

Universidade Federal da Paraíba - UFPB
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Coordenação de Pós-Graduação em Física - CPGF



Dissertação de Mestrado

Singularidades do espaço-tempo em variedades de Weyl

Iarley Pereira Lobo

João Pessoa - Paraíba - Brasil
Outubro de 2013

Universidade Federal da Paraíba - UFPB
Centro de Ciências Exatas e da Natureza - CCEN
Coordenação de Pós-Graduação em Física - CPGF

Singularidades do espaço-tempo em variedades de Weyl

Iarley Pereira Lobo

Dissertação de Mestrado apresentada à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba (UFPB), como parte dos requisitos para a obtenção de Título de Mestre em Física

Orientador: Carlos Augusto Romero Filho

João Pessoa - Paraíba - Brasil
Outubro de 2013

L799s Lobo, Iarley Pereira.
Singularidades do espaço-tempo em variedades de Weyl /
Iarley Pereira Lobo.-- João Pessoa, 2013.
85f. : il.
Orientador: Carlos Augusto Romero Filho
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Física. 2. Singularidades. 3. Geometria de Weyl. 4. Teoria
de Brans-Dicke.

UFPB/BC

CDU: 53(043)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO
mestrado

A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 25 de outubro de 2013, na Sala de Reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, APROVA COM DISTINÇÃO **Iarley Pereira Lobo** na defesa de sua dissertação intitulada “*Singularidades do espaço-tempo em variedades de Weyl*”.

João Pessoa, 25 de outubro de 2013

Orientador:

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
(UFPB)

1º Examinador:

Prof. Dr. Fábio Dahia
(UFPB)

2º Examinador:

Prof. Dr. Geusa Marques de Araujo
(UFCG)

3º Examinador:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó
(DM/UFPB)

Aos meus amigos.

*Os Deuses, se são justos em sua injustiça,
nos conservem os sonhos ainda quando sejam impossíveis,
e nos dêem bons sonhos, ainda que sejam baixos.*

Bernardo Soares (heterônimo de Fernando Pessoa)

Agradecimentos

Agradeço aos meus familiares, em especial aos meus pais, Augusto e Zilma, aos meus irmãos, Haziél e Tainá, e à minha tia, Zildene, por todo o suporte nessa escolha de vida científica.

Também quero agradecer aos meus amigos cratenses, Anderson, Carol, Hayelmo, João Carlos, Marcelo, Rhamon e Taciano, pelo companheirismo; aos amigos do departamento, Adriano Braga, Artur, Clarissa, Claudio, Danilo, Gislaine, João Paulo, Julio, Laura, Paulo Henrique, Silvina, Thiago e Tony, pelas discussões e risadas; aos amigos RPGistas, Bruno, Carlos, Hamed, Leandro, Mauricio, Rivaldo e Roberta, pela acolhida em João Pessoa.

À Febrânia, pela companhia e força.

A meus professores, em especial a meu orientador, Carlos Romero, pela sabedoria passada.

Aos demais funcionários da UFPB, pelos serviços prestados.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesse trabalho, analisamos a existência de singularidades do espaço-tempo sob o ponto de vista intrínseco da incompletude geodésica. Usamos o método presente nos teoremas de Hawking-Penrose para demonstrar o resultado conhecido, desde a década de 1970, que se suposta a inexistência de propriedades exóticas de matéria e energia, o espaço-tempo descrito pela Relatividade Geral (RG) é, necessariamente, singular.

Para contornar esse problema, consideramos a possibilidade de termos teorias gravitacionais ambientadas em uma geometria de Weyl integrável, como WIST. Generalizamos o teorema de singularidade da RG riemanniana para essa geometria não-riemanniana, fornecendo assim, condições para a inevitabilidade ou provável fuga do destino singular. Também tratamos do tema da mudança de frames nas teorias escalares-tensoriais, fornecendo uma visão geométrica da interpretação de Dicke para a teoria de Brans-Dicke ao unificar os frames em um ambiente weyliano.

Palavras-chave: Singularidades, Geometria de Weyl, Teoria de Brans-Dicke

Abstract

In this paper, we analyze the existence of space-time singularities from the point of view of geodesic incompleteness. We apply this method, also used to prove the well-known Hawking-Penrose theorems which states that unless the matter content of the Universe present unusual and exotic properties, the general theory of relativity predicts that space-time singularities will develop either in the past or in the future.

In this dissertation we regard this question in different context, namely, by considering alternative gravitational theories formulated in a Weyl integrable geometry (WIST). We extend the Hawking-Penrose theorems to this kind of non-riemannian geometry and obtain conditions for escaping the inevitability of space-time singularities. We also consider the issue of changing frames in scalar-tensor theories and provide a geometric overview of Dicke's interpretation of Brans-Dicke theory by unifying the treatment of frames in a weylian scenario.

Keywords: Singularities, Weyl Geometry, Brans-Dicke Theory

Lista de Figuras

1.1	Aplicação exponencial em S^2	15
1.2	Campo de Jacobi $s \mapsto J(s)$ de uma superfície S , partindo de um ponto p	18
1.3	Curva fechada do tipo-tempo	23
1.4	Universo de Milne	27
2.1	Segundo efeito do relógio	33
D.1	Variação $(s, t) \mapsto h$ em uma superfície S , partindo de um ponto p	69

Sumário

1	Teorema de Singularidade	1
1.1	O que é singularidade?	1
1.2	Geometria pseudo-riemanniana	2
1.3	Quantidades Cinemáticas	7
1.3.1	Interpretação das quantidades cinemáticas no espaço Euclidiano . .	10
1.3.2	Equações de evolução dos parâmetros cinemáticos	12
1.3.3	Análise da Equação de Raychaudhuri	13
1.4	Quatro peças do quebra-cabeça	14
1.4.1	A aplicação exponencial	15
1.4.2	Da relação da aplicação exponencial com os campos de Jacobi . . .	16
1.4.3	Da relação da aplicação exponencial com os pontos conjugados . . .	18
1.4.4	Da relação dos pontos conjugados com a propriedade maximizante das geodésicas	19
1.4.5	Da relação dos campos de Jacobi com a equação de Raychaudhuri .	21
1.5	Da existência de curvas de comprimento máximo	22
1.6	O Teorema de Singularidade	24
2	Geometria de Weyl	28
2.1	Motivação	28
2.2	Relaxando Postulados	28
2.2.1	Transformações de gauge	30
2.3	Objecção de Einstein	32
3	A Geometria de Weyl na gravitação	35
3.1	Introdução	35
3.2	Equação de Raychaudhuri em WIST	36
3.3	Teoria Gravitacional em WIST (Weyl integrable spacetime)	37
3.3.1	Soluções de O’Hanlon-Tupper	40
3.3.2	Soluções para poeira	43
3.4	Generalizando o teorema de singularidade	44
3.4.1	Quatro peças do quebra-cabeça - Parte II	47

4	Conclusão	53
A	Derivação de alguns resultados	55
B	Mudança de Frames	57
B.1	Geometrização dos frames	59
C	Relatividade Geral Mascarada	63
C.1	Semelhança com a Teoria de Brans-Dicke	65
C.2	A solução de Brans-Dicke para o vácuo	66
C.3	Conclusões	67
D	Teorema de Jacobi	68

Capítulo 1

Teorema de Singularidade

1.1 O que é singularidade?

Em livros de divulgação científica é comum ouvirmos as palavras Buraco Negro ou Big Bang. O que elas têm de similar é o fato de que não sabemos ao certo, com o conhecimento moderno, como a matéria e o espaço-tempo se comportam nessas situações extremas.

Os Buracos Negros surgem a partir do colapso gravitacional de um objeto material, como uma estrela muito massiva quando seu combustível interior cessa. Esse objeto, sob a ótica da Relatividade Geral, é descrito por uma distribuição esfericamente simétrica de matéria e energia e que ao colapsar a ponto de atingir um raio crítico, o raio de Schwarzschild, a métrica do espaço-tempo deixa de ser dada por funções "bem comportadas" e apresenta um comportamento singular.

O Big Bang é um acontecimento na história cósmica caracterizado por ser o início da expansão e "afastamento" de tudo o que existe a partir de um único ponto. Seu aparecimento se dá ao se levar em conta que o Universo obedece ao Princípio Cosmológico, ou seja, é espacialmente homogêneo e isotrópico e cuja dinâmica é regida pela Relatividade Geral. Com isso, conclui-se que o chamado fator de escala, que é uma espécie de raio do Universo, assume o valor nulo em um tempo finito, visto por um observador que se move juntamente com as galáxias. Esse ponto da variedade diferenciável espaço-tempo que contém todo o conteúdo universal é também chamado de ponto singular ou singularidade.

Esses são dois exemplos clássicos de uma falha, do ponto de vista puramente matemático, da Teoria da Relatividade Geral. Mas será que a singularidade desses casos são apenas provenientes, nas palavras de Wald [1], das simetrias do modelo ou a existência de pontos singulares é uma característica intrínseca dessa teoria?

Com a escolha do modelo, as regiões falhas são bastante evidentes, como nos casos acima. Mas para se investigar essa patologia sob um ponto de vista mais geral, é necessário classificar singularidades de uma maneira mais limpa, sem exigir a métrica explicitamente. Essa é uma tarefa complicada, e uma das dificuldades presentes é de que não existe uma

resposta satisfatória acerca da estrutura que abriga os pontos ou regiões singulares. Um alento encontra-se no método que veremos no qual apesar de não sabermos "onde esses objetos moram", poderemos trabalhar indiretamente com eles.

A forma seguida por Hawking e Penrose na elaboração de seus teoremas foi a de usar a incompletude de geodésicas. Em poucas palavras, a tarefa consiste em encontrar pelo menos uma curva, por exemplo, uma geodésica, cujo parâmetro não possa ser estendido livremente dentro de seu domínio de validade, implicando que essa curva encontrou um "buraco" singular retirado da variedade de forma a torná-la diferenciável. Essa maneira de mapear singularidades é sujeita a críticas e existem exemplos na literatura de espaços-tempos que são geodesicamente completos, mas são tais que a linha de Universo de um dado observador acelerado é incompleta. *Misner [2] dá um exemplo de um espaço-tempo compacto e geodesicamente incompleto. A incompletude de geodésicas é apenas uma das maneiras de se definir singularidades. O filósofo da ciência John Earman [3] em "Tolerance for Spacetime Singularities"exibe quatro formas diferentes de caracterizá-las.*

O presente trabalho defende o ponto de vista de que ao se encontrar um única curva que mapeie uma singularidade da maneira exposta, então esse espaço-tempo é singular.

Bem, mas esse método é bom para encontrar singularidades dadas certas hipóteses razoáveis. Em capítulos posteriores, usaremos métodos que exibem a ausência de singularidade no modelo bem específico do Universo homogêneo e isotrópico na teoria WIST, isto é, usando as mesmas ferramentas que provam que a métrica FLRW possui um Big Bang, mostraremos, que em outra geometria, essa mesma configuração é não-singular. Mas não vamos estragar a surpresa adiantando informações do último capítulo, vamos nos ater a mostrar um dos teoremas que mais deu força à Teoria do Big Bang (antes de mostrar uma alternativa que a refuta).

1.2 Geometria pseudo-riemanniana

A geometria diferencial de superfícies do \mathbb{R}^3 evoluiu naturalmente para a geometria riemanniana, um grande resultado da geometria diferencial é que essa superfície, que inicialmente era um subconjunto do \mathbb{R}^3 , pode ser vista de forma independente do espaço ambiente. Dada uma forma quadrática arbitrária, mas com as características típicas de uma métrica, pode-se definir um espaço métrico tal que a curvatura desse espaço é dada inteiramente em termos dessa forma quadrática. Dessa forma pode-se generalizar essa idéia de um espaço de duas dimensões para um espaço de dimensão arbitrária. A geometria riemanniana é uma dessas generalizações, apesar de não ter sido Riemann, mas Weyl quem construiu a teoria rigorosa da chamada variedade diferenciável.

As teorias da gravitação feitas com metodologia puramente geométrica tem início com a Teoria da Relatividade Geral. Ela descreve a realidade como um *continuum* quadridimensional envolvendo dimensões de espaço e tempo. Diferentemente do que era pensado

até então, o tempo passa a ser visto em "pé de igualdade" com o espaço no sentido de que passamos a tratá-lo como uma dimensão do espaço-tempo e não apenas como um parâmetro independente do espaço. A variedade diferenciável que abriga esse modelo é um conjunto dotado de geometria pseudo-riemanniana, o que quer dizer que possui todas as características, que ainda serão apresentadas, da geometria riemanniana com a exceção que a métrica do espaço não é mais definida positivamente, mas ao invés disso a matriz que a representa é não-degenerada. Seguindo o formato de [4], nessa e na próxima seção daremos definições de objetos que serão utilizados em desenvolvimentos posteriores.

Definição 1.1 *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ tais que:*

$$(1) \bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$$

(2) *Para todo par α, β , com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis*

(3) *A família (U_α, x_α) é máxima relativamente às condições (1) e (2)*

A aplicação x_α com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamada uma *parametrização* de M em p . Uma família (U_α, x_α) satisfazendo (1) e (2) é chamada uma *estrutura diferenciável* em M . O que fizemos foi formalizar o que queremos que seja uma variedade diferenciável de dimensão n : um conjunto que localmente é idêntico ao \mathbb{R}^n e que se possa passar de forma diferenciável de uma parametrização para outra.

Objetos conhecidos do cálculo no \mathbb{R}^n , como curvas, campos escalares, vetores, 1-formas, tensores, podem ser generalizados para o contexto das variedades. De fato, o método usado para dar definições para os "animais desse zoológico" é usar a aplicação x_α^{-1} para tomar a imagem dessas funções no \mathbb{R}^n e trabalhar com o que já conhecemos.

Por exemplo, seja $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$, um campo escalar, tome $\Phi \equiv \phi \circ x$ como a imagem do campo no \mathbb{R}^n . De forma equivalente tome $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva diferenciável e $\beta \equiv x^{-1} \circ \alpha$ sua imagem no \mathbb{R}^n . Note que podemos tomar a composição de funções:

$$\phi \circ \alpha = \phi \circ x \circ x^{-1} \circ \alpha = \Phi \circ \beta. \quad (1.1)$$

Tome a derivada $\frac{d}{dt}\phi = \frac{d}{dt}\Phi(x(t)) \overset{1}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{dt} = V^\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} = \left(V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \Phi = \left(V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \phi$. Perceba que $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi$ nada mais é que uma componente do vetor gradiente de uma função real. Com isso se torna razoável definir vetores \bar{V} na variedade como operadores lineares tais que [5]

$$(1) \bar{V}[\phi_1 + \phi_2] = \bar{V}[\phi_1] + \bar{V}[\phi_2], \quad (1.2)$$

$$(2) \bar{V}[a\phi] = a\bar{V}[\phi], \quad (1.3)$$

$$(3) \bar{V}[\phi_1\phi_2] = \phi_1\bar{V}[\phi_2] + \bar{V}[\phi_1]\phi_2. \quad (1.4)$$

¹De agora em diante faremos um abuso de linguagem ao identificar x com x^{-1} , já que nesse caso temos claramente que $\Phi = \Phi(x^{-1}(t))$, onde $\Phi(x(t))$ não faz sentido.

(1.5)

Explicitando as componentes temos que $\bar{V} = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, onde $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ é uma base coordenada associada a T_pM , o espaço dos vetores de M no ponto p .

A definição de variedade diferenciável e dos outros objetos citados acima é o que serve de suporte para as diversas geometrias que podem ser construídas. Vários aspectos são o que diferem uma geometria de outra, no nosso caso o que vai diferenciar a teoria de Riemann para a de Weyl é a chamada *condição de compatibilidade da métrica*.

Uma *métrica pseudo-riemanniana* é uma aplicação diferenciável g , bilinear, simétrica e não degenerada (porém não necessariamente positiva definida) em T_pM , que a cada dois vetores em um ponto p de M associa a um número real, $g : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$, que é da seguinte forma $X, Y \mapsto g(X, Y)_p$, onde T_pM é o espaço dos vetores de M no ponto p . É interessante também definir $g_{ab} \equiv g(\partial_a, \partial_b)$, onde $\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x_a}$ é vetor da base coordenada associada a T_pM na parametrização definida por x_α . A métrica é o objeto que define o produto interno em M e com isso também permite a definição de distância entre pontos suficientemente próximos (já que estamos tratando de geometria local).

Bom, já temos uma métrica, o que mais é necessário?

Para generalizarmos o cálculo do \mathbb{R}^n precisamos de uma aplicação que nos dê a noção de derivada. Inspirado na derivada covariante, que aparece de forma natural na teoria de superfícies [6], conseguimos criar uma estrutura que contém as propriedades familiares de derivada, como a linearidade e a regra de Leibniz, e que reproduz o que já se sabe da teoria de superfícies. Esse é o papel da conexão afim.

Definição 1.2 *Seja M uma variedade diferenciável e $\chi(M)$ o conjunto de todos os campos vetoriais em M . Uma conexão afim é uma aplicação $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$, dada por $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, que satisfaz as seguintes propriedades:*

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \quad (1.6)$$

$$\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z, \quad (1.7)$$

$$\nabla_X (fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y, \quad (1.8)$$

onde $X, Y, Z \in \chi(M)$ e f, g são funções escalares de classe C^∞ em M .

Vemos que o primeiro e segundo itens acima determinam a linearidade no argumento e na direção da derivada, enquanto o terceiro é o que permite a regra de Leibniz (lembrando que vetores em uma variedade diferenciável são operadores reais que tomam valores no espaço das funções escalares de M). Com isso podemos definir a derivada de um campo vetorial Y ao longo de uma curva, que tem X como campo vetorial tangente, $X = \frac{d}{dt}$, como sendo $\frac{DY}{dt} \equiv \nabla_X Y$, tal que é fácil ver que as propriedades de linearidade e Leibniz são satisfeitas. Também podemos dar uma definição adequada de paralelismo: um campo vetorial Y é dito paralelo ao longo da curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M; \alpha = \alpha(t)$ se $\frac{DY}{dt} = 0$.

Uma conexão afim é dita *compatível com a métrica* quando para toda curva diferenciável α e quaisquer pares de campos de vetores paralelos X e Y ao longo de α tivermos $g(X, Y) = \text{constante}$. É nesse ponto em que surgem as divergências entre as geometrias de Riemann e de Weyl, esta segue todas as definições feitas acima até essa condição de compatibilidade. Nesse ponto mostraremos uma outra expressão para o produto interno que acabamos de definir, isto é, na geometria de Weyl o produto escalar de vetores, ou a norma de vetores varia ao longo de caminhos, o que claramente é uma generalização da ideia riemanniana.

Sendo assim, podemos escrever a condição de compatibilidade de uma forma mais geral.

Definição 1.3 (Condição de Compatibilidade) *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ , uma métrica g . Dizemos de ∇ é compatível com g se para toda curva diferenciável $\alpha = \alpha(t)$ e todo par de vetores paralelos X e Y ao longo de α , tivermos*

$$\frac{d}{dt}g(X, Y) = 0, \quad (1.9)$$

onde $\frac{d}{dt}$ denota o vetor tangente a α (o produto interno é constante ao longo da curva).

Proposição 1.1 *Uma conexão ∇ em uma variedade pseudo-riemanniana M é compatível com a métrica se e somente se*

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad \forall X, Y, Z \in \chi(M). \quad (1.10)$$

Demonstração: Veja [4], página 60 \square

Também precisaremos da seguinte definição:

Definição 1.4 *Uma conexão afim ∇ em um variedade diferenciável M é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \chi(M). \quad (1.11)$$

Com essas informações, é possível demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 1.1 (Levi-Civita) *(Levi-Civita) Dada uma variedade riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

- (1) ∇ é simétrica,
- (2) ∇ é compatível com a métrica pseudo-riemanniana.

Demonstração: Considere $X, Y, Z \in \chi(M)$, então

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad (1.12)$$

$$Yg(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X), \quad (1.13)$$

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \quad (1.14)$$

Somando 1.12 com 1.13 e subtraindo de 1.14 e usando a simetria da conexão, é possível mostrar que

$$\begin{aligned} g(Z, \nabla_Y X) &= \frac{1}{2} \{Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y)\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X) + g([X, Y], Z)\}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Dessa forma, vê-se que caso ∇ exista, está univocamente determinada por essa expressão. Para provar a existência de ∇ , a defina por meio da equação 1.15. É fácil verificar que, dessa maneira, a conexão satisfaz suas condições de definição. \square

Com esse teorema pode-se mostrar que as componentes da conexão riemanniana assumem a forma conhecida dos livros de análise tensorial:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} g_{\nu\beta} + \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} g_{\mu\beta} - \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} g_{\mu\nu} \right) \quad (1.16)$$

Onde $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \partial_{\alpha} = \nabla_{\partial_{\mu}} \partial_{\nu}$ são as componentes da conexão na parametrização definida por x_{α} . A conexão dada pelo teorema acima é chamada de *conexão riemanniana* de M . Dessa expressão percebemos a grande surpresa dessa geometria: definimos a métrica e a conexão de forma inteiramente independente uma da outra, e no entanto vemos que há uma relação única entre g e a conexão riemanniana. Nessa geometria diz-se que a conexão respeita a métrica, no sentido de que dada uma estrutura de espaço métrico Riemanniano na variedade, a conexão riemanniana (simétrica e compatível com a métrica) fica inteiramente definida por g . Agora que temos uma "cara" para a derivação, nos sentimos na liberdade de perguntar: como ficaria a expressão da derivada covariante no espaço-tempo de minkowski \mathbb{M}^n ? Seja $V = v^{\mu} \partial_{\mu}$, logo:

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{d/dt} V = \nabla_{\frac{dx^{\nu}}{dt} \partial_{\nu}} v^{\mu} \partial_{\mu} = \frac{d}{dt} v^{\mu} \partial_{\mu} + \frac{dx^{\nu}}{dt} v^{\mu} \nabla_{\partial_{\nu}} \partial_{\mu} = \left(\frac{dv^{\alpha}}{dt} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{dx^{\mu}}{dt} v^{\nu} \right) \partial_{\alpha}. \quad (1.17)$$

Adotando a parametrização cartesiana, em que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, onde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, \dots, -1)$ é métrica de Minkowski, vemos que os coeficientes da conexão são nulos, de forma que $\frac{DV}{dt} = \frac{dv^{\mu}}{dt} \partial_{\mu} = \frac{dV}{dt}$, a derivada covariante coincide com a derivada ordinária que conhecemos, como deveria ser.

Por completeza, mostraremos mais alguns resultados que serão utilizados.

Proposição 1.2 *Sejam M, N variedades diferenciáveis e seja $\phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M$ e cada $v \in T_p M$, escolha uma curva diferenciável $\alpha(-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Tome $\beta = \phi \circ \alpha$. A aplicação $d\phi_p : T_p M \rightarrow T_p N$ dada por $d\phi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α .*

A aplicação linear $d\phi_p$ é chamada diferencial de ϕ em p .

Demonstração: Veja [4], página 9.

Definição 1.5 Um tensor T de ordem s contravariante e ordem r covariante (que diremos ser de ordem (s, r)) em uma variedade pseudo-riemanniana é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{\chi(M) \times \cdots \times \chi(M)}_{r \text{ fatores}} \times \overbrace{\chi^*(M) \times \cdots \times \chi^*(M)}^{s \text{ fatores}} \rightarrow M \quad (1.18)$$

Por multilinear queremos dizer que dados $X_1, \dots, X_r \in \chi(M)$ e $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_s \in \chi^*(M)^2$ temos

$$\begin{aligned} T(X_1, \dots, fA + gB, \dots, X_r, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_s) = \\ aT(X_1, \dots, A, \dots, X_r, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_s) + bT(X_1, \dots, Z, \dots, X_r, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_s) \\ \forall X, Z \in \chi(M), f, g \in \mathcal{D}(M), \end{aligned} \quad (1.19)$$

onde $T(\partial_\mu, \dots, \partial_\nu, \omega^\alpha, \dots, \omega^\beta) \equiv T_{\mu \dots \nu} \alpha \dots \beta$

Definição 1.6 Seja T um tensor de ordem (s, r) . A derivada covariante ∇T de T é um tensor de ordem $(s, r + 1)$ dada por

$$\begin{aligned} \nabla T(X_1, \dots, X_r, Z, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_s) = \\ Z(T(X_1, \dots, X_r, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_s)) - T(\nabla_Z X_1, \dots, X_r, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_s) - \\ \cdots - T(X_1, \dots, \nabla_Z X_r, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_s) + T(X_1, \dots, X_r, \tilde{\nabla}_Z \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_s) + \\ \cdots + T(X_1, \dots, X_r, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{\nabla}_Z \tilde{Y}_s). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Onde a definição de conexão pode ser generalizada para 1-formas $\tilde{\nabla} : \chi(M) \times \chi^*(M) \rightarrow \chi^*(M)$ com as mesmas propriedades da conexão vetorial acima, mas que obedece à seguinte equação $\tilde{\nabla}_{\partial_\mu} \omega^\alpha = -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \omega^\nu$.

1.3 Quantidades Cinemáticas

O uso de geodésicas para mostrar as singularidades passa por um estudo puramente geométrico de seu comportamento, independentemente da teoria do espaço-tempo, numa geometria pseudo-riemanniana.

Para descrever essas curvas, considere M uma variedade diferenciável e seja $O \subset M$ um conjunto aberto. Uma *congruência* em O é uma família de curvas tais que para

²Onde definimos $\tilde{Y} = g(Y, \cdot)$, o espaço dual formado pelas 1-formas \tilde{Y} é chamado espaço dual $\chi^*(M)$, cujos elementos da base chamamos ω^μ em oposição a ∂_μ .

cada ponto $p \in O$ passa uma curva dessa família. Uma outra maneira de falar em uma congruência se dá em termos dos vetores tangentes às suas curvas constituintes.

