Horácio Santana Vieira

Estudos relativos à influência de campos gravitacionais de buracos negros sobre sistemas quânticos

João Pessoa, PB, Brasil

28 de Fevereiro de 2014

Horácio Santana Vieira

Estudos relativos à influência de campos gravitacionais de buracos negros sobre sistemas quânticos

Dissertação apresentada a Coordenação do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física da Universidade Federal da Paraíba, em complementação aos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física

Orientador: Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra

João Pessoa, PB, Brasil

28 de Fevereiro de 2014

V658e Vieira, Horácio Santana.
Estudos relativos à influência de campos gravitacionais de buracos negros sobre sistemas quânticos / Horácio Santana Vieira.-- João Pessoa, 2014.
109p.
Orientador: Valdir Barbosa Bezerra
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Física. 2. Buraco negro. 3. Campo escalar massivo. 4.Equação de Klein-Gordon. 5. Equação diferencial de Heun. 6. Buraco negro - radiação.

UFPB/BC CDU: 53(043)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO
mestrado

A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 28 de fevereiro de 2014, na Sala de Reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, APROVA COM DISTINÇÃO **Horácio Santana Vieira** na defesa de sua dissertação intitulada "*Estudos relativos à influência de campos gravitacionais de buracos negros sobre sistemas quânticos*".

João Pessoa, 28 de fevereiro de 2014

Orientador:

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
(UFPB)

1º Examinador:

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
(UFPB)

2º Examinador:

Prof. Dr. Marcelo J. Rebouças
(CBPF)

Ata da Sessão Pública da Defesa de Dissertação de **Mestrado** do aluno **Horácio Santana Vieira**, candidato ao Título de Mestre em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

Aos vinte e oto dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e quatorze, às 10h00, na sala de reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Mestre em Física na área de Gravitação e Cosmologia, **Horácio Santana Vieira**. A comissão examinadora composta pelos professores doutores: Valdir Barbosa Bezerra (DF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Carlos Augusto Romero Filho (DF/UFPB) e Marcelo J. Rebouças (CBPF). Dando início aos trabalhos, o Prof. Valdir Barbosa Bezerra comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação intitulado "*Estudos relativos à influência de campos gravitacionais de buracos negros sobre sistemas quânticos*". Concluída a exposição, o candidato foi argüido pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte parecer: **"aprovado com distinção".** Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, servindo de Secretário, redigiu a presente ata que vai assinada pelo mesmo e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, **28 de fevereiro de 2014**.

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
Orientador - DF/UFPB

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
DF/UFPB

Prof. Dr. Marcelo J. Rebouças
CBPF

Danilo Wilson Lemos Menezes
Secretário

Agradecimentos

Os agradecimentos principais são direcionados aos meus pais que me deram a vida e a formação necessária para que eu pudesse chegar até aqui. Aos nossos familiares e amigos que sempre me incentivaram nesse longo caminho. Outra pessoa extremamente relevante foi a Profa. Flávia Jerônimo - DM/UFPB, a quem devo todo início dessa minha caminhada. Mas, nada disso seria possível se não houvesse o Prof. Valdir, que me vem orientando desde o início da minha graduação e que, desde então, passou a ser mais que um mero professor orientador, mas sim, um verdadeiro mentor na minha vida. A todos os integrantes do grupo de Gravitação e Cosmologia da UFPB, em especial Herondy, João Paulo e Gislaine, além do professor Celio Muniz - UECE pela ajuda e discussões que contribuíram bastante para meu aprendizado.

Agradecimentos especiais são direcionados ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba pela acolhida e suporte para a realização deste trabalho. E por fim, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro.

Resumo

Nesta dissertação tratamos da influência do campo gravitacional produzido pelos buracos negros de Kerr-Newman e Kerr-Newman-de Sitter sobre um campo escalar massivo com e sem carga. Obtemos as soluções exatas da parte radial da equação de Klein-Gordon em um espaço-tempo de Kerr-Newman, que são dadas em termos das funções confluentes de Heun. No caso particular correspondente ao buraco negro de Kerr-Newman extremo, a solução é dada em termos das funções duplamente confluentes de Heun. Investigamos, também, as soluções nas proximidades do horizonte de evento exterior e longe do buraco negro.

Para um campo escalar massivo carregado, obtemos as soluções exatas para a parte angular da equação de Klein-Gordon em um espaço-tempo de Kerr-Newman-de Sitter, que são dadas em temos das funções de Heun. Utilizando o método de Damour & Ruffini, estudamos a radiação Hawking para partículas escalares massivas.

No buraco negro de Kerr-Newman, obtemos as soluções exatas de ambas as partes radial e angular da equação de Klein-Gordon, que são dadas em termos das funções confluentes de Heun. A partir da solução radial, obtemos as soluções de ondas exatas próximas ao horizonte exterior do buraco negro e discutimos a radiação Hawking para partículas escalares massivas carregadas.

Palavras-chaves: buraco negro. campo escalar massivo. equação de Klein-Gordon. equação diferencial de Heun. radiação de buraco negro.

Abstract

In this dissertation we consider the influence of gravitational fields due to the black holes of Kerr-Newman and Kerr-Newman-de Sitter, on a massive scalar field, with and without charge. We obtain the exact solutions of the radial Klein-Gordon equation in the spacetime of Kerr-Newman which are given in terms of the confluent Heun functions. In the particular case of a extreme Kerr-Newman black hole, the solution is given in terms of double confluent Heun functions. We also investigate the solutions close to the exterior event horizon and very far from the black hole.

For a charged scalar field, we obtain exact solutions corresponding to the angular Klein-Gordon equation in the Kerr-Newman-de Sitter spacetime which are given in terms of the Heun functions. Using a method due to Damour and Ruffini, we study the Hawking radiation of massive scalar particles.

In the Kerr-Newman black hole, we obtain the exact solutions for both the angular and radial Klein-Gordon equations, which are given in terms of the confluent Heun functions. From the radial solution, we obtain the exact wave solutions near to the exterior horizon of the black hole, and discuss the Hawking radiation of charged massive scalar particles.

Keywords: black hole. massive scalar field. Klein-Gordon equation. Heun's differential equation. black hole radiation.

Sumário

1 Introdução 15

2 Sistemas quânticos em espaços-tempo curvos 19

2.1 Equações de campo da relatividade geral 19

2.2 Influência de campos gravitacionais sobre sistemas quânticos 23

2.2.1 Equação de Schrödinger 23

2.2.2 Equação de Klein-Gordon 24

2.2.3 Equação de Dirac 25

3 Equações diferenciais de Heun 29

3.1 Equação diferencial de Heun 30

3.1.1 Forma canônica 30

3.1.2 Tipos de soluções da equação de Heun 32

3.1.3 Transformações da equação de Heun 32

3.1.3.1 Transformação de uma equação com quatro singularidades regulares para a forma de Heun 33

3.1.3.2 Forma trigonométrica da equação geral de Heun 35

3.1.4 Os casos confluentes da equação de Heun 35

3.1.4.1 Derivação da equação confluente 36

3.1.4.2 Formas normais 37

3.2 Equação confluente de Heun 37

3.2.1 Forma canônica 38

3.2.2 Forma normal 38

3.2.3 Expansão em séries de potências em torno das singularidades regulares $z = 0, 1$ 40

3.2.4 Séries assintóticas em $z \to \infty$ 41

3.2.5 Soluções polinomiais 42

3.3 Equação duplamente confluente de Heun 43

3.3.1 Forma canônica 43

3.3.2 Forma normal 43

4 A equação de Klein-Gordon em um buraco negro de Kerr-Newman 45

4.1 A métrica de Kerr-Newman 45

4.2 Equações de movimento: campo escalar massivo 46

4.3 A equação angular 47

4.4 A equação radial 49

4.4.1 Soluções aproximadas . . . 51
4.4.1.1 Caso 1. $x \to 0$ . . . 51
4.4.1.2 Caso 2. $x \to \infty$ . . . 52
4.4.2 Soluções aproximadas em coordenadas padrão . . . 52
4.4.2.1 Caso 1. $x \to 0$ . . . 52
4.4.2.2 Caso 2. $x \to \infty$ . . . 53
4.4.3 Casos especiais . . . 54
4.4.3.1 Caso 1. $F = 0$ . . . 54
4.4.3.2 Caso 2. $\mu^2 = \omega^2$ . . . 55
4.4.3.3 Caso 3. O buraco negro de Schwarzschild . . . 55
4.5 Solução analítica da equação radial . . . 57
4.5.1 Solução analítica em coordenadas padrão . . . 58
4.5.2 Limites assintóticos da solução analítica em coordenadas padrão . . . 58
4.5.2.1 Caso 1. $x \to 0$ . . . 59
4.5.2.2 Caso 2. $x \to \infty$ . . . 59
4.5.3 Níveis de energia . . . 60
4.5.4 O espaço-tempo de Kerr-Newman extremo . . . 60
4.6 O buraco negro de Schwarzschild . . . 62
4.6.1 A equação angular . . . 63
4.6.2 A equação radial . . . 63
4.6.3 Níveis de energia . . . 64
4.7 Equações de movimento: campo escalar massivo carregado . . . 64
4.8 Equação angular . . . 66
4.9 Equação radial . . . 68
4.10 Conclusões parciais . . . 71

5 A equação de Klein-Gordon e a radiação Hawking em um buraco negro de Kerr-Newman-de Sitter . . . 73
5.1 A métrica de Kerr-Newman-de Sitter . . . 74
5.2 Termodinâmica de um buraco negro de Kerr-Newman-de Sitter . . . 77
5.3 Equações de movimento: campo escalar massivo carregado . . . 78
5.4 A equação angular . . . 79
5.5 A equação radial: transformação de coordenadas “tortoise” . . . 81
5.6 A radiação Hawking . . . 82
5.7 Extensão analítica . . . 83
5.8 Espectro da radiação . . . 84
5.9 Conclusões parciais . . . 86

6 A radiação Hawking em um buraco negro de Kerr-Newman . . . 89
6.1 Termodinâmica de um buraco negro de Kerr-Newman . . . 89

6.2 A radiação Hawking 90
6.3 Extensão analítica 92
6.4 Espectro da radiação 92
6.5 Conclusões parciais 94

7 Conclusões e perspectivas 95

Referências 97

Apêndices 105

APÊNDICE A Notações, definições e convenções 107
A.1 Vetores, tensores e operadores 107
A.2 Notação de Dirac 108

APÊNDICE B Função degrau de Heaviside 109

1 Introdução

O estudo da interação de sistemas quânticos com campos gravitacionais remonta ao início do século passado, quando a generalização da mecânica quântica para espaços curvos foi discutida, motivada pela ideia de construir uma teoria combinando física quântica e relatividade geral [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. Ao longo desta linha de pesquisa, a investigação das soluções da equação de Klein-Gordon em vários campos gravitacionais, assim como suas consequências, vem sendo discutidos na literatura [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]. Vale a pena enfatizar que o estudo do comportamento de campos escalares em espaços-tempo de buracos negros pode ser utilizado, em princípio, para entender a física destes objetos. Portanto, é importante encontrar soluções da equação de Klein-Gordon para campos reais assim como para campos complexos e analisar os fenômenos relacionados a elas, como por exemplo, a radiação de partículas escalares.

A radiação Hawking [23] é um interessante fenômeno e consiste na emissão de quaisquer tipos de partículas por buracos negros. Pares de partículas virtuais seriam produzidos por flutuações de vácuo próximas à superfície do horizonte de evento exterior de um buraco negro. Quando as partículas com energia negativa entram no buraco negro através de efeito túnel, a energia do buraco negro irá decrescer. No mesmo momento, a partícula com energia positiva poderá passar para a região exterior ao buraco negro, ou seja, o buraco negro irradia uma partícula. Foi demonstrado por Gibbons & Hawking [24] que o espectro de energia da radição é exatamente térmica. A radiação Hawking ou efeito Hawking demonstra que o buraco negro já não é o último estágio de uma estrela, mas que esse ainda evoluirá. Em particular, a emissão de partículas escalares foi também discutida na literatura [25, 26, 27]. A fim de estudar este fenômeno, vários métodos diferentes foram propostos [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35].

Conhecer o comportamento de sistemas quânticos que interagem com campos gravitacionais também é um elemento útil para se ter uma melhor compreensão da relevância, não somente do papel dos campos gravitacionais em nível quântico, mas de modo geral, dos efeitos potencialmente observáveis da geometria e da topologia dos espaços-tempo associados a campos gravitacionais, sobre o mundo atômico. Portanto, a investigação a respeito da interação entre um sistema quântico de qualquer natureza, a saber, não-relativístico ou relativístico, com campos gravitacionais, passa pela consideração tanto das características geométricas quanto topológicas destes campos.

Por outro lado, visto que todo sistema físico nos leva a uma equação diferencial parcial (EDP) ou ordinária (EDO), se faz necessária a utilização de ferramentas matemáticas para resolver essas equações e para entender o significado das mesmas. Assim, nesta

linha de pesquisa, quase sempre somos levados às equações especiais da física-matemática. Dentre elas, neste trabalho de dissertação, vamos lidar principalmente com as equações diferenciais de Heun, descobertas por Karl Heun em 1889 [36]. As funções de Heun [37] aparecem com frequência cada vez maior na física moderna. Por exemplo, elas surgem na equação de Schrödinger com potencial inarmônico, na molécula de água, no efeito Stark, em diferentes fenômenos quânticos relacionados com os níveis de atração e repulsão, na teoria do movimento lunar, na física gravitacional, em particular, em ondas gravitacionais nas métricas de Schawarzschild e Kerr, no eletromagnetismo, em materiais cristalinos, em ondas tri-dimensionais na atmosfera, etc., só para mencionar alguns [38].

Nesta dissertação, iremos considerar uma classe de soluções das equações de Einstein, a saber, os espaços-tempo gerados pelos buracos negros de Kerr-Newman, Kerr-Newman extremo e Kerr-Newman-de Sitter, interagindo com um sistema quântico de natureza relativística, descrito pela equação de Klein-Gordon, isto é, um campo escalar massivo com e sem carga.

Em meados da década de 1970, Rowan & Stephenson [39] resolveram a equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo no espaço-tempo de Kerr-Newman. As soluções obtidas não são válidas para todo o espaço-tempo, mas apenas próximo do horizonte exterior e no infinito, e são dadas em termos das funções de Whittaker.

Soluções da equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo carregado em um espaço-tempo de Kerr-Newman foram obtidas por Wu & Cai [40]. Eles mostraram que as equações angular e radial correspondem às funções de onda esferoidais *spin-weighted* generalizadas, no caso não-extremo. Neste contexto, as soluções gerais, em formas integrais e em séries de potências, foram obtidas e as formas apropriadas destas equações adequadas para estudar alguns problemas de interesse físico, como os relativos a evaporação de buracos negros, radiação de buracos negros e estados espalhados, entre outras, foram apresentadas e dadas as suas soluções. No caso extremo, as soluções da equação radial foram escritas em expansão de série de potências e algumas discussões apresentadas.

Um outro trabalho realizado por Furuhashi & Nambu [41] apresentou soluções da equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo carregado em um espaço-tempo de Kerr-Newman. As soluções foram consideradas muito longe do horizonte de evento exterior e próximo ao horizonte de evento. No primeiro caso, foi encontrado que as soluções regulares no infinito são dadas em termos das funções hipergeométricas confluentes, e na situação oposta, a saber, próximo ao horizonte, as soluções são dadas em termos das funções hipergeométricas de Gauss. Portanto, as soluções obtidas são válidas em intervalos restritos.

Neste nosso trabalho, obtemos as soluções exatas da parte radial da equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo [42] e para as partes angular e radial no caso de um campo escalar massivo carregado [43], ambas em um espaço-tempo de Kerr-Newman,

válidas em todo o espaço que corresponde ao exterior do buraco negro, que significa entre o horizonte de evento e o infinito. Neste sentido, estendemos o intervalo no qual as soluções são válidas, quando comparado com as obtidas por Rowan & Stephenson [39], Wu & Cai [40] e Furuhashi and Nambu [41]. Elas são dadas em termos das funções confluentes de Heun. Usando a solução radial e fazendo uso das propriedades das funções confluentes de Heun, estudamos a radiação Hawking de partículas escalares massivas carregadas [43]. As soluções da parte radial da equação de Klein-Gordon para um buraco negro de Kerr-Newman extremo são também obtidas e dadas em termos das funções duplamente confluentes de Heun.

Esta dissertação está organizada como segue. No capítulo 2, fazemos uma breve revisão das equações de campo da relatividade geral e das generalizações das equações que descrevem sistemas quânticos para espaços curvos. No capítulo 3, introduzimos as equações diferenciais de Heun e algumas propriedades relevantes para nossos estudos. No capítulo 4, resolvemos a equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo com e sem carga em um buraco de Kerr-Newman. No capítulo 5, analisamos a equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo carregado e a radiação Hawking em um buraco de Kerr-Newman-de Sitter. No capítulo 6, obtemos as soluções exatas para as ondas transmitidas e refletidas, nas proximidades do horizonte de evento exterior do buraco negro de Kerr-Newman e discutimos a radiação Hawking. Finalmente, no capítulo 7 apresentamos nossas conclusões e perpectivas.

2 Sistemas quânticos em espaços-tempo curvos

Neste capítulo, é feita uma breve revisão da teoria da relatividade geral e da generalização da mecânica quântica (não-relativística e relativística) para espaços-tempo curvos.

A importância da generalização da mecânica quântica para os espaços-tempo curvos se dá por dois motivos principais: é imprescindível no estudo dos problemas relativos à relevância dos efeitos quânticos associados a campos gravitacionais externos e auxilia em um melhor entendimento da estrutura da mecânica quântica do ponto de vista geométrico e topológico.

É importante chamar atenção para o fato de que essa generalização da mecânica quântica não apresenta elementos conflitantes, visto que o caráter local da descrição geométrica da relatividade geral é compatível com a natureza global da mecânica quântica descrita no espaço de Hilbert.

2.1 Equações de campo da relatividade geral

O ponto de partida da teoria da relatividade geral é generalizar o príncipio fundamental da relatividade restrita, o qual afirma que as leis físicas são as mesmas (invariantes), ou mais precisamente, covariantes sob transformações de coordenadas entre dois referenciais inerciais. Assim, de forma geral, essa afirmação permanece válida para quaisquer transformações de coordenadas entre dois referenciais.

No que segue, vamos apresentar uma breve dedução das equações de campo de Einstein da relatividade geral, e das soluções correspondentes aos espaços-tempo de Kerr-Newman e Kerr-Newman-de Sitter serão usadas nessa dissertação.

As equações de movimento são deduzidas, em geral, com base em alguns axiomas acerca do tipo de equações que desejamos. Estes axiomas são baseados em princípios físicos. Para deduzir as equações do campo gravitacional, vamos escolher alguns dos axiomas, que são relacionadas a seguir:

(i) A gravitação é descrita por uma métrica de Lorentz, $g_{\mu\nu}$, sobre uma dada variedade M;

(ii) As equações de movimento para $g_{\mu\nu}$ devem depender somente do conteúdo de matéria (tensor energia-momento) de todos os campos;

(iii) As equações de movimento devem ser covariantes gerais, ou seja, as equações valem na ausência de gravitação, isto é, quando $g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}$ (métrica de Minkowski) e $\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \equiv 0$ (conexão afim). Elas mantém (possuem) as mesmas formas por transformações gerais de coordenadas e, portanto, devem ser equações tensoriais;

(iv) O tensor $T^{\mu\nu}$ é tal que $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$, ou seja, energia-momento dos campos de matéria deve ser conservada localmente;

(v) Localmente, a matéria deve ter comportamento causal, isto é, a matéria nunca viaja com velocidade superior a da luz – todos os sinais ou 4-velocidades estão dentro ou sobre o cone de luz;

(vi) A gravitação de Newton deve reaparecer no limite de campos fracos (no caso tridimensional, este limite não é obtido);

(vii) As equações devem ser, no máximo, de segunda ordem nas derivadas (esta última condição é formal);

(viii) As equações de campo devem, em princípio, ser deriváveis de um princípio de ação mínima, na forma covariante geral.

Se não impusermos a penúltima condição, teremos infinitas escolhas das equações de campo. Por outro lado, derivadas de ordens superiores a 2 implicam na necessidade de outras condições iniciais além da posição e velocidade, para determinar a evolução do sistema de campos, e isto é, em geral, não desejável.

Podemos determinar a dinâmica de $g_{\mu\nu}$ usando o postulado (viii). A equação de Euler-Lagrange resultante deve ser, no máximo, de segunda ordem nas derivadas. A Lagrangeana deve ser um escalar, o que leva a duas possibilidades, usar o escalar de Ricci e uma constante na construção da densidade Lagrangeana.

Considere a seguinte integral de ação S

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2\kappa}(R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M\right]\sqrt{-g} \ , \tag{2.1}$$

onde $\mathcal{L}_G = (R - 2\Lambda)/2\kappa$ é a Lagrangeana do campo gravitacional, κ é a constante de acoplamento mínimo, $\mathcal{L}_M$ é a Lagrangeana dos campos de matéria, $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ e Λ é a constante cosmológica.

A variação do termo envolvendo a constante cosmológica nos fornece

$$\delta \int d^4x \Lambda\sqrt{-g} = \int d^4x \Lambda\delta\sqrt{-g} = \int d^4x \Lambda\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int d^4x \Lambda g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} \ . \tag{2.2}$$

O termo que contém o escalar de Ricci tem sua variação dada por

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x R\sqrt{-g} &= \int d^4x\sqrt{-g}\delta R + \int d^4x R\delta\sqrt{-g} \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\delta R + \frac{1}{2}\int d^4x R g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} \ . \end{aligned} \tag{2.3}$$

Mas,

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = -R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \ . \tag{2.4}$$

Portanto, podemos escrever a Eq.(2.3) como

$$\delta \int d^4x R\sqrt{-g} = -\int d^4x R^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} + \int d^4x g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\int d^4x R g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} \ . \tag{2.5}$$

Podemos verificar que $\int d^4x g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu} = 0$. Para tanto, considere $R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$. Usando a expressão para o tensor de Riemann, $R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu}$, em termos das conexões afins (ou símbolos de Christoffel) e de suas derivadas, temos

$$R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu} = \partial_\sigma\Gamma^{\rho}_{\nu\mu} - \partial_\nu\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} + \Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} \tag{2.6}$$

e

$$\delta R^{\rho}{}_{\mu\sigma\nu} = \nabla_\sigma(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu}) \ . \tag{2.7}$$

Portanto,

$$g^{\mu\nu}\delta R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = g^{\mu\nu}[\nabla_\rho(\delta\Gamma^{\rho}_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^{\rho}_{\rho\mu})] = \nabla_\rho[g^{\mu\nu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}) - g^{\mu\rho}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\sigma\mu})] \ . \tag{2.8}$$

Da Eq.(2.8), vemos que o integrando de $\int d^4x g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu}$ é uma divergência covariante de um tensor, e, portanto, $\int d^4x g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu} = 0$, como afirmamos, com

$$\int_V d^4x\partial_\alpha(\sqrt{-g}V^\alpha) = \int_S dS_\alpha\sqrt{-g}V^\alpha \ , \tag{2.9}$$

onde S é uma superfície na fronteira do espaço V.

Resta examinar o termo que corresponde aos campos de matéria e que é dado por

$$\int_M d^4x\mathcal{L}_M\sqrt{-g} \ . \tag{2.10}$$

A variação desse termo nos fornece o seguinte resultado

$$\delta \int d^4x\mathcal{L}_M\sqrt{-g} = \int d^4x\delta(\mathcal{L}_M\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\int d^4x T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int d^4x T^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} \ , \tag{2.11}$$

no qual está definido o tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$, onde

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} \ . \tag{2.12}$$

Se fizermos a variação explícita na expressão dada pela Eq.(2.11), teremos

$$\begin{aligned}
\delta \int d^4x\mathcal{L}_M\sqrt{-g} &= \int d^4x\left[\frac{\partial(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})}{\partial(\partial_\alpha g_{\mu\nu})}\delta(\partial_\alpha g_{\mu\nu})\right] \\
&= \int d^4x\left[\frac{\partial(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\alpha\frac{\partial(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})}{\partial(\partial_\alpha g_{\mu\nu})}\right]\delta g_{\mu\nu} \\
&+ \int d^4x\partial_\alpha\left[\frac{\partial(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})}{\partial(\partial_\alpha g_{\mu\nu})}\delta g_{\mu\nu}\right] \ .
\end{aligned} \tag{2.13}$$

O último termo na Eq.(2.13) não contribui, pois sendo a integral de uma divergência total, torna-se um fluxo sobre a fronteira onde $\delta g_{\mu\nu} = 0$. Portanto, comparando a Eq.(2.11) com a Eq.(2.13), obtemos

$$\frac{1}{2}T^{\mu\nu}\sqrt{-g} = \frac{\partial(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\alpha \frac{\partial(\mathcal{L}_M\sqrt{-g})}{\partial(\partial_\alpha g_{\mu\nu})} \ . \tag{2.14}$$

A expressão dada pela Eq.(2.14) pode ser interpretada como a definição em relatividade geral do tensor energia-momento, pois a ação correspondente aos campos de matéria é invariante por translações infinitesimais $\delta x^\mu = \xi^\mu(x)$, desde que o tensor definido pela Eq.(2.14) seja covariantemente conservado, ou seja, $\nabla_\nu T_\mu{}^\nu = 0$.

Substituindo as Eqs.(2.2), (2.5) e (2.11) na variação δS, dada pela Eq.(2.1), obtemos

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2\kappa}\left[\left(\frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} - R^{\mu\nu}\right) - \Lambda g^{\mu\nu}\right] + \frac{1}{2}T^{\mu\nu}\right\}\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu} \ . \tag{2.15}$$

Assim, visto que $\delta S = 0$ para variações arbitrárias $\delta g_{\mu\nu}$, da Eq.(2.15) implica que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{2.16}$$

onde $\kappa = 8\pi G/c^4$ (constante universal) e, portanto, podemos escrever as equações de campo, também conhecidas como equações de Einstein com constante cosmológica, como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \ . \tag{2.17}$$

Portanto, as equações de campo podem ser obtidas a partir do princípio variacional para a integral da ação (em unidades relativísticas)

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{16\pi G}(R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M\right]\sqrt{-g} \ . \tag{2.18}$$

A descoberta de que as equações de Einstein podem ser derivadas de um princípio variacional para a integral da ação, dada pela Eq.(2.18), foi feita de forma independente por Hilbert, e é chamada ação de Einstein-Hilbert.

A constante Λ é chamada constante cosmológica – é um parâmetro da teoria e deve ser medido (Λ é menor do que 10^{-56} cm^{-2}, de acordo com observações de galáxias distantes). O fato de que o (comprimento de Plank)$^{-2} \approx 10^{66}$ cm^{-2} significa que há um fenômeno físico que suprime completamente os efeitos da constante cosmológica. Em alguns modelos do universo primitivo (inflacionário) é conveniente começar com $\Lambda > 0$ e então, por alguma dinâmica fazer $\Lambda = 0$ em tempos posteriores.

Retornando à Eq.(2.17), note que $T_{\mu\nu}$ é o conteúdo material (massa/energia) da fonte da geometria (campo gravitacional). No vácuo, temos $T_{\mu\nu} \equiv 0$ e, portanto, $T = T_\mu{}^\mu = 0$. Neste caso as equações de Einstein ficam simplesmente

$$R_{\mu\nu} = 0 \ . \tag{2.19}$$

Na obtenção da Eq.(2.19) usamos o fato de que

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \\ g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}g_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \\ R - 2R &= \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu}{}^{\mu} \\ R &= -\frac{8\pi G}{c^4}T \\ R &= 0 \ , \end{aligned} \tag{2.20}$$

e tomamos $\Lambda = 0$. No caso em que $\Lambda \neq 0$, a Eq.(2.19) fica

$$R_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \ . \tag{2.21}$$

Observe que da aproximação linear, podemos concluir que a constante cosmológica possui a interpretação física de energia de vácuo ou energia do ponto zero, isto é, uma simples constante aditiva na densidade de energia. Em qualquer outra teoria da física, a energia do ponto zero é completamente irrelevante para a dinâmica, mas no caso da gravitação é diferente e a dinâmica muda dramaticamente com a presença de Λ.

O termo $\Lambda g_{\mu\nu}$ foi introduzido por Einstein por razões cosmológicas, e por esta razão Λ é chamada constante cosmológica. Ele foi obrigado a introduzir uma constante de modo a obter uma solução cosmológica homogênea, isotrópica e estática.

2.2 Influência de campos gravitacionais sobre sistemas quânticos

Uma dada equação física é válida na presença de um campo gravitacional, segundo o princípio da covariância, se as seguintes condições forem satisfeitas:

i) A equação é válida na ausência de campo gravitacional, isto é, quando $g_{\mu\nu} \equiv \eta_{ab}$, e a conexão afim $\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} \equiv 0$;

ii) A equação é covariante, isto é, ela preserva a forma sob transformação geral de coordenadas.

2.2.1 Equação de Schrödinger

Quando a mecânica quântica não-relativística é generalizada para o âmbito da relatividade geral, deve ser levado em conta o fato de o contínuo espaço-tempo ter que ser separado em espaço e tempo. Não levaremos em conta nenhum rigor pra esse procedimento. Simplesmente, iniciemos relembrando que a equação de Schrödinger [44]

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = H\Psi(\mathbf{r},t) \tag{2.22}$$

é que dá a evolução temporal de um sistema quântico. A quantidade H é o operador Hamiltoniano. O Hamiltoniano não-relativístico é dado por

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V(\mathbf{r}) \ , \tag{2.23}$$

onde μ é massa da partícula, $\mathbf{p}$ é o momento e $V(\mathbf{r})$ é um potencial externo. Escrevendo o operador momento canônico na sua forma usual, isto é,

$$\mathbf{p} = -i\hbar\nabla \ , \tag{2.24}$$

obtemos a equação de Schödinger para este sistema

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2_{LB} + V(\mathbf{r})\right]\Psi(\mathbf{r},t) \ , \tag{2.25}$$

onde ∇^2_{LB} é o operador covariante de Laplace-Beltrami, dado por

$$\nabla^2_{LB} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(g^{ij}\sqrt{g}\partial_j) \ , \tag{2.26}$$

com $g = \det(g_{ij})$ e $i, j = 1, 2, 3$.

