



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Pós-Graduação em Física

**Geometria, Topologia e Elasticidade:
aplicações a membranas e outros
sistemas bidimensionais**

Cleverson Filgueiras

Tese de Doutorado
João Pessoa

27/11/2009



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO

A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 27 de novembro de 2009, na Sala de Reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, **aprova com distinção** o Sr. **Cleverson Filgueiras** na defesa de sua tese intitulada "*Geometria, Topologia e Elasticidade: aplicações a membranas e outros sistemas bidimensionais*".

João Pessoa, 27 de novembro de 2009

1º Ex. Prof. Dr. Alexandre da Silva
Rosas
(UFPB)

2º Ex. Prof. Dr. Carlos Augusto Romero
Filho
(UFPB)

3º Ex. Prof. Dr. Oscar Nassif Mesquita
(UFMG)

4º Ex. Prof. Dr. Wilson Oliveira
(UFJF)

Presidente (Orientador)
Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio
Moraes
(UFPB)



NÃO HÁ

(Co-Orientador)

(---)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Cleverson Filgueiras

**Geometria, Topologia e Elasticidade: aplicações a
membranas e outros sistemas bidimensionais**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação
em Física do Departamento de Física da Universidade
Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção
do grau de Doutor em Física.*

Orientador: *Fernando J. S. Moraes*
Co-orientador: *Randall D. Kamien*

João Pessoa

27/11/2009

F481g Filgueiras, Cleverson.
Geometria, topologia e elasticidade: aplicações a membranas e outros sistemas bidimensionais/ Cleverson Filgueiras. – João Pessoa, 2009.
103f. :il.
Orientador: Fernando J.S. Moraes.
Co-orientador: Randall D. Kamien
Tese (Doutorado) – UFPb - CCEN

1.Geometria. 2. Física. 3. Espaço curvo tridimensional..

UFPb/BC

CDU: 514 (043)

Responsável pela catalogação: Maria de Fátima dos Santos Alves-CRB -15/149

A todos que amo

Agradecimentos

- Agradeço a Deus;
- Agradeço ao professor Fernando Moraes a grande oportunidade de ter trabalhado ao seu lado, pela amizade e por toda ajuda que recebi ao longo desses quatro anos;
- Agradeço à minha esposa Ana pelo apoio, paciência e compreensão;
- Agradeço à minha mãe por estar sempre presente, cobrando minha atenção, mesmo muito longe de casa;
- Agradeço ao meu Pai pelo apoio nas horas incertas;
- Agradeço ao professor Randall D. Kamien de University of Pennsylvania pela grande oportunidade de estagiar em seu grupo de pesquisa;
- Agradeço ao professor Caio Sátiro da Universidade Federal Rural de Pernambuco pela interação e ajuda nas pesquisas, e pela amizade;
- Agradeço aos professores Ítalo. N. de Oliveira e Marcelo L. Lyra, ambos da Universidade Federal de Alagoas, por parte da orientação de um dos trabalhos apresentados aqui;
- Agradeço ao professor Wilson Oliveira da Universidade Federal de Juiz de Fora pela orientação na iniciação científica, a qual levou a um artigo científico no ano de 2008;
- Agradeço aos demais professores do departamento de Física da UFPB, com os quais cursei disciplinas: Albert Petrov, Cláudio Furtado e Alexandre Rosas;
- Agradeço aos demais colegas do departamento de física pela amizade: Marcelo, Edilberto, Bertúlio, Knut, Maxwell, Emerson;
- Agradeço ao Cnpq e à Capes pelo apoio financeiro.

Se A é o sucesso, então A é igual a X mais Y mais Z. O trabalho é X; Y é o lazer; e Z é manter a boca fechada.

—Albert Einstein

Resumo

A geometria, topologia e elasticidade estão presentes em vários ramos da física, e desempenham papel fundamental no entendimento de vários fenômenos físicos. Nesse trabalho, apresentamos três sistemas distintos onde podemos ver esse papéis. No primeiro, uma partícula quântica neutra confinada a mover-se em uma superfície cônica é usada como modelo para explorar estados ligados devido a um potencial proporcional ao inverso do quadrado da distância e devido a um potencial tipo delta. Ambos potenciais aparecem naturalmente devido a geometria e topologia do cone. No segundo, propomos um método de sondar os efeitos de um espaço curvo tridimensional usando materiais de grande coeficiente de expansão térmica. Neste caso, os três ingredientes citados acima são importantes para o entendimento do problema. Por fim, determinamos a interação entre nanocolóides adsorvidos na superfície de um filme esmético livremente suspenso. Essa interação é mediada por deformações elásticas no filme esmético; ela é de longo alcance, o que é importante para a formação de estruturas coloidais auto organizadas na superfície de tal filme.

Palavras-chave: Potenciais patológicos, Membranas fluidas, Flutuações térmicas, Espaço curvo tridimensional, Colóides adsorvidos, Filmes líquidos, Cristal líquido esmético, Tensão superficial.

Abstract

Geometry, topology and elasticity are found in various branches of physics and they play important roles in the understanding of many physical phenomena. In this work, we present three different systems where we can see such importance. First, a quantum neutral particle, constrained to move on a conical surface, is used as a toy model to explore bound states due to both an inverse squared distance potential and a delta-function potential, which appear naturally in the model due to the geometry and topology of the cone. In the second one, we propose a method for probing the effects of curved 3-space by using materials with large coefficients of thermal expansion. Studying their fluctuations can be naturally cast in terms of a nonflat background geometry. In the last one, we determine the elastic-mediated interaction between colloidal nanoparticles adsorbed on the surface of free-standing smectic films. In contrast with the short-range character of the elastic-mediated force between particles adsorbed on smectic films supported by a solid substrate, the effective force acquires a long-range character in free-standing films, thus playing an important role in the formation of self-assembly structures in these systems.

Keywords: Pathological potentials, Fluid membranes, Fluctuations, Curved three-space, Adsorbed colloids, Liquid films, Smectic liquid crystals, Surface tension.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Geometria, Topologia e Mecânica Quântica	2
1.2	Matéria Condensada Mole: Uma breve introdução	5
1.2.1	Cristais Líquidos	5
1.2.2	Dispersões Coloidais	8
1.2.3	Soluções Macromoleculares	9
1.2.4	Gels	9
1.2.5	Sistemas anfífilicos auto-organizados	11
2	Extensões auto adjuntas do Operador Hamiltoniano	19
2.1	Introdução	19
2.2	O Operador Hamiltoniano em um intervalo finito	20
2.3	O Método de von Neumann-Krein	22
2.4	Considerações finais	24
3	Mecânica quântica de uma partícula no cone	25
3.1	Introdução	25
3.2	O modelo	27
3.3	Extensões auto-adjuntas	28
3.4	O caso $\nu^2 < 0$	30
3.5	O caso $\nu^2 > 0$	33
3.6	Conclusão	33
4	Membranas e o cálculo variacional	35
4.1	Elasticidade de membranas fluidas	35

4.2	Deformação de superfícies no espaço euclidiano	37
4.3	Fórmulas variacionais para superfícies em espaços curvos	43
5	Espaço curvo sem gravidade:	
	Uma proposta experimental	47
5.1	Introdução	47
5.2	Alguns aspectos de hidrodinâmica	49
5.3	A proposta	53
5.4	Conclusão	55
6	Interação entre nanocolóides adsorvidos em esméticos	57
6.1	Introdução	57
6.2	Energia Livre	58
6.3	O problema	61
6.4	Conclusão	66

Lista de Figuras

1.1	Estrutura química (a) de uma molécula com formato de bastão(5CB) e (b) de uma molécula com formato de banana.	6
1.2	Estruturas das fases dos cristais líquidos: (a) Termotrópicos: i. nemática, ii colestérica, iii esmética <i>A</i> , iv esmética <i>C</i> . (b) liotrópicos i. nemática cilíndrica, ii. nemática lamelar(figura obtida da referência [39])	8
1.3	Líquido coloidal à esquerda; Sólido coloidal à direita(figura obtida da referência [41])	9
1.4	Solução polimérica diluta à esquerda; Solução polimérica semi-diluta à direita(figura obtida da referência [41])	10
1.5	Sol à esquerda; gel à direita (figura obtida da referência [41])	10
1.6	Microemulsões: agregados globulares à esquerda; esponja à direita(figura obtida da referência [41])	11
1.7	Estruturas que podem ser formadas quando temos fosfolipídeos em meio aquoso (http://en.wikipedia.org/wiki/Micelle)	12
1.8	Microemulsões: agregados globulares à esquerda; esponja à direita (figura obtida da referência [41])	13
1.9	Biomembrana (http://pt.wikipedia.org/wiki/Membrana_plasmática)	14
1.10	Transformações de configurações de vesículas livres induzidas por mudança na temperatura: a) expulsão de vesículas menores a partir de uma maior (exocitose); b) transformacao de um discocite até um estomatocite (endocitose). As configurações são simétricas em relação às linhas tracejadas mostradas nas figuras (figura obtida da referência [48])	14
1.11	Ciclo de deformação de uma vesícula que pode leva-la a “nadar” para cima da página; figura obtida da referência [46]	15

- 1.12 Representação de um Molusco chamado escalope 15
- 3.1 Superfície cônica de déficit angular γ . 27
- 4.1 Curvaturas principais de uma superfície: $\kappa_1 = 1/R_1$ e $\kappa_2 = 1/R_2$, onde R_1 e R_2 são os *raios de curvatura*; \mathbf{n} é o vetor normal. 36
- 4.2 O vetor deformação é a velocidade vetorial inicial da trajetória que é descrita pelo ponto p movendo-se perante a deformação. 38
- 4.3 Vetor normal N_t em todas as superfícies μ_t 40
- 4.4 Gênero de superfícies orientáveis: **(a)** $g = 0$, **(b)** $g = 1$, **(c)** $g = 2$ e **(d)** $g = 3$. 42
- 5.1 Polímeros ancorados em um segmento da membrana leva a diferentes formas. 49
- 6.1 Potencial de interação elástica versus $R/\sqrt{\lambda_c l}$. Ambos os caso são mostrados: filme ancorado por um substrato sólido (linha tracejada, U_s) e um filme livremente suspenso (linha sólida, U_f). Os parâmetros físicos foram: $\gamma = 25 \times 10^{-3} N/m$ e $l = 300nm$. O decaimento exponencial rápido de U_s contrasta com a convergência logaritimica lenta de U_f que é tipicamente da ordem de $10k_B T$ à temperatura ambiente 63
- 6.2 A amplitude da força elástica em função de $R/\sqrt{\lambda_c l}$. A força no filme ancorado pelo substrato sólido (F_s -diamantes) muda do regime $1/R$ em pequenas distâncias, para o decaimento exponencial em distâncias grandes. A força no filme livremente suspenso (F_f) mantém o decaimento lento $1/R$ em grandes distâncias. A linha sólida representa a forma assintótica analítica $F_f = P_1 P_2 / (4\pi\gamma R)$. 64

- 6.3 Potencial de interação elástica em filmes esméticos livremente suspensos em função da espessura normalizada do filme para três tensões superficiais representativas e $R = 5a_o$. Os parâmetros físicos são os mesmos usados nas figuras anteriores. Ele converge lentamente para um valor constante proporcional a $1/(\gamma + \gamma_c)$, com tendências de convergências distintas para grande e pequenas tensões superficiais. 65
- 6.4 Potencial de interação elástica em filmes esméticos livremente suspensos em função da tensão superficial para duas distâncias representativas entre as partículas e em função da espessura do filme. Os parâmetros físicos são os mesmos usados nas figuras anteriores. 66

Introdução

Esse trabalho surgiu do nosso interesse inicial em se estudar sistemas físicos onde possamos aplicar as ferramentas da geometria diferencial e também da topologia. Como sabemos, o uso dessas duas teorias matemáticas tem um importante papel para o entendimento do nosso mundo físico. Sabemos que ambas as áreas são importantes para o estudo e a compreensão do nosso universo e estão presentes tanto em *relatividade geral* quanto em *teorias de partículas elementares*. Com respeito a materiais, é sabido que suas propriedades são entendidas não só em termos de seus constituintes atômicos, mas também em termos das estruturas geométricas que o povoam. Durante o processo de concepção de um certo material, aspectos microestruturais (tais como defeitos pontuais, deslocamentos, lacunas, falhas de empilhamento e “grain boundary”) ocorrem, e alteram suas propriedades macroscópicas mensuráveis (módulos elásticos, fluxos elétricos e térmicos, etc). Ou seja, a história de vida de um material é também importante, o que significa dizer que não temos um único alumínio, aço, ou zinco. Diferentes histórias termomecânicas levarão a distintas estruturas internas. Com isso, podemos alterar, por exemplo, a condutividade térmica e elétrica de um material. Para entender um material é preciso confrontar suas estruturas geométricas, desde o nível atômico (geometria apresentada pela rede cristalina, por exemplo) até o nível macroscópico (defeitos topológicos), com a maneira como se organizam dentro do material. Essa análise passa por complexos diagramas de fase [1]. Um estudo deste tipo mostra que podemos preparar estados metaestáveis com as propriedades que desejarmos, ou seja, temos aí a ciência/ engenharia dos materiais. Mas, como sabemos, as mais variadas técnicas são usadas em matéria condensada para abordar esses problemas, o que nem sempre faz uso da geometria diferencial [1]. Estamos interessados em estudar problemas onde ela se faz presente e onde possamos usar as suas ferramentas, as quais permitem também explorar analogias entre

áreas distintas da física. Por exemplo, em teoria de cordas, branas são superfícies que se comportam de maneira análoga a vórtices e a paredes de domínio em sistemas de matéria condensada. Elas possuem massa e carga, e apresentam o fenômeno de aniquilação (entre brana e anti-brana), similarmente ao que ocorre no hélio superfluido ${}^3\text{He}$. A Física da Matéria Condensada possui uma diversidade de sistemas e fenômenos acessíveis à experimentos que podem ser usados como um laboratório para testar hipóteses da teoria de gravitação e cosmologia [2]. A equivalência entre gravidade tridimensional com torção e a teoria de defeitos em sólidos é apresentada na referência [3].

Na próxima seção, fazemos uma introdução referente à primeira parte do nosso trabalho, a qual consiste em estudar a influência da geometria e topologia na mecânica quântica. Neste ponto, um terceiro elemento entrou na nossa pesquisa: *as extensões auto-ajuntas de operadores em mecânica quântica*. Na seção seguinte, fazemos uma breve introdução no sentido de apenas apresentar o que seja *matéria condensada mole*, pois temos um problema referindo-se à analogia entre gravitação e esse fantástico ramo da física, bem como o estudo da interação coloidal mediada por deformações elásticas de um cristal líquido esmético.

1.1 Geometria, Topologia e Mecânica Quântica

Defeitos topológicos têm recebido muita atenção em sistemas quânticos. Recentemente, a dinâmica quântica de partículas relativísticas [4–8] e não-relativísticas [9–11] na presença de defeitos topológicos tem sido estudada. O fenômeno de *fases topológicas* na função de onda de partículas em experimentos de *interferência* é um dos efeitos quânticos que têm atraído bastante atenção. O primeiro efeito associado com fases quânticas topológicas é conhecido como efeito Aharonov-Bohm. Na presença de defeitos topológicos, a dinâmica quântica de uma partícula carregada com um momento de dipolo magnético permanente interagindo com um campo eletromagnético foi investigada em [6]. Fases geométricas para uma partícula neutra com momentos de dipolo magnético e elétrico

permanentes interagindo com um campo elétrico externo em um espaço-tempo curvo foi estudado em [12], e na presença de um espaço-tempo curvo com torção pode ser visto em [13]. Em [14], os autores discutiram o comportamento relativístico e não-relativístico de uma partícula neutra com um momento de dipolo magnético permanente interagindo com um campo elétrico externo em um sistema girante na presença de uma corda cósmica. Outro tópico que tem recebido atenção, e em que estamos interessados aqui, é o estudo dos níveis de energia de um átomo colocado em um ambiente onde se tem defeitos topológicos: campos gravitacionais, sólidos tridimensionais, grafeno, etc. Esses níveis de energia também serão influenciado pelas interações com a curvatura local e pela topologia do espaço/espaço-tempo. Como resultado, um observador em repouso em relação ao átomo poderia ver a mudança em seu espectro. Este desvio nos níveis de energia atômica dependerá de quantidades advindas do espaço/espaço-tempo. O problema de se encontrar estes desvios nos níveis de energia perante a influência dos campos gravitacionais é de grande interesse teórico bem como observacional. Estes desvios no espectro de energia devido ao campo gravitacional são diferentes daqueles produzidos pelo campo eletromagnético presente, por exemplo, perto de *anãs brancas* e *estrelas de nêutrons*. De fato, foi mostrado que, na geometria de Schwarzschild, o espaçamento dos níveis devido ao efeito gravitacional é diferente daqueles bem conhecidos *efeitos Stark* e *Zeeman de primeira ordem*. Assim, podemos separar as perturbações gravitacionais das perturbações eletromagnéticas do espectro [15]. Em [16], os níveis de Landau foram investigados em um meio elástico contínuo com um defeito topológico e na presença de uma campo magnético externo. Neste trabalho, foi mostrado que a presença de defeitos topológicos quebra a degenerescência infinita dos níveis de Landau. Os níveis de Landau na presença de uma densidade de deslocamentos *parafuso* foi investigado em [17].

Nossa primeira busca concentrou-se em estudar sistemas quânticos com defeitos topológicos. Neste ponto, fomos além, e nos deparamos com um assunto que tem aparecido na literatura ultimamente, mas sem muito entendimento ainda: *extensões auto-adjuntas do hamiltoniano em mecânica quântica*. Na referência [18], é dito que esse tema poderia iniciar “a física das extensões auto-adjuntas“, mas ao compreender o

seu verdadeiro papel, não podemos dizer o mesmo. A mensagem que deixamos aqui é que, dado um operador hamiltoniano atuando em um conjunto de funções de onda definidas em um espaço de Hilbert, e as quais conhecemos suas propriedades analiticamente, somos capazes de descobrir quais são todas as possíveis condições de contorno para o sistema. De fato, essa conclusão não é nossa, e foi primeiro observada no trabalho [19], e posteriormente aplicada na referência [20], onde os autores estudaram campos escalares na presença de uma corda cósmica. Em vários trabalhos envolvendo mecânica quântica, os autores simplesmente fazem o exercício descrito acima; alguns obtêm os estados ligados em função de parâmetros advindos da extensão auto-adjunta, o que parece sugerir novos números quânticos [21]. Tal fato não faz sentido, pois como esta explicitado na livro de física-matemática *Methods of Modern Mathematical Physics II* [22], “as extensões auto-adjuntas fornecem todas as condições de contorno existente no sistema, mas a física vai selecionar qual delas é a correta”. Este ponto será ilustrado no nosso trabalho. Podemos apontar alguns exemplos que inspiraram a nossa busca: em [23] tem-se o estudo das extensões auto-adjuntas do hamiltoniano com potencial tipo Aharonov-Bohm-Coulomb. Em [24], apresentam-se as extensões auto-adjuntas do hamiltoniano de Landau. Aplicações à física de muitos corpos são discutidas em [25]. O que falta na maioria destes trabalhos é se determinar o valor correto do(s) parâmetro(s) de extensão em função da física neles contida. Por isso, apresentaremos uma breve discussão sobre este tema no capítulo 2, mas seu papel só ficará claro após a leitura do capítulo 3, onde fazemos aquilo que era nosso interesse desde o início: discutir como a geometria e a topologia da superfície cônica influencia nos estados ligados de uma partícula neutra. Estes resultados foram publicados em *C. Filgueiras and Fernando Moraes, Physics Letters A* **361** 13–15 (2007); *Annals of Physics* **323** 3150–3157 (2008).

1.2 Matéria Condensada Mole: Uma breve introdução

A matéria condensada mole (ou matéria mole) é uma subárea da física da matéria condensada que estuda os materiais que não são nem sólidos cristalinos, nem líquidos simples, mas se situam entre esses dois. Esse interessante estado da matéria pode assumir várias formas e pode ser visto facilmente a nossa volta. Alguns exemplos do nosso dia-a-dia incluem tintas (dispersões coloidais), gels, cristais líquidos, plásticos e colas (soluções macromoleculares), sabões e muito do nosso próprio corpo (sistemas compostos por moléculas anfífilas tais como membranas). A matéria mole é caracterizada por interações relativamente fracas que levam a uma ordem apenas parcial em escalas de comprimento muito maiores do que aquela de uma molécula individual, como no caso de uma dispersão água-surfactantes-óleo: ela exhibe estruturas desordenadas esponjosas compostas de domínios de água em óleo, divididas por monocamadas de surfactantes. Esses domínios são da ordem de centenas comparado a uma única molécula de sabão [37].

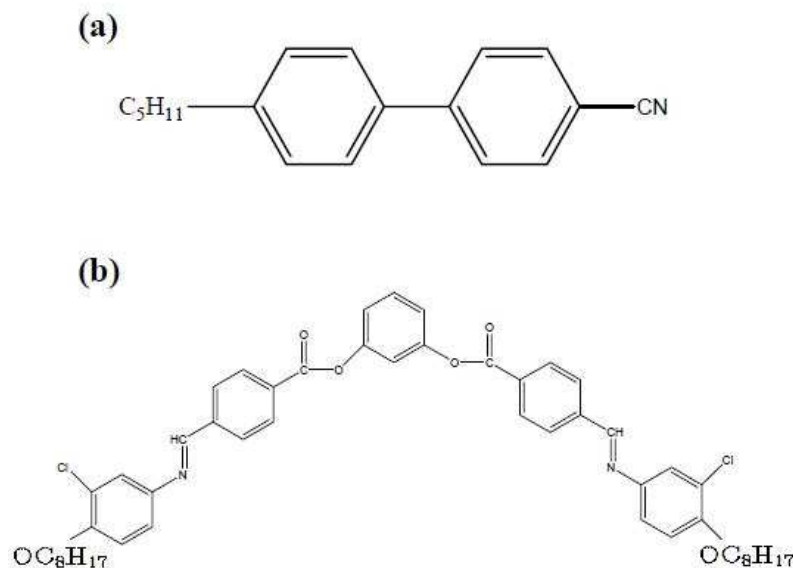
A seguir, apresentamos brevemente alguns dos exemplos citados acima de materiais moles. Esses sistemas vão de dezenas a centenas de angstroms.

