i, j) de A . Por exemplo, se A é um campo tensorial $(2, 3)$, então, $\mathbf{C}_3^1 A$ é um campo tensorial $(1, 2)$ dado por

$$(\mathbf{C}_3^1 A)(\omega, X, Y) = \mathbf{C}\{A(\cdot, \omega, X, Y, \cdot)\}.$$

Em um sistema de coordenadas locais, as componentes de $\mathbf{C}_3^1 A$ são

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_3^1 A)_{ij}^k &= (\mathbf{C}_3^1 A)(dx^k, \partial_i, \partial_j) = \mathbf{C}\{A(\cdot, dx^k, \partial_i, \partial_j, \cdot)\} \\ &= A(dx^m, dx^k, \partial_i, \partial_j, \partial_m) = A^{mk}_{ijm}. \end{aligned}$$

Corolário 5 *Seja $A \in T_s^r(M)$ tal que $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq A$, e $A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$. Com relação a uma base de coordenadas locais, as componentes de $\mathbf{C}_j^i A$ na mesma base são*

$$A^{i_1 \dots, m, \dots, i_r}_{j_1 \dots, m, \dots, j_s}$$

Decomposição Tensorial

Definição 42 *A parte simétrica de um tensor T do tipo $(2, 0)$ é o tensor $A(T) \in T_0^2(p)$ definido por:*

$$A(T)(\omega, \eta) := \frac{1}{2}\{T(\omega, \eta) + T(\eta, \omega)\}; \forall \omega, \eta \in T_p^* M.$$

As componentes de $A(T)$ em uma dada base $\{\partial_i\}$ em $T_p M$ e uma base $\{dx^\beta\}$ em $T_p^* M$ são:

$$\begin{aligned} A(T)(dx^\alpha, dx^\beta) &= A^{ij}(\partial_i \otimes \partial_j)(dx^\alpha, dx^\beta) \\ &= A^{ij} \partial_i(dx^\alpha) \partial_j(dx^\beta) \\ &= A^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Com efeito,

$$A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\{T^{\alpha\beta} + T^{\beta\alpha}\}.$$

Em geral, pode-se definir as componentes simétricas de um tensor $T \in T_r^s(p)$ com qualquer número de índices covariantes ou contravariantes da seguinte maneira:

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_s}_{(\beta_1 \dots \beta_r)} := \frac{1}{r!} \sum_{(\beta_1 \dots \beta_r)} T^{\alpha_1 \dots \alpha_s}_{\beta_1 \dots \beta_r},$$

onde a soma é realizada sobre todas as permutações dos índices $\beta_1 \dots \beta_r$. Por exemplo,

$$T^{\alpha}_{(\beta\gamma\eta)} = \frac{1}{3!}\{T^{\alpha}_{\beta\gamma\eta} + T^{\alpha}_{\beta\eta\gamma} + T^{\alpha}_{\gamma\beta\eta} + T^{\alpha}_{\gamma\eta\beta} + T^{\alpha}_{\eta\beta\gamma} + T^{\alpha}_{\eta\gamma\beta}\}.$$

Um tensor é chamado simétrico em relação aos índices se ele coincide com sua correspondente parte simétrica, por exemplo,

$$T_{\alpha\beta} = T_{(\alpha\beta)} \iff T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$$

Definição 43 *Da mesma forma que definimos a parte simétrica, definimos a parte anti-simétrica $\mathcal{A}(T)$ de um tensor $T \in T_0^2(p)$ por:*

$$A(T)(\omega, \eta) := \frac{1}{2}\{T(\omega, \eta) - T(\eta, \omega)\}; \forall \omega, \eta \in T_p^*M.$$

Assim,

$$A(T)^{\alpha\beta} \equiv T^{[\alpha\beta]} := \frac{1}{2}\{T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha}\}.$$

De forma geral para $T \in T_r^s(p)$, temos:

$$T^{[\alpha_1 \dots \alpha_A]}_{\beta_1 \dots \beta_r} := \frac{1}{r!} \sum_{(\beta_1 \dots \beta_r)} (-1)^m T^{\alpha_1 \dots \alpha_A}_{\beta_1 \dots \beta_r}$$

onde m é a ordem da permutação.