2.2.2 Equação de Klein-Gordon

No caso de uma partícula relativística, o Hamiltoniano é dado por [44]

$$H = \sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + \mu^2c^4} \ . \tag{2.27}$$

Assim, usando a Eq.(2.24), é imediato escrever uma equação que descreva a evolução quântica de uma partícula relativística

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = \sqrt{-\hbar^2c^2\nabla^2 + \mu^2c^4}\Psi(\mathbf{r},t) \ . \tag{2.28}$$

Esta equação apresenta como problema o fato de possuir um operador sob a raiz quadrada. Podemos remover este problema aplicando-se o operador Hamiltoniano em ambos os lados da expressão acima. Como $\partial H/\partial t = 0$, temos

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(\mathbf{r},t) = (-\hbar^2c^2\nabla^2 + \mu^2c^4)\Psi(\mathbf{r},t) \tag{2.29}$$

ou, ainda,

$$\left[\Box - \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2\right]\Psi(x) = 0 \ . \tag{2.30}$$

Esta equação é conhecida como equação de Klein-Gordon. Como $\Psi(\mathbf{r},t)$ é uma grandeza escalar, é imediato observar a covariância da Eq.(2.30). Esta equação pode ser escrita também na forma

$$\left[\eta^{ab}\partial_a\partial_b - \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2\right]\Psi(x) = 0 \ . \tag{2.31}$$

A generalização óbvia para o espaço curvo, obtida a partir da Eq.(2.31), é feita pela substituição de η^{ab} por $g^{\sigma\tau}$ e da derivada ∂_a pela derivada covariante ∇_σ. Dessa forma, a equação de Klein-Gordon para o espaço curvo pode ser escrita na forma

$$\left[g^{\sigma\tau}\nabla_\sigma\nabla_\tau - \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2\right]\Psi(x) = 0 \ . \tag{2.32}$$

Assim como o operador covariante de Laplace-Beltrami, também há uma covariantização do operador d'Alembertiano, que é dado, neste caso, pela seguinte expressão

$$\Box = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\sigma(g^{\sigma\tau}\sqrt{-g}\partial_\tau) \ , \tag{2.33}$$

onde $g \equiv \det(g_{\sigma\tau})$. Portanto, a equação de Klein-Gordon no espaço curvo também pode ser escrita na forma

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\sigma(g^{\sigma\tau}\sqrt{-g}\partial_\tau) - \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2\right]\Psi(x) = 0 \ . \tag{2.34}$$

No caso de querermos acoplar uma interação escalar, por exemplo, $V(\mathbf{r})$, à Eq.(2.34), devemos fazer a substituição $\mu c^2 \to \mu c^2 + V(\mathbf{r})$.

A equação de Klein-Gordon associada com um campo massivo carregado em um espaço-tempo curvo e na presença de um 4-vetor potencial externo A_σ (campo de gauge), pode ser obtida a partir da forma covariante da equação de Klein-Gordon substituindo a derivada parcial ∂_σ por uma derivada extendida $D_\sigma = \partial_\sigma - ieA_\sigma$:

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\sigma(g^{\sigma\tau}\sqrt{-g}\partial_\tau) - \frac{ie}{\sqrt{-g}}A^\sigma(\partial_\sigma\sqrt{-g}) - \frac{ie}{\hbar c^2}(\partial_\sigma A^\sigma) - 2\frac{ie}{\hbar c^2}A^\sigma\partial_\sigma - \frac{e^2}{\hbar^2 c^2}A^\sigma A_\sigma\right.\\ -\ &\left.\left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2\right]\Psi(x) = 0 \ .\end{aligned} \tag{2.35}$$

Esta equação descreve a interação de uma partícula relativística de spin-0, isto é, uma partícula escalar massiva carregada, tratada do ponto de vista quântico, com os campos eletromagnético e gravitacional, que são tratados classicamente.

2.2.3 Equação de Dirac

Em 1928, Dirac [5, 6] propôs uma nova equação para descrever a evolução quântica de uma partícula livre relativística. Em lugar do Hamiltoniano dado pela Eq.(2.27), ele propôs que se partisse de

$$H = c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta\mu c^2 \ . \tag{2.36}$$

A motivação é que, não havendo necessidade de se aplicar o operador Hamiltoniano duas vezes (pois, agora, não há raiz quadrada para se eliminar), não haverá termos com derivada temporal de segunda ordem. Este foi o motivo de a equação de Klein-Gordon levar ao que se julgava ser uma densidade de probabilidade negativa.

No operador Hamiltoniano, dado pela Eq.(2.36), $\vec{\alpha}$ e β são coeficientes contantes, que devem satisfazer as seguintes relações

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij} \ , \tag{2.37a}$$

$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \ , \tag{2.37b}$$

$$\beta^2 = 1 \ , \tag{2.37c}$$

a fim de que a expressão $E^2 = \mathbf{p}^2c^2 + \mu^2c^4$ seja verificada. A única possibilidade é que sejam matrizes. Portanto, a equação decorrente da Eq.(2.36), dada por

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = (-i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\nabla + \beta\mu c^2)\Psi(\mathbf{r},t) \ , \tag{2.38}$$

é uma equação matricial e é conhecida como equação de Dirac, onde Ψ é um espinor representado por uma matriz coluna.

A fim de estabelecer a equação de Dirac para o espaço curvo, escrevamos a Eq.(2.38) no espaço-tempo de Minkowski, a qual é dada por

$$\left(i\gamma^{(a)}\partial_{(a)} - \frac{\mu c}{\hbar}\right)\Psi(x) = 0 \ , \tag{2.39}$$

onde $a = 1, 2, 3$.

Em termos das matrizes $\gamma^{(a)}$, as relações fixadas pelas Eqs.(2.37a)-(2.37c) são dadas simplesmente pela anticomutação

$$\{\gamma^{(a)}, \gamma^{(b)}\} = 2\eta^{ab} \ , \tag{2.40}$$

onde η^{ab} é dada pela Eq.(A.4) e as matrizes de Dirac, na representação de Pauli-Dirac, são dadas por

$$\gamma^k = -i\beta\alpha^k \ , \tag{2.41a}$$

$$\gamma^0 = -i\beta\alpha^0 = -i\beta = -i\gamma^4 \ , \tag{2.41b}$$

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{2.41c}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \tag{2.41d}$$

sendo σ^k as matrizes usuais de Pauli e $k = 1, 2, 3$.

Assim como foi feito na equação de Klein-Gordon, Eq.(2.30), a equação de Dirac generalizada para o espaço curvo é

$$\left[i\gamma^\sigma(x)\nabla_\sigma(x) - \frac{\mu c}{\hbar}\right]\Psi(x) = 0 \ , \tag{2.42}$$

onde $\gamma^\sigma(x)$ são as matrizes de Dirac generalizadas, que satisfazem a relação de anticomutação

$$\{\gamma^\sigma(x), \gamma^\tau(x)\} = 2g^{\sigma\tau} \ . \tag{2.43}$$

Na presença de um campo de gauge, um campo A_σ é acrescido à equação de Dirac e a mesma é escrita na forma

$$\left[i\gamma^\sigma \nabla_\sigma - \frac{e}{\hbar c}\gamma^\sigma A_\sigma - \frac{\mu c}{\hbar}\right] \Psi(x) = 0 \ . \tag{2.44}$$

Introduzimos também as conexões espinoriais $\Gamma^\sigma(x)$, definidas através da imposição de que a derivada covariante das matrizes $\gamma^\sigma(x)$ seja igual a zero, ou seja,

$$\nabla_\sigma \gamma_\tau = \partial_\sigma \gamma_\tau - \Gamma^\lambda_{\sigma\tau}\gamma_\lambda - \Gamma_\sigma \gamma_\tau + \gamma_\tau \Gamma_\sigma = 0 \ , \tag{2.45}$$

onde os índices de γ^σ são abaixados com o tensor métrico $g_{\sigma\tau}$.

A derivada covariante que atua sobre o espinor $\Psi(x)$ é, então,

$$\nabla_\sigma \Psi(x) = (\partial_\sigma - \Gamma_\sigma)\Psi(x) \ , \tag{2.46}$$

e a equação de Dirac covariante é dada por

$$\left[i\gamma^\sigma(\partial_\sigma - \Gamma_\sigma) - \frac{e}{\hbar c}\gamma^\sigma A_\sigma - \frac{\mu c}{\hbar}\right] \Psi(x) = 0 \ , \tag{2.47}$$

Esta equação descreve a interação de partículas de spin-1/2 com os campos eletromagnéticos e gravitacional considerados como campos clássicos.

A fim de obter uma forma explícita para $\gamma^\sigma(x)$ e $\gamma^\sigma(x)\Gamma_\sigma(x)$, vamos definir um campo de tétradas $e^{(a)}_\sigma(x)$, tal que

$$g_{\sigma\tau} = e^{(a)}_\sigma e^{(b)}_\tau \eta_{ab} \ , \tag{2.48}$$

onde η_{ab} é dado pela Eq.(A.4). Note que estamos utilizando a métrica $ds^2 = g_{\sigma\tau}dx^\sigma dx^\tau$ com assinatura +2. Sob transformações de coordenadas, os índices σ, τ são vistos como índices tensoriais em um sistema geral de coordenadas x^σ, enquanto a, b referem-se a um referencial inercial local e $e^{(a)}_\sigma(x)$ constituem quatro diferentes campos vetoriais. Adicionalmente à covariância dessa generalização sob transformações gerais de coordenadas que atuam nos índices σ, τ, existe também a covariância sob transformações de Lorentz aplicadas aos índices de tétradas a, b.

Os índices de tétradas são abaixados com η_{ab}, enquanto que os índices do espaço-tempo são abaixados com o tensor métrico $g_{\sigma\tau}$.

As matrizes constantes de Dirac do espaço plano γ_a, satisfazem a relação dada pela Eq.(2.43), e são escolhidas de tal modo que $\gamma_0^\dagger = -\gamma_0$ e $\gamma_i^\dagger = \gamma_i$. Segue, então, da Eq.(2.48) que

$$\gamma_\sigma = e^{(a)}_\sigma \gamma_a \ . \tag{2.49}$$

As conexões espinoriais $\Gamma_\sigma(x)$ que satisfazem a Eq.(2.45), são escritas em termos das tétradas e das matrizes $\gamma^{(a)}$ da seguinte forma [45]

$$\gamma^\sigma \Gamma_\sigma = \gamma^{(a)}(A_{(a)} + i\gamma^5 B_{(a)}) \ , \tag{2.50}$$

onde $\gamma^5 = i\gamma^{(0)}\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}\gamma^{(3)}$, e $A_{(a)}$ e $B_{(a)}$ são dados por

$$A_{(a)} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma e^\sigma_{(a)} + e^\rho_{(a)}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}) \tag{2.51}$$

e

$$B_{(a)} = \frac{1}{2}\varepsilon_{(a)(b)(c)(d)} e^{(b)\sigma} e^{(c)\tau} \partial_\sigma e^{(d)}_\tau \ , \tag{2.52}$$

com $\varepsilon_{(a)(b)(c)(d)}$ sendo um tensor unitário completamente anti-simétrico.

As equações de Weyl para o espaço curvo são obtidas fazendo-se a massa $\sigma = 0$ na equação de Dirac, na ausência de campo eletromagnético, o que resulta em

$$\gamma^\sigma(\partial_\sigma - \Gamma_\sigma)\Psi(x) = 0 \ , \tag{2.53}$$

e adicionando a equação para a helicidade

$$(1 + \gamma^5)\Psi(x) = 0 \ . \tag{2.54}$$

Estas equações são consideradas as equações básicas para a descrição de partículas sem massa e helicidade definida no espaço curvo, e, em particular, elas são úteis na descrição de neutrino sob efeito de campos gravitacionais externos.

3 Equações diferenciais de Heun

Devido a grande gama de aplicações, que vão da mecânica quântica à astrofísica, e a possibilidade de novas e mais abrangentes aplicações, as funções de Heun tem despertado muito interesse, o que pode ser comprovado pelos estudos recentes sobre suas propriedades, bem como sobre os possíveis usos tanto na física, quanto em outras áreas do conhecimento [38].

É fácil explicar esta situação. Em ciências naturais, em particular, em física, usualmente estudamos fenômenos começando a partir de algum estado de equilíbrio. Então, estudamos pequenas variações das grandezas consideradas, em aproximação linear, e por fim, nos afastamos do equilíbrio e somos forçados a levar em conta fenômenos não-lineares. É bem conhecido que para descrever fenômenos ondulatórios (como aqueles de mecânica quântica), relacionadas com algum fenômeno linear em física clássica, temos que usar funções hipergeométricas. Portanto, estas funções foram bem estudadas nos séculos 19 e 20, e hoje podem ser encontrados os correspondentes códigos em todos os bons pacotes de programação computacional. De acordo com o teorema de Slavyanov [46], os fenômenos clássicos não-lineares, descritos por funções elípticas, ou até mesmo dados por soluções de equações do tipo de Painlevé, e os correspondentes problemas ondulatórios, podem ser resolvidos exatamente em termos das funções de Heun. E visto que as equações de Painlevé podem ser consideradas como as de Hamilton para uma grande classe de problemas clássicos não-lineares, pode-se esperar um rápido aumento nas aplicações das funções de Heun em física e em outras ciências naturais.

Sua complexidade matemática, entretanto, faz o uso dessas funções um desafio grande, tanto na obtenção de soluções analíticas das equações diferenciais correspondentes, bem como na obtenção de soluções numéricas. As funções de Heun são soluções de Frobenius unicamente locais de uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem do tipo de Fuchsian [36], que no caso geral possui 4 pontos singulares regulares. Duas ou mais singularidades regulares podem fundir-se em uma singularidade irregular levando às equações diferenciais do tipo confluente e suas soluções: função confluente de Heun, função bi-confluente de Heun, função duplamente confluente de Heun e função tri-confluente de Heun. As funções de Bessel, Legendre, Laguerre, Webber-Hermite, e muitas outras aparecem com os casos especiais ou confluentes da função hipergeométrica. A função de Heun generaliza a função hipergeométrica (e também inclui a função de Lamé, a função de Mathieu e a função de onda esferoidal [37]) e alguns outros casos podem ser encontrados em [46]. Claramente, as funções de Heun serão encontradas mais e mais ainda na física moderna, portanto, existe uma necessidade de entender melhor estas funções.

Apesar do crescente número de artigos que usam equações do tipo de Heun e suas soluções, a teoria destas funções está longe de ser completa. Existem vários trabalhos analíticos sobre as funções de Heun, mas eles foram em grande parte negligenciados até recentemente. Alguns progressos recentes podem ser encontrados em [47], mas como um todo, existem muitas lacunas no nosso conhecimento destas funções. Um exemplo de um aspecto das funções de Heun que está à espera de um estudo sistemático diz respeito à ausência de representações integrais análogas às que existem para as funções hipergeométricas e outras funções da física-matemática.

Neste capítulo, vamos apresentar algumas propriedades básicas, e detalhes pertinentes, da equação diferencial (geral) de Heun e de seus casos confluentes de interesse nessa dissertação. Além de algumas ferramentas matemáticas que podem ser utilizadas a fim de transformar a equação diferencial em estudo em uma equação do tipo de Heun.

3.1 Equação diferencial de Heun

A equação diferencial de Heun, também chamada de equação diferencial geral de Heun, na sua forma generalizada é dada por [46]

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\sum_{i=1}^{3}\frac{A_i}{z-z_i}\frac{dy}{dz}+\left[\sum_{i=1}^{3}\frac{C_i}{z-z_i}+\sum_{i=1}^{3}\frac{B_i}{(z-z_i)^2}\right]y=0\ , \tag{3.1}$$

onde as quantidades z_i $(i=1,2,3)$ fixam as singularidades finitas, com a condição

$$\sum_{i=1}^{3}C_i=0\ , \tag{3.2}$$

a qual nos diz que a Eq.(3.1) possui uma singularidade regular no infinito.

3.1.1 Forma canônica

A forma canônica da equação (geral) de Heun é [37]

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\epsilon}{z-a}\right)\frac{dy}{dz}+\frac{\alpha\beta z-q}{z(z-1)(z-a)}y=0\ , \tag{3.3}$$

onde y e z são consideradas variáveis complexas e α, β, γ, δ, ϵ, q e a são parâmetros, geralmente complexos e arbitrários, exceto que $a\neq 0,1$. Os cinco primeiros parâmetros estão relacionados por

$$\gamma+\delta+\epsilon=\alpha+\beta+1\ . \tag{3.4}$$

A equação é, então, do tipo de Fuchsian, com singularidades regulares em $z=$ 0,1,a,∞. Os expoentes nessas singularidades são, respectivamente, $\{0,1-\gamma\}$; $\{0,1-\delta\}$; $\{0,1-\epsilon\}$; $\{\alpha,\beta\}$. A soma destes expoentes deve ter o valor 2, de acordo com a teoria geral das equações de Fuchsian: este é o fato que leva à Eq.(3.4).

O parâmetro a localiza a terceira singularidade finita e pode ser chamado de parâmetro de singularidade, enquanto α, β, γ, δ, ϵ determinam os expoentes nas quatro singularidades e podem ser chamados de parâmetro de expoente. O parâmetro q é chamado de parâmetro acessório e em algumas aplicações ele desempenha o papel de um auto-parâmetro.

A solução geral da Eq.(3.3) (a primeira das 192 possíveis; ver seção 3.1.3) pode ser escrita como [48]

$$y(z) = C_1 \ \mathrm{HeunG}(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; z) + C_2 \ z^{1-\gamma} \ \mathrm{HeunG}(a, q_1; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta; z) \tag{3.5}$$

onde

$$q_1 = q + (\alpha\delta + \epsilon)(1 - \gamma) \ , \tag{3.6a}$$

$$\alpha_1 = \alpha + 1 - \gamma \ , \tag{3.6b}$$

$$\beta_1 = \beta + 1 - \gamma \ , \tag{3.6c}$$

$$\gamma_1 = 2 - \gamma \ . \tag{3.6d}$$

É inevitável que, para uma equação tão geral com grande gama de aplicações, como às de Heun, ocorram divergências em relação à melhor forma padrão destas equações, visto que cada forma possível possui suas vantagens e desvantagens. A forma dada pela Eq.(3.3) é conveniente tendo em vista que ela se reduz a equação hipergeométrica, em certos casos degenerados. Tal degenerescência não deve ser confudida com o processo de confluência, quando a toma valores limites e simultaneamente um processo de limite ocorre sobre os parâmetros da equação, sendo o resultado uma das formas confluentes da equação de Heun. Este processo de confluência será examinado na seção 3.1.4.

Como foi dito na introdução, a equação de Heun foi originalmente construída como uma generalização deliberada da equação hipergeométrica, e é útil observar que existem três maneiras de se obter a equação hipergeométrica a partir da de Heun. Aqui vamos mostrar apenas a primeira e as outras duas podem ser vistas em [37]: se escrevermos a Eq.(3.3) como

$$z(z-1)(z-a)y''(z)+[\gamma(z-1)(z-a)+\delta z(z-a)+\epsilon z(z-1)]y'(z)+(\alpha\beta z-q)y(z) = 0 \tag{3.7}$$

e tomarmos

$$a = 1 \ , \quad q = \alpha\beta \ , \tag{3.8}$$

então, o fator $z - 1$ pode ser retirado, levando à equação hipergeométrica na sua forma padrão

$$z(1 - z)y''(z) + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]y'(z) - \alpha\beta y(z) = 0 \ , \tag{3.9}$$

onde usamos a relação dada pela Eq.(3.4).

3.1.2 Tipos de soluções da equação de Heun

As soluções da equação de Heun podem ser classificadas em quatro categorias:

(1) Soluções locais: cada singularidade é regular, de modo que pela teoria usual, nas vizinhanças de cada uma existem duas soluções linearmente independentes, uma correspondente a cada expoente. Tais soluções são chamadas de soluções locais ou soluções de Frobenius e denotadas, por Ronveaux [37], pelo símbolo $Hl(z)$. Existirão duas soluções desse tipo em cada singularidade, fornecendo um total de oito soluções locais;

(2) Funções de Heun: uma solução local de Frobenius em torno da singularidade s_1 pode, de fato, ser continuada analiticamente para a vizinhança de uma singularidade adjacente s_2, mas não conincidirá com a solução local. Pode acontecer, entretanto, que a solução seja, simultaneamente, uma solução de Frobenius em torno de $z = s_1$ e em $z = s_2$ – o termo funções de Heun é reservado para tais soluções e denotadas, por Ronveaux [37], pelo símbolo $Hf(z)$;

(3) Polinômios de Heun: quando as soluções são, simultaneamente, soluções de Frobenius nas três singularidades e, portanto, analítica em um domínio contendo essas singularidades, possivelmente com cortes, são chamadas de polinômios de Heun e denotadas, por Ronveaux [37], pelo símbolo $Hp(z)$. Por exemplo, quando α é um inteiro não-positivo, $\alpha = -n$, as soluções são polinômios de grau n;

(4) Soluções de caminho-multiplicativo: seja Γ um caminho fechado ao redor de duas, e somente duas, singularidades da equação. Quando continuada analiticamente ao redor de Γ, a solução retorna ao ponto de início meramente multiplicada por uma constante.

Estas quatro categorias de soluções são análogas, algebricamente, as categorias conhecidas na teoria das equações diferenciais duplamente periódicas, tais como as de Lamé. As funções de Heun correspondem as soluções periódicas, os polinômios de Heun as soluções duplamente periódicas e as solução de caminho-multiplicativo as soluções quasi-periódicas.

3.1.3 Transformações da equação de Heun

É bem conhecido na literatura que a equação hipergeométrica, Eq.(3.9), pode ser transformada em outra versão dela mesma, por umas das seis substituições da variável independente

$$\begin{array}{c} z \to \\ (1)\ z \quad (2)\ 1-z \quad (3)\ \frac{1}{z} \quad (4)\ \frac{1}{1-z} \quad (5)\ \frac{z}{1-z} \quad (6)\ \frac{z-1}{z}\ . \end{array} \tag{3.10}$$

Para as equações de Heun, existe um conjunto de 24 substituições [36], cada qual produz (geralmente após uma transformação da variável dependente também) outra equação

do tipo de Heun. Portanto, visto que existem 8 soluções locais, 2 em cada uma das 4 singularidades, temos um total de 192 soluções para a equação de Heun [49].

Por uma transformação de potência elementar ou transformação F-homotópica, da variável dependente y, se entende uma relação do tipo

$$y(z) = z^{\rho}(z-1)^{\sigma}(z-a)^{\tau}\tilde{y}(z) \ , \tag{3.11}$$

que converte a equação para $y(z)$ em uma equação para $\tilde{y}(z)$. Como resultado desta transformação, cada expoente na singularidade $z = 0$ é reduzido por ρ, aqueles em $z = 1$ por σ, aqueles em $z = a$ por τ e aqueles em $z = \infty$ aumentado por $\rho + \sigma + \tau$, de modo que a soma dos expoentes permaneça inalterada, e igual a 2.

3.1.3.1 Transformação de uma equação com quatro singularidades regulares para a forma de Heun

Dada uma equação de Fuchsian de segunda ordem, isto é, uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem, com quatro singularidades [50], todas regulares, esta pode sempre ser transformada em uma equação de Heun em sua forma canônica dada pela Eq.(3.3).

(A) Equação com quatro singularidades finitas

Sejam as singularidades nos pontos $z = a_r$ $(r = 1, 2, 3, 4)$, com expoentes α_r, β_r em a_r. A equação é, então, do tipo [51]

$$w''(z) + p(z)w'(z) + q(z)w(z) = 0 \tag{3.12}$$

onde

$$p(z) = \sum_{r=1}^{4} \frac{1 - \alpha_r - \beta_r}{z - a_r} \ , \tag{3.13a}$$

$$q(z) = \frac{1}{G(z)} \left[\lambda + \sum_{r=1}^{4} \frac{\alpha_r \beta_r G'(a_r)}{z - a_r} \right] \ , \tag{3.13b}$$

com

$$G(z) = \prod_{1}^{4} (z - a_r) \ , \tag{3.14}$$

e a relação

$$\sum_{1}^{4} (\alpha_r + \beta_r) = 2 \tag{3.15}$$

deve ser verificada.

A variável independente é transformada para trazer três das singularidades, a saber a_1, a_2, a_4, para os pontos 0, 1, ∞, respectivamente (onde pode-se escolher quais das quatro singularidades originais serão transformadas), pela substituição homográfica

$$\zeta = \frac{z - a_1}{z - a_4} \frac{a_2 - a_4}{a_2 - a_1} \ . \tag{3.16}$$

A singularidade remanescente, a_3, é, então, deslocada para

$$a \equiv \frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_4}\frac{a_2 - a_4}{a_2 - a_1} \ . \tag{3.17}$$

Seguimos com a transformação da variável dependente com o objetivo de reduzir cada expoente em cada singularidade finita 0, 1, a para zero. Esta transformação é

$$w(\zeta) = \zeta^{\alpha_1}(\zeta - 1)^{\alpha_2}(\zeta - a)^{\alpha_3} y(\zeta) \ . \tag{3.18}$$

(B) Equação com três singularidades finitas e uma singularidade no infinito

Sejam as singularidades regulares, em $z = a_r$, $(r = 1, 2, 3)$, com expoentes α_r, β_r em a_r, e seja também $z = \infty$ uma singularidade com expoentes α, β. Então, a equação é da forma (3.12), onde

$$p(z) = \sum_{r=1}^{3} \frac{1 - \alpha_r - \beta_r}{z - a_r} \ , \tag{3.19a}$$

$$q(z) = \frac{1}{H(z)}\left[\alpha\beta z + \mu + \sum_{r=1}^{3} \frac{\alpha_r \beta_r H'(a_r)}{z - a_r}\right] \ , \tag{3.19b}$$

com

$$H(z) = \prod_{1}^{3}(z - a_r) \ . \tag{3.20}$$

Para trazer a equação para a forma de Heun, vamos transformar a_1, a_2 em 0, 1 fazendo

$$\zeta = \frac{z - a_1}{a_2 - a_1} \ . \tag{3.21}$$

A singularidade remanescente, a_3, é, então, deslocada para $\zeta = a$, onde

$$a \equiv \frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1} \ . \tag{3.22}$$

Assim, havendo removido as singularidades para os pontos $\zeta = 0, 1, a, \infty$, fazemos a mesma transformação da variável dependente dada pela Eq.(3.18) e obtemos uma equação do tipo de Heun.

Uma transformação exponencial

$$y(z) = \mathrm{e}^{kz}\ \tilde{y}(z) \tag{3.23}$$

é muitas vezes útil quando lidamos com uma das formas confluentes da equação de Heun, mas como esta tem o efeito de fazer a singularidade em $z = \infty$ tornar-se irregular, ela não é geralmente aplicável à equação de Heun padrão.

Outra transformação útil quando lidamos com a forma confluente da equação de Heun é uma forma especializada da transformação s-homotópica da variável dependente $y(z) \mapsto w(z)$:

$$y(z) = w(z)\ \mathrm{e}^{\nu z}\ \prod_{i=1}^{2}(z - z_i)^{\mu_i} \ , \tag{3.24}$$

onde os pontos z_i são os pontos singulares regulares com os expoentes μ_i e ν escolhidos convenientemente.

3.1.3.2 Forma trigonométrica da equação geral de Heun

Entre as várias equações que ocorrem na física matemática, estão algumas que tomam a forma de equações lineares com coeficientes periódicos. Algumas dessas equações surgem, naturalmente, na forma periódica, outras tomam essa forma porque envolvem um sistema de coordenadas expresso por funções periódicas (tais como coordenadas polares). Várias de tais equações periódicas podem ser postas na forma de Heun ou equações confluentes de Heun.

Para demonstrar isso, vamos dar a forma trigonométrica da equação geral de Heun, Eq.(3.3).

Tomando

$$z = \sin^2\theta \ , \tag{3.25}$$

a Eq.(3.3) torna-se

$$\begin{aligned} & (a-\sin^2\theta)\frac{d^2y}{d\theta^2} + \left\{\left(a-\sin^2\theta\right)\left[(2\gamma-1)\cot\theta - (2\delta-1)\tan\theta\right] - \epsilon\sin 2\theta\right\}\frac{dy}{d\theta} \\ + \ & 4\left(\alpha\beta\sin^2\theta - q\right)y = 0 \ . \end{aligned} \tag{3.26}$$

Agora, algumas considerações em relação a casos particulares dessas transformações precisam ser feitas:

1. Os termos entre colchetes nas Eqs.(3.13b) e (3.19b), podem ser de segunda ordem em z, isto é, z^2, e mesmo assim a transformação terá o efeito desejado;

2. Mesmo que a relação fixada pela Eq.(3.15) não seja verificada, a transformação ainda pode ser utilizada caso haja um termo do tipo $2z$ entre colchetes na Eq.(3.13b);

3. E por fim, vale a pena ressaltar que nem sempre a transformação da variável dependente, dada pela Eq.(3.18), fornece uma equação do tipo de Heun na forma canônica, o que nos força a utilizar uma transformação que leva a equação em estudo à sua forma normal, e assim poderemos comparar com as formas normais das equações de Heun.

3.1.4 Os casos confluentes da equação de Heun

O processo geral de confluência é discutido em Ince [50]. Em essência, este é um processo por meio do qual, duas singularidades s_1, s_2 de uma equação diferencial são trazidas à coincidência: geralmente, um processo de limitação ocorre ao mesmo tempo entre os

parâmetros da equação, de modo que as duas singularidades são substituídas por uma singularidade que, em geral, é de natureza mais complicada.

Pode-se esperar, é claro, que a forma confluente da equação tenha soluções que podem ser derivadas como casos limites das soluções da equação original, mas o processo limitante, geralmente, altera as soluções qualitativamente. Entretanto, os casos confluentes, frequentemente, surgem propriamente de problemas físicos, de modo que o estudo direto destes casos e a derivação direta de suas soluções é geralmente necessário.

Existem quatro importantes casos confluentes da equação de Heun:

(1) A equação confluente de Heun: é obtida quando a singularidade em $z = a$ é fundida com a em $z = \infty$, resultando em uma equação com singularidades regulares em $z = 0$ e $z = 1$ e uma singularidade irregular de ordem 1 em ∞;

(2) A equação duplamente confluente de Heun: a singularidade em $z = 1$ é deslocada por uma simples transformação para o ponto $z = b$. Então, simultaneamente temos que $a \to \infty$, $b \to 0$, de modo que a equação possui singularidades irregulares em 0 e ∞, ambas de ordem 1;

(3) A equação bi-confluente de Heun: havendo deslocado a singularidade em $z = 1$ para $z = b$, tomamos $a \to \infty$, $b \to \infty$, de modo que a singularidade em ∞ torna-se irregular de ordem 2;

(4) A equação tri-confluente de Heun: esta não pode ser derivada diretamente por confluência da equação de Heun em sua forma padrão. Dada a Eq.(3.12) para o caso (B), fazendo $a_1 \to a_2 \to a_3 \to \infty$, obtemos uma equação com uma singularidade irregular em ∞, de ordem 3.

3.1.4.1 Derivação da equação confluente

Como exemplo, vamos mostrar a derivação da equação confluente de Heun. Dividindo a Eq.(3.7) por a, obtemos

$$z(z-1)\left(\frac{z}{a}-1\right)y''(z) + \left[\gamma(z-1)\left(\frac{z}{a}-1\right) + \delta z\left(\frac{z}{a}-1\right) + \frac{\epsilon}{a}z(z-1)\right]y'(z) + \left(\alpha\frac{\beta}{a}z - \frac{q}{a}\right)y(z) = 0 \ . \tag{3.27}$$

Tomemos $a \to \infty$ e, simultaneamente, seja $\beta, \epsilon, q \to \infty$ de tal forma que

$$\frac{\beta}{a} \to \frac{\epsilon}{a} \to -\nu \ , \quad \frac{q}{a} \to -\sigma \ . \tag{3.28}$$

Então, a Eq.(3.27) torna-se

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\nu + \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1}\right)\frac{dy}{dz} + \frac{\alpha\nu z - \sigma}{z(z-1)}y = 0 \ , \tag{3.29}$$

na qual os parâmetros γ, δ, α são os mesmos como na equação original, mas ν, σ são novos.