Em um sistema coordenado $\{x^\mu\}$, temos que o campo vetorial tangente V^μ a uma curva com parâmetro t satisfaz às equações

$$\frac{dx^\mu}{dt}(t) = V^\mu(t). \quad (1.21)$$

Como esse é um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, dado um ponto inicial p , tal que, $\frac{dx^\mu}{d\lambda}(\lambda_0) = V^\mu(p)$, ela admite solução única numa dada vizinhança de p . Com isso, vemos que a cada ponto da variedade, está definido um vetor tangente, o que implica que a variedade é varrida pelas curvas dessa congruência.

Agora, considere uma congruência de geodésicas do tipo-tempo, cujo vetor tangente $V^\mu(s)$ está parametrizado pelo comprimento de arco s , isto é, $g_{\mu\nu}V^\mu(s)V^\nu(s) = +1$, estamos usando a assinatura da métrica $(+ - - -)$.

A maneira de estudar cinematicamente o fluxo geodésico é considerar um vetor que conecta as curvas dessa congruência e calcular como ele varia ao longo delas.

Existe um procedimento em geometria que serve justamente para estimar isso, chamado derivação de Lie. Em poucas palavras, ela nasce a partir da percepção de que, dada uma congruência e um campo tensorial nela definido, é possível definir esse campo para um certo valor do parâmetro da congruência aumentado de $\lambda \rightarrow \lambda + \Delta\lambda$ e com o uso do campo vetorial das curvas, é possível expandir esse tensor de maneira a escrevê-lo em termos do parâmetro original λ , isto é, retornar ao ponto de saída. Todo esse procedimento é conhecido como *arrastamento de Lie*. Assim, pode-se calcular a diferença entre o campo tensorial original e o arrastado de um ponto posterior, portanto, ao dividir pelo parâmetro da congruência, temos uma definição de derivada, chamada *Derivada de Lie*. Dizemos que uma quantidade é invariante ao longo desse fluxo de curvas quando sua derivada de Lie é nula.

Como queremos que esse vetor do tipo-espaço, η , preserve a característica de "ligar" as curvas (aqui, vetor quer dizer campo vetorial), sua derivada de Lie deve ser nula ao longo da congruência.

$$\mathcal{L}_V \eta^\alpha = V^\mu \partial_\mu \eta^\alpha - \eta^\mu \partial_\mu V^\alpha = V^\mu \eta^\alpha_{;\mu} - \eta^\mu V^\alpha_{;\mu} = 0. \quad (1.22)$$

Essa penúltima igualdade é válida porque estamos considerando uma geometria sem torção, ou seja, com conexão simétrica.

Da equação acima, tiramos

$$V^\alpha_{;\mu} \eta^\mu \equiv B^\alpha_{\mu} \eta^\mu = V^\mu \eta^\alpha_{;\mu} \equiv \frac{D\eta^\alpha}{ds}. \quad (1.23)$$

Daqui, vemos que o tensor $B^\alpha_{;\mu} \equiv V^\alpha_{;\mu}$ mede a falha do vetor η de se propagar parale-

lamente ao longo da curva cuja tangente é V .

A literatura é recheada de definições diferentes de subvariedades suaves, daremos a que parece mais próxima da que demos de variedade diferenciável [5]. Uma *subvariedade suave* n -dimensional Σ de uma variedade m -dimensional M é um conjunto de pontos de M com a seguinte propriedade: em qualquer $p \in O \subset \Sigma \cap M$, existe uma parametrização ou sistema de coordenadas para M , na qual os pontos de Σ nessa vizinhança são pontos caracterizados por $x^1 = x^2 = \dots = x^{m-n} = 0$. O chamado teorema de Frobenius [5] fornece condições para que a variedade seja folheada por subvariedades em um sentido semelhante ao que fornecemos de congruência de curvas.

Suponha que o espaço-tempo que vamos considerar é folheado por hipersuperfícies do tipo-espaço ortogonais à congruência, nesse caso o próprio η é do tipo-espaço também. A literatura atribui definições diferentes à relação entre essa hipersuperfície, que chamaremos de Σ e os parâmetros da congruência. Nesse texto, usaremos [7].

Seja Γ a família de curvas que intercepta perpendicularmente Σ assumindo o valor dos parâmetros s_i . A definição mais rigorosa de η é de que ele conecta as curvas no mesmo valor real dos parâmetros s_i , isto é, $s_i = s_0 \in \mathbb{R}$.

Vamos abusar a linguagem e chamar $s_0 = s$ pois Σ vai folhear toda a variedade e as definições dadas acima serão válidas em todos os pontos.

Σ é a superfície de simultaneidade de todos os observadores de nosso espaço-tempo. E vamos realizar todos os nossos cálculos nela. Ela também será importante no quesito de que representará a superfície de condições iniciais a partir da qual encontraremos pontos singulares.

O conhecido *tensor de projeção*, que projeta todas as entidades com índices tensoriais em Σ , é dado por $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{1}{|V|^2} V_\mu V_\nu$, como no nosso caso, $|V| = 1$

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu. \quad (1.24)$$

Ele possui as seguintes propriedades que o estabelece como um operador de projeção e uma espécie de métrica para cada subvariedade Σ

- $h^\mu{}_\nu V^\nu = 0$,
- $W^\mu V_\nu = 0 \Leftrightarrow h^\mu{}_\nu W^\nu = W^\mu$,
- $h^\mu{}_\nu h^\nu{}_\gamma = h^\mu{}_\gamma$,
- $h^\mu{}_\mu = 3$,
- $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$.

Como $B^\mu{}_\nu = V^\mu{}_{;\nu}$ definido anteriormente mede como varia o vetor que conecta as geodésicas, vemos que ele é o agente com todas as informações cinemáticas da congruência.

E como vamos trabalhar na superfície de simultaneidade Σ , e lá é onde veremos se as curvas se aproximam, expandem-se ou rotacionam, vamos chamar o objeto

$$Q^\mu{}_\nu \equiv h^\mu{}_\alpha h^\beta{}_\nu V^\alpha{}_{;\beta}. \quad (1.25)$$

de *Tensor de Deformação*.

Todo tensor de segunda ordem pode ser escrito em termos de partes irredutíveis da forma

$$Q^\mu{}_\nu = \frac{1}{3}h^\mu{}_\nu\theta + \sigma^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad (1.26)$$

onde $\theta = h^\mu{}_\nu Q^\nu{}_\mu$ é o traço de Q ; $\sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\nu\mu} = Q_{(\mu\nu)} - \frac{1}{3}h_{\mu\nu}\theta$ é a sua parte simétrica sem traço; $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} = Q_{[\mu\nu]}$ são as componentes antissimétricas de Q .

θ , σ , ω são chamados, respectivamente, de expansão (expansion), cisalhamento (shear) e vorticidade (twist) da congruência.

A princípio, a motivação física por trás dessa classificação não é evidente. Vamos agora tentar clarear essas noções seguindo a abordagem de Plebanski [8].

1.3.1 Interpretação das quantidades cinemáticas no espaço Euclidiano

Suponha que no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , está definida uma congruência de curvas. Seja p um ponto dessa congruência.

O ponto p é descrito, em coordenadas cartesianas, no parâmetro t por $\{x_i\}$ e possui velocidade

$$\frac{dx_i}{dt}(t) = v_i(t, y_j)|_{y_j=x_j} \equiv v_i(t, x). \quad (1.27)$$

Próximo a p suponha que existe um ponto q , no mesmo parâmetro t , cujas coordenadas são $\{x_i + \delta x_i\}$ e com velocidade $v_i(t, x + \delta x)$. A velocidade do ponto q em relação a p é dado por (desprezando termos de segunda ordem em diante)

$$(v_{qp})_i(t) = v_i(t, x + \delta x) - v_i(t, x) = \partial_j v_i(t, x) \delta x_j. \quad (1.28)$$

Agora, suponha que se passou um tempo (parâmetro) Δt , de forma que a posição de q em relação a p é dada por (até termos de primeira ordem) $\delta x'_i(t) = \delta x_i(t + \Delta t) = \delta x_i(t) + (v_{qp})_i \Delta t$. Usando a equação 1.28, temos que

$$\delta x'_i = \delta x_i + (\partial_j v_i) \delta x_j \Delta t. \quad (1.29)$$

Bem, $\partial_j v_i = v_{i,j}$ é justamente o, já definido, *Tensor de Deformação* 1.25, escrito em

coordenadas cartesianas e projetado no próprio espaço euclidiano.

Realizando a decomposição

$$v_{i,j} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\theta + \sigma_{ij} + \omega_{ij}, \quad (1.30)$$

θ, σ, ω possuem a mesma nomenclatura e definição anteriores. Para interpretar fisicamente essas quantidades, tomemos cada uma separadamente

- Suponha que $\sigma = \omega = 0$, assim, $v_{i,j} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\theta \Rightarrow \delta x'_i = \delta x_i + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij}\delta x_j\Delta t = (1 + \frac{1}{3}\theta\Delta t)\delta x_i$

Daqui, vemos que, se $\theta > 0$, então $\delta x'_i > \delta x_i$ e dessa forma, estaria acontecendo um afastamento dos pontos da congruência. Para $\theta < 0$, acontece uma aproximação. O que justifica chamar θ de *fator de expansão*.

- Agora considere que $\theta = 0$, $\omega = 0$.

Sejam três pontos q_1, q_2, q_3 vizinhos ao ponto p . Cujas posições relativas (em relação a p) são dadas por $\delta x, \delta y, \delta z$.

O volume do paralelepípedo formado por esses três pontos é dado por

$$\delta V = \delta x \cdot (\delta y \times \delta z) = \epsilon_{ijk}\delta x_i\delta y_j\delta z_k. \quad (1.31)$$

Transcorrido um tempo Δt , o novo volume é

$$\delta V' = \epsilon_{ijk}\delta x'_i\delta y'_j\delta z'_k = \delta V + D\Delta t, \quad (1.32)$$

onde $D = (\epsilon_{lmk}\sigma_{kn} + \epsilon_{ljn}\sigma_{jm} + \epsilon_{imn}\sigma_{il})\delta x_l\delta y_m\delta z_n$.

É possível mostrar que $D = 0$, pois $\sigma_{ij} = \sigma^ji$, $\sigma_{ii} = 0$.

Assim, $\delta V' = \delta V$. E apesar do formato do sólido gerado por esses três pontos mudar com o tempo, seu volume permanece inalterado. Esse é o chamado movimento de cisalhamento e σ recebe o nome de *tensor de cisalhamento*.

- Agora, suponha que $\theta = 0$, $\sigma = 0$.

Nesse caso, $\delta x'_i = \delta x_i + \omega_{ij}\delta x_j\Delta t$.

A norma desse vetor é (a menos de termos de segunda ordem):

$$(\delta l')^2 = (\delta x'_i\delta x'_i) = (\delta x_i\delta x_i) = (\delta l)^2. \quad (1.33)$$

A taxa de mudança de δx_i , projetada na direção do vetor posição relativa é dada por

$$(\delta x'_i - \delta x_i)\delta x_i = \omega_{ij}\delta x_i\delta x_j\Delta t = 0, \quad (1.34)$$

ou seja, o produto escalar da velocidade com o vetor posição é nulo.

Essas são as características de um movimento de rotação, isto é, q e p rotacionam

entre si.

Por essa razão, ω é chamado de *tensor de vorticidade* ou simplesmente *vorticidade*.

Com isso, vemos a interpretação física dessas chamadas *quantidades cinemáticas*. O que precisamos agora é estudar como elas variam sob o ponto de vista dos observadores físicos, isto é, na hipersuperfície Σ .

O plano seguido pelos teoremas de Hawking-Penrose consiste em encontrar uma equação de evolução para esses parâmetros e que carregue a informação acerca da dinâmica do espaço-tempo. Voltemos à nossa análise na geometria quadridimensional pseudo-riemanniana.

1.3.2 Equações de evolução dos parâmetros cinemáticos

As equações diferenciais para a expansão, cisalhamento e vorticidade devem partir de relações que envolvem a derivada de segunda ordem da velocidade da congruência. Também deve-se levar em conta que, em algum lugar, a teoria vigente da dinâmica do espaço-tempo deve entrar nas equações. Na Relatividade Geral, o objeto principal que possui a informação do campo gravitacional é a curvatura, o tensor de Ricci. Ora, sabemos que a definição do tensor de Riemann se utiliza da diferença de derivadas segundas covariantes, que é justamente o fato de elas não comutarem que caracteriza a variedade como curva.

A definição de tensor de Riemann que usaremos é

$$V^\mu_{;\nu;\beta} - V^\mu_{;\beta;\nu} = R^\mu_{\lambda\nu\beta} V^\lambda. \quad (1.35)$$

Conforme pode ser vista em [7], é possível encontrar a seguinte equação para a expansão, conhecida como *equação de Raychaudhuri*, e é central para a análise que faremos a seguir.

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 + 2(\sigma^2 - \omega^2) - (\dot{V}^\mu)_{;\mu} = R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu. \quad (1.36)$$

Como queremos mostrar que o espaço-tempo gerado pela Relatividade Geral (dadas condições razoáveis de matéria-energia) é singular, basta que se mostre a incompletude citada anteriormente para uma curva, ou um tipo de curva, vamos nos adiantar e afirmar que basta utilizar a equação de Raychaudhuri para geodésicas

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 + 2(\sigma^2 - \omega^2) = R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu. \quad (1.37)$$

Como as equações de evolução do cisalhamento e vorticidade não serão necessárias,

não daremos tanta atenção a esse assunto, veja [7]

$$h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \dot{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} [-\omega^2 - 2\sigma^2 + a^\lambda{}_{;\lambda}] + a_\alpha a_\beta - \frac{1}{2} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (a_{\mu;\nu} + a_{\nu;\mu}) + \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu} \sigma^\mu{}_\beta - \omega_\alpha \omega_\beta = R_{\alpha\epsilon\beta\nu} V^\epsilon V^\nu - \frac{1}{3} R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu h_{\alpha\beta}, \quad (1.38)$$

$$h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \dot{\omega}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (a_{\mu;\nu} - a_{\nu;\mu}) + \frac{2}{3} \theta \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu} \omega^\mu{}_\beta - \sigma_{\beta\mu} \omega^\mu{}_\alpha = 0. \quad (1.39)$$

1.3.3 Análise da Equação de Raychaudhuri

Da equação de Raychaudhuri, vemos que ela possui uma entrada, o tensor de Ricci, em que é possível "encaixar" a teoria da gravitação ou a dinâmica do espaço-tempo.

Dada uma variedade diferenciável (M, g) , da ação de Einstein-Hilbert

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R + \kappa L_m) \quad (1.40)$$

As equações de campo de Einstein são

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad ; \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (1.41)$$

Tomando o traço dessa equação, temos $R = \kappa T$, substituindo de volta em 1.41, $R_{\mu\nu} = -\kappa (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu})$. Assim,

$$R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = -\kappa \left(T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu - \frac{1}{2} T \right) \quad ; \quad V_\mu V^\mu = 1. \quad (1.42)$$

Nesse ponto, considere que o conteúdo material-energético do Universo é um fluido perfeito, isto é, $T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu - p h_{\mu\nu}$, cujos elementos de pressão nula se movem seguindo as geodésicas que estamos considerando. Daqui, segue-se que $T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = \rho$, onde ρ é a densidade de energia do fluido, que é uma quantidade positiva, isto é, $T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq 0$.

Também é possível concluir que $T = T^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = T = \rho - 3p$. Onde p é a pressão do fluido, que também para fluido ordinários, não exóticos, é uma quantidade positiva. Juntando esses dois resultados,

$$T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu - \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} (\rho + 3p). \quad (1.43)$$

Logo, para um fluido perfeito, podemos concluir, a partir da equação 1.42, que $R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \leq 0$. Pois a densidade de energia e pressão são quatidades positivas. Essa inequação pode ser generalizada para fluidos com pressão anisotrópica.

Em geral, existe uma classificação para as chamadas condições de energia:

- A *condição de energia fraca* é aquela em que $T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0$, o que para um fluido perfeito representa $\rho \geq 0$ e $\rho + p \geq 0$.
- A *condição de energia forte* é aquela em que $T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu - \frac{1}{2}T \geq 0$, o que para um fluido perfeito representa $\rho + p \geq 0$ e $\rho + 3p \geq 0$.
- A *condição de energia dominante* é aquela em que a condição de energia fraca é satisfeita e temos ainda que o vetor $T^{\mu\nu}V_\mu$ é um vetor do tipo nulo ou tempo. O que para um fluido perfeito representa $\rho \geq |p|$, que fisicamente significa que a velocidade do fluxo de energia não excede a velocidade da luz.

Essas são as principais condições de energia, a literatura apresenta ainda algumas outras, vide [9]. Usando a condição de energia fraca, vemos que a equação de Raychaudhuri, torna-se uma inequação

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 + 2(\sigma^2 - \omega^2) \leq 0. \quad (1.44)$$

Citando as palavras de Wald [1]:

"Note that by virtue of equation $V^\mu \nabla_\nu V_\mu = V^\mu \nabla_\mu V_\nu = 0$ and Frobenius' Theorem, the congruence is (locally) hypersurface orthogonal if and only if $\omega_{\mu\nu} = 0$ ".

Também é possível mostrar que $\sigma^2 \geq 0$, logo a inequação acima só é satisfeita se

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{3}\theta^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{d}{ds}(\theta^{-1}) \geq \frac{1}{3} \implies \quad (1.45)$$

$$\theta^{-1}(s) \geq \theta_0^{-1} + \frac{1}{3}s. \quad (1.46)$$

Se θ_0 é negativo, então θ^{-1} deve passar por zero por baixo, isto é, $\theta \rightarrow -\infty$ em um comprimento de arco (tempo próprio) finito $s \leq 3/|\theta_0|$.

O que significa que as geodésicas se aproximam infinitamente em um "tempo" finito. Essa característica é presente até mesmo no espaço-tempo de Minkowski, e sabemos que ele não é singular, no sentido que queremos abordar, logo apesar da presença dessa "singularidade" na congruência geodésica, essa desigualdade não representa uma demonstração dos teoremas de Hawking-Penrose, e não descreve uma singularidade do espaço-tempo, apenas da congruência; mas ela é parte integrante de um esquema maior que trataremos nas páginas seguintes.

1.4 Quatro peças do quebra-cabeça

A partir dessa seção, mostraremos alguns conceitos que, à primeira vista, podem parecer independentes, mas que sua união formará a estrutura matemática com o poder

de cumprir o objetivo desse capítulo.

Essas peças serão organizadas da seguinte maneira: exibiremos a relação entre a propriedade de maximização dos comprimentos das geodésicas com a chamada aplicação exponencial, que por sua vez se relaciona com os campos de Jacobi, os quais mantêm estreita relação com a equação de Raychaudhuri.

1.4.1 A aplicação exponencial

Seja $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\}$ (onde $T_p M$ é o espaço tangente a M no ponto p), munindo TM com uma estrutura diferenciável, é possível mostrar que ele é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$ (se a variedade original M tem dimensão n). TM é chamado de *fibrado tangente*.

Definição 1.7 Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ no ponto t_0 ; se γ é uma geodésica de t , para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma geodésica.

Definimos a *aplicação exponencial* em U como

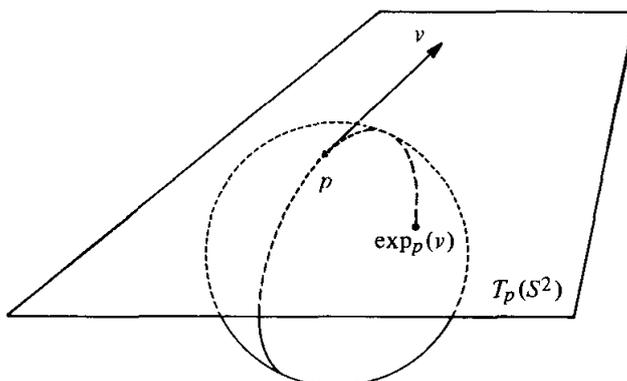
$$\exp : U \subset TM \longrightarrow M \quad (1.47)$$

$$(q, v) \longmapsto \exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma(|v|, q, \frac{v}{|v|}). \quad (1.48)$$

Onde usamos a designação $\gamma(t, q, v)$ para representar a geodésica tipo-tempo parametrizada por t , que passa pelo ponto q , cujo vetor tangente nesse ponto é v . Também usamos a propriedade de homogeneidade geodésica [4] $\gamma(1, q, v) = \gamma(|v|, q, \frac{v}{|v|})$.

Essa aplicação tem a característica de reunir em uma única função diferenciável todas as geodésicas tipo-tempo de M . Fixando q , ela representa um ponto que passa por uma geodésica no valor de seu parâmetro dado por $|v|$, cujo vetor velocidade é unitário (parametrizada pelo comprimento de arco) e é dado por $v/|v|$.

Figura 1.1: Aplicação exponencial em S^2



1.4.2 Da relação da aplicação exponencial com os campos de Jacobi

Uma superfície f parametrizada em M é uma aplicação $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ diferenciável. Suponha que essa superfície é parametrizada por $(t, s) \in \mathbb{R}^2$. Definimos a derivada covariante parcial de maneira análoga ao \mathbb{R}^n . Para um campo vetorial V definido em f , $\frac{DV}{\partial t}(t, s)$ é a derivada covariante usual ao longo da curva integral $f(t, s_0)$. De maneira análoga definimos $DV/\partial s$. Isto define a derivada $\frac{DV}{\partial t}, \frac{DV}{\partial s} \quad \forall (t, s) \in A$.

Nesse ponto, escolha a superfície f da forma $f(t, s) = \exp(p, tv(s)) \equiv \exp_p tv(s) = \gamma(t, p, v(s))$; para um intervalo adequado dos parâmetros (t, s) , $0 \leq t \leq 1$, $-\epsilon \leq s \leq \epsilon$, com $v(s)$ um curva de $T_p M$ com $v(0) = v$, $v'(0) = w$ e fizemos a identificação $T_p M \approx T_v(T_p M)$, ou seja, na aplicação exponencial, fixe o ponto da variedade p e defina a superfície como o conjunto de geodésicas que emanam de p e não se cruzam (não se cruzam porque as linhas coordenadas de uma superfície não se cruzam), ou seja, identifique a congruência de geodésicas que partem de p com uma superfície. Dessa maneira, usamos a aplicação exponencial, que não somente abriga as geodésicas de M , como serve para definir de maneira mais rigorosa o conceito de congruência apresentado anteriormente.

Com essa notação, é fácil perceber que a curva integral $f(t, 0)$ é uma geodésica com vetor velocidade no ponto p igual a $\frac{\partial f}{\partial t}(t, 0) = d(\exp_p)_{tv}v = \gamma'(t)$. Também é possível ver que para t variável, $\frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = d(\exp_p)_{tw}w$; $w \in T_v(T_p M) \approx T_p M$, fixo, segue e varre cada geodésica da congruência. Seu vetor velocidade, de certa maneira, conecta geodésicas vizinhas.

O que faremos agora é encontrar a famosa equação de Jacobi, que também pode ser conhecida como equação do desvio geodésico.

Em [10] e grande parte da literatura em Relatividade Geral, deduz-se, a partir dessa ideia de congruência de geodésicas, a equação do desvio geodésico. No caso do livro citado, ela serve para extrair as equações de campo da RG para o vácuo por um método que não aborda a ação de Einstein-Hilbert. Aqui, além de a deduzirmos para um propósito diferente, o faremos em uma linguagem independente de coordenadas, em que utilizaremos as ferramentas acima expostas.

Da definição de curvatura,

Definição 1.8 *A curvatura R de uma variedade (pseudo) riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \chi(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ dada por:*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad ; \quad Z \in \Xi(M), \quad (1.49)$$

onde ∇ é a conexão (pseudo) riemanniana e $\chi(M)$ é o conjunto de campos vetoriais de M .

Em linguagem dependente de coordenadas $R(\partial_\mu, \partial_\nu)\partial_\beta = R^\alpha_{\mu\nu\beta}\partial_\alpha$.

Por completeza, chamamos o tensor de curvatura, a aplicação

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M), \quad (1.50)$$

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle ; \quad X, Y, Z, W \in \chi(M).$$

Onde $\mathcal{D}(M)$ é o anel de funções diferenciáveis em M .

Numa base coodenada, ela possui componentes dadas por

$$R(\partial_\mu, \partial_\nu, \partial_\alpha, \partial_\beta) = \langle R^\gamma_{\mu\nu\alpha} \partial_\gamma, \partial_\beta \rangle = R^\gamma_{\mu\nu\alpha} \langle \partial_\gamma, \partial_\beta \rangle = g_{\gamma\beta} R^\gamma_{\mu\nu\alpha} \equiv R_{\beta\mu\nu\alpha}. \quad (1.51)$$

Trabalhem com a curvatura propriamente dita. Seja

$$X = \frac{\partial f}{\partial t} = Z, \quad Y = \frac{\partial f}{\partial s}, \quad (1.52)$$

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} - \nabla_{\left[\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right]} \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (1.53)$$

Como f é uma superfície, o comutador dos vetores tangentes de suas linhas integrais é nulo. E como $f(t, 0)$ é uma geodésica, $\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Definindo $\frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = \eta(t)$ e usando o lema de simetria [4], $\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}$,

$$R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} \Rightarrow \quad (1.54)$$

$$\frac{D^2}{dt^2} \eta(t) - R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \eta(t)\right) \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (1.55)$$

como $\frac{\partial f}{\partial t}(t, 0) = \gamma'(t)$

$$\frac{D^2}{dt^2} \eta(t) - R(\gamma'(t), \eta(t)) \gamma'(t) = 0. \quad (1.56)$$

Essa é a chamada *equação de Jacobi*, que numa linguagem dependente de coordenadas assume a forma da *equação do desvio geodésico*

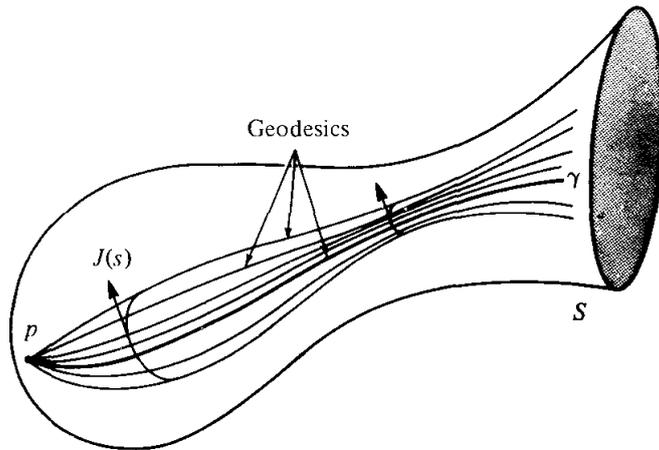
$$V^\alpha \nabla_\alpha (V^\beta \nabla_\beta \eta^\gamma) - R^\gamma_{\alpha\lambda\beta} V^\alpha \eta^\lambda V^\beta = 0. \quad (1.57)$$

Para o vetor V tangente à geodésica γ . O vetor $\eta(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$ é chamado *Campo de Jacobi* em γ . Que, como vimos, tem a interpretação de conectar geodésicas vizinhas.