Por exemplo:

$$T^{\alpha}_{[\beta\gamma\eta]} = \frac{1}{3!}\{T^{\alpha}_{\beta\gamma\eta} - T^{\alpha}_{\beta\eta\gamma} + T^{\alpha}_{\gamma\beta\eta} - T^{\alpha}_{\gamma\eta\beta} + T^{\alpha}_{\eta\beta\gamma} - T^{\alpha}_{\eta\gamma\beta}\}$$

Um tensor é chamado anti-simétrico nesses índices, se for igual à sua parte anti-simétrica. Se $T^{\alpha\beta} = T^{[\alpha\beta]}$ é anti-simétrico, então $T^{(\alpha\beta)} = 0$. Além disso, dado $T \in T_0^2(p)$, temos sempre que:

$$T^{\alpha\beta} = T^{[\alpha\beta]} + T^{(\alpha\beta)}$$

Um subconjunto particularmente importante de tensores são os de ordem $(0, k)$, que são assimétricos em todas as posições $k : \Lambda_k(p) \subset T_k^0(p)$. É evidente que $k \leq n$, com n a dimensão da variedade. O conjunto $\Lambda_k(p)$ é chamado o espaço de k -formas em p de M . Se A e B são ambas p e q -formas, podemos definir a $(p+q)$ -forma $A \wedge B$, onde $\wedge$ é o produto tensorial anti-simetrizado,

$$A \wedge B := \mathcal{A}(A \otimes B)$$

ou seja, $A \wedge B$ é um tensor do tipo $(0, p+q)$, cujos componentes são dadas por:

$$(A \wedge B)_{\alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1 \dots \beta_q} := A_{[\alpha_1 \dots \alpha_p} B_{\beta_1 \dots \beta_q]}$$

Por exemplo, dado $A, B \in \Lambda_1(p)$, então:

$$\begin{aligned} (A \wedge B)_{\alpha\beta} &= A_{[\alpha} B_{\beta]} \\ &= \frac{1}{2} \{A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha\}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (B \wedge A)_{\alpha\beta} &= B_{[\alpha} A_{\beta]} \\ &= \frac{1}{2} \{B_\alpha A_\beta - B_\beta A_\alpha\} \\ &= (-1)^{1 \cdot 1} (A \wedge B)_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Em geral

$$(A \wedge B) = (-1)^{p \cdot q} (B \wedge A),$$

onde A é uma p -forma e B é uma q -forma.

Se considerarmos os escalares como 0-formas, o produto $\wedge$ é chamado *produto exterior*, o qual, define uma álgebra sobre o espaço de formas,

$$\Lambda(p) = \bigcup_k^n \Lambda_k(p),$$

chamada de *álgebra de Grassmann* das formas. Além disso, se $\{E^\alpha\}$ é uma base de 1-formas, então

$$E^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge E^{\alpha_p}$$

é uma base de p -formas, ou seja, Se A é uma p -forma podemos expressar A como

$$A = A_{[\alpha_1 \dots \alpha_p]} E^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge E^{\alpha_p}.$$

11.2 Sistemas Dinâmicos

Um sistema dinâmico é um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem em n variáveis $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, que descrevem a evolução temporal do estado de um sistema. Essas equações possuem a seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, \mu), \quad (11.1)$$

com $\mathbf{x} \in \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^N$, $\mu \in V \subset \mathbb{R}^P$, com U e V conjuntos abertos em $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^P$, respectivamente.

Na literatura da teoria de sistemas dinâmicos temos as seguintes definições:

- $\mathbf{x}$ é chamado *vetor de estado*;
- $F(\mathbf{x})$ corresponde à evolução do sistema (descreve a dinâmica), e descreve a *trajetória* do sistema;
- *trajetória* é a sequência de estados exibida por um sistema dinâmico durante sua evolução temporal.
- O conjunto de valores que toma $\mathbf{x}$ é denominado **espaço de fase**.

11.2.1 Sistemas autônomos

Definição 44 Chamam-se autônomos os sistemas de equações diferenciais invariantes sob translações do tempo. Isto é:

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) \quad (11.2)$$

É claro que um sistema será autônomo se, e somente se, os lados direitos das equações não dependerem explicitamente do tempo.

Estabilidade de um sistema autônomo

Definição 45 Um vetor $\mathbf{x}_0$ em $\mathbb{R}^n$ se diz um ponto crítico ou de equilíbrio para o sistema autônomo se $F(\mathbf{x}_0) = 0$.