3.1.4.2 Formas normais

Em todos os casos a forma normal da equação é

$$y''(z) + Q(z)y(z) = 0 \tag{3.30}$$

e, para os vários casos confluentes de Heun, $Q(z)$ possui as seguintes formas:

- Equação (geral) de Heun:

$$Q(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-a} + \frac{D}{z^2} + \frac{E}{(z-1)^2} + \frac{F}{(z-a)^2} \ , \tag{3.31}$$

onde $A + B + C = 0$;

- Equação confluente de Heun:

$$Q(z) = A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{z^2} + \frac{E}{(z-1)^2} \ ; \tag{3.32}$$

- Equação bi-confluente de Heun:

$$Q(z) = Az^2 + Bz + C + \frac{D}{z} + \frac{E}{z^2} \ ; \tag{3.33}$$

- Equação duplamente confluente de Heun:

$$Q(z) = A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z^3} + \frac{E}{z^4} \ ; \tag{3.34}$$

- Equação tri-confluente de Heun:

$$Q(z) = Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E \ . \tag{3.35}$$

3.2 Equação confluente de Heun

A equação diferencial confluente de Heun na sua forma generalizada é dada por

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(E_0 + \sum_{i=1}^{2} \frac{A_i}{z - z_i} \right) \frac{dy}{dz} + \left[D_0 + \sum_{i=1}^{2} \frac{C_i}{z - z_i} + \sum_{i=1}^{2} \frac{B_i}{(z - z_i)^2} \right] y = 0 \ , \tag{3.36}$$

onde os pontos z_i são pontos singulares regulares finitos e $z = \infty$ é um ponto singular irregular.

Denominamos a forma padrão da equação confluente de Heun de simétrica se $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, de não-simétrica se $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, e de modificada se $z_1 = i$, $z_2 = -i$.

3.2.1 Forma canônica

A forma canônica da equação confluente de Heun é [47]

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left(\alpha+\frac{\beta+1}{z}+\frac{\gamma+1}{z-1}\right)\frac{dy}{dz}+\left(\frac{\mu}{z}+\frac{\nu}{z-1}\right)y=0\ , \tag{3.37}$$

a qual possui dois pontos singulares regulares em $z=0$ e $z=1$ e um irregular em $z=\infty$. As soluções unicamente locais de Frobenius desta equação, regulares na vizinhança do ponto singular regular $z=0$ e normalizadas à unidade neste ponto, isto é,

$$\mathrm{HeunC}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta;0)=1\ , \tag{3.38}$$

são chamadas de funções confluentes de Heun, $y(z)=\mathrm{HeunC}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta;z)$, com os parâmetros α, β, γ, δ e η relacionados com μ e ν por

$$\mu=\frac{1}{2}(\alpha-\beta-\gamma+\alpha\beta-\beta\gamma)-\eta\ , \tag{3.39}$$

$$\nu=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\alpha\gamma+\beta\gamma)+\delta+\eta\ , \tag{3.40}$$

de acordo com o pacote padrão do **Maple**™**17**.

3.2.2 Forma normal

Considere uma EDO linear de segunda ordem na forma padrão

$$\frac{d^2y}{dz^2}+p(z)\frac{dy}{dz}+q(z)y=0\ . \tag{3.41}$$

Por uma mudança da variável dependende, a Eq.(3.41) pode ser escrita como

$$\frac{d^2u}{dz^2}+Q(z)u=0\ , \tag{3.42}$$

que é chamada forma normal da Eq.(3.41).
Vamos considerar a transformação $y(z)=u(z)v(z)$. Usando esta transformação na Eq.(3.41), obtemos

$$v\frac{d^2u}{dz^2}+\left[2\frac{dv}{dz}+p(z)v\right]\frac{du}{dz}+\left[\frac{d^2v}{dz^2}+p(z)\frac{dv}{dz}+q(z)v\right]u=0\ . \tag{3.43}$$

Agora, vamos definir o coeficiente de du/dz como sendo zero. Isto fornece

$$2\frac{dv}{dz}+p(z)v=0\ \Rightarrow\ v=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int p(z)dz}\ , \tag{3.44}$$

e o coeficiente de u torna-se

$$\left\{q(z)-\frac{1}{2}\frac{dp(z)}{dz}-\frac{1}{4}[p(z)]^2\right\}v=Q(z)v\ . \tag{3.45}$$

Visto que v é não-nulo, cancelando v obtemos a esperada forma normal. Também, visto que v nunca se anula, u anula-se se e somente se y anular-se. Assim, a transformação acima não afeta os zeros da solução.

Então, utilizando as Eqs.(3.41)-(3.45), podemos escrever a equação confluente de Heun, Eq.(3.37), na forma normal como [37]

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left[A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{z^2} + \frac{E}{(z-1)^2}\right] u = 0 \ , \tag{3.46}$$

com

$$u(z) = \frac{1}{v(z)} y(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int \left(\alpha + \frac{\beta+1}{z} + \frac{\gamma+1}{z-1}\right) dz} \ \mathrm{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) \tag{3.47}$$

e os coeficientes A, B, C, D e E dados por:

$$A \equiv -\frac{1}{4}\alpha^2 \ ; \tag{3.48}$$

$$B \equiv \frac{1}{2}(1 - 2\eta) \ ; \tag{3.49}$$

$$C \equiv \frac{1}{2}(-1 + 2\delta + 2\eta) \ ; \tag{3.50}$$

$$D \equiv \frac{1}{4}(1 - \beta^2) \ ; \tag{3.51}$$

$$E \equiv \frac{1}{4}(1 - \gamma^2) \ . \tag{3.52}$$

A partir das Eqs.(3.48)-(3.52), obtemos que os parâmetros α, β, γ, δ e η são dados por:

$$\alpha = 2\sqrt{-A} \ ; \tag{3.53a}$$

$$\beta = \sqrt{1 - 4D} \ ; \tag{3.53b}$$

$$\gamma = \sqrt{1 - 4E} \ ; \tag{3.53c}$$

$$\delta = B + C \ ; \tag{3.53d}$$

$$\eta = \frac{1}{2} - B \ . \tag{3.53e}$$

Portanto, utilizando a Eq.(3.47), as soluções gerais da Eq.(3.46), válidas em todo o intervalo $0 \leq z < \infty$, são dadas por:

- $\beta \neq$ inteiro:

$$\begin{aligned} u(z) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\alpha z}(z-1)^{\frac{1}{2}(1+\gamma)} z^{\frac{1}{2}(1+\beta)} \\ &\times \ \{C_1 \ \mathrm{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) + C_2 \ z^{-\beta} \ \mathrm{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; z)\} \ ; \end{aligned} \tag{3.54}$$

- $\beta =$ inteiro:

$$\begin{aligned} u(z) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\alpha z}(z-1)^{\frac{1}{2}(1+\gamma)} z^{\frac{1}{2}(1+\beta)} \\ &\times \{C_1 \ \mathrm{HeunC}(-\alpha, \gamma, \beta, -\delta, \eta+\delta; 1-z) \\ &+ C_2 \ (z-1)^{-\gamma} \ \mathrm{HeunC}(-\alpha, -\gamma, \beta, -\delta, \eta+\delta; 1-z)\} \ , \end{aligned} \tag{3.55}$$

onde C_1 e C_2 são constantes.

Usando transformações s-homotópicas (tais que conservem a forma canônica da equação confluente de Heun), pode-se obter 16 classes de soluções locais exatas do tipo de Frobenius na forma:

$$y = \mathrm{e}^{\sigma_\alpha \frac{\alpha_\pm z_\pm}{2}} z_\pm^{\sigma_\beta \frac{\beta_\pm}{2}} z_\mp^{\sigma_\gamma \frac{\gamma_\mp}{2}} \mathrm{HeunC}(\sigma_\alpha\alpha_\pm, \sigma_\beta\beta_\pm, \sigma_\gamma\gamma_\pm, \delta_\pm, \eta_\pm; z_\pm) \ , \tag{3.56}$$

onde $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma = \pm 1$ e os parâmetros mudam de tal forma que $\alpha_+, \beta_+, \gamma_+, \delta_+, \eta_+ \to \alpha_-, \beta_-, \gamma_-, \delta_-, \eta_-$, e $z_+ \to z_-$ (mais detalhes podem ser encontrados em [46, 52]).

3.2.3 Expansão em séries de potências em torno das singularidades regulares $z = 0, 1$

Na esfera unitária $|z| < 1$, a função confluente de Heun é avaliada usando o método da série de potências ampliado ou método de Frobenius:

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho} \ . \tag{3.57}$$

Quando substituído na Eq.(3.37), esta expansão fornece a seguinte relação de recorrência de 3-termos [37, 53]:

$$\rho(\rho+\beta) = 0 \ , \tag{3.58a}$$

$$c_1(\rho+1)(\beta+\rho+1) - c_0\left[\eta + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}(\gamma-\alpha)(\beta+1) + \rho(\rho+1+\beta+\gamma-\alpha)\right] = 0 \ , \tag{3.58b}$$

$$c_{k+2}C_2 - c_{k+1}C_1 + c_k C_0 = 0 \ , \quad k \geq 0 \ , \tag{3.58c}$$

onde

$$C_0 = (\rho+k)\alpha + \delta + \frac{1}{2}\alpha(\beta+\gamma+2) \ , \tag{3.59}$$

$$C_1 = \eta + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}(\gamma-\alpha)(\beta+1) + (\rho+k+1)(\rho+k+2+\beta+\gamma-\alpha) \ , \tag{3.60}$$

$$C_2 = (\rho+k)(\rho+k+\beta) \ . \tag{3.61}$$

Se β é não inteiro, então pode-se denotar por $\mathrm{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z)$ a solução correspondente a $\rho = 0$ e para o qual $c_0 = 1$. Para $\rho = -\beta$, pode-se obter outra solução linearmente

independente da mesma equação, a saber, $z^{-\beta}$ HeunC$(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; z)$. Usando estas duas soluções, podemos obter a solução geral da equação confluente de Heun, dada pelas Eqs.(3.54) e (3.55).

No **Maple**™**17**, temos a seguinte expressão em séries de potências das funções confluentes de Heun, com relação a variável independente z, na vizinhança do ponto singular regular $z = 0$ [37]:

$$\begin{aligned}
\text{HeunC}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta;z) &= 1+\frac{1}{2}\frac{(-\alpha\beta+\beta\gamma+2\eta-\alpha+\beta+\gamma)}{(\beta+1)}z \\
&+ \frac{1}{8}\frac{1}{(\beta+1)(\beta+2)}\left(\alpha^2\beta^2-2\alpha\beta^2\gamma+\beta^2\gamma^2-4\eta\alpha\beta+4\eta\beta\gamma\right. \\
&+ 4\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2-6\alpha\beta\gamma+4\beta^2\gamma+4\beta\gamma^2+4\eta^2-8\eta\alpha+8\eta\beta \\
&+ 8\eta\gamma+3\alpha^2-4\alpha\beta-4\alpha\gamma+3\beta^2+4\beta\delta+10\beta\gamma+3\gamma^2+8\eta \\
&+ \left.4\beta+4\delta+4\gamma\right)z^2+\ldots\,. \qquad (3.62)
\end{aligned}$$

Nesta dissertação, salvo indicação em contrário, iremos utilizar apenas o primeiro termo desta série de potência assintótica (≈ 1).

3.2.4 Séries assintóticas em $z \to \infty$

As assíntotas no infinito são importantes para impor as condições de contorno que definem a física do problema. Na vizinhança do ponto singular irregular no infinito, duas soluções da Eq.(3.37) existem, que em geral são expandidas (em um setor), nas seguintes séries assintóticas [37, 53]:

$$\text{HeunC}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta;z) \sim \begin{cases} z^{-\left(\frac{\beta+\gamma+2}{2}+\frac{\delta}{\alpha}\right)}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k(\alpha)}{z^k}\,, \\ \\ z^{-\left(\frac{\beta+\gamma+2}{2}-\frac{\delta}{\alpha}\right)}\mathrm{e}^{-\alpha z}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e_k(\alpha)}{z^k}\,, \end{cases} \qquad (3.63)$$

no domínio $-\pi - \arg(\alpha+\eta) \leq \arg(z) \leq \pi - \arg(\alpha-\eta)$.

Os coeficientes $a_k(\alpha)$ e $e_k(\alpha)$ são dados pela relação de recorrência:

$$a_0 = 1\ ; \qquad (3.64a)$$

$$-\alpha a_1 + m(\alpha)a_0 = 0\ ; \qquad (3.64b)$$

$$\begin{aligned}
&-\alpha(k+2)a_{k+2}+\left[m(\alpha)+(k+1)\left(k+2+\alpha+\frac{2\delta}{\alpha}\right)\right]a_{k+1} \\
&+\left[\frac{\beta^2}{4}-\left(\frac{\gamma+2}{2}+\frac{\delta}{\alpha}\right)^2+k(k+1)-k\left(\frac{2\delta}{\alpha}+\gamma+1\right)\right]a_k = 0\,, \qquad (3.64c)
\end{aligned}$$

onde $e_k(\alpha) = a_k(-\alpha)$, $k \geq 0$ e $m(\alpha) = \eta - \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha}{2}(\gamma+1) + \frac{\delta}{\alpha}\left(\frac{\delta}{\alpha}+1+\alpha\right)$.

3.2.5 Soluções polinomiais

Para certos valores dos parâmetros α, β, γ, δ, η a função confluente de Heun reduz-se a um polinômio. Visto que isto simplifica, significativamente, a avaliação da função e também impõe condições de fronteira específicas, correspondendo a uma situação física que pode descrever um cenário astrofísico, este caso é de particular importância para os nossos estudos.

As condições polinomiais são:

$$\frac{\delta}{\alpha} + \frac{\beta+\gamma}{2} + N + 1 = 0 \ , \tag{3.65a}$$

$$\Delta_{N+1}(\mu) = 0 \ . \tag{3.65b}$$

Aqui, o inteiro $N \geq 0$ é o grau do polinômio e $\Delta_{N+1}(\mu)$ é o determinante tri-diagonal especificado em [47, 52]:

$$\begin{vmatrix}
\mu - q_1 & 1(1+\beta) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
N\alpha & \mu - q_2 + 1\alpha & 2(2+\beta) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & (N-1)\alpha & \mu - q_3 + 2\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \mu - q_{N-1} + (N-2)\alpha & (N-1)(N-1+\beta) & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 2\alpha & \mu - q_N + (N-1)\alpha & N(N+\beta) \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\alpha & \mu - q_{N+1} + N\alpha
\end{vmatrix} , \tag{3.66}$$

onde $q_n = (n-1)(n+\beta+\gamma)$ e o parâmetro μ advém da forma auto-adjunta da equação de Heun, a saber

$$\begin{aligned}
& \mathrm{e}^{-\alpha z} z^{-\beta} (z-1)^{-\gamma} \frac{d}{dz} \left[\mathrm{e}^{\alpha z} z^{1+\beta} (z-1)^{1+\gamma} \frac{dH(z)}{dz} \right] \\
+ \quad & \alpha \left(\frac{\delta}{\alpha} + \frac{\beta+\gamma}{2} + 1 \right) z H(z) = \mu H(z) \ .
\end{aligned} \tag{3.67}$$

A primeira condição é chamada de condição-δ_N e é equivalente à equação $C_0 = 0$ (Eqs.(3.58a)-(3.58c), para $\rho = 0$ e $k = N$). A segunda condição é equivalente à $c_{k+1}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta) = 0$. Considerando ambas as condições, significa que a expansão em séries de potências será truncada após o N-ésimo termo – todos os termos com $n > N$ são zero – e assim obtem-se um polinômio de grau N.

Outra forma da segunda condição polinomial $\Delta_{N+1}(\mu) = 0$ pode ser encontrada em [47] e pode ser lida como $(N+1)! c_{N+1}(\alpha, \beta, \gamma, \delta_N, \eta)$, onde c_{N+1} são os termos na expansão em séries da Eq.(3.57).

3.3 Equação duplamente confluente de Heun

A equação diferencial duplamente confluente de Heun na sua forma generalizada é dada por

$$\begin{aligned}&\frac{d^2y}{dz^2}+\left[H_0+\sum_{i=1}^{2}\frac{A_i}{z-z_i}+\sum_{i=1}^{2}\frac{B_i}{(z-z_i)^2}\right]\frac{dy}{dz}\\ +\ &\left[G_0+\sum_{i=1}^{2}\frac{C_i}{z-z_i}+\sum_{i=1}^{2}\frac{D_i}{(z-z_i)^2}+\sum_{i=1}^{2}\frac{E_i}{(z-z_i)^3}+\sum_{i=1}^{2}\frac{F_i}{(z-z_i)^4}\right]y=0\ .\end{aligned} \tag{3.68}$$

3.3.1 Forma canônica

A forma canônica da equação duplamente confluente de Heun é

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left[\frac{2z^5-\alpha z^4-4z^3+2z+\alpha}{(z-1)^3(z+1)^3}\right]\frac{dy}{dz}+\left[\frac{\beta z^2-(-\gamma-2\alpha)z+\delta}{(z-1)^3(z+1)^3}\right]y=0\ , \tag{3.69}$$

a qual possui dois pontos singulares irregulares em $z=1$ e $z=-1$, e suas soluções são as funções duplamente confluentes de Heun, $y(z)=\mathrm{HeunD}(\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)$, onde os parâmetros α,β,γ e δ estão de acordo com os usados no pacote padrão do **Maple**™**17**.

3.3.2 Forma normal

Procedendo de forma análoga à seção anterior, utilizando as Eqs.(3.41)-(3.45), podemos escrever a equação duplamente confluente de Heun, Eq.(3.69), na forma normal como

$$\begin{aligned}&\frac{d^2u}{dz^2}+\left[\frac{A}{(z-1)}+\frac{B}{(z+1)}+\frac{C}{(z-1)^2}+\frac{D}{(z+1)^2}\right.\\ +\ &\left.\frac{F}{(z-1)^3}+\frac{G}{(z+1)^3}+\frac{J}{(z-1)^4}+\frac{K}{(z+1)^4}\right]u=0\ ,\end{aligned} \tag{3.70}$$

com

$$u(z)=\frac{1}{v(z)}y(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int\left[\frac{2z^5-\alpha z^4-4z^3+2z+\alpha}{(z-1)^3(z+1)^3}\right]dz}\ \mathrm{HeunD}(\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)\ , \tag{3.71}$$

onde temos dois grupos de coeficientes que fornecem os parâmetros da função duplamente confluente de Heun, ambos de forma equivalente. O primeiro grupo com os coeficientes A, C, F e J dados por:

$$A\equiv\frac{1}{32}(-8+\alpha^2-2\beta+6\delta)\ ; \tag{3.72}$$

$$C\equiv\frac{1}{32}(8-\alpha^2+2\beta-2\gamma-6\delta)\ ; \tag{3.73}$$

$$F\equiv\frac{1}{8}(\beta+\gamma+\delta)\ ; \tag{3.74}$$

$$J \equiv -\frac{1}{16}(-\alpha^2) \ . \tag{3.75}$$

Usando as Eqs.(3.72)-(3.75), obtemos que os parâmetros α, β, γ e δ são dados por:

$$\alpha = 4\sqrt{-J} \ ; \tag{3.76a}$$

$$\beta = -1 + 8A + 12C + 6F - 2J \ ; \tag{3.76b}$$

$$\gamma = -16(A + C) \ ; \tag{3.76c}$$

$$\delta = 1 + 8A + 4C + 2F + 2J \ . \tag{3.76d}$$

Os coeficientes B, D, G e K são dados por:

$$B \equiv \frac{1}{32}(8 - \alpha^2 + 2\beta - 6\delta) \ ; \tag{3.77}$$

$$D \equiv \frac{1}{32}(8 - \alpha^2 + 2\beta + 2\gamma - 6\delta) \ ; \tag{3.78}$$

$$G \equiv \frac{1}{8}(-\beta + \gamma - \delta) \ ; \tag{3.79}$$

$$K \equiv -\frac{1}{16}(-\alpha^2) \ . \tag{3.80}$$

A partir das Eqs.(3.77)-(3.80), obtemos que os parâmetros α, β, γ e δ são dados por:

$$\alpha = 4\sqrt{-K} \ ; \tag{3.81a}$$

$$\beta = -1 - 8B + 12D - 6G - 2K \ ; \tag{3.81b}$$

$$\gamma = -16(B - D) \ ; \tag{3.81c}$$

$$\delta = 1 - 8B + 4D - 2G + 2K \ . \tag{3.81d}$$

Portanto, utilizando a Eq.(3.71), a solução geral da Eq.(3.70), válida em todo o intervalo $0 \leq z < \infty$, é dada por

$$\begin{aligned} u(z) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\frac{\alpha z}{(z-1)(z+1)}} \ [(z-1)(z+1)]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left\{ C_1 \ \mathrm{HeunD}\left(-\alpha, -\delta, -\gamma, -\beta; \frac{1}{z}\right) \right. \\ &+ \left. C_2 \ \mathrm{e}^{-\frac{\alpha z}{(z-1)(z+1)}} \ \mathrm{HeunD}\left(\alpha, -\delta, -\gamma, -\beta; \frac{1}{z}\right) \right\} \ , \end{aligned} \tag{3.82}$$

onde C_1 e C_2 são constantes e usamos a seguinte identidade para as funções duplamente confluentes de Heun:

$$\mathrm{HeunD}\left(-\alpha, -\delta, -\gamma, -\beta; \frac{1}{z}\right) = \mathrm{HeunD}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; z) \ . \tag{3.83}$$

4 A equação de Klein-Gordon em um buraco negro de Kerr-Newman

Rowan & Stephenson [39] obtiveram as soluções exatas da parte angular da equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo na presença de um buraco negro girando, carregado e de massa arbitrária, representado pela métrica de Kerr-Newman. Para a parte radial da equação de Klein-Gordon, eles obtiveram soluções aproximadas, próximo ao horizonte de evento exterior e no infinito. Com a matemática disponível na época e por permitir a massa ser arbitrária, as soluções foram obtidas apenas nessas regiões assintóticas, de modo que não são válidas em todo o espaço. O caso especial de um buraco negro de Schwarzschild também foi examinado por Rowan & Stepheson [54] em detalhes e os resultados são mostrados como estando intimamente relacionados àqueles obtidos por outros métodos, como por exemplo, em [55, 56].

Neste capítulo, revisitaremos o trabalho de Rowan & Stephenson [39], porém, desta feita, obtivemos uma solução analítica da parte radial da equação de Klein-Gordon, válida em todo o espaço [42], sendo esta dada em termos das funções confluentes de Heun. Os comportamentos assintóticos das soluções também foram estudados e comparados com os correspondentes obtidos por Rowan & Stephenson [39]. A partir da solução radial, obtivemos a solução exata para o caso do buraco negro de Schwarzschild. Analisamos também a equação de Klein-Gordon dependente do tempo para um campo escalar massivo em um espaço-tempo de Kerr-Newman extremo [42], onde as soluções obtidas também são exatas e dadas em termos das funções duplamente confluentes de Heun. E por fim, estudamos o caso generalizado da equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo carregado em um buraco negro de Kerr-Newman [43].

4.1 A métrica de Kerr-Newman

A métrica gerada por um buraco negro com momento angular por unidade de massa $a = J/M$, carga elétrica Q e massa (energia) M é a métrica de Kerr-Newman [57], cujo elemento de linha, nas coordenadas de Boyer-Lindquist [58], é dado por

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2}\left(dt - a\sin^2\theta\ d\phi\right)^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[\left(r^2+a^2\right)d\phi - a\ dt\right]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2\ d\theta^2\ , \quad (4.1)$$

onde

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \quad (4.2)$$

e

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta\ . \quad (4.3)$$

Note que estamos utilizando a métrica $ds^2 = g_{\sigma\tau}dx^\sigma dx^\tau$ com assinatura -2. Podemos escrever o tensor métrico do espaço-tempo de Kerr-Newman como

$$(g_{\sigma\tau}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^2}\left(\Delta - a^2\sin^2\theta\right) & 0 & 0 & \frac{a\sin^2\theta}{\rho^2}\left[(r^2+a^2)-\Delta\right] \\ 0 & -\frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2 & 0 \\ \frac{a\sin^2\theta}{\rho^2}\left[(r^2+a^2)-\Delta\right] & 0 & 0 & -\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta\right] \end{pmatrix} , \quad (4.4)$$

a partir do qual obtemos

$$g \equiv \det(g_{\sigma\tau}) = -\rho^4\sin^2\theta \ . \quad (4.5)$$

Assim, as componentes contravariantes de $g_{\sigma\tau}$ são dadas por

$$(g^{\sigma\tau}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^2\Delta}\left[(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta\right] & 0 & 0 & \frac{a}{\rho^2\Delta}\left[(r^2+a^2)-\Delta\right] \\ 0 & -\frac{\Delta}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{a}{\rho^2\Delta}\left[(r^2+a^2)-\Delta\right] & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho^2\Delta\sin^2\theta}\left(\Delta - a^2\sin^2\theta\right) \end{pmatrix} . \quad (4.6)$$

A partir da Eq.(4.2), temos que a equação da superfície de horizonte do espaço-tempo de Kerr-Newman é obtida da condição

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-) = 0 \ . \quad (4.7)$$

As soluções da Eq.(4.7) são

$$r_+ = M + \left[M^2 - \left(a^2 + Q^2\right)\right]^{1/2} \ , \quad (4.8a)$$

$$r_- = M - \left[M^2 - \left(a^2 + Q^2\right)\right]^{1/2} \ , \quad (4.8b)$$

e correspondem aos horizontes de evento e de Cauchy do buraco negro de Kerr-Newman. Quando $Q = 0$ a métrica do espaço-tempo reduz-se a solução de Kerr. Para $a = 0$ recuperamos a solução de Reissner-Nordström e quando $Q = a = 0$ a Eq.(4.1) reduz-se a solução de Schwarzschild.

4.2 Equações de movimento: campo escalar massivo

Queremos estudar o comportamento de campos escalares, em um campo gravitacional de um buraco negro carregado e em rotação. Neste sentido, devemos resolver a equação de Klein-Gordon, que é a equação que descreve o comportamento de partículas escalares massivas, dada por

$$\left(\Box^2 + \mu^2\right)\Psi = 0 \ , \quad (4.9)$$

onde usualmente μ possui unidade do inverso do comprimento de onda de Compton. Como mostrado no capítulo 2, em um espaço-tempo curvo podemos escrever a Eq.(4.9) na forma manifestadamente covariante como

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\sigma\left(g^{\sigma\tau}\sqrt{-g}\partial_\tau\right) + \mu^2\right]\Psi = 0 \ . \quad (4.10)$$

Substituindo as Eqs.(4.5) e (4.6) na Eq.(4.10), obtemos

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{1}{\Delta}\left[\left(r^2+a^2\right)^2-\Delta a^2\sin^2\theta\right]\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right.\\ -\;&\left.\frac{1}{\Delta\sin^2\theta}\left(\Delta-a^2\sin^2\theta\right)\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{2a}{\Delta}\left[\left(r^2+a^2\right)-\Delta\right]\frac{\partial^2}{\partial t\;\partial\phi}+\rho^2\mu^2\right\}\Psi=0\ .\end{aligned} \tag{4.11}$$

Para resolvermos a Eq.(4.11), vamos admitir que sua solução pode ser separada como segue

$$\Psi=\Psi(\mathbf{r},t)=R(r)S(\theta)\mathrm{e}^{im\phi}\mathrm{e}^{-i\omega t}\ . \tag{4.12}$$

Substituindo a Eq.(4.12) na Eq.(4.11), encontramos que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS}{d\theta}\right)+\frac{1}{\Delta\sin^2\theta}\left(\Delta-a^2\sin^2\theta\right)\left(-m^2\right)\\ +\;&\frac{2a}{\Delta}\left[\Delta-\left(r^2+a^2\right)\right]m\omega-\frac{1}{\Delta}\left[\left(r^2+a^2\right)^2-\Delta a^2\sin^2\theta\right]\left(-\omega^2\right)-\rho^2\mu^2=0\ .\end{aligned} \tag{4.13}$$

Esta equação pode ser separada de acordo com

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS}{d\theta}\right)+\left(\lambda_{lm}+c^2\cos^2\theta-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)S=0\ , \tag{4.14}$$

onde $c^2=a^2(\omega^2-\mu^2)$, e

$$\begin{aligned}&\Delta\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{dR}{dr}\right)+\left[\omega^2\left(r^2+a^2\right)^2-4Ma\omega mr+2Q^2a\omega m-\mu^2r^2\Delta+m^2a^2\right.\\ -\;&\left.\left(\omega^2a^2+\lambda_{lm}\right)\Delta\right]R=0\ ,\end{aligned} \tag{4.15}$$

onde λ é a constante de separação, ω é a energia da partícula e m é o número quântico azimutal.

4.3 A equação angular

A solução geral da Eq.(4.14) é dada em termos das funções harmônicas esferoidais oblatas, $S_{lm}(ic,\cos\theta)$, com auto-valores λ_{lm}, onde l,m são inteiros tais que $|m|\leq l$ [59, 60, 61].

Aqui, vamos mostrar que as funções harmônicas esferoidais oblatas são um caso particular das funções confluentes de Heun, ou seja, vamos escrever a Eq.(4.14) na forma de uma equação de Heun.

Definindo uma nova coordenada por $x=\cos\theta$, podemos reescrever a Eq.(4.14) na forma

$$\begin{aligned}&\frac{d^2S}{dx^2}+\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)\frac{dS}{dx}\\ +\;&\frac{1}{(x+1)(x-1)}\left[-c^2x^2-\lambda_{lm}+\frac{m^2}{2(x+1)}-\frac{m^2}{2(x-1)}\right]S=0\ .\end{aligned} \tag{4.16}$$

Esta equação possui singularidades em $x = \pm 1$ e em $x = \infty$. Para trazer a equação para a forma de Heun, vamos transformar $(a_1, a_2) = (-1, 1)$ em $(0, 1)$, através da substituição homográfica

$$z = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} = \frac{x + 1}{2} \ , \tag{4.17}$$

que fornece

$$\frac{d^2S}{dz^2} + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}\right)\frac{dS}{dz} + \left[A_1 + \frac{A_2}{z} + \frac{A_3}{z-1} + \frac{A_4}{z^2} + \frac{A_5}{(z-1)^2}\right] S = 0 \ , \tag{4.18}$$

onde os coeficientes A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 são dados por:

$$A_1 = -4c^2 \ ; \tag{4.19}$$

$$A_2 = \frac{2c^2 - m^2 + 2\lambda_{lm}}{2} \ ; \tag{4.20}$$

$$A_3 = -A_2 \ ; \tag{4.21}$$

$$A_4 = -\frac{m^2}{4} \ ; \tag{4.22}$$

$$A_5 = A_4 \ . \tag{4.23}$$

Definindo uma nova função, $S(z)$, por $S(z) = Z(z)[z(z-1)]^{-1/2}$, podemos escrever a Eq.(4.18) na seguinte forma

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \left[B_1 + \frac{B_2}{z} + \frac{B_3}{z-1} + \frac{B_4}{z^2} + \frac{B_5}{(z-1)^2}\right] Z = 0 \ , \tag{4.24}$$

onde os coeficientes B_1, B_2, B_3, B_4 e B_5 são dados por:

$$B_1 = A_1 \ , \tag{4.25}$$

$$B_2 = \frac{1 + 2A_2}{2} \tag{4.26}$$

$$B_3 = -B_2 \ , \tag{4.27}$$

$$B_4 = \frac{1 + 4A_4}{4} \ , \tag{4.28}$$

$$B_5 = B_4 \ . \tag{4.29}$$

A parte angular da equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo em um espaço-tempo de Kerr-Newman na região exterior ao horizonte de evento, dada pela

Eq.(4.14), pode ser escrita como a Eq.(3.46) e, portanto, sua solução é dada pela Eq.(3.47), a saber,

$$Z(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int\left(\alpha+\frac{\beta+1}{z}+\frac{\gamma+1}{z-1}\right)dz}\ \mathrm{HeunC}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta;z)\ , \tag{4.30}$$

e os parâmetros α, β, γ, δ e η são dados por:

$$\alpha = 4c\ ; \tag{4.31a}$$

$$\beta = m\ ; \tag{4.31b}$$

$$\gamma = m\ ; \tag{4.31c}$$

$$\delta = 0\ ; \tag{4.31d}$$

$$\eta = -c^2 + \frac{m^2}{2} - \lambda_{lm}\ . \tag{4.31e}$$

A solução geral da Eq.(4.18), válida em todo o intervalo $0 \leq z < \infty$, é obtida com o uso da Eq.(4.30). Ela é dada por

$$\begin{aligned} S(z) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\alpha z}(z-1)^{\frac{1}{2}\gamma} z^{\frac{1}{2}\beta} \\ &\times \{C_1\ \mathrm{HeunC}(-\alpha,\beta,\gamma,-\delta,\eta+\delta;1-z) \\ &+ C_2\ (z-1)^{-\gamma}\ \mathrm{HeunC}(-\alpha,-\gamma,\beta,-\delta,\eta+\delta;1-z)\}\ , \end{aligned} \tag{4.32}$$

onde $\mathrm{HeunC}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta;\xi)$ são as funções confluentes de Heun, C_1 e C_2 são constantes e α, β, γ, δ e η são fixados pelas relações (4.31a)-(4.31e). Estas duas funções formam soluções linearmente independentes da equação diferencial confluente de Heun desde que β seja inteiro, como é o caso.

