



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Vãos de Lévy em vapores atômicos com espectros de absorção e emissão modificados

João Carlos de Aquino Carvalho

Dissertação de Mestrado

João Pessoa

Fevereiro de 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Vôos de Lévy em vapores atômicos com espectros de absorção e emissão modificados

João Carlos de Aquino Carvalho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal Paraíba como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador(a):

Prof^a. Dra. Martine Patrícia Arlette Chevrollier

João Pessoa

Fevereiro de 2014

C331v Carvalho, João Carlos de Aquino

Vãos de Lévy em vapores atômicos com espectros de absorção e emissão modificados

João Carlos de Aquino Carvalho.-João Pessoa,2014.

152f.

Orientadora: Martine Patrícia Arlette Chevrollier

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Física. 2. Redistribuição Parcial em Frequência.
3. Redistribuição Completa em Frequência. 4. Lei de Potência.

UFPB/BC

CDU:53(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Vôos de Lévy em vapores atômicos com espectros de absorção e emissão
modificados**

João Carlos de Aquino Carvalho

Orientador(a): Prof^ª. Dra. Martine Patrícia Arlette Chevrollier

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de Mestre em Física, defendida e aprovada por unanimidade em 21 de fevereiro de 2014 pela Comissão Examinadora.

Aprovada por:

Prof^ª. Dra. Martine Patrícia Arlette Chevrollier

Prof. Dr. Marcos César Santos Oriá

Prof. Dr. Márcio Heraclito Gonçalves de Miranda

João Pessoa, 21 de fevereiro de 2014

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação aos meu avôs, meus pais e a meu Beinho que sempre confirmam em meu trabalho e me deram apoio em toda minha formação acadêmica.

AGRADECIMENTOS

- A Deus por sempre está me oferecendo a melhor oportunidade em minha vida;
- A minha família por sempre está comigo em qualquer momento, em especial para minha mãe, ao meu pai e a minha irmãzinha Lídia;
- A meu Beinhe (Daladiane Matos) que sempre esteve comigo não apenas nos melhores momentos, mas, principalmente nos momentos de estresse, sempre me apoiando em tudo;
- Aos meus amigos de infância que desde da época de escola ainda continuamos uma forte amizade (Iraquitan, Vildson, Roque, Thiago Marcílio, Thiago Souza, Robson, Leandro etc);
- Aos meus amigos do jogo de bola (Diba, Herclio, Filipe, Zé, Ângelo, Paulinho, Franklin, Guerreiro, Vando, Vitor, Ayrton, Fernandinho etc);
- Aos meus orientadores Martine, Oriá e Thierry por ter dado uma grande ajuda no meu trabalho, além de seres grandes amigos;
- Aos meus grandes amigos da graduação (Abinael, Priscila, Silvio, Ítallo, Edinaldo, Antônio Carlos) que me ajudam até hoje;
- Aos professores Luimar e Orlando pelos momentos de descontração nos corredores;
- Aa amizades que fiz durante o meu período de mestrado (Gilson, Samuel, Márcio, Moézio, Kleyton, Weliton, Hugo etc);

- Ao Grupo de Física Atômica e Laser de maneira geral no qual eu faço parte que me acolheu de braços abertos;
- Ao financiamento dado pela CNPq.

RESUMO

Quando incide-se uma radiação em um vapor atômico, esta pode sofrer processos de absorção e de emissão várias vezes antes que os fótons saiam do volume da célula que contém o vapor. Em consequência destes diversos espalhamentos, que ocorrem no interior da célula, o perfil espectral da radiação incidente sofre uma evolução, o qual é regido pelos mecanismos de redistribuição em frequências. Existem dois tipos de redistribuição em frequências, a Redistribuição Parcial em Frequências (PFR) e a Redistribuição Completa em Frequências (CFR). Quando existe correlação entre a frequência de emissão e da absorção, dizemos que ocorreu uma PFR. Caso contrário, quando não há quaisquer correlação entre as frequências absorvidas e emitidas, dizemos que ocorreu CFR. Esta redistribuição em frequências tem sua origem na inhomogeneidade dos perfis espectrais da radiação incidente e da resposta do vapor ressonante. Pode-se destacar, também, que esta inhomogeneidade determina a distribuição dos comprimentos de passos dos fótons no vapor atômico. Os fótons que propagam-se neste meio atômico executam um passeio aleatório entre sucessivos processos de absorção e emissão, cujo comprimento dos passos r é descrito por uma distribuição de probabilidade de dita "cauda longa". Contudo, o comportamento superdifusivo destes fótons é caracterizado por um comprimento de passo único, decaindo assintoticamente como uma lei de potência $P(r) \propto r^{-\mu}$ com $\mu < 3$. Neste trabalho estamos estudando, de uma parte, a redistribuição em frequências em duas etapas, sendo a primeira para diversas dessintonizações da radiação em relação ao centro de absorção, matendo-se fixa a densidade do vapor e, em uma segunda etapa, deixamos fixa a dessintonização da radiação, variando-se a densidade atômica. Em nosso modelo numérico

estudamos átomos de rubídio, considerando sua estrutura eletrônica óticamente ativa com apenas dois níveis de energia e excitado na frequência de sua linha D_2 . Para a segunda parte deste trabalho analisamos, de forma numérica, o expoente μ da lei de potência para a distribuição de probabilidade dos comprimentos de passos individuais dos fótons em um vapor atômico para espectros de absorção e emissão modificados. Para a última parte deste trabalho, desenvolveu-se um modelo experimental para analisar a redistribuição em frequências, onde os fótons emitidos que saem do volume da célula são coletados em certo volume sólido por uma lente de alguns centímetros, direcionados através de uma fibra para análise por um Fabry-Pérot. Além disso, foi desenvolvida uma técnica experimental para gerar a distribuição de probabilidade de passos dos fótons onde modificamos os espectros da radiação incidente ou de absorção. No caso da radiação incidente, esta é guiada por uma fibra para uma segunda célula, onde uma câmera CCD, de sensibilidade elevada, permite medir o comprimento de passos individuais dos fótons.

Palavras-chave: Redistribuição Parcial em Frequência, Redistribuição Completa em Frequência, Lei de Potência

ABSTRACT

When one focus a radiation in an atomic vapor, the radiation may undergo absorption and emission several times before the photons leave the cell volume that contains the vapor. As a result of these several scattering occurring inside the cell, the spectral profile of the incident radiation undergoes an evolution, which is governed by the mechanisms of frequency redistribution. There are two kinds of frequency redistribution: a Partial Frequency Redistribution (PFR) and a Complete Frequency Redistribution (CFR). When there is a correlation between the emission and absorption frequencies, we say that a PFR occurred. Otherwise, when there is no correlation between the absorbed and emitted frequencies, we say that a CFR occurred. This frequency redistribution has its origin in the inhomogeneity of the spectral profiles of the incident radiation and the response of the resonant vapor. It may be noted also that this inhomogeneity determines the distribution of step lengths of photons in an atomic vapor. The photons which propagate through this atomic medium perform a random walk between successive processes of absorption and emission, whose step length r is described by a probability distribution so-called "long tail". However, the superdiffusive behavior of these photons is characterized by a single step length, which decreases asymptotically following a power law $P(r) \propto r^{-\mu}$ with $\mu < 3$. In this work we study, on a hand, the frequency redistribution in two parts: the first one is for several detunings of the radiation relative to the absorption center and we fix the vapor density, and, at a second part, we fixed the radiation detuning of the radiation and we changed the atomic density. In our numerical model, we studied rubidium atoms, by considering its optically active electronic structure with only two levels of energy and we

excited it at the frequency of its D_2 line. For the second part of this work, we analyzed numerically the exponent μ of the power law for the probability distribution of the single step lengths of the photons in an atomic vapor for absorption spectra and modified emission. For the last part of this work, we developed an experimental model to analyze the frequency redistribution, where the emitted photons coming out of the cell volume are collected in a certain solid volume by a lens of a few centimeters, directed through a fiber for analysis by a Fabry-Perot. Furthermore, an experimental setup has been developed to generate the probability distribution of photon steps, where we modified the spectra of the incident radiation or absorption. In the case of the incident radiation, it is guided by a fiber towards a second cell where a CCD camera with high sensitivity allows measuring the length of individual photon steps.

Key-words: Partial Frequency Redistribution, Complete Frequency Redistribution, Power Law

SUMÁRIO

Folha de rosto	i
Ficha catalográfica	ii
Folha de aprovação	iii
Dedicatória	iv
Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	ix
1 Introdução	2
1.1 Descrição do fenômeno de aprisionamento da radiação	2
1.2 Difusão de fótons	3
1.3 Descrição dos capítulos da dissertação	5
2 Mecanismos de alargamento espectral	7
2.1 Revisão sobre o operador densidade	7
2.2 Átomo de dois níveis	11
2.2.1 Equações de Bloch ópticas para um átomo de dois níveis	12
2.2.1.a Solução para as equações de Bloch	16
2.2.2 Expressão para suscetibilidade e coeficiente de absorção	17
2.2.3 Efeito Doppler em meios atômicos	20
2.2.4 Perfil de Voigt	21
2.3 Redistribuição completa e parcial de frequência	23
3 Estatística de passos de fótons em vapor atômico	25
3.1 Distribuição de probabilidade como lei de potência	25
3.2 Distribuição de probabilidade de absorção e emissão de fótons em um vapor atômico	32

4	Simulação Monte Carlo para difusão de fótons em um vapor atômico de Rubídio	37
4.1	Descrição da simulação numérica para o processo de absorção e emissão de fótons por um átomo	37
4.2	Redistribuição em frequência da radiação ressonante em um vapor atômico de rubídio	43
4.2.1	Redistribuição em frequência em um vapor atômico com átomos de dois níveis em geometria infinita	43
4.2.2	Redistribuição em frequência em um vapor atômico com átomos de dois níveis em geometria cilíndrica finita	48
5	Integração numérica para distribuição dos passos do fóton em um vapor atômico	73
5.1	Distribuição de probabilidade de passos de fótons	73
5.2	Distribuição de probabilidade dos passos do fóton com o espectro da radiação incidente modificado	79
5.3	Distribuição de probabilidade dos passos do fóton com o espectro de absorção modificado	84
6	Esquema experimental	88
6.1	Átomos de rubídio	88
6.2	Laser	94
6.2.1	Laser de semiconductor	95
6.3	Estabilização da frequência do laser	97
6.4	Procedimento experimental	99
7	Conclusões e perspectivas	106
A	Tabela de dados	108
B	Equação de difusão	110
C	Distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann	113
D	Espalhamento de fótons através de átomos	117
E	Placa de quarto de onda e meia onda	120
F	Isolador óptico	123
G	Interferômetro Fabry-Pèrot	125
H	Programa em linguagem C da difusão dos fótons em um vapor atômico de rubídio	127
I	Geração de dados para o perfil de absorção do rubídio	140
J	Integração numérica em linguagem C para o cálculo da distribuição dos passos do fóton em um vapor atômico	142
	Referências bibliográficas	152

LISTA DE FIGURAS

1.1	Representação do aprisionamento da radiação em vapor atômico. Os fótons são aprisionados na célula devido aos diversos processos de absorção e emissão.	3
1.2	Exemplo de trajetória da luz em um vidro de Lévy: devido à modulação espacial do índice de refração cuidadosamente planejada, a distribuição de comprimento dos passos entre duas refrações sucessivas não é normal e leva à superdifusão.	4
2.1	Esquema para um átomo de dois níveis, onde ω é a frequência de oscilação do campo, Γ é a taxa de decaimento espontâneo e δ é a dessintonização do campo em relação à frequência ressonante do átomo, ω_0	12
2.2	Parte real e imaginária da suscetibilidade representando a dispersão e a absorção, respectivamente, em função da dessintonização.	19
2.3	Largura a meia altura do perfil de Lorentz.	19
2.4	Perfil de Gauss obtido a partir da equação (2.61) para $T = 300K$	21
2.5	Perfil de Voigt. Convolução entre $K(\omega - \omega')$ e $D(\omega)$	22
2.6	Comparação entre os espectros de Lorentz, Gauss e Voigt com escala vertical logarítmica. O perfil de Gauss em preto, Lorentz em vermelho e Voigt em azul. O parâmetro de Voigt usado foi de 10^{-2} . Os três perfis (Lorentz, Gauss e Voigt) estão com a mesma largura de 500 MHz.	23
3.1	Evolução de $P(x)$ para um lançamento de uma moeda. Foram lançadas duzentas moedas. (a) lançamento das duzentas moedas cem vezes. (b) lançamento das duzentas moedas cem mil vezes.	29
3.2	Exemplo de caminhada aleatória em duas dimensões com uma direção angular distribuída uniformemente. (a) Movimento caracterizando uma distribuição normal (distribuição de Gauss) com expoente $\mu = 5$. (b) Movimento caracterizando uma distribuição não-normal com expoente $\mu = 2$	32
3.3	Probabilidade de transmissão dos fótons ao passar através de um meio atômico.	32

4.1	Difusão dos fótons em um vapor atômico. O perfil espectral da radiação incidente possui um perfil espectral de Lorentz com uma largura espectral $\Gamma_N = 5$ MHz e o perfil espectral da absorção é Voigt com parâmetro a determinado pela temperatura do vapor.	39
4.2	Direção do fóton emitido \mathbf{F} e do fóton incidente \mathbf{f}	41
4.3	Diagrama em blocos da simulação Monte Carlo para a difusão dos fótons em um vapor atômico.	42
4.4	Frequência da radiação incidente em um átomo de dois níveis em relação ao centro de absorção atômica. $\omega = \nu/2\pi$ é a frequência da radiação incidente e $\omega_0 = \nu_0/2\pi$ é a frequência de absorção.	44
4.5	Evolução da distribuição em frequência em um meio infinito para uma radiação incidente com perfil espectral lorentziano de largura $\Gamma_N = 5$ MHz. O perfil de absorção é Voigt e a densidade do vapor atômico é $n = 4,7 \cdot 10^{12}$ cm^{-3} . (a) $\delta_L = 0$. (b) $\delta_L = -300$ MHz, (c) $\delta_L = -600$ MHz, (d) $\delta_L = -800$ MHz, (e) $\delta_L = -1$ GHz. Em preto 1 difusão, em vermelho 2 difusões, em verde 3 difusões, em azul 4 difusões, em laranja 5 difusões, em rosa 10 difusões. A seta em roxo informa a frequência de excitação da radiação incidente.	45
4.6	Trajetória de um único fóton em um vapor atômico. (a) e (c) trajetória do fóton em duas dimensões para $\delta_L = 0$ e $\delta_L = -1$ GHz, respectivamente. (b) e (d) trajetória em três dimensões deste mesmo fóton e nestas mesmas dessintonizações.	48
4.7	(a) Direção de excitação laser no vapor atômico em uma geometria cilíndrica. (b) Fótons emitidos e coletados em certa região do espaço.	49
4.8	Histograma da contribuição para 1 (preto), 2 (vermelho) e todas as difusões (amarelo escuro) em um vapor atômico. A radiação incidente possui uma frequência no centro da absorção atômica ($\delta_L = 0$). Contribuições maiores que 2 difusões são irrelevantes. A seta em roxo indica a frequência de excitação da radiação incidente.	51
4.9	Contribuição de cada difusão dos fótons retroespalhados no vapor atômico com $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10}$ cm^{-3} após o vapor ser excitado por uma radiação incidente com frequência no centro da absorção atômica. (a) 1 difusão, (b), (c), (d), (e) são respectivamente, 2, 3, 4 e 5 difusões. (f) soma das difusões. Notem a variação na escala vertical. A seta em roxo indica a frequência de excitação da radiação incidente.	52
4.10	Histograma da contribuição para 1, 2 e todas as difusões dos fótons retroespalhados em um vapor atômico com $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10}$ cm^{-3} representado com as cores preto, vermelho e amarelo escuro, respectivamente. A radiação incidente possui uma frequência dessintonizada em relação ao centro de absorção atômica de $\delta_L = -800$ MHz. Contribuições maiores que 2 difusões são irrelevantes. A seta em roxo indica a frequência de excitação da radiação incidente no vapor atômico.	53
4.11	Contribuição de cada difusão dos fótons retrodifusos no vapor atômico com $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10}$ cm^{-3} após ser excitado por uma radiação com $\delta_L = -800$ MHz. (a) 1 difusão, (b), (c), (d), (e) são respectivamente, 2, 3, 4 e 5 difusões. (f) soma das difusões. A seta em roxo assinala a frequência de excitação da radiação incidente. Notem a variação na escala vertical ao longo de cada difusão.	55

4.12	Espectro normalizado de cada difusão retroespalhada no vapor atômico. (a) $\delta_L = 0$ e (b) $\delta_L = -800$ MHz. 1 difusão (preta), 2 difusões (vermelha), 3 difusões (verde), 4 difusões (azul) e 5 difusões (laranja). A seta em roxo assinala a frequência de excitação da radiação incidente no vapor atômico. A densidade atômica utilizada foi $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. Em ambas figuras, a seta em roxo informa a frequência de excitação.	56
4.13	Histograma da frequência emitida retroespalhada pelo vapor atômico com $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ após a excitação por uma radiação incidente com uma frequência no centro da absorção atômica indicada na seta roxa. Contribuição de 1 (preto), 2 (vermelho), 3 (verde) e o total de difusões (amarelo escuro).	57
4.14	Contribuição de cada difusão retroespalhada no vapor atômico com uma densidade $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ excitado por uma radiação no centro da linha como indica a seta em roxo. (a) 1 difusão, (b), (c), (d), (e) são respectivamente, 2, 3, 4 e 5 difusões. (f) soma das difusões.	58
4.15	Contribuição de fótons que sofreram 10 difusões retroespalhadas no vapor atômico com $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ para uma radiação incidente com frequência no centro da absorção atômica mostrado na seta em roxo.	59
4.16	Evolução da distribuição em frequência dos fótons retrodifusos em função do número de difusão atômica. A radiação incidente possui uma dessintonização $\delta_L = 0$ como indica a seta em roxo. 1 difusão (preto), 2 difusões (vermelho), 3 difusões (verde), 4 difusões (azul), 5 difusões (laranja) e 10 difusões (rosa).	60
4.17	Comparação entre os espectros normalizados à 1 em cada retrodifusão para 2 densidades diferentes, em preto $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ e em vermelho $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ com uma frequência de excitação no centro da absorção atômica como indicado com a seta roxa em cada uma das figuras. (a), (b), (c) e (d) são para 1, 2, 3 e todas as difusões, respectivamente.	61
4.18	Redistribuição em frequência para uma radiação incidente com dessintonização de $\delta_L = -800$ MHz indicado na seta em roxo em um vapor atômico com densidade de $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. (a), (b), (c), (d), (e) e (f) são para 1, 2, 3, 4, 5 e todas as difusões dos fótons retroespalhados, respectivamente.	63
4.19	Comparação entre densidades diferentes com espectros normalizados a 1. Em preto $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ e em vermelho $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. A radiação incidente possui uma dessintonização $\delta_L = -800$ MHz marcada com a seta em roxo.	64
4.20	Comparação entre as distribuições de probabilidade dos passos dos fótons retroespalhados em vapor atômico para duas densidades atômicas diferentes. Em vermelho $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ e em preto $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. A dessintonização da radiação incidente é $\delta_L = -800$ MHz.	67
4.21	Comparação entre as distribuições de probabilidade dos passos do fóton em vapor atômico para duas densidades atômicas diferentes. Em vermelho $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ e em preto $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. A radiação incidente possui uma frequência no centro da absorção atômica.	68

- 4.22 Distribuição de probabilidade da velocidade paralela do átomo espalhador ($V_{//}$) em relação ao fóton incidente para três dessintonizações diferente da radiação incidente. (a) $\delta_L = -300$ MHz, (b) $\delta_L = -800$ MHz e (c) $\delta_L = -1,5$ GHz. 69
- 4.23 Distribuição de velocidade de Maxwell-Boltzmann no vapor atômico. (a) Mostra linhas verticais que indicam a correção de velocidade para compensar a dessintonização fixada na radiação incidente. As linhas azul, vermelha e laranja exibem, respectivamente, a correção Doppler para $\delta_L = -300$ MHz, $\delta_L = -800$ MHz e $\delta_L = -1,5$ GHz. (b) Mostra a ampliação da região tracejada. 71
- 4.24 Região onde a velocidade dos átomos compensa a dessintonização δ_L estabelecida na radiação incidente. Em preto é mostrada a distribuição de velocidade dos átomos e em vermelho o coeficiente de absorção homogêneo do átomo. O limite desta região é em $|\delta| \gtrsim 1$ GHz e a partir dela os átomos absorvem a radiação fora de ressonância em seu referencial. 72
- 5.1 Distribuição de probabilidade dos passos de fóton em um vapor atômico de rubídio em preto e o coeficiente μ da lei de potência em vermelho. Os espectros da radiação incidente e da absorção são iguais. (a) Gauss-Gauss (b) Lorentz-Lorentz (c) Voigt-Voigt. O parâmetro de Voigt usado foi $a = 10^{-2}$ que corresponde ao parâmetro típico para um vapor de rubídio em torno da temperatura ambiente. Note que o coeficiente μ tende a um valor constante $\simeq 2$ para perfis Doppler, enquanto que para os perfis Lorentz e Voigt, o valor assintótico de μ é 1,5 74
- 5.2 Distribuição de probabilidade de comprimento dos passos do fóton e o expoente μ da lei de potência, mostrados nas curvas em preto e em vermelho, respectivamente. Os gráficos em azul representam os espectros de absorção. (a) Espectro de absorção Doppler à $T = 301$ K. (b) Espectro de absorção Voigt. O parâmetro de Voigt usado foi de $a = 10^{-2}$. O espectro da radiação incidente possui um perfil de Lorentz com uma largura espectral de 6 MHz. 77
- 5.3 Distribuição de probabilidade de passos do fóton mostrado na curva em preto e em vermelho o expoente μ da distribuição de probabilidade como lei de potência. Os gráficos em azul denotam os espectros de absorção. (a) Espectro de absorção como Lorentz com uma largura de 6 MHz. (b) Espectro de absorção como Voigt. O parâmetro de Voigt usado foi de $a = 10^{-2}$. O espectro da radiação incidente usado na integração numérica foi o perfil de Gauss com uma largura espectral de 500 MHz. 78
- 5.4 Em preto, a distribuição de probabilidade de passos do fóton e, em vermelho, o expoente μ da distribuição de probabilidade como lei de potência. Os gráficos em azul representam os espectros de absorção. (a) Espectro de absorção como Lorentz com uma largura de 6 MHz. (b) Espectro de absorção como Gauss com uma largura 500 MHz. O perfil da radiação incidente é o perfil de Voigt com $a = 10^{-2}$ 79
- 5.5 Espectro da radiação incidente, que é Voigt ou Doppler, modificado com um pico em sua estrutura espectral. A dessintonização do pico em relação ao centro do perfil espectral mais largo é representada por δ_p 80

- 5.6 (a) Distribuição de probabilidade dos passos do fóton. No interior de (a) o espectro de absorção Voigt com $a = 10^{-2}$. (b) Expoente μ da lei de potência. As dessintonizações são $\delta_p = 0$ (preto), $\delta_p = 70$ MHz (vermelho), $\delta_p = 175$ MHz (verde) e $\delta_p = 350$ MHz (azul). $\Gamma_V/\Gamma_N = 100$. Como as distribuições de probabilidade para estas dessintonizações são ligeiramente diferente, então, as modificações das cores são imperceptíveis. A radiação incidente possui um perfil Voigt com parâmetro igual 10^{-2} modificado com pico com perfil de Lorentz. 81
- 5.7 (a) Distribuição de probabilidade dos passos do fóton juntamente com o perfil de absorção Voigt com $a = 10^{-2}$. (b) Expoente μ da lei de potência. As dessintonizações $\delta_p = 0$ (preto), $\delta_p = 70$ MHz (vermelho) $\delta_p = 175$ MHz (verde) e $\delta_p = 350$ MHz (azul). $\Gamma_V/\Gamma_N = 5$. A radiação incidente possui um perfil Voigt com $a = 10^{-2}$ modificado com pico com perfil de Lorentz. 82
- 5.8 (a) Distribuição de probabilidade dos passos do fóton. No interior de (a) o espectro de absorção Voigt com com parâmetro 0,01. (b) Coeficiente μ da lei de potência. Razão $\Gamma_D/\Gamma_N = 300$ (preto), $\Gamma_D/\Gamma_N = 100$ (vermelho), $\Gamma_D/\Gamma_N = 75$ (verde), $\Gamma_D/\Gamma_N = 50$ (azul) e $\Gamma_D/\Gamma_N = 15$ (laranja). A radiação incidente possui um perfil Doppler modificado com pico com perfil de Lorentz. 83
- 5.9 Espectro da radiação incidente como perfil espectral de Voigt ou Gauss, modificado com dois picos simétricos. Estes picos têm um perfil espectral de Lorentz. O parâmetro de Voigt utilizado foi de $a = 10^{-2}$ 83
- 5.10 Perfil espectral da absorção modificada com um buraco em sua estrutura. O perfil de absorção utilizado foi o de Voigt. $a = 10^{-2}$ foi o parâmetro de Voigt utilizado. Este buraco pode estar em qualquer frequência dentro do espectro de absorção. δ_b representa a dessintonização do buraco em relação ao centro de absorção atômica. 84
- 5.11 (a) Distribuição de probabilidade dos passos do fóton e o perfil da radiação incidente que é o de Voigt com $a = 10^{-2}$. (b) Coeficiente μ da lei de potência. Razão $\Gamma_D/\Gamma_N = 300$ (preto), $\Gamma_D/\Gamma_N = 100$ (vermelho), $\Gamma_D/\Gamma_N = 75$ (verde), $\Gamma_D/\Gamma_N = 50$ (azul) e $\Gamma_D/\Gamma_N = 15$ (laranja). O espectro de absorção possui um perfil de Voigt com $a = 10^{-2}$ modificado com um buraco em sua estrutura espectral. 86
- 5.12 Perfil espectral da absorção modificado com dois buracos simétricos em torno da parte central do perfil natural. O perfil natural de absorção utilizado foi Voigt. O parâmetro de Voigt utilizado foi $a = 10^{-2}$ 87
- 6.1 Fotos dos descobridores do rubídio. (a) Robert Bunsen e (b) Gustav Kirchhoff. 89
- 6.2 Esquema da estrutura dos níveis atômico para os isótopos do rubídio. São também representadas as transições permitidas por $\Delta F = 0, \pm 1$ para cada nível da estrutura fina. (a) Níveis do isótopo Rb^{85} e (b) níveis do isótopo Rb^{87} 90
- 6.3 Absorção linear na transição D_2 para os isótopos do rubídio. 91
- 6.4 Esquema experimental para a realização de medidas da absorção saturada. Este esquema foi feito em nossos laboratórios. 93
- 6.5 (a) Absorção saturada para as quatro linhas Doppler dos isótopos do rubídio. (b) Uma ampliação do espectro com a linha $F = 2$ do isótopo do Rb^{87} 93

6.6	Esquema para um junção P-N em laser semiconductor. Um elétron combina-se com um buraco emitindo luz quando este decai de sua banda de condução para a banda de valência	95
6.7	Estrutura física de um laser semiconductor. A região ativa está confinada entre camadas de diferentes dopagens.	96
6.8	Medida da potência de saída do laser de diodo em função da corrente de injeção para uma temperatura de 296 K.	97
6.9	(a) Mostra o efeito de autofocalização e (b) o efeito de defocalização de um feixe laser.	98
6.10	Sinal de dispersão obtido através de um vapor atômico com uma densidade de $n \simeq 1,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. Este sinal de dispersão foi obtido na linha $F = 2$ do Rb^{85}	98
6.11	Experimento para obtenção de um sinal dispersivo. A lente possui foco $f = 15 \text{ cm}$, a densidade atômica $n \simeq 1,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. A potência do laser incidente na célula é de $P = 1,85 \text{ mW}$	99
6.12	Montagem experimental desenvolvida para a coleção dos fótons redistribuídos após a excitação do vapor atômico de rubídio pelo laser com frequência em torno da linha D_2 ($F = 2$ do Rb^{85}).	100
6.13	(a) Referência em frequência do laser. Cada ponto em torno da absorção linear representa a frequência da excitação do laser no vapor atômico na linha $F = 2$ do Rb^{85} para a coleção de frequência dos fótons redistribuídos. (b), (c), (d), (e) e (f) Representa a obtenção dos fótons retroespalhados e cada cor representa a redistribuição desses fótons nas respectivas excitações do laser mostrada em (a).	102
6.14	Experimento completo para capturar os passos dos fótons em uma célula com um vapor atômico de rubídio.	103
6.15	(a) Foto da fluorescência obtida através da câmera CCD para análise da distribuição de comprimento de passos de fótons no vapor atômico. (b) Distribuição de probabilidade de passos de fótons no vapor atômico. (c) Distribuição em uma escala di-log. A fotografia cobre uma região de 23 cm de comprimento da célula. A célula está a temperatura ambiente, aproximadamente.	105
C.1	Distribuição de velocidade de Maxwell-Boltzmann. (a) Distribuição unidimensional. (b) Distribuição bidimensional. (c) Distribuição tridimensional. A temperatura utilizada para este sistema foi de $T = 300 \text{ K}$	115
C.2	Distribuição de velocidade de Maxwell-Boltzmann indicando a velocidade mais provável para três diferentes temperaturas. Em preto, vermelho e azul mostram, nessa ordem, $P(V)$ para $T = 300 \text{ K}$, $T = 373 \text{ K}$ e $T = 673 \text{ K}$ e as linhas verticais indica sua velocidade mais provável que são, respectivamente, $\langle v_{T=300} \rangle \approx 242 \text{ m/s}$, $\langle v_{T=373} \rangle \approx 270 \text{ m/s}$ e $\langle v_{T=673} \rangle \approx 363 \text{ m/s}$	116
E.1	Incidência do campo elétrico que faz um ângulo de $\pi/4$ com o eixo y em um meio birrefringente. n_r e n_l são os índices refração rápido e lento, respectivamente.	120
E.2	Incidência de uma luz não-polarizada sendo filtrada em um polarizador vertical. Apenas a componente vertical da luz não-polarizada emerge do polarizador.	122

-
- F.1 Modelo de um isolador óptico com comprimento d . A luz possui certa polarização inicial e ao atravessá-lo, a polarização inicial é girada formando um ângulo β com o eixo vertical. 123
- G.1 Cavity em Fabry-Pèrot apresentando múltiplas reflexões e transmissões de uma radiação incidente entre dois espelhos. O coeficiente de reflexão na primeira interface e na segunda interface possui uma amplitude de r e r' , respectivamente. O coeficiente de transmissão possui uma amplitude na primeira e segunda interface, respectivamente, de t e t' 125
- G.2 Transmissão através de um Fabry-Pèrot com finesse $F \simeq 10$. FSR é a distância em frequência entre os picos de transmissão do FP e o δ é a largura em frequência a meia altura de cada pico de transmissão. 126

LISTA DE TABELAS

A.1	Constantes físicas fundamentais.	108
A.2	Propriedades físicas do Rb^{85}	108
A.3	Propriedades de transição óptica da linha D_2 ($5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$) do Rb^{85} . . .	109
A.4	Propriedades físicas do Rb^{87}	109
A.5	Propriedades de transição óptica da linha D_2 ($5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$) do Rb^{87} . . .	109

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O aprisionamento radiativo é um tema de interesse fundamental e aplicado e têm sido amplamente estudado. Ao iniciar este capítulo, faremos uma descrição sobre o fenômeno de aprisionamento da radiação e em seguida explicaremos sobre o fenômeno de difusão dos fótons. Em seguida, faremos uma descrição, de forma sucinta, dos capítulos que compõem este trabalho.

1.1 Descrição do fenômeno de aprisionamento da radiação

Aprisionamento radiativo é o nome dado ao fenômeno de espalhamento múltiplo de fótons em vapores atômicos ressonantes. Neste processo, quando faz-se incidir fótons com frequência ω próximo à frequência de transição atômica, ω_0 , estes sofrem processos de absorção e os átomos passam para um estado de maior energia, o estado excitado. No entanto, estes átomos excitados decaem para um estado de menor energia (no caso de um sistema de dois níveis, o estado de menor energia do átomo é o estado fundamental) e emitem um fóton. Este fóton emitido pelo átomo pode sofrer vários processos de absorção e emissão, que ocorrem, tipicamente, a taxas de 100 MHz à temperatura ambiente [1] e assim, devido a esta taxa elevada, estes sucessivos processos (absorção e emissão) podem ocorrer várias vezes antes que o fóton escape da célula. A figura (1.1) apresenta um esquema do aprisionamento da radiação em um vapor atômico. Esta figura mostra os fótons sofrendo diversos processos de absorção e emissão no interior de uma célula antes que saiam do volume do vapor.

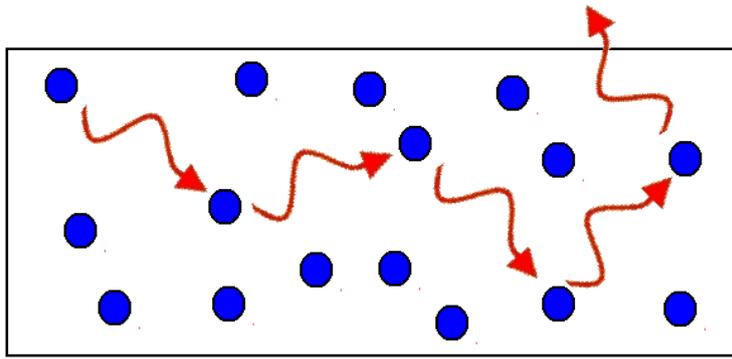


Figura 1.1: Representação do aprisionamento da radiação em vapor atômico. Os fótons são aprisionados na célula devido aos diversos processos de absorção e emissão.

Os múltiplos espalhamentos que ocorrem no interior da célula resultam uma evolução no perfil espectral da radiação no vapor. Mesmo o espalhamento sendo elástico (ver apêndice D) no referencial atômico (o fóton espalhado e o incidente têm mesma frequência do átomo), o perfil espectral dos fótons espalhados pode ser diferente dos fótons incidentes, devido ao movimento dos átomos no vapor: o efeito Doppler redistribui as frequências. A evolução do perfil espectral da luz é então determinado por mecanismos de redistribuição em frequência. Esta redistribuição é consequência dos perfis espectrais serem inhomogêneos.

O aprisionamento da radiação é um tema recorrente em diversas áreas de estudos, tais como, atmosferas estelares [2], plasmas [3], vapores atômicos [4] etc.

Desde o início da década de 1920 [1], este fenômeno de aprisionamento radiativo vem sendo estudado, quando Compton e Milne descreveram, de forma teórica, a difusão de fótons ressonantes em um meio absorvedor e anos mais tarde, em 1947, Holstein [5] propôs uma equação íntegro-diferencial para a descrição deste fenômeno de aprisionamento de radiação em meios atômicos.

1.2 Difusão de fótons

O conceito de difusão é usualmente aplicado a partículas materiais. Porém, este conceito é também utilizado no contexto da propagação da radiação eletromagnética, como por exemplo, na representação de difusão múltipla de fótons em um meio espalhador.

A propagação de fótons através de um meio de espalhamento homogêneo pode ser descrita como um passeio aleatório que obedece à estatística normal. Particularmente, o

deslocamento quadrático médio dos fótons, $\langle x^2 \rangle$, aumenta linearmente com o tempo:

$$\langle x^2 \rangle \propto t^\gamma \quad (1.1)$$

com $\gamma = 1$.

Medindo-se a distribuição dos passos dos fótons neste meio durante um determinado tempo, obtemos uma curva que descreve uma distribuição normal (curva de Gauss) que é caracterizada por uma média e variância finita. Entretanto, em alguns sistemas, o espalhamento múltiplo não pode ser caracterizado como difusivo, porque ele não obedece à estatística normal. Nesses sistemas, o deslocamento quadrático médio segue a equação (1.1), mas com $\gamma \neq 1$.

$$\begin{cases} \gamma < 1, & \text{o espalhamento é subdifusivo} \\ \gamma > 1, & \text{o espalhamento é superdifusivo} \end{cases} \quad (1.2)$$

No caso de $\gamma > 1$, pode-se mostrar que a variância da distribuição de comprimento de passos das “partículas” não é finita. Assim, já foi observado um comportamento não-normal para o comprimento do passo dos fótons em um meio transparente chamado “vidro Lévy” [6] que possui determinada distribuição espacial em seu índice de refração e que garante este comportamento não-normal de difusão dos fótons.

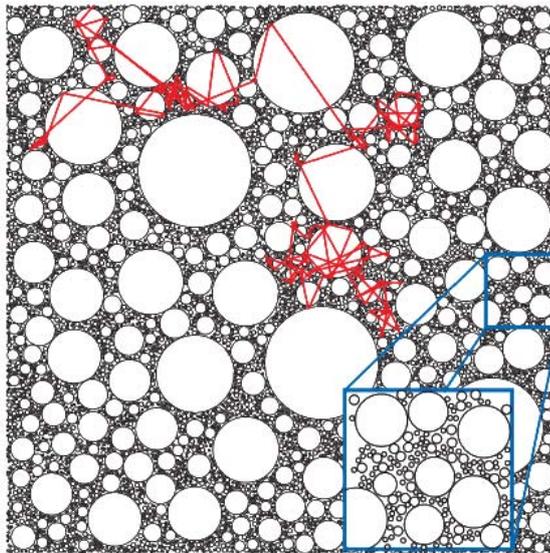


Figura 1.2: Exemplo de trajetória da luz em um vidro de Lévy: devido à modulação espacial do índice de refração cuidadosamente planejada, a distribuição de comprimento dos passos entre duas refrações sucessivas não é normal e leva à superdifusão.

A figura (1.2) mostra o chamado “vidro de Lévy” e a representação dos fótons propagando-

se neste meio, que realizam um passeio aleatório entre processos sucessivos de refração que não obedece à estatística normal.

Outros mecanismos levam a difusão não-normal de fótons. A propagação de uma radiação ressonante em um meio atômico é estudada desde os anos 1920-30, quando começou a ser descrita teoricamente por Compton [7] e Milne [8]. Experiências foram feitas por Zemansky [9, 10] e interpretadas por Kenty [11], que, o primeiro, entendeu que o coeficiente de difusão da luz ressonante em um meio atômico é infinito e que a propagação da luz nessas condições não pode ser descrita pelo modelo de difusão gaussiano. O formalismo teórico ainda hoje usado para descrever o aprisionamento de radiação em um meio ressonante é o modelo íntegro-diferencial de Holstein [5], publicado em 1947.

O caráter superdifusivo do aprisionamento dos fótons em um vapor atômico foi identificado por Pereira [12], para os casos em que os átomos possuem alargamento natural (Lorentz), ou Doppler, ou estes dois efeitos simultaneamente, o alargamento natural e Doppler, resultando no perfil espectral Voigt. Em uma distribuição de Lévy, a probabilidade de eventos de grande magnitude é substancialmente maior do que em uma distribuição normal. Assim, para estas três situações (Lorentz, Doppler e Voigt) foi confirmado que o movimento de fótons entre alguns processos de absorção e emissão ocorre em saltos com valores elevados, diferentemente da difusão normal onde os tamanhos dos passos são, de magnitude, semelhantes e comparável ao valor médio. Estes grandes saltos ocorrem em pequeno número comparado ao número total de passos, mas são eles que governam a estatística do sistema.

Note-se que o fenômeno da superdifusão não é apenas aplicado a fótons. Há outros vários sistemas onde se verifica este fenômeno superdifusivo, por exemplo, em sistemas biológicos [13], deslocamentos humanos [14], astrofísica [15] etc.

1.3 Descrição dos capítulos da dissertação

O segundo capítulo deste trabalho tem como finalidade apresentar as formas espectrais de um vapor atômico, sendo elas, natural, Doppler e Voigt, onde estrutura-se conjuntamente com os efeitos de alargamento natural e Doppler. Neste capítulo, também faremos uma descrição fenomenológica sobre a redistribuição parcial em frequência bem como sobre a redistribuição completa em frequência.

O terceiro capítulo consiste em uma abordagem estatística do aprisionamento da radiação e tem como objetivo calcular a distribuição de probabilidade do comprimento do passo de fótons entre sucessivos processos de absorção e emissão em um vapor atômico.

No capítulo quatro, iremos descrever a simulação numérica utilizada para calcular a redistribuição em frequência. Usamos naquela simulação escrita em linguagem C o método de Monte Carlo. Apresentaremos também o capítulo 4 resultados da redistribuição em frequência em duas geometrias: uma geometria infinita e uma geometria cilíndrica finita. Comparamos os resultados obtidos quando deixamos a densidade atômica fixa para duas diferentes frequência da da radiação incidente deslocadas em relação ao centro de absorção atômica: uma fica exatamente no centro de absorção atômica e outra está sintonizada com $\delta = -800$ MHz. Em seguida, fizemos o oposto, ou seja, deixamos fixa a frequência da radiação incidente e comparamos os resultados para duas densidades atômicas diferentes ($n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ e $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$). É importante ressaltar que estes resultados foram obtidos para átomos de rubídio considerando apenas dois níveis de energia, o excitado estando em torno da transição $F = 2 \rightarrow F' = 2$ do isótopo do rubídio 85.

No quinto capítulo, reproduziremos resultados já obtidos na literatura para distribuição de probabilidade dos passos de fótons em um vapor atômico e, em seguida, mostraremos resultados de distribuição para sistemas cujos espectros são modificados, seja na absorção do vapor atômico, seja da radiação incidente.

No capítulo seis apresentaremos um esquema experimental para se medir a redistribuição em frequência dos fótons retroespalhados por vapor atômico de Rb. Além disso, exibiremos também um esquema experimental construído para a distribuição de passos de fótons.

No sétimo e último capítulo deste manuscrito apresentaremos as principais conclusões obtidas, bem como discutiremos algumas perspectivas desse trabalho.

CAPÍTULO 2

MECANISMOS DE ALARGAMENTO ESPECTRAL

O nosso objetivo neste capítulo é encontrar o perfil espectral de absorção de um vapor atômico com distribuição de velocidades térmicas excitado por uma radiação monocromática. Iremos também apresentar o conceito de redistribuição parcial de frequência (*Partial Frequency Redistribution* - PFR) e redistribuição completa de frequência (*Complete Frequency Redistribution* - CFR). No primeiro caso ainda existe alguma “memória” da frequência incidente, e no segundo caso essa “memória” está completamente apagada. Primeiro, começamos com uma revisão sobre operador densidade, sua definição e sua aplicação como ferramenta importante para calcular-se valor esperado de operadores. Em seguida, iremos apresentar e resolver as equações de Bloch ópticas e com elas calcular a polarização do meio. Através desta polarização obter a expressão para a suscetibilidade do meio e assim, adquirir o perfil de absorção e dispersão da luz incidente no meio atômico. Feito isso, iremos discorrer sobre o efeito Doppler, o que nos permite, dar uma explicação sobre PFR e CFR. Estes perfis espectrais de Lorentz, de Gauss e de Voigt nos ajudarão a entender como ocorrerá a passagem da redistribuição parcial em frequência para a redistribuição completa em frequência. Além disso, como veremos mais adiante, estes tipos de espectros servirão para calcular a distribuição de probabilidade de passos dos fótons em um vapor atômico.

2.1 Revisão sobre o operador densidade

Uma motivação para o estudo do operador densidade é dada pelo fato de estarmos estudando sistemas com várias partículas e em diferentes estados quânticos. Caso

quiséssemos escrever uma função de onda para tal sistema, deveríamos escrevê-la como uma superposição das auto-funções de cada estado das partículas do sistema. De maneira geral, os postulados básicos da mecânica quântica foram enunciados para um *ensemble* puro (coleções de sistema preparados identicamente e representados por apenas um auto-estado). Porém, estamos estudando um *ensemble* misto, onde o auto-estado que o representa é dado por uma superposição de todos os outros auto-estados que compõem o sistema [16]. Então, com o operador densidade, podemos fazer medidas de observáveis quânticos (através do seu valor médio) sem escrever um auto-estado para um sistema composto por N partículas [17].

O operador densidade ρ é definido por [18]:

$$\rho = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (2.1)$$

Onde $|\psi_i\rangle$ são os auto-estados e P_i é a probabilidade de encontrar o sistema no estado $|\psi_i\rangle$. Para representar probabilidades temos que $0 \leq P_i \leq 1$ e $\sum_i P_i = 1$. O operador densidade atuando em um auto-estado $|\psi_i\rangle$ produzirá a probabilidade de encontrar o sistema neste auto-estado particular. Ou seja:

$$\rho |\psi_i\rangle = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i | \psi_i\rangle = P_i |\psi_i\rangle \quad (2.2)$$

Para encontrar a forma matricial do operador densidade, devemos primeiro expandir $|\psi_i\rangle$ em um conjunto de vetores de uma base ortonormal. Portanto:

$$|\psi_i\rangle = \sum_n C_{ni} |n\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | \psi_i\rangle \quad (2.3)$$

onde $\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$ e $C_{ni} = \langle n | \psi_i\rangle$.

Inserindo a equação (2.3) na equação (2.1) podemos representar o operador densidade de forma matricial, na base $|n\rangle$.

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \sum_i P_i \left(\sum_n |n\rangle \langle n | \psi_i\rangle \right) \left(\sum_m \langle m | \psi_i\rangle \langle m| \right) \\ \rho &= \sum_i P_i \left(\sum_n C_{ni} |n\rangle \right) \left(\sum_m C_{mi}^* \langle m| \right) \end{aligned}$$

$$\rho = \sum_i P_i \sum_{n,m} C_{ni} C_{mi}^* |n\rangle \langle m| \quad (2.4)$$

Pela equação (2.4), concluímos que os elementos da matriz de ρ são dados por:

$$\langle n|\rho|m\rangle = \sum_i P_i C_{ni} C_{mi}^* \quad (2.5)$$

Sendo sua diagonal principal dada por:

$$\langle n|\rho|n\rangle = \sum_i P_i |C_{ni}|^2 \quad (2.6)$$

Podemos verificar que ρ é um operador hermitiano [19] da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle n|\rho|m\rangle^* &= \sum_i P_i \sum_{n,m} C_{ni}^* C_{mi} \\ &= \sum_i P_i \langle \psi_i|n\rangle \langle m|\psi_i\rangle \\ &= \langle m| \left(\sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right) |n\rangle \\ &= \langle m|\rho|n\rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

Para o caso de um sistema de dois níveis $|1\rangle$ e $|2\rangle$, podemos escrever na representação usual de matriz o operador densidade.

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Os termos ρ_{11} e ρ_{22} são os termos de população que representam o número de átomos no nível fundamental $|1\rangle$, ou no excitado $|2\rangle$, respectivamente. Enquanto que os termos ρ_{12} e ρ_{21} são os termos de coerência entre o nível fundamental e o excitado [20]. Estes termos de coerência nos informam se o sistema está em uma superposição de estados.

Uma outra operação importante que podemos efetuar sobre o operador densidade é o cálculo do traço da matriz, em que esta operação é definida como:

$$Tr(\rho) \equiv \sum_n \langle n|\rho|n\rangle \quad (2.9)$$

Inserindo a equação (2.1) em (2.9), observamos que o traço sobre o operador densidade é dado por:

$$\begin{aligned}
 Tr(\rho) &= \sum_{n,i} P_i \langle n|\psi_i\rangle \langle \psi_i|n\rangle \\
 &= \sum_{n,i} P_i \langle \psi_i|n\rangle \langle n|\psi_i\rangle \\
 &= \sum_i P_i \langle \psi_i|\psi_i\rangle \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Com isso, mostramos que a operação do traço sobre ρ é sempre igual a 1, independente da base ortonormal que escolhemos.

Podemos pensar agora na média de um operador em um *ensemble* de observáveis cuja definição é dada por

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_i P_i \langle \psi_i|\hat{A}|\psi_i\rangle \tag{2.11}$$

Por outro lado, aplicando o operador densidade neste observável e em seguida fazendo a média, temos que:

$$\langle \rho \hat{A} \rangle = \sum_i P_i \langle \psi_i|\rho \hat{A}|\psi_i\rangle \tag{2.12}$$

De forma matricial:

$$\langle m|\rho \hat{A}|n\rangle = \sum_i P_i \langle m|\psi_i\rangle \langle \psi_i|\hat{A}|n\rangle \tag{2.13}$$

Assumimos que o operador \hat{A} é hermitiano, logo o produto de operadores hermitiano também é hermitiano. Observando a diagonal principal de $\rho \hat{A}$ e em seguida operando com traço, percebemos que

$$Tr \langle n|\rho \hat{A}|n\rangle = \sum_{ni} P_i \langle n|\psi_i\rangle \langle \psi_i|\hat{A}|n\rangle \tag{2.14}$$

Usando a relação de completza $\sum |n\rangle \langle m| = \delta_{nm}$

$$\text{Tr}\langle n|\rho\hat{A}|n\rangle = \langle\hat{A}\rangle \quad (2.15)$$

Como mostramos pela equação (2.15) que a operação traço independe da base que escolhermos, então, podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\boxed{\text{Tr}[\rho\hat{A}] = \langle\hat{A}\rangle} \quad (2.16)$$

Note, pela equação (2.16) que o valor esperado de um operador \hat{A} em um *ensemble* é calculado sem a necessidade de escrever um auto-estado que o representa.