Neste contexto, o primeiro problema da teoria da estabilidade é o de determinar as condições sob as quais as soluções de (11.2) que partem das vizinhanças de um ponto de

equilíbrio para o sistema permanecem sempre perto desse ponto, ponto este que denominamos ponto de *equilíbrio estável*, e as condições sob as quais as soluções não permanecem por perto, caso que corresponde a um *equilíbrio instável*.

Classificação dos pontos de equilíbrio dos sistemas autônomos no plano

Dada uma equação

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad (11.3)$$

com $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, onde $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma matriz constante 2×2 , define um sistema autônomo linear no plano.

Uma vez solucionada (11.3), poder-se-ão traçar as curvas $x_1(t)$ vs t e $x_2(t)$. Também é possível traçar uma curva $x_1(t)$ vs $x_2(t)$, em um plano $x_1 \times x_2$ conhecido como o *plano de fase*. A curva resultante é uma trajetória de (11.3), e pode visualizar-se como uma curva paramétrica definida por $(x_1(t), x_2(t))$.

A solução de (11.3) depende das condições iniciais. Com efeito, a trajetória também dependerá das condições iniciais. Sobre o mesmo plano de fase se podem traçar diferentes trajetórias obtidas com distintas condições iniciais; o resultado disso é o que chamamos *diagrama de fase ou Retrato de fase*. A seguir, mostramos alguns diagramas de fase típicos de um sistema dinâmico planar nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio:

A **Figura 10.1** mostra os diagramas de fase típicos de sistemas lineares estáveis e a **Figura 10.2** mostra os diagramas de fase típicos de sistemas lineares instáveis. Devemos ressaltar que a forma dos diagramas de fase depende fundamentalmente dos auto-valores de A .

11.3 Sistemas não lineares

Um sistema autônomo não-linear de segunda ordem é definido por duas equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

onde f e g não são simples combinações lineares das variáveis x e y . Não existem técnicas analíticas gerais para resolver esse tipo de equação, e métodos numéricos apresentam mais problemas do que no caso de equações lineares. No entanto, a análise gráfica no espaço de fase pode fornecer muitas informações sobre o comportamento do sistema. Uma forma eficaz de determinar a estabilidade de um sistema dinâmico não-linear é linearização. O propósito deste método é determinar se um ponto crítico é estável, estipulando que nas proximidades deste ponto o comportamento desse sistema se aproxime de um sistema linear.

Portanto, nas vizinhanças do ponto crítico (u, v) , as duas funções podem ser escritas na forma de uma série de Taylor:

$$f(x, y) = f(u, v) + (x - u) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(u, v)} + (y - v) \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(u, v)} + \dots$$

$$g(x, y) = g(u, v) + (x - u) \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(u, v)} + (y - v) \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(u, v)} + \dots$$

Como (u, v) é um ponto crítico do sistema, $f(u, v)$ e $g(u, v)$ serão nulas. Com efeito, se mudarmos a origem das coordenadas para o ponto crítico (u, v) , numa vizinhança da origem, o sistema pode ser aproximado pelo seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(u, v)} & \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(u, v)} \\ \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(u, v)} & \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(u, v)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Essa matriz, obtida a partir das derivadas das funções de estado, designa-se por **matriz jacobiana**.

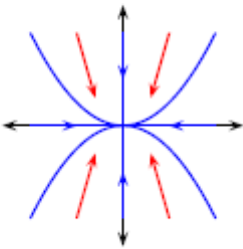
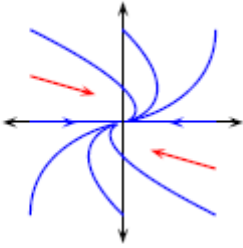
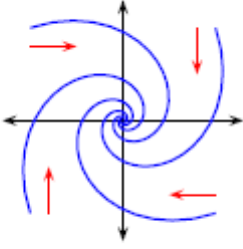
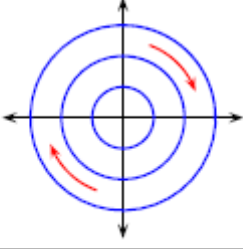
Nome	Retrato	Auto-valores	Exemplo
Estável Pontos Nodais.		Reais Negativos	$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $x_1(t) = x_{10}e^{-t}$ $x_2(t) = x_{20}e^{-2t}$
Estável Um ponto Nodal.		Reais Negativos Degenerados	$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $x_1(t) = (x_{10} + tx_{20})e^{-t}$ $x_2(t) = x_{20}e^{-t}$
Estável Sifão Ponto Focal		Complexos de Parte Real Negativa	$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ $x_1(t) = x_{10}e^{-2t} \cos t + x_{20}e^{-2t} \sin t$ $x_2(t) = -x_{10}e^{-2t} \sin t + x_{20}e^{-2t} \cos t$
Estável Vórtice Ponto de vórtice		Imaginários Puros	$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $x_1(t) = x_{10} \cos t + x_{20} \sin t$ $x_2(t) = -x_{10} \sin t + x_{20} \cos t$