1.2.1 Cristais Líquidos

A descoberta dos cristais líquidos é creditada ao botânico austríaco Friderich Reinitzer. Em 1888, ele observou que o material *benzoato de colesterol*, o qual ele extraiu de plantas, possui dois pontos de fusão: a $145,5^{\circ}C$, esse material derrete e forma um fluido completamente líquido e turvo; a $178,5^{\circ}$, ele se torna transparente de forma repentina. O físico alemão Otto Lehmann verificou essas observações e, pensando que o material era um cristal com uma “fraca resistência mecânica“, deu a ele o nome de líquido cristalino. A partir daí, ao longo dos anos subsequentes, uma série de cientistas se engajou na pesquisa sobre estes materiais. Um ponto importante foi o convencimento que a comunidade científica teve de que os cristais líquidos representam uma nova fase da matéria(mesofases), intermediária entre os sólidos e os líquidos. Mais adiante, mostrou-

se que campos elétricos podem orientar os cristais líquidos. Uma janela se abriu para aplicações óticas, pois foram descobertos novos materiais que são fluidos birrefringentes, e que podem ser alinhados por superfícies e controlados por campos elétricos. A história dos cristais líquidos tem sido dominada, desde 1964, pela indústria de displays. Na referência [38] encontramos uma revisão histórica sobre esses materiais, e essa ligação entre ciência e tecnologia pode ser vista facilmente. Por outro lado, como dissemos anteriormente, vemos que os estudos desses materiais também é importante em pesquisas científicas em direção às analogias com a gravitação, por exemplo. Na referência [42], o trabalho de se estudar as trajetórias da luz ao redor de defeitos topológicos em cristais líquidos levou à previsão de uma família de cordas cósmicas assimétricas em [61].

Os cristais líquidos são fases de materiais compostos de moléculas anisotrópicas, conforme exemplos mostrados na figura 1.1.



larizabilidade anisotrópica molecular, levam a um alinhamento paralelo em temperaturas abaixo de um certo valor crítico [44]. Muitas mesofases existem como resultado dessas interações e algumas são mostradas na figura 1.2. A mais simples é a nemática, onde o eixos de simetria moleculares são, em média, paralelos e sem qualquer ordem posicional. Essa direção preferencial é representada por um versor \hat{n} , chamado *diretor*. Esse específico alinhamento molecular pode levar a uma anisotropia no índice de refração do material, na constante dielétrica, na permeabilidade, na condutividade elétrica e na viscosidade. Isso significa dizer que os valores dessas grandezas calculadas na direção do eixo molecular longo são diferentes daqueles calculados na direção normal a esse eixo longo. Fases esmélicas também possuem alguma ordem posicional: uma modulação periódica na densidade em uma direção. Em outras palavras, os eixos longos das moléculas são arranjados lado a lado e paralelamente uns aos outros, em uma série de camadas. Eles são perpendiculares ao plano delas. As camadas são livres para deslizarem e moverem-se umas sobre as outras. O estado esmélico é fluido, viscoso e ordenado. Moléculas quirais (de simetria de mão direita ou de esquerda) formam fases onde os eixos das moléculas adjacentes são torcidas umas relativas as outras. Cristais líquidos que sofrem transições de fases devido a mudanças na temperatura são chamados de *termotrópicos*, enquanto que aqueles que transitam de fase em função da concentração do solvente são chamados *liotrópicos*. Muitas estruturas biológicas como o cérebro, o sistema nervoso, os músculos e o sangue contem cristais líquidos liotrópicos. Esses materiais nem sempre são encontrados em fases líquido-cristalinas (assim como água pode ser encontrada no estado sólido ou de vapor). As propriedades que são de interesse nesses materiais são: transições de fase em direção a estados orientados e parcialmente ordenados (em função da temperatura), resposta orientacional a campos elétricos e magnéticos fracos, e a fluidez de estados que apresentam estruturas em camadas (fases esmélicas). As aplicações incluem o seu uso em displays, onde a sensibilidade a campos elétricos fracos é usada para modular suas propriedades óticas, bem como o uso da viscosidade anisotrópica das fases esmélicas na indústria química. Nas referências [39, 40], podemos encontrar algumas aplicações tecnológicas interessantes e que, obviamente, rendem ou irão render milhares de dólares

à indústria em geral.

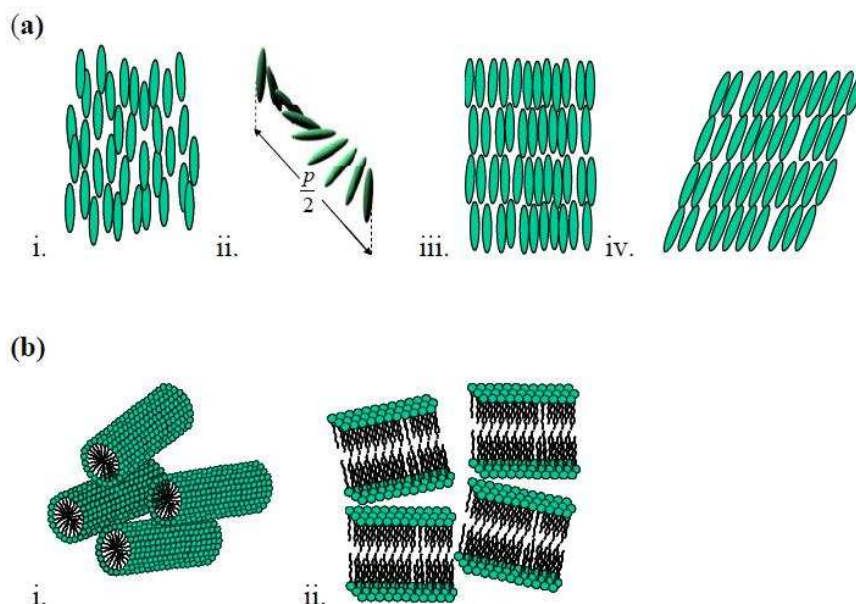


Figura 1.2 Estruturas das fases dos cristais líquidos: (a) Termotrópicos: i. nemática, ii colestérica, iii esmética A, iv esmética C. (b) liotrópicos i. nemática cilíndrica, ii. nemática lamelar (figura obtida da referência [39])

1.2.2 Dispersões Coloidais

Uma dispersão coloidal consiste em partículas líquidas ou sólidas na presença de um solvente molecular (figura 1.3). As propriedades de interesse incluem: a tendência que a dispersão tem de ser estável ou em separar-se em fases contendo uma fase rica em partículas e a outra sendo quase um solvente puro, a existência de ordenamento, cristais em larga escala com parâmetro de rede da ordem de comprimentos de onda óptico e que fundem perante a aplicação de pequenos estresses, e mudanças na viscosidade que podem ser controladas pela concentração. As dispersões coloidais são usadas em tintas, corantes e encapsulamento de drogas; lisossomos são um tipo de dispersão coloidal que se encontra em células biológicas e são usados para a digestão.

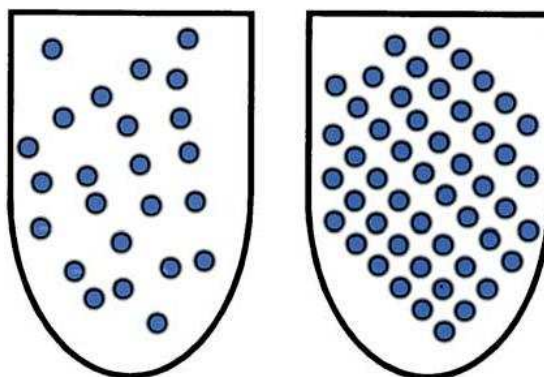


Figura 1.3 Líquido coloidal à esquerda; Sólido coloidal à direita(figura obtida da referência [41])

1.2.3 Soluções Macromoleculares

São compostas por moléculas de longas cadeias em solução. Acima de uma escala de comprimento característica, usualmente vários nanômetros, as cadeias são flexíveis e suas conformações são dominadas por sua entropia em solução (figura 1.4). As questões de interesse incluem o estudo da escala de comprimento com respeito à concentração polimérica e a natureza cooperativa da adsorção de polímeros nas interfaces. Na indústria química, polímeros são usados como aditivos, lubrificantes e em formação de plásticos. Em sistemas biológicos, macromoléculas lineares que possuem uma variedade de estruturas conformacionais estão por toda parte, incluindo proteínas, moléculas longas de açúcar, DNA e RNA.

1.2.4 Gels

São substâncias compostas de moléculas de cadeias longas, interconectadas por junções, tanto química quanto fisicamente (figura 1.5). Se a densidade dessas junções excede um certo valor crítico, conhecido como “ponto de gelação”, o sistema mostra uma resposta a estresses externos conforme um sólido. Isso é um contraste com fluidos(mesmo um fluido de alta viscosidade como soluções poliméricas), que não apresentam resposta a estresses no regime de baixa frequência(tempo longo). O estudo das estruturas de larga

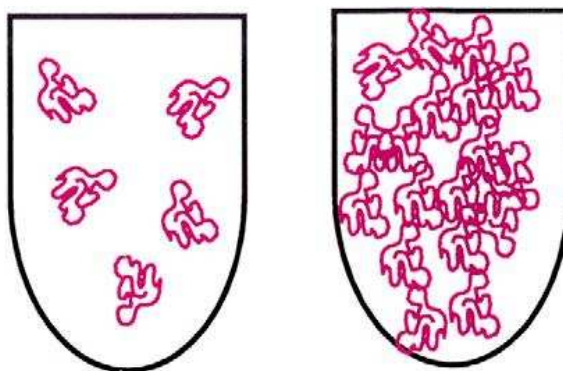


Figura 1.4 Solução polimérica diluída à esquerda; Solução polimérica semi-diluída à direita (figura obtida da referência [41])

escala dos gels (o tamanho típico de uma malha chega a centenas de angstroms) concentra-se na transição gel em função da concentração de junções, dilatação das malhas por ação de solventes, heterogeneidade e flutuações, e a estabilidade dos módulos de cisalhamento e escoamento. As aplicações vão de fraldas (onde a dilatação do gel pela ação de solvente é possível graças ao desdobramento ou esticamento entrópico dos segmentos poliméricos na rede gel) até o uso de gels ativos pela maioria das células biológicas; esses gels dão às células elasticidade e integridade perante deformação por superfícies de contato ou agentes intracelulares.

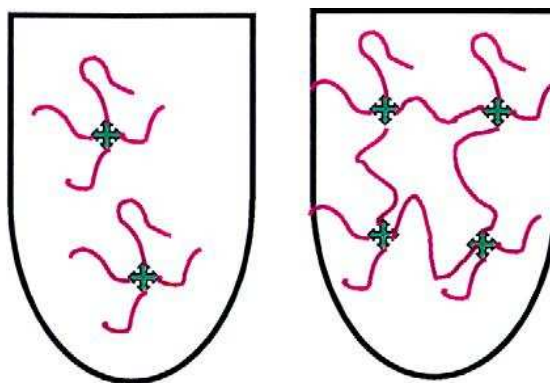


Figura 1.5 Sol à esquerda; gel à direita (figura obtida da referência [41])

1.2.5 Sistemas anfifílicos auto-organizados

São compostos de moléculas que possuem partes hidrofóbicas (odeiam de água) e partes hidrofílicas (gostam de água), o que faz com que as moléculas sejam ativas interfacialmente. Esses sistemas incluem álcoois (os quais combinam, covalentemente, uma cadeia de hidrocarbonos com uma polar do grupo OH), surfactantes (possuem uma cadeia de hidrocarbonos ligada a grupos carregados tais como $Na^+SO_3^-$ ou a grupos não-polares, mas que possuem grupos hidrofílicos), e lipídios (tipicamente, consistem de duas cadeias de hidrocarbonos ligada a um grupo hidrofílico). Essas moléculas reduzem a tensão superficial de sistemas com água ou óleo, e em alguns casos permitem a estabilização de fases com uma certa quantidade microscópica de interface interna. Um sistema composto de água, óleo e moléculas anfifílicas, e que é formado por uma dispersão em equilíbrio contendo domínios de água em óleo (ou óleo em água), e com a maioria das moléculas anfifílicas localizadas nas interfaces internas, são chamados de microemulsões (figura 1.8). Um fenômeno similar ocorre em misturas de apenas dois componentes (água

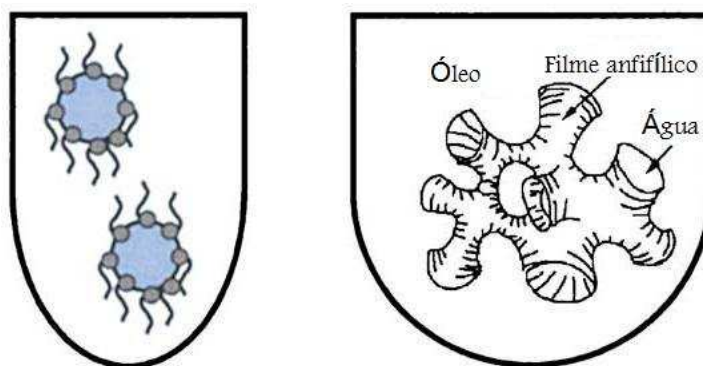


Figura 1.6 Microemulsões: agregados globulares à esquerda; esponja à direita (figura obtida da referência [41])

e moléculas anfifílicas, por exemplo): dependendo da concentração, podemos observar objetos tais como micelas, membranas, vesículas (membranas fechadas), etc (veja a figura 1.7). Essas membranas de duas camadas podem moldar-se em uma variedade de formas, incluindo vesículas esféricas e fases esponjosas. Conforme dissemos acima, *cristais líquidos*

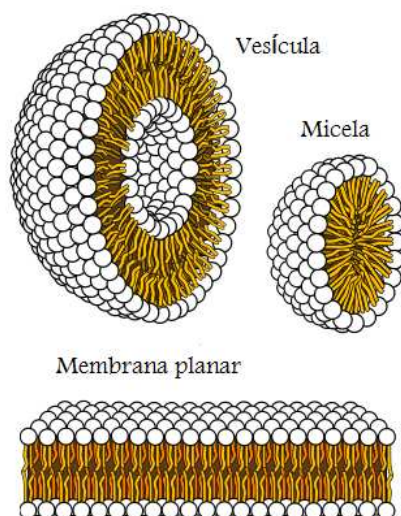


Figura 1.7 Estruturas que podem ser formadas quando temos fosfolípidios em meio aquoso (<http://en.wikipedia.org/wiki/Micelle>)

liotrópicos são aqueles que sofrem mudança de fase conforme a concentração do solvente é alterada, passando por um valor crítico. Esse tipo de material é, geralmente, feito de dois ou mais componentes. Um deles é anfifílico e o outro é água. Conforme a concentração de água é alterada, várias mesofases podem ser observadas. Na figura (1.2), os dois típicos arranjos moleculares são mostrados, mas várias outras modificações a partir dessas fases podem ser encontradas [44].

As propriedades que são de interesse incluem as mudanças estruturais em larga escala, a viscosidade e a tensão interfacial desses sistemas que podem, algumas vezes, apresentar valores muito baixos que são da ordem de cinco a seis vezes menores que os valores típicos da tensão superficial água/óleo. A auto-organização desses sistemas é usada pela indústria química em dispersões, encapsulamento e como agentes de limpeza de óleo. Na indústria da biotecnologia, eles são estudados no sentido de se elaborar uma melhor engenharia de encapsulamento e entrega de drogas a partes específicas do organismo. A natureza faz uso de muitas formas de auto-organização em biologia, indo desde a formação de células e membranas porosas que são relativamente simples em formato, até o retículo endoplasmático que apresenta uma estrutura esponjosa complexa. A

variedade de estruturas observadas em sistemas auto-organizados anfífilicos são também encontradas nos copolímeros em blocos, onde uma parte do polímero pode ser hidrofílica e a outra um bloco hidrofóbico. Esses copolímeros em blocos formam várias microestruturas superficiais que são usadas em litografia e na formação de padrões.

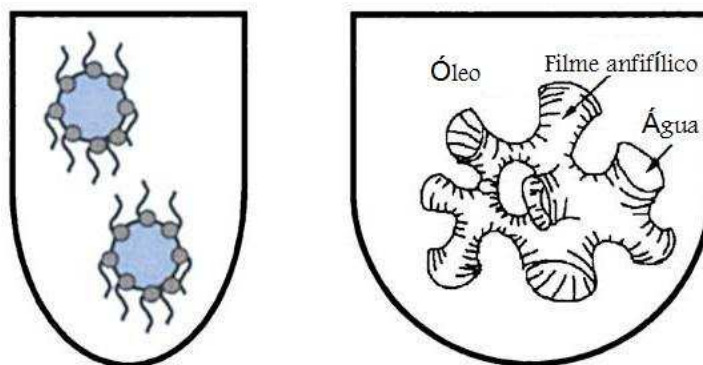


Figura 1.8 Microemulsões: agregados globulares à esquerda; esponja à direita (figura obtida da referência [41])

Estamos interessados em estudar flutuações de membranas a partir de uma configuração de equilíbrio. A primeira motivação para investigar membranas surge a partir da biologia. A camada de lipídio é o componente estrutural mais elementar e indispensável presente nas membranas biológicas, as quais formam a borda de todas as células e suas organelas. Essas membranas biológicas consistem de vários tipos diferentes de lipídios e outros anfífilicos. Biomembranas são “decorada” com proteínas, o que assegura suas propriedades funcionais essenciais tais como bomba de íons, conversão da energia da luz em energia química e reconhecimentos específicos. A figura 1.9 mostra uma biomembrana, de maneira esquemática, exemplificando sua complexidade. Por causa dessa complexidade, estudaremos vesículas artificiais, o que ainda permite entender as propriedades físicas das bicamadas, pois podemos experimentar os processos físicos que também governam membranas mais complexas. Como exemplos, podemos citar as transformações de configurações vistas na figura (1.10), as quais são semelhantes a *exocitose* e a *endocitose* observadas em biomembranas.

Uma ressalva aqui: quando nos referimos a motivação biológica, não estamos nos

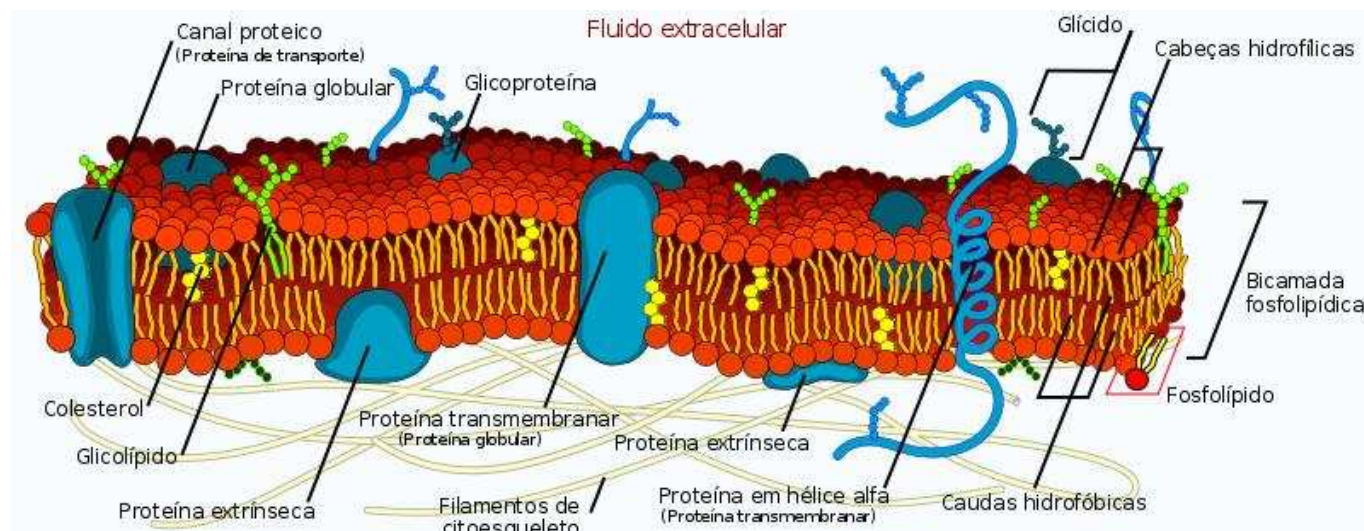


Figura 1.9 Biomembrana (http://pt.wikipedia.org/wiki/Membrana_plasmática)

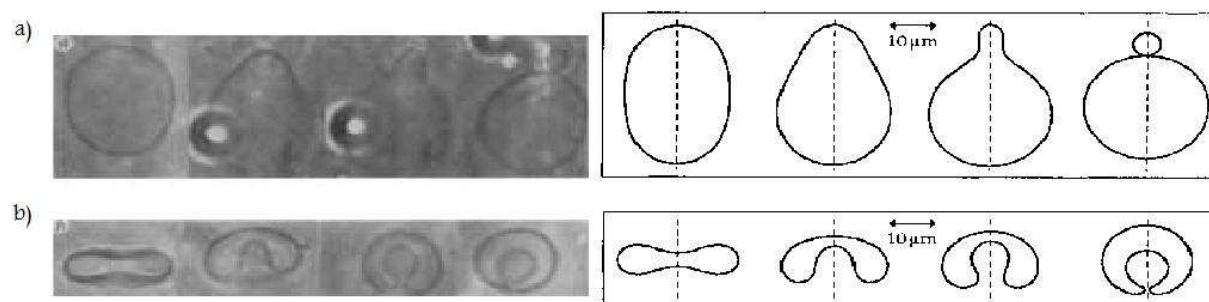


Figura 1.10 Transformações de configurações de vesículas livres induzidas por mudança na temperatura: a) expulsão de vesículas menores a partir de uma maior (exocitose); b) transformação de um discocite até um estomatocite (endocitose). As configurações são simétricas em relação às linhas tracejadas mostradas nas figuras (figura obtida da referência [48])

referindo à *biofísica*, que consiste em elaborar modelos detalhados dos processos biológicos reais. Quando se diz *física inspirada pela biologia*, os físicos fazem perguntas que podem ou não serem interessantes aos biólogos. Como um exemplo, podemos citar a referência [46], onde a possibilidade de uma *máquina de membrana* é discutida. No regime de número de Reynolds pequenos, uma vesícula pode “nadar” somente se sofrer transições em ciclos como o da figura (1.11). No caso de uma *transição recíproca* na ausência de

inércia, que consistem em uma mudança de configuração (representada por S) do tipo $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_1$, a vesícula não pode “nadar”. Um exemplo deste fato é um tipo de molusco (*escalope*), ilustrado na figura (1.12). Ele possui uma dobradiça apenas, abre sua concha vagarosamente e a fecha rapidamente esguichando água. No regime de número de Reynolds pequenos, e com somente um grau de liberdade, ele não pode “nadar” [47].