2.2 Átomo de dois níveis

Iremos simplificar o nosso problema para um sistema de dois níveis, mesmo que átomos reais têm múltiplos níveis de energia. Essa simplificação é possível quando a frequência da luz incidente no meio atômico está próxima de uma ressonância. Além disso, a interação entre os átomos com a radiação eletromagnética ocorre através de momentos de dipolos. Caso a energia de incidência $\hbar\omega_0$ coincida com a diferença de energia entre os níveis atômicos, $E_2 - E_1$, então a intensidade do momento de dipolo desses dois níveis é maior que todos os outros dipolos que estão não-ressonante com a radiação incidente [21]. Sendo assim, a intensidade do dipolo ressonante predomina sobre as intensidades dos dipolos não-ressonantes.

Podemos representar de forma esquemática um modelo de átomo de dois níveis, esquematizada na figura (2.1), onde o parâmetro δ é a dessintonização da radiação emitida em relação à frequência de transição atômica. Ou seja, escrevendo a frequência de transição atômica como ω_0 e a frequência da radiação incidente como ω , então, $\delta = \omega - \omega_0$. Outro parâmetro importante que aparece é a taxa de relaxação Γ , da emissão espontânea. Veremos ao longo deste capítulo que este termo de relaxação deverá ser colocado nas equações de forma fenomenológica [20].

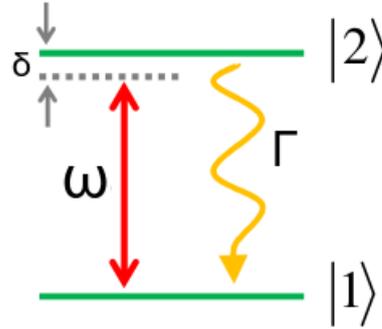


Figura 2.1: Esquema para um átomo de dois níveis, onde ω é a frequência de oscilação do campo, Γ é a taxa de decaimento espontâneo e δ é a dessintonização do campo em relação à frequência ressonante do átomo, ω_0

2.2.1 Equações de Bloch ópticas para um átomo de dois níveis

Para um átomo de dois níveis interagindo com uma radiação eletromagnética, temos que o hamiltoniano do sistema é dado por [22]:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t) \quad (2.17)$$

onde $\hat{H}_0 = \sum_n E_n |n\rangle\langle n|$, com $\hat{H}_0 |n\rangle = E_n |n\rangle$ é o hamiltoniano natural do átomo e $\hat{V}(t)$ é a interação dipolar com um campo elétrico oscilante.

As equações de Bloch ópticas são equações diferenciais acopladas referentes à evolução temporal dos elementos da matriz do operador densidade [19]. Então, como queremos a evolução do operador, usaremos a representação de Heisenberg [23]. Portanto:

$$\langle m | \frac{d\rho(t)}{dt} | n \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle m | [\rho(t), \hat{H}] | n \rangle \quad (2.18)$$

$$\langle m | \frac{d\rho(t)}{dt} | n \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle m | [\rho(t), \hat{H}_0] | n \rangle + \frac{i}{\hbar} \langle m | [\rho(t), \hat{V}(t)] | n \rangle \quad (2.19)$$

$$\langle m | \frac{d\rho(t)}{dt} | n \rangle = \frac{i}{\hbar} (E_n - E_m) \langle m | \rho(t) | m \rangle + \frac{i}{\hbar} \langle m | [\rho(t), \hat{V}(t)] | n \rangle \quad (2.20)$$

Analisando a equação (2.20) observamos que o primeiro termo após a igualdade é diferente de zero se $m \neq n$, pois, caso $m = n$ a diferença das energias se anulam. Note que, $E_m - E_n = \hbar\omega_0$. Uma outra observação é que os elementos da diagonal principal

de $V(t)$ são nulos porque isto é uma interação dipolar. Fazendo $V(t)$ ser hermitiano, a evolução temporal de cada elemento da matriz densidade é dada por:

$$\frac{d\rho_{11}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\rho_{12}V_{21} - \rho_{21}V_{12}] \quad (2.21)$$

$$\frac{d\rho_{22}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\rho_{21}V_{12} - \rho_{12}V_{21}] \quad (2.22)$$

$$\frac{d\rho_{12}(t)}{dt} = i\omega_0\rho_{12} + \frac{i}{\hbar} [V_{12}(\rho_{11} - \rho_{22})] \quad (2.23)$$

$$\frac{d\rho_{21}(t)}{dt} = -i\omega_0\rho_{21} + \frac{i}{\hbar} [V_{21}(\rho_{22} - \rho_{11})] \quad (2.24)$$

As equações (2.21), (2.22), (2.23) e (2.24) são as equações de Bloch [24] e elas podem ser escritas de forma mais suscinta como:

$$\frac{d\rho_{11}(t)}{dt} = -\frac{d\rho_{22}(t)}{dt} \quad (2.25)$$

$$\frac{d\rho_{12}(t)}{dt} = \frac{d\rho_{21}^*(t)}{dt} \quad (2.26)$$

Até o presente momento estamos considerando que o átomo está interagindo com um campo radiativo (laser) e que estas interações levam a processos de absorções e emissões estimuladas. No entanto, o átomo interage com os modos do campo no vácuo e essa interação leva a um processo chamado de emissão espontânea [20]. Devemos acrescentar fenomenologicamente nas equações de Bloch esse termo de relaxação. Atribuindo à taxa de decaimento espontâneo do nível excitado para o nível fundamental a relação $\Gamma = \frac{1}{\tau}$, onde τ é o tempo de vida em que o átomo permanece no estado excitado e atribuindo T ao tempo de relaxação da coerência é possível mostrar [20] que desprezando na ausência de colisões interatômicas, $T = 2\tau$. Isto é, os termos de população decaem com uma taxa Γ , enquanto que os termos de coerência decaem com um fator $\frac{\Gamma}{2}$. Com a inserção desses termos, as equações (2.22) e (2.24) ficam com a seguinte forma:

$$\frac{d\rho_{22}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\rho_{21}V_{12} - \rho_{12}V_{21}] - \Gamma\rho_{22} \quad (2.27)$$

$$\frac{d\rho_{21}(t)}{dt} = -i\omega_0\rho_{21} + \frac{i}{\hbar} [V_{21}(\rho_{22} - \rho_{11})] - \frac{\Gamma}{2}\rho_{21} \quad (2.28)$$

Dadas as equações de Bloch, devemos agora estabelecer os elementos de matriz de $V(t)$. Sabendo $V(t)$ é a interação dipolar com o campo oscilante, como já foi dito anteriormente, então sua expressão é dada por [25]:

$$\hat{V}(t) = -\hat{\mu} \cdot \mathbf{E} \quad (2.29)$$

Onde $\hat{\mu}$ é o operador momento de dipolo e \mathbf{E} é o campo elétrico. Para resolver esta equação devemos notar que o campo pode ser escrito como [25]:

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{2}(e^{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\omega t} + e^{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}) \quad (2.30)$$

Nesta expressão para o campo, podemos usar a aproximação dipolar [26], que consiste em desprezar o termo $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, pois, $\mathbf{k} \propto \frac{1}{\lambda}$ e \mathbf{r} sendo da ordem de grandeza do raio de Bohr $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$. Então, a expressão para o campo fica

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (2.31)$$

Por outro lado, o operador momento de dipolo, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\hat{\mu} = \mu_{12}|1\rangle\langle 2| + \mu_{21}|2\rangle\langle 1| \quad (2.32)$$

Com isso, temos que $\hat{V}(t)$ toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{V}(t) &= \frac{1}{2}(\mu_{12}|1\rangle\langle 2| + \mu_{21}|2\rangle\langle 1|) \cdot E_0(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \\ \hat{V}(t) &= -\frac{\mu_{12}E_0}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})|1\rangle\langle 2| - \frac{\mu_{21}E_0}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})|2\rangle\langle 1| \end{aligned} \quad (2.33)$$

Onde $\mu_{21} = -e \int \psi_1^*(\vec{r})\vec{r}\psi_2^*(\vec{r})dr$, $|1\rangle\langle 2| = |1\rangle\langle 2|(t)$ e $|2\rangle\langle 1| = |2\rangle\langle 1|(t)$. Essa integral é calculada em todo o espaço e os termos $\mu_{11} = \mu_{22} = 0$ devido aos integrandos serem funções ímpares. Fazendo $\Omega\hbar = \mu_{21}E_0 = \mu_{12}^*E_0$ (onde Ω é denominado de frequência de Rabi), ficaremos com $\hat{V}(t)$ da seguinte forma:

$$\hat{V}(t) = -\frac{\hbar\Omega^*}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})|1\rangle\langle 2| - \frac{\hbar\Omega}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})|2\rangle\langle 1| \quad (2.34)$$

Na equação (2.34), podemos considerar que o operador $|1\rangle\langle 2|$ leva o átomo para o estado fundamental enquanto que o operador $|2\rangle\langle 1|$ leva o átomo para o estado excitado. Estes operadores evoluem proporcionalmente ao termo $e^{\pm i\omega_0 t}$.

Uma outra forma de analisar esse termo é que ele está associado a operadores de criação e destruição [23] (em analogia com o oscilador harmônico quântico). Ou seja, o termo em $e^{-i\omega_0 t}$ está associado ao operador de destruição (o átomo decai para o nível fundamental emitindo um fóton) e o termo $e^{i\omega_0 t}$ está associado ao operador de criação, o átomo é levado ao nível excitado absorvendo um fóton. Quando fazemos estas considerações, esses operadores de criação e destruição são levados à $t = 0$, ou seja, $|2\rangle\langle 1| = e^{i\omega_0 t}|2\rangle\langle 1|(0)$ e $|1\rangle\langle 2| = e^{-i\omega_0 t}|1\rangle\langle 2|(0)$.

Com isso, a equação (2.34), fica com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{V}(t) &= -\frac{\hbar\Omega^*}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})e^{-i\omega_0 t}|1\rangle\langle 2|(0) - \frac{\hbar\Omega}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})e^{i\omega_0 t}|2\rangle\langle 1|(0) \\ \hat{V}(t) &= -\frac{\hbar\Omega^*}{2} [e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t}] |1\rangle\langle 2|(0) - \frac{\hbar\Omega}{2} [e^{i(\omega+\omega_0)t} + e^{-i(\omega-\omega_0)t}] |2\rangle\langle 1|(0) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Os termos $\omega + \omega_0$ são aproximadamente o dobro da frequência de ressonância atômica. Esses termos não-ressonantes podem então serem desprezados da expressão de $\hat{V}(t)$, pois, as exponenciais $e^{\pm i(\omega+\omega_0)t}$ oscilam muito rápido quando comparado com os termos $e^{\pm i(\omega-\omega_0)t}$ que oscilam lentamente. Desta forma, podemos aproximar estes termos de maior frequência pelo seu valor médio. Ou seja:

$$e^{\pm i(\omega+\omega_0)t} \simeq 0 \quad (2.36)$$

Quando desprezamos esses termos que estão longe da ressonância, estamos fazendo a aproximação dita de ondas girantes [27] (*Rotating Wave Approximation* - R.W.A.). Feito essas considerações, a expressão para $\hat{V}(t)$ fica

$$\hat{V}(t) = -\frac{\hbar\Omega^*}{2}e^{i\delta t}|1\rangle\langle 2|(0) - \frac{\hbar\Omega}{2}e^{-i\delta t}|2\rangle\langle 1|(0) \quad (2.37)$$

Onde $\delta = \omega - \omega_0$ é a dessintonização. Voltando para $|2\rangle\langle 1|(t)$ e $|1\rangle\langle 2|(t)$, chegamos, finalmente, a expressão para $\hat{V}(t)$

$$\hat{V}(t) = -\frac{\hbar\Omega^*}{2}e^{i\omega t}|1\rangle\langle 2| - \frac{\hbar\Omega}{2}e^{-i\omega t}|2\rangle\langle 1| \quad (2.38)$$

Como encontramos a forma matricial de $\hat{V}(t)$, as equações (2.27) e (2.28) adquirem a seguinte forma:

$$\frac{d\rho_{22}(t)}{dt} = -i\frac{\Omega^*e^{i\omega t}}{2}\rho_{21} + i\frac{\Omega e^{-i\omega t}}{2}\rho_{12} - \Gamma\rho_{22} \quad (2.39)$$

$$\frac{d\rho_{21}(t)}{dt} = -\left(i\omega_0 + \frac{\Gamma}{2}\right)\rho_{21} - i\frac{\Omega e^{-i\omega t}}{2}(\rho_{22} - \rho_{11}) \quad (2.40)$$

A solução das equações (2.39) e (2.40) são os elementos da matriz densidade.

2.2.1.a Solução para as equações de Bloch

Iremos resolver as equações (2.39) e (2.40). Para isto, faremos a seguinte mudança de variáveis:

$$\rho_{22} = \sigma_{22} \quad (2.41)$$

$$\rho_{21} = e^{-i\omega t}\sigma_{21} \quad (2.42)$$

onde, σ_{21} é uma função que varia lentamente quando comparado ao termo $e^{\pm i\omega t}$. Com isso, temos que:

$$\frac{d\rho_{22}(t)}{dt} = \frac{i}{2}(\Omega\sigma_{12} - \Omega^*\sigma_{12}^*) - \Gamma\rho_{22} \quad (2.43)$$

$$\frac{d\sigma_{12}^*}{dt} = \left(i\delta - \frac{\Gamma}{2}\right)\sigma_{12}^* - \frac{i\Omega}{2}(2\rho_{22} - 1) \quad (2.44)$$

Onde usamos o fato que $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$ e $\sigma_{12}^* = \sigma_{21}$.

Fazendo o estudo para o regime estacionário [20] em que $\frac{d\rho_{22}(t)}{dt} = \frac{d\sigma_{12}^*}{dt} = 0$, as equações (2.43) e (2.44), nos fornece as expressões analítica para ρ_{22} e σ_{12} . Portanto:

$$\rho_{22} = \frac{\frac{\Omega^2}{\Gamma^2}}{1 + \frac{4\delta^2}{\Gamma^2} + \frac{2\Omega^2}{\Gamma^2}} \quad (2.45)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\Omega}{\Gamma} \frac{\frac{2\delta}{\Gamma} - i}{1 + \frac{4\delta^2}{\Gamma^2} + \frac{2\Omega^2}{\Gamma^2}} \quad (2.46)$$

As equações (2.45) e (2.46) nos fornece todos os elementos da matriz densidade.

2.2.2 Expressão para suscetibilidade e coeficiente de absorção

A expressão resultante para suscetibilidade fornece tanto o perfil espectral de absorção quanto o perfil espectral de dispersão de um vapor atômico.

Então, para encontrar esta expressão da suscetibilidade, devemos obter primeiro a polarização, pois [28]:

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}(\mathbf{t}) \quad (2.47)$$

Por outro lado, em um conjunto de partículas, a polarização é dada por [29]:

$$\langle P \rangle = n \langle \mu \rangle \quad (2.48)$$

onde n é o número de átomos por unidade de volume (densidade atômica) e $\langle \mu \rangle$ é o valor esperado do momento de dipolo atômico. Para calcular a média de um operador em um *ensemble* de átomos, usaremos a equação (2.16).

$$\langle \mu \rangle = Tr(\rho \mu)$$

$$\langle \mu \rangle = \rho_{12} \mu_{21} + \rho_{21} \mu_{12} \quad (2.49)$$

Portanto,

$$P = n \mu_{12} \rho_{21} + c.c. = n \mu_{12} \sigma_{21} e^{-i\omega t} + c.c. \quad (2.50)$$

Como o campo elétrico é dado por $\mathbf{E} = \frac{E_0}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$, então, a equação (2.47) assume a seguinte forma:

$$P = \frac{\varepsilon_0 \chi E_0}{2} e^{-i\omega t} + c.c. \quad (2.51)$$

Igualando-se as equações (2.50) e (2.51), chegaremos à expressão para a suscetibilidade,

$$\chi = -\frac{2 n |\mu_{12}|^2}{\Gamma \varepsilon_0 \hbar} \frac{\frac{2\delta}{\Gamma} - i}{1 + \frac{4\delta^2}{\Gamma^2} + \frac{2\Omega^2}{\Gamma^2}} \quad (2.52)$$

Definindo-se a intensidade de saturação¹ através da relação [19]:

$$\frac{I}{I_S} = \frac{2\Omega^2}{\Gamma^2} = \frac{2 |\mu_{12}|^2 |E_0|^2}{\hbar^2} \quad (2.53)$$

podemos reescrever a suscetibilidade dada na equação (2.52) da seguinte maneira

$$\chi = -\frac{2 n |\mu_{12}|^2}{\Gamma \varepsilon_0 \hbar} \frac{\frac{2\delta}{\Gamma} - i}{1 + \frac{4\delta^2}{\Gamma^2} + \frac{I}{I_S}} \quad (2.54)$$

A equação (2.54) pode ser separada em duas partes, uma parte real e outra imaginária. A parte real da suscetibilidade está relacionada à dispersão da luz no meio atômico e a parte imaginária está ligada à absorção neste meio atômico [19, 20].

$$\text{Re}\chi = -\frac{4 n |\mu_{12}|^2}{\Gamma^2 \varepsilon_0 \hbar} \frac{\delta}{1 + \frac{4\delta^2}{\Gamma^2} + \frac{I}{I_S}} \quad (2.55)$$

$$\text{Im}\chi = \frac{2 n |\mu_{12}|^2}{\Gamma \varepsilon_0 \hbar} \frac{1}{1 + \frac{4\delta^2}{\Gamma^2} + \frac{I}{I_S}} \quad (2.56)$$

Podemos perceber que tanto a parte real e a parte imaginária da suscetibilidade dependem da razão entre a intensidade da luz incidente no meio e a intensidade de saturação do vapor atômico.

A figura (2.2) apresenta gráficos sobrepostos mostrando como a absorção e a dispersão varia com a razão $\frac{I}{I_S}$. O perfil de absorção é conhecido como perfil de Lorentz. Ao longo deste trabalho, denominaremos a parte imaginária da suscetibilidade (ou coeficiente de absorção) como $K(\omega)$

¹A intensidade de saturação é a intensidade que a radiação incidente deve possuir para que uma quantidade considerável de átomos encontrados no nível fundamental vá para o nível excitado de forma que a quantidade máxima de átomos no nível excitado seja igual a $N_2 = N/2$, onde N é o número total de átomos e N_2 é o número de átomos no estado excitado [30, 31]

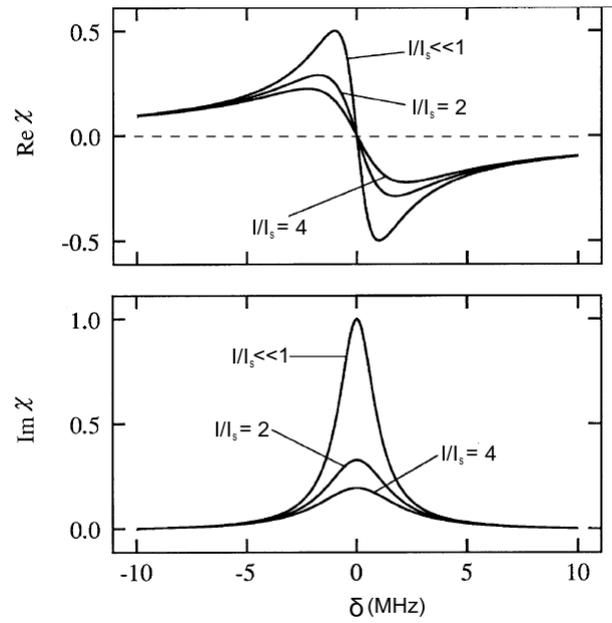


Figura 2.2: Parte real e imaginária da suscetibilidade representando a dispersão e a absorção, respectivamente, em função da dessintonização.

Com a ajuda da figura (2.3) podemos calcular a largura a meia altura (*Full Width at Half-Maximum* - FWHM) do perfil de absorção da seguinte maneira

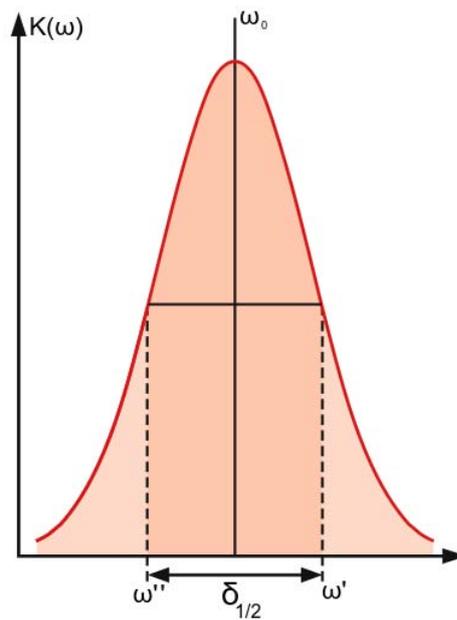


Figura 2.3: Largura a meia altura do perfil de Lorentz.

$$K(\omega') = \frac{1}{2}K(\omega_0)$$

$$\frac{2}{\Gamma} \frac{n|\mu_{12}|^2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{1}{1 + \frac{4(\delta')^2}{\Gamma^2} + \frac{I}{I_S}} = \frac{1}{\Gamma} \frac{n|\mu_{12}|^2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{1}{1 + \frac{I}{I_S}} \quad (2.57)$$

Com a equação (2.57) verificamos que

$$\delta' = \frac{\Gamma}{2} \left(1 + \frac{I}{I_S}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.58)$$

Onde $\delta' = \omega' - \omega_0$. Então, para encontrar Γ_N , que é a largura a meia altura, fazemos $\Gamma_N = 2\delta'$. Portanto, encontramos que FWHM é dado por

$$\Gamma_N = \Gamma \left(1 + \frac{I}{I_S}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.59)$$

Uma observação que podemos fazer na equação (2.59) é que com o aumento da intensidade da radiação incidente no átomo ocorre uma ampliação na largura espectral $\delta_{1/2}^L$.

2.2.3 Efeito Doppler em meios atômicos

Até o presente momento consideramos átomos parados. Nesta seção, iremos considerar que o coeficiente de absorção atômico seja dado por uma função delta e levaremos em conta o movimento térmico dos átomos. Para um átomo com velocidade \mathbf{v} e considerando uma radiação incidente na direção do vetor de onda \mathbf{k} para um observador fixo no referencial do laboratório, a frequência da onda aparecerá no referencial do átomo com um deslocamento devido ao efeito Doppler [32]

$$\omega' = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \quad (2.60)$$

onde ω' é a frequência da luz no referencial do átomo e ω a frequência da luz no referencial do laboratório e $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$. Devido ao produto escalar de \mathbf{k} com a velocidade, somente a componente de velocidade ao longo de \mathbf{k} é importante para o efeito Doppler [26]. Então, esta distribuição de frequências para um vapor atômico em equilíbrio térmico segue a distribuição de probabilidade de velocidades de Maxwell-Boltzmann (ver Apêndice C), cuja expressão em uma dimensão, definida pela direção de propagação do campo, é dada por:

$$D(\delta) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mc^2 \delta^2}{2\omega_0^2 k_B T}} \quad (2.61)$$

Onde $\delta = \omega - \omega_0$. A equação (2.61) tem o perfil de uma curva de Gauss e o seu espectro é mostrado na figura (2.4).

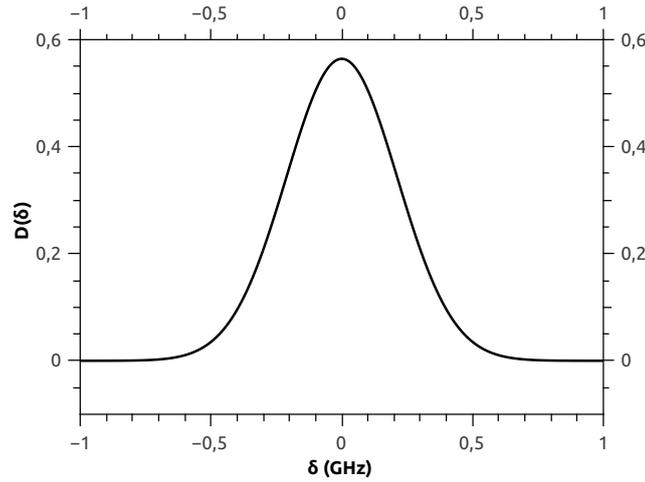


Figura 2.4: Perfil de Gauss obtido a partir da equação (2.61) para $T = 300K$

A figura (2.4) foi obtida para $T = 300K$.

Podemos usar o mesmo procedimento feito para encontrar a largura FWHM do coeficiente de absorção $K(\omega)$ para obter também a largura a meia altura (Γ_D) do perfil de Gauss. Assim, obtemos que Γ_D é dado por:

$$\Gamma_D = \frac{2\omega_0}{c} \left(\frac{2k_B T \ln(2)}{m} \right)^{1/2} \quad (2.62)$$

2.2.4 Perfil de Voigt

Até o presente momento fizemos duas considerações para encontrar o perfil de absorção do átomo, ou seja, ou dizemos que ele está parado ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$) com espectro de linha homogêneo ou está em movimento com perfil de Gauss, sendo o último, com uma largura de linha natural desprezível. Então, agora vamos considerar a largura homogênea finita.

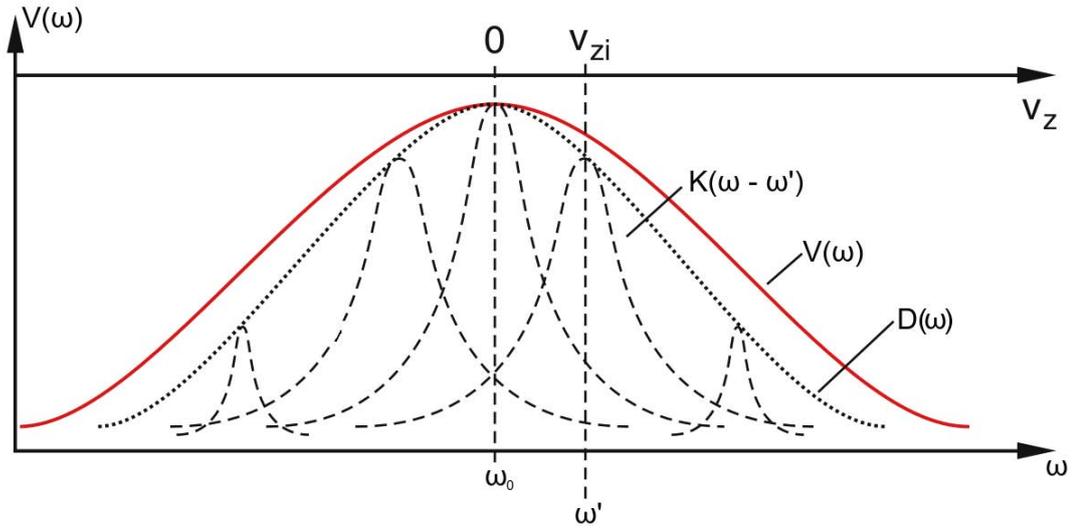


Figura 2.5: Perfil de Voigt. Convolução entre $K(\omega - \omega')$ e $D(\omega)$

A figura (2.5) mostra o perfil de Gauss gerado pelo efeito Doppler que é uma propriedade de um vapor atômico à temperatura T com átomos movendo-se com velocidade \mathbf{v} . Além disso, a figura (2.5) mostra que cada átomo possui uma certa largura de linha homogênea não desprezível. A combinação desses dois efeitos nos leva ao chamado perfil de Voigt [32], que é uma convolução entre o perfil de Gauss e o perfil de Lorentz. Matematicamente, o espectro de Voigt é dado por:

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega - \omega') D(\omega) d\omega'$$

$$V(\omega) = \left(\frac{2m}{k_B T} \right)^{1/2} \frac{n |\mu_{12}|^2}{\varepsilon_0 \Gamma \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{mc^2 \delta^2}{2\omega_0^2 k_B T}}}{1 + \frac{4(\omega - \omega_0 - \omega')^2}{\Gamma^2} + \frac{I}{I_S}} d\omega' \quad (2.63)$$

Onde $K(\omega - \omega')$ e $D(\omega)$, são os perfis espectrais de Lorentz e Gauss, respectivamente. A integral dada em (2.63) não possui solução analítica. Usando o parâmetro de Voigt [1] definido como $a = \left(\delta_{1/2}^L / \delta_{1/2}^G \right) (\ln 2)^{1/2}$, podemos reescrever a equação (2.63) em função deste parâmetro.

$$V(\omega) = \frac{4\omega_0 n |\mu_{12}|^2}{c \varepsilon_0 \Gamma^2 \hbar} \frac{a}{1 + \frac{I}{I_S}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{mc^2 \delta^2}{2\omega_0^2 k_B T}}}{1 + \frac{4(\omega - \omega_0 - \omega')^2}{\Gamma^2} + \frac{I}{I_S}} d\omega' \quad (2.64)$$

A figura (2.6) mostra os três espectros, Lorentz, Gauss e Voigt. Esta figura nos auxilia a observar que o espectro de Voigt é uma "mistura" dos outros dois, onde a parte central

se assemelha com o perfil de Gauss, enquanto que no regime assintótico se assemelha ao perfil Lorentz com as asas longas.

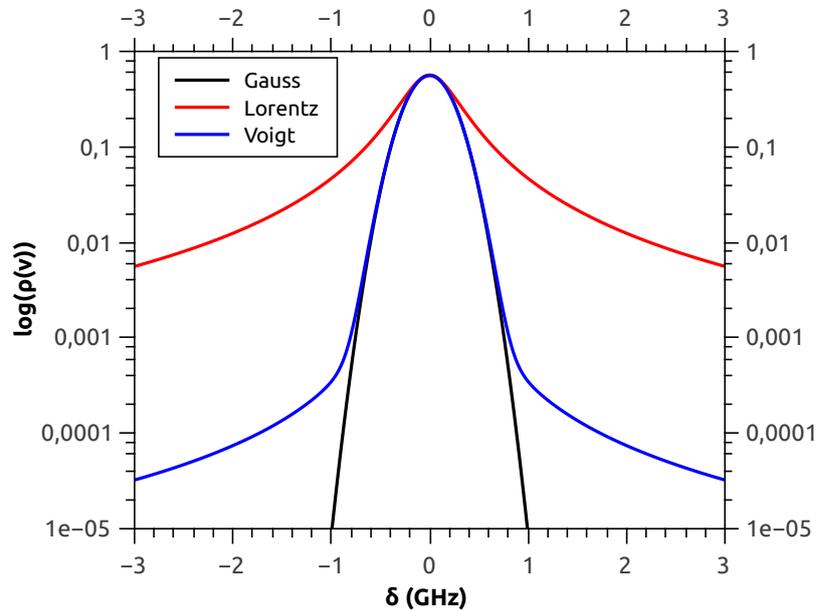


Figura 2.6: Comparação entre os espectros de Lorentz, Gauss e Voigt com escala vertical logarítmica. O perfil de Gauss em preto, Lorentz em vermelho e Voigt em azul. O parâmetro de Voigt usado foi de 10^{-2} . Os três perfis (Lorentz, Gauss e Voigt) estão com a mesma largura de 500 MHz.

2.3 Redistribuição completa e parcial de frequência

Consideremos um certo volume no qual está contido um número definido de átomos sobre os quais incide uma radiação cuja frequência está próxima da frequência de transição atômica. Esses átomos irão absorver fótons e reemiti-los em seguida.

Durante o processo de absorção, o momento linear do fóton é adicionado ao momento linear do átomo, enquanto que, no processo de emissão, o momento linear do fóton é subtraído ao momento linear do átomo. Porém, para uma das linhas de ressonância do rubídio ($\lambda = 780,241$ nm), à temperatura ambiente ($T \approx 300$ K), a razão entre o momento do fóton ($P_f = \hbar k = \hbar \nu / c$) e momento do átomo ($P_a = mv$) é da ordem de $P_f / P_a \approx 10^{-4}$. Portanto, podemos considerar, a partir deste fator, que a velocidade do átomo permanece inalterada durante o processo de absorção. De forma equivalente, no processo de reemissão, acontece o procedimento inverso ao ocorrido no processo de

absorção, com o momento do fóton subtraído ao momento do átomo, em vez de ser somado. Com isso, assume-se que a velocidade do átomo permanece praticamente inalterada.

De acordo com a equação (2.60), a diferença entre a radiação absorvida e a emitida, no referencial do laboratório vai ser devida à direção de propagação do fóton emitido, pois as frequências de absorção e de emissão coincidem-se no referencial do átomo em repouso.

Devido ao perfil de absorção homogêneo do átomo (perfil de Lorentz), os fótons com frequências afastadas do centro da absorção atômica (nas asas da distribuição) serão absorvidos, principalmente, por aqueles átomos que movem-se lentamente. No processo de emissão, o átomo possui aproximadamente a mesma velocidade quando houve a absorção e este mesmo átomo emite um fóton na mesma frequência em que ele foi absorvido [33]. Então, como existe uma correlação nas frequências do fóton que foi absorvido e posteriormente emitido, dizemos que houve uma redistribuição parcial de frequência (*Partial Frequency Redistribution* - PFR) [1]. De maneira geral, existe uma memória da frequência de absorção na frequência de emissão do fóton pelo átomo, ou seja, conseguimos saber em qual frequência o átomo absorveu o fóton através da frequência de emissão. O estudo pioneiro da PFR foi lançado no campo da astrofísica [34].

Caso a frequência de absorção seja totalmente descorrelacionada da frequência de emissão, dizemos que houve uma redistribuição completa de frequência (*Complete Frequency Redistribution* - CFR). Ou seja, a partir da redistribuição em frequência dos fótons emitidos, não sabemos qual a frequência que os átomos foram excitados pela luz incidente. Visualmente, os espectro de emissão e absorção são os mesmos. De forma sucinta, podemos afirmar que a CFR implica que a frequência do fóton emitido é independente da frequência do fóton que foi previamente absorvido [35], diferentemente da PFR em que as frequências desses dois processos estão correlacionadas. Esse conceito sobre CFR foi usado na dedução da equação íntegro-diferencial de Holstein [5] sobre o aprisionamento de radiação.

CAPÍTULO 3

ESTATÍSTICA DE PASSOS DE FÓTONS EM VAPOR ATÔMICO

Neste capítulo apresentaremos conceitos básicos de distribuição de probabilidade. Discutiremos primeiro o caso da estatística de distribuições normais, através do Teorema do Limite Central. Distribuições desviando desse comportamento “normal” serão discutidas a seguir, particularmente aquelas que apresentam um decaimento assintótico em lei de potência. Discutiremos em seguida um problema específico, relacionado à propagação de luz em meios ressonantes. Iremos encontrar a distribuição de probabilidade dos passos do fóton em um vapor atômico e mostrar que ela segue uma estatística não-normal.

3.1 Distribuição de probabilidade como lei de potência

O Teorema do Limite Central (*Central Limit Theorem* - CLT) é um dos mais importantes teoremas da Estatística, posto que as distribuições de probabilidade que o CLT aborda possuem enorme aplicabilidade [36], nas mais diversas áreas do conhecimento.

Considere a soma x de N variáveis independentes (s_i) e identicamente distribuídas de acordo com a função de distribuição de probabilidade $w(s_i)$:

$$x = \sum_i^N s_i \tag{3.1}$$

O nosso objetivo agora é encontrar a probabilidade $P(x)dx$ de encontrar o valor de x em um certo intervalo, compreendido nos limites entre x e $x + dx$. Por exemplo, para um caminhante com passo aleatório, podemos interpretar s_i como sendo o deslocamento do

i-ésimo passo deste caminhante e x será a posição final após N passos desta caminhada. Como as probabilidades dos passos são estatisticamente independentes, então, a probabilidade de uma sequência de passos em um intervalo entre s_i e $s_i + ds_i$ é o produto da probabilidade individual de cada passo, ou seja:

$$w(s_1)ds_1.w(s_2)ds_2.w(s_3)ds_3\dots w(s_N)ds_N \quad (3.2)$$

Somando esta probabilidade dada pela equação (3.2) sobre todos os deslocamentos, obteremos $P(x)$. Portanto:

$$P(x) = \int \dots \int w(s_1)\dots w(s_N)ds_1\dots ds_N \quad (3.3)$$

onde a integral é dada sobre todos os valores de s_i , sujeito a restrição de que $x < \sum_i^N s_i < x + dx$.

Em princípio, o cálculo da equação (3.3), resolve o problema inicial de encontrar $P(x)$. Entretanto, a integral apresentada na equação (3.3) apresenta uma dificuldade devido a restrição sobre os valores de s_i . Portanto, para resolver este problema, introduziremos a função delta de Dirac δ e, desta maneira, integramos sobre todo o espaço. Com isso, a equação (3.3) fica:

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(s_1)\dots w(s_N) \left[\delta \left(x - \sum_i^N s_i \right) \right] ds_1\dots ds_N \quad (3.4)$$

onde não existe mais nenhuma restrição sobre os limites de integração. Sabendo que a representação integral da função delta de Dirac δ é dada por

$$\delta \left(x - \sum_i^N s_i \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(ik[\sum_i^N s_i - x])} dk \quad (3.5)$$

a equação (3.4) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(s_1)\dots w(s_N) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(ik[s_1\dots s_N - x])} dk \right] ds_1\dots ds_N$$

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk \int_{-\infty}^{\infty} w(s_1)e^{iks_1} ds_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} w(s_N)e^{iks_N} ds_N \quad (3.6)$$

Podemos agora introduzir a função característica ($f(k)$) associada à distribuição $w(s)$.

Esta função característica é uma transformada de Fourier de $P(x)$ [37]. Então $f(k)$ pode ser escrita como:

$$f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} w(s)e^{iks} ds \quad (3.7)$$

Como as integrais em ds na equação (3.6) são todas iguais, assim, a distribuição $P(x)$ pode ser reescrita em função de $f(k)$.

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} [f(k)]^N dk \quad (3.8)$$

Agora, para obter $P(x)$, devemos encontrar $[f(k)]^N$. Esta função característica possui uma parte oscilatória em seu integrando (e^{iks}) e quanto maior o valor de $|k|$ mais rápido será sua oscilação. Como $f(k)$ está elevada a uma potência N segue que esta função decresce muito mais rapidamente com o aumento de k e assim, sua contribuição na integral será desprezível para valores grandes de k . Desta forma, apenas o conhecimento de $[f(k)]^N$ para valores pequenos de k é o suficiente para calcular $P(x)$. Portanto, fazendo uma expansão em série de Taylor deste termo oscilatório da função característica, temos que:

$$f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} w(s) \left(1 + ks - \frac{1}{2}k^2s^2 \dots \right) ds \quad (3.9)$$

Usando o fato que $\langle s^n \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} s^n w(s) ds$, a equação (3.9) assume a seguinte forma:

$$f(k) = 1 + ik\langle s \rangle - \frac{1}{2}k^2\langle s^2 \rangle + \dots \quad (3.10)$$

Podemos usar o fato que $[f(k)]^N = e^{N \ln[f(k)]}$ e lembrando que a expansão em série da função logaritmica é dada por:

$$\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \dots \quad (3.11)$$

então, $[f(k)]^N$ vai ficar:

$$[f(k)]^N = e^{(i\bar{\mu}k - \frac{1}{2}k^2\sigma^2)} \quad (3.12)$$

onde usamos $\bar{\mu} = N\langle s \rangle$ e $\sigma^2 = N(\langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2)$. $\bar{\mu}$ é o valor médio da variável x , $\langle s \rangle$ é o valor esperado da variável s e σ^2 é a variância da variável x .

Inserindo a equação (3.12) na equação (3.8) obtemos que

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\bar{\mu}-x)k - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2} dk \quad (3.13)$$

Para resolver a equação (3.13), devemos usar o método de completar quadradinhos no argumento da exponencial e, com isso, finalmente, chegaremos a expressão para $P(x)$

$$P(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)} e^{-\left[\frac{(x-\bar{\mu})^2}{2\sigma^2}\right]} \quad (3.14)$$

A equação (3.14) é a chamada distribuição normal ou distribuição de Gauss e será, portanto, a distribuição de probabilidade para a soma da variável s_i para um regime onde $N \rightarrow \infty$. Esta equação também nos fornece uma importante informação, pois, a distribuição de probabilidade da soma da variável associada à s_i vai ser uma distribuição normal com um máximo em torno da média $\bar{\mu}$ sem importar qual será a distribuição atribuída para $w(s_i)$, desde que sejam independentes e para N suficientemente grande. Isto é o que chamamos de Teorema do Limite Central [38]. Vale lembrar que para uma distribuição normal o valor de seus momentos $\langle s^n \rangle$ é finito.

Podemos ilustrar o CLT com um lançamento de uma moeda não viciada cuja sua distribuição de probabilidade de obter $x_i = 1, 2$ é dada por:

$$P(x_i) = \frac{1}{2} \sum_{y=1}^2 \delta(x_i - y) \quad (3.15)$$

A figura (3.1), mostra a evolução da distribuição de probabilidade em um lançamento de moedas e percebemos que quanto maior o número de repetições deste evento, a distribuição de probabilidade final tende a ser uma distribuição normal, como afirma o Teorema do Limite Central (CLT).

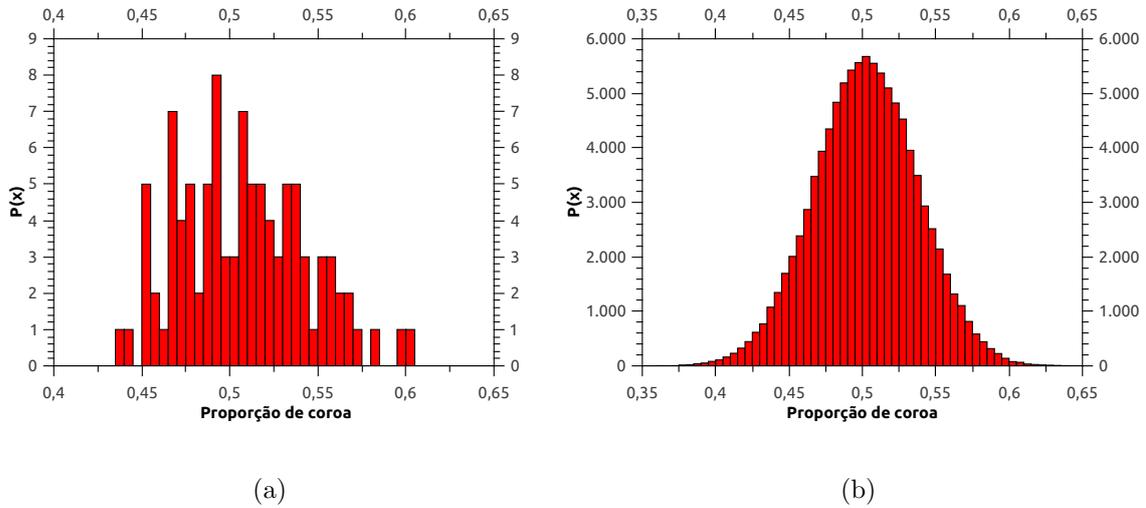


Figura 3.1: Evolução de $P(x)$ para um lançamento de uma moeda. Foram lançadas duzentas moedas. (a) lançamento das duzentas moedas cem vezes. (b) lançamento das duzentas moedas cem mil vezes.

Para o Teorema do Limite Central, usamos o fato que as variáveis aleatórias possuem os seus momentos finitos. Entretanto, o matemático francês Paul Lévy provou existir novas soluções para a soma de variáveis que envolvem distribuição de probabilidade cujos momentos não são finitos. Lévy questionou em qual condição a distribuição de probabilidade ($P_N(x)$) da soma de N passos seria igual à distribuição ($P(x)$) individual de cada passo [39]. Inspirado no CLT, a resposta seria uma gaussiana a menos de um fator multiplicativo, pois a soma de N gaussianas ainda continua sendo uma gaussiana. Mas Lévy descobriu outras soluções para $P_N(x)$ e $P(x)$ de tal forma que teriam a mesma distribuição e assim, ele descobriu que esse caso se encontrava quando a função característica é dada por:

$$f(k) = e^{-(x_0^\eta |k|^\eta)} \quad (3.16)$$

onde x_0 é uma constante com dimensão de comprimento. Vale ressaltar que esta equação é válida para $0 < \eta \leq 2$. Substituindo a equação (3.16) na equação (3.8) obtemos:

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} [f(k)]^N dk$$

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(kx) - i \operatorname{sen}(kx)] e^{-N(x_0^\eta |k|^\eta)} dk$$

$$P(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kx) e^{-N(x_0^\eta |k|^\eta)} dk \quad (3.17)$$

Em que na equação (3.17) usamos o fato que a parte imaginária é nula pois, o integrando é uma função ímpar em um intervalo simétrico, enquanto que a parte real é uma função par. Analisando para o regime assintótico ($x \rightarrow \infty$), a equação (3.17) obtém-se a seguinte forma:

$$P(x) \sim \frac{1}{x^\mu} \quad (3.18)$$

onde $\mu = \eta + 1$ e $x \neq 0$, em que o valor mínimo de x é $|x_{min}| \geq x_0$. Lembrando que os valores negativos de x significam passos para esquerda, enquanto que, para os valores positivos, são passos para direita.

Agora, iremos calcular o primeiro momento ($\langle x \rangle$) e o segundo momento ($\langle x^2 \rangle$) da equação (3.18). Para o primeiro momento, temos que:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x x^{-\mu} dx \\ \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{-x_0} x^{-\mu+1} dx + \int_{x_0}^{\infty} x^{-\mu+1} dx \end{aligned} \quad (3.19)$$

Assim, com a equação (3.19), obtemos diferentes valores para o primeiro momento dependendo do valor de μ . Ou seja:

$$\begin{cases} \mu \leq 2, & \langle x \rangle \text{ diverge} \\ \mu > 2, & \langle x \rangle \text{ é nulo} \end{cases} \quad (3.20)$$

Por outro lado, para o segundo momento, temos que:

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 x^{-\mu} dx \\ \langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{-x_0} x^{-\mu+2} dx + \int_{x_0}^{\infty} x^{-\mu+2} dx \end{aligned} \quad (3.21)$$

Igualmente ao primeiro momento, dependendo do valor de μ , obteremos valores diferentes para $\langle x^2 \rangle$. Assim, temos que:

$$\begin{cases} \mu \leq 3, & \langle x^2 \rangle \text{ diverge} \\ \mu > 3, & \langle x^2 \rangle \text{ constante} \end{cases} \quad (3.22)$$

Com os resultados obtidos nas equações (3.20) e (3.22), podemos afirmar qual o tipo de distribuição da variável aleatória dada na equação (3.18), mesmo sendo esta obtida para o regime assintótico da distribuição. Ou seja, para $\mu \geq 3$ a distribuição de probabilidade apresenta uma distribuição normal (gaussiana), enquanto que para $1 \leq \mu < 3$ seguem uma distribuição não-normal, denominada de distribuição Lévy [6, 40]. As distribuições de Lévy são dominadas por eventos raros e seu segundo momento sempre diverge para $\mu \leq 3$, porém o primeiro momento só diverge se $\mu \leq 2$.

A figura (3.2) mostra a distribuição de probabilidade para uma caminhada aleatória em duas dimensões e com direção angular uniformemente distribuída. Na figura (3.2 (a)), observamos uma distribuição normal (distribuição de Gauss) com o expoente $\mu = 5$ da distribuição de probabilidade dada pela equação (3.18), enquanto que, a figura (3.2 (b)) caracteriza uma difusão não-normal, cujo expoente $\mu = 2$. Podemos perceber que nesta difusão não-normal ocorre vários passos curtos intercalados de saltos longos. Diferentemente da difusão normal, onde toda a distribuição de probabilidade é regida por passos distintos, mas uniformemente curtos. Embora, os passos longos que ocorrem na distribuição não-normal serem uma pequena fração do número total de passos, eles irão governar a estatística do sistema [41].

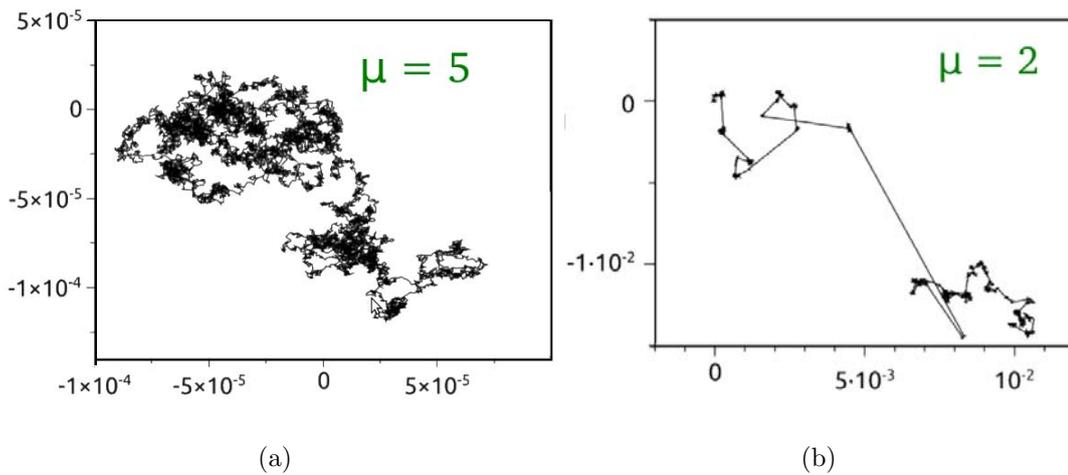


Figura 3.2: Exemplo de caminhada aleatória em duas dimensões com uma direção angular distribuída uniformemente. (a) Movimento caracterizando uma distribuição normal (distribuição de Gauss) com expoente $\mu = 5$. (b) Movimento caracterizando uma distribuição não-normal com expoente $\mu = 2$.

3.2 Distribuição de probabilidade de absorção e emissão de fótons em um vapor atômico

Nesta seção iremos encontrar a distribuição de probabilidade dos passos de fótons em um vapor ressonante com a radiação incidente. Para isso, consideremos um vapor atômico no qual fazemos incidir uma radiação de frequência ν , como mostra a figura (3.3). Fazemos $T_\nu(r + dr)$ ser a probabilidade dos fótons que chegaram à posição r sem serem absorvidos por um volume do vapor atômico de espessura dr .