4.4 A equação radial

Agora, para que a solução geral da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Kerr-Newman esteja completa, vamos resolver a equação radial, dada pela Eq.(4.15). Como podemos ver, a equação radial possui uma dependência complicada com a coordenada r, o que torna a determinação da solução não tão simples como no caso da equação angular.

A fim de resolver a parte radial da equação de Klein-Gordon, vamos fazer uso da Eq.(4.7) e escrever a Eq.(4.15) como

$$\begin{aligned} &(r-r_+)(r-r_-)\frac{d}{dr}\left[(r-r_+)(r-r_-)\frac{dR}{dr}\right] + \left[\omega^2\left(r^2+a^2\right)^2 - 4Ma\omega mr + 2Q^2a\omega m\right. \\ -\ &\left.\mu^2r^2(r-r_+)(r-r_-) + m^2a^2 - \left(\omega^2a^2+\lambda_{lm}\right)(r-r_+)(r-r_-)\right]R = 0\ . \end{aligned} \tag{4.33}$$

Agora, vamos definir uma nova coordenada x e um parâmetro d dados por [39]

$$Mx = r - r_+\ , \tag{4.34a}$$

$$2Md = r_+ - r_- = 2[M^2 - (a^2 + Q^2)]^{1/2} \ . \tag{4.34b}$$

A nova coordenada é tal que quando $r \to r_+$, $x \to 0$ e quando $r \to \infty$, obtemos que $x \to \infty$. Estamos interessados em estudar o comportamento das partículas apenas na região exterior ao horizonte de evento, a saber, para $r > r_+$, que corresponde a $0 \leq x < \infty$, em termos da nova coordenada. Assim, com essas considerações, temos que

$$r - r_- = M(x + 2d) \ , \tag{4.35a}$$

$$r = M(x + d + 1) \ . \tag{4.36a}$$

Então, escrevendo a Eq.(4.33) usando esta nova coordenada, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[x(x+2d)\frac{dR}{dx}\right] + \Bigg[\omega^2 \frac{\{M^2[(x+d+1)^2 - (d^2-1)] - Q^2\}^2}{M^2 x(x+2d)} + \frac{2Q^2 a\omega m}{M^2 x(x+2d)} \\ - \ &\frac{4a\omega m(x+d+1)}{x(x+2d)} - M^2\mu^2(x+d+1)^2 + \frac{m^2a^2}{M^2x(x+2d)} - (\omega^2a^2 + \lambda_{lm})\Bigg] R = 0 \ . \end{aligned} \tag{4.37}$$

Definindo uma nova função, $R(x)$, por $R(x) = Z(x)[x(x+2d)]^{-1/2}$, podemos escrever a Eq.(4.37) na seguinte forma

$$\begin{aligned} &\frac{d^2Z}{dx^2} + \Big(M^2\left(\omega^2 - \mu^2\right) + \frac{1}{M^2x^2(x+2d)^2}\Big[\omega^2\Big\{M^4\Big[4(x+d+1)^2 \\ + \ &4(x+d+1)x(x+2d)] - 2M^2Q^2[x(x+2d) + 2(x+d+1)] + Q^4\Big\} \\ - \ &4a\omega mM^2(x+d+1) + 2Q^2a\omega m - \mu^2M^4\left[2x + (d+1)^2\right]x(x+2d) + m^2a^2 \\ - \ &\left(\omega^2a^2 + \lambda_{lm}\right)M^2(x+2d)x + M^2d^2\Big]\Big)\, Z = 0 \ . \end{aligned} \tag{4.38}$$

Esta equação diferencial pode ser escrita em uma forma que nos permite comparar com uma equação diferencial de Heun, e isto será feito como segue.

A fim de obter a solução radial da equação de Klein-Gordon em um espaço-tempo de Kerr-Newman, dada pela Eq.(4.38), vamos seguir o mesmo procedimento adotado por Rowan & Stephenson [39] e escrever a equação radial na forma de fração parcial como

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + \left\{M^2(\omega^2 - \mu^2) + \frac{1}{M^2}\left[\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x+2d)^2} + \frac{D}{(x+2d)}\right]\right\} Z = 0 \ , \tag{4.39}$$

onde os coeficientes A, B, C e D são dadas por:

$$\begin{aligned} A \ &= \ \frac{1}{4d^2}\left[m^2a^2 + 2Q^2a\omega m - 4a\omega mM^2(d+1) - 4M^2\omega^2Q^2(d+1)\right. \\ &+ \ \left. 4M^4\omega^2(d+1)^2 + M^2d^2 + \omega^2Q^4\right] \ ; \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned} B \ &= \ \frac{1}{4d^3}\left[-m^2a^2 - 2Q^2a\omega m + 4a\omega mM^2 - 4M^2\omega^2Q^2\left(d^2-1\right)\right. \\ &+ \ 4M^4\omega^2(d+1)^2(2d-1) - 2M^4\mu^2d^2(d+1)^2 - 2M^2d^2\left(\omega^2a^2 + \lambda_{lm}\right) \\ &- \ \left. M^2d^2 - \omega^2Q^4\right] \ ; \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{4d^2}\left[m^2a^2 + 2Q^2a\omega m + 4a\omega mM^2(d-1) + 4M^2\omega^2Q^2(d-1)\right. \\ &+ \left. 4M^4\omega^2(d-1)^2 + M^2d^2 + \omega^2Q^4\right] \ ; \end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{4d^3}\left[m^2a^2 + 2Q^2a\omega m - 4a\omega mM^2 + 4M^2\omega^2Q^2\left(d^2-1\right)\right. \\ &+ 4M^4\omega^2(d-1)^2(2d+1) + 2M^4\mu^2d^2(d-1)^2 + 2M^2d^2\left(\omega^2a^2 + \lambda_{lm}\right) \\ &+ \left. M^2d^2 + \omega^2Q^4\right] \ . \end{aligned} \tag{4.43}$$

4.4.1 Soluções aproximadas

Quando Rowan & Stephenson realizaram esse trabalho [39], devido ao nível de desenvolvimento dos estudos sobre as funções de Heun na época, não foi possível a obtenção da solução analítica da equação radial, Eq.(4.39), válida em todo o intervalo $0 \leq x < \infty$. Portanto, eles obtiveram apenas soluções nos regimes assintóticos, a saber, nos limites de quando as partículas estão próximas a $x = 0$ e no infinito. Vamos, então, revisitar o trabalho de Rowan & Stephenson e obter as soluções aproximadas e os casos particulares.

Comecemos por considerar as formas das soluções nos dois limites: $x \to 0$ e $x \to \infty$.

4.4.1.1 Caso 1. $x \to 0$

Nas proximidades do horizonte de evento, temos que $r \to r_+$, ou seja, da Eq.(4.34a), isto implica que $x \to 0$. Assim, para calcularmos a solução da Eq.(4.39) neste limite, vamos expandir seus termos de C e D para x pequeno e obter a equação

$$\frac{d^2Z}{dx^2} = \left\{\left[M^2(\mu^2-\omega^2) - \frac{C}{4M^2d^2} - \frac{D}{2M^2d}\right] - \frac{1}{M^2}\left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x}\right) + O(x)\right\} Z \ . \tag{4.44}$$

Vamos, agora, definir uma nova variável independente, η, tal que

$$\eta = 2\sqrt{F}x \ , \tag{4.45}$$

onde

$$F = M^2(\mu^2-\omega^2) - \frac{C}{4M^2d^2} - \frac{D}{2M^2d} \ . \tag{4.46}$$

Desprezando os termos de $O(x)$, a Eq.(4.44) finalmente toma a forma

$$\frac{d^2Z}{d\eta^2} = \left(\frac{1}{4} - \frac{B}{2M^2\sqrt{F}\eta} - \frac{A}{M^2\eta^2}\right) Z \ , \tag{4.47}$$

que é comparável com a equação diferencial de Whittaker, a saber

$$\frac{d^2Z}{d\eta^2} = \left(\frac{1}{4} - \frac{\kappa}{\eta} + \frac{\bar{m}^2 - \frac{1}{4}}{\eta^2}\right) Z \ . \tag{4.48}$$

Segue, então, que a Eq.(4.47) possui soluções em termos das funções de Whittaker com κ, $\bar{m}$ definidos por

$$\kappa = \frac{B}{2M^2\sqrt{F}} \ , \tag{4.49a}$$

$$\bar{m}^2 = \frac{1}{4} - \frac{A}{M^2} \ . \tag{4.49b}$$

4.4.1.2 Caso 2. $x \to \infty$

No infinito, temos que $r \to \infty$, ou seja, da Eq.(4.34b), isto implica que $x \to \infty$. Assim, para calcularmos a solução da Eq.(4.39) neste limite, vamos expandir seus termos que contem C e D para x grande, para obter a equação

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + \left[M^2(\omega^2 - \mu^2) + \frac{1}{M^2}\left(\frac{A + C - 2dD}{x^2} + \frac{B + D}{x} \right) + O\left(\frac{1}{x^3} \right) \right] Z = 0 \ . \tag{4.50}$$

Vamos, agora, definir uma nova variável independente, ξ, tal que

$$\xi = 2M(\mu^2 - \omega^2)^{1/2} x \ . \tag{4.51}$$

Desprezando os termos de $O(1/x^3)$, a Eq.(4.50) finalmente toma a forma

$$\frac{d^2Z}{d\xi^2} = \left[\frac{1}{4} - \frac{B + D}{2M^3(\mu^2 - \omega^2)^{1/2}\xi} - \frac{A + C - 2dD}{M^2\xi^2} \right] Z \ , \tag{4.52}$$

que é comparável com a equação diferencial de Whittaker, dada pela Eq.(4.48). Segue, então, que a Eq.(4.52) possui soluções em termos das funções de Whittaker com κ, $\bar{m}$ definidos por

$$\kappa = \frac{B + D}{2M^3(\mu^2 - \omega^2)^{1/2}} \ , \tag{4.53a}$$

$$\bar{m}^2 = \frac{1}{4} - \frac{A + C - 2dD}{M^2} \ . \tag{4.53b}$$

Portanto, em ambos os casos 1 e 2, as soluções assintóticas da Eq.(4.39), a saber, próximas da origem e no infinito, são expressas em termos das funções de Whittaker.

4.4.2 Soluções aproximadas em coordenadas padrão

4.4.2.1 Caso 1. $x \to 0$

Quando $x \to 0$, temos que $r \to r_+$ e as soluções da Eq.(4.33) são dadas por

$$R(r) \sim \begin{cases} \dfrac{M}{\Delta^{1/2}} M_{\kappa,\bar{m}}\left(\dfrac{2\sqrt{F}}{M}(r - r_+) \right) \ , \\ \\ \dfrac{M}{\Delta^{1/2}} M_{\kappa,-\bar{m}}\left(\dfrac{2\sqrt{F}}{M}(r - r_+) \right) \ , \end{cases} \tag{4.54}$$

onde F deve ser considerado diferente de zero ($F \neq 0$), κ e $\bar{m}$ são definidos pelas Eqs.(4.49a) e (4.49b), respectivamente, e $M_{\kappa,\pm\bar{m}}$ são as funções de Whittaker [62]. Estas duas funções formam soluções linearmente independentes da equação diferencial de Whittaker, com $2\bar{m}$ não-inteiro. No caso quando $2\bar{m}$ é inteiro a segunda solução é tomada como a função

de Whittaker $W_{\kappa,\bar{m}}$. Não existe razão física específica para que $2\bar{m}$, com $\bar{m}$ definido pela Eq.(4.49b), deva ser inteiro e iremos, portanto, examinar as soluções quando $r \to r_+$ em termos das funções $M_{\kappa,\pm\bar{m}}$. Para todo z, temos a espansão em séries de potências

$$M_{\kappa,-\bar{m}}(z) = z^{\bar{m}+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z} \left[1 + \frac{(\frac{1}{2}+\bar{m}-\kappa)}{1!(2\bar{m}+1)} z + \frac{(\frac{1}{2}+\bar{m}-\kappa)(\frac{3}{2}+\bar{m}-\kappa)}{2!(2\bar{m}+1)(2\bar{m}+2)} z^2 + ... \right] , \quad (4.55)$$

de modo que quando $r \to r_+$ temos a solução radial

$$R(r) \sim \begin{cases} \dfrac{M}{\Delta^{1/2}} \mathrm{e}^{-(\sqrt{F}/M)(r-r_+)} \left[\dfrac{2\sqrt{F}}{M}(r-r_+) \right]^{\frac{1}{2}+\bar{m}} , \\ \\ \dfrac{M}{\Delta^{1/2}} \mathrm{e}^{-(\sqrt{F}/M)(r-r_+)} \left[\dfrac{2\sqrt{F}}{M}(r-r_+) \right]^{\frac{1}{2}-\bar{m}} , \end{cases} \quad (4.56)$$

com $F \neq 0$.

4.4.2.2 Caso 2. $x \to \infty$

Quando $x \to \infty$, temos que $r \to \infty$ e as soluções da Eq.(4.33) são dadas assintoticamente por

$$R(r) \sim \begin{cases} \dfrac{M}{\Delta^{1/2}} W_{\kappa,\bar{m}} \left(2(\mu^2-\omega^2)^{1/2}(r-r_+) \right) , \\ \\ \dfrac{M}{\Delta^{1/2}} W_{-\kappa,\bar{m}} \left(-2(\mu^2-\omega^2)^{1/2}(r-r_+) \right) , \end{cases} \quad (4.57)$$

onde optamos por utilizar as funções $W_{\kappa,\bar{m}}$ devido ao seu comportamento assintótico mais simples em comparação com as funções $M_{\kappa,\bar{m}}$. As funções $W_{\kappa,\bar{m}}(x)$ e $W_{-\kappa,\bar{m}}(-x)$ formam duas soluções linearmente independentes da equação diferencial de Whittaker. Na Eq.(4.57), κ e $\bar{m}$ são definidos pelas Eqs.(4.53a) e (4.53b), respectivamente. Usando a forma assintótica para $|z|$ grande dada por

$$\begin{aligned} W_{\kappa,\bar{m}}(z) &\sim \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z} z^{\kappa} \\ &\times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\bar{m}^2 - \left(\kappa - \frac{1}{2}\right)^2\right] \left[\bar{m}^2 - \left(\kappa - \frac{3}{2}\right)^2\right] ... \left[\bar{m}^2 - \left(\kappa - n + \frac{1}{2}\right)^2\right]}{n! z^n} \right\} , \end{aligned} \quad (4.58)$$

temos finalmente a solução radial quando $r \to \infty$, dada por

$$R(r) \sim \begin{cases} \dfrac{M}{\Delta^{1/2}} \mathrm{e}^{-\left[(\mu^2-\omega^2)^{1/2}(r-r_+)\right]} \left[2\left(\mu^2-\omega^2\right)^{1/2}(r-r_+) \right]^{\kappa} , \\ \\ \dfrac{M}{\Delta^{1/2}} \mathrm{e}^{+\left[(\mu^2-\omega^2)^{1/2}(r-r_+)\right]} \left[-2\left(\mu^2-\omega^2\right)^{1/2}(r-r_+) \right]^{-\kappa} , \end{cases} \quad (4.59)$$

com $\mu^2 - \omega^2 \neq 0$.

4.4.3 Casos especiais

Na seção anterior, usamos as formas convencionais das expansões em séries de potências e formas assintóticas para as funções de Whittaker $M_{\kappa,\bar{m}}$ e $W_{\kappa,\bar{m}}$, respectivamente, para derivar as formas aproximadas das soluções radiais. Entretanto, quando $F \to 0$ na Eq.(4.49a) e $\mu^2 \to \omega^2$ na Eq.(4.53a), temos que os valores apropriados de κ tornam-se muito grande ou, se κ é imaginário, então $|\kappa|$ torna-se muito grande. Nestes dois casos, as formas das séries dadas nas Eqs.(4.55) e (4.58) não são muito apropriadas para cálculos numéricos e as expansões assintóticas apropriadas para κ grande, x pequeno e κ grande, x grande dadas por [62] devem ser usadas.

Também existem falhas nas soluções dadas pelas funções de Whittaker, quando para $x \to 0$, quando temos $F = 0$ e para $x \to \infty$ quando $\mu^2 = \omega^2$. Para lidar com essas duas situações temos que retornar as equações originais dos casos 1 e 2.

4.4.3.1 Caso 1. $F = 0$

Neste caso, a Eq.(4.44) torna-se

$$\frac{d^2Z}{dx^2} = \left[-\frac{1}{M^2}\left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x}\right) + O(x)\right] Z \ . \tag{4.60}$$

Desprezando os termos de $O(x)$, a Eq.(4.60) toma a forma

$$\frac{d^2Z}{dx^2} = \left(-\frac{A}{M^2x^2} - \frac{B}{M^2x}\right) Z \ , \tag{4.61}$$

que é comparável com a equação diferencial de Bessel modificada na forma normal, a saber

$$\frac{d^2Z}{dx^2} = \left(\frac{\alpha^2 - 1}{4x^2} + \frac{\beta^2}{4x}\right) Z \ . \tag{4.62}$$

Segue, então, que a Eq.(4.61) possui as soluções

$$Z = \begin{cases} x^{1/2} I_\alpha(\beta x^{1/2}) \ , \\ \\ x^{1/2} K_\alpha(\beta x^{1/2}) \ , \end{cases} \tag{4.63}$$

onde I_α e K_α são as funções modificadas de Bessel de ordem α, de primeira e segunda espécie, respectivamente, com α, β definidos por

$$\alpha^2 = 1 - \frac{4A}{M^2} \ , \tag{4.64a}$$

$$\beta^2 = -\frac{4B}{M^2} \ . \tag{4.64b}$$

Portanto, as soluções radiais da Eq.(4.33), neste caso, são

$$R(r) \sim \begin{cases} \dfrac{M^{1/2}}{\Delta^{1/2}}(r - r_+)^{1/2} I_\alpha\left(\dfrac{\beta}{M^{1/2}}(r - r_+)^{1/2}\right) \ , \\ \\ \dfrac{M^{1/2}}{\Delta^{1/2}}(r - r_+)^{1/2} K_\alpha\left(\dfrac{\beta}{M^{1/2}}(r - r_+)^{1/2}\right) \ . \end{cases} \tag{4.65}$$

4.4.3.2 Caso 2. $\mu^2 = \omega^2$

Neste caso, a Eq.(4.50) torna-se

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + \left[\frac{1}{M^2}\left(\frac{A+C-2dD}{x^2} + \frac{B+D}{x}\right) + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] Z = 0 \ . \tag{4.66}$$

Desprezando os termos de $O(1/x^3)$, a Eq.(4.66) toma a forma

$$\frac{d^2Z}{dx^2} = \left(-\frac{A+C-2dD}{M^2x^2} - \frac{B+D}{M^2x}\right) Z \ , \tag{4.67}$$

que é comparável com a equação diferencial de Bessel modificada, dada pela Eq.(4.62). Segue, então, que α, β são definidos por

$$\alpha^2 = 1 - \frac{4}{M^2}(A+C-2dD) \ , \tag{4.68a}$$

$$\beta^2 = -\frac{4}{M^2}(B+D) \ . \tag{4.68b}$$

Portanto, as soluções radiais da Eq.(4.33), neste caso, são

$$R(r) \sim \begin{cases} \dfrac{M^{1/2}}{\Delta^{1/2}}(r-r_+)^{1/2} I_\alpha\left(\dfrac{\beta}{M^{1/2}}(r-r_+)^{1/2}\right) \ , \\ \\ \dfrac{M^{1/2}}{\Delta^{1/2}}(r-r_+)^{1/2} K_\alpha\left(\dfrac{\beta}{M^{1/2}}(r-r_+)^{1/2}\right) \ . \end{cases} \tag{4.69}$$

4.4.3.3 Caso 3. O buraco negro de Schwarzschild

Vamos, agora, estudar o caso especial no qual $Q = 0$ e $a = 0$, de modo que a métrica dada pela Eq.(4.1) reduz-se a Schwarzschild. Com isso, temos

$$\Delta = r(r-2M) \ , \tag{4.70}$$

$$\rho = r \ , \tag{4.71}$$

$$\lambda_{lm} = l(l+1) \ , \tag{4.72}$$

$$r_+ = 2M \ , \tag{4.73}$$

$$r_- = 0 \ , \tag{4.74}$$

$$d = 1 \ . \tag{4.75}$$

Logo, as Eqs.(4.40)-(4.43) são reescritas como:

$$A = 4M^4\omega^2 + \frac{1}{4}M^2 \ ; \tag{4.76}$$

$$B = 4M^4\omega^2 - 2M^4\mu^2 - \frac{1}{2}M^2 l(l+1) - \frac{1}{4}M^2 \ ; \tag{4.77}$$

$$C = \frac{1}{4}M^2 \ ; \tag{4.78}$$

$$D = \frac{1}{2}M^2 l(l+1) + \frac{1}{4}M^2 \ . \tag{4.79}$$

Portanto, para o caso 1, $x \to 0$ e $F \neq 0$, temos

$$\kappa = -\frac{\left(2M^2\mu^2 - 4M^2\omega^2 + \frac{1}{2}l(l+1) + \frac{1}{4}\right)}{2\left[M^2\left(\mu^2 - \omega^2\right) - \frac{1}{4}l(l+1) - \frac{3}{16}\right]^{1/2}} \ , \tag{4.80a}$$

$$\bar{m} = \pm i 2M\omega \ , \tag{4.80b}$$

onde

$$F = M^2\left(\mu^2 - \omega^2\right) - \frac{1}{4}l(l+1) - \frac{3}{16} \ . \tag{4.81}$$

Da mesma forma para o caso 2, $x \to \infty$ e $\mu \neq \omega$, temos

$$\kappa = \frac{M\left(2\omega^2 - \mu^2\right)}{\left(\mu^2 - \omega^2\right)^{1/2}} \ , \tag{4.82a}$$

$$\bar{m}^2 = \frac{1}{4} - 4M^2\omega^2 + l(l+1) \ . \tag{4.82b}$$

Consideremos, por exemplo, as soluções radiais quando $r \to \infty$, como dado pela Eq.(4.59), com os parâmetros dados pelas Eqs.(4.82a) e (4.82b). Estas equações levam a

$$\begin{aligned} R(r) \ &\sim \ \frac{M}{[r(r-2M)]^{1/2}} \mathrm{e}^{\mp\left[\left(\mu^2-\omega^2\right)^{1/2}(r-2M)\right]} \\ &\times \ \left[\pm 2\left(\mu^2 - \omega^2\right)^{1/2}(r-2M)\right]^{\pm M\left(2\omega^2-\mu^2\right)/\left(\mu^2-\omega^2\right)^{1/2}} \ , \end{aligned} \tag{4.83}$$

que pode ser escrita como

$$\begin{aligned} R(r) \ &\sim \ \frac{A}{r}\exp\left\{\pm i\left[\ln\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right]\frac{M\left(2\omega^2-\mu^2\right)}{\left(\omega^2-\mu^2\right)^{1/2}}\right\}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \\ &\times \ \exp\left[\left[\pm i\left\{\left(\omega^2-\mu^2\right)^{1/2} r + \frac{M\left(2\omega^2-\mu^2\right)}{\left(\omega^2-\mu^2\right)^{1/2}}\ln\left[2\left(\omega^2-\mu^2\right)^{1/2} r\right]\right\}\right]\right] \end{aligned} \tag{4.84}$$

onde A é uma constante.

Agora, a forma assintótica das soluções radiais dadas por Gibbons [55] é (tomando $Q = 0$ no seu trabalho):

$$R(r) \sim \frac{1}{r} \exp\left[\left[\pm i\left\{\left(\omega^2-\mu^2\right)^{1/2} r + \frac{M\left(2\omega^2-\mu^2\right)}{\left(\omega^2-\mu^2\right)^{1/2}} \ln\left[2\left(\omega^2-\mu^2\right)^{1/2} r\right]\right\}\right]\right] . \quad (4.85)$$

Consequentemente vemos que a Eq.(4.84) difere da Eq.(4.85) por um fator multiplicativo dado por

$$\exp\left\{\pm i\left[\ln\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right]\frac{M\left(2\omega^2-\mu^2\right)}{\left(\omega^2-\mu^2\right)^{1/2}}\right\}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \quad (4.86)$$

Logo, para $\omega^2 < \mu^2$, a Eq.(4.86) reduz-se para uma potência real de $[1-(2M/r)]$, enquanto que para $\omega^2 > \mu^2$ ela retém a forma exponencial complexa. Em ambos os casos, quando $r \to \infty$, a Eq.(4.86) tende a unidade e, portanto, as Eqs.(4.84) e (4.85) possuem o mesmo limite.

4.5 Solução analítica da equação radial

Atualmente, devido ao estabelecimento das funções de Heun e suas propriedades, algumas descritas no capítulo 3, podemos expressar a solução da equação radial, dada pela Eq.(4.39), em todo o intervalo da coordenada radial, em termos dessas funções especiais da física-matemática. E, assim, obter a solução analítica da parte radial da equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo em um espaço-tempo gerado por um buraco negro de Kerr-Newman [42].

Vamos definir uma nova variável independente, z, tal que

$$z = -\frac{1}{2}\frac{x}{d} . \quad (4.87)$$

Mudando mais uma vez a variável, de x para z, a Eq.(4.39) pode ser escrita como

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \left[4d^2M^2(\omega^2-\mu^2) + \frac{A}{M^2z^2} + \frac{-2dB}{M^2z} + \frac{C}{M^2(z-1)^2} + \frac{-2dD}{M^2(z-1)}\right] Z = 0 . \quad (4.88)$$

A parte radial da equação de Klein-Gordon em um espaço-tempo de Kerr-Newman na região exterior ao horizonte de evento, dada pela Eq.(4.15), pode ser escrita como a Eq.(3.46) e, portanto, sua solução é dada pela Eq.(3.47), a saber,

$$Z(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int\left(\alpha+\frac{\beta+1}{z}+\frac{\gamma+1}{z-1}\right)dz}\ \mathrm{HeunC}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta;z) , \quad (4.89)$$

e os parâmetros α, β, γ, δ e η são dados por:

$$\alpha = 4dM(\mu^2-\omega^2)^{1/2} ; \quad (4.90a)$$

$$\beta = \sqrt{1-\frac{4A}{M^2}} ; \quad (4.90b)$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{4C}{M^2}} \ ; \tag{4.90c}$$

$$\delta = -\frac{2d}{M^2}(B + D) \ ; \tag{4.90d}$$

$$\eta = \frac{1}{2} + \frac{2dB}{M^2} \ . \tag{4.90e}$$

A solução geral da Eq.(4.37), válida em todo o intervalo $0 \leq z < \infty$, é obtida com o uso da Eq. (4.89). Ela é dada por [42]

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{M}{\Delta^{1/2}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\alpha z}(z-1)^{\frac{1}{2}(1+\gamma)} z^{\frac{1}{2}(1+\beta)} \\ &\times \{C_1 \ \mathrm{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; z) + C_2 \ z^{-\beta} \ \mathrm{HeunC}(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; z)\} \ , \end{aligned} \tag{4.91}$$

onde $\mathrm{HeunC}(\alpha, \pm\beta, \gamma, \delta, \eta; z)$ são as funções confluentes de Heun, C_1 e C_2 são constantes e α, β, γ, δ e η são fixados pelas relações (4.90a)-(4.90e). Estas duas funções formam soluções linearmente independentes da equação diferencial confluente de Heun desde que β seja não-inteiro. Contudo, não há nenhuma razão física específica para impor que β deve ser inteiro.

4.5.1 Solução analítica em coordenadas padrão

A solução geral da Eq.(4.33), válida em todo o intervalo $0 \leq z < \infty$, com $z = z(x)$ e $x = x(r)$, em coordenadas padrão, é dada por

$$\begin{aligned} R(r) &= \frac{M}{\Delta^{1/2}} \mathrm{e}^{-[(\mu^2-\omega^2)^{1/2}(r-r_+)]} \left[-\frac{1}{2dM}(r - r_+) - 1\right]^{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4C}{M^2}}\right)} \\ &\times \left[-\frac{1}{2dM}(r - r_+)\right]^{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4A}{M^2}}\right)} \\ &\times \left\{C_1 \ \mathrm{HeunC}\left(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; -\frac{1}{2dM}(r - r_+)\right)\right. \\ &+ \left. C_2 \ \left[-\frac{1}{2dM}(r - r_+)\right]^{-\sqrt{1-\frac{4A}{M^2}}} \ \mathrm{HeunC}\left(\alpha, -\beta, \gamma, \delta, \eta; -\frac{1}{2dM}(r - r_+)\right)\right\} \ . \end{aligned} \tag{4.92}$$

4.5.2 Limites assintóticos da solução analítica em coordenadas padrão

Agora, vamos analisar o comportamento assintótico da solução geral da Eq.(4.33), dada por Eq.(4.92), definida no intervalo $0 \leq z < \infty$. Em primeiro lugar, vamos considerar a região próxima ao horizonte de evento, o que significa que $r \to r_+$, isto é, $x \to 0$. Em segundo lugar, vamos considerar a região muito longe do buraco negro, isto é, $r \to \infty$, ou equivalentemente, $x \to \infty$ ($|x|$ para ser mais exato).