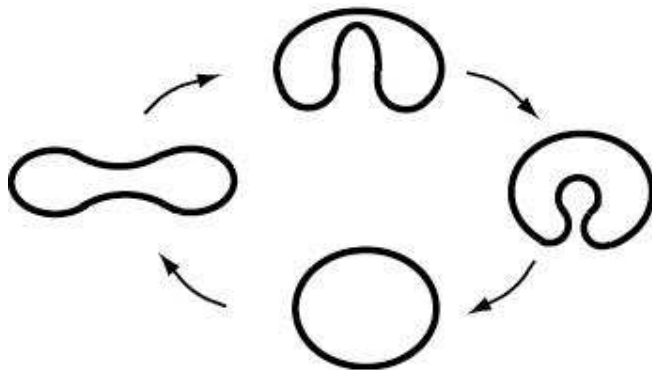


Figura 1.11 Ciclo de deformação de uma vesícula que pode leva-la a “nadar” para cima da página; figura obtida da referência [46]

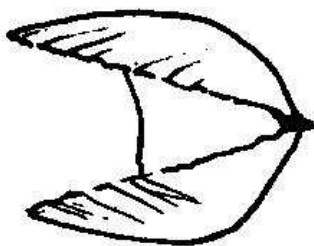


Figura 1.12 Representação de um Molusco chamado escalope

Outra motivação é a analogia que pode ser observada entre a física de membranas e a gravitação quântica. Como sabemos, o valor da constante cosmológica é pequeno ($\Lambda \approx 10^{-122}$, em unidades naturais de Planck: $\hbar = c = G = 1$), mas não zero, o que é um quebra-cabeça da cosmologia moderna. Um dos formalismos da gravitação quântica (formalismo de Causet), propõe a troca do espaço-tempo por uma estrutura discreta,

uma coleção de pontos carregando relações causais. Neste formalismo é previsto que a constante cosmológica possui flutuações quânticas (efeito Casimir). A ordem de magnitude prevista para essas flutuações concorda com valores subseqüentes observados para a constante cosmológica. No trabalho intitulado *The universe in a soap film* [49], os autores mostram que Λ flutuante é um fato genérico das teorias quânticas da gravidade, e é uma das poucas predições que emergem delas. A analogia aqui é baseada no mapa usual entre Teoria Quântica de Campos e a Mecânica Estatística. A descrição geométrica da membrana como uma superfície no espaço corresponde à descrição geométrica do espaço-tempo como uma variedade quadridimensional. As flutuações quânticas do espaço-tempo mapeiam-se nas flutuações térmicas da membrana. A quebra da descrição geométrica suave em escala molecular corresponde à escala discreta do espaço-tempo que é esperada a partir da gravitação quântica. Essa analogia está descrita em detalhes na referência [50]; assim como flutuações térmicas levam a membrana a exibir uma tensão superficial não-nula muito pequena, flutuações quânticas levam a uma constante cosmológica não-nula e muito pequena também. Então, a idéia de uma constante cosmológica flutuante é reforçada, e podemos testá-la em laboratório, medindo-se a tensão superficial que vem de flutuações térmicas em membranas. Isso poderia explicar o porquê da constante cosmológica ser tão pequena.

Inspirados por essa analogia entre membranas e gravitação, buscamos propor um método de experimentar os efeitos de um espaço curvo tridimensional usando materiais de grande coeficiente de expansão térmica. Nossa proposta emprega membranas ou feitas ou dopadas com **NIPA**, um polímero que se expande e se contrai em função da temperatura do solvente [51]. O estudo de suas flutuações pode ser feito em termos do estudo de superfícies imersas em um espaço curvo tridimensional. Nesta linguagem, grandezas que são meramente topológicas no espaço euclidiano, podem agora ser medidas diretamente.

Os próximos capítulos estão organizados como se segue: no capítulo 2 e 4, discutimos as bases matemáticas utilizadas em nossos trabalhos. No primeiro, uma breve discussão sobre o que é extensão auto-adjunta e sobre sua utilização é feita, enquanto que no segundo o formalismo utilizado para se estudar cálculo variacional de superfícies é

apresentado. Isso será útil para os capítulos subsequentes. No capítulo 3, discutimos a mecânica quântica de uma partícula neutra na presença de um espaço cônico. Esse é um problema que ilustrará o que entendemos sobre o papel das extensões auto-adjuntas em problemas de mecânica quântica onde singularidades se fazem presente. Já no capítulo 5, apresentamos o trabalho que propõe um método de experimentarmos o espaço curvo tridimensional em matéria condensada mole. Mais um trabalho em matéria condensada mole em que participei é discutido no capítulo 6, e fala sobre a interação de partículas coloidais mediada por deformações elásticas em cristais líquidos esméticos. Por fim, temos a conclusão e considerações finais.

Extensões auto adjuntas do Operador Hamiltoniano

Esse capítulo descreve, de maneira sucinta, o que são extensões auto adjuntas, e como proceder para encontrá-las. Ele é baseado em C. Filgueiras e F. Moraes, Revista Brasileira de Ensino de Física **29**, 11 (2007).

2.1 Introdução

Em mecânica quântica, para que um operador A corresponda a um observável, ele deve ser hermitiano. Isso é usualmente declarado como $A = A^\dagger$ [26]. Contudo, o que não fica claro é que, tecnicamente, um operador será um observável se ele for auto adjunto, isto é, $D(A) = D(A^\dagger)$ e $A = A^\dagger$, onde $D(A)$ é o domínio em que o operador atua. Para que um operador seja auto adjunto, é preciso que ele seja simétrico

$$\langle A\phi, \psi \rangle = \langle \phi, A\psi \rangle. \quad (2.1)$$

Enquanto não especificamos a física do problema, o que temos simplesmente é o problema de um operador A atuando em um subespaço de Hilbert. Neste ponto, um fato nos passa despercebido: a condição (2.1) revela que, matematicamente, as condições de contorno para um sistema não devem ser impostas: elas entram na própria definição do operador em questão. Isso quer dizer que no domínio de tal operador teremos autofunções satisfazendo a diferentes condições de contorno. Assim, antes mesmo de especificar a física do problema, podemos fazer a seguinte pergunta: Qual é o domínio em que um operador simétrico será efetivamente auto adjunto? Com o exemplo da seção a seguir,

vamos deixar a mensagem de que um operador simétrico A atuando em um subespaço de Hilbert admite, na maioria dos casos, infinitas condições de contorno. Mas é óbvio que a física do problema é que vai selecionar qual é a correta.

2.2 O Operador Hamiltoniano em um intervalo finito

Consideremos o operador hamiltoniano, $H = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}$ agindo em um espaço de funções definidas no intervalo finito $[0, L]$. Se identificássemos esse problema como o de uma partícula livre em uma caixa unidimensional, o domínio de H seria dado por [26],

$$D(H) = \left\{ \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi} \in L^2([0, L]); \quad \phi(L) = \phi(0) = \dot{\phi}(L) = \dot{\phi}(0) = 0 \right\}. \quad (2.2)$$

(onde $\dot{\phi}, \ddot{\phi}$ são as derivadas primeira e segunda com relação a x , respectivamente). Mas não foi isso que dissemos de início. Conforme já sabemos, para que H seja auto adjunto em $[0, L]$ é preciso que ele seja simétrico, isto é,

$$\langle H\phi, \psi \rangle - \langle \phi, H\psi \rangle = 0. \quad (2.3)$$

A integração por partes (2.3), com $\psi = \phi$ (isto é, $D(H) = D(H^\dagger)$) leva a

$$\frac{1}{2i} \left(\dot{\phi}(L)\phi^*(L) - \phi(L)\dot{\phi}^*(L) - \dot{\phi}(0)\phi^*(0) + \phi(0)\dot{\phi}^*(0) \right) = 0. \quad (2.4)$$

Usando a identidade $\frac{1}{2i}(xy^* - x^*y) = \frac{1}{4}(|x + iy|^2 - |x - iy|^2)$, primeiro tomamos $x = L\dot{\phi}^*(L)$ e $Y = \phi(L)$; depois $x = L\dot{\phi}^*(0)$ e $Y = \phi(0)$. A expressão (2.4) pode ser rescrita como

$$\left| L\dot{\phi}(0) - i\phi(0) \right|^2 + \left| L\dot{\phi}(L) + i\phi(L) \right|^2 - \left| L\dot{\phi}(0) + i\phi(0) \right|^2 - \left| L\dot{\phi}(L) - i\phi(L) \right|^2 = 0. \quad (2.5)$$

Para que a expressão (2.5) se anule, vemos que $\dot{\phi}(L)$, $\phi(L)$, $\dot{\phi}(0)$ e $\phi(0)$ devem satisfazer às seguintes condições de contorno

$$\begin{pmatrix} L\dot{\phi}(0) - i\phi(0) \\ L\dot{\phi}(L) + i\phi(L) \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} L\dot{\phi}(0) + i\phi(0) \\ L\dot{\phi}(L) - i\phi(L) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

. U é uma matriz unitária 2×2 que parametriza as condições de contorno. Deste modo, vemos que o domínio de H em $[0, L]$ é

$$D_U(H) = \left\{ \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi} \in L^2([0, L]) \mid \text{satisfaz (2.6)} \right\}. \quad (2.7)$$

Notemos que é a física do problema que vai selecionar os parâmetros corretos da matriz U . Por exemplo: $U = I$ corresponde à condição de contorno periódica 2.2, que pode ser aplicada à partícula em uma caixa unidimensional ou em um círculo. Se se tem a presença de um fluxo magnético, outra condição de contorno é selecionada para modelar o problema, e assim por diante.

Por fim, podemos escrever o espectro de H em $[0, L]$ sem especificar a física do problema. Isto é feito em [18], e não vamos reproduzi-lo aqui. Mas vale uma ressalva sobre o artigo [18]: devemos ser cautelosos ao analisá-lo pois pode ficar uma falsa impressão de que estamos obtendo o espectro do hamiltoniano em uma caixa unidimensional. Se assim fosse, estaríamos dizendo que esse problema físico teria infinitas condições de contorno nos extremos $x = 0$ e $x = L$, e que poderíamos escolher qualquer uma, aquela que nos fosse mais conveniente. Mais ainda, os autores dizem que experimentos devem ser feitos para decidir qual é a correta. Obviamente, isto não faz sentido físico algum, e no próximo capítulo, onde apresentaremos nosso trabalho, ilustraremos melhor este ponto. Conforme foi dito antes, temos apenas o espectro de H em $L^2([0, L])$, do qual podemos extrair os estados ligados da partícula na caixa tomando-se $U = I$.

Até aqui, esperamos ter passado a seguinte mensagem: em geral, um operador simétrico terá extensões auto adjuntas, ou seja, infinitas condições de contorno parametrizadas por um ou mais parâmetros. A física é que vai selecionar, naturalmente, a condição de contorno correta. Um exemplo disto é o caso de um campo clássico ou quântico em torno de uma singularidade cônica (defeito cônico). Ao se estudar o comportamento de vários desses campos e ondas no espaço cônico, muitas vezes erramos em dizer que tais campos são regulares no ápice do cone (em coordenadas cilíndricas, isso significa dizer que tais campos são regulares quando $\rho = 0$). Ao fazer isto, estamos ignorando o fato de que, fisicamente, estas singularidades possuem um tamanho finito (como no caso de uma corda cósmica [27] ou uma deslocação em um sólido elástico [28]), e que mesmo a grandes

distâncias estes campos sofrem efeitos devido à estrutura interna de um defeito cônico [29]. Conforme o trabalho de B.S. Kay e U.M. Studer [19], o problema pode ser modelado via condições de contorno: para uma variedade de situações envolvendo campos escalares e ondas em torno de singularidades cônicas, existe uma família de possíveis condições de contorno (extensões auto adjuntas) - uma delas é regular na origem, enquanto as outras envolvem campos que divergem logaritmicamente próximo da origem:

$$\phi \rightarrow cte \times \ln(\rho/R) \tag{2.8}$$

onde R é o parâmetro de extensão, com dimensão de comprimento, que pode ser determinado em termos da estrutura interna de um defeito cônico [30]. Ilustraremos essa idéia no próximo capítulo mas agora aplicando no contexto da mecânica quântica. Contudo, prosseguir conforme feito acima não é prático. É preciso saber como proceder às extensões auto adjuntas via a *teoria de von Neumann-Krein*. Aquilo que nos interessa dela sera esboçado a seguir, mas sem o rigor da matemática. Isso pode ser encontrado em [22].

2.3 O Método de von Neumann-Krein

A teoria de von Neumann das extensões auto adjuntas pode ser utilizada mais convenientemente para se determinar o número de parâmetros independentes que descrevem as extensões auto adjuntas. Conforme dissemos anteriormente, para que um operador A seja autoadjunto, ele deve obedecer $A = A^\dagger$ e $D(A) = D(A^\dagger)$. Contudo, existe um teorema [22] que mostra que o domínio de A^\dagger é dado por

$$D(A^\dagger) = D(A) \oplus K_+ \oplus K_-. \tag{2.9}$$

onde K_+ e K_- são chamados *subespaços deficientes*; eles são expandidos pelas soluções das equações de autovalores

$$K_\pm = \{ \psi \in L^2 | A^\dagger \psi_\pm = \pm i \psi_\pm \}. \tag{2.10}$$

As dimensões destes espaços, (n_+, n_-) , são chamadas de *índices deficientes*.

Vemos daí que, mesmo que A seja hermitiano, isto não quer dizer que ele seja formalmente autoadjunto, pois, em geral, os domínios $D(A)$ e $D(A^\dagger)$ são diferentes. Mas é possível escrever um domínio para A (o qual chamamos de $D_{max}(A)$) tal que $D_{max}(A) = D(A^\dagger)$. Neste domínio, A será um operador simétrico. Para encontrar este domínio $D_{max}(A)$, primeiro devemos verificar os índices deficientes: estes são usados para determinar se A possui somente uma, infinitas ou nenhuma extensão auto adjunta. O teorema a seguir nos mostra como verificar qual dessas possibilidades ocorre:

Teorema: Para um operador A com índices deficientes (n_+, n_-) existe três possibilidades:

1. Se $n_+ = n_- = 0$, então A é essencialmente autoadjunto(isto é, possui uma única extensão auto adjunta);
2. Se $n_+ = n_- = n \geq 1$, então A possui infinitas extensões auto adjuntas, parametrizadas por uma matriz unitária $n \times n$;
3. Se $n_+ \neq n_-$, então A não possui extensão auto adjunta.

Com este resultado em mãos, evocamos outro teorema, que diz que podemos *estender* o domínio $D(A)$ ao domínio $D_{max}(A)$, o que é declarado como

$$D_{max}(A) = \{\phi + C(\psi_+ + U\psi_-) \mid \psi \in D(A), C \text{ complexo}, U \text{ fixa}\} \quad (2.11)$$

Neste domínio, o operador A é autoadjunto.

Resumindo o que foi dito até aqui nesta seção, esperamos que a receita de se proceder às extensões auto adjunta seja entendida: primeiro, obtemos os núcleos (2.10), os quais serão mapeados pela matriz unitária U . Em seguida, devemos obter o domínio estendido (2.11). Convém notar que esse não é um trabalho difícil se solução geral da equação de Schrödinger fornecer funções analíticas, com suas propriedades conhecidas. O passo seguinte, e importante que foi usado no nosso trabalho, é apresentado no próximo capítulo. Ele é relevante em problemas que possuem topologia não trivial, ou seja, espaços onde foi retirado um ponto, uma linha ou um plano, os quais podem introduzir potencias de curto alcance no sistema. No nosso caso, temos uma superfície cônica, a qual corresponde

à topologia de um plano furado. Veremos que essa geometria introduz um potencial de curto alcance que é essencialmente a *curvatura gaussiana* do cone.

2.4 Considerações finais

Para finalizar, pensamos ser importante chamar a atenção para o fato de que o tema sobre extensões auto adjuntas pode gerar alguma confusão. Essa confusão é gerada pela leitura de diversos artigos no tema, como foi dito anteriormente. Mesmo recentemente, isso prossegue [31]. Falta o entendimento do que significa tudo isso. O que temos a dizer é que, se você conhece a física do seu problema e sabe quais são as condições de contorno dele, não precisa se preocupar com esse tema apresentado aqui. De fato, ao nosso ver, quando você faz isso, automaticamente seleciona os parâmetros corretos da matriz U , conforme dissemos na segunda seção desse capítulo. Então, no próximo capítulo, ficará claro o papel das extensões auto adjuntas quando **não** sabemos explicitar as condições de contorno do sistema, algo que ocorre quando se tem singularidades.

Mecânica quântica de uma partícula no cone

Nesse capítulo, apresentamos como a geometria e a topologia do cone pode influenciar para a existência de estados ligados de uma partícula neutra. Ele é baseado em C. Filgueiras and F. Moraes, *Annals of Physics* **323**, (2008) 3150–3157.

3.1 Introdução

A geometria simples, mas não trivial de um cone, aparece como uma geometria efetiva em diversas entidades físicas tais como corda cósmica [27], defeitos em meios elásticos [3], defeitos em cristais líquidos [52], etc. A dinâmica quântica de uma partícula em um espaço cônico tem sido profundamente estudada com diferentes motivações [53]. Uma questão importante referente ao cone é a singularidade da curvatura em seu ápice. A maneira mais simples de se tratar com esta singularidade é impor que a função de onda seja nula no ápice, conforme feito em [53]. De fato, esta é somente uma das possíveis condições de contorno [54]. O tratamento mais geral pode ser feito usando o método das extensões autoadjuntas [22]. Aparentemente, isso leva uma família de condições de contorno, conforme foi dito no capítulo anterior. De fato, somente **uma** condição de contorno corresponde à física do problema [4, 54, 55]. Outro problema que requer as extensões auto-adjuntas envolve um potencial que decai com o inverso do quadrado da distância. Embora ele tenha sido estudado já em 1950 por *K. M. Kase* [58], esse potencial patológico tem recebido alguma atenção recentemente (veja [56, 57] e suas referências). O principal problema é que os níveis de energia são ilimitados inferiormente, fazendo com que os estados ligados sejam instáveis. Esquemas diferentes de regularização têm sido usados para abordar este problema, incluindo *cutte radial* [59] ou extensões auto-

adjuntas [56].

Nesse capítulo, estamos interessados em aplicar o método das extensões auto-adjuntas para estudar a dinâmica quântica de uma partícula neutra confinada à superfície cônica. Conforme será visto a seguir, além da singularidade cônica, há também uma contribuição de uma interação que decai com o inverso do quadrado da distância.

Quando uma partícula pontual move-se confinada a uma superfície imersa em um espaço euclidiano tridimensional, ela está sujeita a um potencial geométrico [60]. Aplicando este resultado ao nosso problema, teremos o potencial patológico decrito acima. Usando coordenadas ρ e θ , introduzimos o seguinte elemento de linha

$$ds^2 = d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\theta^2, \quad (3.1)$$

de tal modo que $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. A métrica (3.1) descreve um cone se $0 < \alpha < 1$. A figura (3.1) mostra como podemos “fabricar” um cone a partir de uma folha planar: uma seção angular é removida com uma posterior identificação das fronteiras produzidas. Se γ é o ângulo que define a seção que foi removida, então a superfície remanescente corresponde a um setor angular dado por $2\pi\alpha = 2\pi - \gamma$. Isso é exatamente o que descreve a métrica (3.1). A incorporação do termo α^2 à métrica planar em coordenadas polares faz com que o ângulo total na superfície seja $\int_0^{2\pi} \alpha d\theta = 2\pi\alpha < 2\pi$, pois $0 < \alpha < 1$. Sendo 2β o ângulo de abertura do cone(veja figura (3.1)), podemos mostrar que $\alpha = \tan \beta$: este resultado vem se identificarmos o comprimento de um círculo em torno do cone sem o setor, dado por $2\pi\alpha\rho$, com o comprimento deste círculo em termos de 2β , dado por $2\pi\rho \tan \beta$. Quanto mais próximo α se aproxima da unidade(ou 2β tende a π), mais o cone se aproxima do plano. Para $\alpha = 1$, o cone se torna um plano. Se $\alpha > 1$, a relação (3.1) ainda existe e a superfície cônica corresponde a uma inserção de um setor(isto é, $2\beta > \pi$). Chamamos esse resultado de *anti-cone*.

Note que o elemento de linha (3.1) é simplesmente uma seção com $t = \text{const.}$ e $z = \text{const.}$ da métrica da corda cósmica, dada por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dz^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\theta^2, \quad (3.2)$$

onde, neste caso, α é relacionado à densidade linear de massa μ de uma corda cósmica ($\alpha =$

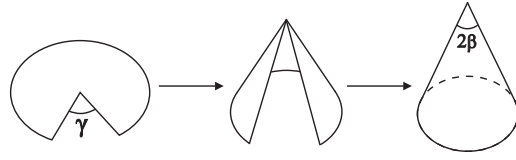


Figura 3.1 Superfície cônica de déficit angular γ .

$1 - 4G\mu/c^2$, onde G é a constante gravitacional e c é a velocidade da luz). Usualmente, somente $\alpha < 1$ é considerado em cosmologia, pois $\alpha > 1$ corresponde a uma densidade de massa negativa. Embora o caso $\alpha > 1$ também ocorra em sistemas de matéria condensada, consideraremos apenas o caso $\alpha < 1$ aqui.