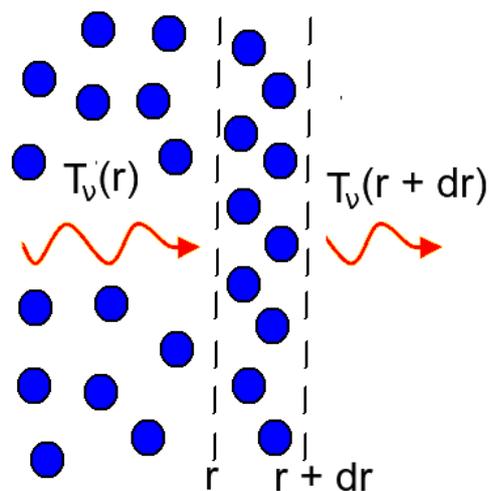


Figura 3.3: Probabilidade de transmissão dos fótons ao passar através de um meio atômico.

Designando $\Phi_{abs}(\nu)$ como a probabilidade, por unidade de comprimento, dos fótons de frequência ν serem absorvidos pelo vapor, podemos encontrar uma relação entre $T_\nu(r)$ e $\Phi_{abs}(\nu)$. Devemos ter uma probabilidade $T_\nu(r)$ dos fótons serem transmitidos pelo vapor, porém, ainda devemos levar em conta a probabilidade de serem absorvidos e lembrando que essas probabilidades, de absorção e transmissão são independentes, então, a probabilidade dos fótons, $T(r + dr)$, serem transmitidos pela espessura do vapor dr localizada na posição r é dada por

$$T(r + dr) = T(r) [1 - \Phi_{abs}(\nu)dr] \quad (3.23)$$

onde o termo entre colchetes refere-se à probabilidade dos fótons serem transmitidos pelo vapor atômico e $T(r)$ à probabilidade dos fótons serem transmitidos até uma distância r . Sabendo que $T_\nu(r + dr) - T_\nu(r) = \frac{\partial T_\nu(r)}{\partial r} dr$, a equação (3.23) fica:

$$\frac{\partial T_\nu(r)}{T_\nu(r)} = -\Phi_{abs}(\nu) \partial r$$

$$T_\nu(r) = e^{-\Phi_{abs}(\nu)r} \quad (3.24)$$

A equação (3.24) é conhecida como lei de Beer [26]. Com isso, podemos encontrar a distribuição do tamanho do passo do fóton de frequência ν , $P_\nu(r)$. Retomando a equação (3.3), obtemos que:

$$T_\nu(r + dr) = T_\nu(r) - P_\nu(r)dr$$

$$P_\nu(r) = -\frac{\partial T_\nu(r)}{\partial r}$$

$$P_\nu(r) = \Phi_{abs}(\nu)e^{-\Phi_{abs}(\nu)r} \quad (3.25)$$

A equação (3.25) descreve a distribuição de probabilidade do comprimento dos passos de fótons de frequência ν que se propagam em um meio com absorção $\Phi_{abs}(\nu)$. Ou seja, esta distribuição de probabilidade dos fótons é dada apenas para uma radiação monocromática.

Supondo que a luz possua uma distribuição espectral $\Phi_{inc}(\nu)$, então a distribuição

resultante $P(r)$ corresponde a uma média de $P_\nu(r)$ sobre o espectro de incidência $\Phi_{inc}(\nu)$. Portanto:

$$P(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{inc}(\nu) P_\nu(r) d\nu$$

$$P(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{inc}(\nu) \Phi_{abs}(\nu) e^{-\Phi_{abs}(\nu)r} d\nu \quad (3.26)$$

A equação (3.26) descreve a distribuição dos passos dos fótons em um vapor atômico levando em conta que a excitação no meio atômico possua certa distribuição em frequência [42, 12].

O caminho do fóton em um meio atômico possui um comportamento superdifusivo [12] (distribuição não-normal). Para os perfis de absorção atômica, no regime assintótico, podemos assumir que a equação (3.26) segue uma lei de potência como foi observado na equação (3.18). O tamanho dos saltos do fóton origina uma caminhada aleatória que é contituída de saltos de pequenas escalas e com um número reduzido de passos em grandes escalas, porém, como já foi mencionado anteriormente, esses grandes saltos irão determinar a estatística desse sistema. A inomogeneidade espectral determina essa distribuição de probabilidade dos fótons no meio atômico. Portanto, a relação entre as formas dos espectros de emissão e de absorção é uma peça importante para se obter a estatística dos fótons em cada situação [1].

Dada essa distribuição dos fótons, podemos também calcular os momentos. Portanto:

$$\langle r^n \rangle = \int_0^{\infty} r^n P(r) dr$$

$$\langle r^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \Phi_{inc}(\nu) \Phi_{abs}(\nu) \int_0^{\infty} r^n e^{-\Phi_{abs}(\nu)r} dr$$

$$\langle r^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \Phi_{inc}(\nu) \Phi_{abs}(\nu) \frac{\Gamma(n+1)}{\Phi_{abs}^{n+1}(\nu)}$$

$$\langle r^n \rangle = n! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_{inc}(\nu)}{\Phi_{abs}^n(\nu)} d\nu \quad (3.27)$$

lembrando que a função gamma é dada por $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} dt = (z-1)!$ e que esta equação é válida para $\Phi_{abs}(\nu) \neq 0$.

Pode-se mostrar que para qualquer forma espectral fisicamente razoável (Lorentz, Gauss e Voigt) tanto para a emissão quanto para absorção, o segundo momento diverge [1, 12]. Quando $\Phi_{abs}(\nu) = \Phi_{inc}(\nu) = \Phi(\nu)$ (regime de CFR), a forma de $P(r)$ dada na equação (3.26) fica:

$$P(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(\nu) e^{-\Phi(\nu)r} d\nu \quad (3.28)$$

Calculando $P(r)$ mostrado na equação (3.28) para o regime assintótico ($r \rightarrow \infty$) quando a forma espectral $\Phi(\nu)$ for uma Doppler dada pela equação (2.61), temos que:

$$P(r) \sim \frac{1}{r^2 [\ln(r)]^{1/2}} \sim \frac{1}{r^2} \quad (3.29)$$

Por outro lado, quando $\Phi(\nu)$ é um perfil de Lorentz dado pela equação (2.56), o $P(r)$ em $r \rightarrow \infty$ fica da seguinte maneira:

$$P(r) \sim \frac{1}{r^{3/2}} \quad (3.30)$$

Para o perfil espectral de Voigt dado pela equação (2.64), o expoente $\mu = 3/2$, pois, assintoticamente, este perfil coincide com a distribuição de Lorentz.

Como o expoente μ para um perfil espectral Doppler é igual a 2 ($\mu = 2$), então, tanto o primeiro momento bem como o segundo momento divergem para a distribuição de passos dos fótons. Esta divergência nos momentos (primeiro e segundo) também acontece para os perfis de Lorentz e Voigt, pois o $\mu = 3/2$. Sendo assim, o passeio aleatório dos fótons em um meio atômico que assume qualquer uma destas linhas espectrais (Lorentz, Gauss e Voigt) pode ser caracterizado como vãos de Lévy.

Um caso particular que podemos observar sobre os momentos dos passos dos fótons em um vapor atômico é que se fizermos incidir uma luz monocromática com frequência ν_L com distribuição espectral $\Phi_{inc} = \delta(\nu - \nu_L)$ a equação (3.27) fica:

$$\langle r^n \rangle = \frac{n!}{\Phi_{abs}^n(\nu_L)} \quad (3.31)$$

e assim, seus momentos são finitos obedecendo $\Phi_{abs} \neq 0$. A equação (3.31) nos mostra

que uma variação no livre caminho médio pode ser obtida ajustando-se o coeficiente de absorção $\Phi_{abs}(\nu_L)$ na mesma frequência ν_L da luz monocromática. Este ajuste no coeficiente de absorção pode ser conseguido por meio do controle da densidade atômica. Um outro caso é quando uma radiação com distribuição espectral $\Phi_{inc}(\nu_\infty)$ incide em um vapor atômico com uma frequência ν_∞ bem fora da ressonância atômica. Neste caso, a distribuição espectral de absorção pode ser considerada constante e assim, a equação (3.27) fica com a seguinte forma:

$$\langle r^n \rangle = \frac{n!}{\Phi_{abs}^n(\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{inc}(\nu_\infty) d\nu \quad (3.32)$$

de modo que, neste caso, os momentos da distribuição de passos dos fótons são finitos, caracterizando uma difusão normal da luz [1].

Iremos observar ao longo desse trabalho que mesmo modificando, de forma fisicamente aceitável, os espectros de absorção e/ou emissão, a distribuição dos passos do fóton nesse meio atômico, também seguirá uma estatística de Lévy.

CAPÍTULO 4

SIMULAÇÃO MONTE CARLO PARA DIFUSÃO DE FÓTONS EM UM VAPOR ATÔMICO DE RUBÍDIO

Neste capítulo iremos descrever a simulação numérica em que usamos o método de Monte Carlo para calcular a redistribuição em frequência e dos passos de fótons devido à difusão múltipla em um vapor de átomos de rubídio. Primeiro iremos resolver esse problema para um caso idealizado, em que o vapor não está contido em uma célula mas ocupa o espaço em uma geometria sem fronteiras (vapor infinito). Tendo em vista uma investigação experimental, em seguida, fazemos um estudo da redistribuição em frequência dos fótons utilizando novamente um vapor de rubídio, porém, contido em uma geometria finita.

4.1 Descrição da simulação numérica para o processo de absorção e emissão de fótons por um átomo

A nossa simulação numérica descreve a redistribuição de frequência dos fótons reemitidos pelos átomos de um vapor. Após ter absorvido um fóton proveniente da radiação incidente calculamos a nova frequência de reemissão, assim como o passo do fóton, que ocorre entre um evento de absorção e um de reemissão. Além disso, a simulação nos fornece a posição em que o átomo emitiu o fóton que sai do volume onde o vapor está contido (esta situação não é válida para o caso do vapor com volume infinito).

Mostramos nos capítulos anteriores que fótons espalhados repetidamente em um vapor atômico ressonante, em configuração onde ocorre Redistribuição Completa de Frequência,

sofrem um processo de superdifusão, caracterizado por vôos de Lévy.

A configuração em que ocorre CFR tem sido estudada tanto teoricamente [12] quanto experimentalmente [42, 43]. Entretanto, o regime de CFR não é atingido instantaneamente em um vapor atômico iluminado, por exemplo, por um laser ressonante e tem sido mostrado que vários ciclos de absorção/emissão são de fato necessários para atingir o regime de CFR em tal sistema.

Nós queremos então estudar regimes de PFR, onde os perfis de absorção e emissão não coincidem, assim como regimes onde podemos manipular esses perfis.

A figura (4.1) ilustra o processo de difusão de fótons em um vapor atômico. A radiação incidente possui uma dada frequência ω e uma dada direção \mathbf{k} . Essa radiação incidente que usamos em toda a rotina numérica é uma radiação monocromática cujo perfil espectral é o perfil de Lorentz com uma largura espectral de $\Gamma_N = 5$ MHz, que possui uma frequência central ω_L deslocada de δ em relação à frequência da absorção atômica ω_0 . Esta radiação incide no vapor atômico cuja forma espectral da absorção é do tipo Voigt (revisão no Capítulo 2) e um átomo com componente ressonante de velocidade absorve o fóton. Em seguida, esse átomo emite um fóton em uma direção aleatória \mathbf{k}' e com uma frequência ω' que deve ser corrigida por efeito Doppler devido à mudança de referencial (passa do referencial atômico para o referencial do laboratório). No referencial atômico o espalhamento do fóton é elástico (ver anexo D), ou seja, o fóton emitido possui a mesma frequência do fóton absorvido. Nas asas do perfil espectral de absorção do vapor (Voigt), há poucos átomos que possuem uma boa velocidade¹ para absorver os fótons no centro da sua absorção lorentziana, portanto, esta absorção será feita nas asas da absorção atômica (lorentziana de largura natural) com uma velocidade fora de ressonância e esta frequência é refletida quando ocorre o processo de emissão [4], como veremos nos resultados ao longo deste capítulo.

¹O átomo absorve o fóton quando sua velocidade compensa a dessintonização imposta na radiação incidente. $\omega_L = \omega_{at} \pm kv$.

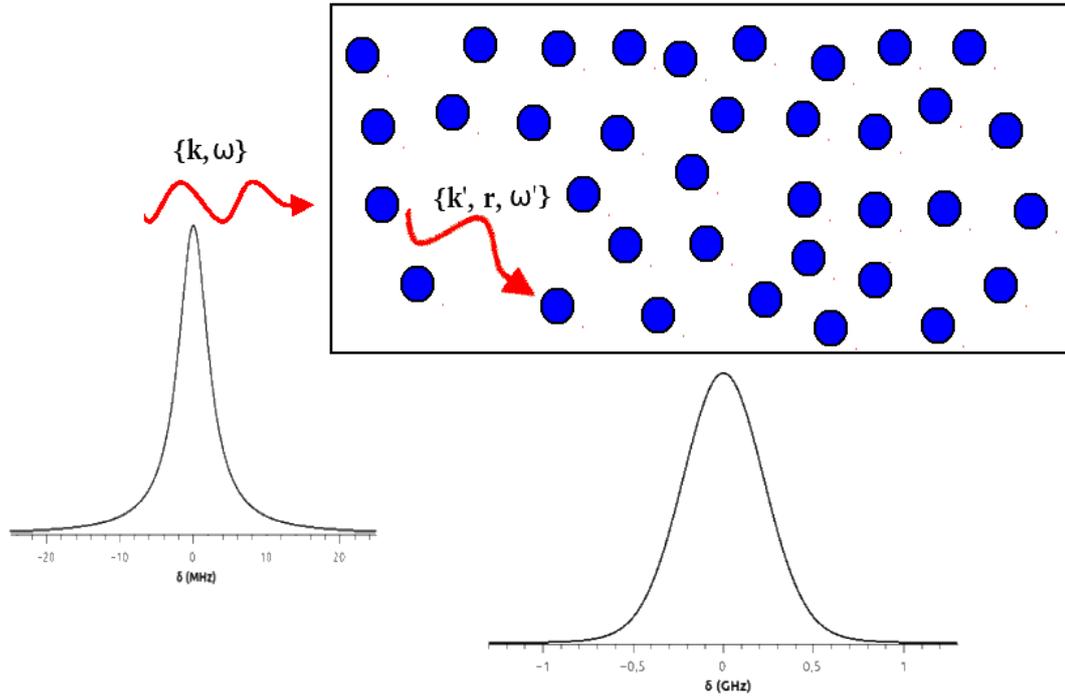


Figura 4.1: Difusão dos fótons em um vapor atômico. O perfil espectral da radiação incidente possui um perfil espectral de Lorentz com uma largura espectral $\Gamma_N = 5$ MHz e o perfil espectral da absorção é Voigt com parâmetro a determinado pela temperatura do vapor.

Quando o fóton de frequência ω incide no vapor atômico, o comprimento do passo deste fóton antes de ser absorvido segue uma distribuição de probabilidade de Beer-Lambert, como descrito pela equação (3.24).

A velocidade do átomo que absorve um fóton é subdividida em duas componentes: a velocidade paralela ($V_{//}$) e a velocidade perpendicular (V_{\perp}) à direção do fóton. Na direção paralela ao fóton, a distribuição de probabilidade da velocidade do átomo para a absorção do fóton é descrita pelo produto de perfis espectrais de Lorentz e Gauss, enquanto que, na direção perpendicular, a distribuição de velocidade é independente da frequência do fóton e é dada pela distribuição de velocidade de Maxwell-Boltzmann unidimensional. Assim, com estas duas componentes de velocidade, podemos calcular a velocidade total ($\mathbf{V} = V_{//} + V_{\perp}$) e juntamente com a direção \mathbf{k}' , calcula-se, pelo efeito Doppler, a frequência do fóton emitido no referencial do laboratório.

Para este cálculo usamos uma rotina numérica escrita em linguagem C e seguimos os seguintes passos:

1. Estabelecemos um número de fótons suficientemente grande para se aplicar leis da Estatística;

2. Determinamos um valor para a densidade atômica;
3. Estabelecemos uma direção para a radiação incidente onde seu vetor de onda é dado por $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} (f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k})$. Para a nossa simulação numérica usamos $f_x = 1$, $f_y = 0$ e $f_z = 0$. É importante ressaltar que os valores de f_x , f_y e f_z devem ser normalizados;
4. Atribuímos à radiação incidente uma frequência $\nu = \nu_0 + \delta$ que está em torno da transição $F = 2 \rightarrow F' = 2$ da linha D_2 do ^{85}Rb , sendo ν_0 a frequência dessa transição atômica. A radiação incidente que usamos na simulação possui um perfil espectral de Lorentz com $\Gamma_N = 5$ MHz;
5. Devemos encontrar o tamanho do passo inicial do fóton antes de ser absorvido. Assim, pela lei de Beer $P(r) = e^{-\Phi_{abs}(\nu)r}$ é a probabilidade de um fóton com frequência ν percorrer um comprimento r sem ser absorvido. Como $P(r)$ é um número entre 0 e 1, então, na simulação definimos esta probabilidade como um número aleatório (rnd) também compreendido entre 0 e 1 e, desta forma, calcula-se o comprimento do passo do fóton antes de ser absorvido. Ou seja, $r = -\frac{\ln(rnd)}{\Phi_{abs}(\nu - \nu_0)}$. Caso o r seja menor que as dimensões da célula o fóton sofre a primeira absorção e computamos esta grandeza como $INTE$ (se o fóton sofreu 1 difusão, $INTE = 1$). Entretanto caso o r seja maior que as dimensões da célula o fóton é transmitido e avaliamos esta grandeza como PTr (se o fóton é transmitido, $PTr = 1$);
6. Necessitamos calcular a velocidade do átomo que absorve um fóton. Para isto, decompomos a velocidade em uma componente paralela ($V_{//}$) e uma componente perpendicular (V_{\perp}). Para a componente paralela da velocidade, usamos o método de rejeição. No entanto, neste caso a probabilidade $P(V_{//})$ é dada pelo produto de um perfil de Lorentz com um perfil de Gauss. A velocidade do átomo é sorteada com um valor compreendido entre $-10\sigma_v$ e $10\sigma_v$, onde $\sigma_v = (k_B T/m)^{1/2}$. Este fator $|10\sigma_v|$ serve para abranger todo o perfil desta probabilidade $P(V_{//})$, pois, concebe tanto a região central quanto as “asas longas” devido ao perfil de Lorentz. Após este sorteio, calculamos a probabilidade $P(V_{//})$ de encontrar tal velocidade e comparamos com um sorteio do rnd que é um número entre 0 e 1. Caso $rnd < P(V_{//})$ a componente paralela da velocidade é aceita, caso contrário, esta componente é rejeitada. Por outro lado, para a componente perpendicular, empregamos o mesmo procedimento,

porém, a distribuição de probabilidade desta componente perpendicular $P(V_{\perp})$ é dada por uma distribuição de velocidade de Maxwell-Boltzmann e a velocidade do átomo sorteada também está em um valor entre $-10\sigma_v$ e $10\sigma_v$. Com isso temos a velocidade total $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{//} + \mathbf{V}_{\perp}$.

7. Após o fóton ser absorvido, o átomo emite um fóton em uma direção aleatória e isotrópica. Esta direção pode ser escrita em coordenadas esféricas como $F_x = \sin(\theta) \sin(\phi)$, $F_y = \sin(\theta) \cos(\phi)$ e $F_z = \cos(\theta)$ onde $-1 < \cos(\theta) < 1$ e $0 < \phi < 2\pi$. Os ângulos podem ser escritos em função do *rnd*. Ou seja, $\cos(\theta) = (2 \cdot rnd - 1)$ e $\phi = rnd \cdot 2\pi$. Ver figura (4.2)

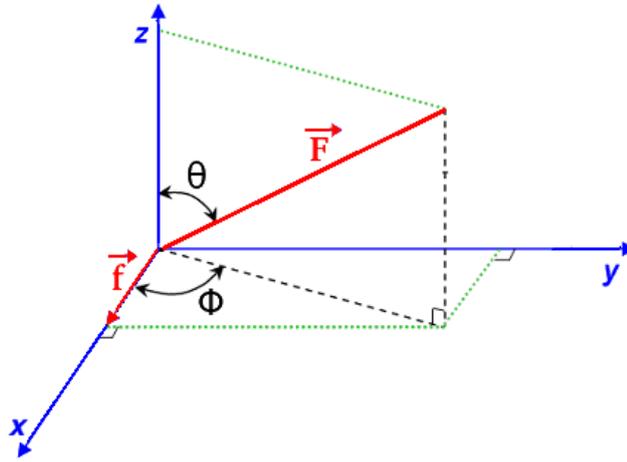


Figura 4.2: Direção do fóton emitido \mathbf{F} e do fóton incidente \mathbf{f} .

8. Depois de sortearmos a direção do fóton emitido, devemos corrigir, por efeito Doppler, esta frequência de emissão da seguinte maneira:

$$\nu' = \nu + \kappa' \cdot \mathbf{V}$$

com $\mathbf{k}' = k\mathbf{F}$

9. Com o valor da frequência emitida devidamente corrigida pelo efeito Doppler, devemos calcular novamente o tamanho do passo do fóton até ser absorvido e verificar se ainda está no interior da célula ou se foi transmitido. Para isto, adotamos o mesmo procedimento feito no item 5. Ou seja, $r' = -\frac{\ln(rnd)}{\Phi_{abs}(\nu' - \nu_0)}$ e com isso, a nova posição do fóton é calculada da seguinte maneira:

$$\vec{r}_2 = \vec{r} + r' \cdot \vec{F}$$

Caso \vec{r}_2 seja menor que as dimensões da célula, o fóton é absorvido e repete o procedimento a partir do item 6, caso contrário, o fóton é transmitido.

A figura (4.3) mostra as etapas do algoritmo em forma de diagramas em blocos.

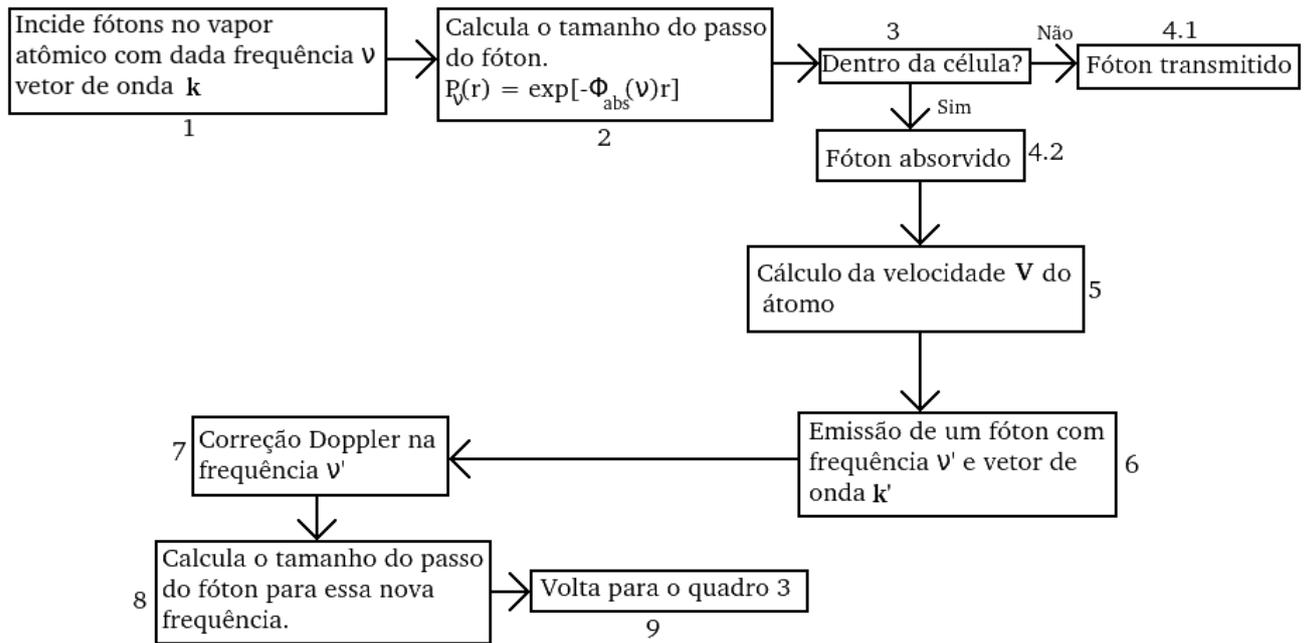


Figura 4.3: Diagrama em blocos da simulação Monte Carlo para a difusão dos fótons em um vapor atômico.

A trajetória de cada fóton é baseada em escolhas probabilísticas. Desta forma, faz-se uma excitação no meio atômico e quando ocorre uma absorção, simula-se o processo de reemissão e o processo repete-se. Cada vez que o fóton é emitido, fazemos uma correção por efeito Doppler em sua frequência de emissão e inicia-se a trajetória de um novo fóton. É importante ressaltar que um número suficientemente elevado de eventos deve ser gerado pela simulação numérica com o objetivo de garantir resultados estatisticamente significativos.

4.2 Redistribuição em frequência da radiação ressonante em um vapor atômico de rubídio

Na simulação, um fóton laser de frequência ω_L incide na célula com vapor e sofre espalhamentos múltiplos. A cada espalhamento, sua frequência muda. Nesta seção analisaremos essa redistribuição em frequência em algumas configurações para a célula de confinamento: (i) vapor atômico em uma geometria infinita, (ii) vapor atômico em uma célula com dimensões finitas, geometria cilíndrica e detecção na direção inversa à incidente. Em ambos os casos, consideramos átomos de dois níveis. Analisaremos e discutiremos os resultados obtidos sobre a redistribuição em frequência, comparando-os com duas densidades atômicas diferentes. Neste nosso primeiro modelo, estudamos um vapor de átomos de rubídio, excitados em torno de sua linha D_2 (na transição $F = 2 \rightarrow F' = 2$). Estudamos esta redistribuição para diversas dessintonizações da radiação incidente em torno do centro de absorção atômica (centro da linha) deixando a densidade atômica fixa e, por conseguinte, deixamos a dessintonização da radiação incidente fixa, alterando a densidade atômica.

4.2.1 Redistribuição em frequência em um vapor atômico com átomos de dois níveis em geometria infinita

Nesta seção iremos estudar os efeitos de redistribuição em frequência de um vapor de rubídio em um meio infinito. Contudo, uma ressalva importante é que o uso dessa geometria infinita implica na ausência de resolução espacial dos resultados.

Para um vapor infinito, certamente, não faz sentido saber se o fóton está no interior do vapor atômico ou se foi transmitido. Então, toda vez que ocorre uma absorção, calcula-se a velocidade do átomo e sorteia-se a frequência de emissão e, em seguida, retorna-se ao cálculo da trajetória do fóton. Para se fazer a estatística da frequência dos fótons emitidos, corrigimos a frequência destes fótons considerando o efeito Doppler em cada difusão.

Os efeitos de redistribuição em frequência que são estudados levam em consideração apenas a mudança da frequência devido à absorção no referencial atômico, fazendo-se necessário corrigir por efeito Doppler quando esta frequência de emissão passa a ser analisada no referencial do laboratório [44], devido à distribuição de velocidade dos átomos no referencial do laboratório. Em outras palavras, considera-se primeiro a alteração da

frequência de emissão relativa à absorção no referencial do átomo em repouso e em seguida é essencial fazer a correção Doppler quando a radiação emitida transpõe o referencial atômico e passa a ser analisada no referencial do laboratório. Inicialmente, estamos usando o fato de o átomo possuir um nível inferior estreito (nível fundamental) e o superior alargado naturalmente [33, 34, 45]. É importante ressaltar que nesses trabalhos [33, 34, 45], já é mencionada a PFR em diferentes frequências de excitação.

A figura (4.4) mostra a frequência da radiação incidente em relação à frequência de ressonância atômica. Esta figura nos auxilia em observar a dessintonização da frequência de excitação, ou seja, se a frequência da radiação incidente está mais próxima do centro da linha de absorção ou se está nas asas da distribuição.

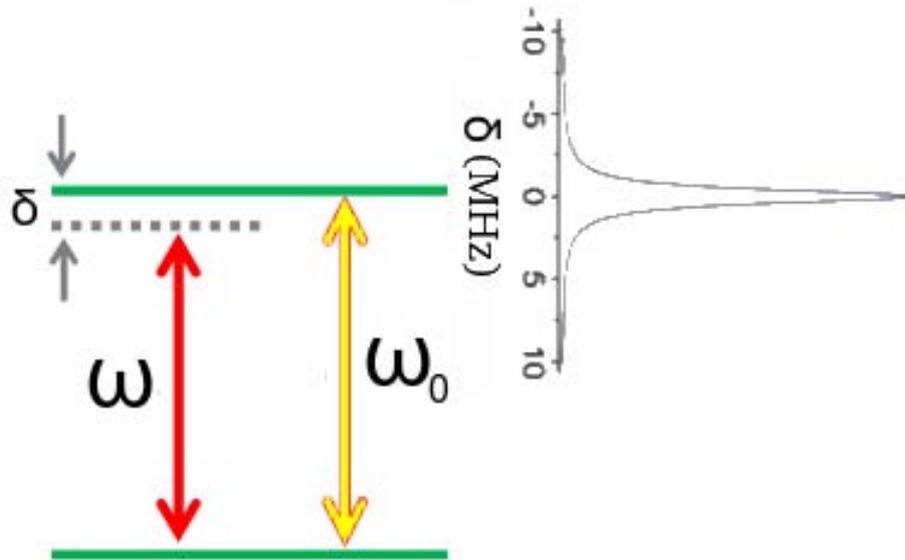


Figura 4.4: Frequência da radiação incidente em um átomo de dois níveis em relação ao centro de absorção atômica. $\omega = \nu/2\pi$ é a frequência da radiação incidente e $\omega_0 = \nu_0/2\pi$ é a frequência de absorção.

A figura (4.5) mostra a redistribuição em frequência em cada difusão dada uma dessintonização da radiação incidente (δ_L). A figura (4.5 (a)) representa a redistribuição para uma radiação incidente com $\delta_L = 0$, a (4.5 (b)) $\delta_L = -300$ MHz, a (4.5 (c)) $\delta_L = -600$ MHz, a (4.5 (d)) $\delta_L = -800$ MHz e a (4.5 (e)) $\delta_L = -1$ GHz. Nas cores preto, vermelho, verde, azul, laranja e rosa, representam 1 difusão, 2 difusões, 3 difusões, 4 difusões, 5 difusões, 10 difusões do fóton no vapor atômico, respectivamente e $\rho(\nu)$ representa a densidade de probabilidade (não-normalizada) da radiação emitida com frequência $\nu' = \nu_0 + \delta$.

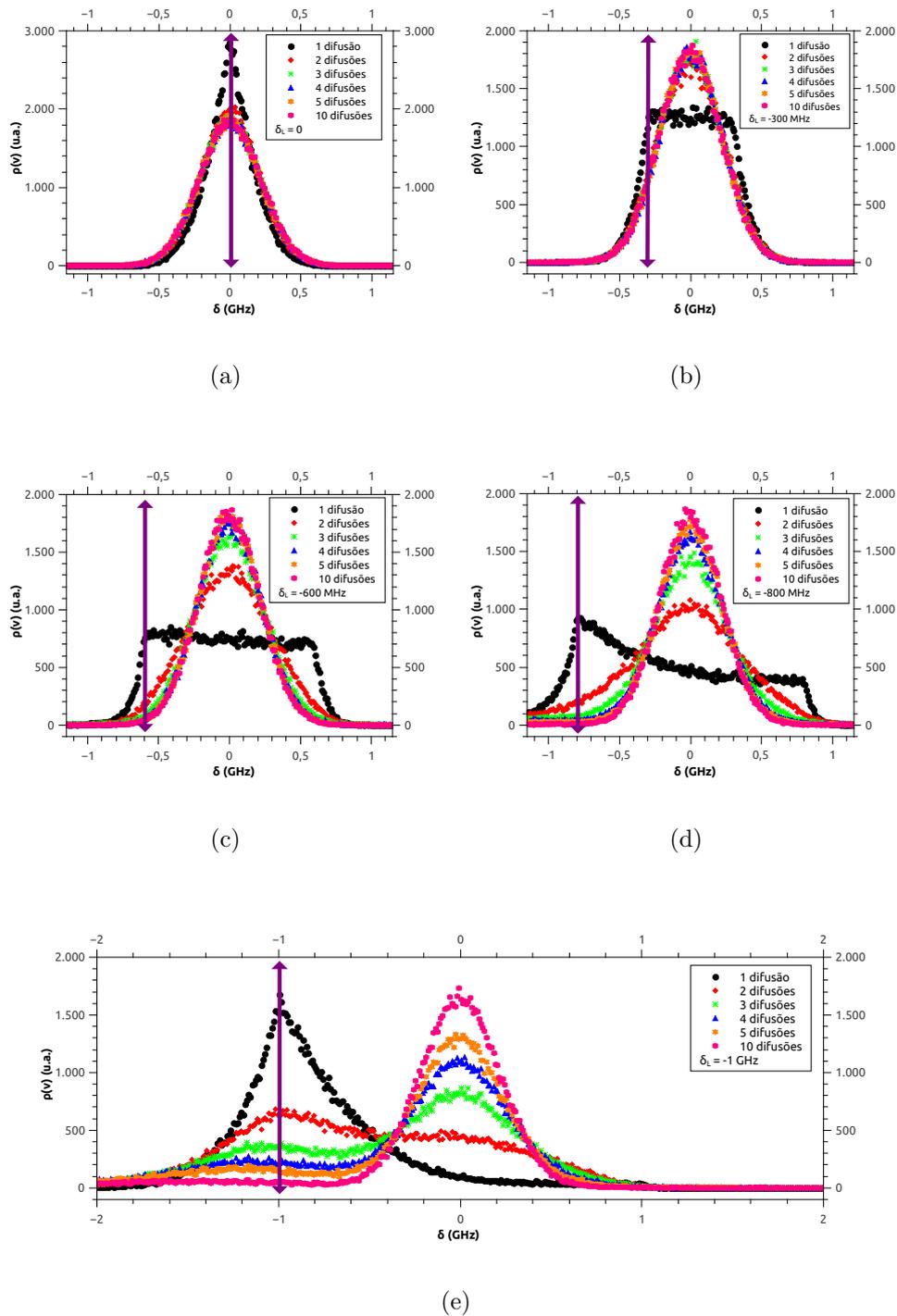


Figura 4.5: Evolução da distribuição em frequência em um meio infinito para uma radiação incidente com perfil espectral lorentziano de largura $\Gamma_N = 5$ MHz. O perfil de absorção é Voigt e a densidade do vapor atômico é $n = 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. (a) $\delta_L = 0$, (b) $\delta_L = -300$ MHz, (c) $\delta_L = -600$ MHz, (d) $\delta_L = -800$ MHz, (e) $\delta_L = -1$ GHz. Em preto 1 difusão, em vermelho 2 difusões, em verde 3 difusões, em azul 4 difusões, em laranja 5 difusões, em rosa 10 difusões. A seta em roxo informa a frequência de excitação da radiação incidente.

Note que na primeira difusão o espectro de emissão tem a assinatura da frequência incidente e podemos observar uma evolução de PFR para CFR com o aumento do número de difusões do fóton. Isto se deve ao fato de que o fóton emitido vai perdendo a memória da frequência da radiação incidente. Ao longo dessas difusões fica impossível saber em qual frequência o vapor atômico foi excitado, caracterizando assim a CFR. Para a primeira difusão do fóton, fica claro que há uma PFR, pois existe uma memória em frequência do fóton que foi emitido após a absorção com a frequência da radiação incidente. Ou seja, nesta situação podemos identificar qual foi a frequência de excitação do vapor. Quando $\delta_L \gg 0$ a passagem de redistribuição parcial em frequência para redistribuição completa em frequência vai se tornando mais evidente. A partir da décima difusão para a dessintonização $\delta_L = -1$ GHz (figura (4.5) (e)), fica claro que a difusão dos fótons se encontra no regime de redistribuição completa de frequência, enquanto que nas duas primeiras, os fótons guardam certa memória da radiação incidente caracterizando uma redistribuição parcial de frequência. A figura (4.5) mostra que para uma frequência da radiação incidente próxima da frequência de ressonância, os efeitos de coerência² entre as frequências de absorção e emissão não se manifestam significativamente como se observa para frequências de excitação mais afastadas da ressonância (nas asas do perfil de absorção). À medida que a frequência da radiação incidente vai se afastando da frequência de ressonância do átomo (centro da linha), os efeitos de redistribuição parcial vão se tornando mais importantes.

Na figura (4.6), observa-se a trajetória de um único fóton que sofre vários processos de absorção e emissão em um vapor atômico, o qual foi excitado por uma radiação com duas frequências diferentes: no centro da absorção ($\delta_L = 0$) e na asa da distribuição ($\delta_L = -1$ GHz). Verifica-se que com a excitação no centro da linha, o fóton tem uma probabilidade menor de executar saltos grandes do que no caso em que os átomos foram excitados com $\delta_L = -1$ GHz. Como já foi mencionado anteriormente, isto deve-se ao fato de que no referencial atômico a frequência de emissão do fóton ocorre na mesma frequência da de absorção. Um fóton próximo da ressonância tem uma probabilidade maior de ser absorvido por um átomo com pequena velocidade, o que resulta em uma correção Doppler também pequena na reemissão. O tamanho do passo perto da ressonância também é pequeno, devido à grande probabilidade de absorção no vapor. Por outro lado, um fóton com frequência longe da ressonância:

²O termo coerência nesse contexto está sendo empregado no sentido de que a radiação emitida e a absorvida devem ter a mesma frequência.

1. Tem maior probabilidade de ter um passo longo no vapor, devido à fraca probabilidade de ser absorvido;
2. Tem maior probabilidade de ser absorvido por um átomo com grande velocidade e então de sofrer uma correção Doppler grande na reemissão. Entretanto, a componente de velocidade paralela à direção do fóton incidente deve ser grande para compensar um deslocamento Doppler grande (asa da distribuição de Maxwell-Boltzmann unidimensional), mas a componente de velocidade na direção de reemissão do fóton será estatisticamente menor do que a paralela, a correção Doppler na reemissão menor do que na absorção e a frequência do fóton reemitido mais próxima da frequência central da transição.

Como, estatisticamente, parte da reemissão ocorre próximo da ressonância, onde a redistribuição de frequência é menor (ver figura (4.5)), os espalhamentos subsequentes tendem a aproximar o perfil de emissão do de absorção.

A figura (4.6) mostra então o fato de que mesmo fótons com uma grande dessintonização, tendem a perder a memória da frequência de absorção após um certo número de difusão no vapor atômico, passando de PFR para CFR e, desta maneira, o tamanho de seus passos fica cada vez menor. Entretanto, mesmo para os átomos excitados com uma radiação com uma frequência no centro da linha, onde a coerência entre a absorção e a emissão é grande, a estatística de comprimento dos passos é não-normal, ou seja, raros passos longos interrompem séries de passos curtos. Esses grandes passos (vôos de Lévy) caracterizam essa estatística.

Contudo, para átomos excitados no centro da linha ($\delta = 0$), os fótons percorrem uma menor distância antes de serem reabsorvidos, enquanto que para excitação nas asas da distribuição ($\delta \gg 0$), os fótons percorrem uma maior distância antes de serem reabsorvidos. A trajetória descrita por esse fóton foi contida por 100000 processos de absorção e emissão.

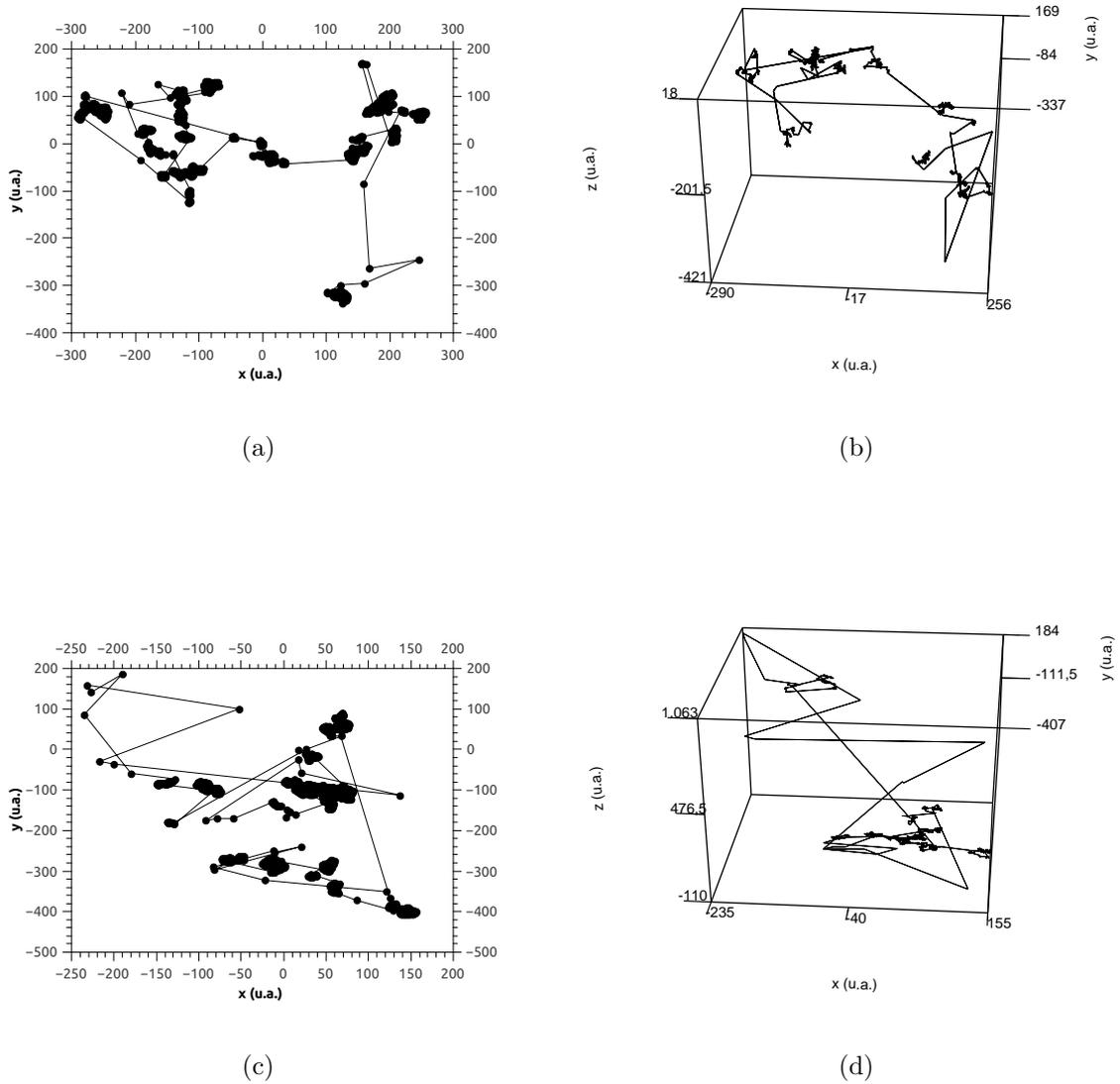


Figura 4.6: Trajetória de um único fóton em um vapor atômico. (a) e (c) trajetória do fóton em duas dimensões para $\delta_L = 0$ e $\delta_L = -1$ GHz, respectivamente. (b) e (d) trajetória em três dimensões deste mesmo fóton e nestas mesmas dessintonizações.

4.2.2 Redistribuição em frequência em um vapor atômico com átomos de dois níveis em geometria cilíndrica finita

Nesta seção, iremos considerar um vapor atômico em volume de geometria finita. Consideramos uma geometria cilíndrica com raio $R = 2 \cdot 10^{-2}$ m e com um comprimento $L = 5 \cdot 10^{-2}$ m, correspondendo a dimensões típicas de uma célula ótica. Quando os átomos são excitados por uma radiação incidente, estes irão absorver esta radiação e emitir em todas as direções, no entanto, o nosso objetivo é apenas coletar a emissão dos

fótons re-difusos no vapor atômico apenas em certa região do espaço. A figura (4.7 (a)) mostra a direção da radiação incidente ($\{k_x, 0, 0\}$) no vapor atômico e a figura (4.7 (b)) mostra tanto os fótons emitidos aleatoriamente em todas as direções após a excitação dos átomos pela radiação incidente como a região em que queremos coletar estes fótons. No primeiro momento iremos apresentar os nossos resultados para uma densidade atômica de $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ e em seguida analisar, comentar e comparar com uma maior densidade atômica ($n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$) tais resultados.

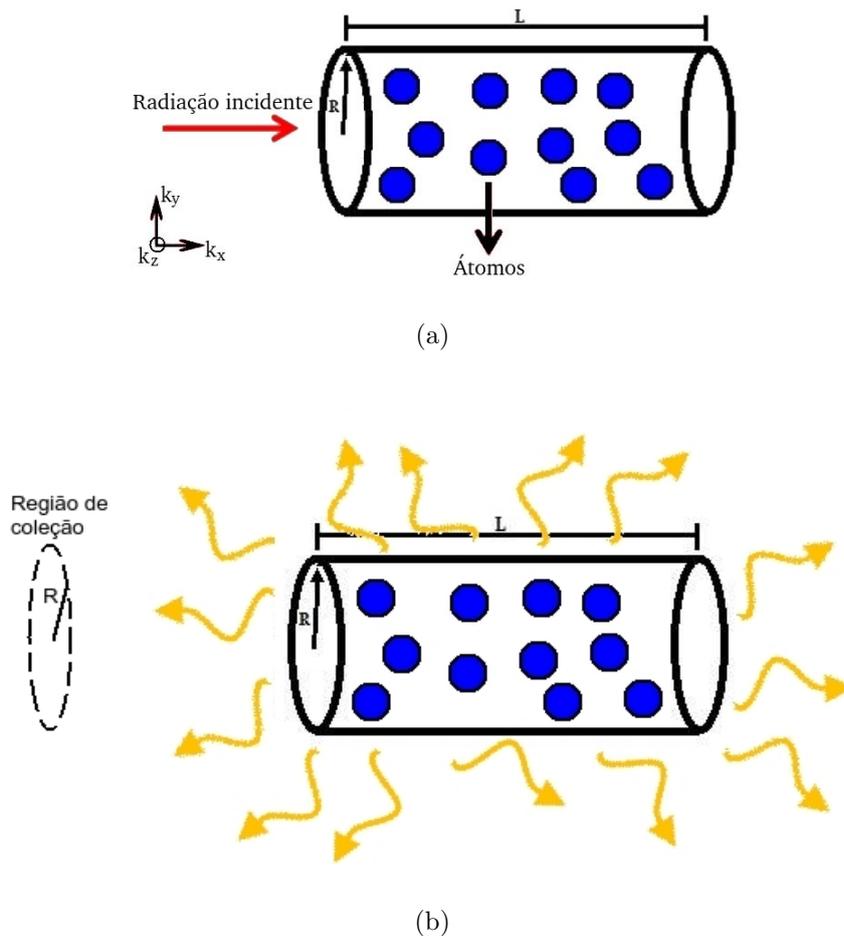


Figura 4.7: (a) Direção de excitação laser no vapor atômico em uma geometria cilíndrica. (b) Fótons emitidos e coletados em certa região do espaço.

A escolha dessa geometria reside no fato de que em nossos laboratórios há células com esse tipo de geometria. Vale ressaltar também que a região de coleção dos fótons emitidos na rotina numérica é exatamente na origem da célula e que o raio da região de coleção é exatamente igual ao raio do cilindro que contém o vapor atômico. Iremos apresentar resultados sobre a redistribuição em frequência para duas diferentes densidades:

(1) $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ e (2) $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. Essas duas densidades correspondem a pressões de vapor para temperaturas de 309 K e 373 K, respectivamente (a pressão de vapor do rubídio a $T = 300 \text{ K}$ é de aproximadamente $1,2 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$).

1- Vapor atômico com uma densidade de $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$.

A figura (4.8) mostra um histograma da distribuição de frequência para 1 difusão e 2 difusões e a contribuição da soma de todas as difusões para uma radiação incidente no centro da linha de absorção. O número de fótons lançados no vapor atômico para esta frequência de incidência foi de $N_f = 10^8$ fótons, sendo coletados 1216384 fótons. Nesta figura, podemos perceber que a redistribuição é regida por fótons que sofrem apenas uma absorção, pois, como a densidade atômica é baixa, a probabilidade do fóton emitido ser reabsorvido antes que saia do volume da célula é pequena. Ou seja, calculando o livre percurso médio com ajuda das equações (3.31) e (2.56) para $\delta_L = 0$ e comparando com duas densidades diferentes, temos que

$$\begin{cases} \langle r \rangle \approx 30 \text{ mm}, & \text{para } n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3} \\ \langle r \rangle \approx 0,03 \text{ mm}, & \text{para } n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3} \end{cases} \quad (4.1)$$

No caso da densidade menor ($2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$), o livre percurso médio dos fótons entre dois eventos de difusão é da ordem de grandeza das dimensões da célula, de maneira que os fótons serão espalhados em média uma única vez antes de saírem do volume da célula.

Portanto, podemos afirmar que nesta densidade e sob as condições de coleção dos fótons emitidos descrita anteriormente, o regime de redistribuição em frequência é dado pela PFR. Este comportamento pode ficar mais claro quando excitamos o vapor com frequências com grande dessintonização em relação a frequência de ressonância.