A relação dos campos de Jacobi com a aplicação exponencial anteriormente definida se dá por meio da seguinte proposição

Proposição 1.3 *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica do tipo-tempo. Então um campo de*

Figura 1.2: Campo de Jacobi $s \mapsto J(s)$ de uma superfície S , partindo de um ponto p



FONTE: do Carmo [6], 1976, p. 358

Jacobi η ao longo de γ com $\eta(0) = 0$ é dado por

$$\eta(t) = (d \exp_p)_{t\gamma'(0)}(t\eta'(0)) ; t \in [0, a]. \quad (1.58)$$

Demonstração: Veja [4], página 126. \square

A aplicação exponencial é uma função cujo domínio é a variedade diferenciável *fibrado tangente* TM e tem imagem em M . Sua diferencial toma valores no espaço tangente do fibrado, que é identificado com o próprio fibrado e leva em T_pM . Portanto, essa diferencial é um vetor, assim como $\eta(t)$, logo, a notação usada acima faz sentido. Outra observação acerca da notação diz respeito ao termo $(d \exp_p)_{t\gamma'(0)}$. Nesse caso, queremos dizer $d(\exp_p(t\gamma'(0)))$, ou seja, como $\exp_p(t\gamma'(0))$ está definida em M , logo

$$(d \exp_p)_{t\gamma'(0)}(t\eta'(0)) : T_{(p,t\gamma'(0))}(TM) \rightarrow T_pM. \quad (1.59)$$

Como fixamos o ponto $p = \gamma(0)$, o espaço tangente ao fibrado é simplesmente ele próprio $T_v(T_pM) \approx T_pM$ e sabemos que $\eta'(0) \in T_v(T_pM)$

1.4.3 Da relação da aplicação exponencial com os pontos conjugados

Vimos uma equação diferencial que relaciona o vetor que determina a separação entre curvas de uma dada congruência (que por sua vez, define uma superfície) e a curvatura da variedade e as próprias curvas geodésicas constituintes: a equação de Jacobi. Também exibimos uma importante proposição que relaciona esse campo do desvio geodésico com a diferencial da aplicação exponencial.

Bem, vimos na seção anterior, sobre a equação de Raychaudhuri, que existem curvas, que para um valor finito do seu parâmetro, e dadas as equações de campo da Relatividade Geral, elas tendem a uma aproximação infinita, o que intuitivamente nos leva a conjecturar que esses pontos singulares da congruência têm íntima relação com valores nulos do objeto que representa a separação das geodésicas, isto é, os campos de Jacobi. Iremos mostrar posteriormente que, de fato, esses pontos em que $\eta = 0$ existem e coincidem com aqueles em que $\theta \rightarrow -\infty$ na equação 1.37.

Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica, dizemos que o ponto $\gamma(t_0)$ é *conjugado* de $\gamma(0)$ ao longo de γ ; $t_0 \in (0, a]$, se existe um campo de Jacobi $\eta \neq 0$ tal que $\eta(0) = \eta(t_0) = 0$.

Da proposição anterior, que relaciona o campo de Jacobi com a diferencial da exponencial, é possível concluir o seguinte resultado:

Corolário 1.1 *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica do tipo-tempo tal que $\gamma(0) = p$. O ponto $q = \gamma(t_0)$; $t_0 \in (0, a]$ é conjugado de p ao longo de γ se e somente se $v_0 = t_0\gamma'(0)$ é um ponto crítico da aplicação exponencial em p .*

Demonstração: Dizer que $v_0 = t_0\gamma'(0)$ é ponto crítico de \exp_p , a partir da equação 1.5 significa que $0 = (d\exp_p)_{t_0\gamma'(0)}(t_0\eta'(0)) = \eta(t_0)$; $\eta'(0) \neq 0$. Logo, segue que $d\exp_p(t_0\gamma'(0)) = 0$ \square

Outra das ferramentas necessárias para a demonstração de um dos teoremas de Hawking-Penrose é a característica que a geodésicas do tipo-tempo possui de ser a curva que localmente maximiza o comprimento de arco entre dois pontos "suficientemente próximos". No caso da geometria riemanniana, como é o caso de um dos livros-texto usados nessa dissertação, como Geometria Riemanniana, de Manfredo do Carmo [4], a minimização do comprimento de arco é a característica das curvas geodésicas.

1.4.4 Da relação dos pontos conjugados com a propriedade maximizante das geodésicas

Se \exp_p é um **difeomorfismo** numa vizinhança V , **qualquer**, da origem de T_pM , então $\exp_p V = U$ é chamada uma *vizinhança normal* de p . Se $B_\varepsilon(0)$, a bola de centro na origem e raio ε em T_pM , é tal que o fecho³ $\bar{B}_\varepsilon(0) \subset V$, chamamos $\exp_p B_\varepsilon(0)$ a *bola normal* de centro p e raio ε . Dessa forma, segue a seguinte:

Proposição 1.4 *Sejam $p \in M$, U uma vizinhança normal de p , e $B \subset U$ uma bola normal de centro em p . Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ um segmento de geodésica com $\gamma(0) = p$. Se $c : [0, 1] \rightarrow M$ é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$, então $s(\gamma) \geq s(c)$ e se a igualdade vale, então $\gamma([0, 1]) = c([0, 1])$.*

³O menor conjunto fechado que contém $B_\varepsilon(0)$.

Demonstração: Consulte [4], página 79. Porém, uma pequena observação deve ser feita. O vetor $\frac{\partial f}{\partial t}$ é a derivada v' de um dado vetor v . Sabemos que ele é um vetor do tipo-espaço, pois representa nesse caso mais geral o que, no contexto da congruência geodésica era $\partial f/\partial s = \eta$, logo $|\partial f/\partial t|^2 \leq 0$, o que implica que $|\frac{dc}{dt}|^2 \leq |r'(t)|^2$, o que leva à maximização do comprimento, segundo essa demonstração. Na presente referência, que trata de geometria riemanniana e não da pseudo-riemanniana, temos $|\partial f/\partial t|^2 \geq 0$ o que leva à minimização do comprimento. \square

Onde $s(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \rangle} dt$ é o comprimento de arco da curva γ de $\gamma(0)$ até $\gamma(1)$.

Essa proposição toma em suas hipóteses que a imagem da geodésica esteja definida numa bola normal, isto é, se você lembrar da definição de bola e vizinhança normal, você verá que essa definição necessita que a exponencial seja um difeomorfismo num aberto de $T_p M$. Pelo *teorema da função inversa*, sabemos que esse não é o caso se essa aplicação possuir pontos críticos (como os citados anteriormente no estudo dos campos de Jacobi e pontos conjugados), pois nesse caso, ela não pode ser localmente inversível.

Uma releitura dessa proposição que acabamos de exibir, daremos na forma do seguinte

Teorema 1.2 *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ uma curva diferenciável tipo-tempo que conecta dois pontos $p, q \in M$. Se γ é uma geodésica sem pontos conjugados entre p e q , então γ maximiza localmente o comprimento de arco entre p e q .*

O resultado acima atesta que uma condição suficiente para que as geodésicas sejam as curvas de comprimento máximo é que elas não possuam pontos conjugados. Mas o que podemos afirmar acerca da volta desse teorema? Isto é, se a geodésica maximizam o comprimento entre dois pontos, será que podemos tirar alguma conclusão acerca da existência de pontos conjugados? A resposta é afirmativa e possui o nome de Teorema de Jacobi, que iremos enunciar da seguinte maneira

Teorema 1.3 (Jacobi) *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ uma curva diferenciável tipo-tempo que conecta dois pontos $p, q \in M$. Então, a condição necessária e suficiente para γ maximizar localmente o comprimento de arco entre p e q é que γ seja uma geodésica sem pontos conjugados entre p e q .*

Demonstração: Veja o apêndice D. \square

Com esse teorema fechamos a relação entre os pontos conjugados e a maximização do comprimento de arco de geodésicas. Na próxima seção mostraremos que existem pontos conjugados em um espaço-tempo que é regido pela Relatividade Geral, isto é, regiões em que a exponencial não é um difeomorfismo, por meio da relação dos campos de Jacobi e os pontos conjugados com a equação de Raychaudhuri.

1.4.5 Da relação dos campos de Jacobi com a equação de Raychaudhuri

Nessa seção, iremos apresentar uma forma mais conveniente para o campo de Jacobi, trabalharemos com esse formato e a compararemos com o escalar de Raychaudhuri θ .

Vimos que θ é a função escalar que calcula o afastamento (ou aproximação) de uma congruência geodésica do ponto de vista da hipersuperfície de simultaneidade dos observadores cujas trajetórias são as curvas da congruência.

Para cumprir como os objetivos dessa seção, devemos analisar a equação de Jacobi do ponto de vista da hipersuperfície Σ . Para tal fim, escolha uma base ortonormal de tetradas, cujo vetor $e_0^\mu = V^\mu$ é o nosso vetor tipo-tempo tangente a uma geodésica. E uma base ortonormal tipo-espaço, na qual iremos escrever a equação de Jacobi (lembrando que Σ é uma hipersuperfície do tipo-espaço, isto é, seus vetores são todos dessa natureza).

Na base de tetradas $\{e_A^\mu\}$; $A = 1, 2, 3$. A equação de Jacobi toma a forma

$$\frac{d^2 \eta^A}{ds^2} = R^A_{BCD} V^B \eta^C V^D, \quad (1.60)$$

Uma maneira de resolver essa equação é, além de escrever a equação nessa base e propagá-la paralelamente ao longo de γ , evidenciar que η deve depender linearmente da condição inicial $\frac{d\eta}{ds}(0)$, e que $\eta(p) = \eta(0) = 0$. Dessa maneira, podemos escrever sem perder generalidade

$$\eta^A(s) = A^A_B(s) \frac{d\eta^B}{ds}(0). \quad (1.61)$$

A equação a ser obedecida agora se escreve como

$$\frac{d^2 A^A_B(s)}{ds^2} = R^A_{CDE} V^C V^E A^D_B. \quad (1.62)$$

Vemos que a equação 1.61 é uma equação matricial e a condição para que $\eta^A(p) = \eta(s_0) = 0$ é que $\det(A^A_B(s_0)) = 0$. Essa é uma condição necessária e suficiente.

Agora, vamos incluir o tensor de deformação nessa história.

$$\begin{aligned} \frac{d\eta^A}{ds} &= V^\mu \nabla_\mu \eta^A = V^\mu \nabla_\mu (e^A_\nu \eta^\nu) = e^A_\nu V^\mu \nabla_\mu \eta^\nu = \\ &e^A_\nu \eta^\mu \nabla_\mu V^\nu = e^A_\nu B^\nu_\mu \eta^\mu = B^A_\mu \eta^\mu = B^A_B \eta^B. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Essa última igualdade é válida, pois para o caso de geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco, o tensor de deformação é puramente espacial, $B_{\mu\nu} V^\mu = B_{\mu\nu} V^\nu = 0$,

ou seja, $Q = B$, na equação 1.25. Também temos que $\frac{d\eta^A}{ds} = \frac{dA^A_B}{ds} \frac{d\eta^B}{ds}(0) \Rightarrow$

$$\frac{dA^A_B}{ds} \frac{d\eta^B}{ds}(0) = B^A_B A^B_C \frac{d\eta^C}{ds}(0) \Rightarrow \frac{dA^A_B}{ds} = B^A_C A^C_B. \quad (1.64)$$

Em linguagem matricial, $\frac{dA}{ds} = BA$ ou $B = \frac{dA}{ds} A^{-1}$.

Sabemos que $\theta = \text{tr} B$

$$\begin{aligned} \theta = \text{tr} B &= \text{tr} \left[\frac{dA}{ds} A^{-1} \right] = \frac{1}{\det A} \frac{d}{ds} (\det A) \implies \\ &\theta = \frac{d}{ds} (\ln |\det A|). \end{aligned} \quad (1.65)$$

Essa expressão é a que procurávamos, pois sabemos que $\det A \rightarrow 0 \Leftrightarrow \theta \rightarrow -\infty$. Logo, uma condição necessária e suficiente para que um certo ponto q seja conjugado de um ponto p é que o fator de expansão tenda a "menos infinito" nesses pontos, isto é, que possuam uma aproximação infinita, o que confirma nossa intuição inicial.

Como vimos, esses pontos, de fato existem, o que pode contradizer o teorema da seção anterior sobre a maximização local das geodésicas. A existência desses pontos é fator crucial para a demonstração dos teoremas de singularidades.

Na próxima seção, apresentaremos um estudo da topologia e da estrutura causal de um espaço-tempo, ou se preferir, de uma variedade diferenciável lorentziana.

1.5 Da existência de curvas de comprimento máximo

Estamos com todas as ferramentas para demonstrar pelo menos um dos teoremas de singularidade. Até o momento, fizemos a análise das geodésicas maximizantes supondo sua existência, porém isso foi um abuso. Só se pode garantir a presença de curvas com essa característica em variedades muito especiais. Aquelas que possuem um conjunto de dados iniciais de maneira que a causalidade seja assegurada nesse espaço-tempo, o qual chamamos de globalmente hiperbólico.

Aqui não faremos uma análise exaustiva da estrutura causal do espaço-tempo. Limitar-nos-emos a fornecer uma série de definições para que a linguagem não se torne confusa e simplesmente discutiremos os resultados. Para um estudo detalhado do que será abordado nessa seção, sugerimos as referências [1], [11], [12].

- Um espaço-tempo M é temporalmente orientável se for possível definir um campo vetorial V que é do tipo-tempo em toda a variedade. Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva do tipo-tempo, dizemos que ela é direcionada ao futuro se $g(\gamma'(t), V(\gamma(t))) > 0$. Se $g(\gamma'(t), V(\gamma(t))) < 0$, então γ é direcionada ao passado.

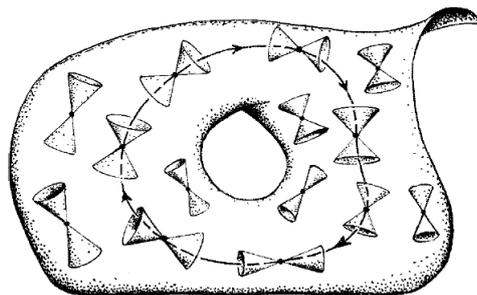
- Seja $\gamma : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva. Dizemos que $\gamma(t)$ é uma *curva causal direcionada ao futuro* se $\gamma'(t)$ é um vetor tipo-tempo ou tipo-nulo. Similarmente, define-se uma *curva causal direcionada ao passado*.
- O conjunto $I^+(p)$ é definido da seguinte forma:

$$I^+(p) = \{q \in M ; \text{Existe uma curva do tipo-tempo direcionada ao futuro } \gamma(t), \text{ com } \gamma(0) = p \text{ e } \gamma(1) = q\}$$
 Similarmente, define-se $I^-(q)$.
- Um subconjunto $S \subset M$ é dito *acronal* se não existem $p, q \in S$ tais que $q \in I^+(p)$, ou seja, $I^+(S) \cap S = \emptyset$.
 O qual as curvas causais apenas a cruzam uma vez.
- Seja $\gamma(t)$ uma curva causal direcionada ao futuro. Dizemos que $p \in M$ é um *ponto final futuro* de γ se para toda vizinhança O de p existe um t_0 tal que $\gamma(t) \in O$ para todo $t > t_0$.
 A curva é dita *futuramente inextensível* se ela não possui pontos finais futuros. Similarmente, definimos *ponto final passado* e *curva passadamente inextensível*.
- O conjunto $D^\pm(S)$ é definido da seguinte forma:

$$D^\pm(S) = \{p \in M ; \text{Toda curva causal passadamente (futuramente) inextensível através de } p \text{ intersecta } S\}.$$
 Também definimos $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$, ele é chamado domínio de dependência de S .
- Um conjunto *acronal, fechado* Σ , cujo domínio de dependência é a variedade M , isto é, para o qual $D(\Sigma) = M$, é chamado uma *superfície de Cauchy*.
- Um espaço-tempo que possui uma superfície de Cauchy Σ é dito *Globalmente Hiperbólico*.

Uma característica de variedades lorentzianas globalmente hiperbólicas é que elas não possuem curvas fechadas do tipo-tempo, ou seja, são causalmente bem comportadas.

Figura 1.3: Curva fechada do tipo-tempo



Para espaços-tempos globalmente hiperbólicos, o conjunto das curvas que ligam dois pontos fixos p, q da variedade é compacto, veja [1]. Daí, a função comprimento de arco deve assumir valores máximos e mínimos nesse conjunto, essa é uma generalização de um resultado de funções do \mathbb{R}^n na reta \mathbb{R} . Logo, existe a tal curva de comprimento máximo e ela é uma geodésica.

Uma superfície de Cauchy é um conjunto sem referência a tempo e na qual todas as curvas causais, ou seja, que podem ser linhas de mundo de observadores materiais ou radiação, tomam valores, a intersectam, e cujo passado e futuro consiste em toda a variedade, um resultado global. Nesse sentido, uma superfície de Cauchy é uma superfície de simultaneidade (acronal) e de condições iniciais (já que todas as curvas causais "passam" por ela).

Segundo Wald [1], página 236, "[...]an arbitrary continuous causal curve connecting any two points cannot be a curve of maximum length between those points unless it is a geodesic[...]". Uma assertiva semelhante também pode ser encontrada em [4].

Teorema 1.4 *Seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Seja $p \in M$, Σ uma superfície de Cauchy e defina $C(\Sigma, p)$ como o conjunto de curvas causais direcionadas ao futuro a partir de Σ a p . Então existe uma curva $\gamma \in C(\Sigma, p)$ para a qual o comprimento de arco atinge seu valor máximo em $C(\Sigma, p)$. Além disso, γ deve ser uma geodésica ortogonal a Σ em pontos conjugados a Σ entre Σ e p .*

Demonstração: Veja [1], páginas 236 e 237, teoremas 9.4.3 e 9.4.5. Também é utilizado o teorema D.2. \square

Um espaço-tempo que admite esse tipo de estrutura é o que estamos atrás no teorema de Hawking-Penrose, esse é um espaço-tempo "Físico", "Real".

1.6 O Teorema de Singularidade

Vimos acima que vamos considerar espaços que são causalmente bem comportados, isto é, que possuem uma hipersuperfície de condições iniciais na qual passam todas as curvas causais da variedade, podendo ser geodésicas ou curvas aceleradas, que são linhas de universo de algum observador, ou raios de luz.

A imagem que queremos construir para os teoremas de singularidades é a de geodésicas que atravessam essa superfície de condições iniciais (superfície de Cauchy) e que não podem ser estendidos para além de um dado ponto. Isto é, queremos ampliar a noção que apresentamos de conjugação de pontos para a de um ponto conjugado a uma superfície. Apesar de parecer, essa não é uma tarefa complicada, como veremos.

Definimos a curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$ de uma hipersuperfície Σ ortogonal a uma congruência de curvas como $K_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} V_{\nu}$, onde V é o vetor tangente à congruência. Essa

definição é a usual, pois

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathcal{L}_V h_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}_V(h_{\mu\nu} + V_\mu V_\nu) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = \nabla_\mu V_\nu = K_{\mu\nu} \Rightarrow \\ K_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}_V h_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Que em coordenadas gaussianas assume a forma $K_{\mu\nu} \doteq \frac{1}{2}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t}$, que é a expressão usual da curvatura extrínseca.

O traço de $K_{\mu\nu}$, chamado de $K = h^{\mu\nu}K_{\mu\nu} = h^{\mu\nu}\nabla_\mu V_\nu = \theta$ que é o escalar de Raychaudhuri da congruência. Nesse sentido, podemos generalizar os teoremas anteriores com essa linguagem.

Proposição 1.5 *Seja M uma variedade lorentziana que satisfaz $R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \leq 0$ para todo vetor tipo-tempo V . Seja Σ uma hipersuperfície tipo-espaço com traço da curvatura extrínseca $K = \theta < 0 \forall q \in \Sigma$. Então para um comprimento de arco $s \leq 3/|K|$, existe um ponto p conjugado a Σ ao longo da geodésica γ ortogonal a Σ e que passa por q . Se γ puder estendida tão longe.*

Teorema 1.5 *Seja M uma variedade lorentziana, $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva do tipo-tempo que conecta um ponto $p \in M$ a um ponto q pertencente a uma hipersuperfície Σ . Então a condição necessária e suficiente para que γ maximize localmente o comprimento de arco entre p e Σ é que γ seja uma geodésica ortogonal a Σ sem pontos conjugados a Σ entre Σ e p .*

Agora, podemos enunciar e provar pelo menos um dos teoremas de singularidades de Hawking-Penrose, aquele que diz respeito a geodésicas do tipo tempo.

Teorema 1.6 (Teorema de Singularidade) *Seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico com $R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \leq 0$ para todo vetor tipo-tempo V . Suponha que existe uma superfície de Cauchy tipo-espaço Σ para a qual o traço de sua curvatura extrínseca (para a congruência ortonormal de geodésicas direcionadas ao passado) satisfaz $K \leq C < 0$ em toda a superfície, onde C é uma constante.*

Então, nenhuma curva tipo-tempo direcionada ao passado, a partir de Σ , pode ter comprimento maior do que $3/|C|$. Em particular, todas as geodésicas tipo-tempo direcionadas ao passado são incompletas.

Demonstração: Vamos demonstrar por absurdo. Suponha que existe uma curva tipo-tempo λ , a partir de Σ com comprimento maior que $3/|C|$. Seja p um ponto dessa curva que está definido além desse comprimento. Vimos que como o conjunto das curvas que ligam dois pontos de uma variedade globalmente hiperbólica é compacto, vimos pelo teorema 1.4 que a função comprimento de arco deve ter um valor máximo para uma dada

curva, que é uma geodésica. Portanto, deve haver uma geodésica (com comprimento maior que $3/|C|$) ligando p a Σ . Também pelo Teorema 1.4, isso significa que não há pontos conjugados entre p e Σ . Mas pela Proposição 1.5 e a relação 1.66 apresentada na seção 1.4.5 entre o escalar de Raychaudhuri e o campo de Jacobi, temos que γ deve possuir pontos conjugados entre p e Σ . O que é um absurdo. À vista disso, a curva original λ não pode existir. \square

Para interpretar esse resultado, note quais foram as hipóteses exigidas no teorema. Uma delas diz respeito ao traço da curvatura extrínseca K da superfície de Cauchy Σ . Como a variedade é folheada por essas hipersuperfícies de simultaneidade, o que pedimos é que em algum "momento" da história do Universo, ela seja negativa. Agora, lembre que essa quantidade nada mais é que o fator de expansão da congruência geodésica e que, no teorema acima, tratamos de curvas tipo-tempo direcionadas ao passado. Isto é, fisicamente, o que pedimos no teorema foi que a congruência, que aponta para o passado, em algum "instante" aproxime-se, ou seja, que, vendo o movimento para o futuro, a congruência se afaste. Essa hipótese pode ser interpretada como o pedido de que em algum momento da história cósmica, o Universo tenha estado em expansão. O que é uma hipótese razoável, em vista dos recentes experimentos.

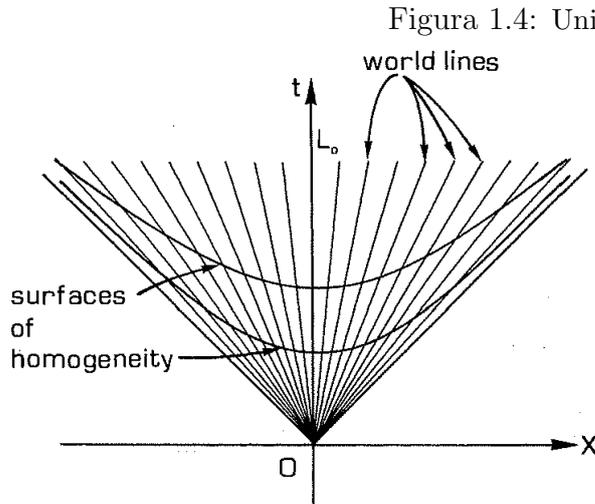
Outra observação a ser feita sobre essa suposição, é a de que $K \leq C < 0 \Rightarrow K < 0$, ou seja, $K \neq 0$. Nesse caso, o espaço de Minkowski não é contemplado, pois a curvatura extrínseca de sua superfície de simultaneidade, que é plana, é nula. Também nota-se da desigualdade de Raychaudhuri $\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 \leq 0$, que para o caso da ausência de matéria, ela se torna uma igualdade $\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 = 0$, cuja solução é $\theta^{-1}(s) = \theta_0^{-1} + \frac{1}{3}s$, e para a curvatura extrínseca de Σ em um dado instante $K = \theta_0 = 0$, temos que $\theta \not\rightarrow -\infty$, pois a função comprimento de arco é positiva $s > 0$. Ou seja, o espaço-tempo de Minkowski não possui uma singularidade passada.