3.2 O modelo

Considere uma partícula neutra confinada em uma superfície cônica. Como consequência da topologia não-trivial do cone, e também por causa do confinamento bidimensional, devemos levar em conta o potencial geométrico dado por [60]

$$U_{geo} = -\frac{\hbar^2}{2M} (H^2 - K), \quad (3.3)$$

onde H é a *curvatura média* e K é a *curvatura gaussiana* da superfície. Para o cone [61],

$$K = \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) \frac{\delta(\rho)}{\rho}, \quad (3.4)$$

e

$$H = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{2\alpha\rho}. \quad (3.5)$$

É claro que a singularidade expressa pela função δ na curvatura gaussiana é devido ao ápice do cone, o qual, a partir de agora, referiremos como “defeito” por causa de suas características de defeito topológico. Dependendo de α , ambas as curvaturas podem contribuir com potenciais atrativos ou repulsivos. A partícula neutra, com seu movimento confinado à superfície cônica, é sujeita ao potencial resultante

$$U_{res} = -\frac{\hbar^2}{8M} \left(\frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2 \rho^2} \right) + \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) \frac{\delta(\rho)}{\rho}. \quad (3.6)$$

Sistemas reais possuem um defeito com raio finito, significando que a curvatura é suavizada ao longo do diâmetro do defeito. Por isso, consideraremos o defeito cônico com um núcleo de raio a , o qual é muito pequeno comparado à escala de comprimento do sistema como um todo. Escrevendo a curvatura gaussiana como um potencial de curto alcance, para o qual $U_{short}(\rho \geq a) = 0$, a equação de Schrödinger para a partícula fica

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \left(\frac{1 - \alpha^2}{4\alpha^2} \right) \frac{1}{\rho^2} \right] \Psi + U_{short}(\rho) \Psi = E \Psi, \quad (3.7)$$

onde $U_{short}(\rho) = \frac{\hbar^2}{2M} K$; K torna-se (3.4) no limite $a \rightarrow 0$.

Seguindo *Kay* e *Studer* [19], podemos resolver esse problema modelando-o via condições de contorno: substituímos o problema verdadeiro por

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \left(\frac{1 - \alpha^2}{4\alpha^2} \right) \frac{1}{\rho^2} \right] \Psi_\eta = E \Psi_\eta, \quad (3.8)$$

com Ψ_η , indexado por um parâmetro η , o qual é relacionado ao comportamento da função de onda no limite $\rho \rightarrow a$. Mas, em geral, não podemos impor qualquer condição de contorno (por exemplo, *e.g.* $\Psi = 0$ em $\rho = 0$) sem descobrir quais as condições de contorno que são permitidas para a equação (3.8). Este é o escopo das extensões auto-adjuntas [18, 22].

Terminamos essa seção lembrando que o problema de um dipolo em uma superfície cônica é qualitativamente o mesmo discutido aqui, pois a topologia do cone introduz uma auto-interação que cai com o inverso do quadrado da distância a partir do vértice [59, 62, 63]. Mais ainda, a dependência desta auto-interação com a abertura do cone é a mesma que aparece no potencial geométrico. Por essa razão, nosso resultado também fornece uma luz no problema do dipolo discutido em [56].

3.3 Extensões auto-adjuntas

Para proceder às extensões auto-adjuntas de (3.8), usamos a decomposição tensorial $L^2(R^+, \rho d\rho) \otimes L^2(S^1, d\theta)$. Conforme visto em [21], o operador $-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ é essencialmente

auto-adjunto em $L^2(S^1, d\theta)$. Assim, colocando a função de onda na forma

$$\Psi_\eta(\rho, \theta) = \Phi_\eta(\rho)e^{il\theta}, \quad (3.9)$$

onde $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ é o número quântico do momento angular, chegamos a *função modificada de Bessel*

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - \left(\frac{\nu^2}{\rho^2} + k^2 \right) \right] \Phi_\eta = 0, \quad (3.10)$$

onde $k^2 = -\frac{2ME}{\hbar^2} > 0$, uma vez que estamos olhando para estados ligados, e com

$$\nu^2 = \frac{l^2}{\alpha^2} - \frac{(1 - \alpha^2)}{4\alpha^2}. \quad (3.11)$$

Para $\alpha < 1$, temos $\nu^2 < 0$ para $l = 0$, e $\nu^2 > 0$ para $l = \pm 1, \pm 2, \dots$. Não existe um valor de l para o qual $\nu = 0$, a não ser $l = 0$ (mas, neste caso, α deve ser 1, ou seja, o espaço é plano).

Agora, para encontrar o domínio total de Φ_η em $L^2(R^+, \rho d\rho)$, temos que achar o subespaço deficiente de (3.10). Como vimos, devemos resolver a equação de autovalores

$$\mathcal{H}^\dagger \Phi_\pm = \pm ik_0 \Phi_\pm, \quad (3.12)$$

onde $\mathcal{H} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - \left(\frac{\nu^2}{\rho^2} + k^2 \right) \right]$ vem da equação (3.10), para cada caso: $\nu^2 < 0$ e $\nu^2 > 0$.

As únicas autofunções que são quadrado-integráveis e que são soluções de (3.12), são as funções modificadas de Bessel K_μ , isto é,

$$\Phi_\pm(\rho) = \text{const.} K_\mu \left(\frac{\rho}{\hbar} \sqrt{\mp 2iMk_0} \right), \quad (3.13)$$

onde $\mu = \nu$, se $\nu^2 > 0$, ou $\mu = i|\nu|$, se $\nu^2 < 0$. A dimensão desse espaço deficiente é $(n_+, n_-) = (1, 1)$. Por causa disso, o domínio de (3.10) em $L^2(R^+, \rho d\rho)$ é dado pelo conjunto de autofunções

$$\Phi_\eta(\rho) = \chi_\mu(\rho) + C \left[K_\mu \left(\frac{\rho}{\hbar} \sqrt{-2iMk_0} \right) + e^{i\eta} K_\mu \left(\frac{\rho}{\hbar} \sqrt{2iMk_0} \right) \right], \quad (3.14)$$

onde $\chi_\mu(\rho)$, com $\chi_\mu(a) = \dot{\chi}_\mu(a) = 0$, é a função de onda quando **não** temos $U_{short}(\rho)$. O último termo em (3.14) fornece o comportamento correto da função de onda quando $\rho = a$.

O parâmetro $\eta(\text{mod}2\pi)$ representa escolhas *a priori* das condições de contorno. Conforme discutimos acima e veremos abaixo, a física do problema determina esse parâmetro sem ambiguidade. De fato, η descreve o acoplamento entre $U_{short}(\rho)$ e a função de onda. Então, ele deve ser expresso em termos de α , o raio a do defeito e o momento angular efetivo ν . O próximo passo é encontrar um *fitting* para η compatível com $U_{short}(\rho)$. Faremos isso nas próximas duas seções para os casos $\nu^2 < 0$ e $\nu^2 > 0$, respectivamente.

3.4 O caso $\nu^2 < 0$

Existe somente uma possibilidade neste caso, que é $l = 0$. Agora,

$$U_{eff} = \frac{\hbar^2}{2M} \frac{l^2}{\alpha^2 \rho^2} - \frac{\hbar^2}{8M} \left(\frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2 \rho^2} \right) \quad (3.15)$$

é o potencial efetivo que inclui um termo centrípeto e uma contribuição devido à curvatura média. A contribuição da curvatura gaussiana ao potencial é dada por

$$U_{short} = \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) \frac{\delta(\rho)}{\rho}. \quad (3.16)$$

Então, neste caso, $U_{eff} < 0$ é atrativo; $U_{short} > 0$ é repulsivo. Veremos abaixo que, mesmo com essa repulsão de curto-alcance, o potencial atrativo $1/\rho^2$ garante a existência de estados ligados.

Nessa seção, encontraremos um *fitting* para η , seguindo o procedimento descrito por *Kay e Studer* [19]. Primeiro, escrevemos a *solução estática* de (3.7), ou seja,

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right] + U_{short}(\rho) \right\} \Phi_{static}^{true} = 0 \quad (3.17)$$

Uma vez que estamos considerando o raio a do feito cônico, podemos escrever a curvatura gaussiana (3.4) como

$$K = \lambda \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) \frac{\delta(\rho - a)}{a}, \quad (3.18)$$

onde a constante λ foi inserida por conveniência - para o caso que estamos estudando aqui, ela é de fato 1, e se fazemos $\lambda \rightarrow \infty$, estamos escolhendo a condição de contorno

$\Psi(\rho = a) = 0$. Assim, requeremos que

$$\frac{\rho}{\Phi_{static}^{true}} \frac{d\Phi_{static}^{true}}{d\rho} \Big|_{\rho=a} = \frac{\rho}{\Phi_{\eta,static}} \frac{d\Phi_{\eta,static}}{d\rho} \Big|_{\rho=a}, \quad (3.19)$$

onde $\Phi_{\eta,static}(\rho)$ vem de (3.14). Para $\nu^2 > 0$, as funções de onda (3.14) são dadas em termos de $K_{i|\nu|}$, a função de Bessel modificada de argumento imaginário puro [64]. Como $a \approx 0$, usamos a expansão para x pequeno,

$$K_{i|\nu|}(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{\nu \sinh(\pi\nu)}} \sin[\nu \ln(x/2) + \nu\gamma] [1 + O(x^2)], \quad (3.20)$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni. Levando em conta (3.14), chegamos a

$$a \frac{d\Phi_{\eta,static}/d\rho}{\Phi_{\eta,static}(\rho)} \Big|_{\rho \rightarrow a} = a \frac{\dot{F}_\eta(\rho = a)}{F_\eta(\rho = a)} \quad (3.21)$$

onde

$$F_\eta(\rho) = \sin\left[\nu \ln\left(\sqrt{-2Mik_0\rho/2\hbar}\right) + \nu\gamma\right] + e^{i\eta} \sin\left[\nu \ln\left(\sqrt{+2Mik_0\rho/2\hbar}\right) + \nu\gamma\right] \quad (3.22)$$

e $\dot{F}_\eta = \frac{dF_\eta}{d\rho}$. Integrando (3.17) de 0 a a , temos

$$a \frac{d\Phi_{static}^{true}(\rho = a)}{d\rho} = \int_0^a \rho d\rho \lambda \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \frac{\delta(\rho-a)}{a} \Phi_{static}^{true}(\rho) - \int_0^a \frac{\nu^2}{\rho^2} \Phi_{static}^{true} \rho d\rho. \quad (3.23)$$

Considerando que

$$\int_0^a \frac{\nu^2}{\rho^2} \Phi_{static}^{true}(\rho) \rho d\rho \approx \frac{\nu^2}{a^2} \Phi_{static}^{true}(\rho = a) \int_0^a \rho d\rho,$$

temos

$$\frac{a}{\Phi_{static}^{true}(\rho = a)} \frac{d\Phi_{static}^{true}}{d\rho} \Big|_{\rho=a} = \lambda \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) - \frac{\nu^2}{2}. \quad (3.24)$$

Assim, de (3.19), (3.21) e (3.24), obtemos a relação

$$a \frac{\dot{F}_\eta(\rho = a)}{F_\eta(\rho = a)} \approx \lambda \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) - \frac{\nu^2}{2}, \quad (3.25)$$

a qual nos fornece o parâmetro η em termos da física do problema, isto é, o comportamento correto das funções de onda quando $\rho \rightarrow a$ (ou o acoplamento entre o potencial de curto-alcance $U_{short}(r)$ e as funções de onda). A seguir, encontraremos os estados ligados do

hamiltoniano e veremos que a fórmula (3.25) fornece o espectro sem qualquer parâmetro arbitrário. Para isto, devemos resolver o problema de autovalores

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\nu^2}{\rho^2} \right] \Phi_E = -E \Phi_E, \quad (3.26)$$

cuja solução geral é dada por

$$\Phi_E(\rho) = K_{i|\nu|} \left(\frac{\rho}{\hbar} \sqrt{-2mE} \right). \quad (3.27)$$

Como essa solução pertence ao domínio do hamiltoniano que aparece em (3.10), ele é da forma (3.14), isto é,

$$\Phi_E(\rho) = \chi_\nu(\rho) + C \left[K_{i|\nu|} \left(\frac{\rho}{\hbar} \sqrt{-2iME} \right) + e^{i\eta} K_{i|\nu|} \left(\frac{\rho}{\hbar} \sqrt{2iME} \right) \right]. \quad (3.28)$$

Usando as expressões (3.28) e (3.20), chegamos a

$$F_\eta(\rho = a) = \sin \left[\nu \ln \left(\sqrt{-2MEa/2\hbar} \right) + \nu\gamma \right] \quad (3.29)$$

e

$$\dot{F}_\eta(\rho = a) = \frac{\nu}{a} \cos \left[\nu \ln \left(\sqrt{-2MEa/2\hbar} \right) + \nu\gamma \right]. \quad (3.30)$$

Usando as expressões acima para F_η e \dot{F}_η em (3.25), chegamos a

$$\nu \cot \left[\nu \ln \left(\sqrt{-2MEa/2\hbar} \right) + \nu\gamma \right] = \lambda \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) - \frac{\nu^2}{2}. \quad (3.31)$$

Com $\lambda = 1$, a inversão da equação (3.31) produz

$$E = -\frac{2\hbar^2}{Ma^2} \exp \left[\frac{2}{\nu} \cot^{-1} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha\nu} - \frac{\nu}{2} \right) - 2\gamma \right]. \quad (3.32)$$

Note que o caso estudado nessa seção, $\nu^2 < 0$, corresponde a $\alpha < 1$. Isto significa que, enquanto a curvatura média contribui atrativamente, a curvatura gaussiana contribui com um potencial de curto-alcance repulsivo. A equação (3.11) implica que o único valor permitido para o momento angular é $l = 0$, significando que temos apenas um estado ligado individual.

Note que se fizermos $\lambda \rightarrow \infty$ na equação (3.31), obteremos o resultado da referência [59]:

$$E = -\frac{2\hbar^2}{Ma^2} \exp \left[-\frac{2n\pi}{\nu} - 2\gamma \right], \quad (3.33)$$

com $n = 1, 2, \dots$, o qual corresponde a impor a condição de que as funções de onda desaparecem em $\rho = a$, ou seja, temos uma barreira infinita em $r \leq a$.

3.5 O caso $\nu^2 > 0$

Neste caso, temos que $\alpha < 1$ e $l \neq 0 \implies U_{eff} > 0, U_{short} > 0$. Então, mesmo que a contribuição vinda da curvatura média seja atrativa, U_{eff} não é. Portanto, não haverá estados ligados. Poderemos ter estados ligados somente se tivermos um cone finito, isto é, uma caixa bidimensional na geometria do cone.

3.6 Conclusão

Muitos autores têm discutido, separadamente, a dinâmica quântica de uma partícula na presença dos potenciais *mal-comportados* discutidos nesse capítulo. Em um simples modelo, estudamos essas condições anômalas de maneira unificada, o que clarifica o significado das condições de contorno normalmente usadas em tais problemas, como impor que a função de onda seja nula na origem, por exemplo. De fato, essa imposição é, em um certo sentido, arbitrária. As extensões auto-adjuntas introduzem uma maneira natural de se encontrar as condições de contorno apropriadas que descrevem a física desses potenciais singulares. Uma interpretação comum [66] das extensões auto-adjuntas é que elas fornecem uma família de soluções associadas com certa liberdade em se escolher as condições de contorno. Contudo, considerando um defeito de raio finito e tomando-se ele a zero, nós fixamos as condições de contorno, conforme [55].

Nosso modelo consiste em uma partícula neutra em uma superfície cônica. A geometria cônica introduz um potencial que depende do inverso do quadrado da distância devido a curvatura média, o qual pode ser atrativo ou repulsivo, dependendo de l . A geometria do cone é também responsável pela interação tipo delta, a qual é repulsiva. Nossos resultados estão resumidos na tabela I abaixo.

	$\alpha < 1$
$\nu^2 < 0$	1 estado ligado para $l = 0$
$\nu^2 > 0$	estados de espalhamento para $l \neq 0$

Tabela I. Sumário dos resultados.

A tabela I revela que, quando o potencial de curto-alcance é repulsivo ($\alpha < 1$), um potencial atrativo efetivo assegura um estado ligado ($l = 0$). Agora, quando $\alpha < 1$, para $l \neq 0$, temos ambos U_{eff} e U_{short} repulsivos, o que não leva a estados ligados.

Uma vez que nossa equação de Schrödinger é singular em $\rho = a$, resolvemos o problema prestando atenção ao comportamento correto das funções de onda neste ponto. Usando as extensões auto-adjuntas do operador hamiltoniano, este comportamento aparece naturalmente, mas tivemos que fazer um *fitting* para o parâmetro de extensão em termos da física bem conhecida do sistema quando $\rho \leq a$. Este procedimento nos deu expressões analíticas exatas para os níveis de energia.

Sem as extensões auto-adjuntas, podemos seguir o procedimento usado em [54] para lidar com potencias de curto-alcance. Contudo, o método usando extensões auto-adjuntas é mais sólido e mais prático. O leitor pode comparar, por exemplo, o problema *Aharonov-Bohm-Coulomb* discutido por *Hagen e Park* [54], e por *Park e Oh* [20]. O mesmo espectro não-relativístico foi encontrado em ambos os trabalhos, mas com muito menos esforço no segundo, onde as extensões auto-adjuntas foram utilizadas. Um outro exemplo da importância do método pode ser visto em [66], onde estudamos o *efeito Aharonov-Bohm gravitacional* nos estados ligados devido à corda cósmica. Este efeito foi previsto inicialmente para o caso hipotético de uma corda cósmica cercada por uma parede cilíndrica [67]. Usando a condição de contorno correta, dada pelas extensões auto-adjuntas, somos capazes de mostrar que o efeito ainda existe, mesmo sem a necessidade desta parede.

Membranas e o cálculo variacional

O propósito desse capítulo é apresentar alguns teoremas conhecidos que são utilizados para se estudar cálculo variacional de superfícies, tanto no espaço euclidiano quanto em espaços curvos. Demonstrações formais, as quais podem ser encontradas em [32], serão deixadas de lado. Mas é preciso que o leitor tenha uma noção básica sobre a notação usando *campos vetoriais*. Obter os teoremas importantes para nós é muito mais prático do que na notação clássica da geometria diferencial.

4.1 Elasticidade de membranas fluidas

Membranas fluidas podem ser compostas de vários tipos diferentes de moléculas. Contudo, os seus comportamentos (configurações, flutuações, termodinâmica) podem ser entendidos a partir de um ponto de vista unificado, o qual considera a *energia livre de deformação de uma membrana*. Se a membrana fosse vinculada a viver no plano, a única energia relevante seria aquela devido à compressão das moléculas, ou seja, mudança na área média por molécula. Isso é análogo a ondas sonoras em um fluido tridimensional. Contudo, a membrana pode deformar-se na direção normal ao plano, o que implica em um conjunto de “modos” descrevendo a conformação do filme. Essas deformações para fora do plano são conhecidas como *modos de curvatura*, e a energia livre associada a eles é chamada *energia livre de curvatura*.

Estamos interessados em estudar deformações onde o volume total da membrana ou vesícula não muda. Isso ocorre para as deformações de baixa energia, pois a energia necessária para mudar o seu volume médio é bem maior do que aquela associada com efeitos térmicos [35]. Neste caso, as escalas de comprimentos que descrevem suas

configurações e flutuações são bem maiores do que sua espessura d , e podemos considerá-las como superfícies bidimensionais imersas no espaço euclidiano tridimensional. Mais ainda, essas configurações são fundamentalmente distintas daquelas vistas em interfaces tipo bolha de sabão, pois elas são determinadas pela energia de curvatura, e não pela tensão superficial. Com essas considerações, *Helfrich* e *Canham* [83] notaram que o comportamento estatísticos de tal membrana “fina” pode ser estudada dentro do modelo contínuo baseado na seguinte energia de curvatura:

$$F = \int dS \{2\kappa H^2 + \bar{\kappa}K\}, \quad (4.1)$$

onde H e K são, respectivamente, as *curvaturas média* e *gaussiana* de um ponto p sobre a superfície. Se κ_1 e κ_2 são as *curvaturas principais* em p (figura (4.1)), então $H = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$ e $K = \kappa_1\kappa_2$; κ é a *constante de curvatura* e $\bar{\kappa}$ é a *constante de curvatura gaussiana*. Ambas possuem dimensão de energia.

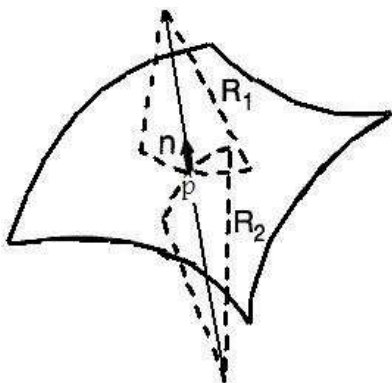


Figura 4.1 Curvaturas principais de uma superfície: $\kappa_1 = 1/R_1$ e $\kappa_2 = 1/R_2$, onde R_1 e R_2 são os *raios de curvatura*; \mathbf{n} é o vetor normal.

Em (4.1), o termo proporcional à *tensão superficial* ou ao *potencial químico* está omitido. Podemos proceder desta forma pois o número fixo de moléculas na membrana assegura uma área interna fixa, e também pelo fato de que sua compressão/dilatação envolve uma energia muito maior do que o custo energético devido a deformações de curvatura. Essa ausência de tensão superficial, no sentido ordinário, leva a uma profunda diferença entre membranas e interfaces líquidas, onde a *área interfacial* pode ser criada

ou destruída às custas de uma dada tensão superficial. Para uma interface, partículas “interfaciais” são as mesmas que aquelas presentes no volume do sistema, diferentemente do que ocorre com membranas. Essa diferença fundamental é a razão para a existência de uma grande variedade de configurações não-esféricas, em contraste com o que ocorre com a forma esférica típica de equilíbrio de líquidos simples.