A figura (4.9) mostra o histograma da contribuição separadamente de cada difusão dos fótons após uma radiação incidente também no centro da absorção atômica excitar o vapor atômico. A contribuição de fótons que difundiram-se mais de duas vezes neste regime de densidade ($n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$) é insignificante no número total de difusões dos fótons.

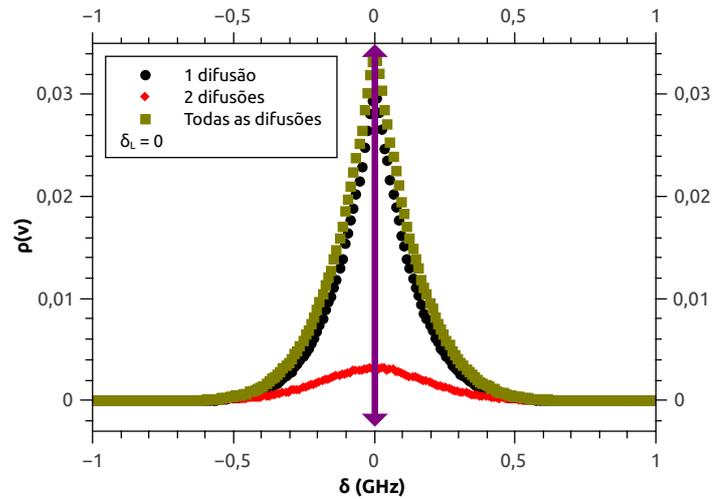


Figura 4.8: Histograma da contribuição para 1 (preto), 2 (vermelho) e todas as difusões (amarelo escuro) em um vapor atômico. A radiação incidente possui uma frequência no centro da absorção atômica ($\delta_L = 0$). Contribuições maiores que 2 difusões são irrelevantes. A seta em roxo indica a frequência de excitação da radiação incidente.

A figura (4.10) mostra a distribuição de frequência para uma frequência de incidência $\delta_L = -800$ MHz e para fazer a estatística foi lançado um número de fótons $N_f = 10^{10}$, sendo coletados 1641603 fótons. As contribuições maiores que 2 difusões são irrelevantes, pois, são em pequenas quantidades quando comparadas com as duas primeiras difusões e, sendo assim, o comportamento da redistribuição em frequência dos fótons retroespalhados pelo vapor atômico é regido por fótons que sofreram até duas difusões, igual ao observado para uma radiação incidente com uma frequência no centro da absorção atômica.

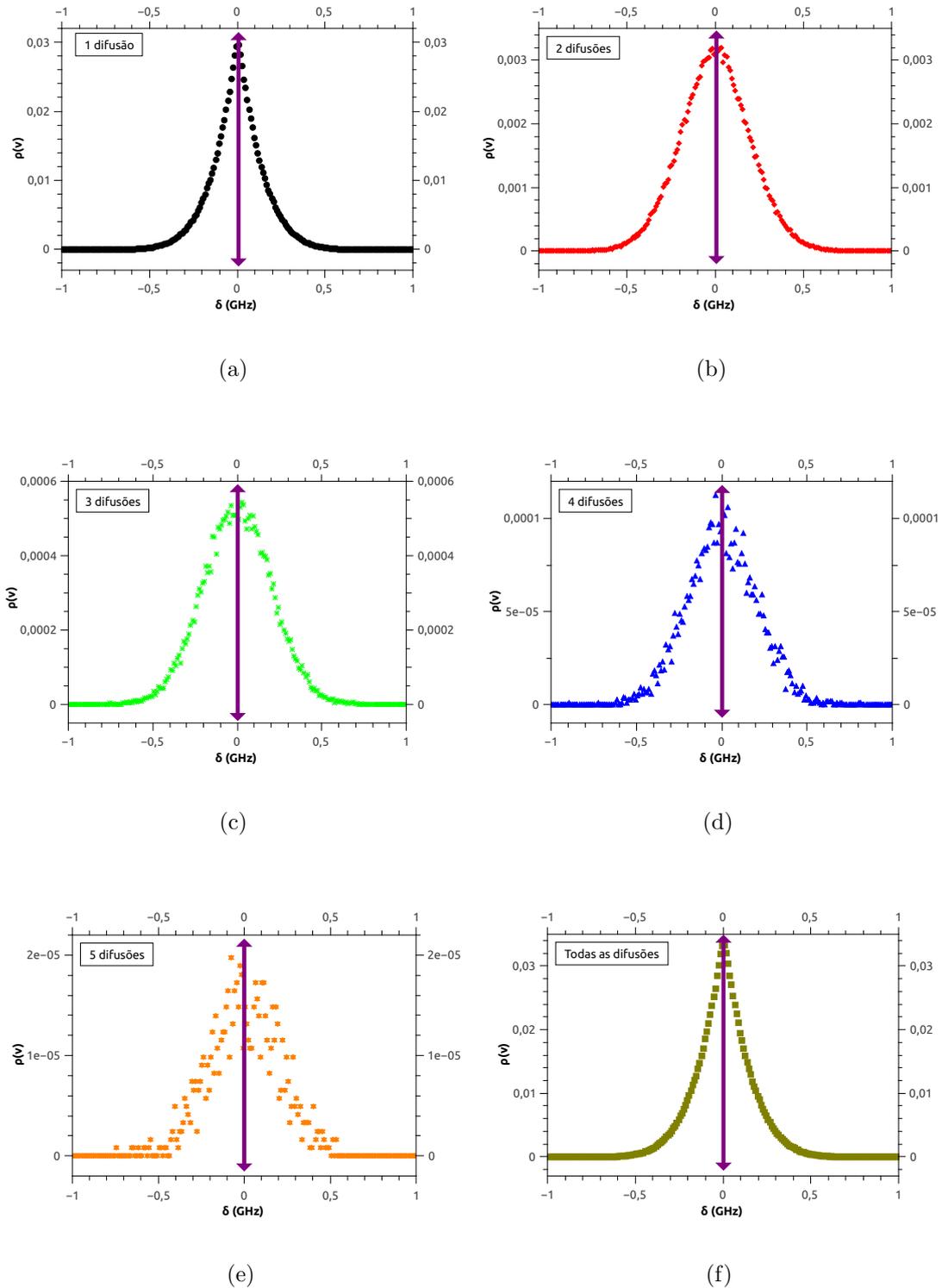


Figura 4.9: Contribuição de cada difusão dos fótons retroespalhados no vapor atômico com $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ após o vapor ser excitado por uma radiação incidente com frequência no centro da absorção atômica. (a) 1 difusão, (b), (c), (d), (e) são respectivamente, 2, 3, 4 e 5 difusões. (f) soma das difusões. Notem a variação na escala vertical. A seta em roxo indica a frequência de excitação da radiação incidente.

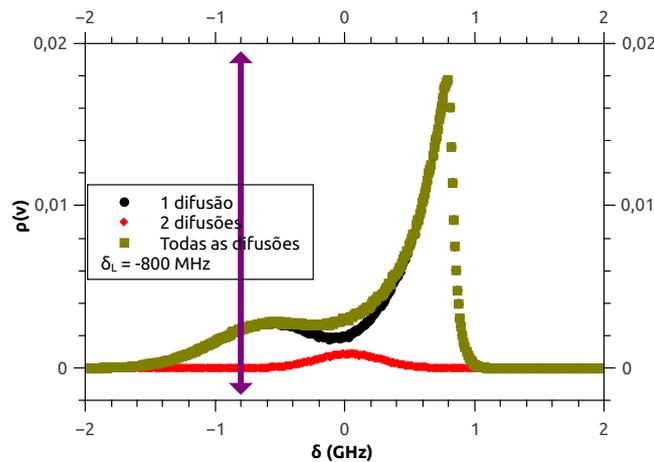


Figura 4.10: Histograma da contribuição para 1, 2 e todas as difusões dos fótons retroespalhados em um vapor atômico com $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ representado com as cores preto, vermelho e amarelo escuro, respectivamente. A radiação incidente possui uma frequência dessintonizada em relação ao centro de absorção atômica de $\delta_L = -800 \text{ MHz}$. Contribuições maiores que 2 difusões são irrelevantes. A seta em roxo indica a frequência de excitação da radiação incidente no vapor atômico.

Podemos observar a contribuição de cada ordem de difusão dos fótons no vapor atômico para essa radiação incidente com dessintonização $\delta_L = -800 \text{ MHz}$, conforme a figura (4.11). Em um vapor em uma geometria infinita (ver figura (4.5)), percebemos que para esta dessintonização da radiação incidente, há um platô com certa inclinação para fótons que sofreram apenas uma difusão, onde a parte mais elevada desta inclinação é a memória da radiação incidente e, neste caso que estamos analisando, não existe tal platô. A falta deste platô inclinado nessa nova configuração, deve-se ao fato de que agora os efeitos espaciais de observação tornam-se relevantes. Particularmente, na figura (4.5), todas as direções de espalhamento estão sendo consideradas. Na direção do feixe incidente, a difusão é elástica no referencial do laboratório, enquanto que no plano perpendicular à direção do feixe incidente ocorre a redistribuição de frequência por efeito Doppler. Na geometria estudada na figura (4.11), somente são detectados os fótons retrorefletidos no ângulo sólido da janela da célula. Outro fato importante a ser mencionado é que rapidamente a frequência de emissão vai se tornando completamente redistribuída de modo que, na segunda difusão já se observa a passagem de PFR para CFR e isto pode ser observado mais claramente para $\delta_L = -800 \text{ MHz}$. Observa-se também com a figura (4.11) para frequências de incidência mais afastadas do centro da linha, um grande número de difusões no vapor atômico vão se tornando insignificantes, como por exemplo, 5 difusões do

fóton nessa dessintonização é quase que insignificante. Sendo assim, para esta densidade, a fluorescência decaída por fótons retrodifusos é formada majoritariamente por fótons que sofreram uma única difusão. Podemos afirmar que a redistribuição em frequência pode ser caracterizada como PFR como mostra a figura (4.11). Os gráficos das figuras (4.8), (4.9), (4.10) e (4.11) estão normalizados pelo número total de fótons que foi contabilizado em sua coleção.

Por outro lado, podemos aplicar uma normalização de tal forma que todos tenham uma amplitude igual a 1 e, isto tem como objetivo verificar a passagem de redistribuição parcial para redistribuição completa do mesmo modo que fizemos para um vapor contido em uma geometria infinita. Como na geometria infinita a ocorrência dos eventos de absorção e emissão para todas as difusões são iguais, então não foi necessário fazer tal normalização.

A figura (4.12) nos fornece espectros normalizados de maneira que cada difusão tem seu valor máximo igual a 1. Esses espectros nos informam sobre a quantidade de difusões que o fóton precisa ser absorvido e posteriormente emitido para haver a passagem de PFR para CFR, embora, este efeito já tem sido observado na figura (4.11). Notamos que em uma difusão o espectro é um pouco estreito em comparação com as outras difusões, caracterizando uma evolução de uma redistribuição parcial para uma redistribuição completa.

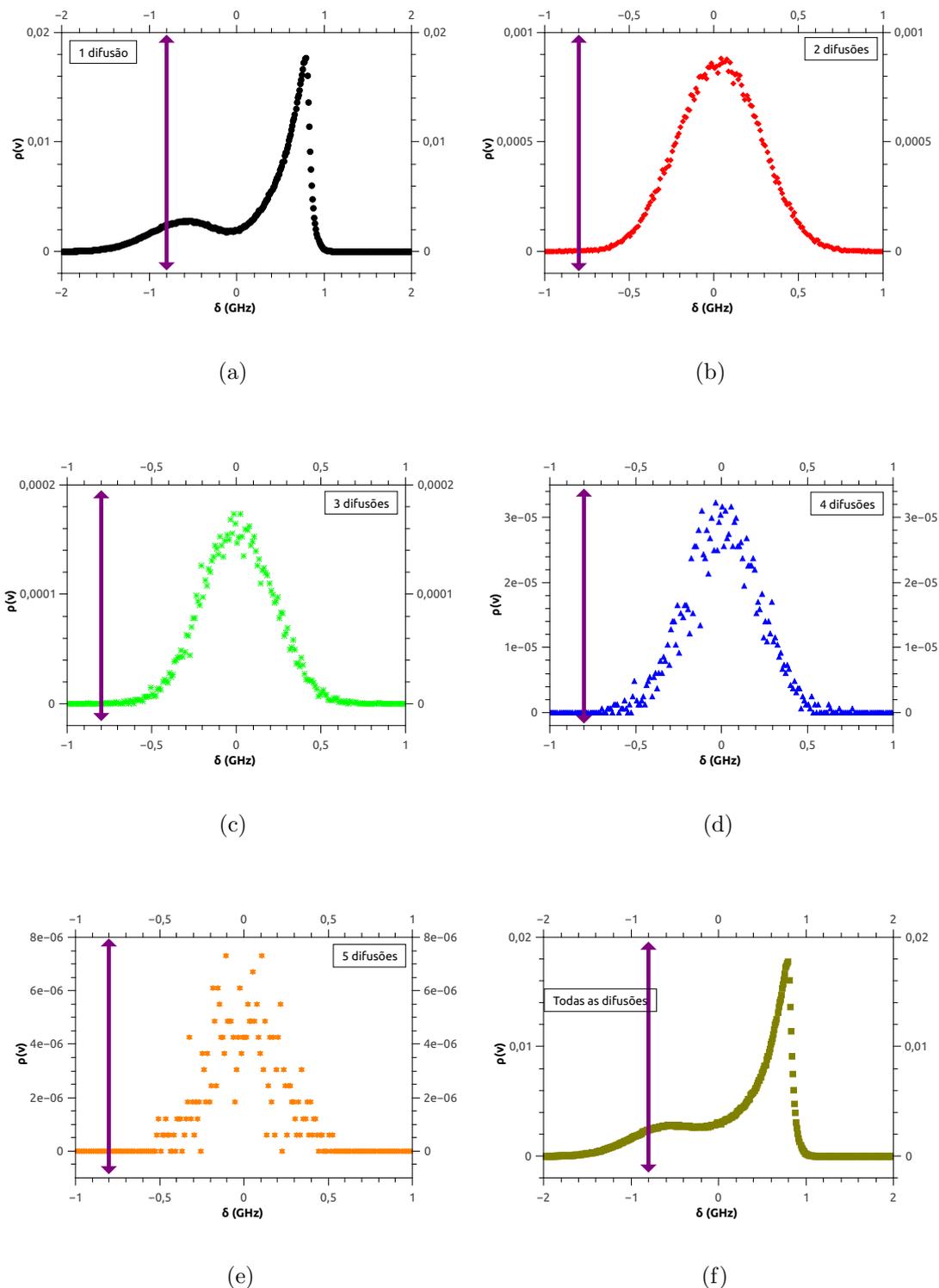


Figura 4.11: Contribuição de cada difusão dos fótons retrodifusos no vapor atômico com $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ após ser excitado por uma radiação com $\delta_L = -800 \text{ MHz}$. (a) 1 difusão, (b), (c), (d), (e) são respectivamente, 2, 3, 4 e 5 difusões. (f) soma das difusões. A seta em roxo assinala a frequência de excitação da radiação incidente. Notem a variação na escala vertical ao longo de cada difusão.

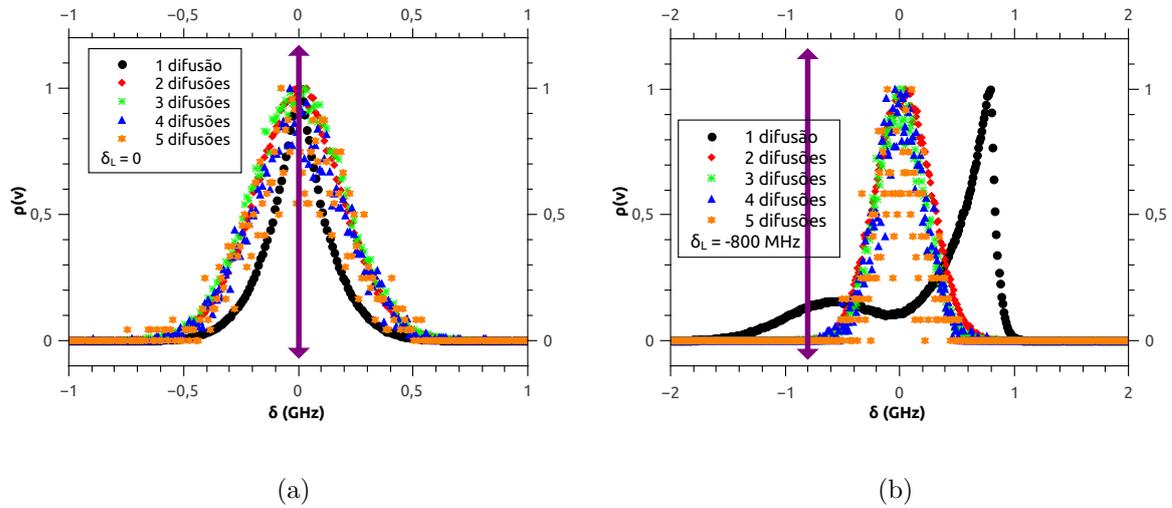


Figura 4.12: Espectro normalizado de cada difusão retroespalhada no vapor atômico. (a) $\delta_L = 0$ e (b) $\delta_L = -800$ MHz. 1 difusão (preta), 2 difusões (vermelha), 3 difusões (verde), 4 difusões (azul) e 5 difusões (laranja). A seta em roxo assinala a frequência de excitação da radiação incidente no vapor atômico. A densidade atômica utilizada foi $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. Em ambas figuras, a seta em roxo informa a frequência de excitação.

2- Vapor atômico com uma densidade $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$.

(a) Evolução da distribuição espectral dos fótons retroespalhados.

Neste momento, iremos para um regime de redistribuição em frequência para um densidade maior, isto é, $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. Esta densidade atômica foi a com qual trabalhamos em nossos laboratórios. Como vimos na equação (4.2) o fóton percorre uma distância muito pequena no interior da célula para uma radiação incidente com frequência de excitação no centro da absorção atômica em um vapor atômico com esta densidade e isto caracteriza que é mais provável que fótons com $\delta = 0$ sejam absorvidos antes que saiam do volume da célula. Para esta densidade atômica de $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ foi feito também um histograma da frequência da luz emitida retroespalhada pelo vapor atômico para algumas difusões (1, 2 e 3 difusões) e o número total de difusões conforme a figura (4.13), onde a radiação incidente possui uma frequência no centro da ressonância atômica. Percebe-se nesta figura (4.13) que há uma pequena parcela na contribuição de 3 difusões quando compara-se a uma única difusão do fóton no vapor atômico. Além disso, na fluorescência retroespalhada, a contribuição relativa dos fótons tendo sofrido apenas uma difusão no vapor atômico é muito menor do que no caso de $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, pois, como a densidade atômica é grande, então, a probabilidade dos fótons sofrerem processos de

absorção e emissão várias vezes é grande. Por outro lado, no caso da baixa densidade, como no item anterior, a soma das contribuições de todas as ordens de difusão é bem próxima à contribuição de apenas uma difusão porque, neste caso de baixa densidade, a probabilidade de os fótons sofrerem várias difusões é bem menor quando compara-se às altas densidades. Como podemos perceber na figura (4.13), o espectro obtido de todas as difusões dos fótons retroespalhados é bem largo comparado com as difusões de cada fóton retrodifuso apresentando um pico em $\delta = 0$ e isto deve-se ao fato de que para uma difusão apresenta-se um pico nesta frequência guardando uma memória da radiação incidente, enquanto que as demais ordens de difusão dos fótons retroespalhados começam a se redistribuir completamente e assim, o espectro total destes fótons apresenta tal largura com um pico em $\delta = 0$ devido à primeira difusão que possui uma amplitude maior que as demais.

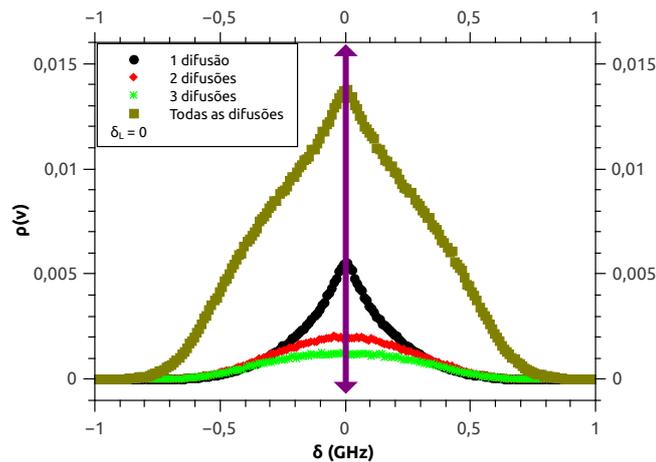


Figura 4.13: Histograma da frequência emitida retroespalhada pelo vapor atômico com $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ após a excitação por uma radiação incidente com uma frequência no centro da absorção atômica indicada na seta roxa. Contribuição de 1 (preto), 2 (vermelho), 3 (verde) e o total de difusões (amarelo escuro).

A figura (4.14) mostra a contribuição individual de cada difusão na redistribuição em frequência dos fótons emitidos retrorefletidos pelo vapor atômico (1, 2, 3, 4 e 5 difusões) assim como a soma de todas as difusões de fótons no vapor atômico para uma radiação incidente com uma frequência na ressonância atômica. Nesta simulação foram estudados no vapor atômico um número de fótons de $N_f = 10^7$, sendo coletado 1256315 fótons.

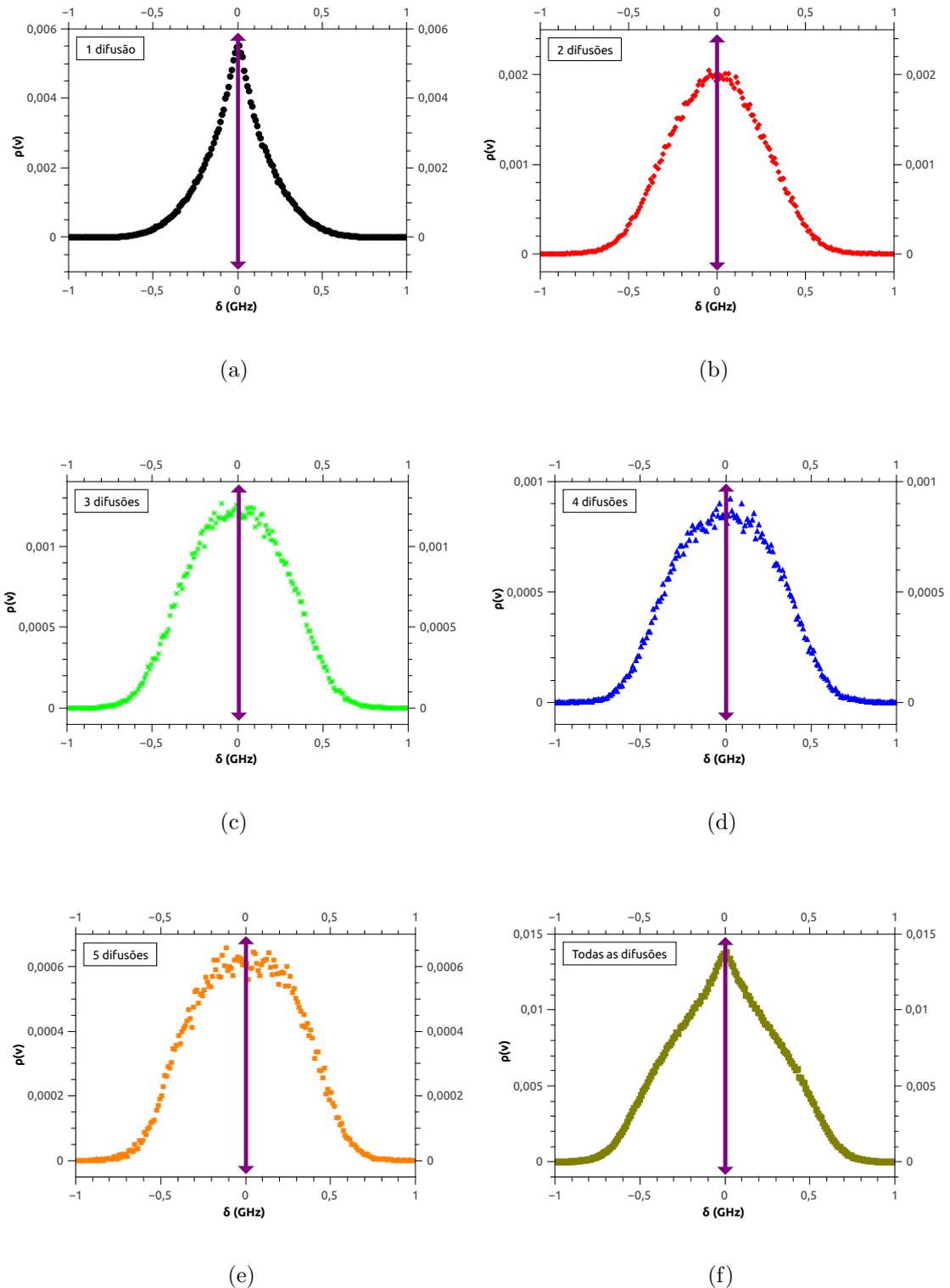


Figura 4.14: Contribuição de cada difusão retroespalhada no vapor atômico com uma densidade $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ excitado por uma radiação no centro da linha como indica a seta em roxo. (a) 1 difusão, (b), (c), (d), (e) são respectivamente, 2, 3, 4 e 5 difusões. (f) soma das difusões.

O gráfico da figura (4.15) mostra a contribuição para dez difusões dos fótons retrorefletidos no vapor atômico. Este gráfico mostra que diferentemente de um regime de baixas densidades atômicas, existem fótons que sofrem mais de cinco difusões, por exemplo. Este fato ocorre porque existem mais átomos preenchendo o volume da célula e, desta maneira, existe uma maior probabilidade de fótons serem absorvidos e emitidos cada vez mais se comparados com uma densidade inferior, como já comentamos anteriormente.

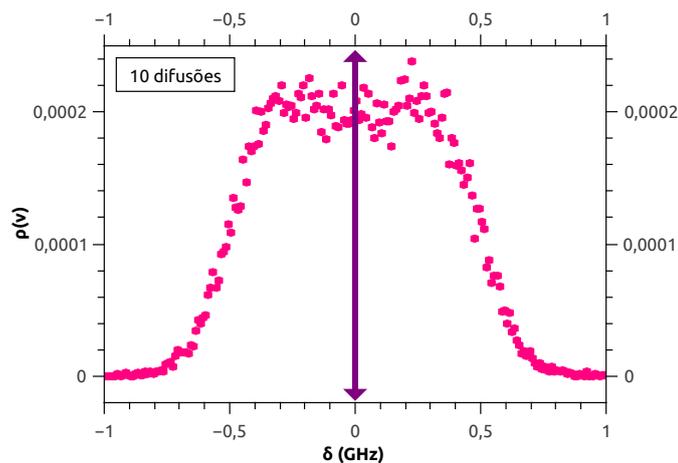


Figura 4.15: Contribuição de fótons que sofreram 10 difusões retroespalhadas no vapor atômico com $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ para uma radiação incidente com frequência no centro da absorção atômica mostrado na seta em roxo.

Na densidade de $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ não foi posto um gráfico com estas 10 difusões, pois nenhum fóton foi coletado com este alto número de difusões.

Podemos normalizar os espectros das figuras (4.14) e (4.15) de maneira que seu máximo seja igual a 1 e observar a evolução da distribuição de frequência. A figura (4.16) mostra que na primeira difusão ainda existe uma memória da radiação incidente devido à sua largura espectral estreita, enquanto que, a partir da segunda difusão já começa a ter uma redistribuição completa. Como foi dito anteriormente, esse efeito vai ficando mais explícito quando excitamos o vapor atômico com uma frequência mais afastada de sua frequência de ressonância.

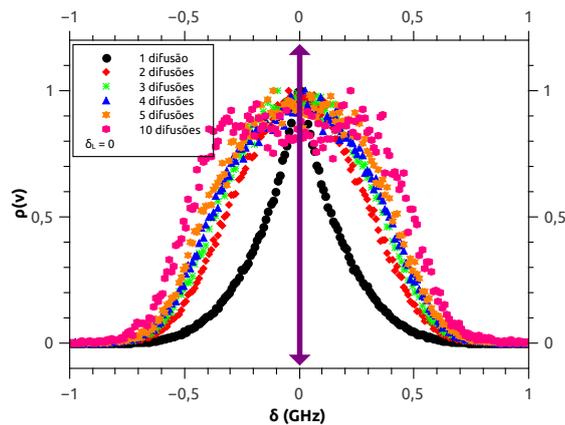


Figura 4.16: Evolução da distribuição em frequência dos fótons retrodifusos em função do número de difusão atômica. A radiação incidente possui uma dessintonização $\delta_L = 0$ como indica a seta em roxo. 1 difusão (preto), 2 difusões (vermelho), 3 difusões (verde), 4 difusões (azul), 5 difusões (laranja) e 10 difusões (rosa).

Comparando os espectros das duas densidades citadas neste capítulo normalizados a 1 para algumas difusões e para o número total de difusões para uma radiação incidente com frequência no centro da linha, observamos que há um alargamento, como mostra a figura (4.17). Este alargamento deve-se ao fato de que em alta densidade, a probabilidade de que o fóton saia do volume da célula com uma frequência próximo do centro da linha é menor que em baixa densidade, então, os fótons que escapam da célula para uma alta densidade são aqueles que possuem uma frequência nas asas da distribuição.

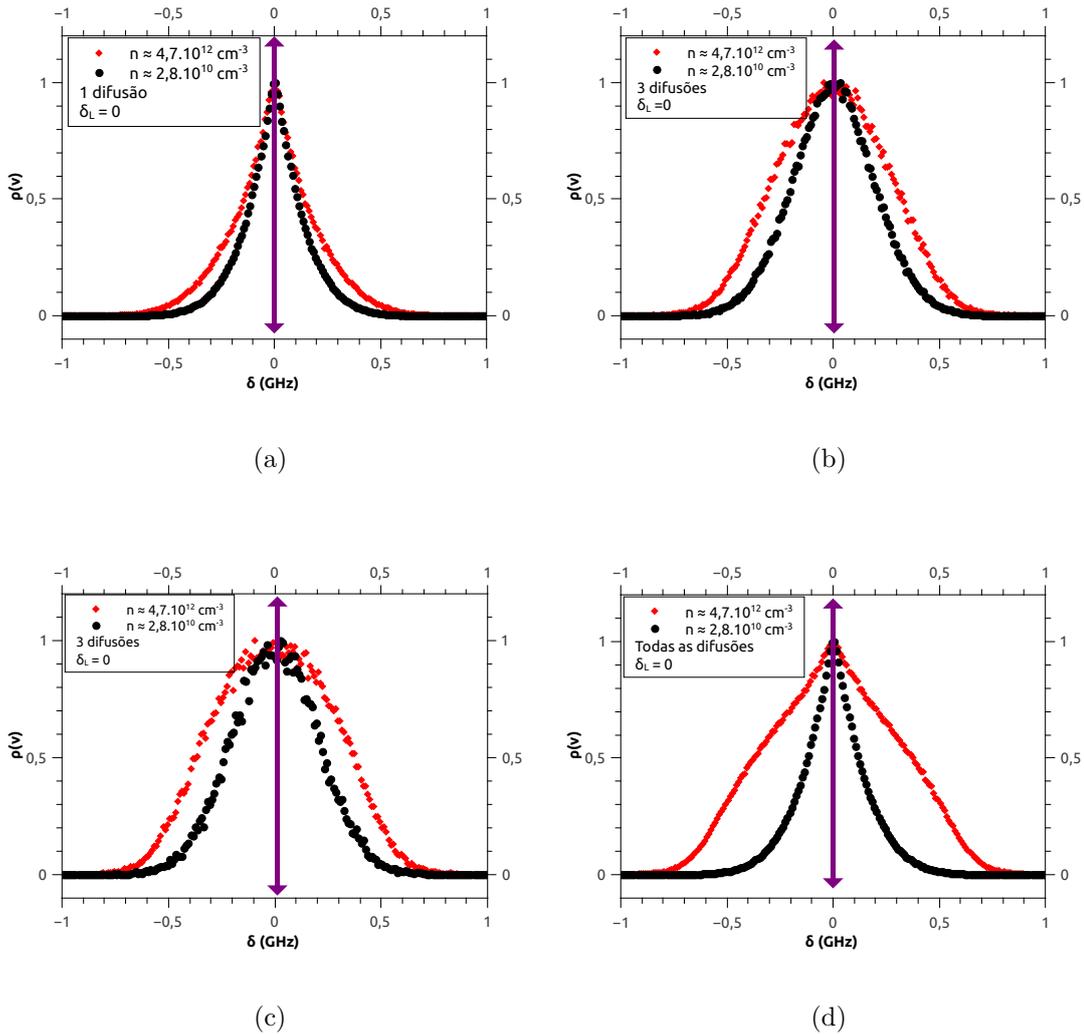


Figura 4.17: Comparação entre os espectros normalizados à 1 em cada retrodifusão para 2 densidades diferentes, em preto $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ e em vermelho $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ com uma frequência de excitação no centro da absorção atômica como indicado com a seta roxa em cada uma das figuras. (a), (b), (c) e (d) são para 1, 2, 3 e todas as difusões, respectivamente.

A figura (4.18) mostra a redistribuição em frequências para uma radiação incidindo em um vapor atômico de rubídio com uma dessintonização $\delta_L = -800 \text{ MHz}$. Para esta simulação, foram enviados no vapor atômico um número de fótons $N_f = 10^7$ e foram coletados 606880 fótons. Nesta figura (4.18), observamos que na primeira difusão existe uma memória da radiação onde possui um pico de grande amplitude em $\delta = 800 \text{ MHz}$. O vapor atômico é excitado por uma radiação incidente com $\delta_L = -800 \text{ MHz}$ e este pico aparece em uma frequência oposta porque estamos observando os fótons retroespalhados e o efeito Doppler faz com que o sinal da frequência do fóton retroespalhado inverta o sinal.

Este efeito não se limita apenas à alta densidade, mas para qualquer densidade atômica.

Ao longo das difusões, a frequência dos fótons tendem a se distribuir em torno do centro de absorção atômica (começa a passar de PFR para CFR), porém, para uma alta densidade, o fóton com uma frequência próxima da frequência de ressonância atômica possui uma menor probabilidade de sair do interior da célula, logo, a estrutura da distribuição de frequência destes fótons retrodifusos é com um buraco em torno desta frequência de absorção atômica.

Observando a figura (4.11 (f)) e (4.18 (f)), percebemos que aparece um pico de grande amplitude em $\delta = 800$ MHz que é causado pela contribuição das primeiras difusões dos fótons retrorrefletidos. O buraco que aparece nesta última figura surge porque a probabilidade dos fótons saírem do volume da célula com uma frequência no centro da absorção atômica é muito pequena devido ao seu livre percurso médio (ver equação (4.2)). O pico de menor amplitude que está presente nesta figura (4.18 (f)), ocorre em virtude da estrutura espectral que aparece em consequência dos fótons que sofreram poucas difusões e como estas difusões de ordens mais baixas possuem um número significativo em relação a outras difusões, então, aparece esta estrutura de segundo pico no número total dos fótons retrorrefletidos.

Por outro lado, para uma radiação incidente com uma frequência de excitação no centro da absorção atômica, este buraco em $\delta = 0$ não aparece, pois, em $\delta_L = 0$ o fóton percorre um pequeno comprimento em relação ao comprimento da célula que é $L = 5$ cm. Neste caso, a maioria dos fótons sofrem difusões perto da janela da célula, porém, há fótons que sofrem mais difusões em um vapor atômico com $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ e assim, estes fótons percorrem mais o interior da célula e então, como podemos perceber na figura (4.15) (fótons retrodirectados que sofreram dez difusões) não apresenta mais uma forma arredondada em $\delta = 0$ e é porque nesta frequência, como já foi comentado neste capítulo, os fótons têm uma menor probabilidade de saírem do volume da célula.

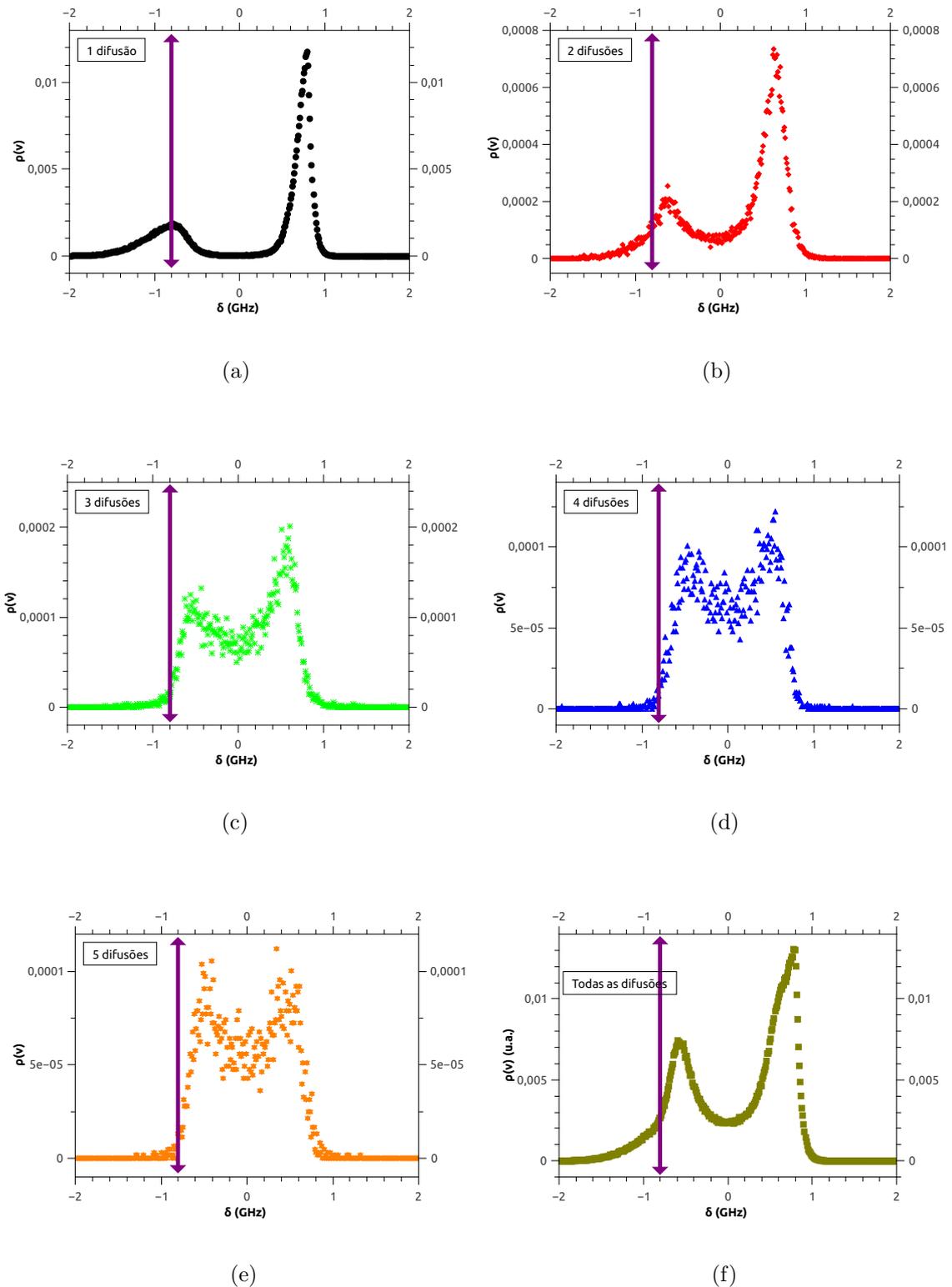


Figura 4.18: Redistribuição em frequência para uma radiação incidente com dessintonização de $\delta_L = -800$ MHz indicado na seta em roxo em um vapor atômico com densidade de $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. (a), (b), (c), (d), (e) e (f) são para 1, 2, 3, 4, 5 e todas as difusões dos fótons retroespalhados, respectivamente.

Podemos normalizar os gráficos de tal forma que seus valores máximos sejam iguais a 1, para uma radiação incidente com uma dessintonização $\delta_L = -800\text{MHz}$ e assim, comparar estes gráficos normalizados com as duas densidades diferentes citadas ao longo deste capítulo.

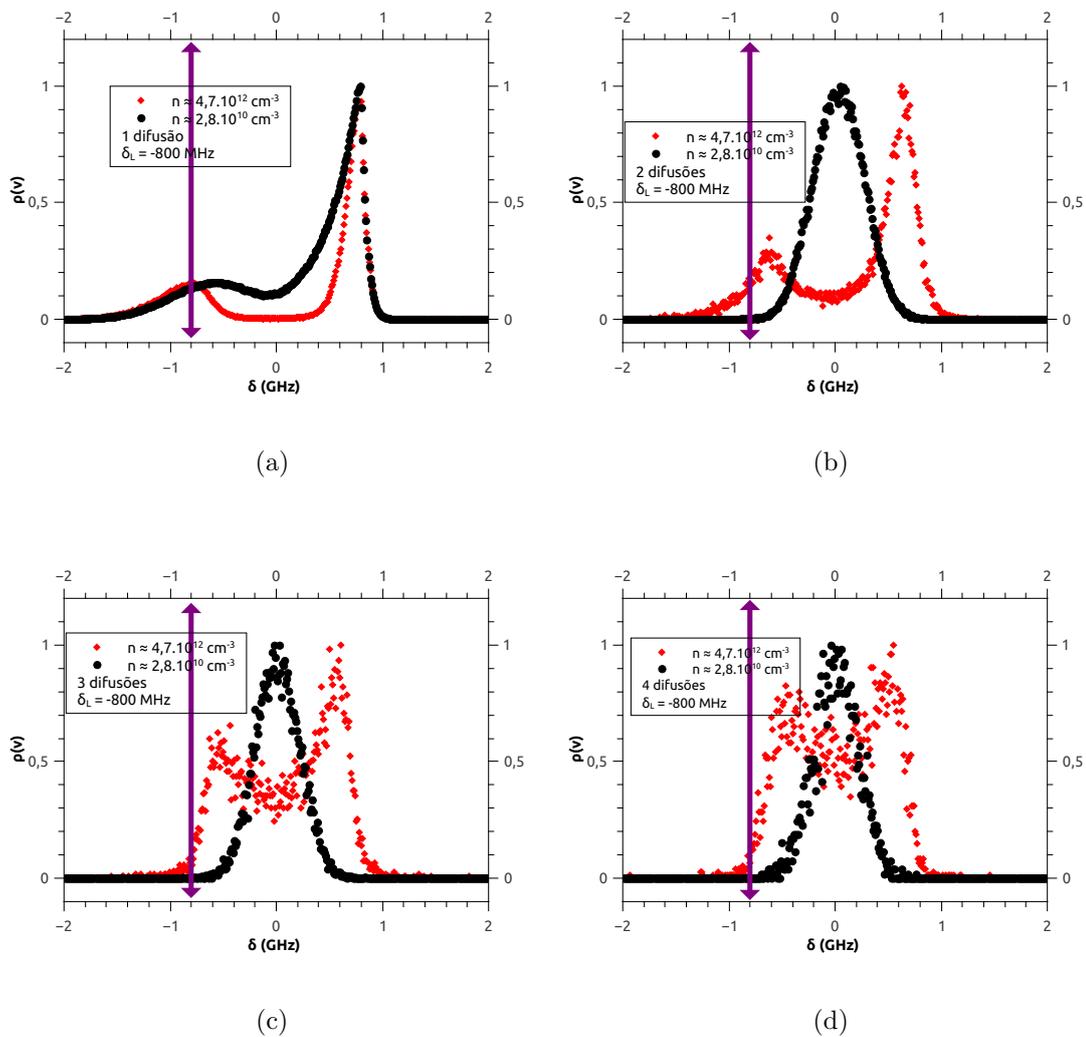


Figura 4.19: Comparação entre densidades diferentes com espectros normalizados a 1. Em preto $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ e em vermelho $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. A radiação incidente possui uma dessintonização $\delta_L = -800 \text{ MHz}$ marcada com a seta em roxo.

Como mostram os gráficos da figura (4.19), no regime de baixa densidade atômica, o espectro de fluorescência é quase completamente redistribuído em apenas duas difusões. Em um regime de alta densidade tem um buraco em $\delta = 0$. A explicação para este fato é que em alta densidade atômica, para que os fótons saiam do volume da célula é necessário que esses possuam uma frequência um pouco afastada da frequência de absorção, pois, há uma grande probabilidade destes fótons serem absorvidos nesta frequência próxima da

ressonância atômica, enquanto que, para uma menor densidade, o valor médio do percurso do fóton antes de ser absorvido é da mesma ordem de grandeza da dimensão da célula.

Na figura (4.19 (a)) observamos que em ambas as densidades aparece um pico e uma pequena estrutura em relação à amplitude do pico em torno de $\delta = -800$ GHz. Para a densidade $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ a estrutura espectral dessa fluorescência retroespalhada é mais larga quando comparada à densidade $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. Explicaremos o porquê desta estrutura no fim deste capítulo quando apresentarmos a distribuição de probabilidade da componente paralela da velocidade dos átomos espalhadores em relação à direção do fóton.

(b) Evolução da distribuição de comprimento do passos dos fótons retroespalhados.

A distribuição do comprimento do passo dos fótons entre duas difusões sucessivas é estreitamente ligada à distribuição espectral incidente e à forma de linha de absorção atômica (ver a equação (3.26)), ou seja, depende fortemente do processo de redistribuição de frequência no vapor atômico.

Como vimos no item anterior, simulações Monte Carlo permitem observar a evolução do perfil espectral dos fótons depois de cada evento de espalhamento. Todos os fótons incidem na célula com uma frequência dentro do perfil espectral do laser e estudamos a evolução desse perfil, durante a propagação no vapor, devido à redistribuição das frequências pelo efeito Doppler. Quanto mais próximo é a frequência da frequência central da absorção, maior é a probabilidade do fóton ser absorvido e menor é o comprimento do seu passo.

A figura (4.20) mostra o comportamento da distribuição de probabilidade dos passos dos fótons para algumas ordens de difusão (1 a 4 difusões) no interior da célula que contém o vapor atômico para uma radiação incidente com uma frequência que possui uma dessintonização $\delta_L = -800$ MHz, comparando com diferentes densidades atômicas, $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ e $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. Podemos perceber que na primeira difusão quando ainda há memória da frequência anterior, como se observa na figura (4.19 (a)), os fótons percorrem uma distância maior quando comparado com os fótons que sofreram mais de uma difusão e vai diminuindo à medida que estes vão sofrendo mais difusões,

devido à passagem de PFR para CFR, como se observa na figura (4.20). Na segunda e terceira difusão dos fótons, tanto para baixa densidade quanto para alta densidade atômica, a diferença entre o tamanho do passo nessas duas densidades já se torna menor (ver figura (4.20 (b) e (c))), pois, para baixa densidade, a partir da segunda difusão, os fótons retrorrefletidos estão quase completamente redistribuídos (ver figura (4.19 (b) e (c))) e, desta forma, existe uma maior probabilidade desses fótons serem absorvidos, enquanto que, para alta densidade, para este número de difusões, os fótons retroespalhados ainda não estão completamente redistribuídos, fazendo com que a probabilidade deles serem absorvidos diminuir, mas não o bastante para ultrapassar o tamanho do passo em um regime de baixa densidade atômica. Por outro lado, quando ocorre a quarta difusão, há uma queda elevada no tamanho do passo do fóton quando compara-se alta e baixa densidade, como podemos observar na figura (4.20 (d)), porque no regime de alta densidade, com este número de difusões, a frequência dos fótons retrodifusos está convergindo à frequência de absorção atômica, como mostra a figura (4.19 (d)). Caso nestes dois regimes (alta e baixa densidade atômica), os fótons estejam redistribuídos quase completamente a probabilidade deste fóton ser absorvido em um regime de alta densidade é muito maior quando comparado com a probabilidade deste fóton ser absorvido em um regime de baixa densidade.