Na seção 1.3.3, citamos que a análise da Equação de Raychaudhuri que levava a uma singularidade na congruência podia ser feita no espaço de Minkowski \mathcal{M} , isso é verdade, afinal, se as geodésicas, que são retas, em algum momento se aproximam, nada mais natural esperar que depois elas se toquem. O que fizemos no teorema foi relacionar o fator de expansão inicial da congruência com a expansão dessa variedade, como \mathcal{M} é fixo, esse fator é inicialmente nulo, o que não satisfaz as hipóteses do teorema.

Para ilustrar o teorema de singularidade, usaremos um subconjunto do espaço-tempo de Minkowski. Mas não se espante, pois apesar dessa variedade global não satisfazer as hipóteses do teorema, existe um exemplo artificial que utiliza apenas um pedaço dela e que simula alguns resultados experimentais da Cosmologia, como a singularidade inicial, ele é chamado Universo de Milne [14], página 178.

Defina a variedade como o interior da parte futura do cone de luz, a partir da origem, do espaço-tempo de Minkowski. Dessa forma, o hiperbolóide de revolução (em coordenadas cartesianas) definido por $\Sigma : t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a^2 ; t > 0$ é uma superfície do tipo-espaço,

acronal, fechada e cujo domínio de dependência é a própria variedade, $D(\Sigma) = M$.



FONTE: Ellis, Williams [14], 2000, p. 179

O traço da curvatura extrínseca dessa hipersuperfície é negativa em todos os pontos, [12], página 274. Considerando que esse espaço-tempo é plano, a condição de convergência geodésica é satisfeita, $R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \leq 0$, portanto todas as hipóteses do teorema de singularidade valem e temos a existência de um "Big Bang" na origem O do sistema de coordenadas. Todas as curvas da variedade convergem para O e não podem ser estendidas além desse ponto, além disso, da definição do hiperbolóide e da métrica de Minkowski, o comprimento máximo das geodésicas que partem de Σ é $|a|$, o que de fato, é o tempo próprio medido por esses observadores. O modelo de Milne não se encaixa com os dados observacionais, pois não prevê a radiação cósmica de fundo.

Como os teoremas de Hawking-Penrose nasceram na década de 70, não havia a discussão presente nos dias atuais acerca da possibilidade da existência de um conteúdo de matéria que quebra as condições de energia. Muito se fala da presença de uma constante cosmológica responsável pela expansão acelerada do Universo, ela pode ter uma equação de estado representada por um fluido perfeito com $\rho = -p$, o que quebra a condição de energia forte. Outros modelos que abordam essa constante são os de inflação, nos quais se supõe que houve um curto período de acelerada expansão do fator de escala, responsável por homogeneizar e aplanar a seção espacial do Universo. Com esse conteúdo exótico de matéria, o espaço-tempo poderia não desenvolver uma singularidade inicial. Mas como nossa abordagem segue uma escola de pensamento puramente geométrica, não abordaremos essa possibilidade e trataremos da fuga do destino singular por meio da introdução de uma geometria não-riemanniana, a geometria de Weyl.

Capítulo 2

Geometria de Weyl

2.1 Motivação

Imagine que estamos em 1918 e alguns dos principais testes da Relatividade Geral estão sendo realizados, como a verificação do avanço do periélio de Mercúrio e o desvio da luz por efeito gravitacional. O cenário é bem favorável a essa nova teoria revolucionária, que amplia de maneira inimaginável o horizonte da humanidade na compreensão da natureza. Temos o nascimento da ideia belíssima de que o espaço e o tempo são conceitos dinâmicos, o que quebra completamente os paradigmas newtonianos e kantianos acerca da fixação e existência exterior de um palco espacial no qual os eventos do Universo se desenrolam ao longo da passagem de um fluxo metafísico de um "rio do tempo" imutável. A matéria deixa de se comportar em resposta a uma força ou campo gravitacional que preenche a tudo e passa a seguir simplesmente seu caminho mais natural, o de linhas retas nessa geléia frenética que é a variedade espaço-tempo.

Um dos dois campos da natureza conhecidos na época, a gravidade, é geometrizado, e Einstein se torna um cientista popstar. Entretanto, a outra interação fundamental, o **eletromagnetismo**, não possui tal interpretação. Dessa tarefa, ocupou-se o matemático e físico alemão Hermann Weyl. É de sua construção que se trata esse capítulo.

2.2 Relaxando Postulados

Sabemos da História da Matemática que desde a enunciação dos axiomas da geometria feita por Euclides, os matemáticos não encaram com bons olhos o quinto postulado, [15], página 4. Ele não parece ser essencial para a construção da disciplina e a intuição os guiava a tentarem demonstrá-lo a partir dos outros quatro, o que não se mostrava possível. Posteriormente, percebeu-se que era possível abandoná-lo e ainda assim construir objetos geométricos bem definidos, o que tiraria a geometria euclidiana do posto divino de única possível.

Ao notar que o quinto postulado se tratava apenas de uma escolha, não sendo fundamental para uma boa matemática, chegou-se a geometrias mais gerais e em conjunto com uma generalização da teoria de superfícies de Gauss, foi possível atingir a geometria riemanniana, que vimos no capítulo anterior.

A gravitação, descrita pela Relatividade Geral, está ambientada nessa geometria quadridimensional, daí vê-se que os dez graus de liberdade da métrica abrigam toda a informação necessária para descrever essa interação. Então, como seria possível incluir o eletromagnetismo, por meio do 4-potencial, na geometria do espaço-tempo?

A maneira usada por Kaluza-Klein foi a de ampliar a dimensão da variedade e incluir esses novos graus de liberdade na própria métrica da variedade "maior". A seguida por Weyl foi relaxar uma dos axiomas riemannianos e descobrir uma nova teoria que as abarcasse.

Uma característica da geometria euclidiana é que ao transportar paralelamente um dado vetor, ele se mantém com a mesma direção, sentido e norma. O que não acontece no caso riemanniano, em que, como vimos, apesar do transporte paralelo preservar a norma, o que seria sua direção, é modificada, o que é interpretado como efeito da curvatura (lembre que ela é definida como uma diferença de derivadas ao longo de caminhos diferentes)¹.

A moderna geometria diferencial, que é usada em teorias físicas, utiliza, basicamente, o conceito de variedade diferenciável M , uma lei para comparar objetos em pontos diferentes por meio da derivação ou da conexão ∇ e de uma maneira de definir comprimento, norma, produto interno, que é a métrica g . A geometria riemanniana é aquela em que existe uma relação entre o objeto que transporta estruturas e a que mede comprimentos, dada pela relação de compatibilidade, Definição 1.3, e que não possui torção, $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}$.

Vimos no teorema de Levi-Civita 1.1, o milagre dessa geometria: a total dependência da conexão com a métrica. A maneira de incluir novos graus de liberdade encontrada por Weyl foi permitir que a norma do vetor varie ao ser transportado paralelamente por meio das seguintes

Definição 2.1 (Condição de W-compatibilidade) *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ , uma métrica g e um campo de 1-formas σ , chamado campo de Weyl. Dizemos de ∇ é compatível com g no sentido de Weyl (W -compatível) se para toda curva diferenciável $\alpha = \alpha(t)$ e todo par de vetores paralelos X e Y ao longo de α , tivermos*

$$\frac{d}{dt}g(X, Y) = \sigma \left[\frac{d}{dt} \right] g(X, Y), \quad (2.1)$$

onde $\frac{d}{dt}$ denota o vetor tangente a α . (Perceba que o produto interno não é mais constante ao longo da curva).

¹Esse tipo de imagem faz sentido se, por exemplo, considerarmos a variedade riemanniana como uma superfície bidimensional imersa no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , à moda de Gauss.

Proposição 2.1 *Uma conexão ∇ em uma variedade pseudo-riemanniana M é W -compatível com a métrica se e somente se*

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + \sigma[X]g(Y, Z) \quad \forall X, Y, Z \in \chi(M). \quad (2.2)$$

Demonstração: Segue os moldes da proposição 1.1 análoga do capítulo anterior. \square

Que em conjunto com a ausência da torção nos dá o

Teorema 2.1 (Levi-Civita estendido) *Dada uma variedade diferenciável M com uma métrica g e um campo de 1-formas σ . Existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

- (1) *Simétrica,*
- (2) *W -compatível com a métrica.*

Demonstração: Considere $X, Y, Z \in \chi(M)$, então

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + \sigma(X)g(Y, Z), \quad (2.3)$$

$$Yg(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) + \sigma(Y)g(Z, X), \quad (2.4)$$

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) + \sigma(Z)g(X, Y). \quad (2.5)$$

Somando 2.3 com 2.4 e subtraindo de 2.5 e usando a simetria da conexão, é possível mostrar que

$$\begin{aligned} g(Z, \nabla_Y X) &= \frac{1}{2} \{Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y)\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X) + g([X, Y], Z)\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \{\sigma(X)g(Z, Y) + \sigma(Y)g(Z, X) - \sigma(Z)g(X, Y)\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dessa forma, vê-se que caso ∇ exista, está univocamente determinada por essa expressão. Para provar a existência de ∇ , a defina por meio da equação 2.6. É fácil verificar que, dessa maneira, a conexão satisfaz suas condições de definição. \square

Vemos explicitamente o aparecimento dos novos termos através dos coeficientes da conexão, isto é, $\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \partial_\alpha$, pois, $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu}\sigma_\nu + g_{\beta\nu}\sigma_\mu - g_{\mu\nu}\sigma_\beta)$, onde, como sempre, $g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\nu)$ e $\sigma[\partial_\mu] = \sigma_\nu \omega^\nu[\partial_\mu] = \sigma_\nu \delta_\mu^\nu = \sigma_\mu$.

2.2.1 Transformações de gauge

Os graus de liberdade procurados por Weyl para geometrizar o eletromagnetismo podem ser encontrados na 1-forma σ , ao identificá-la com o 4-potencial A . Porém, o campo eletromagnético não é somente uma teoria com um campo vetorial, sabemos que além dessa característica, ele possui a chamada invariância de calibre. Isto é, ao realizar

a transformação interna $A \rightarrow A' = A + df$, a teoria deve ser invariante. Daí, seria interessante que essa geometria pudesse, com alguns ajustes absorver essa característica para a 1-forma σ . Uma das marcas mais bonitas dessa formulação é que nenhum desses ajustes é necessário, a geometria de Weyl é, naturalmente, invariante de calibre.

De fato, pode-se perceber que ao realizar as transformações simultâneas:

$$\begin{aligned}\sigma[U] &\rightarrow \sigma'[U] = \sigma[U] + df[U], \\ g(X, Y) &\rightarrow g(X, Y)' = e^f g(X, Y) \\ &\forall X, Y, U \in \chi(M).\end{aligned}\tag{2.7}$$

A condição de W-compatibilidade permanece inalterada. De fato,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}g(X, Y) &= \sigma \left[\frac{d}{dt} \right] g(X, Y) \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dt}(e^{-f}g'(X, Y)) &= e^{-f}\sigma' \left[\frac{d}{dt} \right] g'(X, Y) - e^{-f}df \left[\frac{d}{dt} \right] g'(X, Y) \Leftrightarrow \\ -e^{-f}\frac{df}{dt}g'(X, Y) + e^{-f}\frac{d}{dt}g'(X, Y) &= e^{-f}\sigma' \left[\frac{d}{dt} \right] g'(X, Y) - e^{-f}\frac{df}{dt}g'(X, Y) \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dt}g'(X, Y) &= \sigma' \left[\frac{d}{dt} \right] g'(X, Y).\end{aligned}\tag{2.8}$$

A condição de W-compatibilidade em conjunto com a ausência de torção é o núcleo da geometria. Portanto, se sua forma é preservada frente a essa transformação, todas as consequências que dela decorrem também se preservam, em particular, a forma dos coeficientes da conexão, isto é, $\Gamma(g', \sigma') = \Gamma(g, \sigma)$. Às diferentes configurações geométricas da variedade, caracterizadas por (g, σ) , ligadas pelas transformações de Weyl acima, damos o nome de *frames*.

Com isso, vemos que essa teoria, além de possuir a invariância por difeomorfismos, que é elemento essencial da Relatividade Geral para satisfazer o Princípio de Covariância Geral; possui a invariância por transformações de gauge para um campo de 1-formas (foi o próprio Weyl que cunhou essas transformações com o nome de "gauge transformations") que inclui o eletromagnetismo; por último, temos a invariância de escala presente na transformação da métrica, essa é uma propriedade procurada em teorias que visam quantizar a gravitação, como a chamada "Conformal Gravity" [16].

Como o tensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu\sigma_\nu - \partial_\nu\sigma_\mu$ é invariante de gauge, vemos que a função escalar $\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ também é invariante. De fato,

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= e^{-2f}\sqrt{-g'}F'_{\mu\nu}F'_{\alpha\beta}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} = \\ &= e^{-2f}e^{2f}\sqrt{-g}F'_{\mu\nu}F'_{\alpha\beta}g'^{\alpha\mu}g'^{\beta\nu} = \sqrt{-g'}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Portanto, a ação de Maxwell do eletromagnetismo abriga naturalmente essa formulação.

Outro ponto a ser chamado a atenção diz respeito à não preservação dos comprimentos. Seja V um campo vetorial do tipo-tempo transportado paralelamente, $DV/dt = 0$, ao longo da curva $\alpha = \alpha(t) : I \rightarrow M$. A função escalar norma ao quadrado de V é definida como $|V(t)|^2 = g(V(t), V(t))$.

Da condição de W-compatibilidade:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(V, V) &= \sigma \left[\frac{d}{dt} \right] g(V, V) \Rightarrow \frac{1}{g(V, V)} \frac{d}{dt}g(V, V) = \sigma \left[\frac{d}{dt} \right] \Leftrightarrow (2.10) \\ \frac{d}{dt} \ln g(V, V) &= \sigma \left[\frac{d}{dt} \right] \Rightarrow \ln g(V(t), V(t)) - \ln g(V(t_0), V(t_0)) = \int_{t_0}^t \sigma \left[\frac{d}{dt'} \right] dt' \Leftrightarrow \\ &g(V(t), V(t)) = g(V(t_0), V(t_0)) \exp \left(\int_{t_0}^t \sigma \left[\frac{d}{dt'} \right] dt' \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Se α for uma curva fechada, isto é, $\alpha(a) = \alpha(b)$; $[a, b] \in I$, então

$$g(V(b), V(b)) = g(V(a), V(a)) \exp \left(\oint_{\alpha} \sigma \left[\frac{d}{dt'} \right] dt' \right). \quad (2.12)$$

Ao longo de um loop, a norma de um vetor transportado não é preservado, esse é justamente o relaxamento de postulado citado no início dessa seção.

2.3 Objeção de Einstein

Ao propor essa unificação do eletromagnetismo com a gravitação, Weyl entusiasmou-se e se comunicou por correspondências com Einstein. Este, a princípio, achou essa formulação muito interessante, a matemática era perfeita e poderosa, com isso, Weyl publicou seu trabalho. Porém, algum tempo depois, o próprio Einstein notou um grave problema que enterou essa geometria por muitos anos, vindo a ser redescoberta para pesquisa recentemente, mas com outro objetivo.

Uma das grandes virtudes possuídas por Einstein era a sua capacidade de pensar um problema do ponto de vista físico antes de entrar com a matemática para ele. Foi assim, por exemplo, com a Relatividade Restrita, ao imaginar como seria a física acompanhando um raio de luz; e na Relatividade Geral, ao pensar nos princípios de Equivalência, Covariância Geral e Mach antes de usar a geometria riemanniana como linguagem. Dessa maneira, ele vislumbrou, apesar da matemática coerente, um problema físico na formulação de Weyl.

Como vimos, a condição de W-compatibilidade, eq. 2.1, para $X = Y = V$, pode ser escrita como $\frac{d}{dt}g(V, V) = \sigma \left[\frac{d}{dt} \right] g(V, V)$.

Seja $g(V, V) = L^2(t)$, a norma ou comprimento do vetor V . Dessa forma, $\frac{d}{dt}L^2 = \sigma \left[\frac{d}{dt} \right] L^2 \Leftrightarrow 2L \frac{dL}{dt} = \sigma \left[\frac{d}{dt} \right] L^2 \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} \sigma \left[\frac{d}{dt} \right] L$.

Cuja solução é:

$$L(t) = L(t_0) \exp \left(\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \sigma \left[\frac{d}{dt'} \right] dt' \right). \quad (2.13)$$

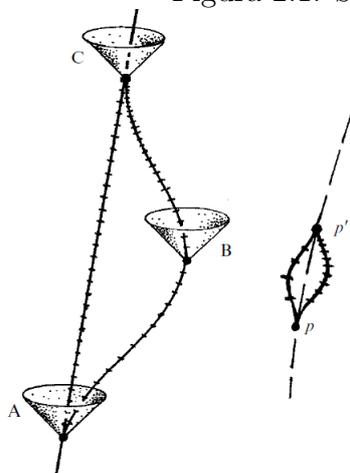
Einstein, então, conjecturou que esse comprimento poderia ser proporcional ao "tique-taque próprio" de um relógio, em outras palavras, à duração de uma oscilação periódica no referencial comóvel da curva cujo vetor tangente é d/dt . Esse tique-taque, claramente, depende da linha de universo desse observador.

Suponha que temos dois desses observadores, digamos A e B , que são átomos de um gás de um mesmo elemento que emitem radiação num padrão espectral conhecido. Suponha que A e B seguem a mesma linha de universo até um dado ponto p . Agora imagine que A permanece em repouso, isso não é perda de generalidade, pois é apenas uma questão de escolha de referencial, enquanto o átomo B segue uma linha de universo diferente. Esse é um experimento de pensamento semelhante ao presente no "paradoxo" dos gêmeos.

A frequência da radiação emitida por A pode ser usada como uma medida de tempo e representar um "tique-taque próprio" desse átomo. Com isso, vemos que, ao seguir trajetórias diferentes, A e B emitirão um espectro de radiação diferente, até aqui tudo bem, pois esse é um fenômeno presente inclusive na Relatividade Restrita.

O problema está no momento em que eles se reencontram num ponto q e seguem o mesmo caminho, pois, como as linhas de universo são diferentes, ou foram diferentes, mesmo ao continuarem juntos, esses átomos continuarão emitindo radiação em frequências diferentes, isto é, seus tique-taques continuarão sendo diferentes, e concluímos que o espectro atômico "enxergará" a história passada de cada um deles. Essa medida espectroscópica é feita utilizando um gás com um número da ordem de 10^{23} átomos, que em geral, tiveram origens diferentes no Cosmos, e portanto, não deveriam apresentar um padrão, uma assinatura espectral, que sabemos existir.

Figura 2.1: Segundo efeito do relógio



FONTE: Penrose [13], 2004, p. 452

Mas há alguma maneira de superar essa incoerência? Sim, esse problema pode ser sanado se a duração dos tique-taques, que é determinado por uma norma, seja função do

ponto e não dependa da trajetória.

Da expressão 2.13, vemos que a dependência do tempo próprio com o caminho se encontra no termo $\int_{t_0}^t \sigma \left[\frac{d}{dt'} \right] dt'$. Do teorema de Stokes [5], sabemos que uma condição necessária e suficiente para essa integral depender apenas dos pontos inicial e final é que σ seja uma 1-forma exata. Isto é, que exista uma função escalar, chamada *campo de Weyl*, $\phi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\sigma = d\phi$, isto é, que o 4-potencial eletromagnético seja um gradiente, $\sigma[V] = V^\mu \sigma_\mu = d\phi[V] = V^\mu \partial_\mu \phi$. A geometria em que isso acontece é chamada de *geometria de Weyl integrável*.

Dessa maneira, a objeção de Einstein é superada. Ora, mas é fácil ver que esse for o caso, o tensor de Maxwell é nulo. De fato, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \sigma_\nu - \partial_\nu \sigma_\mu = \partial_\mu \partial_\nu \phi - \partial_\nu \partial_\mu \phi = 0$, ou seja, não há eletromagnetismo.

O que também pode ser percebido por meio das transformações de Weyl, pois se escolhermos em 2.8 $f = -\phi$, teremos

$$d\phi' = d\phi - d\phi = 0, \quad (2.14)$$

$$g' = e^{-\phi} g. \quad (2.15)$$

Ou seja, o frame $(g, d\phi)$ é equivalente a $(e^{-\phi} g, 0)$, que nada mais é que a geometria riemanniana numa métrica efetiva $e^{-\phi} g$.

Daqui alguém pode se perguntar sobre o caráter inovador de utilizar essa formulação, tendo em vista que, por um lado ganha-se o eletromagnetismo, mas se esbarra com a objeção de Einstein, por outro, o uso da geometria integrável leva simplesmente a uma teoria riemanniana sem eletromagnetismo.

A resposta se encontra em usar a geometria integrável, agora sem mais pensar no campo eletromagnético, mas em incluir um campo escalar à moda das teorias escalares-tensoriais da gravitação, e construir uma teoria que não seja invariante frente às transformações de gauge.

Capítulo 3

A Geometria de Weyl na gravitação

3.1 Introdução

O objetivo desse trabalho é analisar o tema de singularidades no espaço-tempo, isto é, situações em que a teoria física que o descreve mostra-se internamente incoerente. O objeto do primeiro capítulo foi a demonstração de um dos famosos teoremas de Hawking-Penrose, no qual, ao supor que a matéria e energia que compem a natureza não possuem propriedades exóticas, o que pode ser traduzido na linguagem da Cosmologia como a característica de termos uma densidade de energia e pressões do fluido galáctico com a qualidade usualmente tratada em problemas de hidrodinâmica: elas são positivamente definidas; que o Universo esteve, em algum momento, em expansão e que a teoria que rege o espaço-tempo é a Relatividade Geral, concluímos que em algum "instante" da história cósmica, existiu um ponto em que os observadores geodésicos não existiam, um Big Bang.

A Cosmologia usa um modelo homogêneo e isotrópico para a métrica, com isso, é possível mostrar que esse ponto especial é tal que o volume do Universo é nulo, a densidade de matéria-energia, a temperatura são quantidades infinitas, isto é, "tão grandes quanto se queira". A física é construída a partir de leis que são dadas por equações diferenciais, portanto, ela precisa de condições iniciais bem definidas, a partir das quais as soluções são determinadas. Logo, uma teoria que traz, naturalmente, condições iniciais confusas deve ser incompleta [17]. Além disso, se esse ponto de fato existiu, todo o conteúdo universal estava concentrado nele, o que, claramente, contradiz o princípio de incerteza de Heisenberg. Portanto, é razoável esperar que haja algum mecanismo quântico que impeça o surgimento desse tipo de singularidade, essa abordagem por ser feita por meio da Cosmologia Quântica.

Nesse capítulo mostraremos uma maneira de fornecer condições que permitam a fuga das hipóteses do teorema de singularidade sem supor um conteúdo de matéria exótico e sem introduzir um formalismo quântico. O que fizemos foi generalizar as ferramentas do primeiro capítulo para estender, de maneira inédita, o teorema de singularidade para uma

geometria de Weyl integrável. Ao final do capítulo, aplicaremos o resultado obtido em teorias ambientadas nessa geometria.

Na próxima seção, o que faremos é mudar a Relatividade Geral, propor uma teoria diferente, por meio de uma modificação da geometria do espaço-tempo, para uma de Weyl integrável (**WIST**), com o objetivo de introduzir um campo escalar sem massa de maneira não ad hoc, isto é, por um mecanismo legitimamente geométrico.

3.2 Equação de Raychaudhuri em WIST

Vimos que um passo importantíssimo para essa forma de tratamento de singularidades consiste em derivar uma equação de evolução do parâmetro cinemático *fator de expansão* θ , uma equação de Raychaudhuri. Nessa seção, seguiremos a mesma construção da congruência de curvas do capítulo 1, com a diferença que a faremos para curvas gerais, não necessariamente geodésicas, e levando em conta a não-metricidade da geometria de Weyl integrável.

Usaremos um vetor velocidade da congruência normalizado, isto é, $g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = 1 \Rightarrow 0 = (g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu)_{;\alpha} \equiv \phi_\alpha + 2V_\mu V^\mu_{;\alpha}$, portanto,

$$V_\mu V^\mu_{;\alpha} = -\frac{1}{2}\phi_\alpha. \quad (3.1)$$

Também usaremos as seguintes notações $V^\mu \phi_\mu = \dot{\phi}$ e $V^\alpha V^\mu_{;\alpha} = \dot{V}^\mu$. A análise baseada na derivada de Lie do vetor que mede o afastamento da congruência também é válida, pois a relação entre a derivação de Lie e covariante é válida para conexões simétricas, independentemente da não-metricidade [10].