Tomar estes limites em consideração é importante a fim de obter as soluções apropriadas para estudar alguns aspectos da radiação de buraco negro, por exemplo, caso

no qual precisamos conhecer a onda refletida para fora na superfície do buraco negro $r = r_+$.

4.5.2.1 Caso 1. $x \to 0$

Quando $z \to 0$ temos que $x \to 0$ e $r \to r_+$. Assim, usando a expansão em séries de potências para todo z da função confluente de Heun, dado pela Eq.(3.62), as soluções de (4.33), nesse limite são dadas por

$$R(r) \sim \begin{cases} \dfrac{M}{\Delta^{1/2}} \left[-\dfrac{1}{2dM}(r - r_+) \right]^{\frac{1}{2}+\bar{m}} , \\ \\ \dfrac{M}{\Delta^{1/2}} \left[-\dfrac{1}{2dM}(r - r_+) \right]^{\frac{1}{2}-\bar{m}} , \end{cases} \tag{4.93}$$

com $\bar{m}$ definido pela Eq.(4.49b).

Neste ponto, podemos comparar o resultado obtido com o de Rowan & Stephenson [39]. Vale a pena chamar a atenção para a diferença entre a forma funcional do comportamento assintótico da solução geral da equação radial obtida analiticamente, dada pela Eq.(4.93), e a solução aproximada obtida por Rowan & Stephenson [39], dada pela Eq.(4.56).

Vale a pena notar que, expandindo a Eq.(4.56) em primeira ordem em termos de $x = (r - r_+)/M$, concluímos que os resultados concordam com os nossos, dados pela Eq.(4.93), exceto por uma constante multiplicativa, que pode ser ajustada apropriadamente.

4.5.2.2 Caso 2. $x \to \infty$

Quando $|z| \to \infty$ temos que $|x| \to \infty$ e $r \to \infty$. Assim, usando o fato de que nas vizinhanças do ponto singular irregular no infinito, duas soluções da equação confluente de Heun existem, em geral elas podem ser expandidas (em um setor), nas séries assintóticas dadas pela Eq.(3.63), onde tomaremos apenas o primeiro termo destas séries de potências assintóticas. Assim, as soluções da Eq.(4.33) nesse limite são dadas por

$$R(r) \sim \begin{cases} \dfrac{M}{\Delta^{1/2}} \mathrm{e}^{-\left[(\mu^2-\omega^2)^{1/2}(r-r_+)\right]} \left[-\dfrac{1}{2dM}(r - r_+) \right]^{\kappa} , \\ \\ \dfrac{M}{\Delta^{1/2}} \mathrm{e}^{+\left[(\mu^2-\omega^2)^{1/2}(r-r_+)\right]} \left[-\dfrac{1}{2dM}(r - r_+) \right]^{-\kappa} , \end{cases} \tag{4.94}$$

com κ definido pela Eq.(4.53a).

Portanto, no infinito, temos formas assintóticas que são consistentes com o fato de que muito longe do buraco negro, o espaço-tempo de Kerr-Newman tende ao espaço-tempo de Minkowski.

Neste caso existe também uma diferença entre a Eq.(4.94) e a obtida por Rowan & Stephenson [39], dada pela Eq.(4.59). Mais uma vez, os dois resultados são equivalentes, exceto por uma constante multiplicativa.

4.5.3 Níveis de energia

A partir dos parâmetros da função confluente de Heun, dados pelas Eqs.(4.90a)-(4.90e) e fazendo uso da relação para uma solução polinomial da equação confluente de Heun, dada pela Eq.(3.65a), podemos obter a seguinte relação para os níveis de energia de uma partícula escalar massiva na presença de um buraco negro de Kerr-Newman:

$$\begin{aligned} & 2+2n+\sqrt{-\frac{\{am+[2(-1+d)M^2+Q^2]\,\omega\}^2}{d^2M^2}} \\ + \quad & \sqrt{-\frac{\{am+[-2(1+d)M^2+Q^2]\,\omega\}^2}{d^2M^2}}+\frac{2M\mu^2-4M\omega^2}{\sqrt{\mu^2-\omega^2}}=0\ , \end{aligned} \tag{4.95}$$

onde $n \geq 0$.

Não é possível obter uma expressão analítica para ω a partir da equação acima, entretanto, existem vários métodos numéricos que podem ser utilizados para obter expressões aproximadas para cada nível de energia.

4.5.4 O espaço-tempo de Kerr-Newman extremo

Vamos, agora, analisar o caso especial (caso extremo), no qual $a^2 = M^2 - Q^2$, de modo que a métrica dada pela Eq.(4.1) reduz-se a forma do espaço-tempo de Kerr-Newman extremo. Devemos notar que a parte radial da equação de Klein-Gordon, dada pela Eq.(4.39), não admite este caso, porque $a^2 = M^2 - Q^2$ implica, devido a Eq.(4.34b), que $d = 0$ e, portanto, os coeficientes A, B, C e D dadas pelas Eqs.(4.40)-(4.43) são divergentes. Assim, para estudarmos o caso de Kerr-Newman extremo, partimos da Eq.(4.38) e, tomando $a^2 = M^2 - Q^2$ e $d = 0$, obtemos [42]

$$\begin{aligned} & \frac{d^2Z}{dx^2}+\Big[\!\Big[M^2\left(\omega^2-\mu^2\right)+\frac{1}{M^2x^4}\left\{-4\omega mM^3\,(x+1)\left(M^2-Q^2\right)^{1/2}+m^2\left(M^2-Q^2\right)\right. \\ + \quad & \left.\omega^2\left\{Q^4-2M^2Q^2\left[x^2+2(x+1)\right]+M^4\left[4(x+1)^2+4(x+1)x^2\right]\right\}\right. \\ - \quad & \left.\mu^2M^4(2x+1)x^2+2\omega mQ^2\left(M^2-Q^2\right)^{1/2}-\left[\omega^2\left(M^2-Q^2\right)+\lambda_{lm}\right]M^2x^2\right\}\Big]\!\Big]\,Z=0\ . \end{aligned} \tag{4.96}$$

Agora, vamos escrever a Eq.(4.96) na forma de fração parcial como

$$\frac{d^2Z}{dx^2}+\left[F+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x^4}\right]Z=0\ , \tag{4.97}$$

onde os coeficientes A, B, C e D são dadas por:

$$A=4M^2\omega^2-2M^2\mu^2\ , \tag{4.98}$$

$$B = 7M^2\omega^2 - M^2\mu^2 - \lambda_{lm} - Q^2\omega^2 \ , \tag{4.99}$$

$$C = -4\omega\left[m\left(M^2 - Q^2\right)^{1/2} - 2M^2\omega + Q^2\omega\right] \ , \tag{4.100}$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{m^2M^2 - 4\omega mM^2\left(M^2 - Q^2\right)^{1/2} + 4M^4\omega^2 - m^2Q^2 + 2\omega mQ^2\left(M^2 - Q^2\right)^{1/2}}{M^2} \\ &+ \frac{-4M^2Q^2\omega^2 + Q^4\omega^2}{M^2} \ , \end{aligned} \tag{4.101}$$

$$F = M^2\left(\omega^2 - \mu^2\right) \ . \tag{4.102}$$

Vamos definir uma nova variável independente, z, tal que

$$z = \frac{i\left(FD^3\right)^{\frac{1}{4}}x - D}{i\left(FD^3\right)^{\frac{1}{4}}x + D} \ . \tag{4.103}$$

Definindo uma nova função dada por $Z(z) = U(z)x^{1/2}$, onde $x = x(z)$ é obtido a partir da Eq.(4.103), podemos reescrever a Eq.(4.97) na forma normal como

$$\begin{aligned} &\frac{d^2U}{dz^2} + \left\{ \frac{\left[-B - \frac{iC\left(FD^3\right)^{\frac{1}{4}}}{2D} + \frac{iA\left(FD^3\right)^{\frac{3}{4}}}{2FD^2}\right]}{(z-1)} + \frac{\left[B + \frac{iC\left(FD^3\right)^{\frac{1}{4}}}{2D} - \frac{iA\left(FD^3\right)^{\frac{3}{4}}}{2FD^2}\right]}{(z+1)} \right. \\ &+ \frac{\left[B - \frac{iA\left(FD^3\right)^{\frac{3}{4}}}{FD^2}\right]}{(z-1)^2} + \frac{\left[B + \frac{iC\left(FD^3\right)^{\frac{1}{4}}}{D}\right]}{(z+1)^2} + \frac{\left[\frac{2iA\left(FD^3\right)^{\frac{3}{4}}}{FD^2}\right]}{(z-1)^3} + \frac{\left[\frac{2iC\left(FD^3\right)^{\frac{1}{4}}}{D}\right]}{(z+1)^3} \\ &+ \left. \frac{\left[-\frac{4\left(FD^3\right)^{\frac{1}{2}}}{D}\right]}{(z-1)^4} + \frac{\left[-\frac{4\left(FD^3\right)^{\frac{1}{2}}}{D}\right]}{(z+1)^4} \right\} U = 0 \ , \end{aligned} \tag{4.104}$$

que é comparável com a equação diferencial duplamente confluente de Heun, Eq.(3.70). Segue, então, que a Eq.(4.104) possui soluções em termos das funções duplamente confluentes de Heun com os parâmetros α, β, γ e δ dados por:

$$\alpha = \frac{8\left(FD^3\right)^{\frac{1}{4}}}{D^{1/2}} \ ; \tag{4.105a}$$

$$\beta = -1 + 4B - \frac{4iC\left(FD^3\right)^{\frac{1}{4}}}{D} + \frac{8\left(FD^3\right)^{\frac{1}{2}}}{D} + \frac{4iA\left(FD^3\right)^{\frac{3}{4}}}{FD^2} \ ; \tag{4.105b}$$

$$\gamma = \frac{8i\left[CFD\left(FD^3\right)^{\frac{1}{4}} + A\left(FD^3\right)^{\frac{3}{4}}\right]}{FD^2} \ ; \tag{4.105c}$$

$$\delta = 1 - 4B - \frac{4iC\left(FD^3\right)^{\frac{1}{4}}}{D} + \frac{8\left(FD^3\right)^{\frac{1}{2}}}{D} + \frac{4iA\left(FD^3\right)^{\frac{3}{4}}}{FD^2} \ . \tag{4.105d}$$

Portanto, a solução geral da Eq.(4.33), válida em todo o intervalo $0 \leq z < \infty$, com $z = z(x)$ e $x = x(r)$, para o caso da métrica de Kerr-Newman extremo é dada por [42]

$$\begin{aligned} R(r) &= \frac{M}{\Delta^{1/2}}\left[\frac{1}{M}(r-r_+)\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{i\left\{D^2+\left(FD^3\right)^{1/2}\left[\frac{1}{M}(r-r_+)\right]^2\right\}}{D^{3/2}\left[\frac{1}{M}(r-r_+)\right]}} \\ &\times \left\{C_1\ \mathrm{HeunD}\left(-\alpha,-\delta,-\gamma,-\beta;\frac{i\left(FD^3\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{1}{M}(r-r_+)\right]+D}{i\left(FD^3\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{1}{M}(r-r_+)\right]-D}\right)\right. \\ &+ C_2\ \mathrm{e}^{\frac{2i\left\{D^2+\left(FD^3\right)^{1/2}\left[\frac{1}{M}(r-r_+)\right]^2\right\}}{D^{3/2}\left[\frac{1}{M}(r-r_+)\right]}} \\ &\times \left.\mathrm{HeunD}\left(\alpha,-\delta,-\gamma,-\beta;\frac{i\left(FD^3\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{1}{M}(r-r_+)\right]+D}{i\left(FD^3\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{1}{M}(r-r_+)\right]-D}\right)\right\} \ , \end{aligned} \tag{4.106}$$

onde $\mathrm{HeunD}(\alpha,\beta,\gamma,\delta;\xi)$ são as funções duplamente confluentes de Heun, C_1 e C_2 são constantes e α, β, γ e δ são fixados pelas relações (4.105a)-(4.105d). Portanto, as soluções para a métrica de Kerr-Newman extremo são diferentes das obtidas para a métrica geral de Kerr-Newman.

4.6 O buraco negro de Schwarzschild

As soluções estáticas da equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo em um espaço-tempo de Schwarzschild foram obtidas através do uso de métodos assintóticos em [54] e para o caso dependente do tempo em [56], ambas por Rowan & Stephenson. Essas soluções foram encontradas para todos os estados de momento angular e são válidas em todo o espaço exterior ao raio de Schwarzschild, considerando que o buraco negro é extenso comparado com o comprimento de onda do méson π, e a energia é muito menor que a massa de repouso de um méson π escalar. Na seção 4.4.3, foram obtidas as soluções da equação radial nos limites próximo ao horizonte de evento exterior e no infinito.

Visto que com $Q = 0 = a$, a métrica dada pela Eq.(4.1) reduz-se a forma de Schwarzschild, é possível ver que a solução da parte angular de Klein-Gordon em um espaço-tempo de Schwarzschild é dada pelos polinômios associados de Legendre e, com isso, podemos expressar a solução geral da parte angular em termos dos harmônicos esféricos. Além disso, podemos obter essa solução em termos das funções confluentes de Heun diretamente da Eq.(4.32), assim como a solução da equação radial, a partir da Eq.(4.92).

4.6.1 A equação angular

No espaço-tempo de Schwarzschild temos que, a partir das Eqs.(4.70)-(4.75), a equação angular de Klein-Gordon (4.14) reduz-se a

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS}{d\theta}\right)+\left(\lambda_{lm}-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)S=0\ , \tag{4.107}$$

que é a equação associada de Legendre, cuja solução são os polinômios associados de Legendre $P_l^m(\cos\theta)$, com auto-valores $\lambda_{lm}=l(l+1)$, onde $l\geq 0$ e $|m|\leq l$. Portanto, podemos expressar a solução geral da parte angular da equação de Klein-Gordon em um espaço-tempo de Schwarzschild como os harmônicos esféricos, tal que

$$Y_l^m(\theta,\phi)=C_N P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{im\phi}\ , \tag{4.108}$$

onde C_N é uma constante de normalização. A partir da Eq.(4.32), temos que a solução acima pode ser escrita em termos das funções confluentes de Heun como

$$\begin{aligned} S(z) &= (z-1)^{\frac{1}{2}\gamma}z^{\frac{1}{2}\beta} \\ &\times \{C_1\ \mathrm{HeunC}(-\alpha,\beta,\gamma,-\delta,\eta+\delta;1-z) \\ &+ C_2\ (z-1)^{-\gamma}\ \mathrm{HeunC}(-\alpha,-\gamma,\beta,-\delta,\eta+\delta;1-z)\}\ , \end{aligned} \tag{4.109}$$

onde C_1 e C_2 são constantes e os parâmetros α, β, γ, δ e η são obtidos com o uso das Eqs.(4.31a)-(4.31e) e dados por:

$$\alpha=0\ ; \tag{4.110a}$$

$$\beta=m\ ; \tag{4.110b}$$

$$\gamma=m\ ; \tag{4.110c}$$

$$\delta=0\ ; \tag{4.110d}$$

$$\eta=\frac{m^2}{2}-l(l+1)\ . \tag{4.110e}$$

4.6.2 A equação radial

A partir da Eq.(4.92), temos que a solução analítica da parte radial de Klein-Gordon em um espaço-tempo de Schwarzschild é dada por

$$\begin{aligned} R(r) &= \mathrm{e}^{-[(\mu^2-\omega^2)^{1/2}(r-r_+)]}\left[-\frac{1}{2M}(r-r_+)\right]^{i2M\omega} \\ &\times \left\{C_1\ \mathrm{HeunC}\left(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta;-\frac{1}{2M}(r-r_+)\right)\right. \\ &+ \left. C_2\ \left[-\frac{1}{2M}(r-r_+)\right]^{-i4M\omega}\ \mathrm{HeunC}\left(\alpha,-\beta,\gamma,\delta,\eta;-\frac{1}{2M}(r-r_+)\right)\right\}\ , \end{aligned} \tag{4.111}$$

onde C_1 e C_2 são constantes e os parâmetros α, β, γ, δ e η são obtidos com o uso das Eqs.(4.90a)-(4.90e) e dados por:

$$\alpha = 4M\left(\mu^2 - \omega^2\right)^{1/2} \ ; \tag{4.112a}$$

$$\beta = i4M\omega \ ; \tag{4.112b}$$

$$\gamma = 0 \ ; \tag{4.112c}$$

$$\delta = 4M^2\left(\mu^2 - 2\omega^2\right) \ ; \tag{4.112d}$$

$$\eta = -l(l+1) - 4M^2\left(\mu^2 - 2\omega^2\right) \ . \tag{4.112e}$$

Portanto, a solução analítica da parte radial da equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo em um espaço-tempo de Schwarzschild é dada em termos das funções confluentes de Heun. Este resultado é válido em todo o intervalo $0 \leq z < \infty$, com $z = z(x)$ e $x = x(r)$, e, neste sentido, é uma generalização dos resultados obtidos por Rowan & Stepheson em [54, 56].

4.6.3 Níveis de energia

A partir dos parâmetros da função confluente de Heun, dados pelas Eqs.(4.112a)-(4.112e) e fazendo uso da relação para uma solução polinomial da equação confluente de Heun, dada pela Eq.(3.65a), podemos obter a seguinte relação para os níveis de energia de uma partícula escalar massiva na presença de um buraco negro de Schwarzschild:

$$n + 1 + i\left[2M\omega + \frac{M\left(2\omega^2 - \mu^2\right)}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}\right] = 0 \ , \tag{4.113}$$

onde $n \geq 0$.

4.7 Equações de movimento: campo escalar massivo carregado

Agora, vamos considerar a equação de Klein-Gordon covariante para um campo escalar massivo carregado em um espaço-tempo curvo e na presença de campo eletromagnético [43]. Neste caso, podemos escrever a equação de Klein-Gordon, Eq.(2.35), como

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\sigma\left(g^{\sigma\tau}\sqrt{-g}\partial_\tau\right)\right.\\ &- \left.\frac{ie}{\sqrt{-g}}A^\sigma(\partial_\sigma\sqrt{-g}) - ie(\partial_\sigma A^\sigma) - 2ieA^\sigma\partial_\sigma - e^2A^\sigma A_\sigma + \mu_0^2\right]\Psi = 0 \ ,\end{aligned} \tag{4.114}$$

onde μ_0 é a massa da partícula escalar e e é a carga da partícula. As unidades $G \equiv c \equiv \hbar \equiv 1$ foram escolhidas. O 4-vetor potencial eletromagnético é dado por [63]

$$A_\sigma = \frac{Qr}{\rho^2}\left(1, 0, 0, -a\sin^2\theta\right) \ . \tag{4.115}$$

Substituindo as Eqs.(4.5), (4.6) e (4.115) na Eq.(4.114), obtemos

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{1}{\Delta}\left[\left(r^2+a^2\right)^2-\Delta a^2\sin^2\theta\right]\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right.\\
-\;&\frac{1}{\Delta\sin^2\theta}\left(\Delta-a^2\sin^2\theta\right)\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{2a}{\Delta}\left[\left(r^2+a^2\right)-\Delta\right]\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial\phi}\\
+\;&\left.2ie\frac{Qr}{\Delta}\left[\left(r^2+a^2\right)\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial\phi}\right]+\mu_0^2\rho^2-e^2Q^2r^2\frac{1}{\Delta}\right\}\Psi=0\ . \qquad (4.116)
\end{aligned}$$

A fim de resolver a Eq.(4.116), vamos admitir que sua solução pode ser separada como segue

$$\Psi=\Psi(\mathbf{r},t)=R(r)S(\theta)\mathrm{e}^{im\phi}\mathrm{e}^{-i\omega t}\ . \qquad (4.117)$$

Substituindo a Eq.(4.117) na Eq.(4.116), encontramos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta}\left[\left(r^2+a^2\right)^2-\Delta a^2\sin^2\theta\right]\left(-\omega^2\right)-\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{dR}{dr}\right)\\
-\;&\frac{1}{S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS}{d\theta}\right)\\
-\;&\frac{1}{\Delta\sin^2\theta}\left(\Delta-a^2\sin^2\theta\right)\left(-m^2\right)\\
+\;&\frac{2a}{\Delta}\left[\left(r^2+a^2\right)-\Delta\right](-i\omega)(im)\\
+\;&2ie\frac{Qr}{\Delta}\left[\left(r^2+a^2\right)(-i\omega)+a(im)\right]\\
+\;&\mu_0^2\rho^2-e^2Q^2r^2\frac{1}{\Delta}=0\ . \qquad (4.118)
\end{aligned}$$

Esta equação pode ser separada de acordo com

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS}{d\theta}\right)\\
+\;&\left(\lambda_{lm}+c_0^2\cos^2\theta-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)S=0\ , \qquad (4.119)
\end{aligned}$$

onde $c_0^2=a^2(\omega^2-\mu_0^2)$, e

$$\begin{aligned}
&\Delta\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{dR}{dr}\right)+\left\{\omega^2\left(r^2+a^2\right)^2-4Ma\omega mr+2Q^2a\omega m\right.\\
-\;&\mu_0^2r^2\Delta+m^2a^2-\left(\omega^2a^2+\lambda_{lm}\right)\Delta\\
-\;&\left.2eQr\left[\left(r^2+a^2\right)\omega-am\right]+e^2Q^2r^2\right\}R=0\ . \qquad (4.120)
\end{aligned}$$

Note que no caso $e=0$, as Eqs. (4.119) e (4.120) reduzem para as Eqs. (4.14) e (4.15), respectivamente, da seção 4.2 [42]. Nesta separação, utilizamos a identidade $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ no segundo termo entre colchetes da Eq. (4.118). Entretanto, como pode ser visto na seção 4.2 [42], esta separação nos fornece soluções da equação radial em termos das funções confluentes de Heun, nas quais seus parâmetros contem termos proporcionais

à M, a massa do buraco negro, que é um resultado não adequado para estudar a radiação Hawking.

Então, por conveniência, ao invés de adotar o procedimento da seção 4.2 [42], vamos manter $\sin^2\theta$ no segundo termo entre colchetes da Eq. (4.118). Portanto, podemos separar esta equação de acordo com

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS}{d\theta}\right)+\left[-\left(\omega a\sin\theta-\frac{m}{\sin\theta}\right)^2-\mu_0^2a^2\cos^2\theta+\lambda\right]S=0\ , \tag{4.121}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{dR}{dr}\right)+\left\{-\left(\lambda+\mu_0^2r^2\right)+\frac{1}{\Delta}\left[\omega\left(r^2+a^2\right)-am-eQr\right]^2\right\}R=0\ , \tag{4.122}$$

onde λ é a constante de separação, ω é a energia da partícula e m é o número quântico azimutal. No que segue iremos resolver as partes angular e radial da equação de Klein-Gordon, cujas soluções são dadas em termos das funções confluentes de Heun e, no capítulo 6, usar estas soluções para estudar a radiação Hawking.

4.8 Equação angular

Agora, vamos obter a solução exata e geral para a parte angular da equação de Klein-Gordon dada pela Eq.(4.121), que pode ser reescrita como

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS}{d\theta}\right)+\left(\Lambda_{lm}+c_0^2\cos^2\theta-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)S=0\ , \tag{4.123}$$

onde $c_0^2=a^2(\omega^2-\mu_0^2)$ e a constante Λ_{lm} é definida por

$$\Lambda_{lm}\equiv\lambda-a^2\omega^2+2a\omega m\ . \tag{4.124}$$

Na literautra, as soluções da Eq.(4.123) são as funções harmônicas esferoidais oblatas $S_{lm}(ic_0,\cos\theta)$ com auto-valores Λ_{lm}, onde l,m são inteiros tais que $|m|\leq l$ [59, 60]. Vamos mostrar que as soluções da Eq.(4.123) podem ser expressas em termos das funções confluentes de Heun.

Para fazer isto, vamos escrever a Eq.(4.123) em uma forma que se assemelha a uma equação de Heun, através da definição de uma nova coordenada angular, x, tal que

$$x=\cos^2\theta\ . \tag{4.125}$$

Assim, podemos escrever a Eq.(4.123) como [43]

$$\frac{d^2S}{dx^2}+\left(\frac{1/2}{x}+\frac{1}{x-1}\right)\frac{dS}{dx}+\frac{1}{x(x-1)}\left[-\frac{c_0^2x}{4}-\frac{\Lambda_{lm}}{4}-\frac{m^2}{4(x-1)}\right]S=0\ , \tag{4.126}$$

que possui singularidades em $x=0,1$ e $x=\infty$. A Eq.(4.126) pode também ser escrita como

$$\frac{d^2S}{dx^2}+\left(\frac{1/2}{x}+\frac{1}{x-1}\right)\frac{dS}{dx}+\left[\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{(x-1)^2}\right]S=0\ , \tag{4.127}$$

onde os coeficientes A_1, A_2 e A_3 são dados por:

$$A_1 = \frac{\Lambda_{lm} - m^2}{4} \ ; \tag{4.128}$$

$$A_2 = -\frac{(\Lambda_{lm} - m^2 + c_0^2)}{4} \ ; \tag{4.129}$$

$$A_3 = -\frac{m^2}{4} \ . \tag{4.130}$$

Definindo uma nova função, $S(x)$, por $S(x) = Z(x)x^{-1/4}(x-1)^{-1/2}$, podemos escrever a Eq.(4.127) na seguinte forma

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + \left[\frac{B_2}{x} + \frac{B_3}{x-1} + \frac{B_4}{x^2} + \frac{B_5}{(x-1)^2}\right] Z = 0 \ , \tag{4.131}$$

onde os coeficientes B_2, B_3, B_4 e B_5 são dados por:

$$B_2 = \frac{1 + 4A_1}{4} \ ; \tag{4.132}$$

$$B_3 = \frac{-1 + 4A_2}{4} \ ; \tag{4.133}$$

$$B_4 = \frac{3}{16} \ ; \tag{4.134}$$

$$B_5 = \frac{1 + 4A_3}{4} \ . \tag{4.135}$$

A parte angular da equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo carregado em um espaço-tempo de Kerr-Newman na região exterior ao horizonte de evento, dada pela Eq.(4.121), pode ser escrita como a Eq.(3.46) e, portanto, sua solução é dada por (3.47), a saber,

$$Z(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int\left(\alpha + \frac{\beta+1}{x} + \frac{\gamma+1}{x-1}\right)dx} \ \mathrm{HeunC}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta; x) \ , \tag{4.136}$$

e os parâmetros α, β, γ, δ e η são dados por:

$$\alpha = 0 \ ; \tag{4.137a}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \ ; \tag{4.137b}$$

$$\gamma = m \ ; \tag{4.137c}$$

$$\delta = -\frac{c_0^2}{4} = \frac{1}{4}\left(a^2\mu_0^2 - a^2\omega^2\right) \ ; \tag{4.137d}$$

$$\eta = \frac{1}{4}\left(1 + m^2 - \Lambda_{lm}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + m^2 - \lambda + a^2\omega^2 - 2a\omega m\right) \ . \tag{4.137e}$$

A solução geral da Eq.(4.127), válida em todo o intervalo $0 \leq x < \infty$, é obtida com o uso da Eq.(4.136). Ela é dada por [43]

$$\begin{aligned} S(x) &= (x-1)^{\frac{1}{2}\gamma} x^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\beta\right)} \\ &\times \{C_1 \ \mathrm{HeunC}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta;x) \\ &+ C_2 \ x^{-\beta} \ \mathrm{HeunC}(\alpha,-\beta,\gamma,\delta,\eta;x)\} \ , \end{aligned} \tag{4.138}$$

onde $\mathrm{HeunC}(\alpha,\pm\beta,\gamma,\delta,\eta;x)$ são as funções confluentes de Heun, C_1 e C_2 são constantes e α, β, γ, δ e η são fixados pelas relações (4.137a)-(4.137e). Estas duas funções formam soluções linearmente independentes da equação diferencial confluente de Heun desde que β seja não-inteiro, como é o caso.

4.9 Equação radial

Agora, vamos obter a solução exata e geral para a parte radial da equação de Klein-Gordon dada pela Eq. (4.115). Com efeito, podemos generalizar os resultados obtidos na seção 4.2.