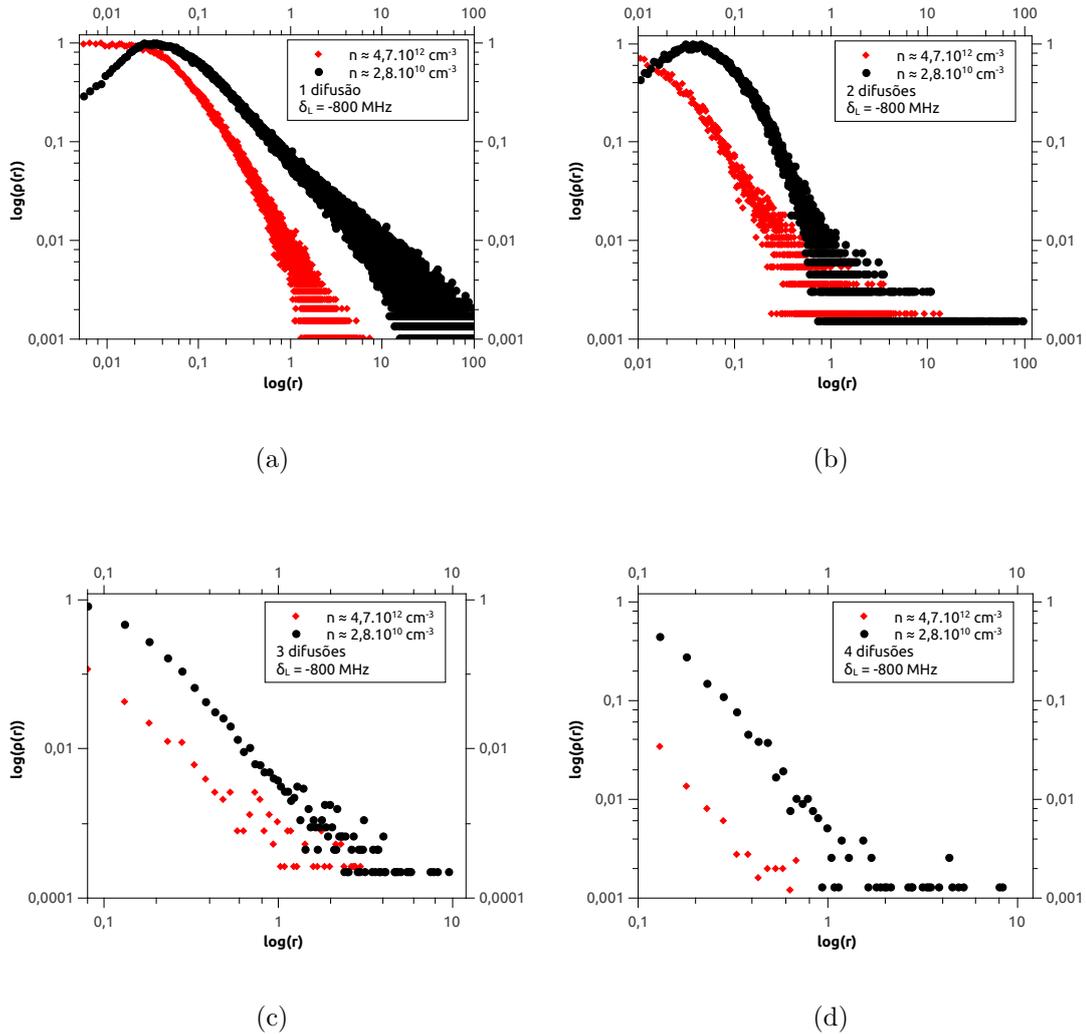


Figura 4.20: Comparação entre as distribuições de probabilidade dos passos dos fótons retrodectados em vapor atômico para duas densidades atômicas diferentes. Em vermelho $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ e em preto $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. A dessintonização da radiação incidente é $\delta_L = -800 \text{ MHz}$.

A figura (4.21) mostra a distribuição de probabilidade dos passos dos fótons retrodectados no meio atômico para uma radiação incidente com frequência no centro da absorção. Observando os resultados colocados nesta figura, notamos que a distribuição dos passos dos fótons segue igual mesmo aumentando o número de difusões dos fótons no vapor atômico e, isto deve-se ao fato de que há uma intensa correlação entre as frequências de absorção e emissão e portanto, os fótons emitidos possuem um grande probabilidade de serem emitidos nesta frequência de incidência, tanto em um vapor atômico em regime de alta densidade quanto em um regime de baixa densidade. Observamos também que, mesmo a emissão dos fótons ocorrendo na frequência de absorção atômica devido a ra-

dição incidente, existe uma diferença no comportamento da distribuição de probabilidade dos passos do fóton em relação aos dois regimes de densidade já citados, pois, para alta densidade a probabilidade destes fótons emitidos com estas frequências é muito maior quando comparado aos fótons emitidos pelo vapor atômico em baixa densidade.

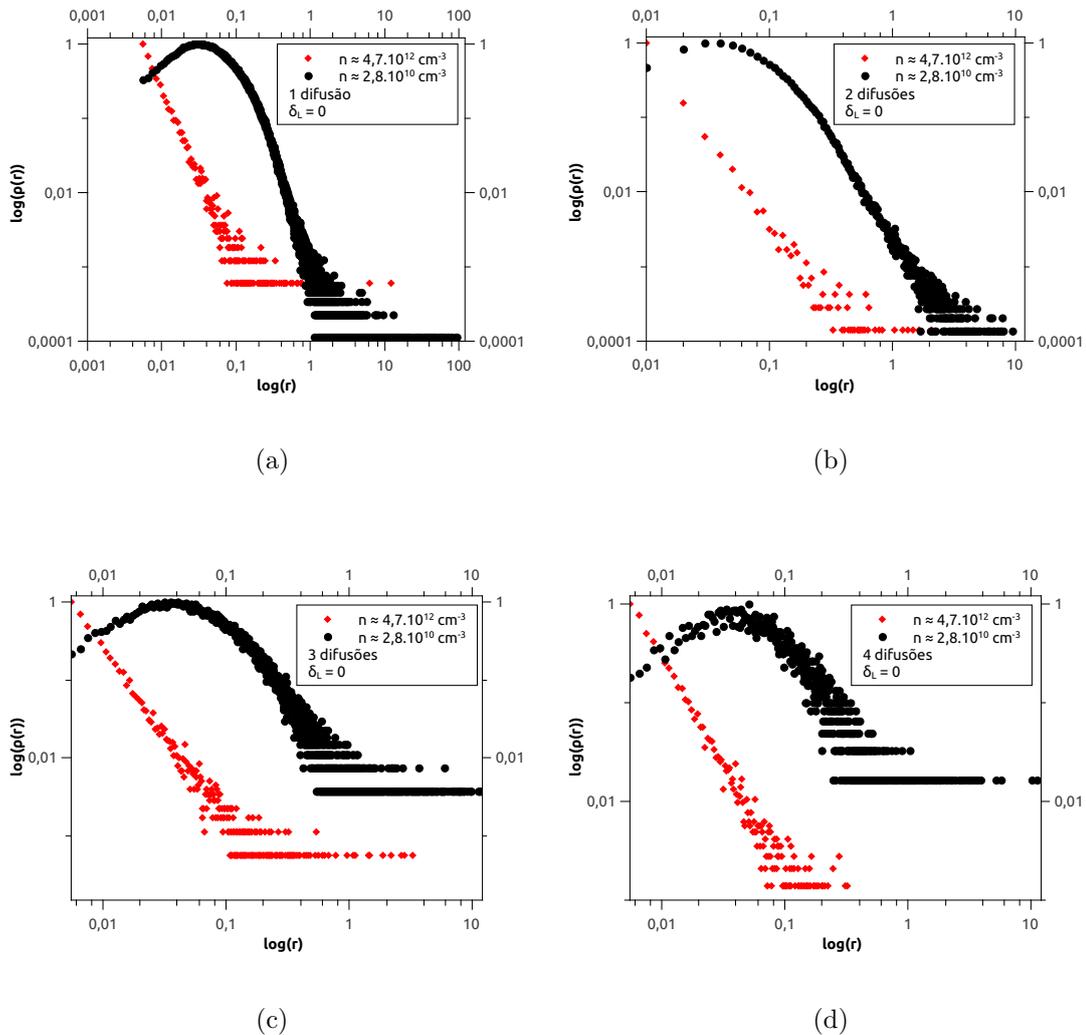


Figura 4.21: Comparação entre as distribuições de probabilidade dos passos do fóton em vapor atômico para duas densidades atômicas diferentes. Em vermelho $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ e em preto $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. A radiação incidente possui um frequência no centro da absorção atômica.

(c) Distribuição da componente paralela de velocidade dos átomos espalhados.

A figura (4.22) mostra a distribuição de probabilidade da velocidade paralela dos átomos espalhadores em relação à direção do fóton antes do espalhamento. Esta é a velocidade crucial para que o átomo absorva o fóton. Pode ser feito um cálculo para

encontrar a velocidade $V_{//}$ que compensa a dessintonização δ_L da radiação incidente. Este cálculo pode ser feito com a ajuda da equação (2.60). Portanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu - \nu_0 = -300 \text{ MHz} \rightarrow V_{//} \approx 234 \text{ m/s} \\ \nu - \nu_0 = -800 \text{ MHz} \rightarrow V_{//} \approx 624 \text{ m/s} \\ \nu - \nu_0 = -1,5 \text{ GHz} \rightarrow V_{//} \approx 1170 \text{ m/s} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

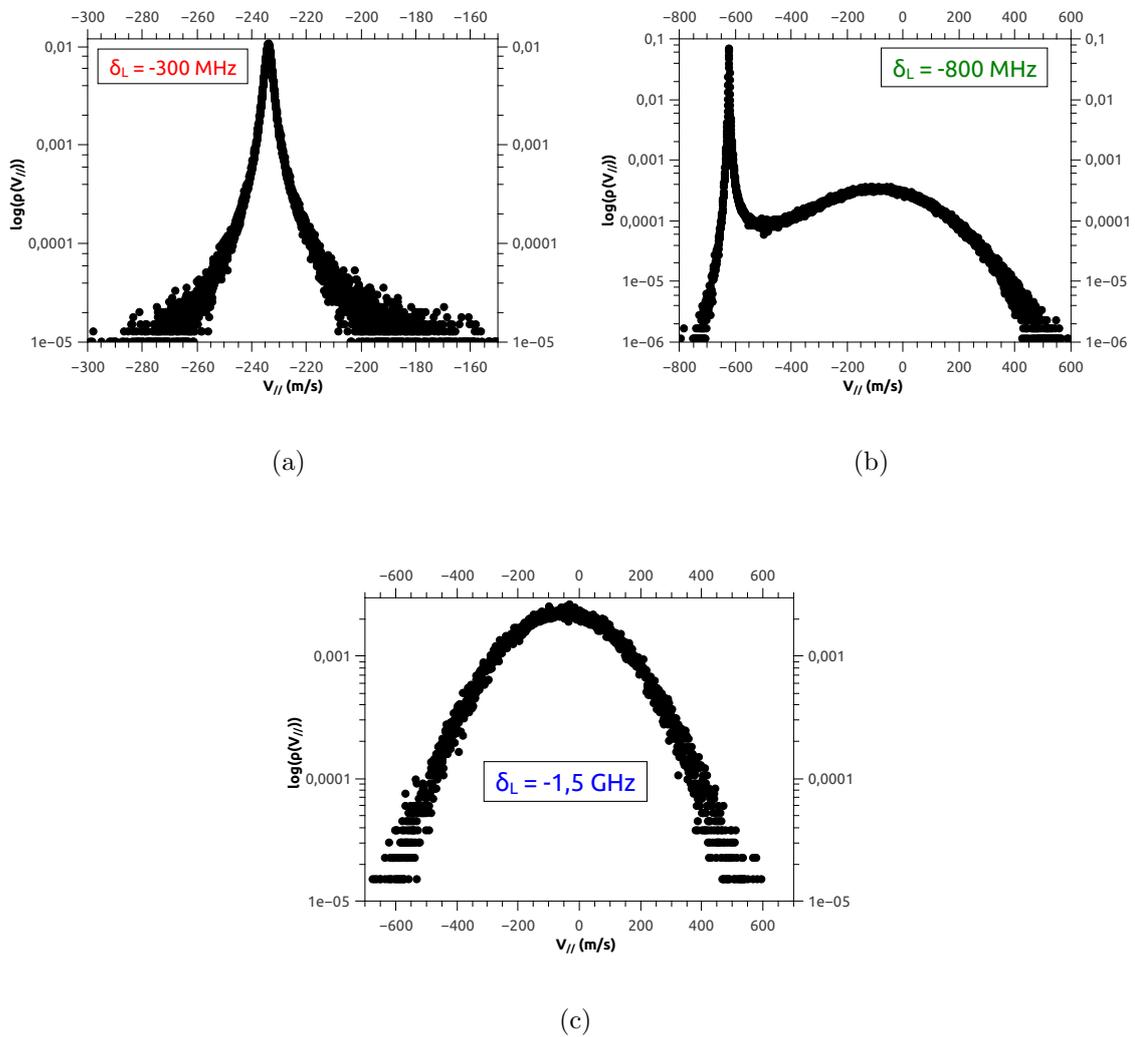


Figura 4.22: Distribuição de probabilidade da velocidade paralela do átomo espalhador ($V_{//}$) em relação ao fóton incidente para três dessintonizações diferente da radiação incidente. (a) $\delta_L = -300$ MHz, (b) $\delta_L = -800$ MHz e (c) $\delta_L = -1,5$ GHz.

Como podemos perceber na figura (4.22), para a radiação incidente próximo ao centro de absorção, como por exemplo $\delta_L = -300$ MHz, há uma grande probabilidade dos átomos

absorverem os fótons provenientes desta radiação com uma velocidade $V_{//}$ que compense a dessintonização δ_L da radiação incidente, ou seja, para uma radiação incidente com uma frequência bem afastada do centro de absorção, não existem átomos com uma velocidade que compense tal dessintonização para absorver os fótons desta radiação, então, como já foi discutido no início deste capítulo, os átomos absorvem estes fótons com uma velocidade que não corrige esta dessintonização imposta na radiação incidente e esta absorção ocorre nas asas do perfil de absorção (o perfil de absorção neste caso possui uma forma espectral de Lorentz).

Para uma dessintonização da radiação incidente $\delta_L = -800$ MHz, observamos que ainda há átomos com uma velocidade que compense esta dessintonização (pico estreito centrado em $V_{//} \approx 624$ m/s), porém, para uma dessintonização $\delta_L = -1,5$ GHz, o número de átomos com velocidade $V_{//} \approx 1170$ m/s é desprezível (ver figura (4.22)). Entretanto, átomos com velocidade $V_{//}$ que não compensa esta dessintonização $\delta_L = -1,5$ GHz espalham os fótons da radiação incidente e, portanto, a distribuição espectral desses fótons espalhados reflete a distribuição espectral dos fótons incidentes como foi observado nos resultados colocados ao longo deste capítulo (ver por exemplo figura (4.5 (e)), curva preta). Estes fótons espalhados possuem uma memória da frequência da radiação incidente, caracterizando uma redistribuição parcial em frequências (PFR).

Exposto os gráficos da componente paralela da velocidade dos átomos espalhadores em relação à direção do fóton (ver figura (4.22)), podemos explicar melhor a figura (4.19). Analisando a figura (4.22 (b)) tomamos nota que existe uma grande parcela de átomos que compensam a dessintonização δ_L imposta no laser (o pico em torno de $V_{//} = -600$ m/s na figura (4.22 (b)) mostra esta informação) e, com isso, estes átomos absorvem os fótons com uma frequência na ressonância no referencial atômico. Por outro lado, ainda há certo número de átomos que não compensam tal dessintonização (componente larga centrada em $V_{//} = 0$ na figura (4.22 (b)) e assim, estes absorvem fótons com uma frequência fora da ressonância, nas asas do perfil espectral de absorção, no referencial atômico. Isto pode ser observado na figura (4.19 (a)), ou seja, o pico de maior amplitude refere-se aos átomos que absorvem os fótons com frequência na ressonância no referencial atômico, enquanto que a pequena elevação, diz respeito ao pequeno número de fótons que foram absorvidos fora de ressonância no referencial atômico.

Um outro fato a ser observado é que para $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ a fluorescência retrodec-

tada possui uma largura maior quando comparada à $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. Este evento ocorre porque os fótons emitidos com uma frequência no centro da absorção atômica por um vapor atômico em um regime de baixa densidade possuem uma maior probabilidade de escapar do volume da célula comparados a vapores atômicos em regime de alta densidade. Ou seja, o livre percurso médio dos fótons é maior em um vapor atômico com $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ comparado àqueles fótons difusos em um vapor atômico com $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$, conforme a equação (4.2).

Podemos obter a probabilidade de encontrar átomos com as velocidades dada na equação (4.2) através da distribuição de velocidade da componente paralela dos átomos $P(V_{//})$ para $T = 373 \text{ K}$.

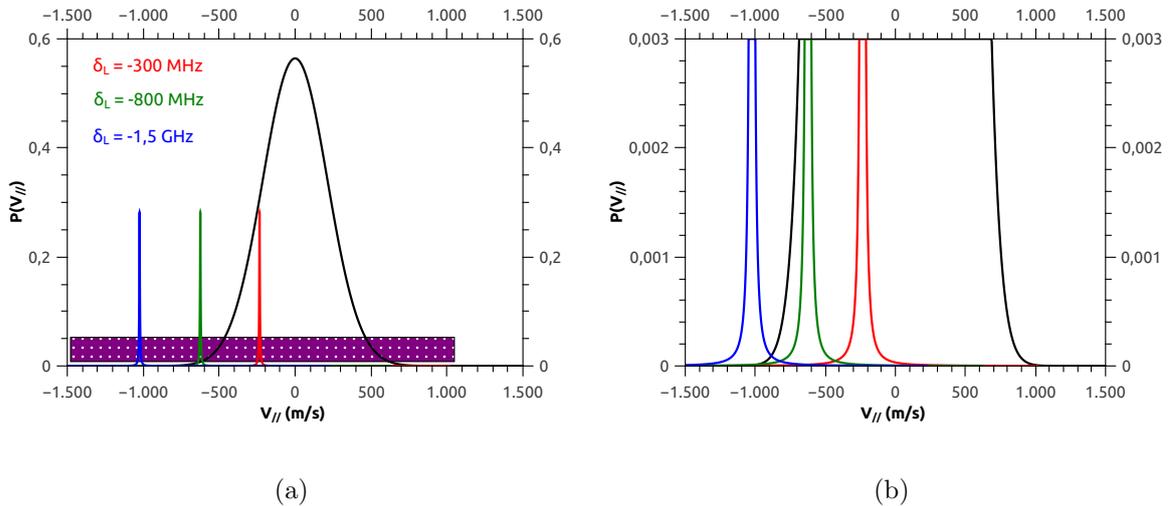


Figura 4.23: Distribuição de velocidade de Maxwell-Boltzmann no vapor atômico. (a) Mostra linhas verticais que indicam a correção de velocidade para compensar a dessintonização fixada na radiação incidente. As linhas azul, vermelha e laranja exibem, respectivamente, a correção Doppler para $\delta_L = -300 \text{ MHz}$, $\delta_L = -800 \text{ MHz}$ e $\delta_L = -1,5 \text{ GHz}$. (b) Mostra a ampliação da região tracejada.

A figura (4.23) mostra esta distribuição. Os traços verticais em azul, vermelho e laranja mostram, nessa ordem, as velocidades que compensam a dessintonização imposta na radiação incidente. A figura (4.23 (b)) é apenas uma ampliação da região indicada em roxo onde se indentificam as velocidades que compensam as dessintonizações -300 MHz , -800 MHz e $-1,5 \text{ GHz}$. Percebe-se nesta figura que ainda há uma probabilidade muito pequena, mas não nula, de ter átomos que compensem $\delta_L = -1,5 \text{ GHz}$ e isto faz com que a absorção dos fótons seja feita, maioritariamente, nas asas da absorção. Por outro lado,

para $\delta_L = -300$ MHz, existe um grande número de átomos que possuem uma velocidade que corrige esta dessintonização. Contudo, podemos afirmar que quanto mais próximas da frequência de ressonância atômica as dessintonizações impostas na radiação incidente, maior a probabilidade dos átomos absorverem esta radiação próximo da ressonância no referencial atômico enquanto que para dessintonizações mais afastadas da frequência de ressonância atômica, os átomos absorvem esta radiação nas asas do perfil de absorção neste mesmo referencial.

Como podemos observar na figura (4.22), notamos que para uma dessintonização de $\delta_L = -1,5$ GHz imposta na radiação incidente não existem átomos que compensem tal dessintonização e assim a absorção é feita fora de ressonância no referencial atômico, porém, há um limite em δ_L em que os átomos compensem tal dessintonização. A figura (4.24) mostra este limite que é a interseção entre a distribuição de velocidade dos átomos e o coeficiente de absorção homogêneo dos átomos. Contudo, com a figura (4.24) fica claro que para $\delta_L = -1,5$ GHz não existem átomos que absorvem a radiação incidente na ressonância em seu referencial.

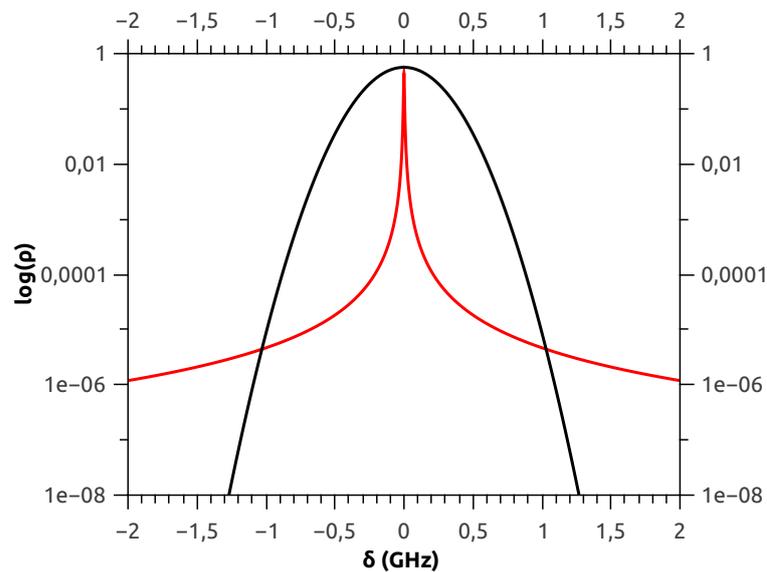


Figura 4.24: Região onde a velocidade dos átomos compensa a dessintonização δ_L estabelecida na radiação incidente. Em preto é mostrada a distribuição de velocidade dos átomos e em vermelho o coeficiente de absorção homogêneo do átomo. O limite desta região é em $|\delta| \gtrsim 1$ GHz e a partir dela os átomos absorvem a radiação fora de ressonância em seu referencial.

CAPÍTULO 5

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PARA DISTRIBUIÇÃO DOS PASSOS DO FÓTON EM UM VAPOR ATÔMICO

Neste capítulo estudaremos a distribuição de probabilidade dos passos do fóton ressonante em um vapor atômico. Para isto faremos o uso da equação (3.26) que calcula a distribuição de passos dos fótons em um vapor atômico levando em consideração que a radiação incidente no meio atômico possui uma certa largura espectral e, desta maneira, com a equação (3.18), da distribuição de probabilidade, como lei de potência para o regime assintótico, encontramos qual é o expoente para essa distribuição. Primeiro consideraremos formas espectrais já mencionadas neste trabalho (perfil de Gauss, Lorentz e Voigt) como espectros de absorção e da radiação incidente. Em seguida, modificaremos o espectro da radiação incidente para um espectro “natural¹” e por fim, a modificação será feita também no espectro de absorção do vapor deixando a radiação incidente com espectro natural.

A motivação desse estudo é avaliar o grau de controle que podemos ter sobre a estatística do comprimento de passos dos fótons, manipulando as distribuições envolvidas na determinação dessa estatística.

5.1 Distribuição de probabilidade de passos de fótons

A distribuição dos passos de fótons, cuja radiação incidente tem espectro igual ao da absorção já foram estudados anteriormente [1]. A figura (5.1) resume esses resultados.

¹Espectro natural neste contexto, refere-se as formas espectrais de Gauss, Lorentz e Voigt

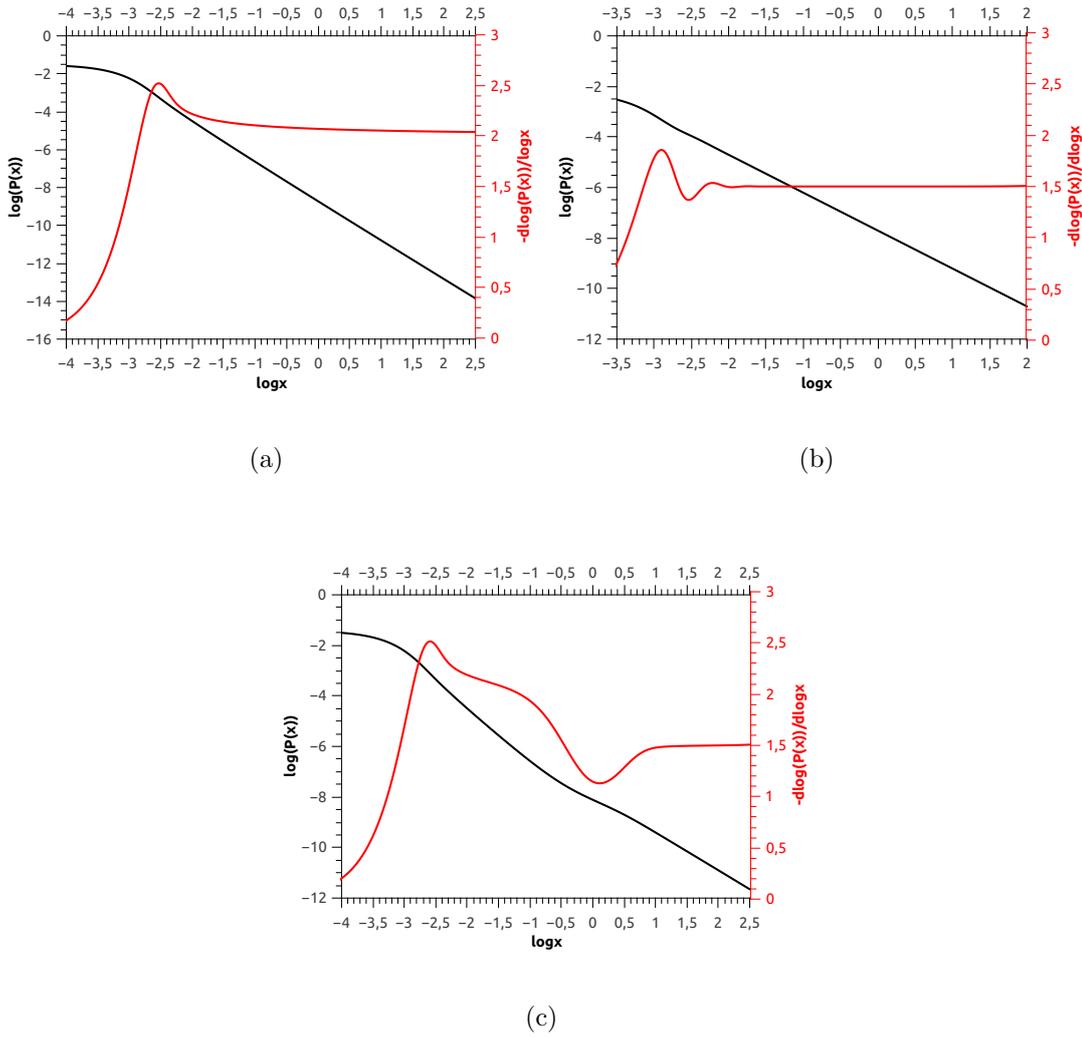


Figura 5.1: Distribuição de probabilidade dos passos de fóton em um vapor atômico de rubídio em preto e o coeficiente μ da lei de potência em vermelho. Os espectros da radiação incidente e da absorção são iguais. (a) Gauss-Gauss (b) Lorentz-Lorentz (c) Voigt-Voigt. O parâmetro de Voigt usado foi $a = 10^{-2}$ que corresponde ao parâmetro típico para um vapor de rubídio em torno da temperatura ambiente. Note que o coeficiente μ tende a um valor constante $\simeq 2$ para perfis Doppler, enquanto que para os perfis Lorentz e Voigt, o valor assintótico de μ é 1,5

O eixo das ordenadas em vermelho é o coeficiente μ da lei de potência dado na equação (3.18) e foi obtido da seguinte forma:

$$\log(P(x)) \sim \log(x^{-\mu}) \tag{5.1}$$

$$\log(P(x)) \sim -\mu \log(x) \tag{5.2}$$

Fazendo $Y = \log(P(x))$ e $X = \log(x)$, temos que:

$$Y \sim -\mu X \quad (5.3)$$

Derivando a equação (5.3) e voltando o Y e o X para funções logarítmicas, obtemos a seguinte equação:

$$-\frac{d \log(P(x))}{d \log x} \sim \mu \quad (5.4)$$

A unidade no eixo das abcissas é dada em metros quando efetua-se a operação logarítmica. Para isso, fizemos o uso da seguinte equação [43]:

$$n\sigma_0 x = r \quad (5.5)$$

onde n é a densidade atômica, σ_0 é a seção de choque, x é o comprimento em metros dos passos do fóton e r é uma quantidade adimensional, permitindo obter curvas $P(r)$ universais. Para determinar os comprimentos correspondentes para um dado sistema (césio ou rubídio, certa densidade de vapor atômico), basta dividir r pela densidade e pela seção de choque da transição considerada. Para todos os resultados referentes a este capítulo usamos uma densidade atômica de $n \simeq 1,25 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. O valor da seção de choque é obtido através da relação:

$$\sigma_0 = \frac{\lambda^2 g_2}{2\pi g_1} \quad (5.6)$$

onde λ é o comprimento de onda referente à transição atômica (no nosso caso estamos usando a linha D_2 do rubídio, ou seja, $\lambda = 780,241 \text{ nm}$) e $g_{1,2}$ são as degenerescências dos estados, neste caso o estado fundamental e o excitado. Essas degenerescências são dadas por [46]:

$$g = 2J + 1 \quad (5.7)$$

onde J é o spin total do átomo. Considerando a transição $5^2S_{1/2} \rightarrow 5^3S_{3/2}$, então, $g_2 = 4$ e $g_1 = 2$. Com esses dados, a seção de choque, calculada através da equação (5.6) obtém-se o valor de $\sigma_0 \simeq 2 \cdot 10^{-13} \text{ m}^{-2}$. Com o cálculo da seção de choque e dada a densidade atômica, obtemos um fator de escala de maneira que transforma o r em unidades do SI.

Esse fator multiplicativo encontrado é $0,4 \cdot 10^{-13}$ m. Então, x na equação (5.5) fica da seguinte forma:

$$x \simeq 0,4 \cdot 10^{-13} \cdot r \quad (5.8)$$

Como veremos no próximo capítulo, usamos esse fator, pois, a célula que estávamos estudando experimentalmente contém vapor de rubídio com densidade pré-estabelecida.

Apresentaremos abaixo resultados para a distribuição dos passos de fótons e do coeficiente μ da lei de potência com diferentes espectros de radiação incidente e de absorção, desde que esses espectros ainda sejam as formas naturais (Lorentz, Gauss e Voigt), ou seja, faremos com que a radiação incidente seja um tipo de espectro “natural” e o coeficiente de absorção tenha um espectro “natural” diferente da radiação incidente.

1- Lorentz como forma espectral da radiação incidente

Em geral, iluminamos um vapor atômico com um feixe laser “monocromático”. Se considerarmos uma frequência de excitação única ($\Phi(\nu_L) = \delta(\nu - \nu_L)$), então a distribuição dos passos é dada por (ver a equação (3.25)) $P_{\nu_L}(r) = \Phi_{abs}(\nu_L) e^{-\Phi_{abs}(\nu_L)r}$, ou seja, a distribuição de passos decai exponencialmente. Se levarmos em conta o perfil espectral Lorentziano do laser, a distribuição de passos é dada pela equação (3.26), com $\Phi_{inc}(\nu)$ dado por (2.56). Estudamos essa distribuição de passo para um vapor com espectro de absorção Doppler ou Voigt.

A figura (5.2) mostra a distribuição de probabilidade em escala logarítmica da distribuição de passos do fóton em um vapor atômico de rubídio e o respectivo expoente μ da lei de potência.

Podemos perceber também na figura (5.2) que até uma posição -2 no eixo das abcissas, a distribuição de probabilidade é exatamente igual para os dois casos (a) e (b) da figura e vai se modificando em um regime assintótico. Esse fato é devido ao perfil de Voigt que, na parte central possui uma forma do perfil Doppler enquanto que suas asas possuem uma forma do perfil de Lorentz. Notamos que no regime assintótico o expoente μ é igual para o espectro de absorção Lorentz e para o espectro de absorção Voigt. Esse fenômeno deve-se ao fato de esses dois perfis (Lorentz e Voigt) possuírem a mesma dependência assintótica.

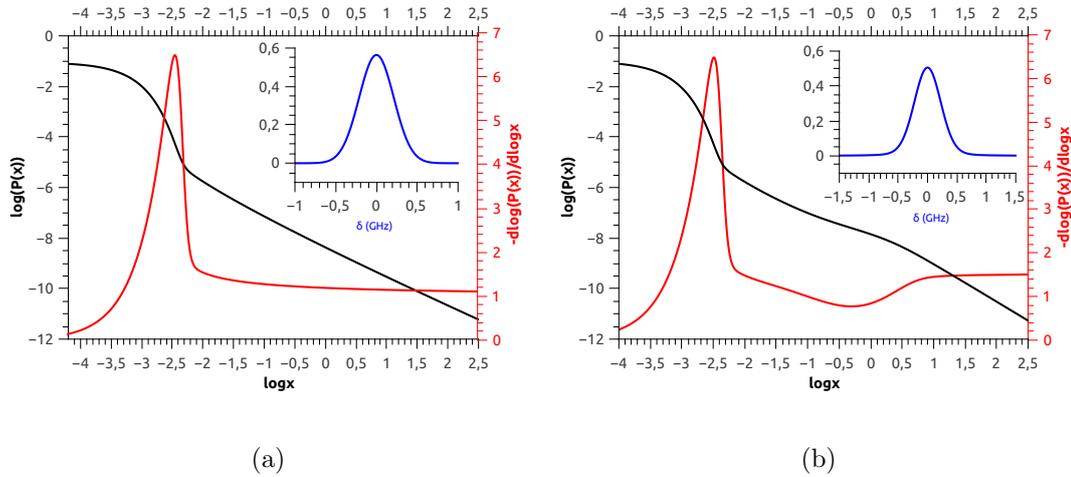


Figura 5.2: Distribuição de probabilidade de comprimento dos passos do fóton e o expoente μ da lei de potência, mostrados nas curvas em preto e em vermelho, respectivamente. Os gráficos em azul representam os espectros de absorção. (a) Espectro de absorção Doppler à $T = 301$ K. (b) Espectro de absorção Voigt. O parâmetro de Voigt usado foi de $a = 10^{-2}$. O espectro da radiação incidente possui um perfil de Lorentz com uma largura espectral de 6 MHz.

2- Gauss como forma espectral da radiação incidente

No intuito de avaliar as condições em que as distribuições de comprimento de passos dos fótons podem ser modificadas e controladas, simulamos várias combinações de espectros da radiação incidente, $\Phi_{inc}(\nu)$, e de espectros de absorção, $\Phi_{abs}(\nu)$. O espectro da radiação incidente pode ser lorentziano (laser por exemplo), como discutido no item anterior. Estudamos neste item (2) o caso de um espectro incidente com um perfil Gaussiano. Isso pode ser obtido experimentalmente iluminando uma célula com vapor atômico com um laser ressonante e selecionando a fluorescência emitida na direção perpendicular ao feixe laser, fazendo esses fótons incidirem sobre uma segunda célula com vapor atômico [42].

Na figura (5.3 (a)) observamos uma divergência no expoente μ . Como a radiação incidente tem um perfil Gaussiano e esse tipo de espectro decai rapidamente, então, não há frequências que excitem as asas da distribuição do coeficiente de absorção, que é uma Lorentziana. Existe uma espécie de “truncamento” na frequência de excitação e a radiação incidente é vista pelos átomos nas asas da distribuição de Maxwell-Boltzmann como uma radiação “monocromática”: o comportamento da distribuição de passos assemelha-se então ao descrito pela equação (3.25), ou seja, com um decaimento exponencial. Esse

fenômeno também é observado na figura (5.3 (b)), porém, a região mais central possui uma forma igual a figura (5.1 (a)) e, deve-se ao fato de que o espectro de Voigt nessa região é idêntico ao espectro de Gauss, no entanto, no regime assintótico ocorre também a mesma divergência observada na figura (5.3 (a)), pois, nesse regime o perfil de Voigt possui a mesma estrutura do perfil de Lorentz.

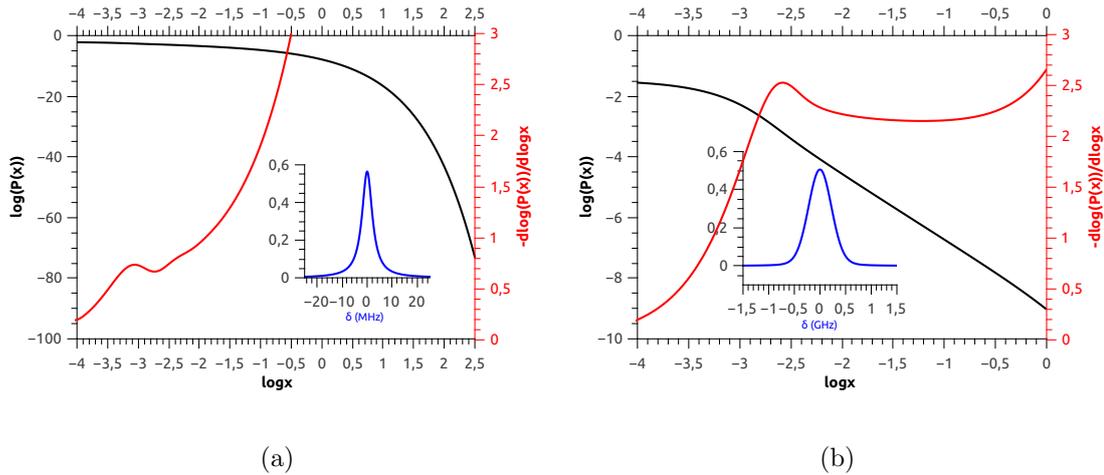


Figura 5.3: Distribuição de probabilidade de passos do fóton mostrado na curva em preto e em vermelho o expoente μ da distribuição de probabilidade como lei de potência. Os gráficos em azul denotam os espectros de absorção. (a) Espectro de absorção como Lorentz com uma largura de 6 MHz. (b) Espectro de absorção como Voigt. O parâmetro de Voigt usado foi de $a = 10^{-2}$. O espectro da radiação incidente usado na integração numérica foi o perfil de Gauss com uma largura espectral de 500 MHz.

3- Voigt como forma espectral da radiação incidente

Podemos considerar os fótons incidentes como tendo um perfil Voigt. É o que acontece quando o regime é de CFR, em um vapor com perfil de absorção Voigt.

Neste caso, a distribuição de probabilidade de passos do fóton foi obtida deixando o espectro da radiação incidente ser o perfil de Voigt e o espectro absorção ser o perfil, de Lorentz ou o de Doppler.

Como podemos observar na figura (5.4 (a)), o regime inicial ($-4 \leq \log x \leq -2,5$) da distribuição de probabilidade de passos do fóton é parecido com a estrutura da figura (5.3 (a)) devido à parte central do perfil de Voigt ser parecido com o perfil de Doppler. Porém, no regime assintótico ($\log x > -2,5$) prevalece o perfil de Lorentz e o $P(x)$ e o expoente μ vão seguindo um perfil de Lorentz tanto na absorção quanto no espectro da radiação incidente.

Por outro lado, na figura (5.4 (b)), o regime assintótico ($\log x > 2$) é parecido com uma estrutura mostrada na figura (5.2 (a)), pois, o regime assintótico do perfil de Voigt leva característica do perfil de Lorentz.

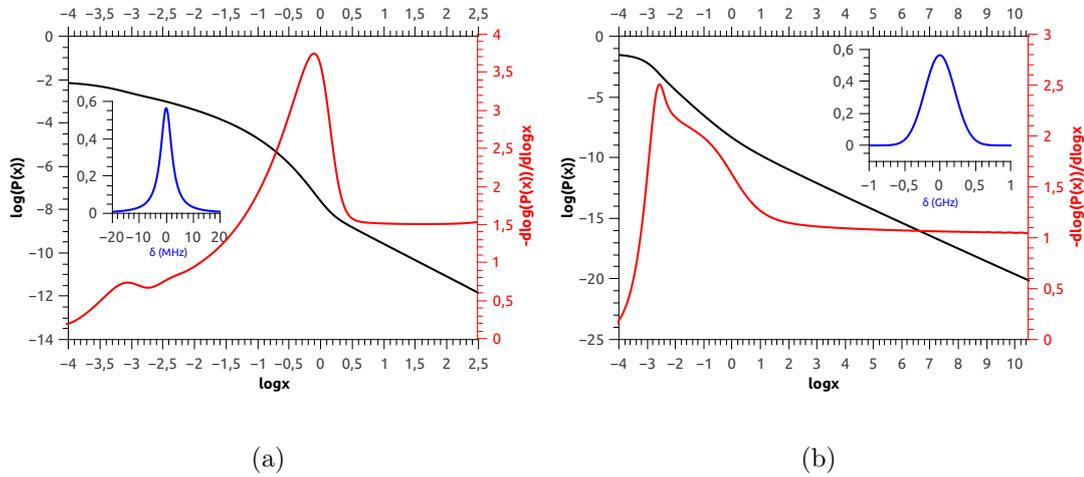


Figura 5.4: Em preto, a distribuição de probabilidade de passos do fóton e, em vermelho, o expoente μ da distribuição de probabilidade como lei de potência. Os gráficos em azul representam os espectros de absorção. (a) Espectro de absorção como Lorentz com uma largura de 6 MHz. (b) Espectro de absorção como Gauss com uma largura 500 MHz. O perfil da radiação incidente é o perfil de Voigt com $a = 10^{-2}$.

5.2 Distribuição de probabilidade dos passos do fóton com o espectro da radiação incidente modificado

Nesta seção iremos analisar o comportamento de $P(x)$ e de μ para um espectro de radiação incidente modificado, deixando o espectro de absorção do vapor ser um perfil de Voigt. Essa modificação da radiação incidente é feita com um pico em sua estrutura original (que é Voigt ou Doppler), como mostra a figura (5.5). Esse pico pode se localizar (em frequência) em qualquer posição do espectro natural da radiação incidente (Voigt ou Gauss).

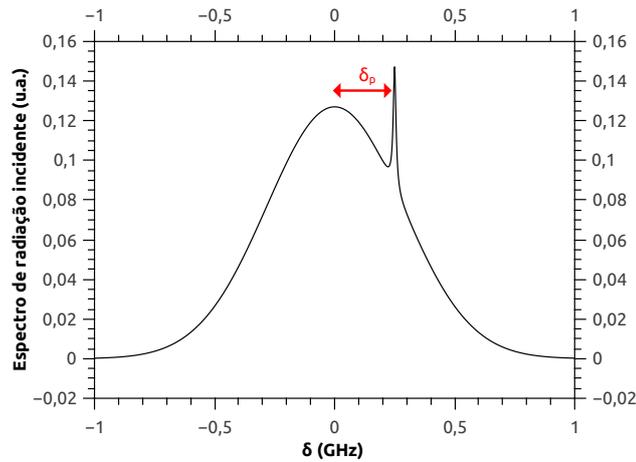


Figura 5.5: Espectro da radiação incidente, que é Voigt ou Doppler, modificado com um pico em sua estrutura espectral. A dessintonização do pico em relação ao centro do perfil espectral mais largo é representada por δ_p .

Experimentalmente, isso pode ser obtido superpondo a um espectro de fluorescência uma outra radiação (laser) que possui uma frequência sintonizável dentro desse espectro mais largo. Iremos observar duas situações com espectros naturais de radiação incidente modificados. A primeira é deixando ser o seu perfil espectral de absorção como Voigt e a segunda, é deixando ser como Doppler. Esse pico formado nessas estruturas possui um perfil de Lorentz, pois, experimentalmente, um laser possui tal perfil.

A figura (5.6) mostra a distribuição dos passos do fóton $P(x)$ e o coeficiente da lei de potência μ para diferentes dessintonizações do pico, pois, o espectro da radiação incidente foi mostrado na figura (5.5). Essas dessintonizações foram $\delta_p = 0, 70, 175, 350$ MHz. O espectro de absorção utilizado foi o de Voigt com parâmetro $a = 10^{-2}$. Como já foi mencionado, este pico na radiação incidente é gerado por um perfil de Lorentz. Há uma relação entre as larguras do espectro natural e o espectro causador do pico. Para a figura (5.6) usamos uma razão entre suas larguras de 100, ou seja, $\Gamma_V/\Gamma_N = 100$.

Há uma mudança quase imperceptível tanto em $P(x)$ quanto μ na figura (5.6) na região $-4 \leq \log x \leq -1,5$, porém, a parte assintótica ($\log x > 1$) é exatamente igual à distribuição com os espectros Lorentz/Voigt, Lorentz/Lorentz ou Voigt/Voigt.

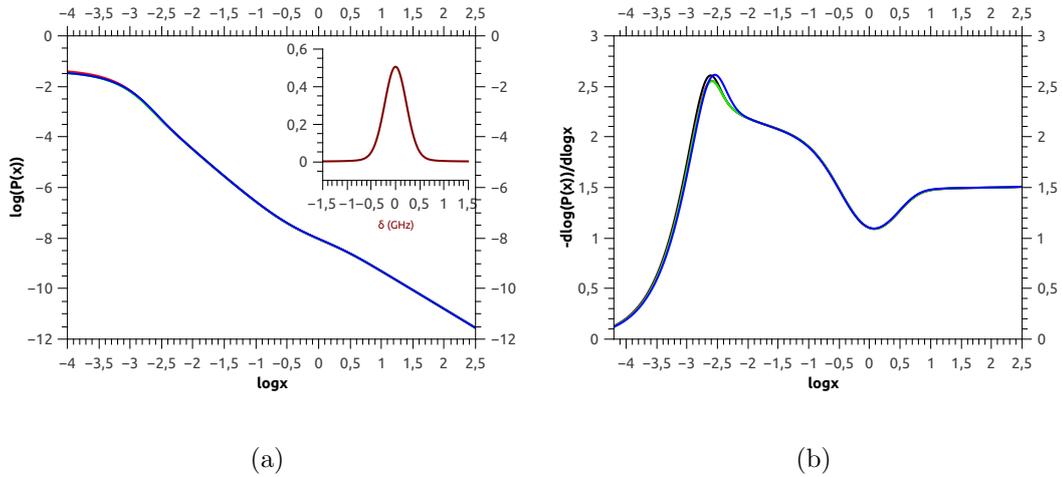


Figura 5.6: (a) Distribuição de probabilidade dos passos do fóton. No interior de (a) o espectro de absorção Voigt com $a = 10^{-2}$. (b) Expoente μ da lei de potência. As dessintonizações são $\delta_p = 0$ (preto), $\delta_p = 70$ MHz (vermelho), $\delta_p = 175$ MHz (verde) e $\delta_p = 350$ MHz (azul). $\Gamma_V/\Gamma_N = 100$. Como as distribuições de probabilidade para estas dessintonizações são ligeiramente diferentes, então, as modificações das cores são imperceptíveis. A radiação incidente possui um perfil Voigt com parâmetro igual 10^{-2} modificado com pico com perfil de Lorentz.

As distribuições de probabilidade de passos do fóton são ligeiramente diferentes e, portanto, as cores que representam as dessintonizações do pico (ou buraco como veremos mais adiante) ficam sobrepostas, conforme as figuras (5.6), (5.7) e (5.11).

Também observamos a distribuição de probabilidade de passos dos fótons como mostrado na figura (5.6) quando modificamos a razão entre as larguras do perfil natural (Voigt neste caso) e do perfil do pico (Lorentz), Γ_V/Γ_N . A figura (5.7) mostra $P(x)$ e μ para as mesmas dessintonizações do pico já citadas, no entanto, Γ_V/Γ_N assume outro valor. O valor dessa razão é $\Gamma_V/\Gamma_N = 5$.

Fizemos também essas distribuições de passos do fóton para outras razões de larguras entre o espectro natural e o espectro do pico, ($\Gamma_V/\Gamma_N = 75, 50, 15$), porém não foram posto aqui neste trabalho porque não existe mudança nem em $P(x)$ nem em μ . A distribuição de probabilidade, nessas situações descritas, é a mesma que nos gráficos postos nas figuras (5.6) e (5.7).

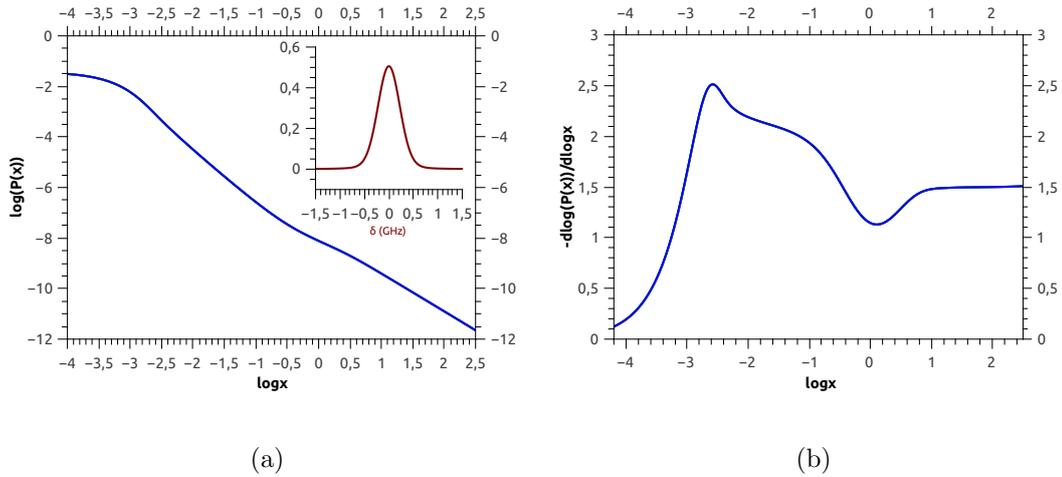


Figura 5.7: (a) Distribuição de probabilidade dos passos do fóton juntamente com o perfil de absorção Voigt com $a = 10^{-2}$. (b) Expoente μ da lei de potência. As dessintonizações $\delta_p = 0$ (preto), $\delta_p = 70$ MHz (vermelho) $\delta_p = 175$ MHz (verde) e $\delta_p = 350$ MHz (azul). $\Gamma_V/\Gamma_N = 5$. A radiação incidente possui um perfil Voigt com $a = 10^{-2}$ modificado com pico com perfil de Lorentz.