Usando a expressão para o tensor de deformação:

$$Q^\alpha_\nu \doteq h^\alpha_\beta h^\lambda_\nu V^\beta_{;\lambda} = V^\mu_{;\nu} - g_{\alpha\nu} V^\alpha \dot{V}^\mu + \frac{1}{2} \left(V^\mu \phi_\nu - V^\mu g_{\alpha\nu} V^\alpha \dot{\phi} \right), \quad (3.2)$$

podemos fazer a mesma decomposição em fatores irreduzíveis e encontrar equações de evolução para eles. De fato, seja

$$V^\mu_{;\nu\beta} - V^\mu_{;\beta\nu} = R^\mu_{\lambda\nu\beta} V^\lambda. \quad (3.3)$$

Contraindo essa equação com V^β , segue

$$V^\beta (V^\mu_{;\nu})_{;\beta} - V^\beta (V^\mu_{;\beta})_\nu = R^\mu_{\lambda\nu\beta} V^\lambda V^\beta \Leftrightarrow \quad (3.4)$$

$$V^\beta (V^\mu_{;\nu})_{;\beta} - (\dot{V}^\mu)_{;\nu} + V^\mu_{;\beta} V^\beta_{;\nu} = R^\mu_{\lambda\nu\beta} V^\lambda V^\beta. \quad (3.5)$$

Substituindo a equação 3.2 acima e projetando o resultado com o tensor de projeção,

ficamos com

$$\begin{aligned}
 h_\mu^\epsilon h_\gamma^\nu R^\mu_{\lambda\nu\beta} V^\lambda V^\beta &= h_\mu^\epsilon h_\gamma^\nu V^\beta \left[Q^\mu_{\nu} + g_{\alpha\nu} V^\alpha \dot{V}^\mu - \frac{1}{2} \left(V^\mu \phi_\nu - V^\mu g_{\alpha\nu} V^\alpha \dot{\phi} \right) \right]_{;\beta} - \\
 &- h_\mu^\epsilon h_\gamma^\nu (\dot{V}^\mu)_{;\nu} + h_\mu^\epsilon h_\gamma^\nu \left[Q^\mu_{\beta} + g_{\alpha\beta} V^\alpha \dot{V}^\mu - \frac{1}{2} \left(V^\mu \phi_\beta - V^\mu g_{\alpha\beta} V^\alpha \dot{\phi} \right) \right] \times \\
 &\quad \left[Q^\beta_{\nu} + g_{\sigma\nu} V^\sigma \dot{V}^\beta - \frac{1}{2} \left(V^\beta \phi_\nu - V^\beta g_{\sigma\nu} V^\sigma \dot{\phi} \right) \right]. \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Desprezando os termos que são nulos por conta dessa operação de projeção, segue

$$h_\mu^\epsilon h_\gamma^\nu \left[\dot{Q}^\mu_{\nu} + g_{\alpha\nu} \dot{V}^\alpha \dot{V}^\mu - \dot{V}^\mu \phi_\nu - (\dot{V}^\mu)_{;\nu} + Q^\mu_{\beta} Q^\beta_{\nu} \right] = h_\mu^\epsilon h_\gamma^\nu R^\mu_{\lambda\nu\beta} V^\lambda V^\beta. \quad (3.7)$$

Fazendo a decomposição $Q^\mu_{\nu} = \frac{1}{3} h^\mu_{\nu} \theta + \sigma^\mu_{\nu} + \omega^\mu_{\nu}$, vemos que para encontrar a equação de evolução do fator de expansão 3.7, devemos contrair os índices livres. Usando o resultado facilmente verificável $Q^\mu_{\nu} Q^\nu_{\mu} = \frac{1}{3} \theta^2 + 2(\sigma^2 - \omega^2)$ e a equação 3.1, segue a esperada *equação de Raychaudhuri para geometria de Weyl*

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3} \theta^2 + 2(\sigma^2 - \omega^2) - \dot{V}^\mu_{;\mu} - \frac{1}{2} \left(\ddot{\phi} + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + 2\dot{V}^\mu \phi_\mu \right) = R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu, \quad (3.8)$$

Que obviamente recai na expressão riemanniana 1.36 para o campo de Weyl constante. Nesse ponto, vemos que para avançarmos, precisamos de uma teoria cujas equações de campo contenham o tensor de Ricci, constituindo, assim a parte dinâmica dessa análise e que fornece a evolução do fator de expansão.

Como teste para nossa equação, a utilizaremos na chamada teoria WIST, que possui solução bem conhecida para o vácuo e que aborda com força esse tema de singularidade inicial.

3.3 Teoria Gravitacional em WIST (Weyl integrable spacetime)

A teoria mais simples para o campo gravitacional de maneira a incluir um campo escalar geométrico e que recaia na Relatividade Geral para essa campo constante é representada por essa ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R + \xi \phi^\mu_{;\mu}). \quad (3.9)$$

Onde o escalar de curvatura R é construído a partir da conexão de Weyl, ou seja, além de depender da métrica de maneira usual, ele ainda apresenta termos que dependem do campo de Weyl ϕ ; o fator ξ é um parâmetro livre real.

Essa foi uma proposta feita por Mário Novello, na década de 80, que tinha como um

dos resultados, a presença de um Universo homogêneo e isotrópico não-singular. Existe um texto vasto escrito por Novello e Elbaz em que esse modelo para o vazio é detalhado, para o leitor interessado, nele pode-se encontrar interpretações para o papel do campo escalar no início do Universo [18]. Nesta seção obteremos o mesmo comportamento com o uso da nossa equação de Raychaudhuri recém extraída.

Se tomarmos a variação da ação com respeito a ϕ e o tensor métrico g , encontramos as seguintes equações [19]

$$\tilde{\square}\phi = 0, \quad (3.10)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \phi_{,\mu;\nu} - (2\xi - 1)\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \xi\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}g_{\mu\nu} = 0, \quad (3.11)$$

onde $\tilde{\square}\phi$ é o operador de Laplace-Beltrami riemanniano.

A forma para encontrar uma equação de Raychadhuri para esta teoria é feita pelo isolamento do tensor de Ricci, isto pode ser conseguido tomando o traço da equação tensorial. De fato,

$$g^{\mu\nu}[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \phi_{,\mu;\nu} - (2\xi - 1)\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \xi\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}g_{\mu\nu}] = 0 \Leftrightarrow \quad (3.12)$$

$$R = g^{\mu\nu}(\phi_{,\mu;\nu}) + (2\xi + 1)\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} \Leftrightarrow \quad (3.13)$$

$$R = (g^{\mu\nu}\phi_{,\mu})_{;\nu} - (g^{\mu\nu})_{;\nu}\phi_{,\mu} + (2\xi + 1)\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} \Leftrightarrow \quad (3.14)$$

$$R = \phi^{,\mu}_{;\mu} + g^{\mu\nu}\phi_{,\nu}\phi_{,\mu} + (2\xi + 1)\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} \Leftrightarrow \quad (3.15)$$

$$R = \phi^{,\alpha}_{;\alpha} + (2\xi + 2)\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}. \quad (3.16)$$

Substituindo na equação 3.11

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\phi^{,\alpha}_{;\alpha} + (2\xi + 2)\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}] - \phi_{,\mu;\nu} + (2\xi - 1)\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \xi\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}g_{\mu\nu} \Rightarrow \quad (3.17)$$

$$R_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu} = \frac{1}{2}[\phi^{,\alpha}_{;\alpha} + (2\xi + 2)\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}] - \phi_{,\mu;\nu}V^{\mu}V^{\nu} + (2\xi - 1)(\dot{\phi})^2 - \xi\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} \Leftrightarrow \quad (3.18)$$

$$R_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu} = \frac{1}{2}[\phi^{,\alpha}_{;\alpha} + (2\xi + 2)\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}] - (\phi_{\mu}V^{\mu})_{;\nu}V^{\nu} + V^{\mu}_{;\nu}V^{\nu}\phi_{,\mu} + (2\xi - 1)(\dot{\phi})^2 - \xi\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} \quad (3.19)$$

O escalar de Raychaudhuri assume a forma

$$R_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu} = -\ddot{\phi} + \dot{V}^{\mu}\phi_{,\mu} + \frac{1}{2}[\phi^{,\alpha}_{;\alpha} + (2\xi + 2)\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}] + (2\xi - 1)\dot{\phi}^2 - \xi\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}, \quad (3.20)$$

onde definimos $\dot{\phi} \equiv V^{\mu}\phi_{,\mu}$, $\dot{V}^{\mu} \equiv V^{\nu}(V^{\mu})_{;\nu}$, $\ddot{\phi} \equiv V^{\nu}(\dot{\phi})_{;\nu}$.

Vimos que a equação de Raychaudhuri para uma congruência de curvas arbitrárias do tipo-tempo é dada pela equação 3.8. Usando a expressão 3.20, alcançamos o resultado

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 + 2(\sigma^2 - \omega^2) - \dot{V}^{\mu}_{;\mu} - \frac{1}{2}(\ddot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + 2\dot{V}^{\mu}\phi_{,\mu}) +$$

$$+\ddot{\phi} - \dot{V}^\mu \phi_\mu - \frac{1}{2}[\phi^\alpha{}_{;\alpha} + (2\xi + 2)\phi^\alpha \phi_{,\alpha}] - (2\xi - 1)\dot{\phi}^2 + \xi\phi_{,\alpha}\phi^\alpha = 0. \quad (3.21)$$

Para testar nossa equação, vamos tomar exatamente as mesmas hipóteses que Novello toma em seu modelo. Primeiramente, considere que estamos trabalhando com um Universo que é espacialmente homogêneo e isotrópico, o que significa que nossa métrica é FRLW e o campo de Weyl dependem apenas do tempo coordenado, $\phi_\mu = \delta^0_\mu d\phi(t)/dt$, considere também que estamos utilizando um referencial comóvel, $V^\mu = \delta^\mu_0$.

No apêndice A demonstramos as seguintes igualdades

$$\dot{V}^\mu = -\frac{1}{2}(2V^\mu \dot{\phi} - \phi^{;\mu}), \quad (3.22)$$

$$\dot{V}^\mu \phi_{,\mu} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2, \quad (3.23)$$

$$(\dot{V}^\mu)_{;\mu} = -\frac{1}{2}\left[6\frac{\dot{A}}{A}\dot{\phi} - 2\dot{\phi}^2 + 2\ddot{\phi}\right], \quad (3.24)$$

$$\theta = 3\frac{\dot{A}}{A} - \frac{3}{2}\dot{\phi}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\theta^2}{3} = 3\frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{3}{4}\dot{\phi}^2 - 3\frac{\dot{A}}{A}\dot{\phi}, \quad (3.26)$$

$$\phi^\alpha{}_{;\alpha} = -2\phi_{,\alpha}\phi^\alpha. \quad (3.27)$$

Usando esses resultados na equação de Raychaudhuri para WIST, encontramos

$$\begin{aligned} & \left(3\frac{\ddot{A}}{A} - 3\frac{\dot{A}^2}{A^2} - \frac{3}{2}\dot{\phi}^2\right) + \left(3\frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{3}{4}\dot{\phi}^2 - 3\frac{\dot{A}}{A}\dot{\phi}\right) + \left(3\frac{\dot{A}}{A}\dot{\phi} - \dot{\phi}^2 + \ddot{\phi}\right) - \\ & - \frac{1}{2}(\ddot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + 2\dot{V}^\mu \phi_\mu) + \ddot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}[-2\dot{\phi}^2 + (2\xi + 2)\dot{\phi}^2] - (2\xi - 1)\dot{\phi}^2 + \xi\dot{\phi}^2 = 0 \Leftrightarrow \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$3\frac{\ddot{A}}{A} + \dot{\phi}^2\left[\frac{3}{4} - 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}(2\xi + 2) - (2\xi - 1) + \xi\right] = 0 \Leftrightarrow \quad (3.29)$$

$$3\frac{\ddot{A}}{A} + \dot{\phi}^2\left[-2\xi + \frac{3}{2}\right] = 0 \quad (3.30)$$

Sabemos da equação de campo para ϕ que

$$\tilde{\square}\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda(\sqrt{-g}\phi^\lambda) = 0 \Rightarrow (A(t))^3\dot{\phi}(t) = \gamma. \quad (3.31)$$

Onde γ é alguma constante real. Portanto, temos $\dot{\phi} = \gamma A^{-3} \Rightarrow \dot{\phi}^2 = \gamma^2 A^{-6}$. O que implica que a equação 3.30 assume a forma

$$3\frac{\ddot{A}}{A} + \gamma^2 A^{-6}\left[-2\xi + \frac{3}{2}\right] = 0 \Rightarrow \ddot{A} = \frac{\gamma^2}{6}[4\xi - 3]A^{-5}. \quad (3.32)$$

A qual é exatamente a solução de Novello presente na literatura de WIST, para o vácuo com as mesmas hipóteses que tomamos. Bem, se $4\xi - 3 \geq 0$, então $\ddot{A} \geq 0$ e nós temos um

Universo com expansão acelerada. Chamando $\frac{\gamma^2}{6}[4\xi - 3] = A_0^4$, e integrando a equação 3.32, encontramos $\dot{A}^2 = a_0 - [\frac{A_0}{A}]^4$. Vemos que, nesse caso, devemos ter $a_0 \geq 0$, chamando $a_0 = \Omega^4$, vemos que devemos ter a condição $A(t) \geq \Omega A_0$.

Essa equação implica que encontramos um Universo sem singularidade inicial e eternamente em expansão acelerada. Que é exatamente o resultado encontrado por Novello.

3.3.1 Soluções de O'Hanlon-Tupper

Como está explicitado no artigo [20], existe uma equivalência entre WIST, que é contruída no ambiente geométrico de Weyl, e a teoria riemanniana de Brans-Dicke. Como complemento dessa seção, mostraremos um exemplo prático dessa característica. Considere o caso do vácuo, a ação de WIST é

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R + \xi \phi_{;\mu}^{\mu}). \quad (3.33)$$

Vamos realizar uma transformação de Weyl na ação de WIST, para isso, considere $\bar{g}_{\mu\nu} = e^{-f} g_{\mu\nu} \Rightarrow g_{\mu\nu} = e^f \bar{g}_{\mu\nu} \Rightarrow g^{\mu\nu} = e^f \bar{g}^{\mu\nu}$, $\bar{\phi} = \phi - f \Rightarrow \phi = \bar{\phi} + f$, dessa forma, a ação fica (desprezando termos de divergência riemanniana)

$$S = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} e^{2f} \{ e^{-f} \bar{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(g, \phi) - 2\xi e^{-f} \bar{g}^{\mu\nu} (\bar{\phi}_{,\mu} \bar{\phi}_{,\nu} + \bar{\phi}_{,\mu} f_{,\nu} + f_{,\mu} \bar{\phi}_{,\nu} + f_{,\mu} f_{,\nu}) \}. \quad (3.34)$$

Agora fazendo $f = \phi$, vemos que estamos indo do frame (g, ϕ) para $(\bar{g} = e^{-\phi} g, \bar{\phi} = 0)$. Também levando em conta que o tensor de Ricci é invariante frente a transformações de Weyl, temos que $R_{\mu\nu}(g, \phi) = \bar{R}_{\mu\nu}(\bar{g})$, onde chamamos de $\bar{R}_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci riemanniano na métrica \bar{g} . Com isso, ficamos com

$$S = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \{ e^{\phi} \bar{R} - 2\xi e^{\phi} \bar{g}^{\mu\nu} (\phi_{,\mu} \phi_{,\nu}) \}. \quad (3.35)$$

Redefinindo o campo escalar, $e^{\phi} = \Phi \Rightarrow \phi_{,\mu} = \Phi^{-1} \Phi_{,\mu}$, vemos um mapeamento de WIST na teoria de Brans-Dicke (BD) para $\omega = -2\xi$.

A ação de BD é

$$S_{BD} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \Phi R + \omega \frac{1}{\Phi} g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} \right\}. \quad (3.36)$$

Em nossa métrica efetiva, $\bar{g}_{\mu\nu} = e^{-\phi} g_{\mu\nu} = \Phi^{-1} g_{\mu\nu}$, a teoria WIST se torna

$$S_W = \int \sqrt{-\bar{g}} \left\{ \Phi R - 2\xi \frac{1}{\Phi} \bar{g}^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} \right\}. \quad (3.37)$$

Como podemos verificar essa relação em um caso concreto? Bem, conhecemos a solução de BD quando tomamos as mesmas hipóteses que levaram à solução de Novello acima, portanto podemos utilizar esse procedimento nessas equações e verificar se al-

cançaremos as chamadas soluções de O'Hanlon-Tupper para BD.

Nossa equação principal é $\ddot{A} = \frac{\gamma^2}{6}[4\xi - 3]A^{-5}$. Vejamos como fica a métrica efetiva FRLW com seção espacial plana $k = 0$

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t)d\Sigma^2 \implies d\bar{s}^2 = e^{-\phi}dt^2 - e^{-\phi}A^2d\Sigma^2 := d\tau^2 - \bar{A}^2d\Sigma^2. \quad (3.38)$$

Onde $d\tau := e^{-\phi/2}dt$; $\bar{A}(\tau) := e^{-\phi/2}A(t(\tau)) \implies A(\tau) = e^{\phi/2}\bar{A}$. Também temos $\frac{d}{dt} = e^{-\phi} \frac{d}{d\tau}$. Isso implica que

$$\dot{A} = \frac{d}{dt}A(t(\tau)) = e^{-\phi/2} \frac{d}{d\tau}(\bar{A}e^{\phi/2}) = \frac{d}{d\tau}\bar{A} + \frac{\bar{A}}{2} \frac{d\phi}{d\tau} \implies \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \ddot{A} = e^{-\phi/2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d}{d\tau}\bar{A} + \frac{\bar{A}}{2} \frac{d\phi}{d\tau} \right) &= e^{-\phi/2} \frac{d^2}{d\tau^2}\bar{A} + \frac{1}{2}e^{-\phi/2} \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\bar{A}}{d\tau} + \\ &+ e^{-\phi/2} \frac{\bar{A}}{2} \frac{d^2\phi}{d\tau^2}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Mas $e^\phi = \Phi \implies e^\phi \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{d\Phi}{d\tau} \implies \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{d\tau}$.

O que também implica que $\frac{d^2\phi}{d\tau^2} = -\frac{1}{\Phi^2} \left(\frac{d\Phi}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\tau^2}$. Substituindo essas equações, encontramos

$$\ddot{A} = \frac{\gamma^2}{6}[4\xi - 3]A^{-5} \Leftrightarrow \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\Phi}} \frac{d^2}{d\tau^2}\bar{A} + \frac{1}{2\sqrt{\Phi}} \frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{d\tau} \frac{\bar{A}}{d\tau} + \frac{1}{\sqrt{\Phi}} \frac{\bar{A}}{2} \left[-\frac{1}{\Phi^2} \left(\frac{d\Phi}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\tau^2} \right] &= \\ = \frac{\gamma^2}{6}[4\xi - 3]\Phi^{-5/2}(\bar{A})^{-5}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

A outra equação de campo é:

$$\frac{d\phi}{dt} = \gamma A^{-3} \Leftrightarrow e^{-\phi/2} \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\Phi}} \frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{d\tau} = \gamma e^{3\phi/2} \bar{A}^{-3} = \gamma \Phi^{3/2} \bar{A}^{-3}. \quad (3.43)$$

O que faremos agora é a verificação de que $\Phi = \Phi_0 \tau^r$; $\bar{A} = A_0 \tau^q$ são soluções das equações escalar e tensorial.

De fato, a equação escalar $\dot{\phi} = \gamma A^{-3}$ assume a forma

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi_0}} \tau^{-r/2} \frac{1}{\Phi_0} \tau^{-r} r \Phi_0 \tau^{r-1} = \gamma \Phi_0^{-3/2} \tau^{-3r/2} A_0^{-3} \tau^{-3q}. \quad (3.44)$$

Os coeficientes de τ fornecem, $\Phi_0^{-1/2} r = \gamma \Phi_0^{-3/2} A_0^{-3} \implies \gamma = r A_0^3 \Phi_0 \implies \gamma^2 = r^2 A_0^6 \Phi_0^2$. Igualando os expoentes de τ temos, $-r/2 - 1 = -3r/2 - 3q \implies 3q = -r + 1 \implies q = (1-r)/3$, que é justamente a relação presente na solução de O'Hanlon-Tupper.

Também usando que $-2\xi = \omega$, encontramos, a partir da equação 3.42

$$\begin{aligned} \Phi_0^{-1/2} A_0 \tau^{q-2-r/2} \left\{ q(q-1) + \frac{1}{2} r q - \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{2} r(r-1) \right\} = \\ = \Phi_0^{-1/2} A_0 \tau^{-5r/2-5q} \left\{ -\frac{r^2}{6} [2\omega + 3] \right\}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Os expoentes são iguais pois $-5r/2 - 5q = -5r/2 - 5(1-r)/3 = -5r/6 - 5/3 = q - 2 - r/2$. Igualando os coeficientes, encontramos

$$q(q-1) + \frac{1}{2} r q - \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{2} r(r-1) = -\frac{r^2}{6} [2\omega + 3] \iff \left[\omega + \frac{4}{3} \right] r^2 - \frac{2}{3} r - \frac{2}{3} = 0. \quad (3.46)$$

A solução para essa equação é trivial

$$r = \frac{\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{8\omega+12}{3}}}{2 \left[\omega + \frac{4}{3} \right]}. \quad (3.47)$$

O que pode ser mostrado como equivalente à igualdade

$$r^{-1} = -\frac{1}{2} [1 \pm \sqrt{3(2\omega + 3)}]. \quad (3.48)$$

Que são exatamente os expoentes encontrados nas soluções de O'Hanlon-Tupper presentes na literatura, por exemplo, em [21].

Nessa seção vimos que nossa equação de Raychaudhuri generalizada para uma geometria de Weyl reproduz o conhecido resultado de WIST no vácuo, que é o desaparecimento da singularidade inicial, para certos valores de seu parâmetro livre (além de expansão acelerada do fator de escala)

$$\ddot{A} = \frac{\gamma^2}{6} [4\xi - 3] A^{-5}. \quad (3.49)$$

Não existe solução exata para essa equação diferencial, no máximo ela pode ser escrita em termos de integrais elípticas. Porém, ao observar o mapeamento que pode ser feito de WIST em Brans-Dicke, alcançamos as também conhecidas soluções de O'Hanlon-Tupper

$$A(t) = A_0 t^q, \quad (3.50)$$

$$\Phi(t) = \Phi_0 t^r, \quad (3.51)$$

$$q = \frac{1}{3} (1 - r), \quad (3.52)$$

$$r^{-1} = -\frac{1}{2} [1 \pm \sqrt{3(2\omega + 3)}]. \quad (3.53)$$

É importante notar que enquanto o caso WIST é manifestamente não-singular para $4\xi - 3 = -2\omega - 3 > 0 \iff 2\omega + 3 < 0$, essa é a condição oposta para se ter bem definidas as

soluções de O'Hanlon-Tupper, o que é esperado, pois estas são manifestamente singulares.

3.3.2 Soluções para poeira

A próxima análise natural, que consiste numa generalização do que acabamos de abordar, é o caso de um espaço-tempo com conteúdo de matéria. Vamos para um caso cosmológico bastante simples, que é num tensor momentum-energia da poeira $T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu$. Seguindo a nossa prescrição, a ação de WIST para uma lagrangeana de matéria arbitrária L_m é

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R + \xi \phi^{;\mu}_{;\mu} + e^{-2\phi} L_m(e^{-\phi} g)). \quad (3.54)$$

Onde usamos a prescrição de construir a lagrangeana de matéria invariante por transformações de gauge, isto é, ao invés de usar o acoplamento mínimo que toma a lagrangeana da relatividade especial e substitui a métrica de Minkowski por uma geral g e as derivadas usuais por covariantes riemannianas, nós trocamos $\eta \rightarrow e^{-\phi} g$ e as derivadas agora usam a conexão de Weyl. Seguindo esse princípio, é fácil ver que a conexão entre WIST e Brans-Dicke se mantém. Nessa seção seremos mais econômicos na abertura de contas, pois acreditamos que o leitor tornou-se suficientemente familiarizado com nosso método na seção anterior.

Para o elemento de linha

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right), \quad (3.55)$$

as equações de campo são idênticas às de [19] para poeira, pois apesar de não explicitar conscientemente essa prescrição invariante para a matéria, nesse artigo, pelo menos para a poeira, a sua prescrição coincide com a nossa:

$$-3 \left(\frac{\dot{A}}{A} \right)^2 - 3 \frac{k}{A^2} = \frac{\lambda}{2} \dot{\phi}^2 - \rho, \quad (3.56)$$

$$-2 \frac{\ddot{A}}{A} - \left(\frac{\dot{A}}{A} \right)^2 - \frac{k}{A^2} = -\frac{\lambda}{2} \dot{\phi}^2, \quad (3.57)$$

$$\frac{1}{A^3} \frac{d}{dt} (A^3 \dot{\phi}) = -\frac{1}{2\lambda} \rho. \quad (3.58)$$

Onde $\lambda = \frac{4\xi-3}{2}$, $\rho = \rho_0 \frac{e^{-\phi/2}}{A^3}$. Realizando a mudança de variáveis $\Psi \equiv e^{-\phi/2}$, temos

$$\left(\frac{\dot{A}}{A} \right)^2 + \frac{k}{A^2} = -\frac{2\lambda}{3} \left(\frac{\dot{\Psi}}{\Psi} \right)^2 + \rho_0 \frac{\Psi}{3A^3}, \quad (3.59)$$

$$2 \frac{\ddot{A}}{A} + \left(\frac{\dot{A}}{A} \right)^2 + \frac{k}{A^2} = 2\lambda \left(\frac{\dot{\Psi}}{\Psi} \right)^2, \quad (3.60)$$

$$\frac{1}{A^3} \frac{d}{dt} \left(A^3 \frac{\dot{\Psi}}{\Psi} \right) = \frac{1}{4\lambda} \rho_0 \frac{\Psi}{A^3}. \quad (3.61)$$

Busquemos por soluções do tipo lei de potência com $k = 0$

$$A(t) = A_0 t^p \quad ; \quad \Psi(t) = \Psi_0 t^q. \quad (3.62)$$

Substituindo nas equações de campo acima encontramos

$$p = \frac{4\lambda}{6\lambda - 1} \quad ; \quad q = \frac{2}{6\lambda - 1}. \quad (3.63)$$

Assim como na seção passada, realizamos a transformação na métrica 3.38 $ds^2 = dt^2 - A^2(t)d\Sigma^2 \implies d\bar{s}^2 = e^{-\phi} dt^2 - e^{-\phi} A^2 d\Sigma^2 := d\tau^2 - \bar{A}^2 d\Sigma^2$, e como já temos a solução exata do problema anterior, fica trivial realizar a transformação

$$t = \left(\frac{6\lambda + 1}{6\lambda - 1} \Psi_0^{-1} \tau \right)^{\frac{6\lambda+1}{6\lambda-1}}, \quad (3.64)$$

$$\bar{A}(\tau) = \bar{A}_0 \tau^{\frac{2(2\lambda+1)}{6\lambda+1}} \quad ; \quad \bar{A}_0 = A_0 \Psi_0^{\frac{2\lambda-1}{6\lambda+1}} \left(\frac{6\lambda + 1}{6\lambda - 1} \right)^{\frac{4\lambda+2}{6\lambda+1}}. \quad (3.65)$$

Usando as identidades $\lambda = \frac{4\xi-3}{2} = -(\omega + \frac{3}{2})$, caímos nessa conhecida solução, que toma as mesmas hipóteses que consideramos, encontrada em [9]

$$\bar{A}(\tau) = \bar{A}_0 \tau^{\frac{2(\omega+1)}{3\omega+4}}. \quad (3.66)$$

Em um apêndice, atacaremos de maneira mais qualitativa e cuidadosa a questão da mudança de frames nas teorias escalares-tensoriais da gravitação, o significado da interpretação desse tema feita por Dicke, mas sob a ótica da não-metricidade; mostraremos também uma geometrização dos chamados frames de Jordan e Einstein o como fica a questão das singularidades sob essas mudanças.