Figura 11.1: Retratos de fase estáveis típicos

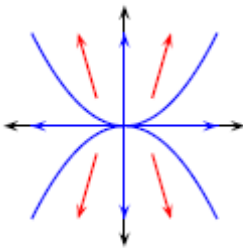
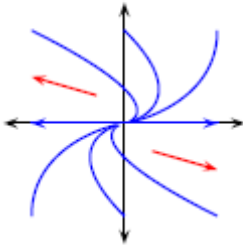
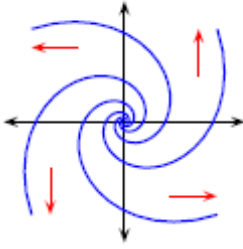
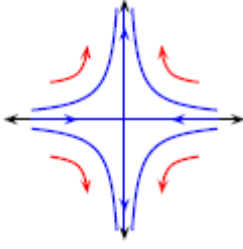
Nome	Retrato	Auto-valores	Exemplo
Instável Pontos Nodais.		Reais Positivos	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10}e^t$ $x_2(t) = x_{20}e^{2t}$	
Instável		Reais Positivos Degenerados	$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = (x_{10} + tx_{20})e^t$ $x_2(t) = x_{20}e^t$	
Instável Sifão Ponto Focal		Complexos de Parte real Positiva	$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10}e^{2t} \cos t + x_{20}e^{2t} \sin t$ $x_2(t) = -x_{10}e^{2t} \sin t + x_{20}e^{2t} \cos t$	
Instável Ponto sela		Reais de sinais Diferentes	$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10}e^{-t}$ $x_2(t) = x_{20}e^t$	

Figura 11.2: Retratos de fase instáveis típicos

Referências Bibliográficas

- [1] Eddington, A., *The Mathematical Theory of Relativity*, Chelsea Publishing Company, New York, 1975.
- [2] Weyl, H., *Space-Time-Matter*, translation from the 4th edition, Dover Publications, 1950.
- [3] L. P. Eisenhart, *Non-Riemannian Geometry*, Colloquium Publications of this Society, vol. 8, 1927.
- [4] Rubakov, V. A., and M. E. Shaposhnikov. “Do we live inside a domain wall?” *Physics Letters B* 125:136–138, 1983.
- [5] C. Romero ; J. B. Formiga ; C. Dariescu., *Fermion Confinement Induced by Geometry. Gravitation & Cosmology*, v. 17, p. 252-258, ; Meio de divulgação: Impresso; Série: 3; 2011.
- [6] Dahia, F. ; G. A. T. Gomez ; Romero, C. *On the embedding of space-time in five-dimensional Weyl spaces. Journal of Mathematical Physics*, v. 49, p. 102501-1-102501-2, 2008.
- [7] H. F. M. Goenner., *On the history of unified field theories*, *Living Rev. Rel.* 7, 2,2004.
- [8] Alemañ Berenguer R.A., *El desafío de Einstein*. Vol.I: En busca de la unificación. URSS, MOSCÚ, 2011.
- [9] J. K. Beem, P. E. Ehrlich, and T. G. Powell, *Warped product manifolds in relativity*. In *Selected Studies: A Volume Dedicated to the Memory of Albert Einstein*, edited by T. M. Rassias and G. M. Rassias (North-Holland, Amsterdam,), p. 41,1982.