A figura (5.8) mostra a distribuição de probabilidade de passos do fóton bem como o expoente μ usando como espectro de radiação incidente um espectro natural com um perfil Doppler com um pico com perfil de Lorentz. O espectro de absorção é o perfil de Voigt. Neste caso fizemos um estudo alterando a razão entre a largura do pico e do espectro natural de Gauss e comparando o comportamento de $P(x)$ e de μ . As razões foram $\Gamma_D/\Gamma_N = 300, 100, 75, 50, 15$.

Notamos que na figura (5.8) para $\Gamma_D/\Gamma_N = 300$ o comportamento no regime assintótico ($\log x > 1$) é modificado em relação à figura (5.3 (b)). Na parte inicial ($\log x \leq 1$) não houve mudança, pois, a razão Γ_D/Γ_N é grande, no entanto, para o regime assintótico começa a ter modificações na distribuição, pois, existe agora na radiação incidente os efeitos da cauda longa devido à forma espectral do pico (Lorentz). Para pequenos valores de Γ_D/Γ_N , a parte inicial da distribuição sofre alterações porque a largura do pico já começa a ser significativa.

Não mostramos os gráficos variando a dessintonização em relação ao espectro de Gauss, pois são todos iguais à figura (5.8) para suas respectivas razões de largura Γ_D/Γ_N . No caso dos gráficos apresentados, como por exemplo na figura (5.7), não existe nenhuma mudança significativa para grandes ou pequenas razões Γ_V/Γ_N , ou seja, os gráficos permanecem inalterados.

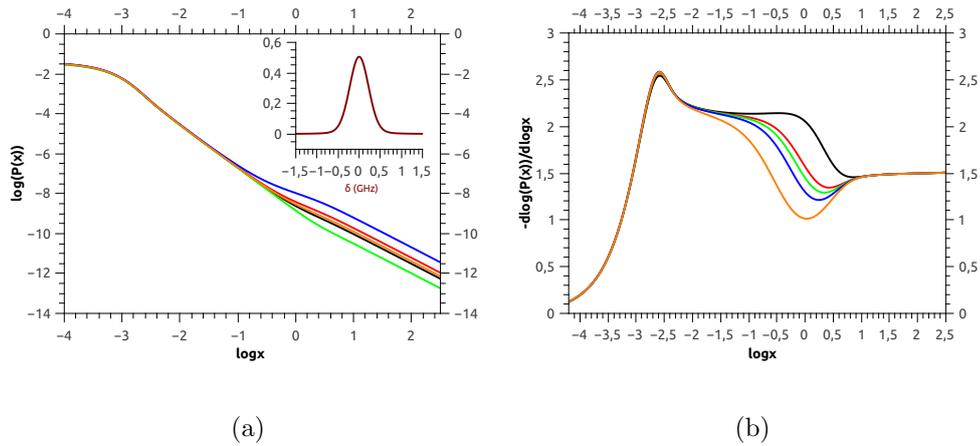


Figura 5.8: (a) Distribuição de probabilidade dos passos do fóton. No interior de (a) o espectro de absorção Voigt com com parâmetro 0,01. (b) Coeficiente μ da lei de potência. Razão $\Gamma_D/\Gamma_N = 300$ (preto), $\Gamma_D/\Gamma_N = 100$ (vermelho), $\Gamma_D/\Gamma_N = 75$ (verde), $\Gamma_D/\Gamma_N = 50$ (azul) e $\Gamma_D/\Gamma_N = 15$ (laranja). A radiação incidente possui um perfil Doppler modificado com pico com perfil de Lorentz.

Observamos também o $P(x)$ e o μ para uma radiação incidente com dois picos simétricos com perfil espectral de Lorentz superpostos a dos perfis espectrais de Voigt ou de Gauss conforme a figura (5.9).

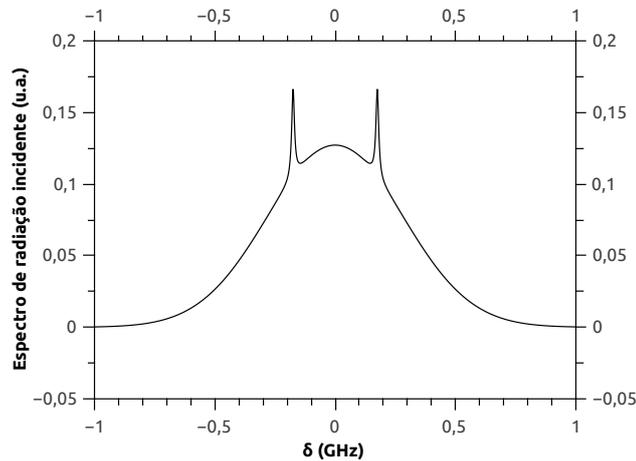


Figura 5.9: Espectro da radiação incidente como perfil espectral de Voigt ou Gauss, modificado com dois picos simétricos. Estes picos têm um perfil espectral de Lorentz. O parâmetro de Voigt utilizado foi de $a = 10^{-2}$.

Não foram postos os resultados obtidos com a radiação incidente mostrada na figura (5.9) porque são os mesmos resultados que apresentamos nas figuras (5.6), (5.7) e (5.8) para os respectivos espectros de radiação incidente como Voigt ou Gauss. O fato de

acrescentar mais um pico de forma simétrica em torno do centro do espectro de radiação incidente não modifica a distribuição $P(x)$ e o expoente μ da lei de potência, ou seja, todos os resultados obtidos com apenas um pico na radiação incidente são mesmos produzidos para dois picos simétricos também na mesma radiação incidente desde que sofram iguais alterações, como por exemplo, os dois picos devem ter a mesma razão $\Gamma_{D,V}/\Gamma_N$.

5.3 Distribuição de probabilidade dos passos do fóton com o espectro de absorção modificado

Nesta seção iremos modificar o espectro de absorção e deixar o espectro de radiação incidente ser um espectro Lorentz, Voigt e Doppler. O espectro de absorção agora vai ter um buraco em sua estrutura espectral. Experimentalmente, podemos obter este fenômeno incidindo uma radiação com uma intensidade suficientemente intensa de maneira a saturar uma das transições hiperfinas do vapor atômico e assim, formar o buraco em certa frequência ao longo do espectro de absorção. Esse processo também é estudado para se obter uma absorção saturada [47].

A figura (5.10) representa o espectro de absorção modificado. Inicialmente usamos como perfil espectral de absorção o perfil de Voigt com parâmetro $a = 10^{-2}$. A estrutura do buraco feita no espectro de absorção pode ser colocada em qualquer posição em sua largura espectral. Isso pode ser feito alterando a frequência de radiação incidente causadora desse buraco.

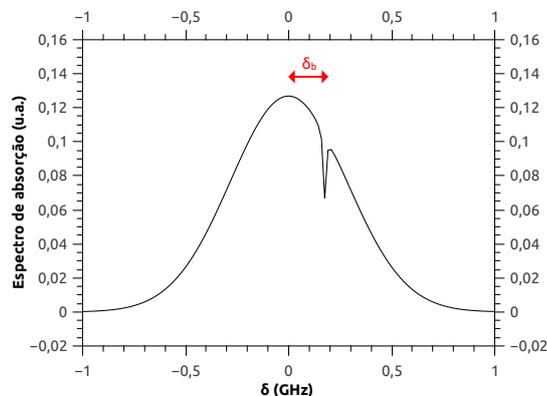


Figura 5.10: Perfil espectral da absorção modificada com um buraco em sua estrutura. O perfil de absorção utilizado foi o de Voigt. $a = 10^{-2}$ foi o parâmetro de Voigt utilizado. Este buraco pode estar em qualquer frequência dentro do espectro de absorção. δ_b representa a dessintonização do buraco em relação ao centro de absorção atômica.

A figura (5.11) mostra a distribuição de probabilidade $P(x)$ de passos do fóton e o expoente μ da distribuição de probabilidade como lei de potência, para um espectro de radiação incidente com um perfil de Voigt e o perfil de absorção sendo também o perfil de Voigt mas com um buraco como mostrado na figura (5.10). Para o resultado mostrado na figura (5.11), deixamos o buraco percorrer algumas frequências da curva de absorção ($\delta_b = 0, 70, 175, 350$ MHz) deixando a razão Γ_V/Γ_N ser constante e igual a 100.

Fizemos também a integração numérica a fim de calcular a distribuição de probabilidade de passos do fóton para as mesmas dessintonizações do buraco em relação ao centro da absorção atômica citadas no parágrafo anterior, porém, com a variação da razão (Γ_V/Γ_N) e, mesmo assim, os resultados obtidos são exatamente iguais àqueles mostrados na figura (5.10), ou seja, o que prevalece neste tipo de distribuição é o regime assintótico devido às asas longas dos perfis espectrais.

Em um segundo momento, fizemos com que a radiação incidente obtivesse a forma espectral de um perfil de Gauss e a forma do espectro de absorção continua sendo o perfil de Voigt com um buraco. Desta maneira, obtivemos a mesma estrutura da figura (5.3 (b)) para $P(x)$ e conseqüentemente para o expoente μ .

Para este caso de apenas um buraco no perfil de absorção, fizemos também incidir uma radiação cujo perfil é Lorentz, porém, os resultados obtidos são iguais àqueles mostrados na figura (5.2 (b)) mesmo fazendo as alterações na dessintonização do buraco assim como na razão Γ_V/Γ_N (lembrando que deixamos um desses parâmetros fixos e o outro é alterado livremente).

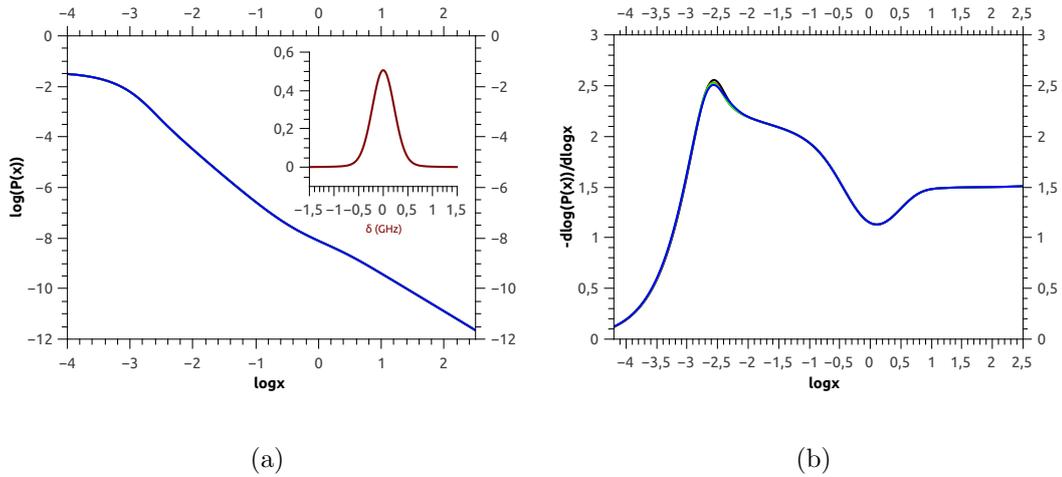


Figura 5.11: (a) Distribuição de probabilidade dos passos do fóton e o perfil da radiação incidente que é o de Voigt com $a = 10^{-2}$. (b) Coeficiente μ da lei de potência. Razão $\Gamma_D/\Gamma_N = 300$ (preto), $\Gamma_D/\Gamma_N = 100$ (vermelho), $\Gamma_D/\Gamma_N = 75$ (verde), $\Gamma_D/\Gamma_N = 50$ (azul) e $\Gamma_D/\Gamma_N = 15$ (laranja). O espectro de absorção possui um perfil de Voigt com $a = 10^{-2}$ modificado com um buraco em sua estrutura espectral.

Do mesmo modo que fizemos na seção anterior com dois picos simétricos na radiação incidente, fizemos também com que o espectro de absorção tivesse uma estrutura com dois buracos simétricos, como mostra a figura (5.12). É válido lembrar que essa simetria está em torno do centro da absorção do perfil espectral.

Essa modificação no espectro de absorção, mostrado na figura (5.12), também não modifica a estrutura do $P(x)$ e, conseqüentemente, o expoente μ dependendo do espectro de radiação incidente, ou seja, caso esse espectro seja um perfil de Voigt, então, vai seguir a estrutura observada na figura (5.1 (c)) e caso a radiação incidente seja um perfil de Gauss, então, a estrutura de $P(x)$ bem como a de μ vai ser igual ao observado na figura (5.3 (b)) e isto independe da dessintonização do buraco em relação ao centro da absorção atômica desde que esta dessintonização seja feita de maneira a deixá-los simétricos em torno do centro de absorção do perfil espectral adotado, bem como, a razão Γ_V/Γ_N . Também usamos o espectro de radiação incidente como um perfil de Lorentz e a estrutura da distribuição de passos do fóton no meio atômico segue uma estrutura igual ao observado na figura (5.2 (b)).

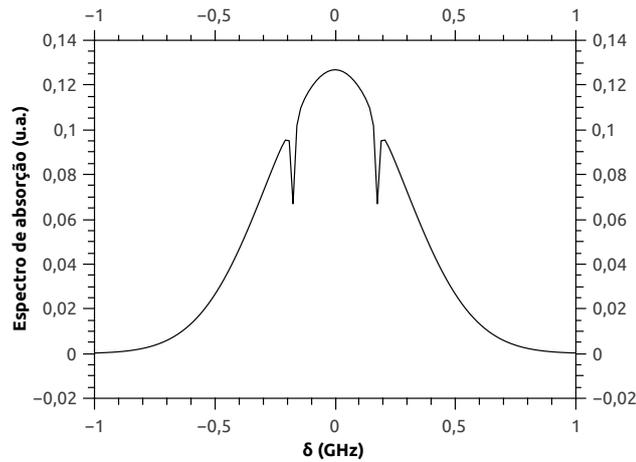


Figura 5.12: Perfil espectral da absorção modificado com dois buracos simétricos em torno da parte central do perfil natural. O perfil natural de absorção utilizado foi Voigt. O parâmetro de Voigt utilizado foi $a = 10^{-2}$.

Apesar de todas estas modificações feitas tanto no espectro de radiação incidente (um ou dois picos simétricos em sua estrutura em relação a sua parte central) quanto no espectro de absorção (um ou dois buracos simétricos em sua estrutura espectral), observamos uma distribuição de Lévy, seja no regime assintótico seja no regime mais inicial da distribuição de probabilidade de passos. Por outro lado, um fato interessante no cálculo numérico desta distribuição é o surgimento de dois coeficientes μ em uma mesma distribuição, como observa-se na figura (5.8), ou seja, no regime assintótico observamos um $\mu = 1,5$ enquanto que no regime mais inicial observamos $\mu \simeq 2,0$ constante sobre uma faixa razoável de x . Além disso, observa-se nesse mesmo resultado que há uma passagem para uma distribuição de Lévy mais estável (passa de uma pequena faixa constante de x para uma faixa longa faixa constante) na região inicial com o aumento de Γ_D/Γ_N . Esse fato acontece porque a largura do pico Lorentziano vai se tornando desprezível em relação à largura do perfil espectral largo que, neste caso, é um perfil de Gauss e, portanto, a forma da distribuição de passos assemelha-se à obtida com dois perfis de Gauss, ou seja, um perfil de Gauss na radiação incidente e o outro no espectro de absorção devido, à forma do perfil Voigt nessa região ser parecida com um perfil Doppler. Por outro lado, no regime assintótico aparecerem as asas longas do espectro de radiação incidente, pois, o pico possui uma forma espectral de uma Lorentz e, desta maneira, no regime assintótico, a distribuição de passos do fóton vai obedecer um regime tipo Lorentz-Lorentz, Lorentz-Voigt ou Voigt-Voigt.

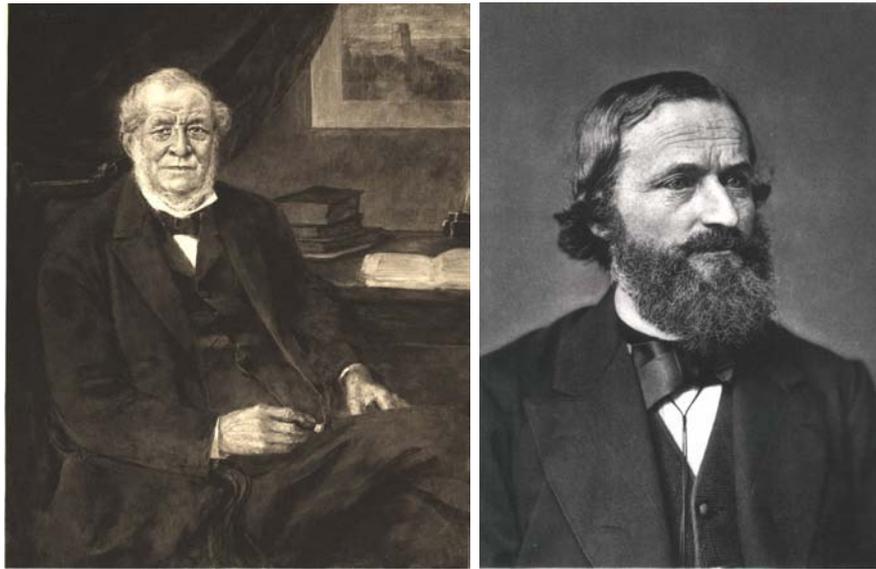
CAPÍTULO 6

ESQUEMA EXPERIMENTAL

Nos capítulos anteriores apresentamos conceitos e resultados numéricos do processo de espalhamento de fótons por átomos ressonantes, analisando, particularmente, a redistribuição nos espectros de frequência emitida e da distribuição de passos dos fótons entre dois eventos de absorção por átomos. Iniciaremos este capítulo com a descrição dos principais dispositivos que compõem o sistema experimental. Feito isso, apresentaremos nosso esquema experimental e, por fim, os resultados obtidos. O esquema experimental foi realizado para coletar os fótons que sofrem difusões múltiplas em uma célula que contém um vapor de rubídio. O objetivo é obter radiação com espectro de largura Doppler para, em uma segunda experiência, medir a distribuição de passos de fótons espalhados em um vapor ressonante. Analisamos inicialmente o espectro de frequências da radiação emitida pelos fótons retroespalhados na célula de redistribuição.

6.1 Átomos de rubídio

O rubídio é um elemento químico com símbolo Rb e possui número atômico 37. Este elemento químico tem cor prateada e está no grupo dos metais alcalinos (grupo 1A). Estes são átomos ditos hidrogenóides que possuem um elétron na camada mais externa. O rubídio foi descoberto em 1861 [48] por dois químicos alemães, Robert Bunsen e Gustav Kirchhoff, respectivamente na esquerda e direita na figura (6.1).



(a)

(b)

Figura 6.1: Fotos dos descobridores do rubídio. (a) Robert Bunsen e (b) Gustav Kirchhoff.

O uso dos metais alcalinos é feito de forma sistemática em física atômica e podemos citar os sucessos recentes no desenvolvimento das técnicas de resfriamento e aprisionamento de átomos e na produção dos primeiros condensados de Bose-Einstein¹ com átomos [51, 52, 53].

Os dois isótopos do rubídio na natureza são o Rb^{85} e Rb^{87} com proporções de, respectivamente, 72,17% e 27,83% [54]. O interesse em nosso estudo experimental é a transição $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ ^{2,3} que é a chamada linha D_2 .

Com auxílio da teoria quântica para a soma de momentos angulares, podemos obter as transições hiperfinas que surgem devido ao acoplamento de spin nuclear (I) com o spin do elétron (S) e momento angular orbital (L). Para o caso do átomo de rubídio, temos que os spins nucleares para os isótopos Rb^{85} e Rb^{87} são, respectivamente, $I = 5/2$ e $I = 3/2$. Como $\mathbf{F} = \mathbf{L} + \mathbf{S} + \mathbf{I}$, então, teremos, para o estado fundamental ($5S_{1/2}$), $F = 2, 3$ para o Rb^{85} e $F = 1, 2$ para Rb^{87} . No entanto, para o estado excitado ($5P_{3/2}$),

¹Este tipo de aplicação em física atômica não se restringe apenas aos alcalinos, como também existe experimentos sendo realizados com alcalinos terrosos (família 2A) [49] e metais terras raras [50].

²Usamos a notação espectroscópica nL_j , onde n é o número quântico principal, L é o momento angular orbital e J o acoplamento do momento angular com o Spin ($J = L + S$).

³As letras S, P, D e F na física atômica, representam o valor do momento angular orbital (L). Ou seja, $S \rightarrow L = 0$, $P \rightarrow L = 1$, $D \rightarrow L = 2$, $F \rightarrow L = 3$. É importante não confundir, o F da estrutura hiperfina com o da estrutura eletrônica.

teremos $F' = 1, 2, 3, 4$ no Rb^{85} e $F' = 0, 1, 2, 3$ no Rb^{87}

A figura (6.2) representa, de forma esquemática, a estrutura dos níveis hiperfinos e as transições permitidas⁴ para os dois isótopos do rubídio.

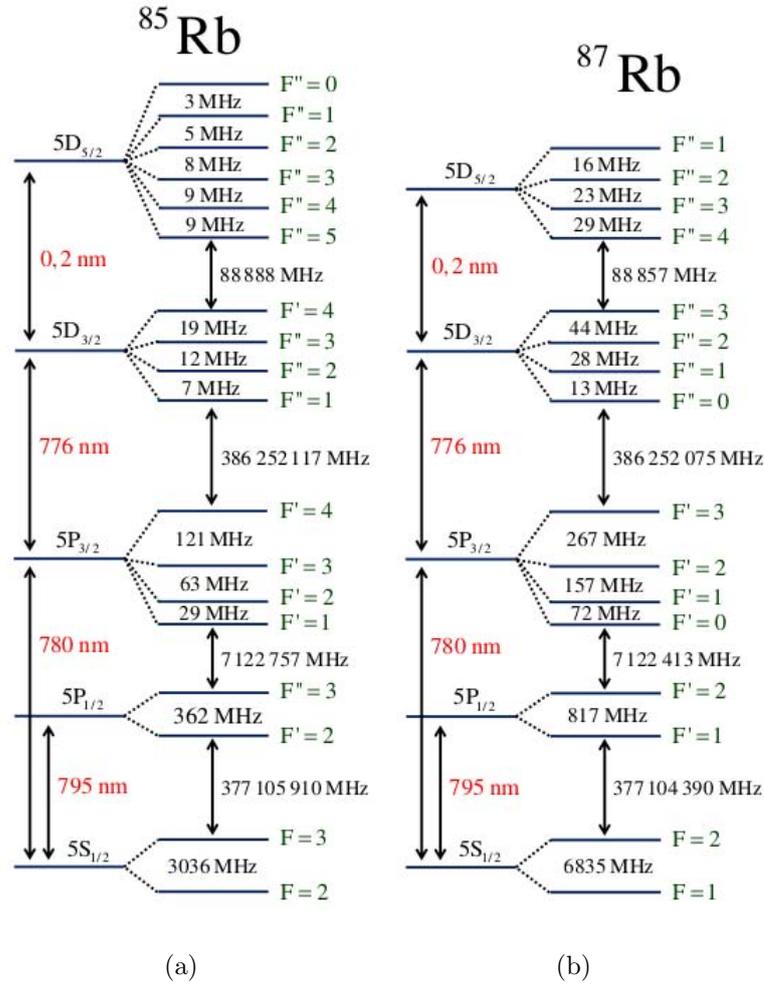


Figura 6.2: Esquema da estrutura dos níveis atômico para os isótopos do rubídio. São também representadas as transições permitidas por $\Delta F = 0, \pm 1$ para cada nível da estrutura fina. (a) Níveis do isótopo Rb^{85} e (b) níveis do isótopo Rb^{87} .

Um vapor de rubídio de baixa densidade confinado em uma célula com uma dada temperatura T pode ser visto como um gás ideal em que seus átomos movem-se de maneira aleatória, onde a velocidade destes átomos segue uma distribuição de velocidade de Maxwell-Boltzmann à temperatura T . Quando o meio atômico é iluminado por uma radiação eletromagnética com frequência ω , ocorre o alargamento Doppler, pois, devido ao efeito Doppler, cada átomo que possui uma frequência de ressonância ω_0 e velocidade

⁴As transições são aquelas que satisfazem as condições $\Delta F = 0, \pm 1$ e $\Delta m_F = 0, \pm 1$ devido às regras de transições por elemento de dipolo elétrico do átomo.

\mathbf{v} , “vê” a radiação com frequência ω' dada por:

$$\omega' = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \quad (6.1)$$

Quando varia-se em torno de ω_0 a frequência ω da radiação incidente, os átomos absorvem esta radiação porque cada um deles possui um velocidade v de tal forma que “veem” a frequência da radiação incidente fica em ressonância ($\omega = \omega_0$). Com isso, o espectro de absorção será alargado e à temperatura ambiente vai ser dominado pela largura Doppler, da distribuição de velocidades. O espectro obtido com um laser de baixa intensidade é denominado de absorção linear. A figura (6.3) mostra o espectro de absorção linear para um vapor atômico de rubídio, revelando os seus isótopos.

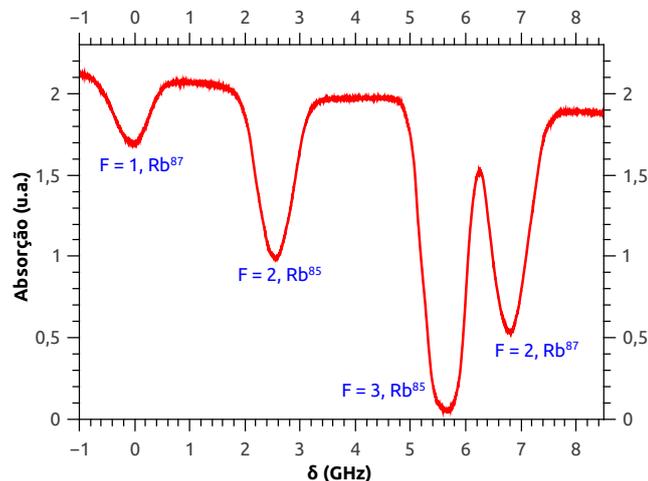


Figura 6.3: Absorção linear na transição D_2 para os isótopos do rubídio.

Para o espectro da linha D_2 do rubídio, a separação entre os níveis excitados (da ordem de algumas dezenas de MHz, ver figura (6.2)) é muito inferior quando comparado à largura Doppler nas temperaturas exploradas (algumas centenas de MHz) e, desta forma, impossibilitando que as diferentes transições hiperfinas do estado excitado possam ser resolvidas com este espectro de absorção linear. Então, para que possamos observar as transições hiperfinas, precisa-se fazer espectroscopia sub-Doppler, por exemplo, uma absorção saturada.

Basicamente, a absorção saturada consiste em incidir um feixe de luz suficientemente intenso (feixe de bombeio) em um vapor de átomos, de modo a saturar as transições hiperfinas e, deste modo, detectar o sinal de um segundo feixe contrapropagante ao feixe de bombeio e de baixa intensidade (feixe sonda) com a mesma frequência que o primeiro

feixe. Devido ao efeito Doppler, apenas átomos com classes de velocidades que satisfazem a relação $k \cdot v = 0$ interagem simultaneamente com os dois feixes. Como a transição está saturada pelo bombeio, ao varrermos a frequência dos feixes incidentes, observamos todas as transições dentro do perfil Doppler, ou seja, três picos da transição a partir do nível fundamental. Porém, além desses três picos ditos de transições diretas, são observados outros três picos que são denominados cruzamentos de níveis. Essas ressonâncias surgem quando uma classe de velocidade está em ressonância com os feixe de bombeio e sonda, porém em duas transições diferentes. Estes picos do *cross-over* aparecem exatamente na média aritmética de frequências das transições diretas. Para este cálculo, consideremos que ω_{01} e ω_{02} sejam as frequências de transição do átomo, de modo que estas frequências estejam em ressonância, respectivamente, com o feixe sonda e o feixe bombeio. Supondo que o átomo aproxima-se do feixe bombeio, temos que:

$$\omega_B = \omega + kv \quad (6.2)$$

$$\omega_S = \omega - kv \quad (6.3)$$

Somando a equação (6.2) com a equação (6.3), obtemos a seguinte relação

$$\omega = \frac{\omega_S + \omega_B}{2} = \frac{\omega_{01} + \omega_{02}}{2} \quad (6.4)$$

A equação (6.4) pode ser obtida também caso os átomos estivessem movendo-se na direção do feixe sonda.

A figura (6.4) mostra um esquema para a obtenção de uma absorção saturada feito em nossos laboratórios. Este esquema experimental é uma parte do total do aparato experimental. Fizemos incidir parte do laser em um divisor de feixe (BS) no qual reflete $R = 30\%$ e transmite $T = 70\%$, sendo o feixe de maior intensidade o feixe bombeio e o de menor intensidade o feixe prova. Os dois espelhos planos têm como objetivo desviar o feixe bombeio de maneira que este e o feixe prova se encontrem de forma contrapropagante em um célula que contém o vapor de rubídio. Assim, o feixe prova transmitido na célula incide em um cubo polarizador e uma parte é transmitida até chegar em um detetor. Desta maneira, obtivemos os espectros de absorção saturada.

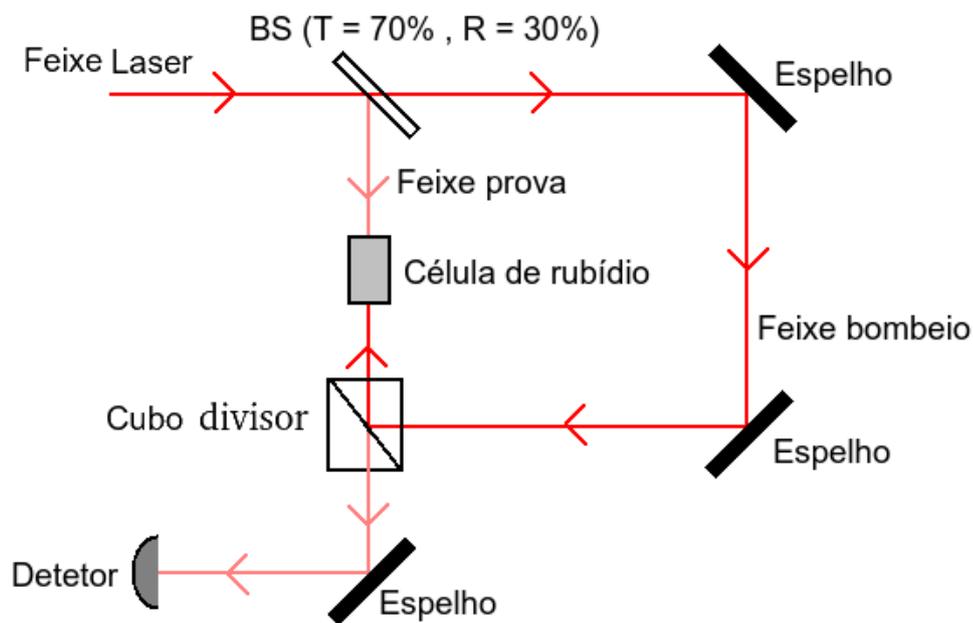


Figura 6.4: Esquema experimental para a realização de medidas da absorção saturada. Este esquema foi feito em nossos laboratórios.

A figura (6.5) mostra um espectro de absorção saturada. Na figura (6.5 (a)) varremos todas as transições Doppler da linha D_2 ($5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$) do rubídio, enquanto que na figura (6.5 (b)) mostramos em detalhe a absorção saturada da linha $F = 2$ do Rb^{87} , onde podemos observar todas as transições hiperfinas $F = 2 \rightarrow F' = 1, 2, 3$, assim como as ressonâncias de cruzamento de níveis (*cross-over*).

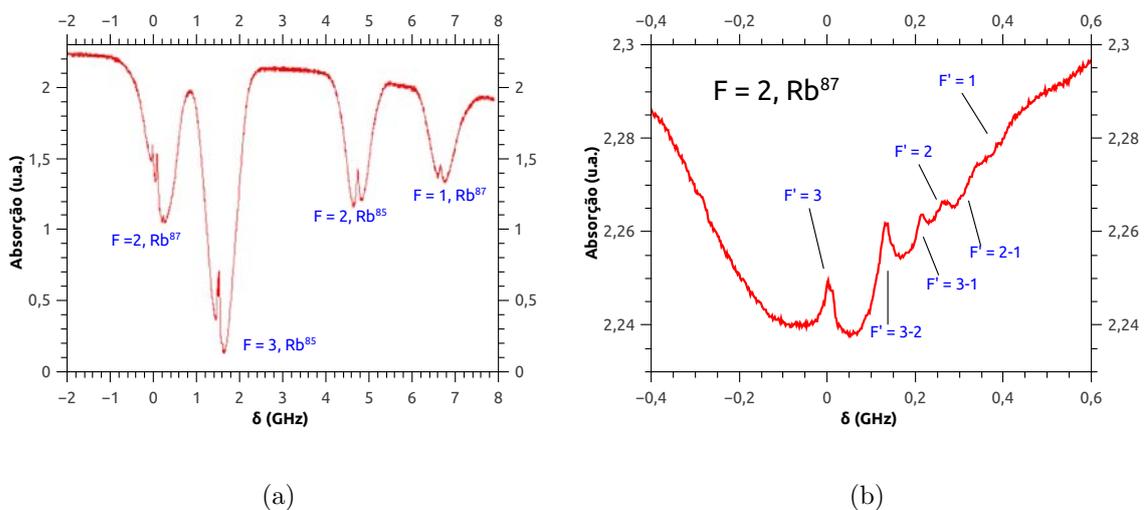


Figura 6.5: (a) Absorção saturada para as quatro linhas Doppler dos isótopos do rubídio. (b) Uma ampliação do espectro com a linha $F = 2$ do isótopo do Rb^{87} .

A absorção saturada é um tipo de espectroscopia sub-Doppler [32] e é muito usado em física atômica, porque permite resolver as transições hiperfinas em um átomo (rubídio, por exemplo) com alargamento inhomogêneo Doppler.

Como podemos observar na figura (6.5 (b)), as transições diretas são $F = 2 \rightarrow F' = 3$, $F' = 2$ e $F' = 1$, enquanto que $F' = 3 - 2$, $F' = 3 - 1$ e $F' = 2 - 1$ são os *cross-over* correspondentes, respectivamente, as transições diretas entre $F' = 3$ e $F' = 2$, $F' = 3$ e $F' = 1$, $F' = 2$ e $F' = 1$.

O sinal de absorção saturada tem a finalidade de calibrar a posição em frequência do laser.

6.2 Laser

Laser é um acrônimo de *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*. Este dispositivo possibilitou enormes avanços em diversas áreas da ciência. Os lasers apresentam-se em diversas formas, usando diversos materiais como meio ativo e técnicas de bombeamento (excitação). No entanto, mesmo com toda essa variedade de formas de lasers, os elementos essenciais [55, 56] para sua produção são: meio de ganho, processo de bombeamento e sistema de realimentação ótica.

1. Meio de ganho: Este é o meio adequado para que ocorra a inversão de população, ou seja, os elétrons de um nível inferior do meio são bombeados para um nível de energia maior. Quando um elétron decai para nível de menor energia, ocorre a emissão de um “pacote” de energia, o fóton. Esse processo pode ser estimulado por outro fóton, e ganho é obtido quando a taxa de emissão estimulada é superior à de emissão espontânea. Esse mecanismo está na essência das propriedades da radiação laser.
2. Processo de bombeamento: É o mecanismo que leva o meio de ganho para um estado quântico de maior energia, com inversão de população. O bombeio pode ser óptico, colisão ou corrente elétrica, aplicada por exemplo, à uma junção semicondutora.
3. Sistema de realimentação ótica: De uma forma geral, a realimentação é obtida com uma cavidade formada por espelhos que ficam em torno do meio laser. No caso de um laser semicondutor, esta cavidade é formada pelas próprias faces do cristal

semicondutor. Esta cavidade amplifica o campo na região do meio de ganho para valores de frequência ressonantes no Fabry-Pérot. Os fótons emitidos por emissão induzida estão em fase.

6.2.1 Laser de semicondutor

Os lasers de semicondutor são dispositivos bem adaptados como ferramenta para a pesquisa básica e diferentes aplicações tecnológica [57], tais como, comunicações ópticas, metrologia e espectroscopia [58].

Estes tipos de lasers, devido às técnicas de dopagem e pesquisas em novos materiais, tem sido obtidos emissões em praticamente todo o espectro visível. Uma das características que difundiram o uso de lasers de semicondutor foi a sua versatilidade e o seu baixo custo em relação aos outros tipos de lasers. Estes lasers podem fornecer algumas dezenas de mW de potência de emissão monomodo com correntes de algumas dezenas de mA.

Basicamente o laser de semicondutor é formado por uma junção do tipo P-N [59] que, quando atravessada por uma corrente elétrica⁵ emite luz laser (recombinação direta). Quando uma corrente elétrica atravessa esta junção P-N, os elétrons e os buracos recombinaem-se e assim, emitem fótons, como ilustrado na figura (6.6). No caso dos lasers de semicondutor, a cavidade óptica é formada pelas próprias faces do cristal semicondutor da região da junção, produzidas pela clivagem do cristal. A reflexão nas interfaces resulta na amplificação da radiação através de múltiplas passagens na cavidade [60]. Ou seja, a emissão estimulada predomine sobre outros processos de relaxação.

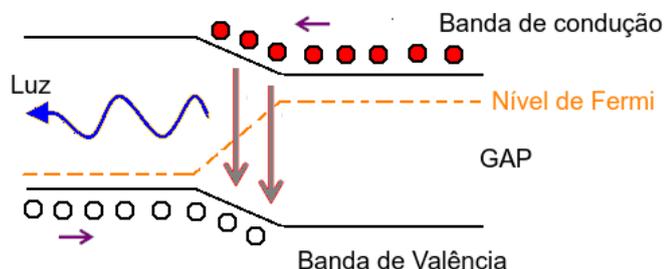


Figura 6.6: Esquema para um junção P-N em laser semicondutor. Um elétron combina-se com um buraco emitindo luz quando este decai de sua banda de condução para a banda de valência

⁵Esta corrente elétrica possui um limiar de operação. Acima deste valor mínimo de corrente elétrica, ocorre uma maior produção de radiação por emissão estimulada.

Na cavidade laser, formam-se modos longitudinais e transversais da radiação [61]. Os modos longitudinais são os padrões de ondas estacionárias que ocorre devido as múltiplas reflexões da radiação na cavidade, enquanto que os modos transversais são os modos gaussianos do campo elétrico e magnético (TEM_{00}), impostos pelas condições de contorno das paredes laterais da cavidade. A combinação destes dois modos, formam o feixe de luz resultante que propaga-se ao sair da cavidade [60]. A figura (6.7) mostra uma cavidade laser em semiconductor.

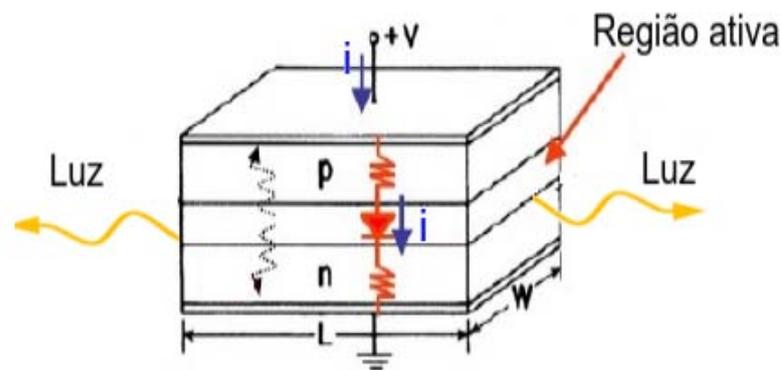


Figura 6.7: Estrutura física de um laser semiconductor. A região ativa está confinada entre camadas de diferentes dopagens.

O laser que usamos em nosso experimento é um laser de diodo monomodo da marca *Sanyo* modelo DL7140-201S. Sua sintonização em frequência ocorre pelo ajuste da corrente elétrica de injeção, por meio de um controlador específico. A figura (6.8) apresenta medidas de potência de saída do laser de diodo em função da intensidade de corrente injetada para uma temperatura da junção de 296 K. Esta medida foi feita com um medidor de potência em função da corrente elétrica injetada no laser, com a temperatura fixa. Observamos na figura (6.8) que há um valor mínimo de corrente elétrica (limiar) para se ter emissão laser. Este limiar ocorre quando a emissão estimulada possui geração de fótons em taxa superior em relação à emissão espontânea. Para o nosso experimento usamos uma corrente de injeção de 83 mA, pois, esta corrente fornece ao laser a frequência de transição atômica da linha D_2 ($\lambda \simeq 780, 241$ nm) do rubídio.

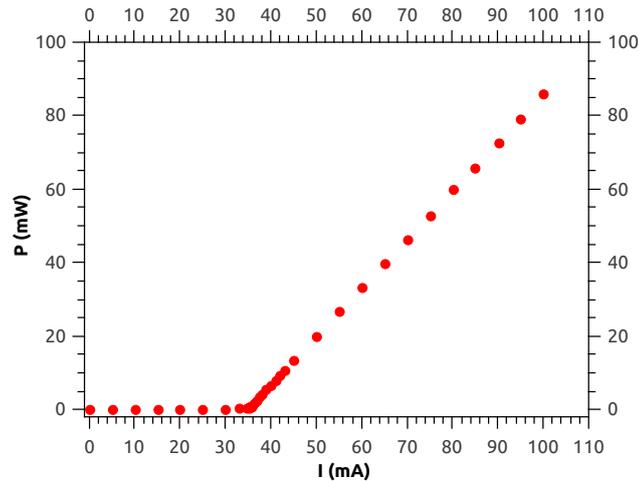


Figura 6.8: Medida da potência de saída do laser de diodo em função da corrente de injeção para uma temperatura de 296 K.

6.3 Estabilização da frequência do laser

Queremos estudar a redistribuição de frequência, por processos de difusão, da radiação laser em um vapor atômico térmico. Para isto, precisamos controlar a frequência do laser de excitação, limitando suas derivas em relação à frequência de transição atômica. Usamos uma técnica de estabilização da frequência desenvolvida nos laboratórios do Grupo de Física Atômica Laser, UFPB. Essa técnica consiste em gerar um sinal dispersivo, que constitui-se em um sinal de erro, corrigido então por um circuito eletrônico.

O sinal de dispersão que obtemos em nosso experimento possui a finalidade de estabilizar a frequência do laser em torno da Doppler. Estabilizamos a sua frequência em torno da linha $F = 2$ do isótopo Rb^{85} .

O sinal dispersivo é obtido graças ao índice de refração não-linear do vapor atômico como obtido na equação (2.55). Para $n_2 > 0$, a onda se desloca mais lentamente no centro quando comparada com sua borda, induzindo assim, uma focalização do feixe [62] como mostra a figura (6.9 (a)). Por outro lado, quando $n_2 < 0$, ocorre o contrário do que acontece quando n_2 é positivo, ou seja, o centro da onda desloca-se mais lentamente em relação a sua borda, induzindo, desta maneira, uma defocalização [62] como podemos observar na figura (6.9 (b)). Este efeito de autofocalização (ou auto-defocalização) nos leva a uma mudança na intensidade transmitida através de uma abertura colocada para detectar o feixe após a passagem deste pelo vapor atômico.

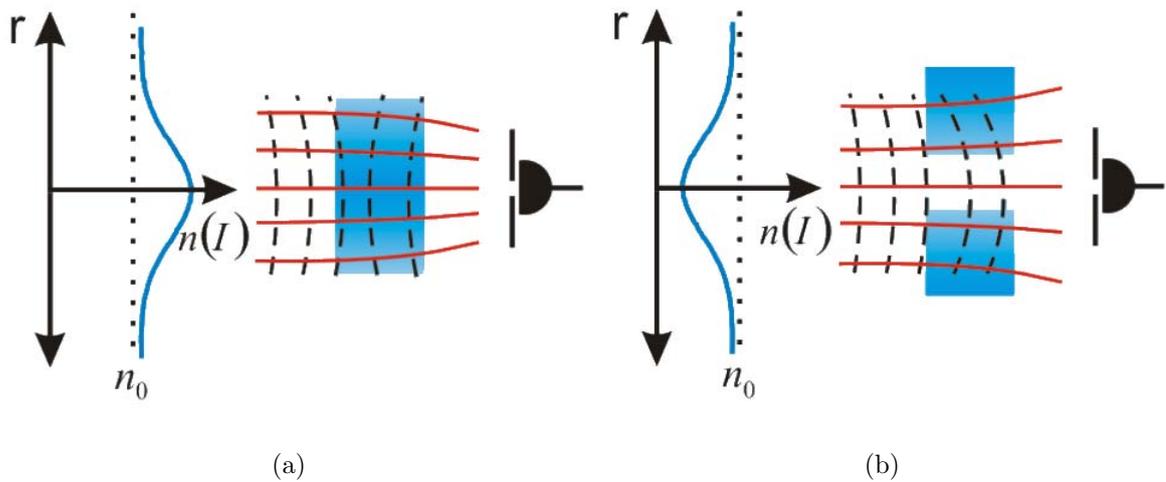


Figura 6.9: (a) Mostra o efeito de autofocalização e (b) o efeito de defocalização de um feixe laser.

A figura (6.10) mostra o sinal dispersivo que foi detectado através de uma abertura na frente de um detetor, após a passagem do feixe laser no vapor atômico ressonante.

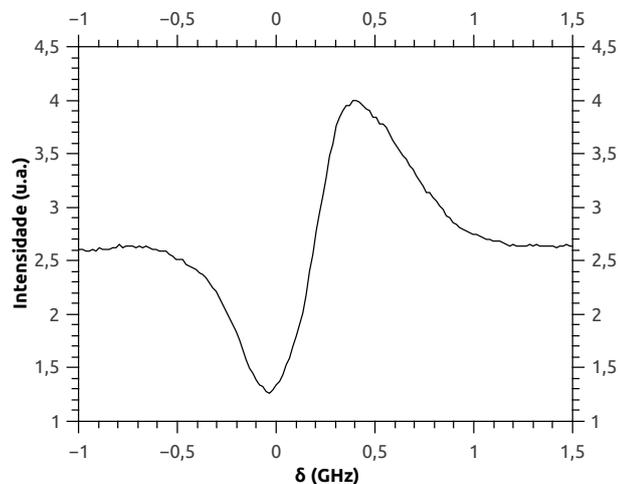


Figura 6.10: Sinal de dispersão obtido através de um vapor atômico com uma densidade de $n \simeq 1,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. Este sinal de dispersão foi obtido na linha $F = 2$ do Rb^{85} .

Para obter o sinal dispersivo como mostrado na figura (6.10), usamos o esquema experimental conforme a figura (6.11). O feixe laser com frequência varrida em torno da linha $F = 2$ do Rb^{85} , atravessa uma lente com uma distância focal de 15 cm e passa pelo vapor atômico que possui uma densidade de $n \simeq 1,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. O índice de refração não-linear passa, em função da frequência em torno do pico da ressonância, de autofocalizante para defocalizante e, desta maneira, nos fornece o sinal de dispersão através da abertura

do detector. A potência do laser que incide no vapor atômico é de $P = 1,85$ mW. A abertura do detector de aproximadamente 2 mm. A célula que usamos para encontrar o sinal dispersivo é uma célula cilíndrica com raio $R = 1$ cm e comprimento $L = 2$ cm.

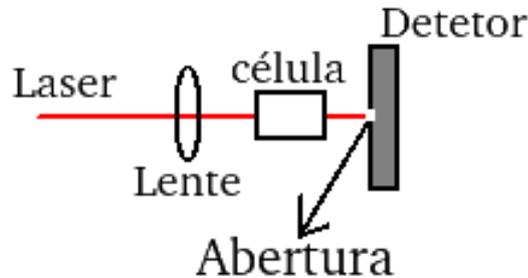


Figura 6.11: Experimento para obtenção de um sinal dispersivo. A lente possui foco $f = 15$ cm, a densidade atômica $n \simeq 1,7 \cdot 10^{12}$ cm⁻³. A potência do laser incidente na célula é de $P = 1,85$ mW.

Este sinal dispersivo serve, no nosso experimento, para travar a frequência do laser durante o experimento, evitando derivas. A técnica de travamento do laser usa uma eletrônica externa de controle (circuito proporcional e um circuito integrador), acoplada no modulador de corrente do laser.

6.4 Procedimento experimental

A figura (6.12) mostra o esquema experimental total desenvolvido neste trabalho para analisar o espectro dos fótons redistribuídos após a incidência do laser no vapor atômico de rubídio contido em uma célula cilíndrica. Em outras palavras, este esquema experimental tem por sua vez a finalidade de analisar a redistribuição em frequência dos fótons em um vapor de rubídio por uma excitação através de uma radiação incidente com uma frequência em torno da linha D_2 , transição a partir do sub-nível fundamental $F = 2$ do Rb^{85} .

laser em cinco frequências diferentes da Doppler como mostra a figura (6.13 (a)). Esta figura mostra os pontos de excitação do laser em torno da linha $F = 2$ do Rb^{85} . Este sinal Doppler é obtido previamente através da detecção da absorção linear⁶ na mesma célula para o estudo da redistribuição da frequência dos fótons do laser.