A energia de curvatura gera não somente uma grande variedade de configurações, mas também leva a um diferente espectro de flutuações ou excitações dessas configurações. Ela também leva a uma diferente dinâmica daquela apresentada por interfaces líquidas simples [35]. Para estudar estes aspectos, é preciso, em um primeiro momento, proceder ao cálculo variacional de superfícies. Uma vez que (4.1) depende de H e K , primeiro devemos encontrar fórmulas variacionais para essas duas grandezas, as quais podem ser usadas para estudar as flutuações de membranas a partir de uma configuração de equilíbrio. Com elas em mãos, partimos para a obtenção da primeira variação do funcional (4.1). Lembramos que essas superfícies estão imersas no espaço euclidiano E^3 . Na seção 4.3, apresentamos as fórmulas variacionais para uma superfície imersa em um espaço curvo. Esses serão os resultados que serão usados no capítulo seguinte, ou seja, o nosso trabalho propriamente dito.

4.2 Deformação de superfícies no espaço euclidiano

Considere uma superfície compacta $M \subseteq E^3$, com o campo vetorial unitário interior N . Estamos interessados em estudar a deformação dessa superfície perante o **mapa linear**

$$\mu :]-\epsilon, \epsilon[\times M \rightarrow E^3 : (t, p) \mapsto \mu_t(p) = \mu(t, p) = p + tZ_p, \quad (4.2)$$

onde $\mu_0 = p$, para todos os pontos p definidos em M , e $Z_p = \frac{\partial \mu}{\partial t} |_{t=0}$ é o *campo vetorial de deformação*, o qual, em qualquer ponto da superfície, fornece a “velocidade inicial” da deformação. Então, esse vetor é tangente à trajetória que é traçada pelo ponto p perante a deformação (veja figura (4.2)). A coleção de todos os campos vetoriais em M que tomam

valores em E^3 será denotado por $\bar{X}(M)$. Se o vetor Z é tangente à superfície em qualquer de seus pontos, a deformação é chamada *deformação tangente*. Se ele é normal, então ele leva o nome de *deformação normal*. Primeiramente, desejamos saber como um tensor

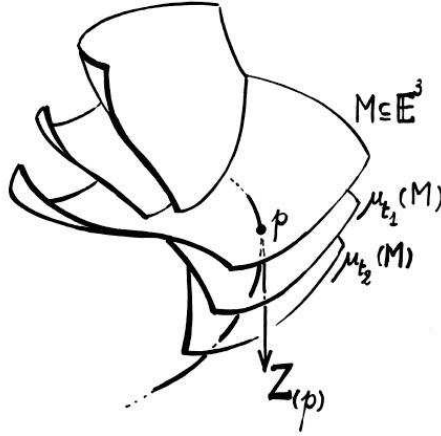


Figura 4.2 O vetor deformação é a velocidade vetorial inicial da trajetória que é descrita pelo ponto p movendo-se perante a deformação.

qualquer definido na superfície muda perante a ação do vetor Z . Por isso, começamos olhando para a variação da métrica ou *primeira forma fundamental* da superfície μ_t , a qual é denotada por $I(\mu_t)$. O vetor normal de $\mu_t(M)$ é denotado por N_t . Queremos saber a maneira como I muda perante a deformação. Para isso, definimos

$$\begin{aligned} \hat{I}(\mu_t) &: X(M) \times X(M) \rightarrow \mathfrak{S}(M) \\ &: (V, W) \mapsto I(\mu_t)(d\mu_t(V), d\mu_t(W)) = \langle d\mu_t(V), d\mu_t(W) \rangle, \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde $X(M)$ denota o conjunto de todos os campos vetoriais na superfície M e $\mathfrak{S}(M)$ refere-se a todas as funções mapeando a superfície em \mathfrak{R} . Com esta definição, a variação da primeira forma fundamental ao longo da deformação é definida como um tensor enviando o par (V, W) de campos vetoriais à função

$$\delta I = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \hat{I}(\mu_t)(V, W). \quad (4.4)$$

Essa expressão é válida para qualquer tensor B em μ_t .

Em (4.3), $d\mu_t(W)$ representa como o campo vetorial $W \in X(M)$ é transferido a μ_t , o que é escrito como

$$d\mu_t(W) = W + t\bar{D}_W Z, \quad (4.5)$$

onde \bar{D} é a derivada parcial padrão, também chamada de *conexão* em E^3 . Dessa expressão, segue imediatamente que a variação de I satisfaz

$$\delta I = \langle V, \bar{D}_W Z \rangle + \langle \bar{D}_V Z, W \rangle. \quad (4.6)$$

Antes de prosseguirmos, devemos recordar a definição do *operador forma* em M [33]:

$$A : X(M) \rightarrow X(M) : V \mapsto -\bar{D}_V N. \quad (4.7)$$

Os autovalores desse operador são chamados de *curvaturas principais* κ_1 e $\kappa_2 \in \mathfrak{S}(M)$ (espaço de funções reais em M), e os correspondentes autovetores são as respectivas *direções principais*, denotas por e_1 e $e_2 \in X(M)$.

Neste ponto, lembramos que a energia livre de Canham-Helfrich (4.1) para uma membrana é escrita em termos dos dois invariantes do operador A , onde $H = \frac{1}{2}\text{Tr}A = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ e $K = \det A = \kappa_1 \kappa_2$. Então, uma vez que estamos interessados em formulas variacionais para a superfície, devemos olhar para as quantidades H e K , ou seja, devemos saber como esses dois invariantes modificam-se perante a ação do vetor de deformação Z . Para isso, notemos, primeiramente, a figura (4.3). Ela ilustra como o vetor normal N_t é enviado a todas as superfícies deformadas. Depois, observamos que o operador que mede a variação de um tensor, dado em (4.4), é linear perante sucessivas variações. Uma consequência direta disso é que as variações de H e K de uma superfície, ao longo de uma deformação tangente, podem simplesmente serem expressas como derivadas parciais ao longo do campo vetorial de deformação Z . De um modo mais geral, a variação de qualquer tensor B ao longo da deformação tangente é dada pela *derivada de Lie* deste tensor, com respeito ao campo vetorial de deformação Z :

$$\delta_Z H = Z[H],$$

$$\delta_Z K = Z[K],$$

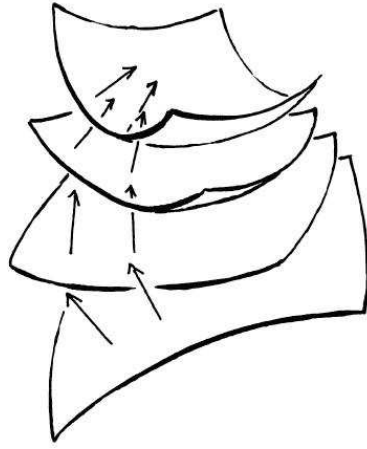


Figura 4.3 Vetor normal N_t em todas as superfícies μ_t

$$\delta_Z B = L[B]. \quad (4.8)$$

Nessas expressões, Z é tangente a M . Assim, não precisamos nos preocupar com essa componente da deformação, e focamos somente na deformação normal.

Para sabermos como H e K variam perante uma deformação linear, precisamos saber primeiro como o operador forma A varia. O próximo teorema nos dá uma expressão geral para δA :

$$(\delta A)(W) = -\bar{D}_W(\delta N) - \bar{D}_{A(W)}Z. \quad (4.9)$$

Nesta equação, δN segue a partir de (4.5) e de

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \langle d\mu_t(W_{(p)}), N_{(\mu_t(p))} \rangle = \langle \bar{D}_W Z, N \rangle + \langle W, \bar{D}_Z N \rangle = 0 \quad (4.10)$$

Então,

$$\delta N = \langle \bar{D}_Z N, e_1 \rangle e_1 + \langle \bar{D}_Z N, e_2 \rangle e_2 = -\langle \bar{D}_{e_1} Z, N \rangle e_1 - \langle \bar{D}_{e_2} Z, N \rangle e_2. \quad (4.11)$$

Outras relações importantes são as *equações de Codazzi*,

$$\begin{aligned} e_2[\kappa_1]e_1 &= (\kappa_2 - \kappa_1) \nabla_{e_1} e_2 \\ e_1[\kappa_2]e_2 &= (\kappa_1 - \kappa_2) \nabla_{e_2} e_1, \end{aligned} \quad (4.12)$$

as quais nos dizem que ∇A é um operador simétrico; ∇ é a *conexão de Levi-Civita* da superfície.

A seguinte expressão fornece a variação do operador forma, a qual é obtida a partir de (4.9), (4.11) e (4.12),

$$\begin{aligned} (\delta A)(e_1) &= \left\{ \langle \bar{D}_{e_1} \bar{D}_{e_1} Z, N \rangle + \frac{e_2[\kappa_1]}{\kappa_2 - \kappa_1} \langle \bar{D}_{e_2} Z, N \rangle - 2\kappa_1 \langle \bar{D}_{e_1} Z, e_1 \rangle \right\} e_1 + \\ &+ \left\{ \frac{e_1[\kappa_2]}{\kappa_1 - \kappa_2} \langle \bar{D}_{e_1} Z, N \rangle + \langle \bar{D}_{e_1} \bar{D}_{e_2} Z, N \rangle - \kappa_1 (\langle \bar{D}_{e_2} Z, e_1 \rangle + \langle \bar{D}_{e_1} Z, e_2 \rangle) \right\} e_2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

A seguir, obteremos δA olhando para o *mapa inverso* $d(\mu_t^{\leftarrow})(\hat{e}_1(\mu_t))$ de (4.5), ou seja, após a deformação, transferimos o vetor $\hat{e}_1(\mu_t)$ à superfície original, e a variação de A é obtida a partir desse mapa inverso. Assim, temos os campos vetoriais $\hat{e}_1(\mu_t) = d(\mu_t^{\leftarrow})(\hat{e}_1(\mu_t))$ e $\hat{e}_2(\mu_t) = d(\mu_t^{\leftarrow})(\hat{e}_2(\mu_t))$, que podem ser expandidos em termos da base $\{e_1, e_2\}$:

$$\begin{aligned} \hat{e}_1(\mu_t) &= e_1 + t\varsigma_1 e_2 + O(t^2); \\ \hat{e}_2(\mu_t) &= e_2 + t\varsigma_2 e_1 + O(t^2). \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde $\varsigma_1, \varsigma_1 \in \mathfrak{S}(M)$. Se a variação é feita nos dois lados da equação $A(\mu_t)e_1(\mu_t) = \kappa(\mu_t)e_1(\mu_t)$, então teremos

$$(\delta A)(e_1) = (\delta\kappa_1)e_1 + (\kappa_1 - \kappa_2)\varsigma_1 e_2 \quad (4.15)$$

Comparando esta equação com (4.13), obtemos

$$\delta\kappa_1 = \langle \bar{D}_{e_1} \bar{D}_{e_1} Z, N \rangle + \frac{e_2[\kappa_1]}{\kappa_2 - \kappa_1} \langle \bar{D}_{e_2} Z, N \rangle - 2\kappa_1 \langle \bar{D}_{e_1} Z, e_1 \rangle \quad (4.16)$$

e

$$(\kappa_1 - \kappa_2)\varsigma_1 = \frac{e_1[\kappa_2]}{\kappa_1 - \kappa_2} \langle \bar{D}_{e_1} Z, N \rangle + \langle \bar{D}_{e_1} \bar{D}_{e_2} Z, N \rangle - \kappa_1 (\langle \bar{D}_{e_2} Z, e_1 \rangle + \langle \bar{D}_{e_1} Z, e_2 \rangle) \quad (4.17)$$

Se a deformação é decomposta em suas componentes tangencial e normal, o vetor de deformação pode ser escrito como $Z = fN + Z^T$, e conforme observado em (4.8), a expressão (4.16) fornece

$$\delta\kappa_1 = \text{Hess}_f(e_1, e_1) + f\kappa_1^2 + Z^T[\kappa_1]. \quad (4.18)$$

Com este resultado em mãos, chegamos ao teorema que queríamos, o qual fornece a variação de H e K perante $Z = fN + Z^T$:

$$\begin{aligned}\delta H &= \frac{1}{2}\Delta f + (2H^2 - K)f + Z^T[H]; \\ \delta K &= \kappa_2 \text{Hess}_f(e_1, e_1) + \kappa_1 \text{Hess}_f(e_2, e_2) + 2fKH + Z^T[K].\end{aligned}\quad (4.19)$$

onde $\Delta f = f''$ é o *laplaciano de f* , o qual é o traço de sua matriz hessiana $\text{Hess}(e_i, e_j)$.

Outro resultado importante que usaremos diz respeito a como muda o elemento de área dS perante o vetor de deformação. Uma vez que $\hat{d}S(\mu_t) = n_t dS$, onde $n_t(p)$ é a área do paralelogramo expandido por $d\mu_t(e_1(p))$ e $d\mu_t(e_2(p))$, temos

$$\delta(dS) = (\text{div}Z^T - 2fH) dS \quad (4.20)$$

onde (4.5) foi usado.

Agora, podemos aplicar os últimos resultados para obter a primeira variação do funcional (4.1) perante $Z = fN$. Mas, antes de prosseguir, é importante notar que a segunda integral nesta energia não depende da forma específica de uma membrana/vesícula. Este resultado vem do *teorema de Gauss-Bonnet*, o qual é escrito como

$$\int dSK = 2\pi\chi(M), \quad (4.21)$$

onde $\chi(M) = 2(1 - g)$ é a característica de Euler (g é o *gênero* da superfície, isto é, o número de “buracos” desta; veja figura (4.4)). Este teorema nos mostra que $\int dSK$ é um

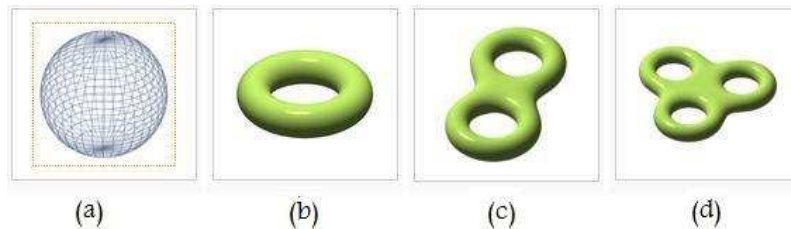


Figura 4.4 Gênero de superfícies orientáveis: (a) $g = 0$, (b) $g = 1$, (c) $g = 2$ e (d) $g = 3$.

invariante topológico. Então, para uma topologia fixada, esta energia pode ser ignorada,

ou seja, podemos tomar $\bar{\kappa} = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\delta F &= \delta \left[\int dS 2\kappa H^2 \right] = \\
&= \int (\delta dS) 2\kappa H^2 + \int dS \delta(2\kappa H^2) = \\
&= 2\kappa \int dS [-2fH^3 + H\Delta f + 2H(2H^2 - K)] = \\
&= 2\kappa \int dS f [\Delta H + 2H(H^2 - K)]. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

No último passo, utilizamos o fato de que um campo vetorial tangente à superfície possui divergência nula, o que implica em $\int dS H \Delta f = \int dS f \Delta H$. A equação (4.22) pode ser usada se estamos interessados em estudar configurações de equilíbrio de uma membrana. Dai, segue que

$$\Delta H + 2H(H^2 - K) = 0, \tag{4.23}$$

que é a *equação de Euler-Lagrange* para o sistema. A esfera é um ponto crítico deste funcional. Na referencia [35], uma revisão sobre o estudo de configurações de membranas fluidas e vesículas é apresentado. Mais ainda, o problema sobre flutuações térmicas em torno de configurações de equilíbrio é discutido. Neste tocante, a primeira variação (4.22) fornece a força na direção normal que a membrana aplica no fluido onde ela está imersa. No próximo capítulo, estaremos interessados em aplicar as formulas (4.19) e (4.22) para discutirmos, sucintamente, sobre flutuações de uma vesícula esférica imersa em um espaço curvo.

4.3 Fórmulas variacionais para superfícies em espaços curvos

Conforme dissemos, estamos interessados em encontrar fórmulas variacionais para a superfície (M, g) em presença de um espaço curvo (\bar{M}, \bar{g}) . Objetos geométricos em (\bar{M}, \bar{g}) serão distinguidos com uma barra. O primeiro ponto importante sobre superfícies imersas em um espaço curvo é a *equação de Gauss*:

$$g(R(X, Y)Z, W) = \bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, W) + \text{II}(X, Z)\text{II}(Y, W) - \text{II}(X, W)\text{II}(Y, Z) \tag{4.24}$$

Nesta equação, $R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]} - \nabla_X \nabla_Y + \nabla_Y \nabla_X$ e $\bar{R}(X, Y)Z = \bar{\nabla}_{[X, Y]} - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y + \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X$ são os *tensores de curvatura de Riemann-Christoffel* da superfície e do espaço ambiente, respectivamente. As expressões $g(\cdot, \cdot)$ e $\bar{g}(\cdot, \cdot)$ formam os respectivos produtos escalares usuais; $\text{II}(V, W) = \langle A(V), W \rangle$ define a *segunda forma fundamental*. Note que, para uma superfície $M \subseteq E^3$, a equação de Gauss se torna

$$g(R(X, Y)Z, W) = \text{II}(X, Z)\text{II}(Y, W) - \text{II}(X, W)\text{II}(Y, Z) \quad (4.25)$$

Contraindo essa equação duas vezes, obtemos o *teorema egregium*

$$K = g(R(e_1, e_2)e_2, e_1) = R_{1212}, \quad (4.26)$$

que diz que a curvatura gaussiana K é independente da segunda forma fundamental, ou seja, depende somente da métrica da superfície. Conforme o teorema de Gauss-Bonnet discutido anteriormente, K é um invariante topológico, que não depende da maneira como a superfície é imersa em E^3 . Quando $(M, g) \subseteq (\bar{M}, \bar{g})$, ao contrairmos (4.24), obtemos

$$K = \bar{K} + \det A \quad (4.27)$$

onde \bar{K} é a *curvatura seccional* da superfície e A é o *operador forma*, como antes. Vemos que K não é mais o determinante do operador forma, ou seja, o produto das duas curvaturas principais. Definimos

$$H_2 = K - \bar{K} = \det A = \kappa_1 \kappa_2 \quad (4.28)$$

como a *curvatura de Gauss-Kronecker*. Conforme percebemos, enquanto K é topológico, H_2 não é, pois depende do espaço ambiente (\bar{M}, \bar{g}) . Isso fica evidente se olharmos para a versão do teorema de Gauss-Bonnet de uma superfície $(M, g) \subseteq (\bar{M}, \bar{g})$, a saber [36]:

$$\int dS H_2 = 2\pi \chi(M) - \int dS \bar{K} \quad (4.29)$$

Como veremos, esse resultado é um ingrediente chave para o nosso trabalho apresentado no capítulo 4. A seguir, apresentamos as fórmulas variacionais para H e H_2 :

$$\delta H = f \left(\frac{1}{2} \bar{\text{Ric}}(\hat{e}_1, \hat{e}_1) + \frac{1}{2} \bar{\text{Ric}}(\hat{e}_2, \hat{e}_2) \right) + \frac{1}{2} \Delta f + f(2H^2 - K), \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \delta H_2 &= 2fHH_2 + \kappa_2 [\text{Hess}_f(\hat{e}_1, \hat{e}_1) + f\bar{g}(\bar{\mathbf{R}}(\hat{n}, \hat{e}_1)\hat{n}, \hat{e}_1)] \\ &\quad + \kappa_1 [\text{Hess}_f(\hat{e}_2, \hat{e}_2) + f\bar{g}(\bar{\mathbf{R}}(\hat{n}, \hat{e}_2)\hat{n}, \hat{e}_2)]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Nessas expressões,

$$\bar{\text{Ric}}(X, Y) = \sum_{i=1}^3 \bar{g}(\bar{\mathbf{R}}(X, \hat{e}_i)Y, \hat{e}_i)$$

é o traço usual do tensor de Riemann do espaço ambiente, e $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3 = \hat{n}\}$ é uma base ortonormal em p . Usando a relação $\bar{\text{Ric}}(\hat{n}, \hat{n}) = \bar{\text{Ric}}(\hat{e}_1, \hat{e}_1) + \bar{\text{Ric}}(\hat{e}_2, \hat{e}_2) - 2\bar{K}$, onde $\bar{K} = \bar{g}(\bar{\mathbf{R}}(\hat{e}_1, \hat{e}_2)\hat{e}_1, \hat{e}_2)$, (4.30) pode ser rescrito como

$$\delta H = \frac{1}{2}f\bar{\text{Ric}}(\hat{n}, \hat{n}) + \frac{1}{2}\Delta f + f(2H^2 - H_2), \quad (4.32)$$

Usando essas expressões e lembrando que $\delta dS = -2HfdS$, temos que

$$\begin{aligned} \delta F &= \int dS f \left\{ 2\kappa \left[\Delta H + 2H \left(H^2 - H_2 + \frac{\bar{\text{Ric}}(\hat{n}, \hat{n})}{2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \bar{\kappa} \left[\kappa_2 \bar{g}(\bar{\mathbf{R}}(\hat{n}, \hat{e}_1)\hat{n}, \hat{e}_1) + \kappa_1 \bar{g}(\bar{\mathbf{R}}(\hat{n}, \hat{e}_2)\hat{n}, \hat{e}_2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Podemos, agora, passar ao próximo capítulo, onde a aplicação desses resultados será discutido.

Espaço curvo sem gravidade: Uma proposta experimental

Nesse capítulo, vamos discutir como podemos testar os efeitos de uma espaço tridimensional em uma membrana fluida. Ele é baseado em C. Filgueira, Steven Verpoort and Randall D. Kamien, submetido.