- [10] Romero, C. ; Formiga, J. B. ; Da Silva, L. F. P. ; Dahia, F. *The Embedding of The Spacetime in Higher-Dimensional Riemann Cartan Manifolds and Classical Confinement of Test Particles*. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, v. 08, p. 133, 2011.
- [11] Riemann, B., *Clifford translated, On the Hypotheses which lie at the basis of Geometry*, Nature, Vol VIII. Nos 183,184, pp.14-17, 36, 37.
- [12] von Helmholtz, H., *Über die Tatsächlichen Grundlagen der Geometrie*, Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg 4, 197, 1866.
- [13] Tapia V., *Formas y geometría de rango superior*, Universidad Nacional de Colombia, 2010.
- [14] Scholz E., *Hermann Weyl's Analysis of the "Problem of Space" and the Origin of calibre Structures*. Science in Context 17(1/2), 165–197, 2004.
- [15] Poincaré, H., *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie*, Bull. Soc. Math. France 15, 203, 1887.
- [16] Tapia.V, *El "Commentatio", el problema de la equivalencia de las formas cuadráticas y el análisis tensorial*, L.Matemáticas, Volumen 27, páginas 107–149, 2006.
- [17] Nordström,G.,*Über die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfelds zu vereinigen*. Phys. Zeitschr, **15**, 504,1914.
- [18] Mie, G., *"Grundlagen einer Theorie der Materie"*. Ann.Physik, **37**, 511, 1913.
- [19] Kaluza, T. *On the Problem of Unity in Physics*. Sitzungsber. Preuss.Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) K1:966–972, 1921.
- [20] Klein,O., *Quantum theory and five-dimensional theory of relativity*. Zeitschr. Physik , **37**, 897,1926.
- [21] Kerner R. *Generalization of the Kaluza-Klein theory for an arbitrary non abelian calibre group*. Ann. Inst. Poincare 9143, 123,1968.
- [22] T.Appelquist, A. Chodos e P. Freund, *Modern Kaluza-Klein Theories*, Addison-Wesley, Menlo Park,1987.

- [23] R. Maartens, *Brane-World Gravity*, Living Rev. Rel. 7, 2004.
- [24] M.Green, J.Schwarz, E. Witten, *Superstring theory*, Cambridge University Press, Cambridge, England ,1987.
- [25] Joseph P., *String Theory: Superstring Theory and Beyond*, Vol. 2, Cambridge University Press,(1998).
- [26] C.V.Johnson, *D-branas*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [27] Randall, Lisa, and Raman Sundrum., *An alternative to compactification*. Physical Review Letters 83:4690–4693. hep-th/9906064.
- [28] Randall, Lisa, and Raman Sundrum., *A large mass hierarchy from a small extra dimension*. Physical, Review Letters 83:3370–3373. hep-ph/9905221.
- [29] P. S. Wesson, *Space-Time-Matter, Modern Kaluza Klein Theory*, World Scientific, Singapore, 1999.
- [30] Arkani-Hamed, Nima, Savas Dimopoulos, and G. R. Dvali., *The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*. Physics Letters B4 **29**:263–272.hep-ph/9803315. 1998.
- [31] Novello, M. ; Heintzmann, H. *Weyl Integrable Spacetime: A Model for Our Cosmos?*. Physics Letters A, Holanda, v. 98, n. 1, p. 10-11, 1983.
- [32] Salim, J. M. ; Sautú, S. L.; De Oliveira, H. P. *Non-singular inflationary cosmologies in Weyl integrable spacetime*. Classical and Quantum Gravity, Inglaterra, v. 14, p. 2833-2843, 1997.
- [33] Salim, J. M. ; Fabris, J. C. ; Sautú, S. L. *Inflationary cosmological solutions in Weyl integrable geometry* . Modern Physics Letters A, Inglaterra, v. 13, n. 12, p. 953-959, 1998.
- [34] Salim, J. M. ; Sautú, S. L. *Gravitational collapse in Weyl integrable spacetimes*. Classical and Quantum Gravity, Inglaterra, v. 16, p. 3281-3295, 1999.
- [35] Scholz, Erhard. 2009. “*Cosmological spacetimes balanced by a Weyl geometric scale covariant scalar field.*” Foundations of Physics 39:45–72. arXiv:0805.2557v3.