3.4 Generalizando o teorema de singularidade

A análise que fizemos da estrutura causal do espaço-tempo fazia menção à geometria riemanniana. Porém, sabemos que como na geometria de Weyl integrável, sempre é possível ir para o frame riemanniano, onde o campo de Weyl é nulo, e a métrica é conformalmente relacionada à anterior, e que a estrutura causal do espaço-tempo é invariante frente a transformações conformes, segue-se que a análise topológica puramente cinemática feita no primeiro capítulo se mantém intacta na presente formulação.

Logo, é possível encontrar teoremas análogos aos de Hawking-Penrose, que mostram que o espaço-tempo é singular, a depender da teoria. Vimos acima que a solução de

WIST para o vazio é não-singular apenas para um certo intervalo do parâmetro livre ξ . Logo, um complemento natural para esse estudo é procurar se existem valores de ξ para o qual, no caso de matéria e energia não-exótica mais geral possível, o Universo colapsa (independentemente da métrica). Esses poderiam constituir valores proibidos para ξ de WIST (se o pesquisador quiser evitar singularidades) e como consequência, tendo em vista sua relação com a teoria de Brans-Dicke, para ω . Vale salientar que a equação de Raychaudhuri só garante a existência de singularidades sem exigir a métrica da variedade. Para trabalhar com sua inexistência é sempre necessário fornecer o modelo de matéria-energia e métrica.

Nesse capítulo, nós deduzimos uma equação de Raychaudhuri para uma congruência de curvas parametrizadas pelo comprimento de arco, o que é equivalente à condição de normalização do vetor tangente à congruência. Usamos essa equação parametrizada dessa maneira para testá-la em modelos cujo vetor velocidade (por exemplo, o que aparece no tensor momentum-energia do fluido perfeito) seja unitário, como foi o caso do modelo não-singular de WIST para o vazio, em que é utilizado $V^\mu * = \delta^\mu_0$.

Por outro lado, vimos no primeiro capítulo a construção e demonstração de um dos teoremas de singularidade para a teoria riemanniana da Relatividade Geral. Para isso, demonstramos esse teorema por absurdo usando o resultado de que as curvas geodésicas (nessa geometria) parametrizadas pelo comprimento de arco têm a propriedade de maximizarem localmente essa função comprimento de arco. Logo, pensando de maneira pragmática, apenas com o objetivo de estender o teorema, sem motivação física a priori, precisamos utilizar, numa possível generalização, curvas especiais que tenham a propriedade de maximizar alguma função, usar o fato de que em uma variedade globalmente hiperbólica o espaço das curvas que ligam dois pontos fixos é compacto, portanto temos assegurada a existência de máximo local, e usar o mesmo argumento do teorema de Hawking-Penrose para demonstrar essa generalização por absurdo, esse é o caminho.

À primeira vista, o leitor poderia propor que fossem utilizadas geodésicas de Weyl como uma generalização natural do que fizemos e simplesmente utilizá-las na equação de Raychaudhuri. Essa é uma aposta ingênua, pois como vemos na expressão 3.1, a utilização do comprimento de arco como parâmetro leva a

$$V_\mu V^\mu_{;\alpha} = -\frac{1}{2}\phi_{,\alpha} \Leftrightarrow g\left(V, \frac{DV}{ds}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d\phi}{ds}, \quad (3.67)$$

ou seja, a condição de geodésica que utilizamos $\frac{DV}{ds} = 0$ levaria a $\frac{d\phi}{ds} = 0$, o que é um absurdo para um campo de Weyl não trivial. Essa expressão significa que as únicas curvas compatíveis com a parametrização do comprimento de arco (normalização da velocidade) e a equação acima são as "geodésicas riemannianas".¹

¹Usamos as aspas para enfatizar que, apesar da nomenclatura, essas não são geodésicas verdadeiras dessa geometria, pois ela somente utiliza os símbolos de Christoffel.

Como estamos pensando somente em encontrar uma classe de curvas que maximizem alguma função, podemos muito bem utilizá-las na equação de Raychaudhuri e realizar a análise de sinal de uma desigualdade diferencial para o fator de expansão θ . O problema dessa análise surge por conta da presença de termos sobre os quais não podemos fazer qualquer tipo de juízo, como a divergência do vetor velocidade, a equação assume um aspecto muito complicado.

Essa tarefa poderia ser simplificada se utilizássemos geodésicas de Weyl e encontrássemos algum funcional que fosse maximizado por essas curvas. Mais adiante, mostraremos que essa função existe e é justamente o parâmetro \bar{s} permitido para que possamos escrever a equação de geodésica canônica $\frac{DV}{d\bar{s}} = 0$.

Definimos o *comprimento de arco (tempo próprio) invariante* de t_0 a t_1 uma curva $t \mapsto \alpha(t)$ como

$$\bar{s}_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\phi(t)/2} \left[g \left(\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right) \right]^{1/2} dt. \quad (3.68)$$

A função *comprimento de arco (tempo próprio) invariante* de uma curva $t \mapsto \alpha(t)$ é uma aplicação

$$t \longmapsto \bar{s}(t) = \int_{t_0}^t e^{-\phi(t)/2} \left[g \left(\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right) \right]^{1/2} dt. \quad (3.69)$$

Com esse parâmetro, é fácil reconhecer que qual é a nova norma do vetor à curva $\bar{s} \mapsto \alpha(\bar{s})$. Para $\frac{d\alpha}{d\bar{s}} = V$, onde $d\bar{s} \doteq e^{-\phi/2} ds$, então

$$g(V, V) = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\bar{s}} \frac{dx^\nu}{d\bar{s}} = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} e^\phi \Rightarrow \quad (3.70)$$

$$g(V, V) = e^\phi. \quad (3.71)$$

Onde usamos o resultado conhecido $g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 1$. Com isso, derivando a expressão acima e usando a condição de W-compatibilidade 2.2

$$\frac{d}{d\bar{s}} g(V, V) = 2g \left(V, \frac{DV}{d\bar{s}} \right) + d\phi \left[\frac{d}{d\bar{s}} \right] g(V, V). \quad (3.72)$$

Mas, da normalização vemos que

$$\frac{d}{d\bar{s}} g(V, V) = \frac{d\phi}{d\bar{s}} e^\phi. \quad (3.73)$$

Logo,

$$2g \left(V, \frac{DV}{d\bar{s}} \right) + \frac{d\phi}{\bar{s}} e^\phi = \frac{d\phi}{d\bar{s}} e^\phi \Rightarrow g \left(V, \frac{DV}{d\bar{s}} \right) = 0. \quad (3.74)$$

Portanto, a equação de geodésica $\frac{DV}{d\bar{s}} = 0$ é compatível com essa parametrização.

A equação de Raychaudhuri derivada anteriormente utiliza como parâmetro o comprimento de arco, daí, para trabalhar com geodésicas de Weyl é necessário derivar uma nova

equação de Raychaudhuri no parâmetro \bar{s} .

Uma maneira alternativa de derivar essa equação no parâmetro comprimento de arco consiste em partir de sua expressão riemanniana, tratá-la como ambientada em um frame de Riemann na geometria de Weyl e realizar transformações de gauge para um frame arbitrário e tomar o cuidado de escrever a equação no parâmetro comprimento de arco anterior (pois ele também sofre com a transformação de Weyl).

De maneira similar, podemos partir de

$$Q^\mu{}_\nu = h^\mu{}_\alpha h^\beta{}_\nu V^\alpha{}_{;\beta}, \quad (3.75)$$

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} + 2(\sigma^2 - \omega^2) = R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu. \quad (3.76)$$

Como a parametrização com o comprimento de arco invariante é igual à do comprimento de arco usual no frame de Riemann, a equação de Raychaudhuri weylana para a congruência de geodésicas parametrizadas por \bar{s} possui a mesma forma da contraparte riemanniana

$$\frac{d\theta(\bar{s})}{d\bar{s}} + \frac{\theta^2(\bar{s})}{3} + 2(\sigma^2(\bar{s}) - \omega^2(\bar{s})) = R_{\mu\nu} V^\mu(\bar{s}) V^\nu(\bar{s}). \quad (3.77)$$

Onde o tensor de Ricci acima é weyliano.

Agora, devemos estender a proposição de maximização do comprimento de arco das "geodésicas riemannianas" para a maximização do comprimento de arco invariante para geodésicas de Weyl.

3.4.1 Quatro peças do quebra-cabeça - Parte II

Definição 3.1 *Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ no ponto t_0 ; se γ é uma geodésica de t , para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma geodésica.*

Também definimos a aplicação exponencial da mesma forma anterior

$$\exp : U \subset TM \rightarrow M \quad (3.78)$$

$$(q, v) \mapsto \exp(q, v) = \gamma(1, q, v). \quad (3.79)$$

A homogeneidade geodésica se mantém [4], pois não mudamos a definição de geodésica. Portanto, a exponencial tem a interpretação de, fixando o ponto $q \in M$, e como $\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma \left(e^{-\phi/2}|v|, q, e^{\phi/2} \frac{v}{|v|} \right)$, ela representa um ponto que passa por uma geodésica no valor de seu parâmetro dado por $e^{-\phi/2}|v|$, cujo vetor velocidade é dado por $e^{\phi/2} \frac{v}{|v|}$ e tem norma ao quadrado e^ϕ , portanto é parametrizado pelo comprimento de arco invariante.

Como não mudamos nada do que foi feito no capítulo 1, pois ele foi escrito com uma linguagem muito poderosa, a relação da aplicação exponencial com os campos de Jacobi

e os pontos conjugados se mantêm. A forma das equações é a mesma, só é necessário lembrar que nossa conexão é de Weyl, portanto o tensor de curvatura e a equação de Jacobi envolvem o campo escalar ϕ .

Para generalizar a proposição 1.4 de maximização do comprimento de arco, precisamos do seguinte:

Lema 3.1 *Seja M uma variedade de Weyl com métrica g e campo de Weyl ϕ . Se $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ é uma superfície parametrizada dada por $(t, s) \mapsto f(t, s) = \exp_p tv(s)$, $0 \leq t \leq 1$, $-\epsilon \leq s \leq \epsilon$, onde $s \mapsto v(s)$ é uma curva em $T_p M$ com $v(0) = v$, $v'(0) = w$, $g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) = e^{\phi(t,s)}$. Então $g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0$.*

Demonstração: Com o uso da condição de W-compatibilidade, para todo $(t, s) \in A$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} e^{-\phi(t,s)} g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) = \\ = & e^{-\phi} g\left(\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) + e^{-\phi} g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}\right) + d\phi \left[\frac{\partial}{\partial t}\right] e^{-\phi} g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial \phi}{\partial t} e^{-\phi} g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \end{aligned} \quad (3.80)$$

Para $f(t, s) = \exp_p tv(s) = \gamma(1, q, tv(s)) = \gamma(t, q, v(s))$, $f(t, s_0)$ é uma geodésica, portanto

$$\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (3.81)$$

Como a conexão é simétrica e vale o Lema de simetria [4],

$$\begin{aligned} & g\left(\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) = g\left(\frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) = \\ & \frac{1}{2} \left[\frac{D}{\partial s} g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) - d\phi \left[\frac{\partial}{\partial s}\right] g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \phi}{\partial s} e^\phi - \frac{\partial \phi}{\partial s} e^\phi \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Usando esses resultados encontramos que

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-\phi(t,s)} g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) = d\phi \left[\frac{\partial}{\partial t}\right] e^{-\phi} g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial \phi}{\partial t} e^{-\phi} g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0. \quad (3.83)$$

Logo, $e^{-\phi(t,s)} g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)$ é independente de t .

Como $d(\exp_p)_{tv}(v) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, 0)$ e também $d(\exp_p)_{tv}(tw) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$, então, como a diferencial é linear $d(\exp_p)_{tv}(tw) = td(\exp_p)_{tv}(w)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} e^{-\phi(t,0)} g\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t, 0), \frac{\partial f}{\partial t}(t, 0)\right) = \lim_{t \rightarrow 0} e^{-\phi(t,0)} g(d(\exp_p)_{tv}(v), d(\exp_p)_{tv}(tw)) = 0. \quad (3.84)$$

Isso nos permite concluir que $e^{-\phi(t,s)} g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0$, e como a exponencial de uma função nunca se anula, encontramos o resultado procurado $g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0 \forall (t, s) \in A$. \square

Com esse resultado em mãos e lembrando que a aplicação exponencial continua sendo

um difeomorfismo local numa vizinhança da origem de $T_p M$, podemos usar a mesma notação argumentos semelhantes para generalizar a proposição 1.4.

Proposição 3.1 *Sejam $p \in M$, U uma vizinhança normal de p , e $B \subset U$ uma bola normal de centro em p . Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ um segmento de geodésica com $\gamma(0) = p$. Se $c : [0, 1] \rightarrow M$ é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$, então $\bar{s}(\gamma) \geq \bar{s}(c)$ e se a igualdade vale, então $\gamma([0, 1]) = c([0, 1])$.*

Demonstração: Segue o mesmo molde da proposição análoga riemanniana, que nada mais é que o uso da manifestação do teorema de Pitágoras para o espaço-tempo de Minkowski, em que ao invés de ser a soma, é a diferença do quadrado dos catetos de um triângulo retângulo que é igual ao quadrado de sua hipotenusa. Como \exp_p é um difeomorfismo, a curva $t \mapsto c(t)$ pode ser escrita em coordenadas polares como $c(t) = \exp_p(r(t)v(t)) = f(r(t), t)$, daqui, segue que

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.85)$$

No caso anterior $g\left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r}\right) = 1$, aqui $g\left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r}\right) = e^\phi$, pois tratamos $t \mapsto r(t) = \bar{s}(\gamma(t))$. Daí, com o uso do lema acima, temos que $g\left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0$. Assim como no teorema do primeiro capítulo, $g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \leq 0$, então

$$\left|\frac{dc}{dt}\right|^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial r}\right|^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|^2 = e^\phi \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|^2 \leq e^\phi \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \Rightarrow \quad (3.86)$$

$$e^{-\phi/2} \left|\frac{dc}{dt}\right| \leq \frac{dr}{dt} \Rightarrow \int_{\epsilon \rightarrow 0}^1 e^{-\phi/2} \left|\frac{dc}{dt}\right| dt \leq \int_{\epsilon \rightarrow 0}^1 \frac{dr}{dt} dt. \quad (3.87)$$

Como tratamos $t \mapsto r(t) = \bar{s}(\gamma(t))$ e $r(1) = \bar{s}(\gamma)$, concluimos que

$$\bar{s}(c) \leq \bar{s}(\gamma). \quad (3.88)$$

A discussão quanto à igualdade é idêntica à presente em [4]. \square

Seguindo esse espírito de generalizar os teoremas riemannianos para a geometria de Weyl por meio da métrica efetiva, também temos uma generalização do teorema D.2. Restando apenas expandir o que foi feito no apêndice D.

Teorema 3.1 *Seja M uma variedade lorentziana, $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva do tipo-tempo que conecta um ponto $p \in M$ a um ponto q pertencente a uma hipersuperfície Σ . Então a condição necessária e suficiente para que γ maximize localmente o comprimento de arco invariante entre p e Σ é que γ seja uma geodésica ortogonal a Σ sem pontos conjugados a Σ entre Σ e p .*

E da proposição 1.5

Proposição 3.2 *Seja M uma variedade lorentziana que satisfaz $R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \leq 0$ para todo vetor tipo-tempo V . Seja Σ uma hipersuperfície tipo-espaço com traço da curvatura extrínseca $K = \theta < 0 \forall q \in \Sigma$. Então para um comprimento de arco invariante $\bar{s} \leq 3/|K|$, existe um ponto p conjugado a Σ ao longo da geodésica γ ortogonal a Σ e que passa por q . Se γ puder estendida tão longe.*

Podemos estender todos os teoremas discutidos no primeiro capítulo por meio dessa análise invariante. Inclusive a relação entre o escalar de Raychaudhuri θ e a curvatura extrínseca da subvariedade ortogonal à congruência geodésica. De fato, definimos essa curvatura extrínseca como um tensor misto $K_\nu^\mu = h^\mu_\alpha h^\beta_\nu V^\alpha_{;\beta}$, que para o caso de uma congruência de geodésicas ortogonais à hipersuperfície Σ e parametrizadas pelo comprimento de arco invariante fornece $K_\nu^\mu = V^\mu_{;\nu}$. Portanto, o traço desse tensor é a função θ , ou seja, $K = K_\alpha^\alpha = \theta$.

Como essa análise é invariante, o termo σ^2 na geometria de Weyl, com essas condições, ainda é positivamente definido e ω^2 é zero.

Com isso, a desigualdade de Raychaudhuri para $R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \leq 0$ se mantém

$$\frac{d\theta(\bar{s})}{d\bar{s}} + \frac{1}{3}\theta^2(\bar{s}) \leq 0. \quad (3.89)$$

Além disso, como as transformações de Weyl afeta a métrica conformalmente, o cone de luz e a estrutura causal não é afetada, não modificando o conteúdo do estudo de topologia diferencial do primeiro capítulo, com as únicas alterações vindo por meio da troca da maximização do comprimento de arco por sua contraparte invariante.

Teorema 3.2 *Seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Seja $p \in M$, Σ uma superfície de Cauchy e defina $C(\Sigma, p)$ como o conjunto de curvas causais direcionadas ao futuro a partir de Σ a p . Então existe uma curva $\gamma \in C(\Sigma, p)$ para a qual o comprimento de arco invariante atinge seu valor máximo em $C(\Sigma, p)$. Além disso, γ deve ser uma geodésica ortogonal a Σ sem pontos conjugados a Σ entre Σ e p .*

Segue o teorema de singularidade generalizado:

Teorema 3.3 *Seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico com $R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \leq 0$ para todo vetor tipo-tempo V . Suponha que existe uma superfície de Cauchy tipo-espaço Σ para a qual o traço de sua curvatura extrínseca (para a congruência ortonormal de geodésicas direcionadas ao passado) satisfaz $K \leq C < 0$ em toda a superfície, onde C é uma constante.*

Então, nenhuma curva tipo-tempo direcionada ao passado, a partir de Σ , pode ter comprimento de arco invariante maior do que $3/|C|$. Em particular, todas as geodésicas tipo-tempo direcionadas ao passado são incompletas.

Demonstração: Vamos demonstrar por absurdo. Suponha que existe uma curva tipo-tempo λ , a partir de Σ , com comprimento de arco invariante maior que $3/|C|$. Seja p um ponto dessa curva que está definido além desse comprimento invariante. Vimos que como o conjunto das curvas que ligam dois pontos de uma variedade globalmente hiperbólica é compacto, a função comprimento de arco invariante deve ter um valor máximo para uma dada curva, que, pelo teorema 3.2 é uma geodésica. Portanto, deve haver uma geodésica (com comprimento invariante maior que $3/|C|$) ligando p a Σ . Pelo Teorema 3.2, isso significa que não há pontos conjugados entre p e Σ . Mas pela Proposição 3.2 e a relação 1.66 apresentada na seção 1.4.5 entre o escalar de Raychaudhuri e o campo de Jacobi, temos que γ deve possuir pontos conjugados entre p e Σ . O que é um absurdo. À vista disso, a curva original λ não pode existir. \square

No caso da Relatividade Geral, a hipótese $R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \leq 0$ é idêntica à condição de energia $T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu - \frac{1}{2}T \geq 0$, que é válida os tensores momentum-energia conhecidos, em particular, para o fluido perfeito nada mais é que o requerimento de que a densidade de energia e pressão não sejam exóticas, isto é, que sejam sempre quantidades positivas. Para a geometria de Weyl, a depender da teoria, podemos ter requerimentos físicos diferentes. Por exemplo, para WIST, encontramos que

$$R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = -\frac{d^2\phi}{d\bar{s}^2} + (2\xi - 1) \left(\frac{d\phi}{d\bar{s}}\right)^2 - e^{-\phi} \left(T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu - \frac{1}{2}|V|^2T + \frac{1}{4\lambda}|V|^2T\right), \quad (3.90)$$

onde $\lambda = (4\xi - 3)/2$. Um espaço-tempo singular pode ser atingido ao se pedir três condições distintas $\frac{d^2\phi}{d\bar{s}^2} \equiv \ddot{\phi} \geq 0$, $2\xi - 1 \leq 0$, $T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu - \frac{1}{2}|V|^2T + \frac{1}{4\lambda}|V|^2T \geq 0$. Que podem ser satisfeitas ou quebradas para o fluido perfeito, uma métrica e campo de Weyl homogêneos e isotrópicos, por exemplo.

Para a teoria de Brans-Dicke Geométrico, que é outro exemplo de física construída na geometria de Weyl [22], cuja ação é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} (R + \omega \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha} + k^* e^{-\phi} L_m(e^{-\phi} g, \Psi, \nabla \Psi)). \quad (3.91)$$

Onde a lagrangeana de matéria é construída da mesma maneira que WIST, de maneira invariante por transformações de gauge, e Ψ são os campos não-gravitacionais. As equações de campo dessa teoria são

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -k^*T_{\mu\nu} - \omega \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + \frac{\omega}{2}g_{\mu\nu} \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha}, \quad (3.92)$$

$$R + 3\omega \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha} + 2\omega \square \phi = k^*T. \quad (3.93)$$

Tomando o traço da equação tensorial encontramos

$$R + \omega \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha} = k^*T. \quad (3.94)$$

Substituindo na mesma equação encontramos que

$$R_{\mu\nu} = -k^* T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} k^* T - \omega \phi_\mu \phi_\nu. \quad (3.95)$$

Observe que encontramos uma expressão muito limpa para

$$R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = -k^* \left(T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu - \frac{1}{2} |V|^2 T \right) - \omega \dot{\phi}^2. \quad (3.96)$$

Que em conjunto com as condições de energia usuais leva a uma equação de Raychaudhuri da forma

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} + 2\sigma^2 + \omega \dot{\phi}^2 = -k^* \left(T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu - \frac{1}{2} |V|^2 T \right) \leq 0. \quad (3.97)$$

Como $\sigma^2 \geq 0$, se o parâmetro $\omega \geq 0$, encontramos $\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} \leq 0$ e segue o teorema de singularidade. As condições para que esse espaço-tempo seja singular é mais simples e fácil de avaliar do que da teoria WIST.

Essa é uma generalização bastante natural e simples de um dos teoremas de Hawking-Penrose e que apesar de possuir a componente geométrica invariante, isto é, idêntica ao caso riemanniano, as teorias física utilizadas não o são, necessitando, assim, de hipóteses físicas adicionais e diferentes das do primeiro capítulo.

Também podemos ter uma modificação de sua interpretação física, pois no caso anterior tínhamos encontrado uma incompletude geodésica no parâmetro comprimento de arco, que possui um significado físico claro de representar o tempo medido por um observador comóvel a essa curva, o tempo próprio. Essa incompletude significava que esse observador não mediria nenhum tempo após um certo intervalo finito, implicando que ele era um *observador singular*.

No nosso caso, acredito que ainda não há um consenso acerca da interpretação física do comprimento de arco invariante, exceto em Brans-Dicke Geométrico, em que é deixado bem claro que o tempo próprio é o invariante. Como a definição dessa quantidade é uma escolha, uma hipótese adicional da teoria, poderíamos, em princípio, escolher tanto o comprimento de arco usual, que normaliza do vetor velocidade e permite "geodésicas riemannianas", como a sua contraparte invariante, cuja extremização é efetuada pelas geodésicas verdadeiras, as de Weyl. Mas essa é uma discussão a ser realizada a posteriori. Naturalmente, espera-se que se essa análise for levada à Relatividade Geral Mascarada (veja apêndice C), o resultado não deve diferir do primeiro capítulo, pois até mesmo o tempo próprio é definido dessa maneira invariante, assim como toda a teoria.

Capítulo 4

Conclusão

Nessa dissertação, mostramos que o espaço-tempo possível de ser incluído na Relatividade Geral é singular sem precisarmos levar em conta a simplicidade ou possíveis simetrias de algum modelo. Entre as opções disponíveis para fugir dessa característica está a suposição de que há um conteúdo exótico de matéria no Universo, o que se resume em quebrar as condições de energia. Para fornecer uma contribuição inédita na literatura dos teoremas de singularidade, não seguimos essa via e preservamos as propriedades regulares de matéria-energia, mas propusemos uma modificação da dinâmica gravitacional, ao considerar a possibilidade de se ter um espaço-tempo de Weyl integrável, no qual não há o problema do *segundo efeito do relógio*. Outra motivação por trás dessa escolha está na possível interpretação geométrica de efeitos quânticos, em que o campo de não-metricidade é responsável por definir o potencial de Bohm-de Broglie [23], o que talvez possa nos aproximar da cosmologia quântica.