Analizamos o espectro de redistribuição através de um interferômetro Fabry-Pèrot (FP) que possui um intervalo espectral livre $FSR = 1,5$ GHz. O vapor que estamos analisando é o rubídio e possui uma separação de 6,85 GHz entre as linhas do isótopo do Rb^{87} e uma separação de 3,05 GHz entre as linhas do isótopo do Rb^{85} . Os fótons podem ser redistribuídos em torno da frequência dos seus isótopos e, portanto, com este FP não se pode analisar completamente o espectro de frequência dos fótons redistribuídos pelo vapor atômico excitado pelo laser, porque seu FSR é inferior à faixa necessária para analisar todo o espectro de Rb (O Grupo de Física Atômica e Laser - UFPB iniciou o processo de compra de um interferômetro com FSR de 10 GHz) .

O trabalho experimental para redistribuição dos fótons ainda está em andamento em nossos laboratórios, porém, a parte teórica já possui um grande avanço.

⁶A absorção linear é obtida pela transmissão de um feixe de luz após a passagem deste por um vapor atômico.

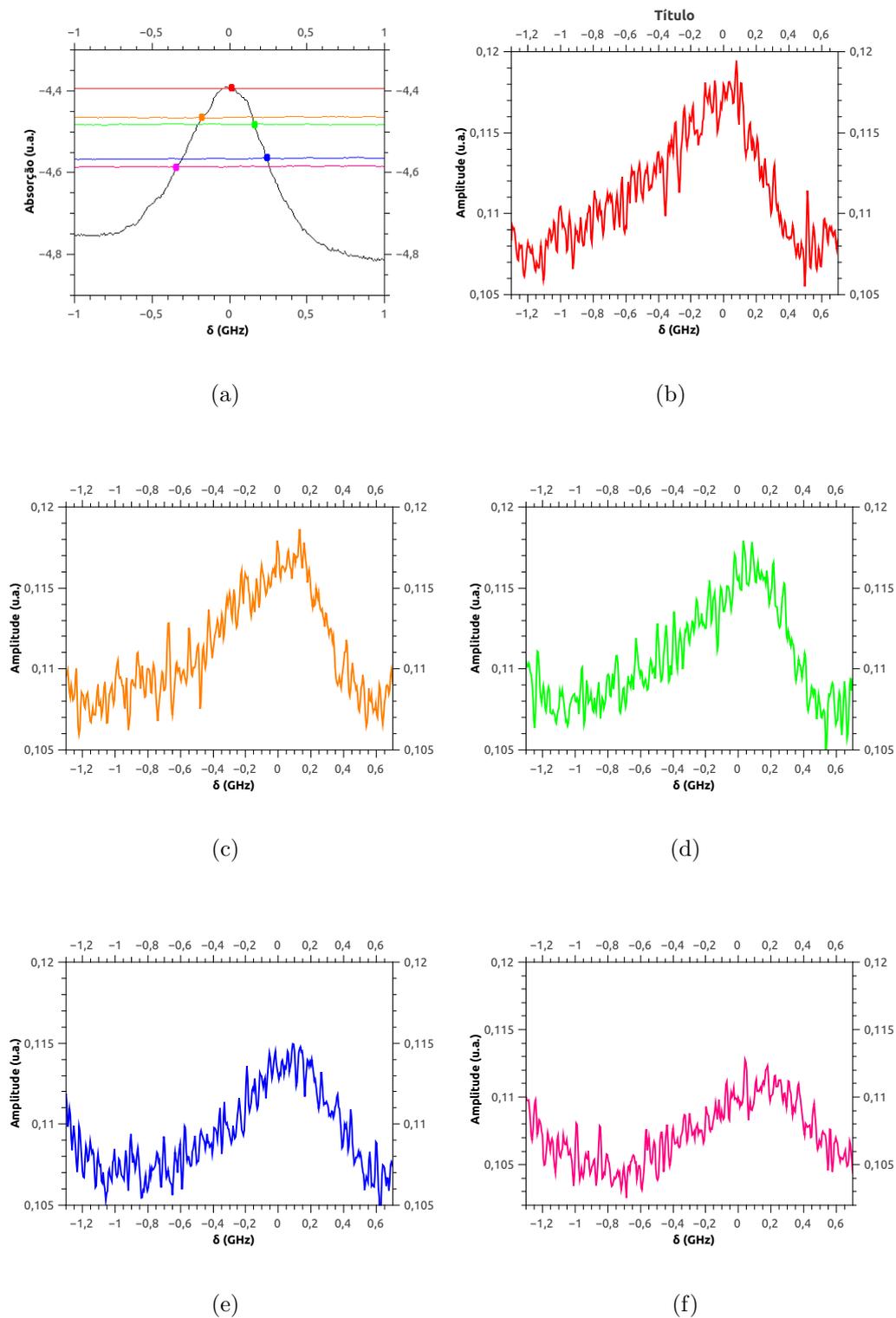


Figura 6.13: (a) Referência em frequência do laser. Cada ponto em torno da absorção linear representa a frequência da excitação do laser no vapor atômico na linha $F = 2$ do Rb^{85} para a coleção de frequência dos fótons redistribuídos. (b), (c), (d), (e) e (f) Representa a obtenção dos fótons retroespalhados e cada cor representa a redistribuição desses fótons nas respectivas excitações do laser mostrada em (a).

Como pode-se perceber, este trabalho foi dividido, de forma intrínseca, em duas partes, sendo a primeira sobre a redistribuição da frequência dos fótons e a segunda parte sobre a distribuição de passos dos fótons em um vapor atômico. Começamos então um experimento para analisar estes passos dos fótons em um vapor atômico de rubídio. Como podemos observar na figura (6.14), trocamos o FP por uma célula de comprimento $L = 50$ cm e raio $R = 2$ cm e, através da fibra, guiamos a radiação de fluorescência retroemitida na primeira célula até esta célula e, por fim, analisamos a fluorescência na segunda célula através de uma câmera CCD.

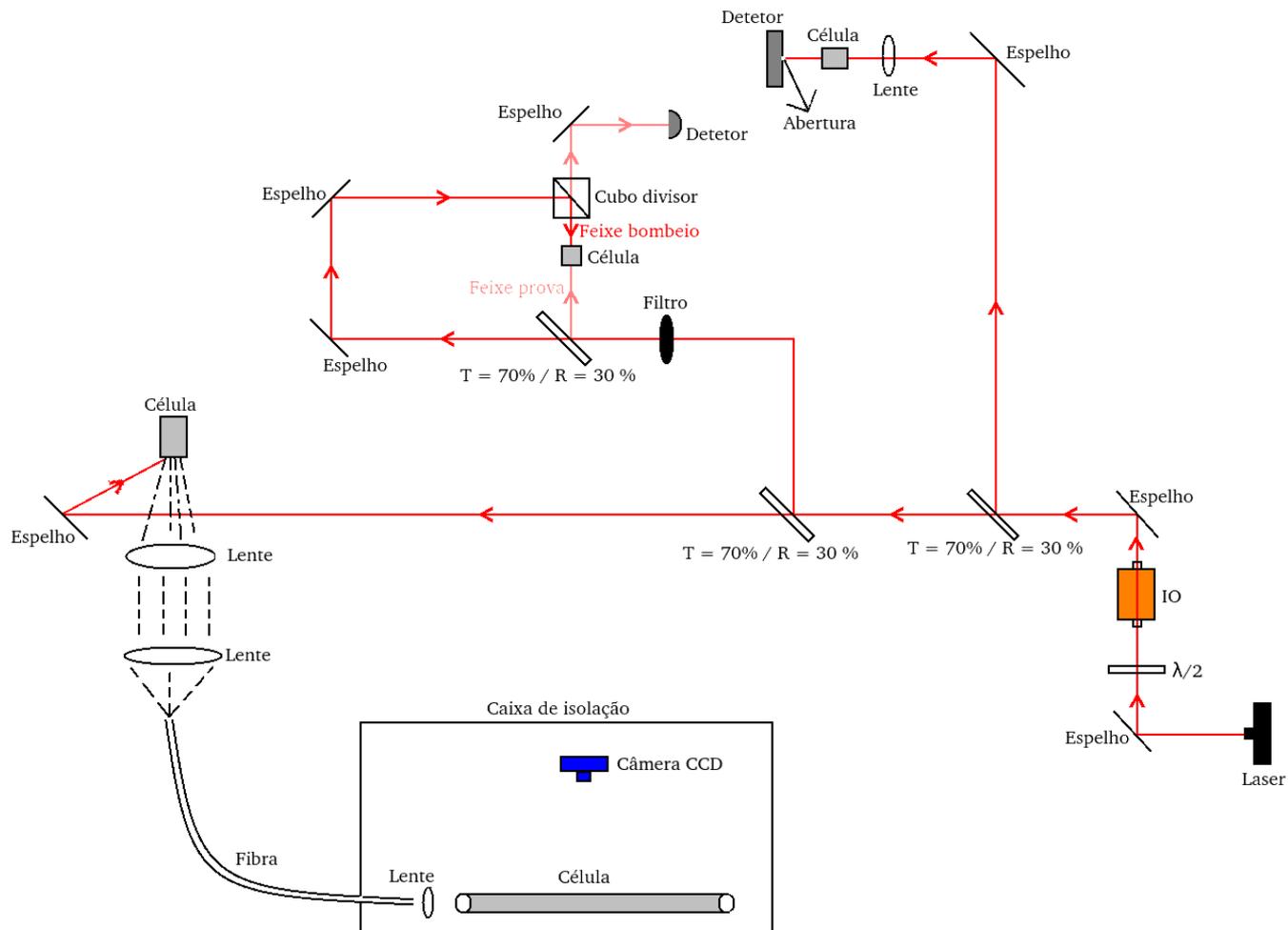


Figura 6.14: Experimento completo para capturar os passos dos fótons em uma célula com um vapor atômico de rubídio.

A câmera CCD é muito sensível podendo ser facilmente perturbada por luz espalhada, fora da experiência. Colocamos então a estrutura de coleção dos fótons (câmera CCD + célula + parte da fibra) no interior de uma caixa com o objetivo de coletar os fótons que vêm apenas da célula e não do meio externo a esta estrutura. O experimento mostrado

na figura (6.14) também ainda está em andamento em nossos laboratórios.

A parte teórica para calcular a distribuição de passos dos fótons em vapor atômico permite fazer diversas previsões com espectros modificados tanto na absorção quanto na radiação incidente (ver seções 5.2 e 5.3). A realização experimental do espectro modificado da figura (5.5) pode ser feita, por exemplo, misturando um laser com certa dessintonização em relação ao centro de absorção com o espectro largo na primeira célula de redistribuição dos fótons obtidos.

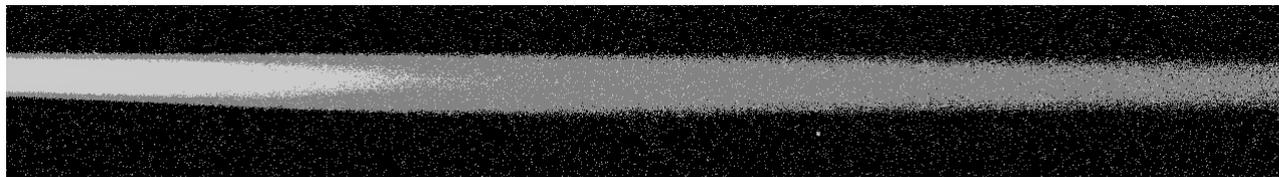
Por outro lado, para obtermos o espectro de absorção mostrado na figura (5.10), devemos incidir um laser intenso na célula com uma frequência na qual queremos fazer o devido buraco no espectro de absorção. É importante lembrar que este não se mistura na fibra. Este laser é incidido de forma separada na célula. Além disso, o laser precisa ter uma intensidade alta com a finalidade de saturar a transição.

Tanto para fazer o buraco no espectro de absorção quanto para obter o pico no espectro da radiação incidente, deve-se ter um feixe laser com frequência fixa e estabilizada.

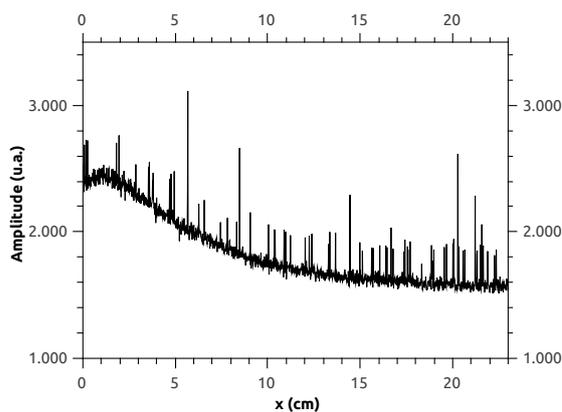
Com a finalidade de obter a distribuição de passos, coletamos fotografias da fluorescência através da câmera CCD, como mostra a figura (6.15). A distribuição do comprimento de passos de fótons no vapor é proporcional ao sinal de fluorescência coletada pela câmera CCD [42]. A radiação que incidiu na célula para a coleção desta fluorescência possui um espectro dado na figura (5.5). O região da célula que foi obtida na imagem mostrada na figura (6.15 (a)) possui um comprimento de 23 cm e o tamanho total desta célula é de 50 cm. Posicionamos a câmera em uma parte da célula devido alguns resíduos de rubídio que ficaram em sua preparação. Um fato a ser destacado é que deve-se obter fotografias da fluorescência em um vapor com baixas densidades, pois, o objetivo é obter uma distribuição do comprimento de passos de fótons devido a apenas dois eventos consecutivos de absorção. Os dados coletados para obter gráficos da distribuição de passos (ver figura (6.15 (a))) no vapor atômico é coletado pela própria câmera CCD passando uma linha (neste caso horizontal) na região em que pretende-se coletar tal dados. Com o propósito de obter o expoente μ da lei de potência (ver equação (3.18)), colocamos o gráfico da distribuição de comprimento de passos do fóton em uma escala di-log.

Contudo, estes resultados obtidos em nossos laboratórios são resultados preliminares, pois, ainda precisa-se caracterizar o espectro dos fótons espalhados após a excitação laser em um vapor atômico, conforme a experiência mostrada na figura (6.12) e, além disso, é

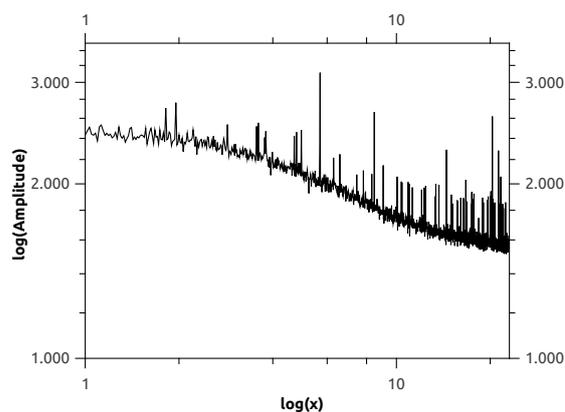
necessário fazer um melhor tratamento da imagem obtida pela câmera CCD.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.15: (a) Foto da fluorescência obtida através da câmera CCD para análise da distribuição de comprimento de passos de fótons no vapor atômico. (b) Distribuição de probabilidade de passos de fótons no vapor atômico. (c) Distribuição em uma escala di-log. A fotografia cobre uma região de 23 cm de comprimento da célula. A célula está a temperatura ambiente, aproximadamente.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Foi feito um estudo simulacional sobre o fenômeno de difusão dos fótons em um vapor atômico de rubídio.

Em um primeiro momento foram consideradas células com uma geometria infinita e o processo de excitação do vapor se deu em várias dessintonizações da radiação incidente em relação ao centro do espectro absorção e, desta maneira, conseguimos estudar a evolução do espectro de redistribuição de frequência dos fótons, particularmente a passagem de redistribuição parcial em frequência para redistribuição completa em frequência. Por outro lado, através da distribuição do comprimento dos passos de um único fóton neste vapor atômico para duas dessintonizações diferentes, no centro da absorção e para $\delta = -800$ MHz, conseguimos, também, observar a passagem de PFR para CFR. Após estudar a redistribuição de frequência dos fótons espalhados no vapor atômico em uma geometria infinita e comparar com alguns resultados já conhecidos, passamos a considerar a redistribuição em uma geometria cilíndrica finita e coletando os fótons apenas em certa região do espaço. Observamos que neste caso, a imposição na direção de coleção influencia no espectro de redistribuição em frequência.

Com esta geometria finita fizemos comparações entre duas densidades diferentes, $n \simeq 2,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ e $n \simeq 4,7 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. Desta maneira, podemos observar como os espectros evoluem nestas duas densidades. Os espectros de redistribuição obtidos a partir da alta densidade atômica possuem uma largura a meia altura maior quando comparados aos espectros obtidos com a baixa densidade e, isto acontece porque em alta densidade, a maior parte dos fótons que saem da célula são aqueles que possuem uma frequência mais afastada do centro de absorção.

Com esta simulação em Monte Carlo observamos também que não é necessário que os átomos possuam necessariamente uma velocidade $V_{//}$ que compense a dessintonização δ_L imposta na radiação incidente para absorver os fótons. Isto é, mesmo quando o vapor atômico é excitado por uma frequência bem fora da ressonância, os átomos absorvem estes fótons na asa do perfil de absorção e, desta maneira, estes fótons com estas frequências bem afastadas do centro de absorção refletem-se no processo de emissão e, com isso, caracteriza a PFR, pois, há memória da radiação incidente nestes fótons emitidos.

Em um segundo momento, calculamos, de forma numérica, a distribuição de passos dos fótons em um vapor atômico. Primeiro reproduzimos resultados já encontrados [1, 12] e, além disso, encontramos também, esta distribuição para os espectros naturais não modificados, tanto para o perfil espectral de emissão quanto para o perfil espectral de absorção. Por fim desta segunda parte, modificamos os espectros naturais de emissão com a inserção de um pico em sua estrutura espectral (ou com dois picos simétricos) bem como os espectros naturais de absorção com um buraco em sua estrutura espectral (ou com dois buracos simétricos). Podemos observar que mesmo modificando a estrutura dos espectros naturais (absorção e emissão) ainda obtemos uma distribuição Lévy para os passos dos fótons no vapor atômico. Além disso, com certos espectros de emissão e de absorção, pode-se observar dois expoentes μ da lei de potência diferentes em uma mesma distribuição dos passos de acordo com a figura (5.8), por exemplo.

Contudo, tanto a simulação numérica em Monte Carlo para a redistribuição em frequência dos fótons re-difusos no vapor atômico quanto os cálculos numéricos para a distribuição de passos dos fótons estão bem desenvolvidos. Porém, no caso da simulação em Monte Carlo ainda se faz necessário considerar a estrutura hiperfina no átomo bem como analisar a redistribuição para todo o espectro do rubídio. Ou seja, além da estrutura hiperfina, considerar os seus isótopos (Rb^{85} e Rb^{87}). Por outro lado, a parte experimental ainda está sendo desenvolvida em nossos laboratórios, mas, como vimos ao longo do capítulo anterior, já está, praticamente desenvolvida, no entanto, ainda precisa-se de resultados concretos para podermos comparar com os resultados numéricos, tanto da redistribuição em frequência assim como da distribuição de passos dos fótons.

APÊNDICE A

TABELA DE DADOS

Velocidade da luz no vácuo	c	$2,997.10^8$ m/s
Permeabilidade do vácuo	μ_0	$4\pi.10^{-7}$ N/A ²
Permissividade do vácuo	ε_0	$8,85410^{-12}$ F/m
Constante de Planck	h	$6,626.10^{-34}$ J.s
	\hbar	$1,504.10^{-34}$ J.s
Massa do elétron	m_e	$9,109.10^{-31}$ Kg
Raio de Bohr	a_0	$0,529.10^{-10}$ m
Constante de Boltzmann	k_B	$1,380.10^{-23}$ J/K
Unidade de massa atômica	u	$1,660.10^{-27}$ Kg

Tabela A.1: Constantes físicas fundamentais.

Número atômico	Z	37
Número atômico total	$Z + N$	85
Abundância	% Rb^{85}	72,17%
Massa atômica	m	1,409 Kg
Densidade à 298 K	ρ_m	1,53 g/cm ³
Pressão de vapor à 298 K	P_V	$3,92.10^{-7}$ Torr
Temperatura de fusão	T_f	312,30 K
Temperatura de ebulição	T_E	961 K
Calor específico	c	0,363 J/g.K
Capacidade molar	C	31,060 J/mol.K
Spin nuclear	I	5/2

Tabela A.2: Propriedades físicas do Rb^{85} .

Frequência de transição	ω_0	$2\pi \cdot 384,230$ THz
Energia de transição	E_0	1,589 eV
Comprimento de onda da transição no vácuo	λ_0	780,241 nm
Comprimento de onda da transição no ar	λ_{ar}	780,033 nm
Tempo de vida	τ	26,235 ns
Taxa de decaimento	Γ	38,117 MHz
Velocidade de recuo	v_r	6,023 mm/s
Frequência de recuo	ω_r	$2\pi \cdot 3,856$ KHz

Tabela A.3: Propriedades de transição óptica da linha D_2 ($5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$) do Rb^{85} .

Número atômico	Z	37
Número atômico total	$Z + N$	87
Abundância	$\%R_b^{85}$	27,83%
Massa atômica	m	1,443 Kg
Densidade à 298 K	ρ_m	1,53 g/cm ³
Pressão de vapor à 298 K	P_V	$3,92 \cdot 10^{-7}$ Torr
Temperatura de fusão	T_f	312,30 K
Temperatura de ebulição	T_E	961 K
Calor específico	c	0,363 J/g.K
Capacidade molar	C	31,060 J/mol.K
Spin nuclear	I	3/2

Tabela A.4: Propriedades físicas do Rb^{87} .

Frequência de transição	ω_0	$2\pi \cdot 384,230$ THz
Energia de transição	E_0	1,589 eV
Comprimento de onda de transição no vácuo	λ_0	780,241 nm
Comprimento de onda de transição no ar	λ_{ar}	780,033 nm
Tempo de vida	τ	26,235 ns
Taxa de decaimento	Γ	38,117 MHz
Velocidade de recuo	v_r	5,884 mm/s
Frequência de recuo	ω_r	$2\pi \cdot 3,771$ KHz

Tabela A.5: Propriedades de transição óptica da linha D_2 ($5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$) do Rb^{87} .

APÊNDICE B

EQUAÇÃO DE DIFUSÃO

Iremos considerar este problema de difusão de forma mais simples. Ou seja, considerando apenas o problema em uma dimensão.

Suponha um caminhante aleatório que parte da origem e desloca-se em linha reta, onde realiza n_1 passos para a direita e n_2 passos para a esquerda, sendo estes de comprimento fixo l e de probabilidades p e $1 - q$, respectivamente. O nosso problema é encontrar a probabilidade $P_N(m)$ de encontrar o caminhante na posição $x = ml$, onde N é o número total de passos e m é a distância líquida percorrida. Ou seja:

$$N = n_1 + n_2 \tag{B.1}$$

$$m = n_1 - n_2 \tag{B.2}$$

Desta maneira, a distância percorrida pelo caminhante é de:

$$x = (n_1 - n_2)l = ml \tag{B.3}$$

A probabilidade de realizar n_1 passos para a direita e n_2 para a esquerda, considerando que são estatisticamente independentes, é de:

$$p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p \dots q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \dots = p^{n_1} \cdot q^{n_2} \tag{B.4}$$

Para encontrar $P_N(m)$ devemos arranjar de todas as maneiras a probabilidade encontrada na equação (B.4), isto é, calcular de quantas maneiras distintas podem ser dispostos

$n_1 + n_2$ objetos. Assim, temos que:

$$P_N(m) = \frac{N!}{n_1!n_2!} p^{n_1} q^{n_2} \quad (\text{B.5})$$

Pelas equações (B.1) e (B.2), obtemos que:

$$P_N(m) = \frac{N!}{\left(\frac{N+m}{2}\right)! \left(\frac{N-m}{2}\right)!} p^{\frac{N+m}{2}} q^{\frac{N-m}{2}} \quad (\text{B.6})$$

$$P_N(m) = \frac{N!}{\left(\frac{N+m}{2}\right)! \left(\frac{N-m}{2}\right)!} p^{\frac{N+m}{2}} (1-p)^{\frac{N-m}{2}} \quad (\text{B.7})$$

Devemos agora fazer uma conexão do caminhante aleatório com o fenômeno da difusão. Para isso, precisa-se descrever o problema do caminhante como uma equação diferencial com variáveis aleatórias. Desta maneira, vamos supor que τ seja o tempo necessário para realizar um passo e, assim, $P_N(m)$ é a probabilidade da partícula se encontrar na posição $x = ml$ no tempo $N\tau$. Para que isto ocorra, apenas uma partícula que encontra-se na posição $x = (m-1)l$ ou $x = (m+1)l$ no tempo $t = (N-1)\tau$ atingirá a posição $x = ml$. Portanto, $P_N(m)$ no passo seguinte, obedece a seguinte relação:

$$P_N(m) = pP_N(m-1) + qP_N(m+1) \quad (\text{B.8})$$

A equação (B.8) representa um exemplo de um processo markoviano¹. Podemos substituir a função discreta $P_N(m)$ por uma função contínua $\zeta(N\tau, ml) = \zeta(t, x)$ caso N seja suficientemente grande. Com isso, a equação (B.8) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\zeta([N+1]\tau, ml) = p\zeta(N\tau, [m-1]l) + q\zeta(N\tau, [m+1]l)$$

$$\zeta(N\tau + \tau, ml) = p\zeta(N\tau, ml - l) + q\zeta(N\tau, ml + l)$$

$$\zeta(t + \tau, x) = p\zeta(t, x - l) + q\zeta(t, x + l) \quad (\text{B.9})$$

Expandindo em série de Taylor até a segunda ordem ambos os lados da equação (B.9), temos que:

¹Processos ditos como markoviano são aqueles que não possuem efeitos de memória, ou seja, a predição do próximo estado é independente do estado anterior [63, 64].

$$\zeta + \tau \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{2} \tau^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = p\zeta - lp \frac{\partial \zeta}{\partial x} + p \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + q\zeta + lq \frac{\partial \zeta}{\partial x} + q \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (\text{B.10})$$

Lembrando que $p + q = 1$, a equação (B.10) se reduz à:

$$\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{\zeta}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (q - p) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{l^2}{2\tau} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (\text{B.11})$$

A equação (B.11) representa a equação generalizada para a caminhada aleatória e é uma equação diferencial do tipo hiperbólica [65]. Devido a este tipo de equação diferencial, deve-se esperar uma solução que seja válida também em um regime para tempos pequenos.

Assumindo $p = q = 1/2$, pode-se observar uma conexão com o movimento browniano difusivo. Com esta consideração, a equação (B.11) fica da seguinte forma:

$$\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (\text{B.12})$$

onde $D = l^2/2\tau$ e é chamado de coeficiente de difusão. No limite $\tau \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \ll \frac{\partial \zeta}{\partial t}$, a equação (B.12) se reduz a:

$$\boxed{\frac{\partial \zeta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}} \quad (\text{B.13})$$

A equação (B.13) é a forma convecional para a equação de difusão e é do tipo parabólica [65]. Esta equação da difusão foi a qual Einstein se baseou para a explicação do movimento browniano [66].

Abordamos o problema de difusão na visão de Marc Kac, porém, há outros tratamentos para tal problema [67], dentre elas, a visão de Einstein, de Paul Langevin e a de Fokker-Planck.

APÊNDICE C

DISTRIBUIÇÃO DE VELOCIDADES DE MAXWELL-BOLTZMANN

Para encontrar a distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann iremos utilizar o formalismo canônico, pois, este formalismo descreve um sistema em contato com um reservatório térmico através de paredes diatérmicas¹. Ou seja, podemos imaginar um sistema físico que está em contato com um banho térmico e pelo princípio zero da termodinâmica [69], o sistema entra em equilíbrio termodinâmico com o banho.

Consideremos que o gás que iremos analisar seja um gás ideal que possui apenas energia translacional. Assim, sua função de partição canônica pode ser calculada da seguinte forma:

$$Z = \int_0^{V_1} \dots \int_0^{V_N} d^3q_1 \dots d^3q_N \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^3p_1 \dots d^3p_N e^{-\beta H} \quad (\text{C.1})$$

O princípio de incerteza de Heisenberg diz que para cada par multiplicativo de momento e posição há um fator da ordem da constante de Planck e, então, para a equação (C.1) ficar dimensionalmente correta, devemos dividir pelo fator h^{3N} , pois, estamos considerando um problema tridimensional e com N partículas. Além disso, é considerado que as partículas são indistinguíveis, portanto, deve-se dividir pelo fator $N!$. Com isso, a equação (C.1) assume a seguinte forma:

$$Z = \frac{V^N}{N! h^{3N}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3p_1 e^{-\frac{\beta P_1^2}{2m}} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^3p_N e^{-\frac{\beta P_N^2}{2m}}$$

¹Parede que permite a troca de calor com a viziança [68].

$$Z = \frac{V^N}{N!h^{3N}} (2m\pi k_B T)^{3N/2} \quad (\text{C.2})$$

onde usamos o fato que $\beta = \frac{1}{k_B T}$. A equação (C.2) é a função de partição canônica para um gás ideal contido em um espaço tridimensional. Para encontrar a distribuição de probabilidades da velocidade, usamos a seguinte definição [38]:

$$P(v)d^3v = \frac{A}{Z} e^{-\frac{\beta P^2}{2m}} d^3p \quad (\text{C.3})$$

onde A é a constante de normalização. Para encontrá-la, devemos fazer a seguinte operação:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(v)d^3v = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{Z} e^{-\frac{\beta P^2}{2m}} d^3p$$

$$1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A}{Z} e^{-\frac{\beta P^2}{2m}} P^2 \text{sen}(\theta) dp d\theta d\phi$$

$$A = \frac{Z}{4\pi} \frac{1}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \quad (\text{C.4})$$

Com o valor dessa constante de normalização, a equação (C.3) fica da seguinte forma:

$$P(v)d^3v = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} e^{-\frac{\beta P^2}{2m}} d^3p$$

$$P(v)d^3v = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 dv \quad (\text{C.5})$$

Com a equação (C.5), percebemos que a distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann em três dimensões é dada por:

$$P(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \quad (\text{C.6})$$

Para encontrar as distribuições de velocidades em uma e duas dimensões, devemos fazer o mesmo procedimento feito para três dimensões. Lembrando que o elemento de área, no caso bidimensional, é dado por $d^2p = v d\theta d\phi$. Então, as distribuições de probabilidades em uma, duas e três dimensões são:

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_1(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}, & \text{uma dimensão} \\ P_2(v) = \frac{m}{2\pi k_B T} v e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}, & \text{duas dimensões} \\ P_3(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}, & \text{três dimensões} \end{array} \right. \quad (\text{C.7})$$

A figura (C.1) nos fornece os gráficos da distribuição de velocidade de Maxwell-Boltzmann em uma, duas e três dimensões para um sistema com uma temperatura de $T = 300$ K.

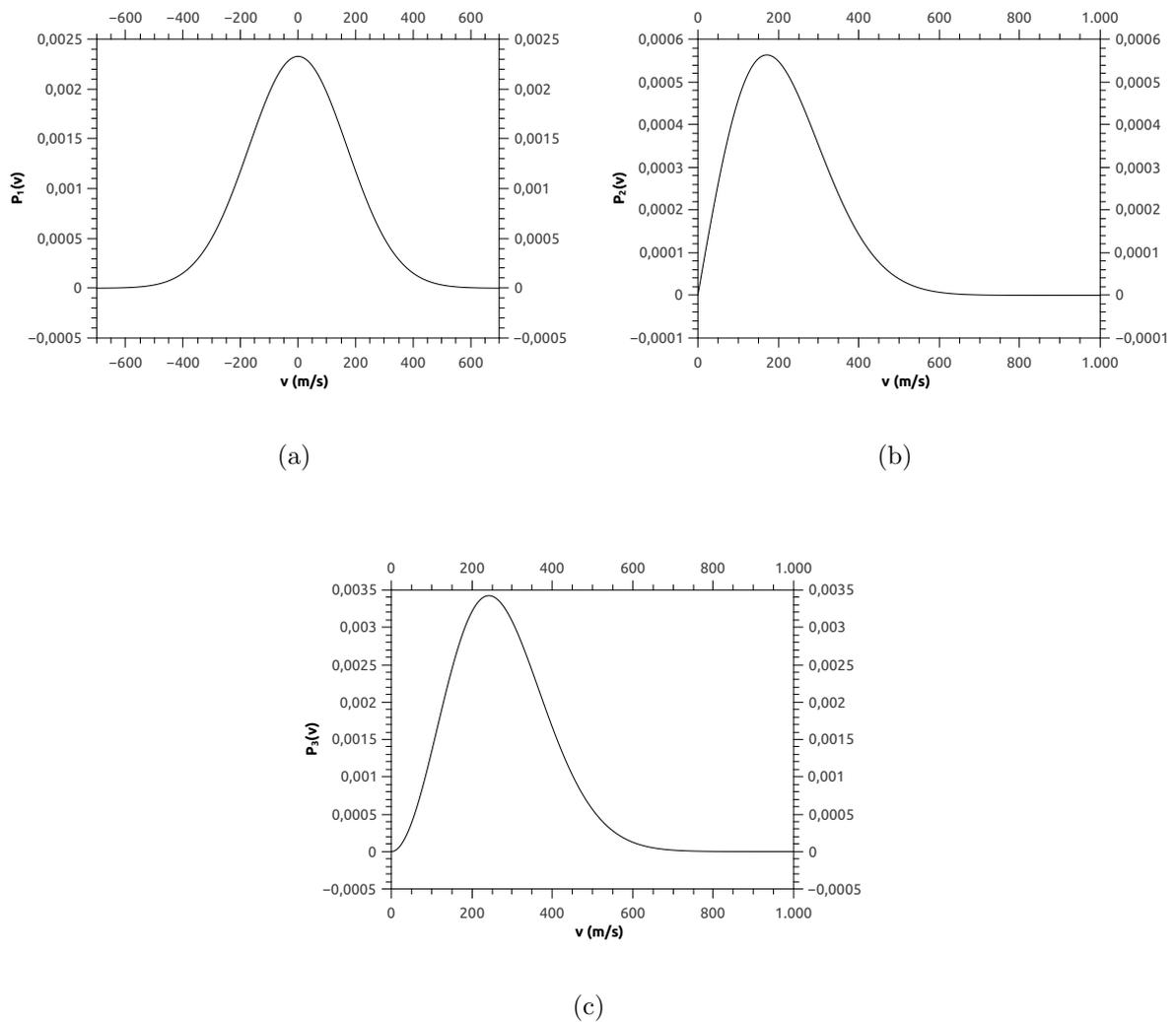


Figura C.1: Distribuição de velocidade de Maxwell-Boltzmann. (a) Distribuição unidimensional. (b) Distribuição bidimensional. (c) Distribuição tridimensional. A temperatura utilizada para este sistema foi de $T = 300$ K.

A velocidade que corresponde ao máximo de $P_3(v)$ é a mais provável. Portanto, para

encontrar esta velocidade mais provável ($\langle v \rangle$), devemos derivar a equação (C.6) e igualar a zero. Então:

$$\frac{dP_3(v)}{dv} = 0$$

$$4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \left[2ve^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} - \frac{mv^3}{k_B T} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \right] = 0$$

$$2v - \frac{mv^3}{k_B T} = 0$$

$$\langle v \rangle = \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^{1/2} \quad (\text{C.8})$$

A figura (C.2) indica a velocidade mais provável em um gráfico $P_3(V)$ para três diferentes temperaturas. Como mostra a equação (C.8), o máximo de $P_3(V)$ se desloca alterando a temperatura do sistema.

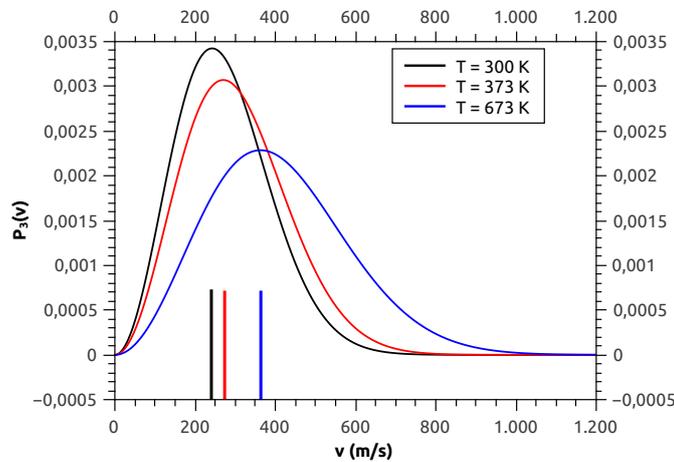


Figura C.2: Distribuição de velocidade de Maxwell-Boltzmann indicando a velocidade mais provável para três diferentes temperaturas. Em preto, vermelho e azul mostram, nessa ordem, $P(V)$ para $T = 300$ K, $T = 373$ K e $T = 673$ K e as linhas verticais indica sua velocidade mais provável que são, respectivamente, $\langle v_{T=300} \rangle \approx 242$ m/s, $\langle v_{T=373} \rangle \approx 270$ m/s e $\langle v_{T=673} \rangle \approx 363$ m/s.

APÊNDICE D

ESPALHAMENTO DE FÓTONS ATRAVÉS DE ÁTOMOS

Iremos fazer uma discussão sobre a frequência do fóton espalhado pelo átomo através da conservação de energia e de momento. Consideraremos o problema em que um fóton com frequência ν incide em um átomo de dois níveis e inicialmente em repouso em seu referencial. Após esta interação, o fóton é espalhado com uma frequência ν' e o átomo adquire uma velocidade \mathbf{v} . É importante ressaltar que iremos desprezar o que acontece durante o evento de espalhamento do fóton, apenas estudaremos os acontecimentos antes e depois deste fenômeno de espalhamento. Suporemos o processo em uma dimensão. Assim, duas situações são prováveis: i) o fóton incidente e espalhado são co-propagantes ou ii) o fóton incidente e espalhado são contra-propagantes. Analisaremos estas duas situações

i) Fóton incidente e espalhado co-propagantes

- Conservação de energia

$$h\nu = h\nu' + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = \frac{2h}{m}(\nu - \nu') \tag{D.1}$$

- Conservação de momento

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} + mv$$

$$v = \frac{h}{mc} (\nu - \nu') \quad (\text{D.2})$$

Pelas equações (D.1) e (D.2) podemos obter duas soluções: (a) $\nu = \nu'$ e assim, $v = 0$ (solução trivial) e, portanto, o espalhamento é elástico no referencial do átomo. (b) $v = 2c$ o que seria impossível. A solução (b) pode ser obtida dividindo a equação (D.1) pela equação (D.2).

ii) Fóton incidente e espalhado contra-propagantes

- Conservação de energia

$$h\nu = h\nu' + \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = \frac{2h}{m} (\nu - \nu') \quad (\text{D.3})$$

- Conservação de momento

$$\frac{h\nu}{c} = -\frac{h\nu'}{c} + mv$$

$$v = \frac{h}{mc} (\nu + \nu')$$

$$v^2 = \frac{h^2}{m^2c^2} (\nu^2 + \nu'^2 + 2\nu\nu') \quad (\text{D.4})$$

Dividindo a equação (D.3) pela equação (D.4), temos que:

$$\nu - \nu' = \frac{h}{2mc^2} (\nu^2 + \nu'^2 + 2\nu\nu') \quad (\text{D.5})$$

Podemos calcular a ordem de grandeza de $\nu - \nu'$. Fazendo uso da tabela (A.1) e que $\nu \sim 10^{14}$ KHz. Portanto, o valor de $\nu - \nu' \sim 1$ KHz. Então, o espalhamento é dito elástico no referencial atômico. Com este resultado de $\nu - \nu'$, temos que $v \sim 10^{-3}$

APÊNDICE E

PLACA DE QUARTO DE ONDA E MEIA ONDA

Considere uma luz linearmente polarizada que incide sobre uma lâmina birrefringente¹ de espessura d , como mostra a figura (E.1).

O campo elétrico total faz com o eixo y um ângulo de $\pi/4$ de maneira que suas componentes são $E_x = E_0 e^{i(k_r z - \omega t)}$ e $E_y = E_0 e^{i(k_l z - \omega t)}$. A onda incide na placa em $z = 0$ e em $t = 0$ e sai em $z = d$. Com isso, a diferença de fase entre as componentes emergentes da placa é:

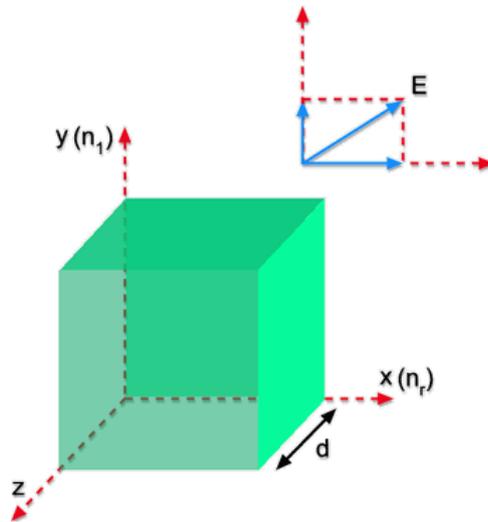


Figura E.1: Incidência do campo elétrico que faz um ângulo de $\pi/4$ com o eixo y em um meio birrefringente. n_r e n_l são os índices de refração rápido e lento, respectivamente.

¹Material anisotrópico cujo índice de refração depende da direção no cristal.

$$\delta = (k_l - k_r) d$$

$$\delta = \left(\frac{2\pi}{\lambda_l} - \frac{2\pi}{\lambda_r} \right) d$$

$$\delta = \left(\frac{n_l}{\lambda_0} - \frac{n_r}{\lambda_0} \right) d$$

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda_0} (n_l - n_r) \quad (\text{E.1})$$

onde o n_l e o n_r são os índices de refração lento e rápido, respectivamente. Para que possamos obter uma luz circularmente polarizada, devemos fazer a diferença de fase da equação (E.1) igual a $\delta = \pi/2$ e, desta maneira, temos que:

$$(n_l - n_r) d = \frac{\lambda_0}{4} \quad (\text{E.2})$$

A equação (E.2) nos informa a diferença entre os caminhos ópticos da direção horizontal e perpendicular do campo deve ser a um quarto de onda. Placas com este tipo de características é conhecida como placa de um quarto de onda [70]. Caso uma luz linearmente polarizada incidir com a direção paralela a um dos eixos da lâmina de um quarto de onda, a sua polarização não será afetada, isto é, ela continua sendo linearmente polarizada. No entanto, caso uma luz também linearmente polarizada incidir neste mesmo tipo de lâmina fazendo um ângulo de $\pi/4$ sobre o eixo do material, resultará em uma luz circularmente polarizada, porém, caso esta luz com polarização circular incidir novamente em uma lâmina de um quarto de onda, esta ficará linearmente polarizada.

Por outro lado, caso a fase δ da equação (E.1) seja igual a π , então, a diferença entre os caminhos ópticos vai ser dada por:

$$(n_l - n_r) d = \frac{\lambda_0}{2} \quad (\text{E.3})$$

A equação (E.3) nos informa que a lâmina é conhecida como placa de meia de onda. Uma observação importante é que, caso a luz incida em uma placa de meia onda com um ângulo θ (ângulo entre a direção de propagação e o eixo óptico da placa), direção da polarização da luz girará de 2θ [71].

Caso fizermos uma combinação de uma placa de meia onda com um polarizador iremos, desta forma, controlar a intensidade da luz, pois, o polarizador filtra a polarização que vai emergir (ver figura (E.2)) e a placa de meia de onda possui a finalidade de impor a direção de polarização antes deste incidir no polarizador. Por exemplo, se a lâmina de meia de onda fizer com que a luz seja polarizada com um ângulo de $\pi/4$ em relação ao eixo de propagação e esta luz seja incidida em um polarizador que filtra a polarização vertical também em relação ao eixo de propagação da luz, então, desta forma, a luz final emergente vai ter apenas uma parte da intensidade inicial e esta diminuição de intensidade pode ser vista também pela lei de Malus $I = \frac{c\varepsilon_0|E|^2}{2} \cos^2\theta$

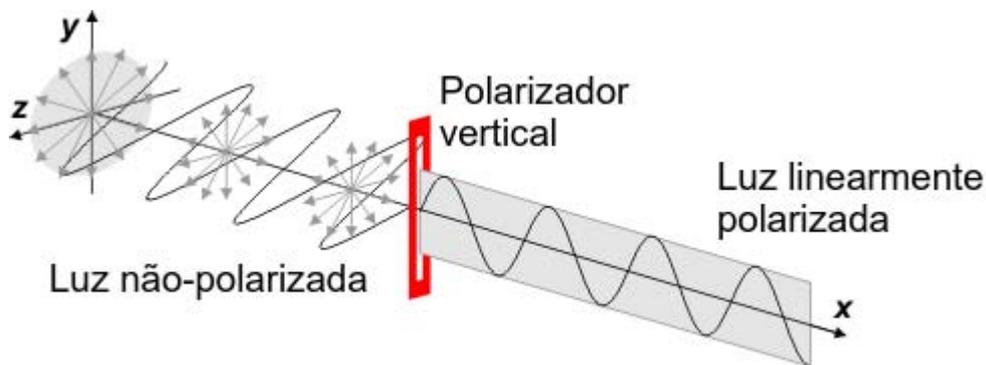


Figura E.2: Incidência de uma luz não-polarizada sendo filtrada em um polarizador vertical. Apenas a componente vertical da luz não-polarizada emerge do polarizador.

APÊNDICE F

ISOLADOR ÓPTICO

É um dispositivo usado que possibilita indesejáveis realimentações no meio ativo devido à várias reflexões causadas pelos componentes ópticos inseridos no experimento. O funcionamento do isolador óptico (IO) é baseado no efeito Faraday [72].

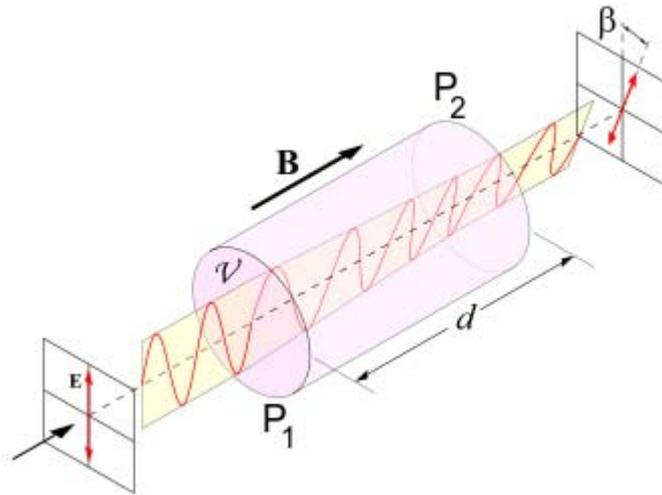


Figura F.1: Modelo de um isolador óptico com comprimento d . A luz possui certa polarização inicial e ao atravessá-lo, a polarização inicial é girada formando um ângulo β com o eixo vertical.

De maneira geral, o efeito Faraday é um fenômeno de polarização da luz de maneira que este efeito gira a polarização quando a luz atravessa um meio sujeito a um campo magnético \mathbf{B} , como podemos perceber na figura (F.1). No IO, a luz passa pelo primeiro polarizador P_1 e então, o campo magnético age em seu comprimento de maneira que gire esta polarização em $\pi/4$ em relação ao eixo óptico e assim, passa por um segundo polarizador P_2 que está disposto com um ângulo, também de $\pi/4$ em relação ao eixo óptico. Caso exista uma luz refletida com polarização ortogonal à P_2 , então, esta luz será

bloqueada, caso contrário, ela vai seguir ao longo do IO e, pelo efeito Faraday, vai ser girada novamente de um ângulo $\pi/4$ e, desta maneira, será ortogonal à P_1 que, por sua vez, bloqueará a passagem da luz.

O isolador óptico que usamos em nosso experimento foi um equipamento da Thorlabs e IO-5-NIR-LP como referência.

APÊNDICE G

INTERFERÔMETRO FABRY-PÈROT

O Fabry-Pèrot (FP) é um instrumento óptico em que seu funcionamento é baseado, fundamentalmente, no fenômeno de interferência da luz, além das reflexões múltiplas que ocorrem entre as faces espelhadas e paralelas que estão no interior deste equipamento, conforme a figura (G.1). O Fabry-Pèrot é geralmente usado para medidas de comprimento de onda com alta precião bem como, no estudo das estruturas fina das linhas espectrais [47].

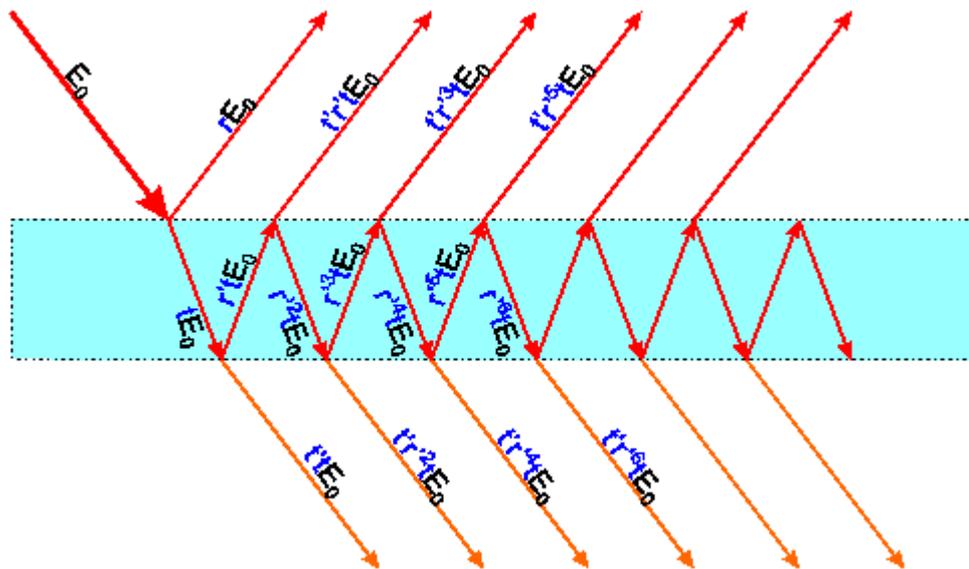


Figura G.1: Cavidade em Fabry-Pèrot apresentando múltiplas reflexões e transmissões de uma radiação incidente entre dois espelhos. O coeficiente de reflexão na primeira interface e na segunda interface possui uma amplitude de r e r' , respectivamente. O coeficiente de transmissão possui uma amplitude na primeira e segunda interface, respectivamente, de t e t' .