- [36] Melnikov. V., *Integrable weyl geometry im multidimensional cosmology. numerical investigation.* In Multidimensional Cosmology and Gravitation, page 74. CBPF, 1995.
- [37] M. Israelit, *Wesson's Induced Matter Theory with a Weylian bulk.* Found. Phys. 35, 1725, 2005.
- [38] O. Arias, R. Cardenas and I. Quiros, *Thick brane worlds arising from pure geometry.* Phys. B 643,187, 2002.
- [39] N. Barbosa-Cendejas and A. Herrera-Aguilar, *Localization of 4D gravity on pure geometrical thick branes.* Phys. Rev. D 73, 084022, 2006.
- [40] Barbosa-Cendejas. N., Herrera-Aguilar A., Reyes Santos, M. A., Schubert . C. *Mass gap for gravity localized on Weyl thick branes,* Physical review D 77, 126013, 2008.
- [41] Aguilar, José Edgar Madriz ; Romero, Carlos. *Inducing the Cosmological Constant from Five-Dimensional Weyl Space.* Foundations of Physics, v. 39, p. 1205-1216, 2009.
- [42] Carmo, M. Perdigão., *Geometria riemanniana.* 2ª edição, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro,1988.
- [43] Fernandes,L,Rui, *Lições de Geometria diferencial,* notas da cadeira de Geometria Diferencial da Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação e do Mestrado em Matemática Aplicada do IST, leccionada nos anos lectivos 2002/2003 e 2003/2004.
- [44] Lee, John M.,*Geometria riemanniana: an introduction to curvature.*Springer, New York, 1997.
- [45] Lima, Elon Lages, *Curso de análise vol.2.* Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [46] Hawking, S.W., Ellis, G.F.R., *The Large-Scale Structure of Spacetime,* Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [47] Kostrikin, A.I., e Manin,Y.I., *Linear Algebra and Geometry.* Gordon and Breach, New York, 1981.
- [48] Chen B.Y.,*Geometry of submanifolds and its applications.* Science Univ.of Thokyo,1981,pp 96.

- [49] Rodriguez, Lucio, *Geometria das Subvariedades*. Monografias de Matemática, **26**, Rio de Janeiro, 1976.
- [50] Einsehart, L., *Riemannian Geometry*. Princeton University Press, (1949).
- [51] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern Geometry - Methods and Applications: Part I: The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields*. Springer, New York, (1991).
- [52] M. Gogberashvili., D. Singleton, “*Nonsingular Increasing Gravitational Potential for the Brane in 6D*”. Phys. Lett., B 582, **95** (2004).
- [53] C. F. Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 6, 99 (1827). Reimpreso em Werke (Königliche Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen, Göttingen, 1863–1933).
- [54] E. B. Christoffel, *Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades*, J. reine ang. Math. 70, 46, 1869.
- [55] E. B. Christoffel, *Über ein die Transformation homogener Differentialausdrücke zweiten Grades betreffendes Theorem*, J. reine ang. Math. 70, 241, 1869.
- [56] J. Ehlers, *Christoffel’s work on the equivalence problem for Riemann spaces and its importance for modern field theories of physics*, in E. B. Christoffel: *The influence of his work on mathematics and the physical sciences*, ed. P. L. Butzer., F. Feher Birkhäuser, Basel, 1981.
- [57] Grassmann, Hermann, *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*. Leipzig: Otto Wigand, 1844.
- [58] ———, *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form bearbeitet*. Berlin: Enslin (1862).
- [59] ———, “*Ueber die Beziehung der nicht-Euklidischen Geometrie zur Ausdehnungslehre.*” Appendix I to (Grassmann 1878). English translation in (Grassmann 1995, 279–280).

- [60] ———, *Die Ausdehnungslehre von 1844 oder Die lineale Ausdehnungslehre*. (2nd. Edition.) Leipzig: Otto Wigand, 1878.
- [61] ———, *A New Branch of Mathematics: The Ausdehnungslehre of 1844 and Other Works*. Translated by Lloyd C. Kannenberg. Chicago and LaSalle: Open Court. (Appendix printed in this volume.) Hertz, Heinrich. 1894. *Die Prinzipien der Mechanik. In neuem Zusammenhange dargestellt*, Philipp Lenard (ed.). Gesammelte Werke, Vol. 3. Leipzig: Barth, 1995.
- [62] Stachel, John., *The story of newstein or: is gravity just another pretty force?*, The Genesis of General Relativity, Volume 4, Boston studies in the philosophy of science, Springer, 2007.
- [63] Hessenberg, Gerhard, “*Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie*,” Math. Ann. vol. 78, p. 187–217, especially p. 208, 1917.
- [64] Levi-Civita, Tullio. “*Nozione de Parallelismo in una Varieta Qualunque e Conseguente Specificazione Geometrica della Curvatura riemanniana*.” Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 42: 17–205. (English translation of excerpts given in this volume.), 1916.
- [65] Schouten. “*Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie*.” Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, XII, no. 6. Jan A., 1918.
- [66] H. Weyl, “*Gravitation und Elektrizität*”. Sitzungsber. Akademie der Wissenschaften Berlin, 465–480 (1918a). Einstein, A., Lorentz, H. A., Weyl, H. e Minkowsky. *O principio da Relatividade*, Textos fundamentais da Física Moderna, I volume, 5a edição, Fundação Calouste Gulbenkian.
- [67] H. Weyl, *Reine Infinitesimal geometrie*, Mathematische Zeitschrift, vol. 2 (1918), pp. 607–613; also, *Raum, Zeit, Materie*, Springer, (1918).
- [68] R. König, *Beiträge zu einer allgemeinen linearen Mannigfaltigkeitslehre*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, vol. 28 (1919), pp. 213–228.
- [69] E. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, Annales de l’École Normale, (3), vol. 40, pp. 325–412, 1923.