Portanto, para resolver a parte radial da equação de Klein-Gordon, vamos usar a Eq.(4.7) e escrever a Eq.(4.122) como [43]

$$\begin{aligned} &\frac{d^2R}{dr^2} + \left(\frac{1}{r-r_+} + \frac{1}{r-r_-}\right)\frac{dR}{dr} \\ &+ \frac{1}{(r-r_+)(r-r_-)}\left\{ r^2\left(\omega^2-\mu^2\right) + r\left[\omega^2(r_+ + r_-) - 2eQ\omega\right]\right. \\ &+ \left[e^2Q^2 - \lambda - 2am\omega - 2eQ\omega(r_+ + r_-) + 2a^2\omega^2 + \omega^2\left(r_+^2 + r_+r_- + r_-^2\right)\right] \\ &+ \left.\frac{\left(-am - eQr_+ + a^2\omega + r_+^2\omega\right)^2}{(r-r_+)(r_+-r_-)} - \frac{\left(-am - eQr_- + a^2\omega + r_-^2\omega\right)^2}{(r-r_-)(r_+-r_-)}\right\} R = 0 \ . \end{aligned} \tag{4.139}$$

Esta equação possui singularidades em $r = (a_1, a_2) = (r_+, r_-)$ e em $r = \infty$. A transformação da Eq.(4.139) para uma do tipo de Heun é obtida definindo uma nova coordenada radial, x, tal que

$$x = \frac{r-a_1}{a_2-a_1} = \frac{r-r_+}{r_- - r_+} \ . \tag{4.140}$$

Assim, podemos escrever a Eq.(4.139) como

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)\frac{dR}{dx} + \left[D_1 + \frac{D_2}{x} + \frac{D_3}{x-1} + \frac{D_4}{x^2} + \frac{D_5}{(x-1)^2}\right] R = 0 \ , \tag{4.141}$$

onde os coeficientes D_1, D_2, D_3, D_4 e D_5 são dados por:

$$D_1 = \left(\omega^2 - \mu^2\right)(r_+ - r_-)^2 \ ; \tag{4.142}$$

$$
\begin{aligned}
D_2 &= \frac{2a^4\omega^2 - 4a^3m\omega - 2a^2eQr_+\omega - 2a^2eQr_-\omega + 2a^2m^2 + 4a^2r_+r_-\omega^2 + 2aemQr_+}{(r_+ - r_-)^2} \\
&+ \frac{2aemQr_- - 4amr_+r_-\omega + 2e^2Q^2r_+r_- + 2eQr_+^3\omega - 6eQr_+^2r_-\omega + \mu^2r_+^4 - 2r_+^4\omega^2}{(r_+ - r_-)^2} \\
&+ \frac{-2\mu^2r_+^3r_- + 4r_+^3r_-\omega^2 + \lambda r_+^2 + \mu^2r_+^2r_-^2 - 2\lambda r_+r_- + \lambda r_-^2}{(r_+ - r_-)^2} \; ; \qquad (4.143)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_3 &= \frac{-2a^4\omega^2 + 4a^3m\omega + 2a^2eQr_+\omega + 2a^2eQr_-\omega - 2a^2m^2 - 4a^2r_+r_-\omega^2 - 2aemQr_+}{(r_+ - r_-)^2} \\
&+ \frac{-2aemQr_+ - 2aemQr_- + 4amr_+r_-\omega - 2e^2Q^2r_+r_- + 6eQr_+r_-^2\omega - 2eQr_-^3\omega}{(r_+ - r_-)^2} \\
&+ \frac{-\lambda r_+^2 - \mu^2r_+^2r_-^2 + 2\mu^2r_+r_-^3 - 4r_+r_-^3\omega^2 + 2\lambda r_+r_- - \mu^2r_-^4 + 2r_-^4\omega^2 - \lambda r_-^2}{(r_+ - r_-)^2} \; ; \\
& \qquad (4.144)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_4 &= \frac{a^4\omega^2 - 2a^3m\omega - 2a^2eQr_+\omega + a^2m^2 + 2a^2r_+^2\omega^2 + 2aemQr_+ - 2amr_+^2\omega + e^2Q^2r_+^2}{(r_+ - r_-)^2} \\
&+ \frac{e^2Q^2r_+^2 - 2eQr_+^3\omega + r_+^4\omega^2}{(r_+ - r_-)^2} \; ; \qquad (4.145)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_5 &= \frac{a^4\omega^2 - 2a^3m\omega - 2a^2eQr_-\omega + a^2m^2 + 2a^2r_-^2\omega^2 + 2aemQr_- - 2amr_-^2\omega + e^2Q^2r_-^2}{(r_+ - r_-)^2} \\
&+ \frac{e^2Q^2r_-^2 - 2eQr_-^3\omega + r_-^4\omega^2}{(r_+ - r_-)^2} \; . \qquad (4.146)
\end{aligned}
$$

Definindo uma nova função, $R(x)$, por $R(x) = Z(x)[x(x-1)]^{-1/2}$, podemos escrever a Eq.(4.141) na seguinte forma

$$
\frac{d^2Z}{dx^2} + \left[E_1 + \frac{E_2}{x} + \frac{E_3}{x-1} + \frac{E_4}{x^2} + \frac{E_5}{(x-1)^2}\right] Z = 0 \; , \qquad (4.147)
$$

com os coeficientes E_1, E_2, E_3, E_4 e E_5 dados por:

$$
E_1 = \left(\omega^2 - \mu^2\right)(r_+ - r_-)^2 \; ; \qquad (4.148)
$$

$$
\begin{aligned}
E_2 &= \frac{4a^2\left(m - a\omega\right)^2 + 4aemQ\left(r_+ + r_-\right) + \left(2\lambda + 1 + 2r_+^2\mu^2\right)\left(r_+ - r_-\right)^2}{2\left(r_+ - r_-\right)^2} \\
&+ \frac{\left(4e^2Q^2 - 8am\omega + 8a^2\omega^2\right)r_+r_- - 4eQr_-\omega\left(a^2 + 3r_+^2\right) - 4\omega^2r_+^3\left(r_+ - 2r_-\right)}{2\left(r_+ - r_-\right)^2} \\
&+ \frac{4eQr_+\omega\left(r_+^2 - a^2\right)}{2\left(r_+ - r_-\right)^2} \; ; \qquad (4.149)
\end{aligned}
$$

$$E_3 = \frac{-4a^2(m-a\omega)^2 - 4aemQ(r_+ + r_-) - \left(2\lambda + 1 + 2r_-^2\mu^2\right)(r_+ - r_-)^2}{2(r_+ - r_-)^2} + \frac{-\left(4e^2Q^2 - 8am\omega + 8a^2\omega^2\right)r_+r_- + 4eQr_+\omega\left(a^2 + 3r_-^2\right) + 4\omega^2 r_-^3(r_- - 2r_+)}{2(r_+ - r_-)^2} - \frac{4eQr_-\omega\left(r_-^2 - a^2\right)}{2(r_+ - r_-)^2} \; ; \tag{4.150}$$

$$E_4 = \frac{\left(4e^2Q^2 - 8am\omega + 8a^2\omega^2\right)r_+^2 - 8eQr_+\omega\left(a^2 + r_+^2\right) + 4r_+^4\omega^2 + 4a^2(m-a\omega)^2}{4(r_+ - r_-)^2} + \frac{8aemQr_+ + (r_+ - r_-)^2}{4(r_+ - r_-)^2} \; ; \tag{4.151}$$

$$E_5 = \frac{\left(4e^2Q^2 - 8am\omega + 8a^2\omega^2\right)r_-^2 - 8eQr_-\omega\left(a^2 + r_-^2\right) + 4r_-^4\omega^2 + 4a^2(m-a\omega)^2}{4(r_+ - r_-)^2} + \frac{+8aemQr_- + (r_+ - r_-)^2}{4(r_+ - r_-)^2} \; . \tag{4.152}$$

A parte radial da equação de Klein-Gordon para uma partícula escalar massiva carregada em um espaço-tempo de Kerr-Newman na região exterior ao horizonte de evento, dada pela Eq.(4.122), pode ser escrita como a Eq.(3.46) e, portanto, sua solução é dada por (3.47), a saber,

$$Z(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int\left(\alpha + \frac{\beta+1}{x} + \frac{\gamma+1}{x-1}\right)dx}\,\mathrm{HeunC}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta;x) \; , \tag{4.153}$$

e os parâmetros α, β, γ, δ e η são dados por:

$$\alpha = 2(r_+ - r_-)\left(\mu^2 - \omega^2\right)^{1/2} \; ; \tag{4.154a}$$

$$\beta = \frac{2i\left[\omega(r_+^2 + a^2) - am - eQr_+\right]}{r_+ - r_-} \; ; \tag{4.154b}$$

$$\gamma = \frac{2i\left[\omega(r_-^2 + a^2) - am - eQr_-\right]}{r_+ - r_-} \; ; \tag{4.154c}$$

$$\delta = (r_+ - r_-)\left[2eQ\omega + (r_+ + r_-)\left(\mu^2 - 2\omega^2\right)\right] \; ; \tag{4.154d}$$

$$\eta = \frac{-2a^2(m-a\omega)^2 - 2aemQ(r_+ + r_-) - \left(\lambda + r_+^2\mu^2\right)(r_+ - r_-)^2}{(r_+ - r_-)^2} + \frac{-(2e^2Q^2 - 4am\omega + 4a^2\omega^2)r_+r_- - 2eQr_-\omega\left(a^2 - 3r_+^2\right) + 2\omega^2 r_+^3(r_+ - 2r_-)}{(r_+ - r_-)^2} + \frac{-2eQr_+\omega\left(r_+^2 - a^2\right)}{(r_+ - r_-)^2} \; . \tag{4.154e}$$

A solução geral da Eq.(4.141), válida em todo o intervalo $0 \leq x < \infty$, é obtida com o uso da Eq.(4.153). Ela é dada por [43]

$$\begin{aligned} R(x) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\alpha x}(x-1)^{\frac{1}{2}\gamma} x^{\frac{1}{2}\beta} \\ &\times \{C_1 \ \mathrm{HeunC}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta;x) \\ &+ \ C_2 \ x^{-\beta} \ \mathrm{HeunC}(\alpha,-\beta,\gamma,\delta,\eta;x)\} \ , \end{aligned} \tag{4.155}$$

onde $\mathrm{HeunC}(\alpha,\pm\beta,\gamma,\delta,\eta;x)$ são as funções confluentes de Heun, C_1 e C_2 são constantes e α, β, γ, δ e η são fixados pelas relações (4.154a)-(4.154e). Estas duas funções formam soluções linearmente independentes da equação diferencial confluente de Heun desde que β seja não-inteiro. Contudo, não há nenhuma razão física específica para impor que β deve ser inteiro.

4.10 Conclusões parciais

Neste capítulo, mostramos as dificuldades que envolvem o processo de se resolver a equação radial para um campo escalar massivo em um espaço-tempo de um buraco negro mais geral. Na época em que Rowan & Stephenson realizaram esses estudos, ainda não eram compreendidas, por completo, as propriedades das funções de Heun, de modo que não foi possível a obtenção das soluções exatas e, com isso, foi mostrado que as soluções eram válidas apenas nos limites assintóticos, a saber, próximo ao horizonte de evento e muito longe do buraco negro. Até mesmo o caso especial mais simples, o de um campo escalar sem massa em um espaço-tempo de Schwarzschild, apresentava dificuldades intransponíveis e nenhuma solução exata era conhecida no intervalo de variação da coordenada radial.

Resolvemos de forma exata a equação de Klein-Gordon para uma partícula escalar massiva em um espaço-tempo de Kerr-Newman [42]. A solução analítica é dada em termos das funções confluentes de Heun e é válida em todo o intervalo $0 \leq z < \infty$, com $z = z(x)$ e $x = x(r)$. Em comparação com as soluções obtidas por Rowan & Stephenson em [39], mostramos que quando às expandimos em primeira ordem, os resultados concordam com os nossos, exceto por uma constante multiplicativa. Obtivemos uma expressão para os níveis de energia da partícula, impondo que a solução convergente só se realiza em termos dos polinômios de Heun. Tratamos também do caso extremo, onde a solução é obtida em termos das funções duplamente confluentes de Heun, o que mostra que a dinâmica é qualitativamente diferente do caso geral.

Obtivemos também a solução analítica da equação radial de Klein-Gordon para um campo escalar massivo em um buraco negro de Schwarzschild, válida em todo o intervalo $0 \leq z < \infty$, com $z = z(x)$ e $x = x(r)$, e dada em termos das funções confluentes de Heun.

Além disso, tratamos o caso mais geral da equação de Klein-Gordon, isto é, para um campo escalar massivo carregado. Neste caso, mostramos que as equações angular e radial

são modificadas substancialmente de modo que, mesmo suas soluções ainda serem dadas em termos das funções confluentes de Heun, seus parâmetros são modificados de forma quantitativa. Em comparação com as soluções obtidas por Wu & Cai [40] e Furuhashi & Nambu [41], nossos resultados são válidos em todo o espaço, isto é, do horizonte de evento exterior ao infinito, e são expressos em termos de funções analíticas.

Portanto, as soluções aqui obtidas [42, 43] generalizam os resultados encontrados por Rowan & Stephenson em [39, 54, 56], Wu & Cai [40] e Furuhashi & Nambu [41]. E de posse das soluções exatas, podemos estudar diversos efeitos de interesse físico, tais como teoria de perturbação, estabilidade, efeito Casimir, efeito Hawking, etc. Esse último, a título de aplicação dos resultados aqui obtidos [43], será estudado no capítulo 6.

5 A equação de Klein-Gordon e a radiação Hawking em um buraco negro de Kerr-Newman-de Sitter

Visto que a radiação Hawking não considera a reação da radiação ao espaço-tempo, o espectro da radiação Hawking é exatamente um espectro do tipo de corpo negro, de modo que podemos obter apenas um parâmetro de temperatura [64]. Assim, a radiação do buraco negro não nos trará nenhuma informação a respeito da matéria no buraco negro. Isto significa que se o buraco negro evaporar completamente, toda a sua informação irá desaparecer. A informação perdida do buraco negro significa que o estado quântico puro irá decair em um estado misto, o que viola o princípio de unitariedade na mecânica quântica e é um sério desafio para a teoria básica da mecânica quântica. Vários trabalhos discutiram a perda ou não da informação durante o processo de evolução de um buraco negro [65, 66, 67], sendo este último um trabalho do Hawking no qual ele propõe que a informação deve ser conservada durante os processos de formação e evaporação do buraco negro.

Em 2000, Parikh & Wilczek [33] propuseram um método semiclássico para calcular o espectro modificado da radiação Hawking do buraco negro, na qual a radiação Hawking do buraco negro é entendida como uma espécie de tunelamento quântico. A idéia chave desse método é considerar a conservação da energia total do espaço-tempo e estabelecer uma bom sistema de coordenadas no horizonte. Usando este método, Parikh & Wilczek calcularam o espectro de emissão de partículas através de um buraco negro de Schwarzschild e um do tipo Reissner-Nordström, onde o resultado afasta o espectro puramente térmico, satisfaz o princípio de unitariedade e sustenta o resultado de conservação da informação. Vários outros trabalhos usando esse método sucederam-se [64, ver as referências 7–35 desse artigo para mais detalhes].

Quando Kerner & Mann [68] e Jiang et al. [69] calcularam o espectro da radiação de um buraco negro axial-simétrico usando o método de tunelamento proposto por Parihk & Wilczek, eles apenas consideraram que a energia e a carga do buraco negro produziam flutuações. A mudança do momento angular do buraco negro é determinada pela mudança da energia do buraco negro. Eles não consideraram o efeito da rotação das partículas irradiadas pelo buraco negro sobre o momento angular do próprio.

Como um sistema termodinâmico, o buraco negro possui temperatura e entropia. Para um espaço-tempo que não inclui um termo cosmológico, os parâmetros de estado deste sistema termodinâmico estão todos incorporados à superfície do horizonte de evento

do buraco negro, que é a "janela" que leva informação ao mundo exterior. Entretanto, para um espaço-tempo que inclui um termo cosmológico, os parâmetros de estados deste sistema termodinâmico incorporam não apenas a superfície do horizonte de evento do buraco negro, mas também a superfície do horizonte cosmológico. Ambas as superfícies são agora as tais "janelas". Devido ao fato de o horizonte de evento do buraco negro e o horizonte cosmológico possuirem os mesmos parâmetros de estado, existe uma correlação entre os mesmos. Agora, os dois horizontes possuem relevância e o estudo sobre o espectro da radiação de buracos negros se faz necessária.

Neste capítulo, analisamos a equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo carregado em um espaço-tempo de Kerr-Newman-de Sitter. Obtemos a solução analítica para a parte angular, válida em todo o espaço. No caso da parte radial, as técnicas conhecidas e descritas na seção 3.1.3 não lograram êxito, porém, seguindo o trabalho de Huaifan et al. [64], extendemos o método clássico de Damour-Ruffini [30] para discutir o espectro da radiação neste espaço-tempo. Sob a condição de que a energia, a carga e o momento angular totais do espaço-tempo são conservados, derivamos o espectro da radiação do buraco negro após considerar a reação da radiação ao espaço-tempo e a relação entre o horizonte de evento do buraco negro e o horizonte cosmológico. O espectro da radiação já não é um espectro térmico puro e desviasse do espectro do corpo negro. Isso está relacionado à mudança da entropia de Bekenstein-Hawking correspondente ao horizonte de evento do buraco negro e ao horizonte cosmológico.

5.1 A métrica de Kerr-Newman-de Sitter

O elemento de linha do espaço-tempo de Kerr-Newman-de Sitter (KNdS), nas coordenadas de Boyer-Lindquist [58], é dado por [70, 71]

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta_r}{\rho^2}\left(dt - \frac{a}{\Xi}\sin^2\theta\ d\phi\right)^2 + \frac{\Delta_\theta \sin^2\theta}{\rho^2}\left[a\ dt - \frac{(r^2+a^2)}{\Xi}\ d\phi\right]^2 \\ &+ \frac{\rho^2}{\Delta_r}dr^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_\theta}d\theta^2\ , \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde

$$\Delta_r = \left(r^2+a^2\right)\left(1-\frac{1}{3}\Lambda r^2\right) - 2Mr + q^2\ , \tag{5.2a}$$

$$\Delta_\theta = 1 + \frac{1}{3}\Lambda a^2\cos^2\theta\ , \tag{5.2b}$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta\ , \tag{5.2c}$$

$$\Xi = 1 + \frac{1}{3}\Lambda a^2\ . \tag{5.2d}$$

Os parâmetros M, a e q estão associados à massa, momento angular e carga do espaço-tempo, respectivamente, e Λ é a constante cosmológica positiva. Podemos escrever o tensor

métrico do espaço-tempo de KNdS como

$$(g_{\sigma\tau}) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\rho^2}\left(\Delta_r - \Delta_\theta a^2 \sin^2\theta\right) & 0 & 0 & \frac{-a\sin^2\theta}{\rho^2\Xi}\left[\Delta_\theta\left(r^2+a^2\right)-\Delta_r\right] \\ 0 & \frac{\rho^2}{\Delta_r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho^2}{\Delta_\theta} & 0 \\ \frac{-a\sin^2\theta}{\rho^2\Xi}\left[\Delta_\theta\left(r^2+a^2\right)-\Delta_r\right] & 0 & 0 & \frac{\sin^2\theta}{\rho^2\Xi^2}\left[\Delta_\theta\left(r^2+a^2\right)^2-\Delta_r a^2\sin^2\theta\right] \end{pmatrix} , \quad (5.3)$$

a partir do qual obtemos

$$g \equiv \det(g_{\sigma\tau}) = -\frac{\rho^4\sin^2\theta}{\Xi^2} . \quad (5.4)$$

Assim, as componentes contravariantes de $g_{\sigma\tau}$ são dadas por

$$(g^{\sigma\tau}) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\rho^2\Delta_r\Delta_\theta}\left[\Delta_\theta\left(r^2+a^2\right)^2-\Delta_r a^2\sin^2\theta\right] & 0 & 0 & \frac{-\Xi a}{\rho^2\Delta_r\Delta_\theta}\left[\Delta_\theta\left(r^2+a^2\right)-\Delta_r\right] \\ 0 & \frac{\Delta_r}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_\theta}{\rho^2} & 0 \\ \frac{-\Xi a}{\rho^2\Delta_r\Delta_\theta}\left[\Delta_\theta\left(r^2+a^2\right)-\Delta_r\right] & 0 & 0 & \frac{\Xi^2}{\rho^2\Delta_r\Delta_\theta\sin^2\theta}\left(\Delta_r-\Delta_\theta a^2\sin^2\theta\right) \end{pmatrix} . \quad (5.5)$$

O potencial eletromagnético é dado por [72]

$$A_\sigma = -\frac{qr}{\rho^2}\left(1,0,0,-\frac{a\sin^2\theta}{\Xi}\right) . \quad (5.6)$$

A partir da Eq.(5.2a), temos que a equação da superfície de horizonte do espaço-tempo de Kerr-Newman-de Sitter é obtida a partir da condição

$$\Delta_r = 0 , \quad (5.7)$$

ou

$$-\frac{1}{3}\Lambda\left[r^4-\left(\frac{3}{\Lambda}-a^2\right)r^2+\frac{6M}{\Lambda}r-\frac{3}{\Lambda}\left(a^2+q^2\right)\right]=0 , \quad (5.8a)$$

$$-\frac{1}{3}\Lambda(r-r_c)(r-r_{--})(r-r_+)(r-r_-)=0 . \quad (5.8b)$$

Comparando a Eq.(5.8a) com a equação especial quadrática

$$r^4+a_1r^2+a_2r+a_3=0 , \quad (5.9)$$

temos

$$a_1 = -\left(\frac{3}{\Lambda}-a^2\right) , \quad (5.10a)$$

$$a_2 = \frac{6M}{\Lambda} , \quad (5.10b)$$

$$a_3 = -\frac{3}{\Lambda}\left(a^2+q^2\right) . \quad (5.10c)$$

A solução padrão da Eq.(5.8a), ou Eq.(5.9), é

$$r_c = -u+v+w , \quad (5.11a)$$

$$r_{--} = -u - v - w \ , \tag{5.11b}$$

$$r_{+} = u - v + w \ , \tag{5.11c}$$

$$r_{-} = u + v - w \ , \tag{5.11d}$$

onde

$$u = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[-a_1 - \sqrt{a_1^2 + 12a_3} \cos\left(\frac{1}{3}\chi - \frac{1}{2}\pi\right) \right]^{\frac{1}{2}} \ , \tag{5.12a}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[-a_1 - \sqrt{a_1^2 + 12a_3} \cos\left(\frac{1}{3}\chi + \frac{1}{3}\pi\right) \right]^{\frac{1}{2}} \ , \tag{5.12b}$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[-a_1 + \sqrt{a_1^2 + 12a_3} \cos\left(\frac{1}{3}\chi\right) \right]^{\frac{1}{2}} \ , \tag{5.12c}$$

$$\cos\chi = \frac{a_1^3 + \frac{27}{2}a_2^2 - 36a_1a_3}{\left[a_1^2 + 12a_3\right]^{3/2}}. \tag{5.13}$$

As expressões gerais para os horizontes cosmológicos r_c, r_{--}, e para os horizontes de evento do buraco negro r_+, r_-, são muito complicadas. Quando

$$\frac{1}{\Lambda} \gg M^2 > a^2 + q^2 \ , \tag{5.14}$$

os valores aproximados de r_c, r_{--}, r_+, r_- são

$$r_c = r_c^{(0)} + r_c^{(1)} \ , \tag{5.15a}$$

$$r_{--} = r_{--}^{(0)} + r_{--}^{(1)} \ , \tag{5.15b}$$

$$r_{+} = r_{+}^{(0)} + r_{+}^{(1)} \ , \tag{5.16a}$$

$$r_{-} = r_{-}^{(0)} + r_{-}^{(1)} \ , \tag{5.16b}$$

onde

$$r_c^{(0)} = + \left(\frac{3}{\Lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \ , \tag{5.17a}$$

$$r_{--}^{(0)} = - \left(\frac{3}{\Lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \ , \tag{5.17b}$$

$$r_c^{(1)} = -M \ , \tag{5.17c}$$

$$r_{--}^{(1)} = -M \ , \tag{5.17d}$$

e

$$r_{+}^{(0)} = M + \sqrt{M^2 - (a^2 + q^2)} \ , \tag{5.18a}$$

$$r_{-}^{(0)} = M - \sqrt{M^2 - (a^2 + q^2)} \ , \tag{5.18b}$$

$$r_{+}^{(1)} = +\frac{1}{6}\Lambda \frac{1}{\sqrt{M^2 - (a^2 + q^2)}} r_{+}^{(0)2} \left[r_{+}^{(0)2} + a^2 \right] \ , \tag{5.18c}$$

$$r_{-}^{(1)} = -\frac{1}{6}\Lambda \frac{1}{\sqrt{M^2 - (a^2 + q^2)}} r_{-}^{(0)2} \left[r_{-}^{(0)2} + a^2 \right] \ . \tag{5.18d}$$

Portanto, neste limite, a Eq.(5.7) possui quatro soluções reais, r_c, r_{--}, r_+ e r_-, onde r_c, r_+, r_- são positivas, $r_c > r_+$ e r_{--} é negativa. r_c e r_{--} correspondem aos horizontes cosmológicos de de Sitter. r_+ e r_- correspondem aos horizontes de evento e de Cauchy do buraco negro de Kerr-Newman.

5.2 Termodinâmica de um buraco negro de Kerr-Newman-de Sitter

A massa de Abbott & Desser (AD) da solução de KNdS pode ser expressa em termos do raio do horizonte r_+, do momento angular a e da carga q [71, 72]:

$$E = \frac{-M}{\Xi} = \frac{\left(r_+^2 + a^2\right)\left(r_+^2 - 3/\Lambda\right) - q^2 3/\Lambda}{2\Xi r_+ 3/\Lambda} \ . \tag{5.19}$$

A temperatura Hawking do horizonte do buraco negro é dada por

$$T_+ = \frac{\kappa_+}{2\pi} = \frac{1}{4\pi}\frac{\Delta_r'(r_+)}{r_+^2 + a^2} = -\frac{3r_+^4 + r_+^2\left(a^2 - 3/\Lambda\right) + \left(a^2 + q^2\right)3/\Lambda}{4\pi r_+\left(r_+^2 + a^2\right)3/\Lambda} \ , \tag{5.20}$$

onde

$$\Delta_r'(r_+) \equiv \left.\frac{d\Delta_r}{dr}\right|_{r=r_+} \ . \tag{5.21}$$

A entropia associada com o horizonte do buraco negro pode ser calculada como

$$S_+ = \frac{\pi\left(r_+^2 + a^2\right)}{\Xi} \ . \tag{5.22}$$

A velocidade angular do horizonte do buraco negro é dada por

$$\Omega_+ = \frac{a\Xi}{r_+^2 + a^2} \ . \tag{5.23}$$

O momento angular J, a carga elétrica Q e o potencial elétrico Φ_+ são dados por

$$J = \frac{Ma}{\Xi^2} \ , \tag{5.24a}$$

$$Q = \frac{q}{\Xi} \ , \tag{5.24b}$$

$$\Phi_+ = \frac{qr_+}{r_+^2 + a^2} \ . \tag{5.24c}$$

As quantidades obtidas acima para o horizonte do buraco negro, satisfazem a primeira lei da termodinâmica

$$dE = T_+ \ dS_+ + \Omega_+ \ dJ + \Phi_+ \ dQ \ . \tag{5.25}$$

O horizonte cosmológico possui as seguinte quantidades termodinâmicas associadas:

$$T_c = -\frac{\kappa_c}{2\pi} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\Delta_r'(r_c)}{r_c^2 + a^2} = \frac{3r_c^4 + r_c^2\left(a^2 - 3/\Lambda\right) + \left(a^2 + q^2\right)3/\Lambda}{4\pi r_c\left(r_c^2 + a^2\right)3/\Lambda} \ ; \tag{5.26a}$$

$$S_c = \frac{\pi\left(r_c^2 + a^2\right)}{\Xi} \ ; \tag{5.26b}$$

$$\Omega_c = -\frac{a\Xi}{r_c^2 + a^2} \ ; \tag{5.26c}$$

$$J = \frac{Ma}{\Xi^2} \ ; \tag{5.26d}$$

$$Q = \frac{q}{\Xi} \ ; \tag{5.26e}$$

$$\Phi_c = -\frac{qr_c}{r_c^2 + a^2} \ . \tag{5.26f}$$

A massa de Balasubranmanian, de Boer e Minic (BBM) do buraco negro KNdS é

$$\tilde{E} = \frac{-M}{\Xi} = \frac{\left(r_c^2 + a^2\right)\left(r_c^2 - 3/\Lambda\right) - q^2 3/\Lambda}{2\Xi r_c 3/\Lambda} \ . \tag{5.27}$$

As quantidades obtidas acima do horizonte cosmológico, também satisfazem a primeira lei da termodinâmica

$$d\tilde{E} = T_c \ dS_c + \Omega_c \ dJ + \Phi_c \ dQ \ . \tag{5.28}$$

5.3 Equações de movimento: campo escalar massivo carregado

Em um espaço-tempo curvo, a equação de Klein-Gordon covariante para uma partícula escalar massiva carregada pode ser escrita, nas unidades de $G \equiv c \equiv \hbar \equiv 1$ na Eq.(2.35), como

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\sigma\left(g^{\sigma\tau}\sqrt{-g}\partial_\tau\right)\right. \\ - \quad & \left.\frac{ie}{\sqrt{-g}}A^\sigma(\partial_\sigma\sqrt{-g}) - ie(\partial_\sigma A^\sigma) - 2ieA^\sigma\partial_\sigma - e^2A^\sigma A_\sigma - \mu_0^2\right]\Psi = 0 \ . \end{aligned} \tag{5.29}$$

onde μ_0 é a massa da partícula escalar e e é a carga da partícula. Substituindo as Eqs.(5.4)-(5.6) na Eq.(5.29), obtemos a seguinte equação

$$\begin{aligned} & \left\{\frac{1}{\Delta_r\Delta_\theta}\left[\Delta_\theta\left(r^2+a^2\right)^2 - \Delta_r a^2\sin^2\theta\right]\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta_r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\Delta_\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right. \\ - \quad & \frac{\Xi^2}{\Delta_r\Delta_\theta\sin^2\theta}\left(\Delta_r - \Delta_\theta a^2\sin^2\theta\right)\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{2\Xi a}{\Delta_r\Delta_\theta}\left[\Delta_\theta\left(r^2+a^2\right) - \Delta_r\right]\frac{\partial^2}{\partial t\ \partial\phi} \\ + \quad & \left.2ie\frac{qr}{\Delta_r}\left[\left(r^2+a^2\right)\frac{\partial}{\partial t} + a\Xi\frac{\partial}{\partial\phi}\right] + \mu_0^2\rho^2 - e^2q^2r^2\frac{1}{\Delta_r}\right\}\Psi = 0 \ . \end{aligned} \tag{5.30}$$

A fim de resolver a Eq.(5.30), vamos admitir que sua solução pode ser separada como segue

$$\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(r,\theta)\mathrm{e}^{im\phi}\mathrm{e}^{-i\omega t} \ . \tag{5.31}$$

Substituindo a Eq.(5.31) na Eq.(5.30), encontramos que

$$\begin{aligned} &- \omega^2\frac{1}{\Delta_r\Delta_\theta}\left[\Delta_\theta\left(r^2+a^2\right)^2-\Delta_r a^2\sin^2\theta\right]\psi-\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta_r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\Delta_\theta\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\\ &+ m^2\frac{\Xi^2}{\Delta_r\Delta_\theta\sin^2\theta}\left(\Delta_r-\Delta_\theta a^2\sin^2\theta\right)\psi+m\omega\frac{2\Xi a}{\Delta_r\Delta_\theta}\left[\Delta_\theta\left(r^2+a^2\right)-\Delta_r\right]\psi\\ &+ 2\frac{eqr}{\Delta_r}\left[\left(r^2+a^2\right)\omega-a\Xi m\right]\psi+\left(\mu_0^2\rho^2-e^2q^2r^2\frac{1}{\Delta_r}\right)\psi=0\ . \end{aligned} \tag{5.32}$$

Seja $\psi(r,\theta)=R(r)S(\theta)$, temos então

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\Delta_\theta\sin\theta\frac{dS(\theta)}{d\theta}\right]+\left[-\frac{1}{\Delta_\theta}\left(\omega a\sin\theta-\frac{m\Xi}{\sin\theta}\right)^2-\mu_0^2a^2\cos^2\theta+\lambda\right]S(\theta)=0\ , \tag{5.33}$$

$$\frac{d}{dr}\left[\Delta_r\frac{dR(r)}{dr}\right]+\left\{-\left(\lambda+\mu_0^2r^2\right)+\frac{1}{\Delta_r}\left[\omega\left(r^2+a^2\right)-am\Xi-eqr\right]^2\right\}R(r)=0\ , \tag{5.34}$$

onde λ é a constante de separação, ω é a energia da partícula e m é o número quântico azimutal.

5.4 A equação angular

Agora, vamos obter a solução exata e geral para a parte angular da equação de Klein-Gordon dada pela Eq.(5.33).