Recuperamos por meio de uma equação de Raychaudhuri weyliana a solução cosmológica não-singular presente em [18] para a teoria WIST. Como um resultado extra, descobrimos um mapeamento dessa teoria na de Brans-Dicke [24] e recuperamos algumas soluções presentes em [19], esse assunto é discutido com maiores detalhes interpretativos no apêndice B, em que damos uma visão geométrica e unificadora da interpretação de Dicke [25] para mudança de frames Jordan-Einstein.

Expandimos o teorema de singularidade para a geometria de Weyl integrável e verificamos que, dentre as três teorias gravitacionais utilizadas, *WIST*, *Brans-Dicke Geométrico* e *Relatividade Geral mascarada* (apêndice C), a primeira é a que fornece mais liberdade para se ter um espaço-tempo não-singular; a segunda é certamente singular a depender do sinal do seu parâmetro livre; a terceira, como é a Relatividade Geral num frame de Weyl, então é, necessariamente, singular.

Para perspectivas futuras, poderemos trabalhar em uma possível generalização do teorema de singularidade para a geometria de Weyl não-integrável, o que acreditamos que deva passar por uma escolha do parâmetro invariante apropriado para a congruência geodésica. O que também pode iluminar a definição do tempo próprio e ajudar a contornar

a objeção de Einstein para essa geometria, o problema do segundo efeito do relógio. Outro passo seguinte natural é a extensão da análise de singularidades sob a ótica da cosmologia quântica, isto é, um desenvolvimento do formalismo ADM, bem como a busca de uma solução da equação de Wheeler-DeWitt para variedades de Weyl.

Apêndice A

Derivação de alguns resultados

Vamos mostrar que para a métrica FRLW, um campo de velocidades comóvel e um campo escalar dependente do tempo, uma série de resultados usados no capítulo 3 vale.

Mostremos que $\dot{V}^\mu = -\frac{1}{2}(2V^\mu\dot{\phi} - \phi^{,\mu})$. De fato,

$$\dot{V}^\mu = V^\nu(V^\mu)_{;\nu} = V^\nu V^\mu_{;\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} V^\nu V^\alpha. \quad (\text{A.1})$$

Para $V^\mu = \delta^\mu_0$; $\phi_{,\mu} = \delta^\mu_0 \dot{\phi}$; $ds^2 = dt^2 - A(t)^2 d\Sigma^2$

$$\dot{V}^\mu = \Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(g_{0\lambda,0} + g_{0\lambda,0} - g_{00,\lambda}) - \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(g_{0\lambda}\phi_0 + g_{0\lambda}\phi_0 - g_{00}\phi_\lambda) = \quad (\text{A.2})$$

$$= \frac{1}{2}(g^{\mu 0}\dot{\phi} + g^{\mu 0}\dot{\phi} - \phi^{,\mu}) = -\frac{1}{2}(2V^\mu\dot{\phi} - \phi^{,\mu}). \quad (\text{A.3})$$

Agora devemos mostrar que $\dot{V}^\mu\phi_{,\mu} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$. De fato,

$$\dot{V}^\mu\phi_{,\mu} = -\frac{1}{2}(2V^\mu\phi_{,\mu}\dot{\phi} - \phi^{,\mu}\phi_{,\mu}) = -\frac{1}{2}(2\dot{\phi}^2 - \dot{\phi}^2) = \quad (\text{A.4})$$

$$= -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2. \quad (\text{A.5})$$

Agora devemos mostrar que $(\dot{V}^\mu)_{;\mu} = -\frac{1}{2}(6\frac{\dot{A}}{A}\dot{\phi} - 2\dot{\phi}^2 + 2\ddot{\phi})$. De fato,

$$(\dot{V}^\mu)_{;\mu} = -\frac{1}{2}(2V^\mu\dot{\phi} - \phi^{,\mu})_{;\mu} = -\frac{1}{2}(2V^\mu_{;\mu}\dot{\phi} + 2V^\mu\dot{\phi}_{;\mu} - \phi^{,\mu}_{;\mu}). \quad (\text{A.6})$$

Calculemos o primeiro termo $V^\mu_{;\mu}$

$$V^\mu_{;\mu} = V^\mu_{,\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu}V^\nu = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha})\delta^\nu_0 - \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\mu}\phi_\nu + g_{\alpha\nu}\phi_\mu - g_{\mu\nu}\phi_\alpha)\delta^\nu_0 \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\mu,0} + g_{\alpha 0,\mu} - g_{\mu 0,\alpha}) - \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\mu}\phi_0 + g_{\alpha 0}\phi_\mu - g_{\mu 0}\phi_\alpha) \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g_{\alpha\mu,0} - \frac{1}{2}(4\dot{\phi} + \dot{\phi} - \dot{\phi}) = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g_{\alpha\mu,0} - 2\dot{\phi} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{A^2} \delta^{ij} \delta_{ij} (A^2)_0 - 2\dot{\phi} = 3 \frac{\dot{A}}{A} - 2\dot{\phi}. \quad (\text{A.10})$$

Sabemos que a equação de campo para ϕ em WIST é $\phi^{;\mu}_{;\mu} = -2\phi^{;\alpha}\phi_{;\alpha} = -2\dot{\phi}^2$. Usando esses resultados em A.6, encontramos o resultado almejado

$$(\dot{V}^\mu)_{;\mu} = -\frac{1}{2} \left(6 \frac{\dot{A}}{A} \dot{\phi} - 4\dot{\phi}^2 + 2\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}^2 \right) = -\frac{1}{2} \left(6 \frac{\dot{A}}{A} \dot{\phi} - 2\dot{\phi}^2 + 2\ddot{\phi} \right). \quad (\text{A.11})$$

Agora, vamos calcular quanto vale o fator de expansão θ

$$\theta = Q^\mu_{\mu} = h^\alpha_{\beta} V^\beta_{;\alpha} = (\delta^\alpha_{\beta} - V^\alpha V_\beta) V^\beta_{;\alpha} = V^\mu_{\mu} - V_\beta \dot{V}^\beta. \quad (\text{A.12})$$

Usando A.10 e 3.1, encontramos

$$\theta = 3 \frac{\dot{A}}{A} - \frac{3}{2} \dot{\phi}. \quad (\text{A.13})$$

O item $\theta^2/3$ segue trivialmente:

$$\frac{\theta^2}{3} = 3 \frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{3}{4} \dot{\phi}^2 - 3 \frac{\dot{A}}{A} \dot{\phi}. \quad (\text{A.14})$$

Aqui vemos o aparecimento explícito do campo de Weyl, pois é bem conhecido da Relatividade Geral que esse escalar de Raychaudhuri envolve somente o primeiro termo acima.

Apêndice B

Mudança de Frames

Aqui, abordamos questões interpretativas a respeito da mudança de frames na teoria de Brans-Dicke.

Como pode ser visto em [9], temos duas maneiras de abordar as teorias escalares-tensoriais, em particular a teoria de Brans-Dicke. A primeira abordagem é aquela em que os pesquisadores se deparam ao começarem a estudar essa teoria, e que foi a que nós tratamos ao longo desse texto, que consiste em considerar a ação da forma

$$S = \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} (\Phi R - \frac{\omega}{\Phi} g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} + 16\pi L_m). \quad (\text{B.1})$$

Nesse apêndice usaremos a notação seguida por [9], que consiste em tomar o escalar de curvatura com o sinal oposto ao que utilizamos ao longo do texto e um sistema de unidades que traz a constante que faz o acoplamento com a matéria da forma da ação acima. Essa teoria possui equações de campo que nascem a partir da variação em relação à métrica g e à função escalar Φ

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\Phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\Phi^2} (\Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Phi_{,\alpha} \Phi^{,\alpha}) + \frac{1}{\Phi} (\Phi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square \Phi), \quad (\text{B.2})$$

$$\square \Phi = \frac{8\pi}{2\omega + 3} T, \quad (\text{B.3})$$

onde $T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} (\sqrt{-g} L_m)$.

Com essa estrutura, vemos o grande diferencial que essa teoria trouxe, que é o acoplamento não-mínimo da geometria riemanniana com a função escalar via o termo ΦR na ação. Também percebemos a ausência da constante gravitacional G . Bem, esse era o objetivo de Carl H. Brans e Robert H. Dicke ao propor essa teoria, tornar G um campo, $G \propto 1/\Phi$, isto é, tratar a intensidade da interação gravitacional como uma variável que dependa do ponto do espaço-tempo descrito. Nesse sentido, essa seria uma formulação mais Machiana do que a Relatividade Geral (RG).

Notou-se que era possível, através de transformações simples na métrica e no campo

escalar, mudar o acoplamento de Φ com a geometria e voltar para a forma canônica da Relatividade Geral, com a presença de um G constante e Φ desempenhando o papel de um conteúdo de matéria, essas transformações são

$$\bar{g}_{\mu\nu} = G\phi g_{\mu\nu}, \quad (\text{B.4})$$

$$\bar{\phi} = \sqrt{\frac{2\omega + 3}{16\pi G}} \ln\left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right), \quad (\text{B.5})$$

onde $\omega > -3/2$ e $\phi_0^{-1} = G$. A nova ação assume a forma da RG

$$S = \int d^4x \left\{ \sqrt{-g} \left[\frac{\bar{R}}{16\pi G} - \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\phi}_{,\mu} \bar{\phi}_{,\nu} + \exp\left(-8\sqrt{\frac{\pi G}{2\omega + 3}} \bar{\phi}\right) L_m(\bar{g}/G\Phi) \right] \right\}. \quad (\text{B.6})$$

Note que o acoplamento estranho ΦR foi transferido para a lagrangeana de matéria.

O primeiro caso, com acoplamento não-mínimo define o chamado *frame de Jordan*, FJ , pois Pascual Jordan, a partir de 1959, começou a desenvolver esse formalismo escalar-tensorial; enquanto o segundo define o *frame de Einstein*, FE , pois nesse caso, a ação e as equações de campo assumem a forma da Relatividade Geral, com a acreção de uma matéria escalar.

Nesse ponto, os pesquisadores, que notaram que o mesmo problema apresentava resultados diferentes, começaram a se perguntar: afinal, qual frame corresponde à realidade física, qual é o frame físico? Faraoni trata desse tema em seu livro [9] e no artigo [26]. Como é deixado bem claro, a maior parte da literatura do assunto traz o frame de Einstein como físico, pois, entre outras características, ele tem o termo de energia cinética positivamente definido na aproximação de campo fraco, diferentemente do outro frame.

Claro que esse é apenas um "lado da moeda", o frame de Jordan também possui seus defensores. O fato é que Faraoni também traz à tona a existência de um terceiro ponto de vista, um que foi defendido pelo próprio Dicke no artigo [25]. A terceira via é a de que os dois frames são, na verdade, equivalentes.

Ao realizar a transformação conforme na métrica, vemos que o elemento de linha ou tempo próprio também é transformado. De fato, se

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{B.7})$$

então sob a transformação $g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} = G\Phi g_{\mu\nu}$,

$$ds^2 \rightarrow \bar{d}s^2 = \Omega^2 ds^2 \equiv \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \Omega^2 dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{B.8})$$

Seguindo o raciocínio de Dicke, a física não poderia depender da escolha das unidades de medida usadas e não somente para o caso em que, globalmente, se aumente ou diminua a escala das réguas e relógios, mas essa deveria ser uma característica que valesse mesmo

se o reescalonamento mudasse de ponto para ponto, isto é, fosse local. Uma maneira simples de matematizar essa ideia foi escolher uma função escalar, suave, positivamente definida, que fosse responsável por esse mapeamento, essa é a função $\Omega^2(x) = G\Phi(x)$ acima.

O elemento de linha transformado é claramente diferente do antigo. O que, pode-se pensar, levaria a uma teoria completamente diferente do espaço-tempo. Porém, se redefinirmos o tempo e o espaço da forma

$$d\bar{t} = \Omega dt, \quad (\text{B.9})$$

$$d\bar{x}^i = \Omega dx^i, \quad (\text{B.10})$$

$$d\bar{s}^2 = g_{\mu\nu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu. \quad (\text{B.11})$$

Logo, se considerarmos que réguas e relógios não possuem escalas fixas, mas podem variar dependendo do ponto do espaço-tempo por meio do campo $\Omega^2 = G\Phi$, vemos que, sob essa interpretação, os frames de Jordan e Einstein são equivalentes na teoria de Brans-Dicke.¹

Resumo: No FJ, as unidades de tempo-espaço-matéria são constantes enquanto que a constante gravitacional é variável; no frame de Einstein a constante gravitacional volta a ser constante e sua dependência do ponto é transferida para os objetos que sentem sua interação, o espaço, o tempo e a matéria. A coerência é mantida.

B.1 Geometrização dos frames

Nessa seção, mostraremos como ambientar os diferentes frames da teoria de Brans-Dicke em uma linguagem puramente geométrica por meio de uma identificação dessas diferentes configurações com os gauges naturais de uma geometria de Weyl, em que o campo escalar passa a carregar uma interpretação geométrica. Com essa visão, a constante de acoplamento que mede a intensidade da interação gravitacional, G , que na teoria de Brans-Dicke passa a ser um campo, ganha a interpretação de medir o caráter não-riemanniano do espaço-tempo por meio da não-metricidade do campo escalar. A análise que mostraremos a seguir é inédita.

A teoria de Brans-Dicke no frame de Jordan é ambientada numa geometria riemanniana, como sabemos que sempre é possível, dado uma frame na geometria de Weyl, realizar transformações de gauge e atingir um frame riemanniano, podemos imaginar a situação inversa e desenhar o frame de Jordan como ambientado em uma geometria de Weyl, mas num frame riemanniano. Avancemos com esse raciocínio e vejamos até onde ele nos leva.

¹Outras grandeza que sofrem com esse reescalonamento são a massa das partículas e os campos de matéria [26]. Assim, as constantes fundamentais: velocidade da luz, que envolve dimensões de espaço por tempo, a constante de Planck, carga eletrônica, são invariantes.

Se na ação B.1, imaginarmos que estamos em um frame riemanniano $(g, 0)$, realizemos a transformação de Weyl

$$(g, \phi = 0) \rightarrow (e^{\phi - \phi_0} g, \phi - \phi_0) = (\bar{g}, \phi - \phi_0) \equiv (\bar{g}, \ln \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \right)), \quad (\text{B.12})$$

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^{\phi - \phi_0} g_{\mu\nu} \equiv G \Phi g_{\mu\nu}; \quad e^\phi = \Phi; \quad e^{-\phi_0} = G, \quad (\text{B.13})$$

$$\bar{\phi} = 0 + \phi - \phi_0 \Leftrightarrow \bar{\phi} = \ln \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} \right), \quad (\text{B.14})$$

$$g_{\mu\nu} = e^{-(\phi - \phi_0)} \bar{g}_{\mu\nu}; \quad g^{\mu\nu} = e^{\phi - \phi_0} \bar{g}^{\mu\nu}. \quad (\text{B.15})$$

Feito isso, vemos que a ação transformada assume a forma:

$$S = \int d^4x \frac{\sqrt{-\bar{g}}}{16\pi} \left\{ e^{\phi_0} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{R}_{\mu\nu} - \omega e^{\phi_0} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\phi}_{,\mu} \bar{\phi}_{,\nu} + 16\pi e^{-2\bar{\phi}} L_m(e^{-\bar{\phi}} \bar{g}) \right\}. \quad (\text{B.16})$$

Vimos no capítulo sobre geometria de Weyl que as componentes da conexão são invariantes frente a transformações de gauge, como consequência disso, o tensor de Riemann e o escalar de Ricci também o são. Daí, é trivial concluir que o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ no frame riemanniano $(g, 0)$ possui o mesmo valor que sua contraparte na geometria de Weyl no frame $(\bar{g} = e^{\phi - \phi_0} g, \bar{\phi} = \phi - \phi_0)$, ou seja, queremos dizer que o $\bar{R}_{\mu\nu}(e^{-(\phi - \phi_0)} \bar{g})$ que aparece na expressão acima é igual ao tensor de Ricci $\bar{R}_{\mu\nu}^{W E Y L}(\bar{g}, \bar{\phi})$. Dessa forma, a ação de Brans-Dicke sob uma transformação de Weyl, assume a conhecida forma de *WIST*

$$S = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left\{ \frac{1}{16\pi G} \bar{R}^{W E Y L} - \frac{\omega}{16\pi G} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\phi}_{,\mu} \bar{\phi}_{,\nu} + e^{-2\bar{\phi}} L_m(e^{-\bar{\phi}} \bar{g}) \right\}. \quad (\text{B.17})$$

Essa é ação de *WIST* a menos de constantes multiplicativas (e da, já citada, diferença de sinal da curvatura) que podem ser absorvidas pelos campos ou por uma escolha conveniente de unidades. Bem, mas isso nós já sabíamos, pois já realizamos o procedimento inverso de sair do frame de Weyl, chegar no riemanniano e encontrar a teoria de Brans-Dicke.

Para comparar essas transformações com as realizadas na seção anterior, devemos ter atenção e perceber que o escalar de curvatura que aparece em B.6 é riemanniana, ou seja, é construído somente com os símbolos de Christoffel para a métrica \bar{g} , enquanto que o da equação acima possui contribuições do campo de Weyl, daí, para podermos efetivamente comparar as duas ações devemos absorvê-las no termo cinético.

Chamemos $\bar{R}_{\mu\nu}^{W E Y L} \equiv (\bar{R}_{\mu\nu})_W$ e sua parte riemanniana de $(\bar{R}_{\mu\nu})_R$. Como isso, fazemos a decomposição presente em [18], mas com a correção na definição da curvatura:

$$(\bar{R}_{\mu\nu})_W = (\bar{R}_{\mu\nu})_R + \bar{\phi}_{,\mu|\nu} + \frac{1}{2} \bar{\phi}_{,\mu} \bar{\phi}_{,\nu} + \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} (\tilde{\square} \bar{\phi} - \bar{\phi}_{,\lambda} \bar{\phi}^{,\lambda}) \implies \quad (\text{B.18})$$

$$(\bar{R})_W = (\bar{R})_R + 3\tilde{\square} \bar{\phi} - \frac{3}{2} \bar{\phi}_{,\mu} \bar{\phi}^{,\mu}, \quad (\text{B.19})$$

onde $\bar{\phi}_{,\mu||\nu}$ é a derivação covariante puramente riemanniana (na métrica \bar{g} , é claro). Desprezando termos de divergência riemanniana $\sqrt{-\bar{g}}\bar{\square}\bar{\phi}$, encontramos

$$S = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left\{ \frac{1}{16\pi G} \bar{R}_R - \frac{1}{2} \left(\frac{3+2\omega}{16\pi G} \right) \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\phi}_{,\mu} \bar{\phi}_{,\nu} + e^{-2\bar{\phi}} L_m(e^{-\bar{\phi}} \bar{g}) \right\}. \quad (\text{B.20})$$

Redefinindo

$$\varphi \equiv \sqrt{\frac{2\omega+3}{16\pi G}} \bar{\phi}; \quad e^{-\bar{\phi}} = e^{\phi_0 - \phi} = 1/G\Phi. \quad (\text{B.21})$$

Encontramos uma ação idêntica à de Brans-Dicke no frame de Einstein B.6

$$S = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left\{ \frac{1}{16\pi G} \bar{R}_R - \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} + \exp \left(-8 \sqrt{\frac{\pi G}{2\omega+3}} \varphi \right) L_m(\bar{g}/G\Phi) \right\}. \quad (\text{B.22})$$

Dessa maneira, podemos concluir que as chamadas transformações de frames na teoria de Brans-Dicke ganham uma interpretação bastante natural se vistas sob a ótica da geometria de Weyl integrável. Além disso, vemos com clareza a geometrização da constante gravitacional.

De acordo com [9], grande parte da literatura, com respeito a estas transformações, não utiliza a terceira interpretação que citamos acima, isto é, não considera as *unidades variáveis de espaço-tempo-matéria*. Considera que o que se faz é um mapeamento de uma teoria riemanniana no FJ em outra de mesmo caráter geométrico no FE, o que leva a divergências fortes, como a violação do princípio de equivalência no frame de Einstein, em que, se, inicialmente, tem-se uma geodésica no FJ, não se chega em uma geodésica no FE, com o aparecimento de uma quinta força desconhecida.

O que nós fizemos foi ambientar o frame de Jordan em uma frame geométrico de Riemann na geometria de Weyl, utilizar as transformações de gauge naturais dessa geometria, desacoplar o campo escalar com a curvatura, e chegar em um frame de Einstein ou o geométrico frame de Weyl.

Tendo em vista que essas são transformações intrínsecas a essa geometria, ou seja, que geometricamente, os frames são equivalentes, vemos que a terceira interpretação de Dicke [25] é naturalmente matematizada e ambientada, onde a imagem das *running units* do frame de Einstein nada mais é do que a manifestação física da não-metricidade, por exemplo, as geodésicas riemannianas são mapeadas em geodésicas de Weyl e o princípio de equivalência é preservado.

Algumas últimas palavras sobre esse tema dizem respeito ao fato de que no artigo [18] utiliza-se a justificativa de uma perturbação das *réguas e relógios* do sistema de unidades no espaço-tempo de Minkowski como um mecanismo para a formação do Universo e que essa perturbação seria executada pelo campo de Weyl. Portanto, vê-se que já havia essa interpretação para a não-metricidade, apesar de que, aparentemente, não tenha sido feita essa ligação com a interpretação de Dicke.

Toda essa análise é feita do ponto de vista clássico, mas assim como é apontado por Faraoni [9], a equivalência de frames não parece se manter quanticamente, o que, sob a nossa ótica, indica que as transformações de Weyl não comutam com as leis quânticas.

Apêndice C

Relatividade Geral Mascarada

Uma das grandes revoluções provocadas pela Relatividade Geral é o fato de ela ser uma teoria essencialmente geométrica, ou seja, diferentemente do que havia, e passou a ter, no conjunto das teorias físicas, cujos objetos fundamentais são os campos, na RG seus objetos dinâmicos são geométricos.

O desejo de covariância geral de Einstein o levou naturalmente ao ambiente da geometria riemanniana, que, como vimos, é a generalização mais simples da geometria Euclidiana e de superfícies, e cujos objetos intrínsecos são invariantes por transformações de coordenadas.

Algo que ajudou bastante Einstein na busca de sua teoria foi a formulação de Minkowski da Relatividade Especial, em que toda aquela construção de invariância da física por transformações de Lorentz do espaço e do tempo era unificada em uma única formulação geométrica no chamado espaço-tempo de Minkowski. Um relaxamento desse espaço na direção de lhe dar curvatura não-nula é um dos pilares da RG, ou seja, à medida que se generalizou a geometria do espaço-tempo, conseguiu-se uma teoria mais completa e que caía no caso anterior, já mais bem estruturada, por uma escolha particular dos objetos geométricos envolvidos. Em outras palavras, pode-se pensar que a RE nada mais é do que a RG em que a curvatura riemanniana é nula. Nessa linha, pode-se perguntar se é possível generalizar ainda mais a RG de maneira a incluir fenômenos novos por meio de uma generalização ainda maior do ambiente geométrico em que o espaço-tempo está definido. Como sabemos da existência de outras geometrias, como a de Weyl, por exemplo, vamos mostrar que resultados encontramos por meio dessa linha de raciocínio.

Lembramos que a ação de Einstein-Hilbert é [10] $S = \int d^4x \sqrt{-g} R$, logo esperamos algo parecido para o nosso caso. Porém, um dos requerimentos que pediremos é que a teoria obedeça às mesmas simetrias que a geometria de Weyl. Assim como a teoria riemanniana é construída por meio de objetos que são invariantes frente a difeomorfismos, que define o grupo de invariância riemanniano, devemos esperar que uma teoria formalizada com a

geometria de Weyl integrável seja invariante frente a

$$\begin{aligned}\bar{g}_{\mu\nu} &= e^f g_{\mu\nu}, \\ \bar{\phi} &= f + \phi.\end{aligned}\tag{C.1}$$

Uma ação invariante que inclua constante cosmológica e matéria e que será o objeto fundamental de nossa teoria é

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} (R + 2e^{-\phi} \Lambda + e^{-\phi} k L_m) \ ; \ k = \frac{8\pi G}{c^4}.\tag{C.2}$$

Algumas considerações devem ser feitas acerca da definição da lagrangeana de matéria L_m . Na RG ela é construída seguindo a prescrição do acoplamento mínimo com a relatividade especial, em que a métrica de Minkowski dá lugar à uma métrica geral g da variedade e as derivadas parciais são substituídas por derivadas covariantes. No nosso caso, a prescrição será a substituição, na lagrangeana da relatividade especial, de $\eta_{\mu\nu} \rightarrow e^{-\phi} g_{\mu\nu}$ e as derivadas parciais são substituídas por derivadas covariantes com a métrica $e^{-\phi} g_{\mu\nu}$. Dessa maneira, garantimos a invariância de toda a ação. O tempo próprio também é afetado por essa prescrição, de maneira que ele assume a forma $\Delta\tau = \int e^{-\phi/2} (g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda})^{1/2}$. A extremização desse tempo próprio dá origem às equações de movimento de uma partícula num campo gravitacional, que são exatamente as equações de geodésicas da geometria de Weyl quando o campo de não-metricidade é $\sigma = d\phi$.

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \{\alpha_{\mu\nu}\} - \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (g_{\rho\mu} \phi_\nu + g_{\rho\nu} \phi_\mu - g_{\mu\nu} \phi_\rho) \Big] \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0,\tag{C.3}$$

onde $\phi_\mu := \partial_\mu \phi$.