5.1 Introdução

Desde os tempos de Einstein, físicos teóricos e escritores de ficção científica têm sido fascinados com espaços curvos [68]. Muitas idéias interessantes e bonitas tem aparecido em matéria condensada que dependem da matemática do espaço curvo bidimensional. Como exemplos, temos o estudo da ordem cristalina [69–72] e líquido-cristalina [73, 74], super-fluides [75], *jamming* [76, 77], e novas formas de auto-enovelamento [78]. Algumas dessas propostas têm sido estudadas experimentalmente, enquanto que outras esperam a sua vez nos laboratórios: o estudo de sistemas em substratos curvos bidimensionais está na iminência de ser realizado. Por outro lado, algumas propostas que requerem um espaço curvo tridimensional têm sido apresentadas, tais como ordem de vidros [?, 79], empilhamento de esferas [80], empilhamento de DNA [81] e espumas [82]. Embora a possibilidade de experimentos na vizinhança de uma grande quantidade de massa permitiria tais estudos, eles são altamente impraticáveis. Neste capítulo, apresentamos uma proposta experimental empregando membranas ou feitas ou dopadas com NIPA, um polímero que se contrai e se expande em função da temperatura do ambiente [78]. O que é ganho formulando o comportamento de um material em termos do espaço curvo?

Lembremos que a energia livre de Canham-Helfrich para uma membrana pode ser escrita em termos do operador forma A_{ij} :

$$F = \int dS \{2\kappa H^2 + \bar{\kappa}K\}, \quad (5.1)$$

onde $H = \frac{1}{2}\text{Tr} A = e K = \det A$ (veja capítulo anterior). Por causa do teorema de Gauss-Bonnet [33, 84], vimos que o segundo termo dessa energia pode ser escrito como um invariante, o que não contribui tanto para as equações de equilíbrio mecânico quanto ao estudo da *dinâmica de super-relaxamento* da membrana [85]. De fato, para uma superfície fechada, não existem contornos. Assim, o termo $\bar{\kappa}$ some inteiramente do problema por causa de (4.21). Por outro lado, quando a membrana está imersa em um espaço curvo tridimensional, discutimos anteriormente que a curvatura gaussiana não é mais o determinante do operador forma; enquanto $\oint dA K$ é topológico, $\oint dA H_2$ não é. Assim, em um espaço curvo, a energia livre de Canham-Helfrich se torna

$$F = \int dA \left\{ \frac{\kappa}{2} (2H - C_o)^2 + \bar{\kappa} (K - \bar{K}) \right\} \quad (5.2)$$

onde incluímos a *curvatura espontânea* C_o , a qual reflete uma possível assimetria na membrana. A origem deste termo pode ser devido a uma diferença química no ambiente em volta dos dois lados da membrana, ou a uma diferença química na composição das monocamadas. Em [46] é mostrado que ela é uma quantidade que pode ser controlada por diferentes processos, tais como polimerização, associação e/ou adsorção de partículas dispersas. A figura (5.1) ilustra esse controle via o ancoramento de polímeros na membrana.

A medida dA é induzida pelo espaço curvo. Considerando superfícies compactas, é ainda verdade que $\oint dA K$ é a característica de Euler; contudo, a introdução do termo \bar{K} implica em um termo *tipo-tensão superficial*, induzido pela geometria, $\bar{\kappa}\bar{K}$. Como resultado, flutuações de membranas e estados de equilíbrio vão depender de $\bar{\kappa}$, implicando que esta quantidade pode ser medida diretamente. Obviamente, isso poderia ser apenas um exercício de pura imaginação se não fosse possível realizar o experimento. Contudo, existe um sistema polimérico, tal como N-*Isopropylacrylamide* (NIPA), o qual reage sensitivamente com a água em função da temperatura. Podemos

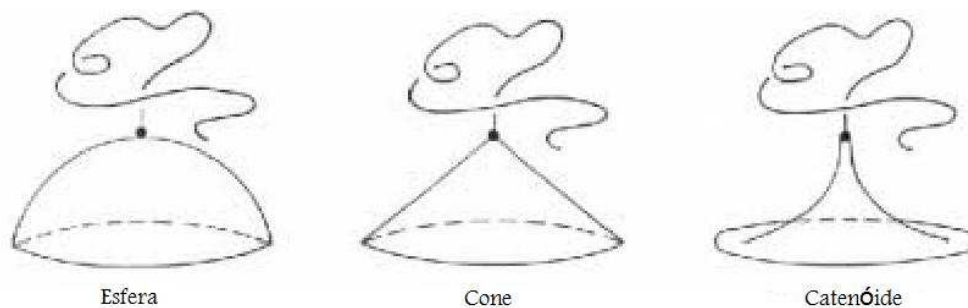


Figura 5.1 Polímeros ancorados em um segmento da membrana leva a diferentes formas.

inserir uma membrana feita de NIPA dentro de um solvente com a temperatura variando espacialmente. Dois pontos materiais sobre a membrana irão aproximar-se ou afastar-se um do outro dependendo da temperatura ambiente. Conforme a membrana expande-se e contrai-se isotropicamente, a distancia ds^2 entre dois pontos será dada por

$$ds^2 = h(T) [dx^2 + dy^2 + dz^2] \quad (5.3)$$

onde $x, y,$ e z são as coordenadas na membrana, T é a temperatura local, e $h(T)$ captura a expansão térmica do material. Uma vez que $T = T(\mathbf{r})$ é uma função da posição da membrana no espaço \mathbf{r} , podemos reinterpretar $h(T)$ como um fator conforme para a métrica tridimensional. Notemos que, em geral, métricas tridimensionais nem sempre podem ser colocadas em um sistema de coordenadas conformes.

Para demonstrar nossa idéia, vamos discutir dois diferentes experimentos possíveis, um dinâmico e o outro estático. Primeiro, para o problema dinâmico, analisamos flutuações de membranas esféricas na presença de um gradiente de temperatura radial, o que é bem simples. Antes de fazer isso, vamos revisar alguns pontos da dinâmica de membranas fluidas na próxima seção.

5.2 Alguns aspectos de hidrodinâmica

Mudanças configuracionais de vesículas comprimem dois aspectos conceituais diferentes. Primeiro, a agitação térmica gera flutuações dinâmicas em torno da configuração

de mais baixa energia. Como a escala de tempo para flutuações de grande comprimento de onda é da ordem de segundos, essas flutuações podem ser vistas com vídeo-microscopia. Segundo, em qualquer transformação de configuração descontínua, uma forma instável decai em direção a um novo mínimo através de um movimento essencialmente determinístico. Em ambos os casos, a presença do líquido onde a membrana está imersa determina a dinâmica de maneira não-trivial, uma vez que gera uma interação dinâmica efetiva de longo alcance ao longo da membrana.

A equação de movimento para a membrana pode ser derivada a partir da *equação de Navier-Stokes* para o líquido viscoso em torno desta. Para o *campo vetorial de velocidades* $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ do solvente com densidade ρ e viscosidade η , esta equação é dada por

$$\frac{d(\rho\mathbf{v})}{dt} + \nabla p - \eta\nabla^2\mathbf{v} = \mathbf{G} \quad (5.4)$$

onde $p(\mathbf{r})$ é a pressão e $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ são as forças externas sobre o líquido. Esse termo inclui tanto as forças exercidas pela membrana quanto forças vindas de fronteiras do sistema (adesão da membrana na presença de substratos).

Em uma boa aproximação, o termo inercial na equação de Navier-Stokes pode ser negligenciado para uma variedade de fenômenos de interesse. Conforme pode ser verificado **a posteriori**, os correspondentes *números de Reynolds* são pequenos comparados à unidade. Nesse regime, chamado *aproximação de Stokes*, temos que resolver a equação que vem do balanço de forças

$$\nabla p - \eta\nabla^2\mathbf{v} = \mathbf{G}. \quad (5.5)$$

Uma simplificação a mais que surge para esses fenômenos pode ser usada para eliminar a pressão p em (5.5). Ela consiste no fato de o fluido ser *incompressível*, o que se traduz matematicamente como

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (5.6)$$

Essas equações podem ser resolvidas, formalmente, introduzindo as *transformadas de Fourier*

$$\mathbf{v}_q = \int d^3r \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r}) \quad (5.7)$$

e

$$\mathbf{G}_q = \int d^3r \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) \mathbf{G}(\mathbf{r}) \quad (5.8)$$

A solução para (5.4) e (5.5) se torna uma relação linear entre o campo de velocidades e as forças externas:

$$v_{qi} = \frac{1}{\eta q^2} \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} \right) G_{qj}, \quad (5.9)$$

onde i, j denotam as componentes cartesianas. No espaço real, esta relação lê-se

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{G}(\mathbf{r}'). \quad (5.10)$$

Nessa expressão,

$$\Theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi\eta |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[\delta_{ij} + \frac{(r_i - r'_i)(r_j - r'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right]. \quad (5.11)$$

Então, a hidrodinâmica gera uma interação de longo alcance ($1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$) através do campo de velocidades.

Como nenhum líquido penetra no interior da membrana, podemos identificar a *velocidade normal* do líquido em cada ponto $R(s_l, s_2)$ da superfície, $\mathbf{v}[\mathbf{R}(s_l, s_2)] \cdot \mathbf{n}(s_l, s_2)$, com a mudança na configuração da membrana. Assim, obtemos a equação dinâmica de movimento para a membrana como

$$\partial_t \mathbf{R}(s_l, s_2, t) \cdot \mathbf{n}(s_l, s_2) = \mathbf{n}(s_l, s_2) \cdot \int d^3r' \Theta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{G}(\mathbf{r}') \quad (5.12)$$

A quantidade crucial é a *densidade de força* exercida pela membrana (e pelas paredes quando existe confinamento geométrico) sobre o líquido, $\mathbf{G}(\mathbf{r})$. Em geral, essa densidade de força possui componentes normal e tangencial. A energia de curvatura contribui para a componente normal.

A hidrodinâmica se torna mais simples quando somente mudanças configuracionais em torno de uma superfície média são consideradas. Do ponto de vista prático, tal aproximação é ainda suficiente para a discussão básica de todas as quantidades experimentais disponíveis na dinâmica de membranas.

Para oferecer um modo simples de como obter o tempo de relaxação de deslocamentos em torno de uma configuração de equilíbrio, é instrutivo inspecionar a relaxação dos

pequenos deslocamentos $h(x, y, t)$ em torno de uma membrana plana localizada em $z = 0$. Nessa geometria, podemos aplicar a transformada de Fourier paralela à membrana, o que é dado por

$$\mathbf{v}_q(z) = \int d\mathbf{x} \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{r}) \quad (5.13)$$

e

$$\mathbf{G}_q(z) = \int d\mathbf{x} \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}) \mathbf{G}(\mathbf{r}), \quad (5.14)$$

onde $\mathbf{r} = (\mathbf{x}, z) = (x, y, z)$. Podemos, ainda, decompor $\mathbf{v}_q(z)$ e $\mathbf{G}_q(z)$ em suas componentes z , longitudinal e transversal:

$$\mathbf{v}_q(z) \equiv \mathbf{v}_{qz}(z)\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{v}_{q\hat{\mathbf{t}}}(z)\hat{\mathbf{q}} + \mathbf{v}_{q\hat{\mathbf{t}}}(z)\hat{\mathbf{t}} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{G}_q(z) \equiv \mathbf{G}_{qz}(z)\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{G}_{q\hat{\mathbf{t}}}(z)\hat{\mathbf{q}} + \mathbf{G}_{q\hat{\mathbf{t}}}(z)\hat{\mathbf{t}} \quad (5.16)$$

Inserindo essas equações em (5.4), e levando-se em conta que a força $\mathbf{G}_q(z)$ age somente no plano $z = 0$ (a ação da força em $h(\mathbf{x}, z)$ é um efeito de alta ordem), produzimos um desacoplamento entre as componentes z e longitudinal, de acordo com [35]:

$$\mathbf{v}_{qr}(0) = \frac{1}{4\eta q} \mathbf{G}_q(0), \quad (5.17)$$

onde $r = l$ ou z . A componente transversal não se acopla ao deslocamento normal nesta geometria.

A energia (4.1) pode ser escrita como

$$F = \frac{1}{2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} E_o(q) h_{\mathbf{q}} h_{\mathbf{q}}^*, \quad (5.18)$$

quando $h(\mathbf{x}) = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} h_{\mathbf{q}} \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})$; $E_o \equiv \kappa q^4$ é o *modo de curvatura*. A força normal \mathbf{G}_{qz} é dada por

$$G_{qz} = -\frac{\partial F_o}{\partial h_{\mathbf{q}}^*} = -E_o h_{\mathbf{q}}^* = -\kappa q^4 h_{\mathbf{q}}. \quad (5.19)$$

A velocidade normal à membrana é dada por $\frac{\partial h_{\mathbf{q}}}{\partial t} = v_{qz}(0)$, o que, junto com (5.17) e (5.19), leva a

$$\frac{\partial h_{\mathbf{q}}}{\partial t} = -\Gamma_o(q) E_o(q) h_{\mathbf{q}} \quad (5.20)$$

onde $\Gamma_0(q) = 1/4\eta q$ é o *coeficiente cinético*, o qual reflete o característico longo-alcance do amortecimento hidrodinâmico. A solução desta equação é dada por

$$h_{\mathbf{q}}(t) = h_{\mathbf{q}}(0)\exp(-\gamma_o(q)t), \quad (5.21)$$

com

$$\gamma_o(q) = \Gamma_0(q)E_o(q) = \kappa q^3/4\eta \quad (5.22)$$

sendo a *taxa de amortecimento*. Essa forma (5.22) da taxa de amortecimento como um produto entre o coeficiente cinético(que contem a dissipação) e a energia(que contém a força), é característica da dinâmica de pequenos números de Reynolds. Este resultado é importante pois oferece uma maneira de como podemos obter $\gamma_o(q)$ para geometrias mais complexas, tais como quando estudamos flutuações em torno de uma esfera ou cilindro.

5.3 A proposta

Vamos estudar flutuações em torno de uma membrana esférica com raio a_o . Para isso, decompos f em modos, $f = \sum_{l,m} u_{lm}Y_{lm}(\theta, \phi)$ [88], onde Y_{lm} são os *harmônicos esféricos*. Também consideramos $C_o = 0$. Para a esfera não-perturbada, temos $\kappa_1 = \kappa_2 = 1/a_o$. Então, as equações (4.31) e (4.32) se tornam

$$\delta H = \frac{1}{2} \sum_{l,m} u_{lm}Y_{lm} \left(\bar{\text{Ric}}(\hat{n}, \hat{n}) + \frac{2 - l(l+1)}{a_o^2} \right), \quad (5.23)$$

e

$$\delta H_2 = 2 \frac{\delta H}{a_o}. \quad (5.24)$$

Vemos imediatamente que quando $\bar{\text{Ric}}(\hat{n}, \hat{n})$ é não-nulo, temos contribuições não-triviais à variação da *curvatura extrínseca* em todos os modos. Em particular, no espaço plano, as deformações associadas com o modo $l = 1$ são nulas, o que corresponde a um deslocamento uniforme da esfera original. Contudo, no nosso caso, a intensidade das flutuações é completamente determinada pelo espaço ambiente (\bar{M}, \bar{g}) . Então, poderia ser possível medir a amplitude dos deslocamentos dos modos de H no sentido de se extrair $\bar{\text{Ric}}(\hat{n}, \hat{n}) =$

$\bar{g}(\bar{R}(\hat{n}, \hat{e}_1)\hat{n}, \hat{e}_1) + \bar{g}(\bar{R}(\hat{n}, \hat{e}_2)\hat{n}, \hat{e}_2) = \left(\bar{R}_{r\theta r}^\theta + \bar{R}_{r\phi r}^\phi\right)|_{r=a_o} \equiv \bar{R}_{r\nu r}^\nu|_{r=a_o}$. A partir disso, será possível checar a mudança na amplitude de outros modos.

Voltando para nossa métrica, podemos calcular $\bar{\text{Ric}}(\hat{n}, \hat{n})$ para $h(\mathbf{r}) = 1 + \alpha e^{-c|\mathbf{r}|}$, uma forma que poderia surgir a partir de um *gradiente de temperatura*. Com isso, encontramos

$$\bar{\text{Ric}}(\hat{n}, \hat{n}) \Big|_{r=a_o} = \frac{1}{a_o} \frac{\alpha c e^{-ca_o}}{1 + \alpha e^{-ca_o}}. \quad (5.25)$$

Variando o raio a_o , pode ser possível extrair $\bar{\kappa}$ a partir do *tempo de relaxamento* para os primeiros modos. Para obter essa grandeza, notemos primeiro que (4.33) pode ser aproximado por

$$\delta F = \int dS 2f [\kappa \Delta H + H \gamma], \quad (5.26)$$

pelo fato de que, para nossa métrica, $\bar{g}(\bar{R}(\hat{n}, \hat{e}_1)\hat{n}, \hat{e}_1) = \bar{g}(\bar{R}(\hat{n}, \hat{e}_2)\hat{n}, \hat{e}_2) = (1/2) \bar{\text{Ric}}(\hat{n}, \hat{n})$. Usamos também o fato de que $H(H^2 - H_2)$ é de altas ordens em $u_{l,m}$, e por isso pode ser omitido. Nessa expressão, $\gamma = (\kappa + \bar{\kappa}/2) \bar{\text{Ric}}(\hat{n}, \hat{n})$.

Considere, agora, a superfície $R(\mathbf{r}) = r - a_o \left(1 + \sum_{l,m} u_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)\right) = 0$. O vetor normal será dado por

$$\hat{n} = \frac{\bar{\nabla} R}{\|\bar{\nabla} R\|}, \quad (5.27)$$

onde

$$\bar{\nabla} R = \frac{1}{\sqrt{f}} \frac{\partial R}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{\sqrt{f}r} \frac{\partial R}{\partial \theta} + \frac{1}{\sqrt{f}r \sin \theta} \frac{\partial R}{\partial \phi} \quad (5.28)$$

para a métrica $ds^2 = f(r)(dr^2 + r^2 d\Omega)$. Então, (5.27) e (5.28) produzem

$$\hat{n} \approx \hat{r} - \xi \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \hat{\theta} - \frac{\xi}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \hat{\phi}, \quad (5.29)$$

com $\xi = a_o/r$. Usando a expressão $\bar{\nabla} \cdot \hat{n} = \frac{\partial n^i}{\partial x^i} + \Gamma_{li}^i n^l = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(v^i \sqrt{g})}{\partial x^i}$, temos

$$\bar{\nabla} \cdot \hat{n} \approx \frac{2}{r} \left\{ 1 + \frac{3}{4} r \frac{\partial \ln f}{\partial r} - \frac{\xi}{2f^{1/2}} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \sin \theta \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \right] \right\}. \quad (5.30)$$

Uma vez que $\frac{1}{r} = \frac{1}{a_o(1+\Psi)} \approx \frac{1}{a_o}(1 - \Psi)$, e $\Delta_S \Psi = \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta})}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \right] \Psi$, obtemos

$$\kappa \Delta_S H \approx \frac{\kappa}{2a_o^3} \sum_{l,m} \left\{ \frac{l^2(l+1)^2}{f^{1/2}} - 2l(l+1)\beta \right\} u_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \phi). \quad (5.31)$$

O termo onde se tem γH produz

$$\int dS a_o \Psi \gamma H \approx -\frac{\gamma}{2} \sum_{l,m} |u_{l,m}|^2 \frac{l(l+1)}{f^{1/2}}. \quad (5.32)$$

Assim, substituindo (5.31) e (5.32) em (5.26), chegamos a

$$\delta F \approx \sum_{l,m} |u_{l,m}|^2 \left\{ \frac{l(l+1)}{h^{1/2}} [\kappa l(l+1) - \gamma - 2\beta h^{1/2}] \right\}, \quad (5.33)$$

onde $\beta = 1 + \frac{3}{4} r \frac{\partial \ln f}{\partial r} |_{r=a_o}$ e $\gamma = (\kappa + \bar{\kappa}/2) \bar{\text{Ric}}(\hat{n}, \hat{n})$.

Quando $f(T) = f(r) = 1(\bar{\text{Ric}}(\hat{n}, \hat{n}) = 0$ e $\beta = 1)$, recuperamos o resultado

$$\delta F \approx \kappa \sum_{l,m} |u_{l,m}|^2 \{l(l+1)(l-1)(l+2)\}, \quad (5.34)$$

o qual se refere às flutuações em torno de uma membrana esférica em E^3 [89]. Da relação (5.33), junto com (5.22), obtemos finalmente

$$\omega = \Gamma \frac{l(l+1)}{h^{1/2}} [\kappa l(l+1) - \gamma - 2\beta h^{1/2}] \quad (5.35)$$

onde $h = 1 + \alpha e^{-ca_o}$, $\beta = 1 + \frac{3}{4} r \frac{\partial \ln h}{\partial r} |_{r=a_o}$ e $\gamma = (\kappa + \bar{\kappa}/2) \frac{1}{a_o} \frac{\alpha c e^{-ca_o}}{1 + \alpha e^{-ca_o}}$.

Nesta seção, notamos que é possível testar os efeitos de um espaço curvo tridimensional no laboratório. Outra maneira de sondar aspectos do espaço ambiente é considerar um sólido tridimensional em um espaço curvo. Assim como a física de cristais em duas dimensões leva a forças e vínculos geométricas [70–72], o mesmo poderia ocorrer com as propriedades de cristais tridimensionais euclidianos. Se imaginarmos o crescimento de uma semente cristalina na origem, a mudança da geometria ambiente poderia forçar o surgimento de deslocamentos e desclinações.

5.4 Conclusão

Neste capítulo, propomos um método para verificar os efeitos de um espaço curvo tridimensional usando materiais com grande coeficiente de expansão térmica. O estudo das flutuações de superfícies pode ser, naturalmente, usado para tal fim. Vimos que, grandezas que são puramente topológicas no espaço euclidiano, agora deixam de ser. Portanto, podem ser medidas diretamente.

Interação entre nanocolóides adsorvidos em esméticos

Nesse capítulo, determinamos a interação mediada por deformações elásticas entre nanopartículas coloidais adsorvidas na superfície de filmes esméticos livremente suspensos. Ele é baseado em I. N. de Oliveira, M. S. S. Pereira, M. L. Lyra, C. Filgueiras, C. Sátiro e Fernando Moraes, Phys. Rev. E **80** 042702 (2009).