- [70] Kozul, Jean-Louis. *Homologie et cohomologie des algebres de Lie*. Bulletin de la Société Mathématique 78: 65–127(1950).
- [71] Ehresmann, Ch., *Les connexions infinitésimales*, Colloq. Topologie . OEuvres complètes, Partie I 2, pp. 179–205, Bruxelles 1950.
- [72] Folland, G. B., *Weyl Manifolds*, J. Diff. Geom. 4, 145, 1970.
- [73] D. K. Sen., J. R. Vanstone. *On Weyl and Lyra Manifolds*, J. Math. Phys. 13, 990, 1972.
- [74] T. Higa, *Weyl manifolds and Einstein-Weyl manifolds*, Comm. Math. Univ. Sancti Pauli, 12 , 2, 143-159, 1993.
- [75] Perlick. V, *On totally umbilic submanifolds of semi-Riemannian manifold*, arXiv:gr-qc/0512066v1 11, Dec 2005.
- [76] Berger, Marcel. *A Panoramic View of Riemannian Geometry*. Springer, New York, 2002.
- [77] Narita, Fumio., Satou, Takafumi. *Conformal Transformations of a Weyl Manifold*. Kyungpook Math. J. 44, 93-99, 2004.
- [78] F. Narita, *Pseudo-Schwarzian Tensor of Weyl manifolds*, Kyungpook Math. J., 41, 155-161. 2001.
- [79] B. Osgood., D. Stowe, *The schwarzian derivative and conformal mapping of Riemannian manifolds*, Duke Math. J., 67(1992), 57-99.
- [80] E. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Actualités scientifiques 994, Paris, 1945.
- [81] A. Friedmann., J. A. Schouten, *Über die geometrie der halbsymmetrischen übertragung*, Math. Zeitschr. 21, 211-223, 1924.
- [82] Barua, B., Ray, A. K. *Some properties of semisymmetric metric connection in a Riemannian manifold*. Indian J. Pure Appl. Math., 16, 736–740, 1985.

- [83] K. Yano, *On semi-symmetric metric connections*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 15, 1579-1586. MR0275321 (43 #1078), 1970.
- [84] Campbell, J., *A Course of Differential Geometry*. Oxford: Clarendon, 1926.
- [85] Magaard, L., 1963. *Zur einbettung riemannscher Raume in Einstein-Raume und konforme euclidische Raume*. Ph.D. diss., Kiel.
- [86] Dahia, F. *Imersão do espaço-tempo e a generalização do teorema de Campbell-Magaard*. Tese de Doutorado, UFPb, 2001.
- [87] Dahia, F., Romero, C., *The embedding of the space-time in five dimensions: an extension of Campbell-Magaard theorem*. J. Math. Phys. **43**, 5804, 2002.
- [88] Romero, C. *Imersão isométrica de variedades pseudo-riemannianas e dimensões extras do espaço-tempo*. Manuscrito não publicado, 2004.
- [89] L. Schläefli, *Nota alla memoria del. Sig. Beltrami, Sugli spazzi di curvatura costante*, Ann. di mat., 2^a serie, 5, pag. 170-193 (1871-1873).
- [90] M. Janet, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans une espace euclidien*. Ann. Soc. Pol. Math. 5, 38-43, 1927.
- [91] E. Cartan, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien*. Ann. Soc. Pol. Math. 6, 1-7, 1927.
- [92] J. Nash, *C^1 isometric imbeddings*. Ann. of Math. (2) 60, 383–396, 1954.
- [93] J. Nash, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*. Ann. of Math. (2) 63, 20–63, 1956.
- [94] R. Greene, *Isometric embeddings of Riemannian and pseudo-riemannian manifolds*. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 97, 1970.
- [95] Hlavatý, V., *Embedding theory of a W^m in a W^n* , Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Volume 1, Number 3, 403-438, 1952.
- [96] Pedersen, H., Swann, A. *Riemannian submersions, four-manifolds and Einstein–Weyl geometry*, Proc. London Math. Soc. 66, 381–399, 1993.