Podemos deixar a ação em uma forma bem mais interessante realizando a decomposição do escalar de curvatura em uma parte puramente riemanniana \tilde{R} , ou seja, que depende apenas dos símbolos de Christoffel, e em uma parte que dependa do campo de Weyl. De fato, $R = \tilde{R} - 3\Box\phi + \frac{3}{2} g^{\mu\nu} \phi_\mu \phi_\nu$. Também podemos redefinir o campo de Weyl $e^{-\phi} := \Phi$ e retirar termos de divergência, com isso, a ação fica

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\Phi \tilde{R} - \frac{3}{2\Phi} g^{\mu\nu} \Phi_\mu \Phi_\nu + 2\Lambda \Phi^2 + \kappa \Phi^2 L_m).\tag{C.4}$$

As equações de campo podem ser obtidas da ação acima por sua extremização em relação às variáveis métrica e campo de Weyl. Dessa forma, encontramos duas equações

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} + \Lambda \Phi g_{\mu\nu} + \frac{3}{2\Phi^2} (\Phi_\mu \Phi_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Phi_\alpha \Phi^\alpha) - \frac{1}{\Phi} (\Phi_{\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \Box \Phi),\tag{C.5}$$

$$\tilde{R} + 3 \frac{\Box \Phi}{\Phi} - \frac{3}{2\Phi^2} \Phi_\alpha \Phi^\alpha = \kappa T - 4\Phi \Lambda.\tag{C.6}$$

É fácil ver que as equações acima não são independentes, a segunda é o traço da primeira. Essa característica é devida à invariância da teoria frente a transformações de gauge.

C.1 Semelhança com a Teoria de Brans-Dicke

A teoria de Brans-Dicke é uma das generalizações mais frutíferas da Relatividade Geral, além de possuir um acervo de discussões extenso na literatura. Seu nascimento está ligado à ideia de tornar a constante gravitacional de Newton variável com o tempo coordenado. Além de impor um acoplamento desse novo campo escalar com a geometria por meio do escalar de curvatura, também é interessante introduzir uma dinâmica para ele. Sua formulação como uma teoria de campo se faz através da ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\Phi R + \frac{\omega}{2} g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} + 2\Lambda + \kappa^* L_m) ; \quad \kappa^* = \frac{8\pi}{c^4}, \quad (\text{C.7})$$

onde o campo $\Phi = 1/G$.

Vemos uma semelhança entre a teoria de acabamos de desenvolver na seção anterior e a Brans-Dicke. Podemos tornar essa semelhança mais evidente ao comparar as equações de campo:

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = -\frac{\kappa^*}{\Phi} T_{\mu\nu} - \frac{\omega}{\Phi^2} (\Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Phi_{,\alpha} \Phi^{,\alpha}) - \frac{1}{\Phi} (\Phi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square \Phi), \quad (\text{C.8})$$

$$\tilde{R} - 2\omega \frac{\square \Phi}{\Phi} + \frac{\omega}{\Phi^2} \Phi_{,\alpha} \Phi^{,\alpha} = 0. \quad (\text{C.9})$$

Comparando as equações de campo das duas teorias, vemos que elas são idênticas para o caso em que o parâmetro $\omega = -3/2$, $\Lambda = 0$, e tensor momentum-energia tem traço nulo, lembrarmos que $\kappa = G\kappa^*$. Também deve-se levar em conta que devemos redefinir o tensor momento-energia. De fato, seja T^w o tensor momentum-energia da teoria da geometria de Weyl e T^{BD} o da teoria de Brans-Dicke.

Ao chegar nesse ponto, alguém pode pensar, o que acaba de ser feito é elegante, mas se for levada em conta a simetria de gauge que a teoria possui, vemos que para o caso da Geometria de Weyl integrável pode-se sempre anular o campo de não-metricidade e incluí-lo na definição da métrica, de tal forma que temos uma condição de compatibilidade riemanniana $\nabla_{\alpha}(e^{-\phi} g_{\mu\nu}) = 0$. Logo, essa teoria nada mais é que uma Relatividade Geral "mascarada", ou seja, escrita em uma geometria de Weyl, mas que possui os mesmos resultados físicos que sua contraparte riemanniana. A inclusão do campo, apesar de didática, apenas complica a teoria ao introduzir um grau de liberdade desnecessário.

Uma aplicação dessa teoria está justamente na sua identificação com a teoria de Brans-Dicke. Pois a partir disso, pode-se concluir, por exemplo, sem grandes dificuldades, que

se o parâmetro $w = -3/2$ e o traço do tensor momento energia for nulo, a teoria é conformalmente equivalente à Relatividade Geral. Daí, tira-se também que é possível realizar transformações no campo de Brans-Dicke e na métrica de forma a torná-la mais simples e usar os resultados conhecidos da RG para solucionar problemas em Brans-Dicke. De fato, fizemos isso que será explicitado na próxima seção.

C.2 A solução de Brans-Dicke para o vácuo

Alguém pode se perguntar, é possível usar esse formalismo da geometria de Weyl para resolver problemas da teoria de Brans-Dicke? A resposta é sim.

Sabemos que a teoria que estamos desenvolvendo é invariante frente às transformações de gauge, logo é possível sairmos de um "frame" com para um sem campo de Weyl.

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow e^{-\phi} g_{\mu\nu} := \Phi g_{\mu\nu}, \quad (\text{C.10})$$

$$\phi \longrightarrow -\phi + \phi = 0 \Rightarrow \Phi \longrightarrow \Phi^{-1}\Phi = 1, \quad (\text{C.11})$$

$$(M, g, \phi) \longrightarrow (M, \hat{g} = e^{-\phi}g, 0) \iff (M, g, \Phi) \longrightarrow (M, \hat{g} = \Phi g, 1). \quad (\text{C.12})$$

Dessa forma, as equações de campo assumem a forma da Relatividade Geral para uma métrica efetiva, cujas soluções para um Universo homogêneo e isotrópico são as equações de Friedmann. Se $ds^2 = dt^2 - \left[\frac{R(t)}{1 + \frac{1}{4}kr^2} \right]^2 d\Sigma^2$, então

$$d\hat{s}^2 = e^{-\phi(t)} dt^2 - e^{-\phi(t)} \left[\frac{R(t)}{1 + \frac{1}{4}kr^2} \right]^2 d\Sigma^2. \quad (\text{C.13})$$

Tomando $k = 0$ e definindo $d\tau^2 := e^{-\phi(t)} dt^2$ e $\hat{R}(\tau(t)) := e^{-\phi(t)} R(t)$, chegamos à conclusão de que

$$\hat{G}_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\tau} \hat{R} = 0 \Rightarrow \quad (\text{C.14})$$

$$\sqrt{\Phi(t)} R(t) = \text{constante}. \quad (\text{C.15})$$

Constituindo, assim, uma classe de soluções equivalentes.

As conhecidas soluções de O'Hanlon-Tupper para a teoria de Brans-Dicke, com $\omega = -3/2$, são

$$R(t) = R_0 t, \quad \Phi(t) = \Phi_0 t^{-2}. \quad (\text{C.16})$$

Sendo apenas uma das infinitas possíveis soluções.

C.3 Conclusões

Ao utilizar a ideia de invariância por mudança de "frames" na seção anterior, percebemos que ela permite escrever as equações numa forma em que o campo de Weyl é nulo e temos apenas uma métrica efetiva conforme. Dessa forma, é possível sair de uma geometria de Weyl para uma riemanniana conformalmente relacionada.

Logo, conclui-se que se uma teoria da gravitação escrita numa geometria de Weyl possui essa invariância, ela nada mais é do que a Relatividade Geral mascarada.

Essa análise também permite que se chegue à conclusão de que as equações de campo de Brans-Dicke para o tensor momentum-energia sem traço, $w = -3/2$ nada mais são que as da Relatividade Geral.

Apesar de que partimos de uma motivação puramente teórica, que é a de construirmos uma gravitação na geometria de Weyl, preservando todas as suas invariâncias, encontramos uma utilidade prática surpreendente, que foi um método para buscar soluções para a teoria de Brans-Dicke.

Por fim, vemos que é possível construir a Relatividade Geral em uma geometria que não seja a riemanniana, o que vai de encontro a uma ideia de Poincaré, de que a geometria do espaço-tempo não deve ser fixada a priori, mas qual delas utilizar ser simplesmente da escolha do pesquisador.

Apêndice D

Teorema de Jacobi

Como para demonstrar esse teorema seria necessário definir uma linguagem muito específica dentro do primeiro capítulo, preferimos separar um apêndice específico para pelo menos guiar o leitor na demonstração desse forte resultado. O resultado a que queremos chegar é

Teorema D.1 *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow B$ uma curva diferenciável tipo-tempo que conecta dois pontos $p, q \in M$. Se γ é uma geodésica que maximiza localmente o comprimento de arco entre p e q , então γ não possui pontos conjugados entre p e q .*

Então, para atingir esse objetivo, mostraremos a negação dessa assertiva, ou seja, essa seção servirá para concluirmos que se uma geodésica possui pontos conjugados, então ela não maximiza o comprimento de arco, é possível perturbá-la de forma a termos curvas vizinhas como as maximizantes. Para tal fim, precisaremos formalizar o que queremos dizer com curvas vizinhas e perturbação de uma curva. Ou seja, trataremos a maximização do comprimento de arco como um problema variacional, como é muitas vezes apresentado na literatura. Seguindo [4]

Definição D.1 *Seja $c : [0, a] \rightarrow M$ uma curva diferenciável por partes em uma variedade pseudo-riemanniana M . Uma variação de c é uma aplicação contínua $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$ tal que:*

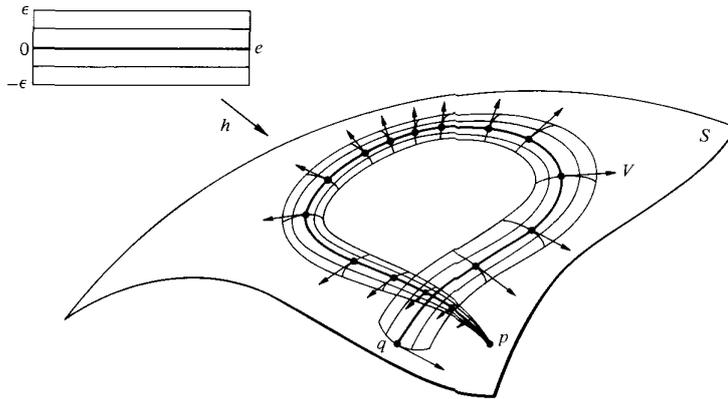
- $f(0, t) = c(t), t \in [0, a]$,
- existe uma subdivisão de $[0, a]$ por pontos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = a$, tal que a restrição de f a cada $(-\epsilon, \epsilon) \times [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, k$, é diferenciável.

Uma variação diz-se **própria** se

$$f(s, 0) = c(0) \quad e \quad f(s, a) = c(a) \tag{D.1}$$

para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Se f é diferenciável, a variação diz-se **diferenciável**.

Figura D.1: Variação $(s, t) \mapsto h$ em uma superfície S , partindo de um ponto p



FONTE: do Carmo [6], 1976, p.

340

Essa definição engloba a ideia do cálculo de variações familiar na Física, para cada s , a curva parametrizada $f_s(t) = f(s, t) : [0, a] \rightarrow M$ é chamada curva da variação e a variação é dita própria se os pontos finais são coincidentes. O vetor $V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ é um campo vetorial ao longo de $c(t)$ e é chamado campo variacional de f . Além disso, é possível demonstrar a seguinte [4]

Proposição D.1 *Dado um campo $V(t)$, diferenciável por partes, ao longo de uma curva diferenciável por partes $c : [0, a] \rightarrow M$, existe uma variação $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$ de c , tal que $V(t)$ é o campo variacional de f ; além disto, se $V(0) = V(a) = 0$, é possível escolher f como uma variação própria.*

Demonstração: Veja [4], página 213. \square

A variação é própria se esse campo variacional se anula nos extremos.

Para comparar o comprimento de arco de curvas vizinhas, definimos a função $L : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$L(s) = \int_0^a \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right| dt \tag{D.2}$$

é o comprimento da curva $f(s, t)$.

Proposição D.2 (Primeira fórmula da variação do comprimento de arco) *Sejam $c : [0, a] \rightarrow M$ uma curva diferenciável por partes do tipo-tempo e $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$ uma variação de c . Se $L : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ é o comprimento de arco de f , então*

$$\begin{aligned} L'(0) = & -\frac{1}{|c'|} \int_0^a g \left(V(t), \frac{D}{dt} \frac{dc}{dt} \right) dt \\ & - \sum_{i=1}^k g \left(V(t_i), \frac{dc}{dt}(t_i^+) - \frac{dc}{dt}(t_i^-) \right) \\ & - g \left(V(0), \frac{dc}{dt}(0) \right) + g \left(V(a), \frac{dc}{dt}(a) \right), \end{aligned} \tag{D.3}$$

onde $V(t)$ é o campo variacional de f , e

$$\frac{dc}{dt}(t_i^+) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} \frac{dc}{dt}, \quad \frac{dc}{dt}(t_i^-) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} \frac{dc}{dt}. \quad (\text{D.4})$$

Demonstração: Veja [4] páginas 215 e 216; veja também [27] páginas 264 e 265. Trata-se apenas de uma derivação simples da expressão do comprimento acima. \square

Isso, nos permite caracterizar geodésicas da seguinte maneira

Proposição D.3 *Uma curva diferenciável do tipo-tempo diferenciável por partes $c : [0, a] \rightarrow M$ é uma geodésica se e somente se, para toda variação própria f de c , tem-se $L'(0) = 0$.*

Demonstração: Veja [4] página 217. \square

As geodésicas são as curvas especiais que extremizam o comprimento de arco. Como vimos que para uma geometria pseudo-riemanniana elas o maximizam, concluimos a partir do cálculo de funções de uma variável que se ela não possuir pontos conjugados $L''(0) < 0$. Logo, é fácil perceber que o que queremos encontrar é que se existir pelo menos um ponto conjugado, existe uma variação da curva geodésica que possui comprimento de arco maior, ou seja, é suficiente mostrar que é possível termos $L''(0) > 0$. Para tal fim, precisamos de uma expressão geral da segunda variação do comprimento de arco. Seguindo a referência de O'Neil [27]

Proposição D.4 (Fórmula da segunda variação) *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica e $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, a] \rightarrow M$ uma variação própria de γ . Seja $s \mapsto L(s)$ a função comprimento de arco da variação. Então*

$$L''(0) = \frac{1}{|\gamma'|} \int_0^a \left\{ g \left(\frac{DV^\perp}{dt}, \frac{DV^\perp}{dt} \right) + g(R(\gamma', V)\gamma', V) \right\} dt, \quad (\text{D.5})$$

onde $\frac{DV^\perp}{dt}$ é a projeção de $\frac{DV}{dt}$ na hipersuperfície ortogonal a γ' , ou seja,

$$\frac{DV^\perp}{dt} = \frac{DV}{dt} - \frac{1}{|\gamma'|^2} g \left(\frac{DV}{dt}, \gamma' \right) \gamma'. \quad (\text{D.6})$$

Demonstração: Veja [4], páginas 218 à 221; além de [27], páginas 266 à 269 e as notas de aula [28]. \square

É possível mostrar que para uma variação própria de geodésicas $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ parametrizadas pelo comprimento de arco, em que $|\gamma'| = 1$, realizando uma integração por partes e expandindo o termo $\frac{DV^\perp}{dt}$, a segunda variação do comprimento de arco assume a forma

$$L''(0) = - \int_0^a \left\{ g \left(\frac{D^2V}{dt^2} - R(\gamma', V)\gamma', V \right) + \left[g \left(\frac{DV}{dt}, \gamma' \right) \right]^2 \right\} dt \quad (\text{D.7})$$

Seguindo a construção usada na referência [29], [6]

Proposição D.5 *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica do tipo-tempo parametrizada pelo comprimento de arco. Denote $p = \gamma(0)$, $y = \gamma(a)$. Se existe $\tau \in (0, a)$ tal que $\bar{q} = \gamma(\tau)$ é um ponto conjugado a p , então existe uma variação própria de γ tal que $L(s) > L(0)$ para $s \in (-\epsilon, \epsilon)$.*

Demonstração: Seja $t \mapsto X(t)$ um campo de Jacobi de uma congruência geodésica centrada em γ , ou seja, para a superfície da congruência $g(t, s) = \exp_p tv(s) = \gamma(t, p, v(s))$; $v(0) = \gamma'$, temos $\frac{\partial g}{\partial s}(t, 0) = X(t)$ e obedece à equação $\frac{D^2 X}{dt^2} - R(\gamma', X)\gamma' = 0$. Como temos um ponto conjugado em $\bar{q} = \gamma(\tau)$, $X(0) = X(\tau) = 0$.

Seja $t \mapsto Z(t)$ um campo vetorial suave arbitrário ao longo de $t \mapsto \gamma(t)$ com $Z(0) = Z(a) = 0$, $Z(\tau) = -\frac{DX}{dt}(\tau)$. Para qualquer $\eta > 0$ considere o campo

$$Y(t) = \begin{cases} Y^1(t) = X(t) + \eta Z(t), & 0 \leq t \leq \tau, \\ Y_2(t) = \eta Z(t), & \tau \leq t \leq a. \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

De acordo com a proposição D.1, existe uma variação própria de $t \mapsto \gamma(t)$ em que $t \mapsto Y(t)$ é o campo variacional. De fato, na demonstração dessa proposição, vemos que essa variação é $f(s, t) = \exp_{\gamma(t)} sY(t)$.

Defina

$$I(V, V) = - \int_0^a \left\{ g \left(\frac{D^2 V}{dt^2} - R(\gamma', V)\gamma', V \right) + \left[g \left(\frac{DV}{dt}, \gamma' \right) \right]^2 \right\} dt, \quad (\text{D.9})$$

$$I(V, W) = \int_0^a \left\{ g \left(\frac{DV^\perp}{dt}, \frac{DW^\perp}{dt} \right) + g(R(\gamma', V)\gamma', W) \right\} dt. \quad (\text{D.10})$$

É fácil ver que $I : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação bilinear e simétrica.

Também temos que $L''(0) = I(Y, Y) = I(Y^1, Y^1) + I(Y^2, Y^2)$, e que

$$I(Y^1, Y^1) = I(X, X) + \eta^2 I(Z, Z) - 2\eta I \left(X, \frac{DX}{dt} \right). \quad (\text{D.11})$$

Pelo lema de Gauss ou o fato de X e γ' serem ortogonais, além de γ ser geodésica, temos $g(X, \gamma') = 0 \Rightarrow g\left(\frac{DX}{dt}, \gamma'\right) = \frac{d}{dt}g(X, \gamma') = 0$. Que em conjunto com a equação de Jacobi, concluímos que $I(X, X) = 0$.

Agora, vamos calcular $I\left(X, \frac{DX}{dt}\right)$ como $g\left(\frac{DX}{dt}, \gamma'\right) = 0 \Rightarrow g\left(\frac{D^2 X}{dt^2}, \gamma'\right) = 0$, ou seja, $\frac{DX^\perp}{dt} = \frac{DX}{dt}$, $\frac{D^2 X^\perp}{dt^2} = \frac{D^2 X}{dt^2}$. O que também permite concluir que

$$g \left(\frac{DX^\perp}{dt}, \frac{D^2 X^\perp}{dt^2} \right) = -g \left(\frac{D^2 X^\perp}{dt^2}, \frac{DX^\perp}{dt} \right) + \frac{d}{dt} g \left(\frac{DX^\perp}{dt}, \frac{DX^\perp}{dt} \right) =$$

$$-g\left(\frac{D^2X}{dt^2}, \frac{DX}{dt}\right) + \frac{d}{dt}g\left(\frac{DX}{dt}, \frac{DX}{dt}\right). \quad (\text{D.12})$$

Portanto,

$$I\left(X, \frac{DX}{dt}\right) = -\int_0^\tau \left\{g\left(\frac{D^2X}{dt^2} - R(\gamma', X)\gamma', \frac{DX}{dt}\right)\right\} dt + \left[g\left(\frac{DX}{dt}, \frac{DX}{dt}\right)\right]_0^\tau = \left|\frac{DX}{dt}(\tau)\right|^2 \quad (\text{D.13})$$

$$I(Y^1, Y^1) = \eta^2 I(Z, Z) - 2\eta \left|\frac{DX}{dt}(\tau)\right|^2, \quad (\text{D.14})$$

$$I(Y^2, Y^2) = \eta^2 I(Z, Z). \quad (\text{D.15})$$

Como o vetor $\frac{DX}{dt}(\tau)$ pertence à hipersuperfície ortogonal à congruência de curvas, ele é um vetor do tipo-espaço, e assim como no caso do teorema de maximização do comprimento de arco das geodésicas riemannianas, sua norma ao quadrado é negativa. Seja $2\left|\frac{DX}{dt}(\tau)\right|^2 = -A^2 < 0$. Com isso,

$$L''(0) = \eta^2 I(Z, Z) + \eta A^2 > 0. \quad (\text{D.16})$$

Para um η suficientemente pequeno, de forma à contribuição de η superar a de η^2 , não importando o sinal de $I(Z, Z)$. Essa é a generalização do teorema de Jacobi para a geometria pseudo-riemanniana. \square

Vimos que se uma geodésica possui pontos conjugados, ela não maximiza o comprimento de arco. Tomando a negativa dessa assertiva, encontramos que se uma geodésica necessariamente maximiza o comprimento de arco, então não possui pontos conjugados, que é o conteúdo do teorema D.1. Que com o uso da proposição 1.4, nos permite enunciar o teorema:

Teorema D.2 (Jacobi) *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ uma curva diferenciável tipo-tempo que conecta dois pontos $p, q \in M$. Então, a condição necessária e suficiente para γ maximizar localmente o comprimento de arco entre p e q é que γ seja uma geodésica sem pontos conjugados entre p e q .*

Referências Bibliográficas

- [1] Wald, R. M., *General Relativity*, The University of Chicago Press, 1984.
- [2] Misner, C. W., *J. Math. Phys.* 4 924, 1963.
- [3] Earman, J., *Tolerance for Spacetime Singularities*, *Foundations of Physics*, **26**, 5, 1996.
- [4] Carmo, M. do, *Geometria riemanniana*, 3ed, IMPA, 2005.
- [5] Schutz, B. F., *Geometrical methods of mathematical physics*, 1ed, Cambridge University Press, 1980.
- [6] Carmo, M. do, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [7] *II Escola de Cosmologia e Gravitação do CBPF*, Ed. Mario Novello, J. Sasson & Cia. Ltda, Rio de Janeiro, 1980.
- [8] Plebanski, J., Krasinski, A., *An Introduction to General Relativity and Cosmology*, Cambridge University Press, 2006.
- [9] Faraoni, V., *Cosmology in Scalar-Tensor Gravity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.
- [10] d’Inverno R. A., *Introducing Einstein’s relativity*, 1ed, Oxford University Press, 1992.
- [11] Naber, G. L., *Spacetime and Singularities: An Introduction*, Cambridge University Press, 1988.
- [12] Hawking, S. W., Ellis, G. F. R., *The Large Scale Structure of Spacetime*, Cambridge University Press, 1973.
- [13] Penrose, R., *The Road to Reality - A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Jonathan Cape, London, 2004.
- [14] Ellis, G. F. R., Williams, R. M., *Flat and Curved Space-times*, 2 ed, Oxford University Press, New York, 2000.

- [15] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications on the General Theory of Relativity*, 1 ed, Jonh Wiley & Sons, 1972.
- [16] Mannheim, P. D., *Conformal Gravity Challenges String Theory*, PASCOS-07, Imperial College London, July 2007, 0707, p. 2283.
- [17] Pinto-Neto, N., *Teorias e Interpretações da Mecânica Quântica*, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2010.
- [18] Novello, M., Oliveira, L. A. R., Salim, J. M., Elbaz, E., *Geometrized Instantons and the Creation of the Universe*, International Journal of Modern Physics D, **1**, 03-04, 641-677, 1992.
- [19] de Oliveira, H. P., Salim, Sautú, S. M., *Non-singular inflationary cosmologies in Weyl integrable spacetime*, Class. Quantum Grav. **14** 2833, 1997.
- [20] Romero, C., Fonseca-Neto, J. B., Pucheu, M. L., *General Relativity and Weyl Geometry*, Class. Quantum Grav. **29**, 155015, 2012.
- [21] Romero, C., Oliveira, H. P., *Exact Solutions in Brans-Dicke Theory: A Dynamical System Approach*, Astrophysics and Space Science, **159**, 1, 1-9, 1989.
- [22] Almeida, T. S., Pucheu, M. L., Romero, C., Formiga, J. B., *From Brans-Dicke gravity to geometrical scalar-tensor theory*, em construção.
- [23] Novello, M., Salim, J. M., Falciano, F. T., *On a Geometrical Description of Quantum Mechanics*, International Journal of Geometrical Methods in Modern Physics, **8**, No. 1, 87-98, 2011.
- [24] Brans, C., Dicke, R. H., *Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation*, Phys. Rev., **124**, 925, 1961.
- [25] Dicke, R. H., *Mach's Principle and Invariance under Transformation of Units*, Phys. Rev., **125**, 2163, 1962.
- [26] Faraoni, V., Nadeau, S., *The (pseudo)issue of the conformal frame revisited*, Phys. Rev. D, **75**, 023501, 2007.
- [27] O'Neil, B., *Semi-riemannian Geometry with applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.
- [28] Sheng, W., *Disponível on-line em http://www.math.zju.edu.cn/swm/RG_Section_4.pdf*. 04/06/2013.
- [29] Wang, W., *Disponível on-line em <http://www-personal.umich.edu/~wangzuoq/635W12/Notes/Lec%2028.pdf>*. 04/03/2013.