6.1 Introdução

Interações de longo-alcance surgem em cristais líquidos quando seus modos de flutuação são modificados pela imposição de condições de contorno [92]. Por exemplo, quando colóides são imersos nesses materiais, surge uma interação entre eles devido a distorções elásticas na ordem líquido-cristalina. Essa interação, mediada por deformações elásticas, é identificada como o principal mecanismo para a formação de várias estruturas auto-organizadas, tais como *redes periódicas* e *clusters anisotrópicos* [93].

A interação efetiva entre partículas *hóspedes* em cristais líquidos *hospedeiros*, tem sido investigada extensivamente tanto experimentalmente [94–98] quanto teoricamente [99–103]. Em amostras nemáticas, a adição de partículas coloidais esféricas induzem a formação de defeitos toplógicos na ordem nemática, o que depende da intensidade e direção do ancoramento na superfície do colóide [96, 100]. Para um ancoramento homeotrópico forte, a partícula hóspede comporta-se como um defeito radial do tipo *porco-espinho*. Um defeito hiperbólico radial do tipo porco espinho emerge no sentido de aniquilar a carga toplógica no ambiente nemático [96]. Tal par de partícula-defeito

constitui um *dipolo elástico*, o qual minimiza a energia elástica associada às distorções da ordem nemática. Como consequência, uma interação efetiva do tipo dipolar ocorre entre partículas coloidais. Ela é atrativa ou repulsiva dependendo da distância e da direção relativa entre os dipolos elásticos [96]. Por outro lado, uma interação do tipo *quadrupolar* aparece entre partículas imersas quando uma dispersão coloidal em cristais líquidos é confinada a uma célula planar [98], bem como quando um ancoramento tangencial é induzido na superfície coloidal [95].

Em filmes esméticos livremente suspensos, experimentos mostram que colóides moles e duros modificam a estrutura das camadas esméticas em torno deles [104–106]. Em particular, foi observado a formação de um menisco em volta de colóides adsorvidos, e uma interação atrativa devido à sobreposição dos meniscos [104]. Tal interação efetiva tem sido associada com ondulações nas camadas esméticas. Mais ainda, a adição de partículas hóspedes afetam outras propriedades físicas dos filmes esméticos, tal como a temperatura de transição [107]. Em esméticos ferroelétricos, a interação entre inclusões é influenciada pelo rearranjo de defeitos topológicos e pelo ancoramento na superfície da inclusão [108]. Estudos teóricos mostram que deformações pontuais das camadas esméticas promovem uma interação entre colóides no interior da amostra [109], bem como em membranas e em filmes finos depositados em um substrato sólido [110, 111]. No último caso, a força predita decai exponencialmente com a separação entre os colóides.

6.2 Energia Livre

Um cristal líquido esmético pode ser visto como um empilhamento de superfícies equidistantes bidimensionais, $z = a_0 n$; n é um inteiro, dando a n -ésima camada, e a_0 é separação entre cada duas delas. Quando as superfícies sofrem deformações, podemos definir a função $u(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x}=(x,y,z)$), que descreve essas deformações a partir da direção $\hat{\mathbf{z}}$. Assim, temos que as superfícies são escritas com a constante $\phi(\mathbf{x}) = z - u(\mathbf{x}) = a_0 n$. O vetor normal às camadas é definido por $\hat{\mathbf{n}} = \nabla\phi / |\nabla\phi|$.

Como estamos falando de superfícies que podem sofrer deformações elásticas, podemos pensar em termos geométricos. Assim como uma membrana, teremos os termos contendo a curvatura média H e gaussiana K de cada camada, isto é, a energia de curvatura e a energia de curvatura gaussiana. Conforme demonstrado em [112], podemos escrever estas quantidades em termos de $\hat{\mathbf{n}}$, isto é,

$$H = \frac{1}{2} \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}} |_{\phi(x,y,z)=c} \quad (6.1)$$

e

$$K = \frac{1}{2} \nabla \cdot [\hat{\mathbf{n}} (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}) - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{n}}] |_{\phi(x,y,z)=c}. \quad (6.2)$$

Por outro lado, as camadas esméticas possuem um espaçamento preferencial a_o . Então, existe uma energia associada com a mudança deste espaçamento. Enquanto as duas curvaturas são naturais do ponto de vista geométrico, uma expressão para o termo associado à compressão/dilatação não é bem definido [113]. Retornando à família de camadas igualmente espaçadas ($u(\mathbf{x}_n) = 0$), temos $na_o = \phi(\mathbf{x}_n + a_o n \hat{\mathbf{n}})$. Diferenciando essa expressão com respeito a n , encontramos

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}_n + a_o n \hat{\mathbf{n}}) = 1, \quad (6.3)$$

o que implica que $|\nabla \phi| = 1$. Assim, o termo devido à deformação por compressão/dilatação, quando expresso em termos de ϕ , deve desaparecer quando essa condição ocorre. Podemos definir esse termo, o qual chamamos de u_{zz} , por [113]

$$u_{zz} \equiv 1 - |\nabla \phi| = 1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi \quad (6.4)$$

ou, alternativamente, como

$$\tilde{u}_{zz} \equiv \frac{1}{2} [1 - (\nabla \phi)^2]. \quad (6.5)$$

Ambas definições desaparecem quando $|\nabla \phi| = 1$. Em termos de u , $u_{zz} \approx \partial_z u + O(u^2)$ e $\tilde{u}_{zz} \approx \partial_z u + O(u^2)$ são idênticos até a ordem linear em u e diferem somente em seus termos não-lineares. Assim, quando consideramos a energia de compressão quadrática:

$$F_c = \frac{B}{2} \int d^3x u_{zz} \quad (6.6)$$

o termo harmônico é independente da escolha específica de u_{zz} . O termo linear sempre será $\partial_z u$. A constante B é uma constante associada aos modos de compressão das camadas.

No nosso trabalho, consideramos a aproximação harmônica, uma vez que estamos considerando nanopartículas coloidais, ou seja, consideramos deformações pontuais. Para partículas maiores, devemos considerar a teoria não-linear, mas neste caso devemos resolver equações diferenciais não-lineares. Soluções analíticas são conhecidas apenas quando o filme esmétrico é distorcido pela presença de um defeito topológico chamado *desclinação* [114, 115]. Então, consideramos a energia livre descrevendo distorções elásticas em um cristal líquido esmétrico como

$$F_c = \frac{1}{2} \int d^3x \left[B (\partial_z u)^2 + \kappa (\nabla_{\perp}^2 u)^2 \right], \quad (6.7)$$

onde o primeiro termo corresponde à forma linearizada do termo (6.6), $\nabla_{\perp} = \hat{x}\partial_x + \hat{y}\partial_y$ é o gradiente no plano perpendicular a \hat{z} , o segundo termo nesta energia livre é a forma linearizada da curvatura média [116]. A energia de deformação gaussiana pode ser desprezada, pois será de altas ordens em u .

O acoplamento entre o filme e o gás ambiente é representado pela tensão superficial, que reduz as flutuações próximas da superfície do filme. Assim, temos

$$F_s = \frac{\gamma}{2} \int d^2x \left[|\nabla_{\perp} u(x_{\perp}, 0)|^2 + |\nabla_{\perp} u(x_{\perp}, l)|^2 \right]. \quad (6.8)$$

onde γ é a tensão superficial na superfície do filme. Uma tensão superficial característica pode ser definida em termos das constantes elásticas da fase esmétrica, γ_c , a qual delimita dois regimes de tensão superficial: $\gamma > \gamma_c$ e $\gamma < \gamma_c$.

Para investigar os efeitos associados com a adsorção de partículas coloidais no filme esmétrico livremente suspenso, um termo adicional deve ser incluído na energia livre para representar o custo energético associado com deformações na ordem esmétrica devido a colóides adsorvidos na superfície do filme. Este termo é dado por

$$F_A = - \int d^2x f(x_{\perp}) u(x_{\perp}, l), \quad (6.9)$$

onde f é a *carga* que representa o estresse normal na superfície do filme devido à adsorção coloidal. Em particular, assumimos f apresentando um raio de ação de poucos nanômetros, com uma magnitude suficiente para ondular a camada superficial [110]. Então, a energia livre total fica

$$F = F_c + F_s + F_A. \quad (6.10)$$

6.3 O problema

O campo de pressão adicional na superfície do filme, devido à adsorção coloidal, perturba a ordem esmética. O deslocamento das camadas que minimiza a energia elástica livre é obtida a partir da equação de Euler-Lagrange, isto é,

$$B \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \kappa \Delta^2 u, \quad (6.11)$$

a qual deve satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$\gamma \Delta u(z=l) - B \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=l} = -f(x_\perp) \quad (6.12)$$

e

$$\gamma \Delta u(z=0) + B \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = 0. \quad (6.13)$$

Realizando uma integração parcial e assumindo que as deformações das camadas são nulas nos suportes dos filmes, a energia livre total (6.10) pode ser escrita como [110]

$$F = -\frac{1}{2} \int_{a_o}^L d^2 x [f(x_\perp) u(x_\perp, l)]. \quad (6.14)$$

onde L é o tamanho transversal do filme e a_o é o *comprimento de corte*, da ordem do diâmetro molecular. A energia elástica livre depende da deformação induzida pelas partículas coloidais na superfície do filme, o que é representado por f . De fato, o deslocamento das camadas, $u(\mathbf{x})$, é distorcido por essas partículas em $z=l$. Usando o formalismo das funções de Green, podemos definir o deslocamento das camadas esméticas como

$$u(x_\perp, z) = \int_{a_o}^L d^2 x [f(\bar{x}_\perp) G(|x_\perp - \bar{x}_\perp|, z)]. \quad (6.15)$$

É fácil mostrar que a função de Green no espaço de Fourier é dada por

$$G_q(z) = \frac{1}{q^2\gamma_c} \left[\frac{\cosh(q^2\lambda_c z) + \alpha \sinh(q^2\lambda_c z)}{2\alpha \cosh(q^2\lambda_c l) + (1 + \alpha^2) \sinh(q^2\lambda_c z)} \right], \quad (6.16)$$

onde $\alpha = (\gamma/\gamma_c)$; $\lambda_c = \sqrt{\kappa/B}$ tem a dimensão de comprimento, e fornece a escala de comprimento das deformações no interior do filme. A transformada inversa de Fourier resulta em

$$G(R, z) = \int \frac{q dq}{2\pi} G_q(z) J_0(qR). \quad (6.17)$$

Nessa expressão, $R = |x_\perp - \bar{x}_\perp|$ e $J_0(qR)$ é a função de Bessel de ordem zero. A energia livre total pode ser expressa como $F = \frac{1}{2} [U_{1,1} + U_{2,2}] + U_{1,2}$, onde

$$U_{ij} = - \int d^2x d^2\bar{x} f_i(x_\perp) f_j(\bar{x}_\perp) G(|x_\perp - \bar{x}_\perp|). \quad (6.18)$$

U_{ii} é a autoenergia associada com o i -ésimo colóide adsorvido ($i = 1, 2$), enquanto $U_{1,2}$ representa a interação entre os colóides adsorvidos mediada por deformações elásticas. Essa interação depende da espessura do filme e da distância entre as partículas. A carga do colóide foi escrita como $f(x_\perp) = f_1(x_\perp) + f_2(x_\perp)$, com f_i apresentando um pequeno raio de ação. Ele pode ser representado como $f_i(x_\perp) = p_i(|x_\perp - \bar{x}_\perp^i|)$, onde p_i é não-nulo para distâncias menores que o comprimento de corte a_i da ordem de poucos nanômetros, e \bar{x}_\perp^i é a posição do i -ésimo colóide. Pelo fato de a função de Green não mudar significativamente em distâncias menores que a_i , podemos escrever a energia de interação como $U_{1,2} = -P_1 P_2 G(R, z = l)$, onde $P_i = \int_0^{a_i} p_i 2\pi r dr$ representa a *carga efetiva* do i -ésimo colóide adsorvido na superfície do filme. O problema de se calcular a interação mediada pela elasticidade é reduzido ao problema de se encontrar a função de Green no espaço real. Tal formalismo foi usado anteriormente para investigar partículas coloidais adsorvidas em um filme esmético depositado em um substrato sólido, o que faz desaparecer o deslocamento da camada esmética em $z = 0$, isto é, $u(z = 0) = 0$. Neste caso, a função de Green lê-se como

$$G_q^{Sub}(z) = \frac{\sinh(q^2\lambda_c z)}{q^2 [\gamma_c \cosh(q^2\lambda_c l) + \gamma \sinh(q^2\lambda_c l)]}, \quad (6.19)$$

a qual leva a uma força que decai exponencialmente com a distância entre os colóides. Contudo, podemos notar que a presença do substrato sólido faz a função de Green ser

regular no regime de pequenos vetores de onda. É esse comportamento regular para pequeno q que é responsável por esse decaimento exponencial da energia de interação a distâncias grandes entre as partículas. Para filmes esméticos livremente suspensos, a situação é diferente. A função de Green é singular para pequenos vetores de onda, divergindo conforme $1/q^2$. Tal singularidade terá um impacto forte na interação, conforme descreveremos a seguir.

No que segue, adotamos valores experimentais típicos: $\kappa = 10^{-11}N$, $B = 2,5 \times 10^6 N/m^2$, $\gamma_c = \sqrt{\kappa B} = 5 \times 10^{-3} N/m$. Consideramos partículas coloidais idênticas ($P_1 = P_2 = P$), com uma carga efetiva $P = 5\kappa$, $a_o = 4$ ângströms, espaçamento entre as camadas $d = 30$ ângströms, e o diâmetro típico do filme dado por $L = 4\text{mm}$. Na figura 6.1, esboçamos a energia de interação elástica efetiva em função da distância entre as duas partículas, para a espessura do filme e tensão superficial fixadas. Mostramos ambos

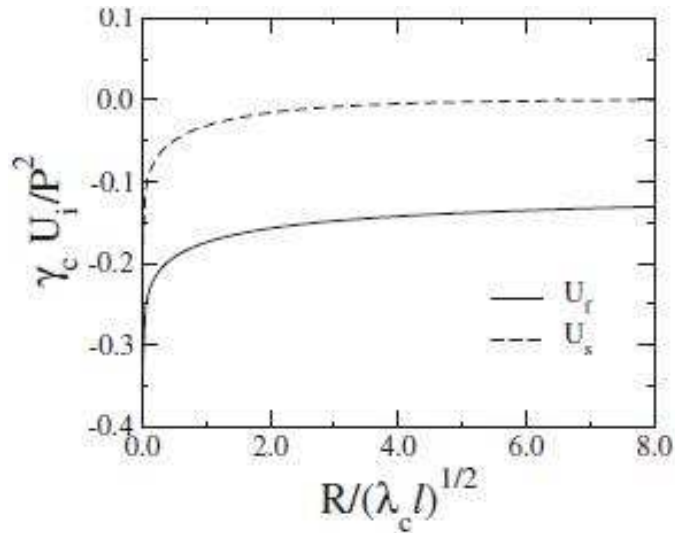


Figura 6.1 Potencial de interação elástica versus $R/\sqrt{\lambda_c l}$. Ambos os casos são mostrados: filme ancorado por um substrato sólido (linha tracejada, U_s) e um filme livremente suspenso (linha sólida, U_f). Os parâmetros físicos foram: $\gamma = 25 \times 10^{-3} N/m$ e $l = 300\text{nm}$. O decaimento exponencial rápido de U_s contrasta com a convergência logarítmica lenta de U_f que é tipicamente da ordem de $10k_B T$ à temperatura ambiente

os casos, isto é, para o filme depositado em um substrato sólido e para o filme livremente

suspensão. A distância entre as partículas escala-se por uma típica distância dada por $\sqrt{\lambda_c l}$. A interação é principalmente atrativa em ambos os casos, exceto para um carácter oscilatório de U_s a grandes distâncias, o que não é visível na escala mostrada em [110]. Note que o decaimento exponencial da interação no filme com substrato contrasta com o decaimento bem lento da interação em filmes livremente suspensos. A força efetiva entre as partículas é mostrada na figura (6.2), para os mesmo conjunto de parâmetros dados acima. Para pequenas distâncias entre as partículas, a força de interação possui

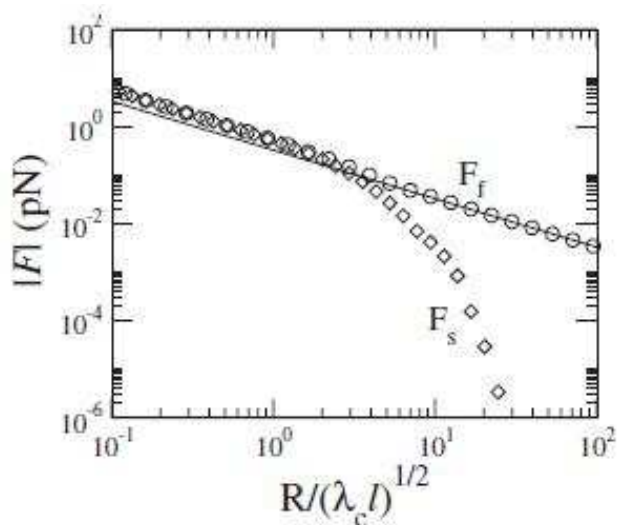


Figura 6.2 A amplitude da força elástica em função de $R/\sqrt{\lambda_c l}$. A força no filme ancorado pelo substrato sólido (F_s -diamantes) muda do regime $1/R$ em pequenas distâncias, para o decaimento exponencial em distâncias grandes. A força no filme livremente suspenso (F_f) mantém o decaimento lento $1/R$ em grandes distâncias. A linha sólida representa a forma assintótica analítica $F_f = P_1 P_2 / (4\pi\gamma R)$.

um decaimento similar a $1/R$ para ambos os regimes de tensão superficial. Para o filme depositado no substrato, a interação muda para uma força decaindo exponencialmente no regime de grandes distâncias entre as partículas. Essa mudança de regime ocorre para grandes valores da força e para filmes mais finos, e com tensão superficial fraca. Por outro lado, o decaimento lento $1/R$ persiste em filmes livremente suspensos. De fato, a forma assintótica da força pode ser computada analiticamente, notando-se que o seu

comportamento a longas distâncias é determinado pela forma singular da função de Green para pequenos vetores de onda. Um cálculo direto resulta em $|\mathbf{F}| = P_1 P_2 / (4\pi\gamma R)$. Esse comportamento assintótico é mostrado na figura (6.2) como uma linha sólida. Analisamos, também, a dependência do potencial de interação efetiva com a espessura do filme. Os principais resultados estão mostrados na figura (6.3). Ele converge lentamente para um valor constante que é proporcional a $1/(\gamma + \gamma_c)$. O potencial não depende da espessura do filme quando $\gamma = \gamma_c$, e exibe tendências opostas para a tensão superficial grande ou pequena. Finalmente, reportamos a dependência do potencial de interação com a

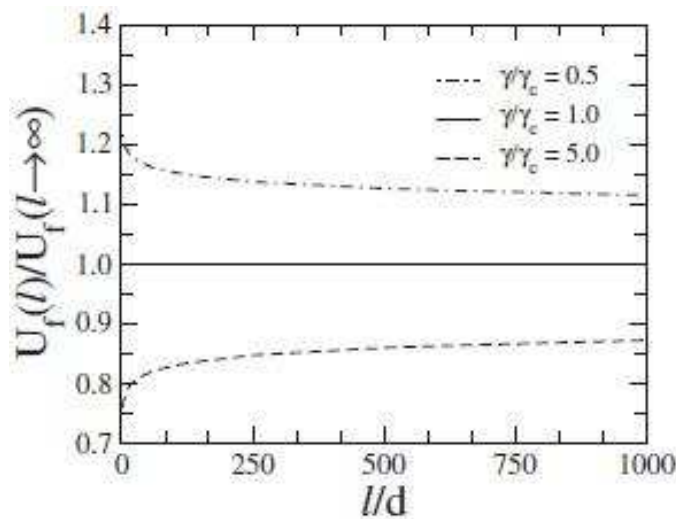


Figura 6.3 Potencial de interação elástica em filmes esméticos livremente suspensos em função da espessura normalizada do filme para três tensões superficiais representativas e $R = 5a_o$. Os parâmetros físicos são os mesmos usados nas figuras anteriores. Ele converge lentamente para um valor constante proporcional a $1/(\gamma + \gamma_c)$, com tendências de convergências distintas para grande e pequenas tensões superficiais.

tensão superficial. A figura (6.4) mostra o decaimento típico $1/\gamma$ para grandes tensões superficiais, o que vale para diferentes distâncias entre as partículas e espessuras do filme. Em particular, uma lei $1/\gamma$ acontece para distâncias grandes entre as partículas, independente do regime da tensão superficial.

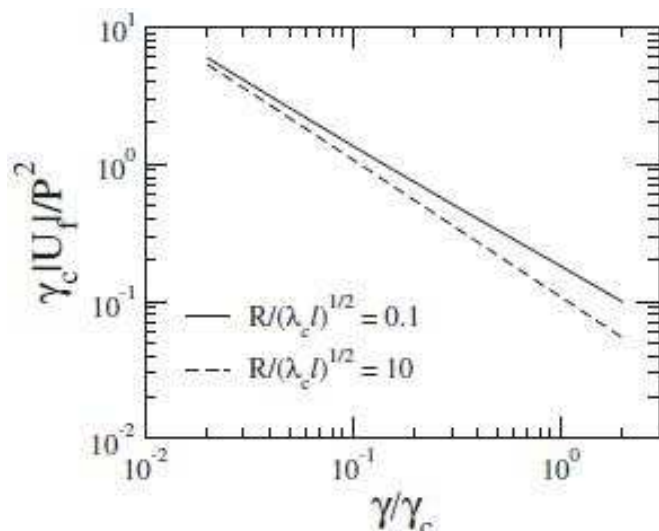


Figura 6.4 Potencial de interação elástica em filmes esméticos livremente suspensos em função da tensão superficial para duas distâncias representativas entre as partículas e em função da espessura do filme. Os parâmetros físicos são os mesmos usados nas figuras anteriores.