Como podemos perceber na figura (G.1), a radiação incidente sofre diversas reflexões

de modo que os feixes transmitidos somam-se e causam um padrão de interferência, onde sua intensidade é dada pela função de Airy [28]. A transmissão da radiação incidente é otimizada através do FP quando a distância entre os espelhos em seu interior é um múltiplo semi-inteiro do comprimento de onda da radiação. A figura (G.2) nos fornece o espectro gerado pela transmissão através do Fabry-Pèrot. O FSR é uma sigla que significa *Free Spectral Range* e nos fornece a distância em frequência entre dois picos consecutivos gerados pelo FP. O Fabry-Pèrot que usamos possui um FSR de 1,5 GHz. O δ representa a largura em frequência a meia altura de um dos picos do FP e com o auxílio da figura (G.2) ele possui um valor de $\delta \simeq 0,15$ GHz. Com os valores de FSR e da largura a meia altura dos picos gerado pelo FP, podemos calcular sua finesse que é dada por:

$$F = \frac{FSR}{\delta} \quad (\text{G.1})$$

Assim, com a equação (G.1), temos que a finesse para o nosso interferômetro é $F \simeq 10$.

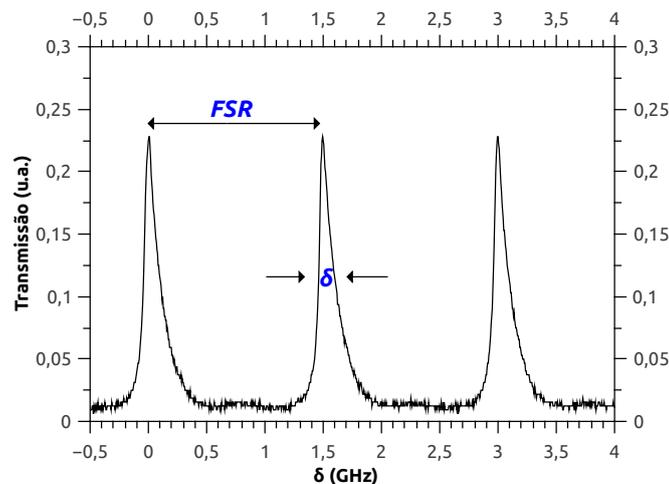


Figura G.2: Transmissão através de um Fabry-Pèrot com finesse $F \simeq 10$. FSR é a distância em frequência entre os picos de transmissão do FP e o δ é a largura em frequência a meia altura de cada pico de transmissão.

O Fabry-Pèrot também pode ser usado como uma calibração em frequência para o osciloscópio. Para mudarmos a escala do osciloscópio unidades de frequência, devemos efetuar um procedimento análogo ao procedimento feito para transitarmos em escalas termométricas. O Fabry-Pèrot que usamos foi um equipamento fornecido pela Thorlabs e SA200-5B como referência.

APÊNDICE H

PROGRAMA EM LINGUAGEM C DA DIFUSÃO DOS FÓTONS EM UM VAPOR ATÔMICO DE RUBÍDIO

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include "dierfc.c"

//definicao de alguns parametros
#define NAO 0
#define SIM 1

#define R (2.0E-2) //raio da celula
#define FOTON_MAX 1.0E6
#define pi 3.141592654
#define Vel_Max 2000.0
#define c 2.99792458E8
#define densidade 2.79076E16

//Geracao de nmeros aleatorios
#define Nind 2401
#define InitRandomGen (double) RandomGen(0, 1, NULL)
#define RandomNum (double) RandomGen(1, 0, NULL)

//Definicao das variaveis do sistema
int INTE,frequencia,FOTON,veloc,posicao,indice,ind,indd,PTr,Cont,Cont2,atomo,sub;
double Freq_Central[5],rnd,Freq,Sorteio;
double S_vel,massa[5],T,Prob_Vel,A,v0[5],angulo,Freq_E,ii;
double pos,Prob_pos,D,S_Freq,Prob_Freq,V1,alfaD[5],alfaL[5];
double px,py,pz,fotonx,fotony,fotonz,l,fx,fy,fz,f,distxy;
```

Programa em linguagem C da difusão dos fótons em um vapor atômico de rubi

```
double Vx1,Vx2,Vy1,Vy2,Vz1,Vz2,Vx,Vy,Vz,hbar,ProbV[5000],FreqV[5000];
double FreqCL,alfaLaser,delta,Prob,delta871,Prob871,delta872,Prob872;
double delta87,Prob851,delta85,Prob852;
double Freq871[5000],Freq872[5000],Freq851[5000],Freq852[5000];
double ProbV871[5000],ProbV872[5000],ProbV851[5000],ProbV852[5000];
double FreqR,a,b,Tr,iabs,ai[5],aii;
double fV2x,fV2y,fV2z,fV2,V2,VM[5],NormV,Decai87,Decai85,Decaimento[5],lambda[5];
double S_vel1,tet,fi,fi2,tet2,fiP;
double ang,ang2,Freq_ABS;
double p2y,p2z,l2;
double Suml,det,PV,VN;
double RandomGen(char Type, long Seed, long *Status);
double VC1,DV1;
double F1,F2,FX,FY,FZ,Ff;

//Inicio do problema
int main(void)
{

InitRandomGen;
FILE *arqF,
      *arqF2,
      *arqF3,
      *arqF4,
      *arqF5,
      *arqF10,
      *arqFT,
      *arql,
      *arqI,
      *arqT,
      *arqV85,
      *arqV87,
      *arqVEL;

//Arquivos de escrita

if ((arqT = fopen("Teste.DAT","w")) == NULL) {
    printf("fotons.cpp: Erro na abertura de \"dFinal.dat\".");
    exit(1);}
if ((arqI = fopen("Inicial.DAT","w")) == NULL) {
    printf("fotons.cpp: Erro na abertura de \"dFinal.dat\".");
    exit(1);}
if ((arqF = fopen("Fluorecencia.DAT","w")) == NULL) {
    printf("fotons.cpp: Erro na abertura de \"dFinal.dat\".");
    exit(1);}
if ((arqF2 = fopen("Fluorecencia2.DAT","w")) == NULL) {
    printf("fotons.cpp: Erro na abertura de \"dFinal.dat\".");
    exit(1);}
if ((arqF3 = fopen("Fluorecencia3.DAT","w")) == NULL) {
```

Programa em linguagem C da difusão dos fótons em um vapor atômico de rubi

```
printf("fotons.cpp: Erro na abertura de \"dFinal.dat\");
exit(1);}
if ((arqF4 = fopen("Fluorecencia4.DAT","w")) == NULL) {
printf("fotons.cpp: Erro na abertura de \"dFinal.dat\");
exit(1);}
if ((arqF5 = fopen("Fluorecencia5.DAT","w")) == NULL) {
printf("fotons.cpp: Erro na abertura de \"dFinal.dat\");
exit(1);}
if ((arqF10 = fopen("Fluorecencia10.DAT","w")) == NULL) {
printf("fotons.cpp: Erro na abertura de \"dFinal.dat\");
exit(1);}
if ((arqFT = fopen("FluorecenciaT.DAT","w")) == NULL) {
printf("fotons.cpp: Erro na abertura de \"dFinal.dat\");
exit(1);}
if ((arql = fopen("comprimentoL.DAT","w")) == NULL) {
printf("fotons.cpp: Erro na abertura de \"dFinal.dat\");
exit(1);}
if ((arqVEL = fopen("velocidade.DAT","w")) == NULL) {
printf("fotons.cpp: Erro na abertura de \"dFinal.dat\");
exit(1);}

//Dados Gerais
T=(1.38E-23)*294.0;
D=3.2E-4;
FOTON=0;
alfaLaser=6.0E6;
Ptr=0;
Cont=0;
Cont2=0;

//Dados dos atomos: [1]=87 F=1, [2]=87 F=2, [3]=85 F=2, [4]=85 F=3

//massa
massa[4]=87.0/6.022E26;
massa[1]=87.0/6.022E26;
massa[3]=85.0/6.022E26;
massa[2]=85.0/6.022E26;

//Grandezas termodinamicas
v0[4]=sqrt(2.0*T/massa[4]);
v0[1]=sqrt(2.0*T/massa[1]);
v0[3]=sqrt(2.0*T/massa[3]);
v0[2]=sqrt(2.0*T/massa[2]);
VM[4]=sqrt(2.0*T/massa[4]);
VM[1]=sqrt(2.0*T/massa[1]);
VM[3]=sqrt(2.0*T/massa[3]);
VM[2]=sqrt(2.0*T/massa[2]);

//Frequencia central e comprimento de onda
```

Programa em linguagem C da difusão dos fótons em um vapor atômico de rubídio

```
Freq_Central[1]=0.0;
Freq_Central[4]=0.0 + 6.834E9;
Freq_Central[2]=0.0 + 2.389E9;
Freq_Central[3]=0.0 + 3.035E9 + 2.389E9;
lambda[4]=c/(Freq_Central[4]+384.230484468562E12);
lambda[1]=c/(Freq_Central[1]+384.230484468562E12);
lambda[3]=c/(Freq_Central[3]+384.230484468562E12);
lambda[2]=c/(Freq_Central[2]+384.230484468562E12);

//decaimento, Largura de Lorentz e Doppler
Decai87=38.11E6;
Decai85=38.11E6;
Decaimento[4]=Decai87/2.0;
Decaimento[1]=Decai87/2.0;
Decaimento[3]=Decai85/2.0;
Decaimento[2]=Decai85/2.0;

alfaL[1]=Decaimento[1]/(4.0*pi);
alfaL[2]=Decaimento[2]/(4.0*pi);
alfaL[3]=Decaimento[3]/(4.0*pi);
alfaL[4]=Decaimento[4]/(4.0*pi);

alfaD[1]=Freq_Central[1]*v0[1]/c;
alfaD[2]=Freq_Central[2]*v0[2]/c;
alfaD[3]=Freq_Central[3]*v0[3]/c;
alfaD[4]=Freq_Central[4]*v0[4]/c;

//Leitura do perfil de voigt par o Rb 87
if ((arqV87 = fopen("Voigt87_294.DAT","r")) == NULL) {
    printf("fotons.cpp: Erro na abertura de \"dFinal.dat\".");
    system("pause");
    exit(1);}
if ((arqV85 = fopen("Voigt85_294.DAT","r")) == NULL) {
    printf("fotons.cpp: Erro na abertura de \"dFinal.dat\".");
    system("pause");
    exit(1);}

for(ind=0;ind<Nind;ind++)
{fscanf(arqV87,"%le %le %le",&delta87,&Prob871,&Prob872);
fscanf(arqV85,"%le %le %le",&delta85,&Prob851,&Prob852);

Freq871[ind]=delta87;
ProbV871[ind]=densidade*0.28*3.0/8.0*Prob871;
Freq872[ind]=delta87;
ProbV872[ind]=densidade*0.28*5.0/8.0*Prob872;
Freq851[ind]=delta85;
ProbV851[ind]=densidade*0.72*1.0/4.0*Prob851;
```

Programa em linguagem C da difusão dos fótons em um vapor atômico de rubídio

```
Freq852[ind]=delta85;
ProbV852[ind]=densidade*0.72*3.0/4.0*Prob852;
FreqV[ind]=delta85;
ProbV[ind]=ProbV851[ind];
fprintf(arqT,"%18.16e %e\n", (FreqV[ind])/1.0E6,ProbV[ind]);
    }
fclose(arqV87);
fclose(arqV85);

//Inicio da Simulacao de Monte Carlo.

//Frequencia central do laser
FreqCL=Freq_Central[2];

for(indd=1;indd<200;indd++)
Sorteio=RandomNum;
do{
    INTE=0;
    FOTON++; //Contagen do numero de fotons (repeties do experimento)

//Caracteristicas do foton inicial

//Sorteio da Frequencia do Laser
    do{
        frequencia=NAO;
        S_Freq=FreqCL+(2.0*RandomNum-1.0)*5.0*alfaLaser;
        Prob_Freq=1.0/(1.0+(4.0*pi*(FreqCL-S_Freq)/alfaLaser)*(4.0*pi*(FreqCL-S_Freq)/alfaLaser));
        Sorteio=RandomNum;
        if (Sorteio<Prob_Freq)
            frequencia=SIM;
    } while (frequencia==NAO);
    Freq=S_Freq;

//Calculo do Coeficiente de Absorcao e do tamanho do passo
    indice=0;
    ind=0;
do {
    ind++;
    if (FreqV[ind]<=Freq)
        indice=ind;
}while(indice==0 && ind<=Nind);
    if(ind>Nind)
        indice=Nind;
    b=(ProbV[indice]-ProbV[indice-1])/(FreqV[indice]-FreqV[indice-1]);
    a=(ProbV[indice-1]*FreqV[indice]-ProbV[indice]*FreqV[indice-1])/(FreqV[indice]-FreqV[indice-1]);

    ii=a+b*Freq;
    rnd=RandomNum;
```

Programa em linguagem C da difusão dos fótons em um vapor atômico de rubi

```
l=-log(rnd)/ii;
{fprintf(arq1,"%e\n",l);}

//Verificando se absorveu

if(l>=5.0E-2)

    PTr++;//contagem do numero de foton transmitidos
{
//Direcao do Laser
    fx=1.;
    fy=0.;
    fz=0.;

    fotonx=1;

do{
    posicao=NAO;
    pos=2.0*RandomNum*R-R;
    Prob_pos=1.0*exp(-pos*pos/(2.0*D*D));
    Sorteio=RandomNum;
    if (Sorteio<Prob_pos)
        posicao=SIM;
} while (posicao==NAO);
    fotony=pos;

do{
    posicao=NAO;
    pos=2.0*RandomNum*R-R;
    Prob_pos=1.0*exp(-pos*pos/(2.0*D*D));
    Sorteio=RandomNum;
    if (Sorteio<Prob_pos)
        posicao=SIM;
} while (posicao==NAO);
    fotonz=pos;

    Cont2++;
    if(Cont2==100)
    {
        fprintf(arqI,"%e %e %e %e\n",Freq-Freq_Central[1], fotonx, fotony, fotonz);
        Cont2=0;
    }
} do{ INTE++;

//Verificacao do isotopo a absorver

    indice=0;
    ind=0;
```

```
do {
    ind++;
    if (Freq871[ind]<=Freq)
        indice=ind;
}while(indice==0 && ind<=Nind);
    if(ind>Nind)
        indice=Nind;
    b=(ProbV871[indice]-ProbV871[indice-1])/(Freq871[indice]-Freq871[indice-1]);
    a=(ProbV871[indice-1]*Freq871[indice]-ProbV871[indice]*Freq871[indice-1])/(Freq871[indice]-Freq871[indice-1]);
    //ai[4]=a+b*Freq;
    ai[4]=0;

    indice=0;
    ind=0;
do {
    ind++;
    if (Freq872[ind]<=Freq)
        indice=ind;
}while(indice==0 && ind<=Nind);
    if(ind>Nind)
        indice=Nind;
    b=(ProbV872[indice]-ProbV872[indice-1])/(Freq872[indice]-Freq872[indice-1]);
    a=(ProbV872[indice-1]*Freq872[indice]-ProbV872[indice]*Freq872[indice-1])/(Freq872[indice]-Freq872[indice-1]);
    //ai[1]=a+b*Freq;
    ai[1]=0;

    indice=0;
    ind=0;
do {
    ind++;
    if (Freq852[ind]<=Freq)
        indice=ind;
}while(indice==0 && ind<=Nind);
    if(ind>Nind)
        indice=Nind;
    b=(ProbV851[indice]-ProbV851[indice-1])/(Freq851[indice]-Freq851[indice-1]);
    a=(ProbV851[indice-1]*Freq851[indice]-ProbV851[indice]*Freq851[indice-1])/(Freq851[indice]-Freq851[indice-1]);
    //ai[3]=a+b*Freq;
    ai[3]=0;

    indice=0;
    ind=0;
do {
    ind++;
    if (Freq851[ind]<=Freq)
        indice=ind;
}while(indice==0 && ind<=Nind);
    if(ind>Nind)
        indice=Nind;
```

Programa em linguagem C da difusão dos fótons em um vapor atômico de rubi

```
b=(ProbV852[indice]-ProbV852[indice-1])/(Freq852[indice]-Freq852[indice-1]);
a=(ProbV852[indice-1]*Freq852[indice]-ProbV852[indice]*Freq852[indice-1])/(Freq852[indice]-Freq852[indice-1]);
ai[2]=a+b*Freq;
//ai[2]=0;

aii=ai[1]+ai[2]+ai[3]+ai[4];
ai[1]=ai[1]/aii;
ai[2]=ai[1]+ai[2]/aii;
ai[3]=ai[2]+ai[3]/aii;
ai[4]=ai[3]+ai[4]/aii;

Sorteio=RandomNum;
if(Sorteio>ai[1] && Sorteio<=ai[2])
atomo=2;
//if(Sorteio<=ai[1])
//atomo=1;
//else if (Sorteio>ai[1] && Sorteio<=ai[2])
//atomo=2;
//else if (Sorteio>ai[2] && Sorteio<=ai[3])
//atomo=3;
//else
//atomo=4;
//printf("%d %d\n",INTE,atomo);

//modulo da velocidade do atomo na direcao do foton
VC1=(Freq-Freq_Central[atomo])*c/(Freq+384.230484468562E12);
DV1=alfaL[atomo]/(Freq+384.230484468562E12)*c;
//Sorteio Lorentziano da velocidade na direcao do foton
S_vel=-Vel_Max;
VN=0.;
do{
det=Freq-Freq_Central[atomo]-(Freq+384.230484468562E12)*S_vel/c;
PV=1.0/(1.+det*det/(alfaL[atomo]*alfaL[atomo]))*exp(-0.5*massa[atomo]*S_vel*S_vel/T);
if(PV>VN)
VN=PV;
S_vel=S_vel+1.0;
}while (S_vel<=Vel_Max-1.0) ;

do{
veloc=NA0;
S_vel=(2.0*RandomNum-1.0)*Vel_Max;
det=Freq-Freq_Central[atomo]-(Freq+384.230484468562E12)*S_vel/c;
Prob_Vel=1.0/(1.+det*det/(alfaL[atomo]*alfaL[atomo]))*exp(-0.5*massa[atomo]*S_vel*S_vel/T)/VN;
Sorteio=RandomNum;
if(Sorteio<Prob_Vel)
veloc=SIM;
```

Programa em linguagem C da difusão dos fótons em um vapor atômico de rubi

```
}while (veloc==NA0);
V1=S_vel;

//Velocidade do tomo no plano perpendicular direo do fton incidente
rnd=RandomNum;
rnd=2.0-2.0*rnd;
V2=sqrt(2.0*T/massa[atomo])*dierfc(rnd);

//Vetor velocidade na direao perpendicular
Vx2=V2*fV2x;
Vy2=V2*fV2y;
Vz2=V2*fV2z;
//Velocidade Total com correo de recuo devido ao foton
Vx=Vx1+Vx2;
Vy=Vy1+Vy2;
Vz=Vz1+Vz2;

//Sorteio da direo do foton emitido depois da primeira difuso
Sorteio=RandomNum;
fi=RandomNum*2.0*pi;
tet=RandomNum*2.0-1.0;
FX=sqrt(1-tet*tet)*cos(fi);
FY=sqrt(1-tet*tet)*sin(fi);
FZ=tet;

//clculo do produto escalar dos dois vetores de onda (f incidente, F emitido)
F1=fx*FX+fy*FY+fz*FZ;
Ff=F1;
//clculo da norma, F2, da componente de F perpendicular a f
F2=sqrt(1.0-Ff*Ff);

//Correo da frequencia por efeito Doppler
Freq=Freq+(V1*(F1-1.0)+V2*F2)/lambda[atomo];

//memria da direo do fton incidente para a proxima difuso
fx=FX;
fy=FY;
fz=FZ;

//Guardando a posio no qual o foton foi emitido posies antes da emiss
px=fotonx;
py=fotony;
pz=fotonz;

//Determinao do passo dado pelo foton
//Calculo do Coeficiente de Absoro e do tamanho do passo
indice=0;
```

```
    ind=0;
do {
    ind++;
    if (FreqV[ind]<=Freq)
        indice=ind;
}while(indice==0 && ind<=Nind);
    if(ind>Nind)
        indice=Nind;

    b=(ProbV[indice]-ProbV[indice-1])/(FreqV[indice]-FreqV[indice-1]);
    a=(ProbV[indice-1]*FreqV[indice]-ProbV[indice]*FreqV[indice-1])/(FreqV[indice]-FreqV[indice-1]);

    ii=a+b*Freq;
    rnd=RandomNum;
    l=-log(rnd)/ii;

    fotonx=fotonx+l*fx;
    fotony=fotony+l*fy;
    fotonz=fotonz+l*fz;

distxy=sqrt(fotonz*fotonz+fotony*fotony);
if (fotonx<0)
{
    l2=px-0;
    p2y=py+fy/fx*l2;
    p2z=pz+fz/fx*l2;
    if (p2y*p2y+p2z*p2z<=R*R)
    {
        Cont++;
        if(INTE==1)
        {
            fprintf(arqF,"%d %e %e %e %e %e\n",INTE, Freq-Freq_Central[2], px, py, pz,l);
            fprintf(arqVEL,"%e %e %e %e\n", sqrt(Vx*Vx+Vy*Vy+Vz*Vz), Vx*fx+Vy*fy+Vz*fz, V1, V2);}

        if(INTE==2)
        {
            fprintf(arqF2,"%d %e %e %e %e %e\n",INTE, Freq-Freq_Central[2], px, py, pz,l);}

        if(INTE==3)
        {
            fprintf(arqF3,"%d %e %e %e %e %e\n",INTE, Freq-Freq_Central[2], px, py, pz,l);}

        if(INTE==4)
        {
            fprintf(arqF4,"%d %e %e %e %e %e\n",INTE, Freq-Freq_Central[2], px, py, pz,l);}

        if(INTE==5)
        {
```

Programa em linguagem C da difusão dos fótons em um vapor atômico de rubi 137

```
fprintf(arqF5,"%d %e %e %e %e %e\n",INTE, Freq-Freq_Central[2], px, py, pz,1);}

if(INTE==10)
{fprintf(arqF10,"%d %e %e %e %e %e\n",INTE, Freq-Freq_Central[2], px, py, pz,1);}

{fprintf(arqFT,"%d %e %e %e %e %e %e\n",INTE, Freq-Freq_Central[2], px, py, pz,1,PTr/FOTON_MAX);}

printf("%d\n",Cont);}

{fprintf(arqVEL,"%e %e %e %e %e %e %e\n", sqrt(Vx*Vx+Vy*Vy+Vz*Vz), Vx*fx + Vy*fy + Vz*fz, V1);}

}

}while (distxy <= R && fotonx >= 0. && fotonx <= 5E-2); //Repete o procedimento

}

}while (FOTON <= FOTON_MAX);
fclose(arqF);
fclose(arqF2);
fclose(arqF3);
fclose(arqF4);
fclose(arqF5);
fclose(arqF10);
fclose(arqI);
fclose(arqT);
fclose(arq1);
fclose(arqVEL);
fclose(arqVEL);

Tr=1.0*PTr/FOTON_MAX;
printf("%e %d\n",Tr,PTr>1);
system("pause");
return 0;
}

/*****
/* RandomGen
/*      A random number generator that generates uniformly
/* *      distributed random numbers between 0 and 1 inclusive.
/* *      The algorithm is based on:
/* *      W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P.
/* *      Flannery, "Numerical Recipes in C," Cambridge University
/* *      Press, 2nd edition, (1992).
/* *      and
```

Programa em linguagem C da difusão dos fótons em um vapor atômico de rubi 138

```
/*      D.E. Knuth, "Seminumerical Algorithms," 2nd edition, vol. 2
/*      of "The Art of Computer Programming", Addison-Wesley, (1981).
/*
/*      When Type is 0, sets Seed as the seed. Make sure 0<Seed<32000.
/*      When Type is 1, returns a random number.
/*      When Type is 2, gets the status of the generator.
/*      When Type is 3, restores the status of the generator.
/*
/*      The status of the generator is represented by Status[0..56]./
/*
/*      Make sure you initialize the seed before you get random
/*      numbers.
// ****/
#define MBIG 1000000000
#define MSEED 161803398
#define MZ 0
#define FAC 1.0E-9

double RandomGen(char Type, long Seed, long *Status)
{
    static long i1, i2, ma[56]; /* ma[0] is not used. */
    long      mj, mk;
    short     i, ii;

    if (Type == 0) { /* set seed. */
        mj = MSEED - (Seed < 0 ? -Seed : Seed);
        mj %= MBIG;
        ma[55] = mj;
        mk = 1;
        for (i = 1; i <= 54; i++) {
            ii = (21 * i) % 55;
            ma[ii] = mk;
            mk = mj - mk;
            if (mk < MZ)
                mk += MBIG;
            mj = ma[ii];
        }
        for (ii = 1; ii <= 4; ii++)
            for (i = 1; i <= 55; i++) {
                ma[i] -= ma[1 + (i + 30) % 55];
                if (ma[i] < MZ)
                    ma[i] += MBIG;
            }
        i1 = 0;
        i2 = 31;
    } else if (Type == 1) { /* get a number. */
        if (++i1 == 56)
            i1 = 1;
        if (++i2 == 56)
```

```
    i2 = 1;
    mj = ma[i1] - ma[i2];
    if (mj < MZ)
        mj += MBIG;
    ma[i1] = mj;
    return (mj * FAC);
} else if (Type == 2) {      /* get status. */
    for (i = 0; i < 55; i++)
        Status[i] = ma[i + 1];
    Status[55] = i1;
    Status[56] = i2;
} else if (Type == 3) {      /* restore status. */
    for (i = 0; i < 55; i++)
        ma[i + 1] = Status[i];
    i1 = Status[55];
    i2 = Status[56];
} else
    puts("Wrong parameter to RandomGen().");
return (0);
}
#undef MBIG
#undef MSEED
#undef MZ
#undef FAC
```

APÊNDICE I

GERAÇÃO DE DADOS PARA O PERFIL DE ABSORÇÃO DO RUBÍDIO

Este arquivo gera os dados que serão utilizados na simulação Monte Carlo para difusão de fótons em um vapor atômico de rubídio.

```
#include <math.h>
#include <stdio.h>
//#include <iostream>
#define SWAP(a,b) {temp=(a);(a)=(b);(b)=temp;}

int main(void)
{

FILE      *arq;
    arq=fopen("Coeficiente.dat","w");

    double gama,muu,eo,hr,k,T,u85,u87,N,l;
    double delta,aux871,au871,Ctau871,v,ff,fg,fh,WV87,WV85;
    double au872,aux872,Ctau872;
    double au852,aux852,Ctau852;
    double au853,aux853,Ctau853;

gama=38.117E6/6.24;
muu=3.584E-29;
eo=8.854E-12;
hr=1.054E-34;
k=1./(780.241E-9);
T=273.+27.;
N=2.E20;
l=780.241E-9;
u87=sqrt(2.*1.3806E-23*T/(1.66E-27*86.9));
u85=sqrt(2.*1.3806E-23*T/(1.66E-27*84.9));
printf("%e\n",u85);
printf("%e %e\n",k,k*u85);
```

```

system("pause");
for (delta=-10.E9;delta<=10.E9;delta+=5.E7){
  au871=0.;
  Ctau871=0.;
  au872=0.;
  Ctau872=0.;
  au852=0.;
  Ctau852=0.;
  au853=0.;
  Ctau853=0.;

  for(v=-2000.;v<=2000.;v+=0.1){

    \\Rubidio 87
    ff=delta-k*v;
    WV87=1./((sqrt(3.14)*u87)*exp(-v*v/(u87*u87)));
    aux871=6.24*384230E9/3E8*0.28/6.24*WV87*muu*muu*gama/(2.*eo*hr)*3./16.*(1./(ff*ff+gama*gama/4.));
    Ctau871+=(au871+aux871)*0.1;
    au871=aux871;
    aux872=6.24*384230E9/3E8*0.28/6.24*WV87*muu*muu*gama/(2.*eo*hr)*5./16.*(1./((ff+6.834E9)*(ff+6.834E9)+gama*gama/4.));
    Ctau872+=(au872+aux872)*0.1;
    au872=aux872;

    \\Rubidio 85
    fg=ff+2.389E9;
    WV85=1./((sqrt(3.14)*u85)*exp(-v*v/(u85*u85)));
    aux852=6.24*384230E9/3E8*0.72/6.24*WV85*muu*muu*gama/(2.*eo*hr)*5./24.*(1./(fg*fg+gama*gama/4.));
    Ctau852+=(au852+aux852)*0.1;
    au852=aux852;
    aux853=6.24*384230E9/3E8*0.72/6.24*WV85*muu*muu*gama/(2.*eo*hr)*7./24.*(1./((fg+3.035E9)*(fg+3.035E9)+gama*gama/4.));
    Ctau853+=(au853+aux853)*0.1;
    au853=aux853;

  }

  //fprintf(arq,"%e %e %e %e %e\n",delta*(-1.0),Ctau871,Ctau872,Ctau852,Ctau853);
  //fprintf(arq,"%e %e %e\n",delta*(-1.0),Ctau852,Ctau853);
  fprintf(arq,"%e %e %e\n",delta*(-1.0),Ctau871,Ctau872);
}

fclose(arq);
system("pause");
return 0;
}

```

APÊNDICE J

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA EM LINGUAGEM C PARA O CÁLCULO DA DISTRIBUIÇÃO DOS PASSOS DO FÓTON EM UM VAPOR ATÔMICO

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

// constantes
#define escala_A      (0,412857041*pow(10.0,-13)) /* T=301K, escala para metros */
#define PI            (3.1415926535897932384626433832795)
#define two_PI       (6.283185307179586476925286766559)
#define one_over_PI  (0.15915494309189533576888376337251)
#define one_over_sqrt_PI (0.56418958354775628694807945156077)
#define one_over_sqrt_2PI (0.39894228040143267793994605993438)

// parametros funcionais
#define detuningPICO  (two_PI*0.7*0.1)
#define detuningBURACO (two_PI*0.7*0.25)
#define detuning     (two_PI*0.7*0.5)
#define Amp          (0.1)
#define width        (two_PI*0.7/300) /* largura do laser, em rad/s */
#define sigma        (two_PI*0.700) /* 700 MHz (Doppler) */
#define Gamma        (two_PI*0.0060666) /* natural linewidth of Rb87 */

// -----
// parametros numericos
// -----
// n: nmero de pontos no perfil Voigt
```

```

#define n (6000)
// h: passo da integrao no perfil Voigt
#define h (0.25)
// iv_x: valor inicial da dessintonizao (extremo inferior)
#define iv_x (-h*n/2)
// nmero de pontos no grfico
#define num_r (600)
// valores inicial e final do eixo x no grfico
#define r_min (1.0)
#define r_max (1e7)

// -----
// variaveis
// -----
// Perfil de Gauss
static double Qv[n],deriv[n],y[n],t[n];
// Aboro do meio
static double Qa[n];
// dessintonizao
static double x;
// Probabilidade de um passo
static double F[n];
// probabilidade de dar um passo de tamanho at r
static double Q[num_r];
// valores do tamanho de passo (grfico)
static double r[num_r];

// apontador para funo usada no integrador
double (*fp)(double);
// apontador para arquivo de saida
FILE *outfile, *outfile2;

//-----
// funcoes
//-----
double GAUSS(const double X, const double SIGMA)
{ return one_over_sqrt_2PI/SIGMA*exp(-X*X/2.0/SIGMA); }

double LORENTZ(const double X, const double gamma)
{ return one_over_PI*gamma/(gamma*gamma+X*X); }

double g(const double X, const double X0, const double gamma)
{
    //return GAUSS(X)+Amp*LORENTZ(X, detuning, width);
    return GAUSS(X,sigma)+Amp*LORENTZ(X-X0, gamma);
    //return GAUSS(X,sigma)+Amp*LORENTZ(X-X0, gamma)+Amp*LORENTZ(X+X0, gamma);
}

```

```
// convolucao entre duas funcoes: Gauss e Lorentz
double CONVOLVE(double (*funG)(double, double), double (*funL)(double, double), const double X)
{
    long i; double x, sum;
    for (i=0,x=iv_x, sum=0.0; i<n; i++)
    {
        sum += h*((*funG)(x,sigma))*((*funL)(X-x,Gamma))+((*funG)(x+h,sigma))*((*funL)(X-x-h,Gamma))/2;
        x += h;
    }
    return sum;
}

int main(argc, argv)
    char argc, **argv;
{
    long i, j;
    double r_step;
    char outfilename[256];
    char outfilename2[256];
    double (*funG)(double,double), (*funL)(double, double);

    funG = &GAUSS;
    funL = &LORENTZ;
    printf("\n\nPrograma para integracao numerica da distribuicao de tamanho\n");
    printf("\tde passos na reemissao de fotons por um vapor atômico\n");

    // cria um arquivo .dat para guardar resultados
    sprintf(outfilename,"numer_integr_det%.3lg_Amp%.3lg_w%.3lg.dat", detuning,
                                                    Amp, width);
    sprintf(outfilename2,"derivada.dat");

    printf("\n criando arquivo de saida: %s\n",outfilename);

    if (NULL==(outfile=fopen(outfilename,"wt")))
    {
        printf("\nHuh?! could not create file %s\n\n",outfilename);
        exit(2);
    }
    if (NULL==(outfile2=fopen(outfilename2,"wt")))
    {
        printf("\nHuh?! could not create file %s\n\n",outfilename2);
        exit(2);
    }

    printf("\natribuindo valores iniciais as variaveis:\n");
```

```

// atribuicao de valores iniciais
x = iv_x;
r_step = exp(log(r_max/r_min)/num_r);
printf("\tdessintonizacao inicial = %lg, passo de frequencia = %lg\n",
        x, h);
printf("gerando distribuicoes de emissao e absorcao\n");
// clculo das distribuies
for (i=0; i<n; i++)
{
    //espectros de radiacao incidente e de absorcao modificaods

    //Qv[i] = g(x,detuning,width); // espectro >>> (Gauss+Lorentz)
    //Qv[i] = g(x,detuning,width)*g(x,detuning,width);
    //Qv[i] = LORENTZ(x,width);
    Qv[i] = GAUSS(x,sigma);
    //Qv[i] = g(x,detuning,width); // espectro da radiao com dois picos laser simetricos
    // pure Lorentzian
    //Qv[i] = LORENTZ(x,Gamma);
    //Qv[i] = CONVOLVE(funG, funL, x)+Amp*LORENTZ(x-detuning, width)+Amp*LORENTZ(x+detuning, width);
    //Qv[i] = CONVOLVE(funG, funL, x);//FUN(x[i]); // Absoro atmica (Voigt = convoluao entre Gaussiana e Lorentziana)
    //Qa[i] = GAUSS(x,sigma)*(1.0-Amp*LORENTZ(x-detuning,width));
    //Qa[i] = CONVOLVE(funG, funL, x)*(1.0-Amp*LORENTZ(x-detuning,width));
    //Qa[i] = CONVOLVE(funG, funL, x)*(1.0-Amp*LORENTZ(x-detuningBURACO,width));
    Qa[i] = CONVOLVE(funG, funL, x)*(1.0-Amp*LORENTZ(x-detuning,width))*(1.0-Amp*LORENTZ(x+detuning,width));
    //Qa[i] = Qv[i]; //GAUSS(x,sigma);
    //Qa[i] = CONVOLVE(funG, funL, x)*(1.0-Amp*LORENTZ(x-detuning,width))*(1.0-Amp*LORENTZ(x-detuning,width));
    x += h;
}

printf("calculando distribuicao de tamanho de passo:\n");
// clculo da distribuio de tamanho dos passos
r[0] = r_min;
for (i=0; i<n; i++)
{
    F[i] = Qv[i]*Qa[i]*exp(-r[0]*Qa[i]);
}
// integral (prob. cumulativa) usando mtodo dos trapzios
for (i=0, Q[0]=0.0; (i<n-1); i++)
{
    Q[0] += h*(F[i]+F[i+1])/2;
}
printf("r[%d] = %lg\t\tQ[j] = %lg\n", 0, r[0], 0, Q[0]);
for (j=1; j<num_r; j++)
{
    r[j] = r[j-1]*r_step;
    for (i=1; i<n; i++)
    {
        F[i] = Qv[i]*Qa[i]*exp(-r[j]*Qa[i]);
    }
}

```

```
    }
    // integral (prob. cumulativa) usando mtodo dos trapezios
    for (i=0, Q[j]=0.0; (i<n-1); i++)
    {
        Q[j] += h*(F[i]+F[i+1])/2;
    }
    fprintf(outfile, "%lg\t%lg\n", log10(escala_A*r[j]), log10(Q[j]));
    if ((j%10)==0) printf("r[%d] = %lg\t\tQ[j] = %lg\n", j, r[j], j, Q[j]);
    fflush(outfile);
}

for (i=0; i<600; i++)
{
y[i]=log10(Q[i]);
t[i]=log10(r[i]);
}

//derivada
for (i=0; i<600; i++)
{
deriv[i]=(y[i]-y[i-1])/(t[i]-t[i-1]);
fprintf(outfile2, "%lg\t%lg\n", log10(escala_A*r[i]), -deriv[i]);
}

fclose(outfile);
fclose(outfile2);

printf("Pronto! resultado salvo no arquivo: %s\n\n", outfilename);
return 0;
}
```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Martine Chevrollier. Radiation trapping and lévy flights in atomic vapours: an introductory review. *Contemporary Physics*, 53(3):227–239, 2012.
- [2] Jong-Sen Lee. Monte carlo simulation of emission frequencies from partial frequency redistribution functions. *The Astrophysical Journal*, 192:465–474, 1974.
- [3] HM Anderson, SD Bergeson, DA Doughty, and JE Lawler. Xenon 147-nm resonance f value and trapped decay rates. *Physical Review A*, 51(1):211, 1995.
- [4] Andreas F Molisch, Greg J Parker, Bernhard P Oehry, Walter Schupita, and Gottfried Magerl. Radiation trapping with partial frequency redistribution: Comparison of approximations and exact solutions. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 53(3):269–275, 1995.
- [5] To Holstein. Imprisonment of resonance radiation in gases. *Physical Review*, 72(12):1212, 1947.
- [6] Pierre Barthelemy, Jacopo Bertolotti, and Diederik S Wiersma. A lévy flight for light. *Nature*, 453(7194):495–498, 2008.
- [7] Karl T Compton. Theory of ionization by cumulative action and the low voltage arc. *Physical Review*, 20(4):283, 1922.
- [8] EA Milne. The diffusion of imprisoned radiation through a gas. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(1):40–51, 1926.

- [9] Mark W Zemansky. The diffusion of imprisoned resonance radiation in mercury vapor. *Physical Review*, 29(4):513, 1927.
- [10] MW Zemansky. New experimental determination of effective cross-sections for the quenching of mercury resonance radiation. *Physical Review*, 36(5):919, 1930.
- [11] Carl Kenty. On radiation diffusion and the rapidity of escape of resonance radiation from a gas. *Physical Review*, 42(6):823, 1932.
- [12] Eduardo Pereira, José MG Martinho, and Mário N Berberan-Santos. Photon trajectories in incoherent atomic radiation trapping as lévy flights. *Physical review letters*, 93(12):120201, 2004.
- [13] Frederic Bartumeus, Jordi Catalan, UL Fulco, ML Lyra, and GM Viswanathan. Optimizing the encounter rate in biological interactions: Lévy versus brownian strategies. *Physical Review Letters*, 88(9):097901, 2002.
- [14] Dirk Brockmann, Lars Hufnagel, and Theo Geisel. The scaling laws of human travel. *Nature*, 439(7075):462–465, 2006.
- [15] Stanislav Boldyrev and Carl R Gwinn. Lévy model for interstellar scintillations. *Physical review letters*, 91(13):131101, 2003.
- [16] Alberto Galindo and Pedro Pascual. Quantum mechanics, volume i and ii. 1990.
- [17] Michel Le Bellac. *Quantum physics*. Cambridge University Press, 2006.
- [18] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Frank Laloe. Quantum mechanics, vol. 1977.
- [19] John Weiner and P-T Ho. *Light-matter interaction, Fundamentals and applications*, volume 1. John Wiley & Sons, 2008.
- [20] Robert W Boyd. *Nonlinear optics*. Academic press, 2003.
- [21] Malin Premaratne and Govind P Agrawal. *Light propagation in gain media*. Cambridge University Press New York, 2011.
- [22] C Cohen-Tannoudji, J Dupont-Roc, and G Grynberg. Processus d'interaction entre photons et atomes, intereditions/ditions du cnrs, paris, 1988. *Ces livres nouveaux*

- (celui-ci et le precedent) sont trs dtails, mais ne couvrent que ltude du champ de radiation et son interaction avec les atomes, 1992.
- [23] Jun John Sakurai, San-Fu Tuan, and Eugene D Commins. Modern quantum mechanics. *American Journal of Physics*, 63:93, 1995.
- [24] Leslie C Allen. *Optical Resonance and Two-Level Atoms*. Dover publications, 1975.
- [25] David Jeffrey Griffiths and Reed College. *Introduction to electrodynamics*, volume 3. prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 1999.
- [26] Christopher Foot. Atomic physics. 2008.
- [27] Rodney Loudon. *The quantum theory of light*. Oxford university press, 2000.
- [28] Orazio Svelto. *Principles of lasers*. Springer, 2010.
- [29] Natsuki Hashitsume, Morikadzu Toda, Ryōgo Kubo, and Nobuhiko Saitō. *Statistical physics II: nonequilibrium statistical mechanics*, volume 30. Springer, 1992.
- [30] Wikipedia. Stimulated emission — wikipedia the free encyclopedia, 2013. [Online; accessed 12-December-2013].
- [31] Claude Cohen-Tannoudji, Jacques Dupont-Roc, Gilbert Grynberg, and Pierre Meystre. Atom-photon interactions: Basic processes and applications. *Physics Today*, 45:115, 1992.
- [32] W Demtröder. *Atoms, Molecules and Photons: An Introduction to Atomic-, Molecular-and Quantum Physics*. Springer, 2010.
- [33] H Frisch. Non-lte transfer. v-the asymptotics of partial redistribution. *Astronomy and Astrophysics*, 83:166–183, 1980.
- [34] AR Alves-Pereira, EJ Nunes-Pereira, JMG Martinho, and MN Berberan-Santos. Photonic superdiffusive motion in resonance line radiation trapping partial frequency redistribution effects. *The Journal of chemical physics*, 126:154505, 2007.
- [35] AK Kazansky, NN Bezuglov, AF Molisch, F Fuso, and M Allegrini. Direct numerical method to solve radiation trapping problems with a doppler-broadening mechanism for partial frequency redistribution. *Physical Review A*, 64(2):022719, 2001.

- [36] William Feller. The fundamental limit theorems in probability. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 51(11):800–832, 1945.
- [37] Linda E Reichl and Ilya Prigogine. *A modern course in statistical physics*, volume 71. University of Texas press Austin, 1980.
- [38] Sílvio RA Salinas. *Introdução a Física Estatística Vol. 09*. Edusp, 1997.
- [39] Joseph Klafter, Michael F Shlesinger, and Gert Zumofen. Beyond brownian motion. *Physics Today*, 49:33, 1996.
- [40] Matteo Burrelli, Vivekananthan Radhalakshmi, Romolo Savo, Jacopo Bertolotti, Kevin Vynck, and Diederik S Wiersma. Weak localization of light in superdiffusive random systems. *Physical review letters*, 108(11):110604, 2012.
- [41] Micheal F Shlesinger, George M Zaslavsky, and Uriel Frisch. Lévy flights and related topics in physics. In *Levy flights and related topics in Physics*, volume 450, 1995.
- [42] Nicolas Mercadier, William Guerin, Martine Chevrollier, and Robin Kaiser. Lévy flights of photons in hot atomic vapours. *Nature physics*, 5(8):602–605, 2009.
- [43] Nicolas Mercadier, Martine Chevrollier, William Guerin, and Robin Kaiser. Microscopic characterization of lévy flights of light in atomic vapors. *arXiv preprint arXiv:1305.1714*, 2013.
- [44] Jonathan Higgins. School of physics. 2009.
- [45] H Frisch. Partial frequency redistribution of polarized radiation. *Solar Physics*, 164(1-2):49–66, 1996.
- [46] Brian H Bransden and C Charles Jean Joachain. *Physics of atoms and molecules*. Pearson Education India, 2003.
- [47] Sérgio Carlos Zílio. *Óptica moderna: fundamentos e aplicações*. Instituto de Física de São Carlos, 2009.
- [48] Wikipedia. Rubídio — wikipedia, a enciclopedia livre, 2013. [Online; accessed 16-dezembro-2013].

- [49] Sebastian Kraft, Felix Vogt, Oliver Appel, Fritz Riehle, and Uwe Sterr. Bose-einstein condensation of alkaline earth atoms: ~ 40 ca. *Physical review letters*, 103(13):130401, 2009.
- [50] Mingwu Lu, Nathaniel Q Burdick, Seo Ho Youn, and Benjamin L Lev. Strongly dipolar bose-einstein condensate of dysprosium. *Physical review letters*, 107(19):190401, 2011.
- [51] Mike H Anderson, Jason R Ensher, Michael R Matthews, Carl E Wieman, and Eric A Cornell. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor. *science*, 269(5221):198–201, 1995.
- [52] CC Bradley, CA Sackett, JJ Tollett, and RG Hulet. Evidence of bose-einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. *Physical Review Letters*, 75(9):1687, 1995.
- [53] CC Bradley, CA Sackett, and RG Hulet. Bose-einstein condensation of lithium: Observation of limited condensate number. *Physical Review Letters*, 78(6):985, 1997.
- [54] Wikipedia. Isotopes of rubidium — wikipedia, the free encyclopedia, 2013. [Online; accessed 16-December-2013].
- [55] Gilbert Grynberg, Alain Aspect, and Claude Fabre. *Introduction to quantum optics: from the semi-classical approach to quantized light*. Cambridge university press, 2010.
- [56] Anthony E Siegman. *Lasers*. mill valley, 1986.
- [57] C Masoller, M Oria, and R Vilaseca. Modeling a semiconductor laser with an intracavity atomic absorber. *Physical Review A*, 80(1):013830, 2009.
- [58] LB Barbosa, T Sorrentino, DN Ferreira, D Reyes Ardila, M Chevrollier, and M Oriá. Semiconductor laser with extended cavity and intracavity atomic filter. *Optics letters*, 32(13):1869–1871, 2007.
- [59] Samuel Bezerra Alves. Dinâmica em frequência de laser semiconductor sob realimentação ótica ortogonal filtrada. *Dissertação de Mestrado*, 2012.
- [60] Michelle Oliveira de Araújo. Investigação experimental e modelo teórico para índice de refração não-linear da linha d_2 do césio. *Dissertação de Mestrado*, 2013.

- [61] William T Silfvast. *Laser fundamentals*. Cambridge University Press, 2004.
- [62] Weliton Soares Martins, Hugo LD de S Cavalcante, Thierry Passerat de Silans, Marcos Oriá, and Martine Chevrollier. Two-beam nonlinear kerr effect to stabilize laser frequency with sub-doppler resolution. *Applied Optics*, 51(21):5080–5084, 2012.
- [63] Frederick Reif and F Reif. *Fundamentals of statistical and thermal physics*, volume 1. McGraw-Hill New York, 1965.
- [64] Wikipédia. Cadeias de markov — wikipédia, a enciclopédia livre, 2013. [Online; accessed 26-dezembro-2013].
- [65] William E Boyce, Richard C DiPrima, and Charles W Haines. *Elementary differential equations and boundary value problems*, volume 9. Wiley New York, 1992.
- [66] Silvio RA Salinas. Einstein, o atomismo ea teoria do movimento browniano. *Revista USP*, (66):38–43, 2005.
- [67] JM Silva and JAS Lima. Quatro abordagens para o movimento browniano. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29(1):25–35, 2007.
- [68] Wikipédia. Vizinhana (física) — wikipédia, a enciclopédia livre, 2013. [Online; accessed 29-dezembro-2013].
- [69] Herch Moysés NUSSENZVEIG. Curso de física básica-vol. 2, fluidos; oscilações e ondas; calor. *Ed Edgard Blücher, RJ*, 2002.
- [70] N Carlin, EM Szanto, WA Seale, FO Jorge, FA Souza, IH Bechtold, and LR Gasques. Birrefringência em placas de onda e atividade óptica de uma solução de açúcar. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 27(3):349–355, 2005.
- [71] Matt Young. *Óptica e lasers*, volume 15. Edusp, 1998.
- [72] Wikipédia. Isolador óptico — wikipédia, a enciclopédia livre, 2013. [Online; accessed 19-dezembro-2013].