A transformação da Eq.(5.33) em uma equação do tipo de Heun é alcançada definindo uma nova coordenada angular, x, tal que

$$x=\cos^2\theta\ , \tag{5.35}$$

e os parâmetros α, ξ, b por

$$\alpha=\frac{\Lambda a^2}{3}\ , \tag{5.36a}$$

$$\xi=\omega a\ , \tag{5.36b}$$

$$b=-\frac{1}{\alpha}\ . \tag{5.36c}$$

Assim, podemos escrever a Eq.(5.33) como

$$\begin{aligned} &\frac{d^2S}{dx^2}+\left(\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-b}\right)\frac{dS}{dx}\\ &+\frac{1}{x(x-1)(x-b)}\left[\frac{\mu_0a^2}{4\alpha}x-\frac{\alpha\lambda+\xi^2}{4\alpha^2}-\frac{\frac{m^2(1+\alpha)}{4\alpha}}{x-1}+\frac{\frac{(m\alpha-\xi)^2(1+\alpha)}{4\alpha^3}}{x-b}\right]S=0\ . \end{aligned} \tag{5.37}$$

Note que a equação acima possui uma forma algébrica comparável à descrita no item (B) da seção 3.1.3. Assim, para identificarmos os expoentes a serem utilizados na transformação F-homotópica a ser aplicada, vamos reescrever a Eq.(5.37) na forma

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2S}{dx^2}+\left(\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-b}\right)\frac{dS}{dx}\\
+\;&\left\{-\left(\frac{m}{2}\right)^2\frac{1}{(x-1)^2}-\left[\frac{i(m\alpha-\xi)}{2\sqrt{\alpha}}\right]^2\frac{1}{(x-b)^2}\right.\\
+\;&\frac{-[\xi-m(1+\alpha)]^2+\lambda}{4}\frac{1}{x}+\frac{m^2+3m^2\alpha-\lambda+a^2\mu_0^2-2m\xi}{4(1+\alpha)}\frac{1}{x-1}\\
+\;&\left.\frac{3m^2\alpha^2+m^2\alpha^3-\alpha\lambda-a^2\mu_0^2-4m\alpha\xi-2m\alpha^2\xi+\xi^2+\alpha\xi^2}{4(1+\alpha)}\frac{1}{x-b}\right\}S=0\ .
\end{aligned}\tag{5.38}$$

Logo, a transformação da variável dependente será

$$S(x)=(x-1)^{A_1}(x-b)^{A_2}f(x)\ ,\tag{5.39}$$

onde $A_1=\frac{m}{2}$ e $A_2=\frac{i(m\alpha-\xi)}{2\sqrt{\alpha}}$. Agora, $f(x)$ satisfaz a equação

$$\frac{d^2f}{dx^2}+\left(\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{1+2A_1}{x-1}+\frac{1+2A_2}{x-b}\right)\frac{df}{dx}+\frac{\bar{F}x-\bar{q}}{x(x-1)(x-b)}f=0\ ,\tag{5.40}$$

onde

$$\bar{F}\equiv\frac{1}{2}(3A_1+3A_2+4A_1A_2-2B_1-2bB_1-2bB_2-2B_3)=\bar{\alpha}\bar{\beta}\ ,\tag{5.41}$$

$$\bar{q}=\frac{1}{2}(bA_1+A_2-2bB_1)\ ,\tag{5.42}$$

e os coeficientes B_1, B_2 e B_3 são dados por:

$$B_1=\frac{-[\xi-m(1+\alpha)]^2+\lambda}{4}\ ;\tag{5.43}$$

$$B_2=\frac{m^2+3m^2\alpha-\lambda+a^2\mu_0^2-2m\xi}{4(1+\alpha)}\ ;\tag{5.44}$$

$$B_3=\frac{3m^2\alpha^2+m^2\alpha^3-\alpha\lambda-a^2\mu_0^2-4m\alpha\xi-2m\alpha^2\xi+\xi^2+\alpha\xi^2}{4(1+\alpha)}\ .\tag{5.45}$$

A parte angular da equação de Klein-Gordon para uma partícula escalar massiva carregada em um espaço-tempo de KNdS na região exterior ao horizonte de evento, dada pela Eq.(5.33), pode ser escrita como (3.3), com $\bar{\gamma}=\frac{1}{2}$, $\bar{\delta}=1+2A_1$, $\bar{\epsilon}=1+2A_2$ e $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ dados pelas raízes da equação

$$t^2+(1-\bar{\gamma}-\bar{\delta}-\bar{\epsilon})t+\bar{F}=0\ .\tag{5.46}$$

Portanto, a solução geral da Eq.(5.40), em todo o intervalo $0 \leq x < \infty$, é dada por

$$f(x) = C_1 \ \mathrm{HeunG}(b, \bar{q}; \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}; x) + C_2 \ x^{1-\bar{\gamma}} \ \mathrm{HeunG}(b, \bar{q}_1; \bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \bar{\gamma}_1, \bar{\delta}; x) \tag{5.47}$$

onde $\mathrm{HeunG}(b, \bar{q}; \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}; x)$ são as funções (gerais) de Heun, C_1 e C_2 são constantes e os parâmetros b, $\bar{q}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ e $\bar{\delta}$ são dados por:

$$b = -\frac{1}{\alpha} \ ; \tag{5.48a}$$

$$\bar{q} = \frac{-m + \lambda + i\sqrt{\alpha}(m\alpha - \xi) - (m + m\alpha - \xi)^2}{4\alpha} \ ; \tag{5.48b}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{3\alpha + 2m\alpha + 2im\alpha^{3/2} - \sqrt{\alpha(9\alpha - 4a^2\mu_0^2)} - 2i\sqrt{\alpha}\xi}{4\alpha} \ ; \tag{5.48c}$$

$$\bar{\beta} = \frac{3\alpha + 2m\alpha + 2im\alpha^{3/2} + \sqrt{\alpha(9\alpha - 4a^2\mu_0^2)} - 2i\sqrt{\alpha}\xi}{4\alpha} \ ; \tag{5.48d}$$

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{2} \ ; \tag{5.48e}$$

$$\bar{\delta} = 1 + m \ . \tag{5.48f}$$

Os parâmetros $\bar{q}_1$, $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\beta}_1$ e $\bar{\gamma}_1$ são dados pelas relações (3.6a)-(3.6d).

Podemos ver que quando $\Lambda \to 0 \Rightarrow \alpha \to 0$, de modo que $b \sim \infty$ e, de acordo com a seção 3.1.4, isto dá origem a um processo de confluência na Eq.(5.40), transformando-a em uma equação confluente de Heun. Isto mostra que no limite quando $\Lambda = 0$, recuperamos, ao menos, o mesmo comportamento funcional da solução angular da equação de Klein-Gordon em um espaço-tempo de Kerr-Newman, dada pela Eq.(4.32), porém com os parâmetros das funções confluentes de Heun diferentes. Uma explicação para essa diferença reside no fato de que a introdução da constante cosmológica para a formação de um buraco negro de Kerr-Newman-de Sitter altera quantitativamente as singularidades do espaço-tempo – acrescentado termos da ordem de r^4, e dois horizontes cosmológicos – o que altera drasticamente o comportamento funcional da solução da equação de movimento e, por consequência, seus parâmetros.

5.5 A equação radial: transformação de coordenadas "tortoise"

As técnicas expostas na seção 3.1.3, e as demais encontradas nas referências dessa dissertação, não se aplicaram com sucesso para resolver a parte radial da equação de Klein-Gordon em um espaço-tempo de Kerr-Newman-de Sitter, dada pela Eq.(5.34). Assim, com o objetivo de estudar o efeito Hawking, iremos utilizar a transformação de coordenadas "tortoise" a fim de obter as soluções próximas do horizonte de evento exterior, ficando para um tempo futuro a retomada da análise matemática das funções do tipo de Fuchsian, a fim de se obter uma generalização das transformações expostas na seção 3.1.3.

Fazendo $K = (r^2 + a^2)\omega - am\Xi - eqr$, a Eq.(5.34) pode ser reduzida a

$$\Delta_r \frac{d^2R(r)}{dr^2} + 2\left(r - \frac{2}{3}\Lambda r^3 - \frac{1}{3}\Lambda r a^2 - M\right)\frac{dR(r)}{dr} + \left[-\left(\lambda + \mu_0^2 r^2\right) + \frac{K^2}{\Delta_r}\right] R(r) = 0\,. \quad (5.49)$$

Agora, vamos introduzir a coordenada "tortoise", r_*, através das seguintes relações [30]:

$$dr_* = \frac{1}{\Delta_r}\left(r^2 + a^2\right) dr\ , \quad (5.50a)$$

$$\frac{d}{dr} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta_r}\frac{d}{dr_*}\ , \quad (5.50b)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} = \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta_r}\right)^2 \frac{d^2}{dr_*^2} + \frac{2}{\Delta_r^2}\left[Q^2 r - Mr^2 + Ma^2 + \frac{\Lambda r\left(r^2 + a^2\right)^2}{3}\right]\frac{d}{dr_*}\ . \quad (5.50c)$$

Substituindo a Eq.(5.50a) na Eq.(5.49), obtemos

$$\left(r^2 + a^2\right)^2 \frac{d^2R(r)}{dr_*^2} + 2r\Delta_r \frac{dR(r)}{dr_*} + \left[-\Delta_r\left(\lambda + \mu_0^2 r^2\right) + K^2\right] R(r) = 0\ . \quad (5.51)$$

5.6 A radiação Hawking

Nas proximidades do horizonte de evento do buraco negro, $\Delta_r(r_+) \to 0$, de modo que a Eq.(5.51) pode ser reduzida para

$$\frac{d^2R(r_*)}{dr_*^2} + (\omega - \omega_0)^2 R(r_*) = 0\ , \quad (5.52)$$

onde $\omega_0 = m\Omega_+ + e\Phi_+$. A solução geral da Eq.(5.52) é

$$R(r_*) = C_1\ \mathrm{e}^{i(\omega-\omega_0)r_*} + C_2\ \mathrm{e}^{-i(\omega-\omega_0)r_*}\ , \quad (5.53)$$

onde C_1 e C_2 são constantes. Considerando o fator temporal, próximo ao horizonte de evento, r_+, do buraco negro, a solução de onda refletida é

$$\Psi_{out} = \mathrm{e}^{-i\omega t + i(\omega-\omega_0)r_*}\ . \quad (5.54)$$

Tomando

$$\hat{r} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega} r_*\ , \quad (5.55)$$

na superfície de horizonte do buraco negro, obtemos a solução de onda transmitida

$$\Psi_{in} = \mathrm{e}^{-i\omega(t+\hat{r})} = \mathrm{e}^{-i\omega v}\ , \quad (5.56)$$

e a solução de onda refletida

$$\Psi_{out}(r > r_+) = \mathrm{e}^{-i\omega(t-\hat{r})} = \mathrm{e}^{-i\omega v}\mathrm{e}^{2i\omega\hat{r}} = \mathrm{e}^{-i\omega v}\mathrm{e}^{2i(\omega-\omega_0)r_*}\ , \quad (5.57)$$

onde

$$v = t + \hat{r} \quad (5.58)$$

é a coordenada de Eddington-Finkelstein. Devido a Eq.(5.50a), próximo à superfície de horizonte do buraco negro r_+, podemos expandir em série de Taylor:

$$r^2 + a^2 = \left(r_+^2 + a^2\right) + ... \; ; \tag{5.59}$$

$$\Delta_r = 0 + \left.\frac{d\Delta_r}{dr}\right|_{r=r_+} (r - r_+) + ... \; . \tag{5.60}$$

Com isso, podemos integrar a Eq.(5.50a) e obter

$$\ln(r - r_+) = \frac{1}{r_+^2 + a^2} \left.\frac{d\Delta_r}{dr}\right|_{r=r_+} r_* = 2\kappa_+ r_* \; , \tag{5.61}$$

onde

$$2\kappa_+ \equiv -\frac{3r_+^4 + r_+^2\,(a^2 - 3/\Lambda) + (a^2 + q^2)\,3/\Lambda}{r_+\,(r_+^2 + a^2)\,3/\Lambda} \; , \tag{5.62}$$

κ_+ é a aceleração gravitacional sobre a superfície de horizonte do buraco negro r_+. Da Eq.(5.61), temos

$$(r - r_+) = \mathrm{e}^{2\kappa_+ r_*} \; , \tag{5.63}$$

e a onda refletida é reescrita como

$$\Psi_{out}(r > r_+) = \mathrm{e}^{-i\omega v}(r - r_+)^{\frac{i}{\kappa_+}(\omega - \omega_0)} \; . \tag{5.64}$$

A Eq.(5.64) possui uma singularidade sobre a superfície de horizonte r_+ e ela pode descrever apenas partículas refletidas fora do horizonte r_+. Ela não pode descrever as partículas refletidas sobre o horizonte.

5.7 Extensão analítica

Já que temos obtido a solução de onda refletida para fora do buraco negro $r > r_+$, também estamos interessados na solução de onda refletida para $r < r_+$. A partir da Eq.(5.64), vemos que a onda refletida é singular em $r = r_+$ e podemos extender Ψ_{out} de fora do buraco negro para dentro do buraco negro. Vamos considerar a singularidade $r = r_+$ como o centro do círculo e tomar $|r - r_+|$ como o raio. Por extensão analítica, girando $-\pi$ através da metade inferior do plano complexo r, obtemos

$$(r - r_+) \to |r - r_+|\,\mathrm{e}^{-i\pi} = (r_+ - r)\mathrm{e}^{-i\pi} \; . \tag{5.65}$$

Assim, a solução de onda refletida na superfície de horizonte r_+ é

$$\Psi_{out}(r < r_+) = \mathrm{e}^{-i\omega v}(r_+ - r)^{\frac{i}{\kappa_+}(\omega - \omega_0)} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{\kappa_+}(\omega - \omega_0)} \; . \tag{5.66}$$

Agora, usando a Eq.(5.63), a solução dada pela Eq.(5.66) pode também ser escrita na seguinte forma

$$\Psi_{out}(r < r_+) = \mathrm{e}^{-i\omega v} \mathrm{e}^{2i(\omega - \omega_0) r_*} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{\kappa_+}(\omega - \omega_0)} \; . \tag{5.67}$$

As Eqs.(5.57) e (5.67) descrevem a onda refletida dentro e fora do buraco negro, respectivamente. Portanto, para uma onda refletida que corresponde a uma partícula com energia ω, carga e e momento angular m, a taxa de decaimento da reflexão ou a probabilidade de espalhamento relativa da onda escalar na superfície do horizonte $r = r_+$ é dada por

$$\Gamma_+ = \left|\frac{\Psi_{out}(r > r_+)}{\Psi_{out}(r < r_+)}\right|^2 = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\kappa_+}(\omega-\omega_0)} \ . \tag{5.68}$$

De forma análoga, nas proximidades do horizonte cosmológico temos que $\Delta_c(r_c) \to 0$ e, portanto, podemos resolver a Eq.(5.52) e derivar a onda refletida associada a uma partícula com energia ω, carga e e momento angular m. A taxa de decaimento da reflexão na superfície do horizonte cosmológico $r = r_c$ é dada por

$$\Gamma_c = \left|\frac{\Psi_{out}(r < r_c)}{\Psi_{out}(r > r_c)}\right|^2 = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\kappa_c}(\omega-\omega_0)} \ , \tag{5.69}$$

onde $\omega_c = m\Omega_c + e\Phi_c$ e

$$2\kappa_c \equiv \frac{3r_c^4 + r_c^2\left(a^2 - 3/\Lambda\right) + \left(a^2+q^2\right)3/\Lambda}{r_c\left(r_c^2+a^2\right)3/\Lambda} \ ; \tag{5.70}$$

κ_c é a aceleração gravitacional na superfície do horizonte cosmológico.

5.8 Espectro da radiação

Podemos ver, de acordo com o que foi discutido acima, que a energia, o momento angular e a carga totais do espaço-tempo são, respectivamente, $M/\Xi + \omega$, $J + m$ e $Q + e$, ou seja, essas são as quantidades antes da radiação [73]. Entretanto, entre o horizonte de evento do buraco negro e o horizonte cosmológico, a energia, o momento angular e a carga das partículas irradiadas são, respectivamente, ω, m e e. Logo, podemos tomar o processo no qual o buraco negro irradia partículas como sendo um processo em que um buraco negro de KNdS transfere-se de um estado inicial (energia $M/\Xi + \omega$, carga $Q + e$ e momento angular $J + m$) para um estado final (energia E, carga Q e momento angular J).

Agora, para incorporar a reação da radiação ao espaço-tempo, vamos trocar a energia, o momento angular e a carga das partículas irradiadas com os parâmetros do buraco negro de KNdS. Quando os parâmetros do buraco negro de KNdS são usados, devemos garantir que a energia total, o momento angular e a carga do espaço-tempo sejam todas consevadas, isto é,

$$\begin{aligned} -\omega &= \Delta E \ , \\ \omega &= \Delta\tilde{E} \ , \\ -e &= \Delta Q \ , \\ -m &= \Delta J \ , \end{aligned} \tag{5.71}$$

onde ΔE ou $\Delta\tilde{E}$, ΔQ e ΔJ são a variação da energia, da carga e do momento angular do horizonte de evento do buraco negro e horizonte cosmológico antes e depois da radiação, respectivamente. Substituindo as Eqs.(5.25) e (5.71) na Eq.(5.68), obtemos a taxa de reflexão da onda refletida no horizonte do buraco negro $r = r_+$:

$$\begin{aligned}\Gamma_+ &= \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\kappa_+}(-\Delta E - m\Omega_+ - e\Phi_+)} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\kappa_+}(-\Delta E + \Omega_+\Delta J + \Phi_+\Delta Q)} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\kappa_+}(-T_+\Delta S_+)} \\ &= \mathrm{e}^{\Delta S_+} \ , \end{aligned} \tag{5.72}$$

onde usamos a Eq.(5.20).

De forma análoga, substituindo as Eqs.(5.28) e (5.71) na Eq.(5.69), derivamos a taxa de reflexão da onda refletida na superfície do horizonte cosmológico,

$$\Gamma_c = \mathrm{e}^{\Delta S_c} \ , \tag{5.73}$$

onde usamos a Eq.(5.26a).

Considerando o buraco negro como um sistema termodinâmico, discutimos a taxa de radiação com a qual este sistema irradia partículas com energia ω, momento angular m e carga e. De acordo com a discussão acima, quando não consideramos a radiação do horizonte cosmológico, a taxa de emissão é dada pela Eq.(5.72). Depois que o horizonte de evento do buraco negro irradia partículas, da Eq.(5.28), temos que a variação da entropia correspondente ao horizonte cosmológico é ΔS_c. Então, podemos tomar a Eq.(5.72) como a probabilidade da mudança de entropia correspondente ao horizonte cosmológico causada pelas partículas irradiadas a partir do horizonte do buraco negro. De forma análoga, podemos tomar a Eq.(5.73) como a probabilidade da mudança de entropia correspondente ao horizonte do buraco negro causada pelas partículas irradiadas a partir do horizonte cosmológico. Assim, para o horizonte de evento do buraco negro, devido às partículas irradiadas, existem duas formas que levam à mudança da entropia ΔS_+. Uma forma é tal que o buraco negro irradia partículas; a probabilidade é dada pela Eq.(5.72). A outra é tal que o horizonte cosmológico irradia partículas; a probabilidade é dada pela Eq.(5.73). Assim, para o horizonte de evento do buraco negro, devido a irradiação de partículas com energia total ω, momento angular m e carga e, a probabilidade de que a entropia mude é

$$\Gamma = \Gamma_+\Gamma_c = \mathrm{e}^{\Delta S_+ + \Delta S_c} \ . \tag{5.74}$$

Portanto, o espectro de radiação de um buraco negro de Kerr-Newman-de Sitter está relacionado não apenas com a mudança da entropia do horizonte do buraco negro, mas também a um dos horizontes cosmológicos. E o espectro da radiação satisfaz o princípio da unitariedade.

5.9 Conclusões parciais

Neste capítulo, estudamos a equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo carregado em um espaço-tempo gerado por um buraco negro de Kerr-Newman-de Sitter [64]. Resolvemos de forma exata a parte angular da equação de Klein-Gordon neste espaço-tempo, cuja solução analítica é dada em termos das funções (gerais) de Heun e é válida em todo o espaço. Como nenhuma das técnicas conhecidas na literatura se mostraram eficientes para resolver a parte radial, seguimos o trabalho de Huaifan et al. [64] para de obter as soluções válidas próximas do horizonte de evento do buraco negro e do horizonte cosmológico, a fim de estudar a radiação Hawking.

Para o caso de um buraco negro de KNdS, existe radiação não apenas a partir do horizonte de evento, mas também a partir do horizonte cosmológico. Ma [74], Chen et al. [75], Hemming & Vakkuri [76] e Parikh [77], quando estudaram o tunelamento quântico nestes espaços-tempo, trataram o horizonte de evento do buraco negro e o horizonte cosmológico como dois horizontes independentes.

Huaifan et al [64] estenderam o clássico método de Damour-Ruffini e discutiram o espectro da radiação Hawking em um buraco negro de Kerr-Newman-de Sitter (KNdS) sob a consideração de que a energia total, o momento angular total e a carga total do espaço-tempo são conservadas, onde as partículas possuem momento angular arbitrário. Depois de considerar a reação do espaço-tempo às partículas irradiadas, foi mostrado que o espectro da radiação do buraco negro de Kerr-Newman-de Sitter está relacionado não apenas a mudança de entropia do horizonte do buraco negro, mas também a mudança de entropia do horizonte cosmológico, além de satisfazer ao princípio de unitariedade.

Visto que

$$\Delta J = \Delta(Ma/\Xi^2) = -m \ , \tag{5.75}$$

onde m assume apenas valores inteiros ou zero, o momento angular do buraco negro J é quantizado. A partir da Eq.(5.75), a variação de m é determinada não apenas pela variação de M, mas também pela variação do parâmetro de rotação do buraco negro a.

Partindo do método de Damour-Ruffini, discutimos a onda refletida associada a partículas com energia ω, carga e e momento angular m. O resultado é dado pela Eq.(5.72). Sob a condição de que a energia total, o momento angular total e a carga total do espaço-tempo são conservadas, obtemos a probabilidade na qual o buraco negro passa de um estado inicial (energia $M/\Xi + \omega$, carga $Q + e$ e momento angular $J + m$) para um estado final (energia M/Ξ, carga Q e momento angular J). Isto é, a probabilidade do horizonte de evento do buraco negro radiar partículas com energia ω, carga e e momento angular m. Este resultado é consistente com o obtido por Parikh & Wilczek.

Devido ao fato de o buraco negro de Kerr-Newman-de Sitter possuir horizontes de eventos e horizontes cosmológicos, e os parâmetros de estado que descrevem os dois

horizontes serem os mesmo, as radiações dos dois horizontes estão correlacionadas. Quando discutimos os espectros da radiação destes buracos negros, devemos considerar a relevância do horizonte de evento do buraco negro e o horizonte cosmológico.

6 A radiação Hawking em um buraco negro de Kerr-Newman

Recentemente, Zhang & Zhao [78] estudaram a radiação Hawking de um buraco negro de Kerr-Newman através da introdução de um sistema de coordenadas muito particular. As coordenadas pussuem algumas propriedades atraentes: a direção do tempo é um vetor Killing, a métrica é suave para os horizontes, entre outras. Huaifan et al. [79] introduziram as coordenadas de tortoise e extenderam o método clássico de Damour-Ruffini [30] para discutir o espectro geral da radiação. Umetsu [80] apresentou a derivação da radiação Hawking usando o mecanismo do processo de tunelamento e a redução dimensional nas proximidades do buraco negro.

Neste capítulo, usando a solução radial da equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo carregado em um espaço-tempo gerado por um buraco negro de Kerr-Newman e fazendo uso das propriedades das funções confluentes de Heun, estudamos a radiação Hawking de partículas escalares massivas carregadas [43].

6.1 Termodinâmica de um buraco negro de Kerr-Newman

Vamos apresentar alguns aspectos do espaço-tempo de Kerr-Newman relevantes para estudar a radiação Hawking.

A aceleração gravitacional sobre a superfície de horizonte do buraco negro em r_+ e a temperatura da radiação Hawking são [79], respectivamente,

$$\kappa_+ \equiv \frac{\Delta_r'(r_+)}{2\left(r_+^2+a^2\right)} = \frac{r_+ - r_-}{2\left(r_+^2+a^2\right)} \tag{6.1}$$

e

$$T_+ = \frac{\kappa_+}{2\pi} \ . \tag{6.2}$$

As quantidades associadas com o buraco negro, tais como a entropia no horizonte de evento, S_+, a velocidade angular de arrastamento do horizonte exterior, Ω_+, o momento angular, J, e o potencial elétrico, Φ_+, são dados por

$$S_+ = \pi\left(r_+^2+a^2\right) \ , \tag{6.3}$$

$$\Omega_+ = \frac{a}{r_+^2+a^2} \ , \tag{6.4}$$

$$J = Ma \ , \tag{6.5}$$

$$\Phi_+ = \frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2} \ . \tag{6.6}$$

Estas quantidades obtidas dadas pelas Eqs.(6.2)-(6.6) para o horizonte de evento do buraco negro satisfazem a primeira lei da termodinâmica

$$dE = T_+ \ dS_+ + \Omega_+ \ dJ + \Phi_+ \ dQ \ . \tag{6.7}$$

As leis análogas às da termodinâmica para buracos negros podem ser enunciadas como [81]:

Lei zero: Para qualquer buraco negro em equilíbrio, T é constante ao longo de toda a superfície.

Primeira lei: Em um sistema isolado, incluindo buracos negros, a energia total do sistema é conservada.

Segunda lei: A área de superfície de um buraco negro sempre permanece a mesma ou aumenta durante algum processo.

Terceira lei: É impossível reduzir a temperatura, T, de um buraco negro a zero por um número finito de processos.

6.2 A radiação Hawking

Vamos considerar o campo escalar massivo carregado próximo ao horizonte de evento exterior a fim de discutir a radiação Hawking.

A partir das Eqs.(4.140) e (3.62) podemos ver que a solução radial dada pela Eq. (4.155), próximo ao horizonte de evento exterior, isto é, quando $r \to r_+ \Rightarrow x \to 0$, comporta-se assintoticamente como [43]

$$R(r) \sim C_1 \ (r - r_+)^{\beta/2} + C_2 \ (r - r_+)^{-\beta/2} \ , \tag{6.8}$$

onde estamos considerando contribuições apenas do primeiro termo na expansão e todas as constantes envolvidas estão incluídas em C_1 e C_2. Assim, considerando o fator temporal, nas proximidades do horizonte de evento r_+ do buraco negro, esta solução é

$$\Psi = \mathrm{e}^{-i\omega t}(r - r_+)^{\pm\beta/2} \ . \tag{6.9}$$

Da Eq.(4.154b), para o parâmetro β, temos

$$\frac{\beta}{2} = i\left[\omega\frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} - \left(m\frac{a}{r_+ - r_-} + e\frac{Qr_+}{r_+ - r_-}\right)\right] \ . \tag{6.10}$$

Da Eq.(6.1), temos

$$\frac{1}{2\kappa_+} = \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} \;\Leftrightarrow\; r_+ - r_- = 2\kappa_+ \left(r_+^2 + a^2\right) \;. \tag{6.11}$$

Logo, substituindo a Eq.(6.11) na Eq.(6.10), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2} &= \frac{i}{2\kappa_+}\left[\omega - \left(m\frac{a}{r_+^2 + a^2} + e\frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2}\right)\right] \\ &= \frac{i}{2\kappa_+}[\omega - (m\Omega_+ + e\Phi_+)] \\ &= \frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_0) \;, \end{aligned} \tag{6.12}$$

onde $\omega_0 = m\Omega_+ + e\Phi_+$.

Portanto, na superfície do horizonte exterior do buraco negro as soluções de onda transmitida e refletida são

$$\Psi_{in} = \mathrm{e}^{-i\omega t}(r - r_+)^{-\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_0)} \;, \tag{6.13}$$

$$\Psi_{out}(r > r_+) = \mathrm{e}^{-i\omega t}(r - r_+)^{\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_0)} \;. \tag{6.14}$$

Assim, obtemos as soluções das ondas transmitida e refletida nas proximidades do horizonte de evento exterior r_+ de um buraco negro de Kerr-Newman [43]. Estas soluções para campos escalares próximos do horizonte serão úteis para investigar a radiação Hawking de partículas escalares massivas carregadas. Vale a pena chamar atenção para o fato de que estamos usando a solução analítica da parte radial da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo em consideração, diferentemente dos cálculos usualmente feitos na literatura [78, 79].

Por consistência e completeza, vamos mostrar que nossa solução é exatamente a mesma obtida por outros métodos [78, 79], a menos de uma mudança de variável. Usando as Eqs.(5.55), (5.58) e (5.61), temos a seguinte solução de onda transmitida:

$$\begin{aligned} \Psi_{in} &= \mathrm{e}^{-i\omega v}\mathrm{e}^{i\omega \hat{r}}(r - r_+)^{-\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_0)} \\ &= \mathrm{e}^{-i\omega v}\mathrm{e}^{i(\omega - \omega_0)r_*}(r - r_+)^{-\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_0)} \\ &= \mathrm{e}^{-i\omega v}(r - r_+)^{\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_0)}(r - r_+)^{-\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_0)} \\ &= \mathrm{e}^{-i\omega v} \;. \end{aligned} \tag{6.15}$$

E a solução de onda refletida é dada por:

$$\begin{aligned} \Psi_{out}(r > r_+) &= \mathrm{e}^{-i\omega v}\mathrm{e}^{i\omega \hat{r}}(r - r_+)^{\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_0)} \\ &= \mathrm{e}^{-i\omega v}\mathrm{e}^{i(\omega - \omega_0)r_*}(r - r_+)^{\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_0)} \\ &= \mathrm{e}^{-i\omega v}(r - r_+)^{\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_0)}(r - r_+)^{\frac{i}{2\kappa_+}(\omega - \omega_0)} \\ &= \mathrm{e}^{-i\omega v}(r - r_+)^{\frac{i}{\kappa_+}(\omega - \omega_0)} \;. \end{aligned} \tag{6.16}$$

As soluções dadas pelas Eqs.(6.15) e (6.16) são exatamente as soluções obtidas por Zhang & Zhao em [78] e Huaifan et al. em [79].

6.3 Extensão analítica

Nesta seção obtemos, por continuação analítica, a parte real amortecida da solução refletida do campo escalar que será utilizada para construir uma expressão explícita para a taxa de decaimento Γ. Esta parte real amortecida corresponde (pelo menos em parte) à contribuição temporal para a taxa de decaimento [82, 83] encontrada no método de tunelamento da radiação Hawking.

Da Eq.(6.16), vemos que essa solução não é analítica no horizonte de evento exterior $r = r_+$. Por continuação analítica, girando $-\pi$ através da metade inferior do plano complexo r, obtemos

$$(r - r_+) \to |r - r_+|\, \mathrm{e}^{-i\pi} = (r_+ - r)\mathrm{e}^{-i\pi} \ . \tag{6.17}$$

Assim, a solução de onda refletida na superfície de horizonte r_+ é

$$\Psi_{out}(r < r_+) = \mathrm{e}^{-i\omega v}(r_+ - r)^{\frac{i}{\kappa_+}(\omega-\omega_0)}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{\kappa_+}(\omega-\omega_0)} \ . \tag{6.18}$$

Agora, usando a Eq.(5.63), a solução dada pela Eq.(6.18) pode também ser escrita na seguinte forma

$$\Psi_{out}(r < r_+) = \mathrm{e}^{-i\omega v}\mathrm{e}^{2i(\omega-\omega_0)r_*}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{\kappa_+}(\omega-\omega_0)} \ . \tag{6.19}$$

As Eqs.(6.16) e (6.19) descrevem a onda refletida fora e dentro do buraco negro, respectivamente. Portanto, para uma onda refletida de uma partícula com energia ω, carga e e momento angular m, a taxa de decaimento da reflexão ou a probabilidade de espalhamento relativa da onda escalar na superfície do horizonte de evento $r = r_+$ é dada por

$$\Gamma_+ = \left|\frac{\Psi_{out}(r > r_+)}{\Psi_{out}(r < r_+)}\right|^2 = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\kappa_+}(\omega-\omega_0)} \ . \tag{6.20}$$

Este resultado foi obtido formalmente na literatura [78, 79, 82, 83] em diferentes contextos.