6.4 Conclusão

Neste capítulo, determinamos a interação mediada por deformações elásticas entre nanopartículas coloidais adsorvidas na superfície de um cristal líquido esmético. Demonstramos que essa interação tem uma característica de longo-alcance, com a força decaindo assintoticamente e lentamente com $1/R$. Tal característica contrasta com aquela da força caindo exponencialmente quando o filme está depositado em substrato sólido. Este cenário em oposição mostra-se relacionado ao papel desempenhado pelas deformações elásticas de grandes comprimentos de onda em filmes sujeitos a diferentes condições de tensão superficial. Um substrato sólido regulariza a função de Green característica neste regime, levando a uma energia de interação de curto alcance. Por outro lado, a tensão superficial age em ambas superfícies do filme esmético livremente suspenso, o que leva a uma contribuição singular de modos elásticos de grande comprimento de onda. Eles são responsáveis pela natureza de longo-alcance da interação efetiva entre as nanopartículas. Essa interação é tem um alcance maior do que a força de

Coulomb entre duas nanopartículas coloidais carregadas. Então, ela será a força de longo-alcance predominante, e terá um papel muito importante na formação de estruturas auto-organizadas na superfície do filme esmético. As forças reportadas aqui podem, em princípio, ser medidas diretamente usando pinças óticas [95, 117], ou com técnicas magneto-óticas [94, 118]. Seria interessante realizar tais medidas no sentido de sondar-se a característica de longo-alcance dessa interação elástica.

Considerações finais

Nessa tese, apresentamos três trabalhos distintos envolvendo sistemas bidimensionais: dinâmica quântica de uma partícula neutra no cone, flutuações de membranas (superfícies bidimensionais) em um espaço tridimensional curvo, e interação entre nanocolóides depositados na superfície de um filme de cristal líquido esmétrico.

No capítulo 3, estudamos a dinâmica quântica de uma partícula neutra na presença de um espaço cônico. Vimos que a topologia do cone tem forte influência na existência de estados ligados. Mais do que isso, mostramos qual o verdadeiro papel desempenhado pelas extensões auto-adjuntas, que é fornecer uma ferramenta sólida para se estudar sistemas quânticos na presença de singularidades. Isso é muito importante, pois podemos elucidar alguns trabalhos na literatura. Como dissemos no capítulo 2, vários trabalhos sobre extensão auto-adjunta deixam em aberto o papel do(s) parâmetro(s) de extensão. Em outros, porém, não foi levado em conta a possibilidade da existência dos estados ligados apresentados no capítulo 3. Um exemplo é a referência [119], onde os autores calculam o calor específico para um sistema quântico de partículas na presença de um espaço cônico. Eles consideraram somente a condição de contorno regular, e se considerarmos as condições de contorno divergentes na origem, podemos revisitá-lo e olhar o que podemos adicionar de interessante ao problema. Outro trabalho no qual podemos jogar uma luz é discutido em [120]. No limite contínuo, um sistema quântico de partículas em grafeno é descrito pela *equação de Dirac* sem massa, com a *velocidade da luz* substituída pela *velocidade de Fermi*. Assim, os autores de [120] levantam a questão de se entender o papel das extensões auto-adjuntas nestes sistemas. Conforme podemos notar em nosso trabalho, a extensão auto-adjunta seria útil para se estudar partículas no grafeno com defeitos topológicos.

No capítulo 5, discutimos como podemos sondar um espaço curvo tridimensional. Isso é possível graças a existência de polímeros do tipo NIPA, os quais reagem com a água em função da temperatura. O ingrediente chave é a expansão e contração dessas moléculas, e por meio de um gradiente de temperatura, podemos ter uma partícula coloidal sentindo os efeitos devido a um espaço curvo tridimensional no laboratório. Seria interessante, por exemplo, simular a parte espacial da métrica de Schwarchild em laboratório, e realizar experimentos que são complicados de se fazer em cosmologia. Um exemplo interessante do ganho dessa analogia entre matéria condensada mole e cosmologia foi apontada na introdução dessa tese, entre constante cosmológica e tensão superficial [49, 50], e também entre cristais líquidos nemáticos com defeitos topológicos e cordas cósmicas [42, 61]. Trabalhos futuros poderiam tentar explorar analogias a partir do nosso trabalho apresentado no capítulo 5. Outro ponto interessante a se explorar seria aquele apontado em [113]. No espaço euclidiano, os autores discutem que não é possível encontrar superfícies com $K \neq 0$, que sejam, ao mesmo tempo, minimais ($H = 0$) e igualmente espaçadas ($\frac{\partial u}{\partial z} = 0$), pois sempre teremos $K = 0$. Mas se o cristal líquido esmético for imerso em um espaço curvo, poderíamos verificar se encontramos superfícies minimais, igualmente espaçadas, e com $K \neq 0$.

Já no capítulo 6, estudamos a interação entre partículas coloidais adsorvidas em filmes esméticos. Vimos que, quando tais filmes são livremente suspensos, a interação entre as nanopartículas tem um caráter de longo-alcance, o que é muito importante para a formação de estruturas auto-organizadas em matéria condensada mole. Como pontos a explorar, poderíamos estudar aspectos hidrodinâmicos e, talvez, estudar a interação entre colóides adsorvidos em membranas feitas de, ou dopadas com, NIPA, na presença de um gradiente de temperatura. Poderíamos tentar explorar analogias com a gravitação, bem como investigar se isso contribui para interações de longo-alcance entre as partículas adsorvidas.

Sumarizando, estudamos problemas onde a geometria, a topologia e a elasticidade possuem papel fundamental. No primeiro, tanto a geometria quanto topologia são importantes para a existência de estados ligados. No segundo, os três ingredientes se

fazem presente. Por último, temos apenas a elasticidade, junto com o fato de que o filme esmético é livremente suspenso, levando a resultados interessantes.

Referências Bibliográficas

- [1] Bob Philips, *Crystals, Defects and Microstructures: Modeling Across Scales*, Cambridge University Press (2001).
- [2] F. Moraes, Brazilian Journal of Physics **30**, 304 (2000).
- [3] M. O. Katanaev and I. V. Volovich, Ann. Phys. (NY) **216**, 1 (1992).
- [4] Ph. de Sousa Gerbert, Phys. Rev. D **40**, 1346 (1989); P. de Souza Gerbert and R. Jackiw, Commun. Math. Phys. **124**, 229 (1989).
- [5] G. A. Marques and V. B. Bezerra, Phys. Rev. D **66**, 105011 (2002).
- [6] E. R. Bezerra de Mello, J. High Energy Phys. **06**, 016 (2004).
- [7] J. G. de Assis, C. Furtado, and V. B. Bezerra, Phys. Rev. D **62**, 045003 (2000).
- [8] J. de S. Carvalho, E. Passos, C. Furtado, and F. Moraes, Eur. Phys. J. C **57**, 817 (2008).
- [9] C. Furtado, V. B. Bezerra, and F. Moraes, Phys. Lett. A **289**, 160 (2001).
- [10] R. Bausch, R. Schmitz, and L. A. Turski, Phys. Rev. Lett. **80**, 2257 (1998).
- [11] S. Azevedo, J. Phys. A **34**, 6081 (2001).
- [12] K. Bakke and C. Furtado, Phys. Rev. D **78**, 064012 (2008).
- [13] K. Bakke and C. Furtado, Eur. Phys. J. C **60**, 501 (2009).
- [14] K. Bakke and C. Furtado, Phys. Rev. D **80**, 024033 (2009).
- [15] L. Parker and L. O. Pimentel, Phys. Rev. D **44**, 3180 (1982).

- [16] G. A. Marques, C. Furtado, V. B. Bezerra, and F. Moraes, *J. Phys. A* **34**, 5945 (2001).
- [17] A. L. Silva Netto and C. Furtado, *J. Phys. Condens. Matter* **20**, 125209 (2008).
- [18] G. Bonneau, J. Faraut, and G. Valente, *Am. J. Phys.* **69**, 322 (2001).
- [19] B. S. Kay and U. M. Studer, *Comm. Math. Phys.* **139**, 103 (1991).
- [20] D. K. Park and Jae Geub Oh, *Phys. Rev. D* **50**, 7715 (1994).
- [21] K. Kowalski, K. Podlaski and J. Rembieliński, *Phys. Rev. A* **66**, 032118 (2002).
- [22] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II*, Academy Press, New York, 1975.
- [23] D.K. Park, *Phys. Rev. D* **50**, 7715 (1994).
- [24] T.J. Allen, *Nuclear Phys B* **360**, 4094 (1991).
- [25] B. Basu-Mallick, Pijush K. Ghosh and Kumar S.Gupta, *Phys. Letters A* **311**, 87 (2003).
- [26] C.Cohen-Tannoudji, B.Diu and F.Laloe, *Quantum Mechanics*, John Wiley and Sons, New york(1977).
- [27] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [28] Charles Kittel, *Introductions to solid state physics*, John Wiley and sons, Inc. 2005.
- [29] B. Allen and A.C. Ottewill, *Phys. Rev. D* **42**, 2669 (1990).
- [30] B. Allen, B.S. Kay and A.C. Ottewill, *Phys. Rev. D* **53**, 12 (1996).
- [31] C. R. de Oliveira and A. A. Verri, *Annals of Physics* **324**, 251 (2008); P. R. Giri, arXiv:0708.2969v2, arXiv:0808.3309v1, arXiv:0812.1490v1, arXiv:0802.0551v3.

- [32] S. Verpoort, *The Geometry of the Second Fundamental Form: Curvature Properties and Variational Aspects*, Ph.D. Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, (2008) [<https://lirias.kuleuven.be/handle/1979/1779>].
- [33] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, 2nd ed.(Academic Press, San Diego).
- [34] P. Canham, J. Theor. Biol. **26**, 61 (1970); W. Helfrich, Z. Naturforsch. **28c**, 693 (1973).
- [35] U. seifert, Advances in Physics **46**, 13-137 (1997).
- [36] G. Solanes, Trans. of the American Math. Soc. **358**, 1105 (2005);E. L. grinberg and H. Li, arXiv:0707.1860v1(2007).
- [37] S.A. Safran, *Statistical Thermodynamics of Surfaces, Interfaces, and Membranes*, Addison-Wesley, NY, 1994.
- [38] H. Kawamoto, Proceed. of the IEEE **90**, 460 (2002).
- [39] P. Palffy-Muhoray, *Orientationally Ordered Soft Matter: The diverse World of Liquid Crystals*, http://www.e-lc.org/docs/2007_08_26_01_36_22.
- [40] Peter J. Collings, *Liquid Crystals: Nature's Delicate Phase of Matter*, Princeton University Press (2002).
- [41] S.A. Safran, Surface Science **500**, 127 (2002).
- [42] C. Sátiro and F. Moraes , Modern Phys. Lett. A **20**, 2561 (2005).
- [43] C. Sátiro, A. M. de M. Carvalho and F. Moraes, Modern Phys. Lett. A **24**, 1437 (2009).
- [44] S. Chandrasekhar, *Liquid Crystals*, Cambridge University Press (2nd edition).
- [45] U. Seiferd, Adv. in Phys. **46**, 13 (1997).

- [46] R. Lipowsky, in *Statistical Mechanics of Biocomplexity* ed. by J. M. B. and J. M. B. Vilar, *Lectures Notes in Physics*, **527** 1-23 (Springer, Berlin 1999)
- [47] E. m. Purcell, *Amer. J. Phys.* **45**, 3 (1977).
- [48] R. Lipowsky, *Nature* **349**, 475 (1991).
- [49] R. Katti, J. Samuel and S. Sinha, *Class. Quantum Grav.* **26**, 135018 (2009).
- [50] J. Samuel and S. Sinha, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 161302 (2006).
- [51] Y. Klein, E. Efrati, and E. Sharon, *Science* **315**, 1116 (2007); R.D. Kamien, *Science* **315**, 1083 (2007).
- [52] C. Sátiro and F. Moraes, *Eur. Phys. J. E* **20**, 173 (2006).
- [53] See for example: C. Furtado, A. Rosas and S. Azevedo, *Europhys. Lett.* **79**, 57001 (2007); E. R. B. de Mello, *JHEP* **06**, 016 (2004); J. A. Miranda and F. Moraes, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** 863 (2003); S. Azevedo and F. Moraes, *J. Phys.: Condens. Matter* **12** 7421 (2000); C. Furtado, F. Moraes and V. B. Bezerra, *Phys. Rev. D* **59** 107504 (1999).
- [54] C. R. Hagen and D. K. Park, *Ann. Phys.* **251** 45 (1996).
- [55] M. G. Alford, J. March-Russell and F. Wilczek, *Nucl. Phys. B* **328** 140 (1989).
- [56] P. R. Giri, *Phys. Rev. A* **76** 012114 (2007).
- [57] D. Bouaziz and M. Bawin, *Phys. Rev. A* **76** 032112 (2007).
- [58] K. M. Case, *Phys. Rev.* **80** 797 (1950).
- [59] C. A. de Lima Ribeiro, C. Furtado and F. Moraes, *Mod. Phys. Lett. A* **20** 1991 (2005).
- [60] R. C. T. da Costa, *Phys. Rev. A* **23** 1982 (1981); N. Ogawa, K. Fujii, A. Kobushukin, *Prog. Theor. Phys.* **83** 894 (1990); N. Ogawa, K. Fujii, N. Chepliko, A. Kobushukin,

- Prog. Theor. Phys. **85** 1189 (1991); M. Ikegami, Y. Nagaoka, Prog. Theor. Phys. **106** 235 (1991).
- [61] C. Sátiro and F. Moraes, Europhys. Lett. **80** 46002 (2007).
- [62] Y. Grats and A. Garcia, Class. Quantum Grav. **13** 189 (1996).
- [63] C. A. de Lima Ribeiro, C. Furtado, V. B. Bezerra and F. Moraes, J. Phys. A: Math. Gen. **34** 6119 (2001).
- [64] M. Abramowitz and I. A. Stegun (Eds.), Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, New York, 1972.
- [65] V. R. Khalilov, Phys. Rev. A **71** 012105 (2005).
- [66] C. Filgueiras and Fernando Moraes, Phys. Lett. A **361** 13 (2007).
- [67] V.B. Bezerra, J. Math. Phys. **38** 2553 (1997); C. Furtado, V. B. Bezerra and F. Moraes, Mod. Phys. Lett. A **15** 253 (2000).
- [68] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999); L. Randall, *Warped Passages: Unraveling the Mysteries of the Universe's Hidden Dimensions*, (Ecco, New York, 2005).
- [69] M. Rubinstein and D.R. Nelson, Phys. Rev. B **28**, 6377 (1983).
- [70] A.R. Bausch, *et al.*, Science **299**, 1716 (2003); R.D. Kamien, Science **299**, 1671 (2003).
- [71] L. Giomi and M.J. Bowick, Eur. Phys. J. E **27**, 275 (2008).
- [72] V. Vitelli, J.B. Lucks and D.R. Nelson, **103**, 12323 (2006).
- [73] D.R. Nelson, NanoLetters **2**, 1125 (2002).
- [74] C.D. Santangelo, V. Vitelli, R.D. Kamien, and D.R. Nelson, Phys. Rev. Lett. **99**, 017801 (2007).

- [75] V. Vitelli and A.M. Turner, Phys. Rev. Lett. **93**, 215301 (2004).
- [76] F. Sausset and G. Tarjus, J. Phys. A **40**, 12873 (2007); F. Sausset, G. Tarjus, and P. Viot, Phys. Rev. Lett. **101**, 155701 (2008).
- [77] C.D. Modes and R.D. Kamien, Phys. Rev. Lett. **99**, 235701 (2007); Phys. Rev. E **77**, 041125 (2008).
- [78] Y. Klein, E. Efrati, and E. Sharon, Science **315**, 1116 (2007); R.D. Kamien, Science **315**, 1083 (2007).
- [79] P.J. Steinhardt, D.R. Nelson, and M. Ronchetti, Phys. Rev. B **28**, 784 (1983); D.R. Nelson and F. Spaepen, Sol. Stat. Phys. **42**, 1 (1989); J. A. Miranda and F. Moraes, Europ. J. Phys B, **3** 1119 (1993).
- [80] H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1989).
- [81] J. Charvolin and J.-F. Sadoc, Eur. Phys. J. E **25**, 335 (2008).
- [82] C.D. Modes and R.D. Kamien, arxiv:0810.5724 (2008).
- [83] P. Canham, J. Theor. Biol. **26**, 61 (1970); W. Helfrich, Z. Naturforsch. **28c**, 693 (1973).
- [84] R.D. Kamien, Rev. Mod. Phys. **74**, 953 (2002).
- [85] W. Cai and T.C. Lubensky, Phys. Rev. Lett. **73**, 1186 (1994).
- [86] R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures in Physics*, (Addison Wesley, Reading, 1963), Vol. 2, Chap. 42.
- [87] R. Rosso and E.G. Virga, Proc. R. Soc. Lond. A **455**, 4145-4168 (1999).
- [88] O.-Y. Zhong-can and W. Helfrich, Phys. Rev. A **39**, 5280 (1989).
- [89] M. B. Schneider, J. R. Jenkins and V. W. Webb, 1984a, Biophys. J. **45**, 891-899 (1984); J. Phys. France, **45**, 1457-1472 (1984).

- [90] U. Seifert, *Adv. in Phys.* **46**, 13-137 (1997).
- [91] S. Kumaresan, *A Course in Differential Geometry and Lie Groups*, 1st ed. (Hindustan Book Agency, India).
- [92] P. Ziherl, R. Podgornik, and S. Zumer, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1189 (1999); A. Ajdari, L. Peliti, and J. Prost, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1481 (1991); I. N. de Oliveira and M. L. Lyra, *Phys. Rev. E* **65**, 051711 (2002); I. N. de Oliveira and M. L. Lyra, *Phys. Rev. E* **70**, 050702(R) (2004).
- [93] P. Poulin, N. Frances, and O. Mondain-Monval, *Phys. Rev. E* **59**, 4384 (1999); M. C. Nikolaides, A. R. Bausch, M. F. Hsu, A. D. Dinsmore, M. P. Brenner, C. Gay, and D. A. Weitz, *Nature* **420**, 299 (2002); U. Ognysta, A. Nych, V. Nazarenko, I. Musevic, M. Skarabot, M. Ravnik, S. Zumer, I. Poberaj, and D. Babie, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 217803 (2008); I. Musevic, M. Skarabot, U. Tkalec, M. Ravnik, and S. Zumer, *Science* **313**, 954 (2006).
- [94] J. Kotar, M. Vilfan, N. Osterman, D. Babie, M. Eopie and I. Poberaj, *Phys. rev Lett.* **96**, 207801 (2006).
- [95] I. I. Smalyukh, O. D. Lavrentovich, A. N. Kuzmin, A. V. Kachynski, and P. N. Prasad, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 157801 (2005).
- [96] K. Takahashi, M. Ichikawa, and Y. Kimura, *Phys. Rev. E* **77**, 020703(R) (2008).
- [97] C. M. Noël, G. Bossis, A.-M. Chaze, F. Giulieri, and S. Lacis, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 217801 (2006).
- [98] M. Skarabot, M. Ravnik, S. Zumer, U. Tkalec, I. Poberaj, D. Babie, N. Osterman, and I. Musevie, *Phys. Rev. E* **77**, 031705 (2008).
- [99] S. L. Lopatnikov and V. A. Namiot, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **75**, 361 (1978); *Sov. Phys. JETP* **48**, 180 (1978).

- [100] J. I. Fukuda, H. Stark, M. Yoneya and H. Yokoyama, *Phys. Rev. E* **69**, 041706 (004).
- [101] D. Andrienko, M. Tasinkevych, P. Patrício, M. P. Allen, and M. M. Telo da Gama, *Phys. Rev. E* **68**, 051702 (2003).
- [102] B. I. Lev, S. B. Chernyshuk, P. M. Tomchuk and H. Yokoyama, *Phys. Rev. E* **65**, 021709 (2002).B
- [103] V. M. Pergamenshchik and V. O. Uzunova, *Phys. Rev. E* **76**, 011707 (2007).
- [104] M. Conradi, P. Zihlerl, A. Sarlah an I. Musevie, *Eur. Phys. J. E* **20**, 231 (2006).
- [105] C. Bohley and R. Stannarius, *Eur. Phys. J. E* **223**, 25 (2007); C. Völtz and R. Stannarius, *Phys. Rev. E* **70**, 061702 (2004); C. Bohley and R. Stannarius, *Soft Matter* **4**, 683 (2008).
- [106] P. Cluzeau, P. Poulin, G. Joly, and H. T. Nguyen, *Phys. Rev. E* **63**, 031702 (2001).
- [107] J. Yamamoto and H. Tanaka, *Nature Mater.* **4**, 75 (2005).
- [108] P. V. Dolganov, H. T. Nguyen, E. I. Kats, V. K. Dolganov and P. Cluzeau, *Phys. Rev. E* **75**, 031706 (2007).
- [109] M. S. Turner and P. Sens, *Phys. Rev. E* **55**, R1275 (1997).
- [110] P. Schiller, *Phys. Rev. E* **62**, 918 (2000).
- [111] P. Schiller, M. Wahab, and H. J. Mogel, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **119**, 145 (2204).
- [112] Randall D. Kamien, *Rev. of Modern Physics* **74**, 953-971 (2002).
- [113] C. D. Santangelo and R. D. Kamien, *Proc. R. Soc. A* **461**, 2911 (2005).
- [114] E. A. Brener and V. I. Marchenco, *Phys. Rev. E*, **59**, R4752 (1999).
- [115] C. D. Santangelo and R. D. Kamien, *Proc. R. Soc. A* **461**, 2911–2921 (2005).

- [116] P. G. de Gennes and J. Prost, [it The physics of liquid crystals.(Oxford University Press, New York, 1993).
- [117] M. Yada, J. Yamamoto and H. Yokoyama, Phys. Rev. Lett. **92**, 185501 (2004).
- [118] P. Poulin, V. Cabuil, and D. A. Weitz, Phys. Rev. Lett. **79**, 4862
- [119] E. S. Moreira, Jr. and E. S. Oliveira, Phys. Rev. A *73*, 052105 (2006).
- [120] Yu.A. Sitenko and N.D. Vlasii, Nuclear Physics B *787*, [FS] 241–259 (2007).

Referências Bibliográficas