- [97] Pedersen H, Poon YS, Swann A. *The Einstein-Weyl deformations and submanifolds*. Int J Math 7:705-719 1996.
- [98] Matzeu, Paola. *Submanifolds of Weyl Flat Manifolds*, Manatsh. Math. 134, 297-311, 2002.
- [99] F. Narita. *Weyl Normal Connections of Weyl Submanifolds*, Nihonkai Math. J. , 33-42, Vol.13, 2002.
- [100] F.Narita. *Riemannian Submersions and Riemannian Manifolds with Einstein-Weyl Structures*, Geometriae Dedicata 65: 103–116, 1997.
- [101] T. Imai, *Notes on semi-symmetric metric connections*, Tensor 24, 293-296, 1972.
- [102] ———, *Hypersurfaces of a Riemannian manifold with semi-symmetric metric connection*, Tensor 23, 300-306, 1972.
- [103] Zensho Nakao., *Submanifolds of a Riemannian Manifold with Semisymmetric Metric Connections*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 54, No. 1, pp. 261-266, 1976.
- [104] Rovenskii, Vladimir, *Foliations on Riemannian manifolds and submanifolds*. Birkhäuser Boston, 1997.
- [105] R.L. Bishop., B. O'Neill, *Manifolds of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. 145, 1–49.1969.
- [106] P.West, *Introduction tro Supersymmetry and Supergravity*, World Scientific, Cingapura, 1986.
- [107] Seahra, Sanjeev S., *Physics in Higher-Dimensional Manifolds*, A thesis presented to the University of Waterloo, Ontario, Canada, 2003.
- [108] Dahia, Fábio ; Romero, Carlos; Silva, Lucio F. P.; Tavakol, Reza. *Warped product spaces and geodesic motion in the neighborhood of branes*. Journal of Mathematical Physics, v. 48, p. 72501-1-72501-9, 2007.

- [109] Dahia, Fábio; Romero, Carlos; Silva, Lucio F. P.; Tavakol, Reza. *Geodesic motion in the neighbourhood of submanifolds embedded in warped product spaces*. General Relativity and Gravitation, v. 40, p. 1341-1351, 2008.
- [110] Silva, L. F. P. ; Aguilar, J. E. Madriz . *Quintessential inflation from 5D warped product spaces on a dynamical foliation*. Modern Physics Letters A, v. 23, p. 1213, 2008.
- [111] Dahia, F. ; G. A. T. Gomez ; Romero, C. *On the embedding of space-time in five-dimensional Weyl spaces*. Journal of Mathematical Physics, v. 49, p. 102501-1-102501-2, 2008.
- [112] Gauduchon, P., *Structures Weyl-Einstein, espaces de twisteurs et variétés de type $S^1 \times S^3$* . J. reine angew. Math. 469,1-50, 1995.
- [113] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic, New York, 1983.
- [114] O'Neill, B. *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J. 13 (1966), 459–469.
- [115] W. Muck, K. S. Viswanathan., I. Volovich, *Geodesics and Newton's law in brane backgrounds*, Phys. Rev.D, **62**, 105019 , 2000.
- [116] P. S. Wesson, B. Mashhoon., H. Liu, *The (Im)possibility of Detecting a Fifth Dimension* Mod. Phys. Lett.A **12**, 2309, 1997.
- [117] Wesson, Paul S., B. Mashhoon, H. Liu.,W. N. Sajko, *Fifth force from fifth dimension*. Physics Letters B 456:34–37, 1999.
- [118] Dahia, F, E.M.Monte, Romero,C., *Fifth force from fifth dimension: a comparison between two different approaches*, Mod. Phys. Lett. A **18**, 1773, 2003.
- [119] Mashhoon, B., Wesson, P.S. *calibre-dependent cosmological constant*. arXiv:gr-qc/0401002. Class. Quantum Grav. 21, 3611-3620, 2004.
- [120] V.Arnold, *Equações diferenciais ordinárias*. Editora Mir, 1985.