6.4 Espectro da radiação

Após o horizonte de evento do buraco negro irradiar partículas com energia ω, carga elétrica e e momento angular m, a fim de considerar a reação da radiação da partícula ao espaço-tempo, devemos substituir M, Q, J por $M - \omega, Q - e, J - m$, respectivamente, no elemento de linha do espaço-tempo de Kerr-Newman, dado pela Eq.(4.1). Fazendo estas

mudanças, devemos garantir que a energia total, o momento angular total e a carga total do espaço-tempo sejam todas conservadas, isto é,

$$\begin{aligned} -\omega &= \Delta E \ , \\ -e &= \Delta Q \ , \\ -m &= \Delta J \ , \end{aligned} \tag{6.21}$$

onde ΔE, ΔQ e ΔJ são as variações da energia, da carga e do momento angular do horizonte de evento do buraco negro, antes e depois da emissão da radiação, respectivamente. Substituindo as Eqs.(6.7) e (6.21) na Eq.(6.20), obtemos a taxa de decaimento da reflexão na superfície do horizonte de evento $r = r_+$:

$$\begin{aligned} \Gamma_+ &= \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\kappa_+}(-\Delta E - m\Omega_+ - e\Phi_+)} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\kappa_+}(-\Delta E + \Omega_+ \Delta J + \Phi_+ \Delta Q)} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\kappa_+}(-T_+ \Delta S_+)} \\ &= \mathrm{e}^{\Delta S_+} \ , \end{aligned} \tag{6.22}$$

onde usamos a Eq.(6.2). ΔS_+ é a mudança da entropia de Bekenstein-Hawking, comparada antes e depois da emissão da radiação e obtida a partir das expressões para a entropia, Eq.(6.3), e para o horizonte de evento exterior, Eq.(4.8a), como segue [43]:

$$\begin{aligned} \Delta S_+ &= S_+(M-\omega, Q-e, J-m) - S_+(M,Q,J) \\ &= \pi \left[r_+^2(M-\omega, Q-e, J-m) + a^2(M-\omega, J-m) \right] \\ &- \pi \left[r_+^2(M,Q,J) + a^2(M,J) \right] \\ &= \pi \Big[2(M-\omega)^2 - (Q-e)^2 + 2(M-\omega)\sqrt{(M-\omega)^2 - a_\omega^2 - (Q-e)^2} \\ &+ Q^2 - 2M^2 - 2M\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} \Big] \ , \end{aligned} \tag{6.23}$$

onde $a = a(M,J) = J/M$ e

$$a_\omega^2 = \left(\frac{J-m}{M-\omega} \right)^2 \ . \tag{6.24}$$

De acordo com o método de Damour-Ruffini-Sannan [30, 84], a função de onda correta que descreve uma partícula saindo do buraco negro é dada por

$$\Psi_\omega(r) = N_\omega \left[H(r-r_+)\ \Psi_\omega^{out}(r-r_+) + H(r_+-r)\ \Psi_\omega^{out}(r_+-r)\ \mathrm{e}^{\frac{\pi}{\kappa_+}(\omega-\omega_0)} \right] \ , \tag{6.25}$$

onde N_ω é a constante de normalização, tal que

$$\langle \Psi_{\omega_1}(r) | \Psi_{\omega_2}(r) \rangle = -\delta(\omega_1 - \omega_2) \ , \tag{6.26}$$

onde $H(x)$ é a função degrau de Heaviside e $\Psi_\omega^{out}(x)$ são as funções de ondas normalizadas dadas, a partir da Eq.(6.16), por

$$\Psi_\omega^{out}(x) = \mathrm{e}^{-i\omega v} x^{\frac{i}{\kappa_+}(\omega-\omega_0)} \ . \tag{6.27}$$

Assim, o espectro da radiação Hawking resultante das partículas escalares pode ser obtido de duas formas, como segue. A partir da Eq.(6.20) para a probabilidade de espalhamento relativa temos

$$|N_\omega|^2 = \frac{\Gamma_+}{1-\Gamma_+} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\hbar(\omega-\omega_0)}{k_B T_+}} - 1} \ . \tag{6.28}$$

A partir da condição de normalização

$$\langle \Psi_\omega(r) | \Psi_\omega(r) \rangle = 1 = |N_\omega|^2 \left[\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\kappa_+}(\omega-\omega_0)} - 1 \right] \ , \tag{6.29}$$

obtemos o expectro resultante da radiação Hawking de partículas escalares carregadas [43]

$$|N_\omega|^2 = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\kappa_+}(\omega-\omega_0)} - 1} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\hbar(\omega-\omega_0)}{k_B T_+}} - 1} \ . \tag{6.30}$$

Portanto, podemos ver que o espectro da radiação Hawking resultante das partículas escalares possui um caráter térmico, análogo ao espectro do corpo negro, onde $k_B T_+ = \kappa_+/2\pi$, com k_B sendo a constante de Boltzmann. Note que as constantes de Planck e de Boltzmann foram introduzidas na Eq.(6.30) a fim de ter a dimensão correta.

6.5 Conclusões parciais

Neste capítulo, a partir da solução analítica da equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo carregado em um buraco negro de Kerr-Newman, obtivemos as soluções exatas das ondas transmitida e refletida próximo ao horizonte exterior [43] e utilizamos estes resultados para discutir o efeito Hawking [23].

Consideramos as propriedades das funções confluentes de Heun para obter os resultados. Esta abordagem possui a vantagem de que não se faz necessária a introdução de quaisquer sistemas de coordenadas, como por exemplo, o particular [78] ou as coordenadas "tortoise" e Eddington-Finkelstein [79].

Nossos cálculos descrevem claramente o processo no qual o buraco negro irradia partículas. Fornecemos um método simples para estudar a radiação térmica. Pudemos derivar não apenas a temperatura Hawking, mas também o espectro de corpo negro de Hawking.

7 Conclusões e perspectivas

Nesta dissertação, apresentamos as soluções analíticas da parte radial da equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo [42] e das partes angular e radial da equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo carregado [43], em um espaço-tempo de um buraco negro carregado e com rotação, descrito pela métrica de Kerr-Newman.

Estas soluções estendem as obtidas por Rowan & Stephenson [39] no sentido de que agora temos soluções analíticas para todo o espaço-tempo, que significa, na região entre o horizonte de evento e o infinito, contrariamente aos resultados de Rowan & Stephenson que foram obtidos para o campo escalar real e para regiões assintóticas, a saber, muito próximo do horizonte exterior e muito longe do buraco negro. As soluções são dadas em termos das funções confluentes de Heun e são válidas em todo o intervalo $0 \leq z < \infty$. Neste sentido, as soluções obtidas generalizam os resultados encontrados por Rowan & Stephenson [39].

Adicionalmente, também obtivemos as soluções para o buraco negro de Schwarzschild, que também são dadas em termos das funções confluentes de Heun, e para o espaço-tempo de Kerr-Newman extremo, que são dadas em termos das funções duplamente confluentes de Heun e são qualitativamente diferentes das que resolvem a equação radial para o caso do espaço-tempo de Kerr-Newman.

Os resultados obtidos tem a vantagem, quando comparados com os trabalhos de Rowan & Stephenson [39] e Furuhashi & Nambu [41], que as soluções são válidas do horizonte de evento exterior ao infinito, em vez de serem válidas apenas próximo ao horizonte de evento exterior e no infinito, como nos trabalhos de Rowan & Stephenson [39] e Furuhashi & Nambu [41]. Por outro lado, comparado com o trabalho de Wu & Cai [40], nossos resultados são dados em termos de funções analíticas, e não em formas integrais ou em forma de séries.

A partir das soluções analíticas para a parte radial da equação de Klein-Gordon em um buraco negro de Kerr-Newman e das propriedades das funções confluentes de Heun, obtemos as soluções para as ondas transmitida e refletida próximo ao horizonte de evento exterior e usamos estes resutados para discutir a radiação Hawking [43].

Mostramos que nessa linha de pesquisa existe uma série de problemas de interesse físico que agora podem ser analisados de forma exata, com suas soluções dadas em termos das funções de Heun. As soluções aqui obtidas certamente serão importantes para o estudo do processo de espalhamento, estados estacionários de energia e na análise de estabilidade [41] de buracos negros com e sem carga.

A extensão natural desse trabalho é o estudo da equação de Dirac (partículas espinoriais) em espaços-tempo gerados por diferentes tipos de buracos negros.

Referências

[1] SCHRÖDINGER, E. Quantisierung als eigenwertproblem. *Ann. Phys. (Berlin)*, v. 386, p. 109–139, (1926). Citado na página 15.

[2] KLEIN, O. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Z. Phys.*, v. 37, p. 895–906, (1926). Citado na página 15.

[3] GORDON, W. Der comptoneffekt nach der Schrödingerschen theorie. *Z. Phys.*, v. 40, p. 117–133, (1926). Citado na página 15.

[4] KLEIN, O. Elektrodynamik und wellenmechanik vom standpunkt des korrespondenzprinzips. *Z. Phys.*, v. 41, p. 407–442, (1927). Citado na página 15.

[5] DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. *Proc. R. Soc. Lond. A*, v. 117, p. 610–624, (1928). Citado 2 vezes nas páginas 15 e 25.

[6] DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. part ii. *Proc. R. Soc. Lond. A*, v. 118, p. 351–361, (1928). Citado 2 vezes nas páginas 15 e 25.

[7] WIGNER, E. Eine bemerkung zu Einsteins neuer formulierung des allgemeinen relativitätsprinzips. *Z. Phys.*, v. 53, p. 592–596, (1929). Citado na página 15.

[8] FOCK, V. Geometrisierung der Diracschen theorie des elektrons. *Z. Phys.*, v. 57, p. 261–277, (1929). Citado na página 15.

[9] PAULI, W. Über die formulierung der naturgesetze mit fünf homogenen koordinaten teil i: Klassische theorie. *Ann. Phys. (Berlin)*, v. 410, p. 305–336, (1933). Citado na página 15.

[10] PAULI, W. Über die formulierung der naturgesetze mit fünf homogenen koordinaten teil ii: Die Diracschen gleichungen für die materiewellen. *Ann. Phys. (Berlin)*, v. 410, p. 337–372, (1933). Citado na página 15.

[11] SCHRÖDINGER, E. The proper vibrations of the expanding universe. *Physica*, v. 6, p. 899–912, (1939). Citado na página 15.

[12] COUCH, W. E. Solutions to wave equations on black hole geometries. *J. Math. Phys.*, v. 22, p. 1457–1462, (1981). Citado na página 15.

[13] COUCH, W. E. Solutions to wave equations on black hole geometries. ii. *J. Math. Phys.*, v. 26, p. 2286–2296, (1985). Citado na página 15.

[14] PIMENTEL, L. O.; MACÍAS, A. Klein-Gordon and Weyl equations in the Gödel universe. *Phys. Lett. A*, v. 117, p. 325–327, (1986). Citado na página 15.

[15] ELIZALDE, E. Series solutions for the Klein-Gordon equation in Schwarzschild space-time. *Phys. Rev. D*, v. 36, p. 1269–1272, (1987). Citado na página 15.

[16] PIMENTEL, L. O. The Klein-Gordon equation in some anisotropic cosmologies. *Gen. Relativ. Grav.*, v. 24, p. 985–989, (1992). Citado na página 15.

[17] SEMIZ, I. Klein-Gordon equation is separable on the dyon black-hole metric. *Phys. Rev. D*, v. 45, p. 532–533, (1992). Citado na página 15.

[18] KRAORI, K. D.; BORGOHAIN, P.; DAS, D. Exact scalar and spinor solutions in the field of a stationary cosmic string. *J. Math. Phys.*, v. 35, p. 1032–1036, (1994). Citado na página 15.

[19] FILHO, R. M. T.; BEZERRA, V. B. Scalar particles in weak gravitational fields. *Class. Quantum Grav.*, v. 21, p. 307–315, (2004). Citado na página 15.

[20] ALIMOHAMMADI, A.; VAKILI, B. Spin-0 and spin-1/2 particles in a constant scalar-curvature background. *Ann. Phys. (NY)*, v. 310, p. 95–105, (2004). Citado na página 15.

[21] FERNANDES, S. G.; DE A. MARQUES, G.; BEZERRA, V. B. Scalar solutions in spacetimes containing a cosmic string. *Class. Quantum Grav.*, v. 23, p. 7063–7073, (2006). Citado na página 15.

[22] SEMIZ, I. Dyonic Kerr-Newman black holes, complex scalar field and cosmic censorship. *Gen. Relativ. Grav.*, v. 43, p. 833–846, (2011). Citado na página 15.

[23] HAWKING, S. W. Particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.*, v. 43, p. 199–220, (1975). Citado 2 vezes nas páginas 15 e 94.

[24] GIBBONS, G. W.; HAWKING, S. W. Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation. *Phys. Rev. D*, v. 15, p. 2738–2751, (1977). Citado na página 15.

[25] BANERJEE, R.; KIEFER, C.; MAJHI, B. R. Quantum gravitational correction to the Hawking temperature from the Lemaître-Tolman-Bondi model. *Phys. Rev. D*, v. 82, p. 044013, (2010). Citado na página 15.

[26] UMETSU, K. Tunneling mechanism in Kerr-Newman black hole and dimensional reduction near the horizon. *Phys. Lett. B*, v. 692, p. 61–63, (2010). Citado na página 15.

[27] YALE, A. Exact Hawking radiation of scalars, fermions, and bosons using the tunneling method without back-reaction. *Phys. Lett. B*, v. 697, p. 398–403, (2011). Citado na página 15.

[28] BOULWARE, D. G. Quantum field theory in Schwarzschild and Rindler spaces. *Phys. Rev. D*, v. 11, p. 1404–1423, (1975). Citado na página 15.

[29] HARTLE, J. B.; HAWKING, S. W. Path-integral derivation of black-hole radiance. *Phys. Rev. D*, v. 13, p. 2188–2203, (1976). Citado na página 15.

[30] DAMOUR, T.; RUFFINI, R. Black-hole evaporation in the Klein-Sauter-Heisenberg-Euler formalism. *Phys. Rev. D*, v. 14, p. 332–334, (1976). Citado 5 vezes nas páginas 15, 74, 82, 89 e 93.

[31] GIBBONS, G. W.; PERRY, M. J. Black holes and thermal Green functions. *Proc. R. Soc. Lond. A*, v. 358, p. 467–494, (1978). Citado na página 15.

[32] SANNAN, S. Heuristic derivation of the probability distributions of particles emitted by a black hole. *Gen. Relativ. Grav.*, v. 20, p. 239–246, (1988). Citado na página 15.

[33] PARIKH, M. K.; WILCZEK, F. Hawking radiation as tunneling. *Phys. Rev. Lett.*, v. 85, p. 5042–5045, (2000). Citado 2 vezes nas páginas 15 e 73.

[34] AKHMEDOV, E. T.; AKHMEDOVA, V.; SINGLETON, D. Hawking temperature in the tunneling picture. *Phys. Lett. B*, v. 642, p. 124–128, (2006). Citado na página 15.

[35] AKHMEDOV, E. T.; AKHMEDOVA, V.; SINGLETON, D.; PILLING, T. Thermal radiation of various gravitational backgrounds. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 22, p. 1705–1715, (2007). Citado na página 15.

[36] HEUN, K. Zur theorie der Riemann'schen functionen zweiter ordnung mit vier verzweigungspunkten. *Math. Ann.*, v. 33, p. 161–179, (1889). Citado 3 vezes nas páginas 16, 29 e 32.

[37] RONVEAUX, A. *Heun's differential equations*. 1. ed. New York: Oxford University Press, (1995). Citado 8 vezes nas páginas 16, 29, 30, 31, 32, 39, 40 e 41.

[38] HORTAÇSU, M. Heun functions and their uses in physics. *arXiv:1101.0471v5 [math-ph]*, (2013). Citado 2 vezes nas páginas 16 e 29.

[39] ROWAN, D. J.; STEPHENSON, G. The Klein-Gordon equation in a Kerr-Newman background space. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 10, p. 15–23, (1977). Citado 11 vezes nas páginas 16, 17, 45, 49, 50, 51, 59, 60, 71, 72 e 95.

[40] WU, S. Q.; CAI, X. Exact solutions to sourceless charged massive scalar field equation on Kerr-Newman background. *J. Math. Phys.*, v. 40, p. 4538–4548, (1999). Citado 4 vezes nas páginas 16, 17, 72 e 95.

[41] FURUHASHI, H.; NAMBU, Y. Instability of massive scalar fields in Kerr-Newman spacetime. *Prog. Theor. Phys.*, v. 112, p. 983–995, (2004). Citado 4 vezes nas páginas 16, 17, 72 e 95.

[42] BEZERRA, V. B.; VIEIRA, H. S.; COSTA, A. A. The Klein-Gordon equation in the spacetime of a charged and rotating black hole. *Class. Quantum Grav.*, v. 31, p. 045003, (2014). Citado 11 vezes nas páginas 16, 45, 57, 58, 60, 62, 65, 66, 71, 72 e 95.

[43] VIEIRA, H. S.; BEZERRA, V. B.; MUNIZ, C. R. Exact solutions of the Klein-Gordon equation in the Kerr-Newman background and Hawking radiation. *arXiv:1401.5397v3 [gr-qc]*, (2014). Citado 14 vezes nas páginas 16, 17, 45, 64, 66, 68, 71, 72, 89, 90, 91, 93, 94 e 95.

[44] BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D. *Relativistic quantum mechanics*. 1. ed. New York: McGraw-Hill, Inc., (1964). Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

[45] DE OLIVEIRA, C. G.; TIOMNO, J. Representations of Dirac equation in general relativity. *Nuovo Cim.*, v. 24, p. 672–687, (1962). Citado na página 28.

[46] SLAVYANOV, S. Y.; LAY, W. *Special functions*. 1. ed. Oxford University Press, (2000). Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 40.

[47] FIZIEV, P. P. Novel relations and new properties of confluent Heun's functions and their derivatives of arbitrary order. *J. Phys. A: Math. Theor.*, v. 43, p. 035203, (2010). Citado 3 vezes nas páginas 30, 38 e 42.

[48] OLVER, F. W. J.; LOZIER, D. W.; BOISVERT, R. F.; CLARK, C. W. *Nist handbook of mathematical functions*. 1. ed. New York: Cambridge University Press, (2010). Citado na página 31.

[49] MAIER, R. S. The 192 solutions of the Heun equation. *Math. Comp.*, v. 76, p. 811–843, (2007). Citado na página 33.

[50] INCE, E. L. *Ordinary differential equations*. 1. ed. New York: Dover Publications, (1926). Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.

[51] FORSYTH, A. *Theory of differential equations, part iii*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, (1902). Citado na página 33.

[52] FIZIEV, P. P. Classes of exact solutions to the Teukolsky master equation. *Class. Quantum Grav.*, v. 27, p. 135001, (2010). Citado 2 vezes nas páginas 40 e 42.

[53] DECARREAU, A.; MARONI, P.; ROBERT, A. Sur les equations confluentes de l'equation de Heun. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér. I*, v. 92, p. 151–189, (1978). Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

[54] ROWAN, D. J.; STEPHENSON, G. The massive scalar meson field in a Schwarzschild background space. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 9, p. 1261–1265, (1976). Citado 4 vezes nas páginas 45, 62, 64 e 72.

[55] GIBBONS, G. W. Vacuum polarization and the spontaneous loss of charge by black holes. *Commun. math. Phys.*, v. 44, p. 245–264, (1975). Citado 2 vezes nas páginas 45 e 57.

[56] ROWAN, D. J.; STEPHENSON, G. Solutions of the time-dependent Klein-Gordon equation in a Schwarzschild background space. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 9, p. 1631–1635, (1976). Citado 4 vezes nas páginas 45, 62, 64 e 72.

[57] MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. 1. ed. W. H. Freeman and Company, (1973). Citado na página 45.

[58] BOYER, R. H.; LINDQUIST, R. W. Maximal analytic extension of the Kerr metric. *J. Math. Phys.*, v. 8, p. 265–281, (1967). Citado 2 vezes nas páginas 45 e 74.

[59] FORD, L. H. Quantization of a scalar field in the Kerr spacetime. *Phys. Rev. D*, v. 12, p. 2963–2977, (1975). Citado 2 vezes nas páginas 47 e 66.

[60] MORSE, P. M.; FESCHBACH, H. *Methods of theorical physics, part ii*. 1. ed. New York: McGraw-Hill, Inc., (1953). Citado 2 vezes nas páginas 47 e 66.

[61] LI, L.-W.; LEONG, M.-S.; YEO, T.-S.; KOOI, P.-S.; TAN, K.-Y. Computations of spheroidal harmonics with complex arguments: A review with an algorithm. *Phys. Rev. E*, v. 58, p. 6792–6806, (1998). Citado na página 47.

[62] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions*. 1. ed. Dover Publications, (1965). Citado 2 vezes nas páginas 52 e 54.

[63] ZHOU, S.; LIU, W.-B. Hawking radiation of charged Dirac particles from a Kerr-Newman black hole. *Phys. Rev. D*, v. 77, p. 104021, (2008). Citado na página 64.

[64] HUAIFAN, L.; SHENGLI, Z.; YUEQIN, W.; LICHUN, Z.; REN, Z. Hawking radiation of Kerr-Newman-de Sitter black hole. *Eur. Phys. J. C*, v. 63, p. 133–138, (2009). Citado 3 vezes nas páginas 73, 74 e 86.

[65] THORNE, K. S. *Black hole and time warps*. 1. ed. New York: W. W. Norton & Company, (1994). Citado na página 73.

[66] HAWKING, S. W.; PENROSE, R. *The nature of space and time*. 1. ed. New Jersey: Princeton University Press, (1996). Citado na página 73.

[67] HAWKING, S. W. Information loss in black holes. *Phys. Rev. D*, v. 72, p. 084013, (2005). Citado na página 73.

[68] KERNER, R.; MANN, R. B. Tunnelling, temperature, and taub-nut black holes. *Phys. Rev. D*, v. 73, p. 104010, (2006). Citado na página 73.

[69] JIANG, Q.-Q.; WU, S.-Q.; CAI, X. Hawking radiation from dilatonic black holes via anomalies. *Phys. Rev. D*, v. 75, p. 064029, (2007). Citado na página 73.

[70] CAI, R.-G. Cardy-Verlinde formula and thermodynamics of black holes in de Sitter spaces. *Nucl. Phys. B*, v. 628, p. 375–386, (2002). Citado na página 74.

[71] SETARE, M. R.; ALTAIE, M. B. The Cardy-Verlinde formula and entropy of topological Kerr-Newman black holes in de Sitter spaces. *Eur. Phys. J. C*, v. 30, p. 273–277, (2003). Citado 2 vezes nas páginas 74 e 77.

[72] DEHGHANI, M.; KHAJEHAZAD, H. The thermodynamics of a Kerr-Newman-de Sitter black hole. *Can. J. Phys.*, v. 81, p. 1363–1375, (2003). Citado 2 vezes nas páginas 75 e 77.

[73] ZHAO, R.; WU, Y.-Q.; ZHANG, L.-C.; LI, H.-F. Hawking radiation of five-dimensional rotating black hole. *Eur. Phys. J. C*, v. 60, p. 685–689, (2009). Citado na página 84.

[74] MA, Z. Z. Hawking temperature of Kerr-Newman-AdS black hole from tunneling. *Phys. Lett. B*, v. 666, p. 376–381, (2008). Citado na página 86.

[75] CHENA, D.-Y.; JIANGB, Q.-Q.; ZUA, X.-T. Hawking radiation of Dirac particles via tunnelling from rotating black holes in de Sitter spaces. *Phys. Lett. B*, v. 665, p. 106–110, (2008). Citado na página 86.

[76] HEMMING, S.; KESKI-VAKKURI, E. Hawking radiation from AdS black holes. *Phys. Rev. D*, v. 64, p. 044006, (2001). Citado na página 86.

[77] PARIKH, M. K. New coordinates for de Sitter space and de Sitter radiation. *Phys. Lett. B*, v. 546, p. 189–195, (2002). Citado na página 86.

[78] ZHANG, J. Y.; ZHAO, Z. New coordinates for Kerr-Newman black hole radiation. *Phys. Lett. B*, v. 618, p. 14–22, (2005). Citado 4 vezes nas páginas 89, 91, 92 e 94.

[79] LI, H.-F.; ZHANG, S.-L.; ZHAO, R. General radiation spectrum of a Kerr-Newman black hole. *Chin. J. Phys.*, v. 47, p. 618–624, (2009). Citado 4 vezes nas páginas 89, 91, 92 e 94.

[80] UMETSU, K. Hawking radiation from Kerr-Newman black hole and tunneling mechanism. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 25, p. 4123–4140, (2010). Citado na página 89.

[81] PARKER, B. R.; MCLEOD, R. J. Black hole thermodynamics in a undergraduate thermodynamics course. *Am. J. Phys.*, v. 48, p. 1066–1070, (1980). Citado na página 90.

[82] AKHMEDOVA, V.; PILLING, T.; DE GILL, A.; SINGLETON, D. Temporal contribution to gravitational WKB-like calculations. *Phys. Lett. B*, v. 666, p. 269–271, (2008). Citado na página 92.

[83] AKHMEDOV, E. T.; PILLING, T.; SINGLETON, D. Subtleties in the quasi-classical calculation of Hawking radiation. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 17, p. 2453–2458, (2008). Citado na página 92.

[84] SANNAN, S. Heuristic derivation of the probability distributions of particles emitted by a black hole. *Gen. Relativ. Gravit.*, v. 20, p. 239–246, (1988). Citado na página 93.

[85] SAKURAI, J. J. *Modern quantum mechanics*. 1. ed. Massachusetts: Addinson-Wesley, Inc., (1994). Citado na página 108.

[86] BENDER, C. M.; ORSZAG, S. A. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. 1. ed. New York: McGraw-Hill, Inc., (1978). Citado na página 109.

Apêndices

APÊNDICE A – Notações, definições e convenções

Algumas das notações, definições e convenções utilizadas ao longo do texto serão apresentadas neste apêndice.

A.1 Vetores, tensores e operadores

Os 4-vetores covariantes e contravariantes são definidos como

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \ , \tag{A.1}$$

$$x_{\mu} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (-ct, x, y, z) \ . \tag{A.2}$$

De modo que a relação entre os mesmos é expressa por

$$x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu} \ , \tag{A.3}$$

onde usamos a convenção de Einstein de soma sobre os índices repetidos, sendo $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico no espaço-tempo curvo a ser determinado pela geometria então considerada. O tensor métrico no espaço de Minkowski, η_{ab}, é definido como

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \tag{A.4}$$

onde os índices latinos $a, b = \{0, 1, 2, 3\}$ referem-se às componentes espaço-temporais no espaço de Minkowski e os índices gregos $\mu, \nu = \{0, 1, 2, 3\}$ referem-se às componentes no espaço-tempo curvo. Os índices latinos $i, j = \{1, 2, 3\}$ correspondem às componentes espaciais do 4-vetor no espaço Cartesiano.

Para as derivadas covariantes e contravariantes temos

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = (\partial_0, \partial_i) \ , \tag{A.5}$$

$$\partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = (-\partial^0, \partial^i) \ . \tag{A.6}$$

O operador de d'Alembert ou d'Alembertiano é definido como

$$\partial_\mu \partial^\mu = -\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} + \Delta = \Box \ . \tag{A.7}$$

Neste trabalho, vamos considerar a constante gravitacional de Newton $G \equiv 1$, quando escrevermos as métricas correspondentes àos buracos negros de Kerr-Newman e Kerr-Newman-de Sitter e em todos os desenvolvimentos posteriores, e não nos preocuparemos em recuperar essa constante em nenhum momento.

A.2 Notação de Dirac

Na nossa análise das soluções de onda para o efeito Hawking no horizonte de evento exterior de um buraco negro de Kerr-Newman, fomos levamos a considerar um espaço vetorial complexo. A notação utilizada nessa dissertação é a notação de bra e ket desenvolvida por P. A. M. Dirac [85].

Na mecânica quântica, um estado físico é representado por um vetor de estado em um espaço vetorial complexo. Segundo Dirac, vamos chamar tal vetor de ket e representá-lo por $|\alpha\rangle$. O espaço vetorial dual ao espaço ket é o espaço bra, denotado por $\langle\alpha|$. Assim, existe uma correspondência um-para-um entre os espaços ket e bra:

$$|\alpha\rangle \overset{\text{CD}}{\leftrightarrow} \langle\alpha| \ , \tag{A.8}$$

onde CD significa correspondência dual.

Como pode ser visto de forma completa e detalhada em [85], podemos substituir uma soma discreta sobre os autovalores $\{a'\}$ por uma integral sobre a variável contínua ξ', trocando o símbolo de Kronecker pela função delta de Dirac, de forma que

$$\langle a'|a''\rangle = \delta_{a',a''} \ \rightarrow \ \langle\xi'|\xi''\rangle = \delta(\xi' - \xi'') \ . \tag{A.9}$$

O estado ket para um estado físico arbitrário pode ser expandido em termos da base $\{|x'\rangle\}$, na forma

$$|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \, |x'\rangle \, \langle x'|\alpha\rangle \ . \tag{A.10}$$

Logo, podemos normalizar $|\alpha\rangle$ à unidade tomando:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 \ \Rightarrow \ \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \, \langle\alpha|x'\rangle \, \langle x'|\alpha\rangle = 1 \ . \tag{A.11}$$

Portanto, $\langle x'|\alpha\rangle$ é a função de onda para o estado físico representado por $|\alpha\rangle$.

APÊNDICE B – Função degrau de Heaviside

A função degrau de Heaviside, $H(x)$, algumas vezes chamada de função theta de Heaviside, é usualmente chamada apenas de função degrau. Ela foi introduzida por Oliver Heaviside no final de 1800 para representar a idealizada voltagem ligada (no tempo) ou outra fonte em problemas de engenharia elétrica. Ela é definida para número reais por

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \ , \\ 1 & \text{para } x \geq 0 \ . \end{cases} \tag{B.1}$$

Alguns autores usam uma notação diferente [86]

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \ , \\ \text{indefinido} & \text{para } x = 0 \ , \\ 1 & \text{para } x > 0 \ . \end{cases} \tag{B.2}$$

E, de forma geral, podemos definí-la como

$$H(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < x_0 \ , \\ 1 & \text{para } x \geq x_0 \ . \end{cases} \tag{B.3}$$

Podemos usar a função degrau de Heaviside para cortar ou mover funções. Multiplicando $f(t)$ por $H(t-a)$ cortamos $f(t)$ de modo que ela passa a existir (ou ligada) em $t = a$:

$$H(t-a)f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < a \ , \\ f(t) & \text{para } t > a \ . \end{cases} \tag{B.4}$$

Multiplicando $f(t)$ por $H(t-a) - H(t-b)$, com $a < b$, cortamos $f(t)$ de modo que ela passa a existir (ou ligada) em $t = a$ e a desligada em $t = b$:

$$[H(t-a) - H(t-b)]f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < a \ , \\ f(t) & \text{para } a < t < b \ , \\ 0 & \text{para } t > b \ . \end{cases} \tag{B.5}$$

A derivada da função degrau é usualmente tomada como sendo a função delta de Dirac:

$$H'(x - x_0) \equiv \frac{d}{dx} H(x - x_0) = \delta(x - x_0) \ . \tag{B.6}$$

A integral da função degrau é

$$\int_{-\infty}^{x} H(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \ , \\ x & \text{para } x > 0 \ . \end{cases} \tag{B.7}$$