

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – UFPB  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – CCEN  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – CPGF



TESE DE DOUTORADO

# Alguns resultados sobre cordas cósmicas em teorias de gravitação

Denis Barros Barbosa

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Dezembro de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – UFPB  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – CCEN  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – CPGF

# Alguns resultados sobre cordas cósmicas em teorias de gravitação

Denis Barros Barbosa

Tese de Doutorado apresentada à Coordenação do Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba(UFPB) como parte dos requisitos para a obtenção do grau de DOUTOR EM FÍSICA.

Orientador: Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra  
Co-orientador: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Dezembro de 2013

# Alguns resultados sobre cordas cósmicas em teorias de gravitação

Denis Barros Barbosa

Aprovada em \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_ .

---

*A sabedoria eterna é patrimônio da humanidade,  
que busca elevar-se moral, intelectual e  
espiritualmente.*

*Carlos Torres Pastorino*

*À minha filha Sofia, DEDICO.*

# Agradecimentos

Primeiramente à Deus, causa e efeito de todas as coisas.

À toda minha família, e em especial a minha esposa Adriana.

Ao meu orientador Prof. Valdir pela amizade e grande compreensão dispensadas a mim nesses momentos tão importantes de minha vida acadêmica, obrigado por contribuir para minha formação como pesquisador em Física.

Aos meus amigos.

Aos professores do Departamento de Física: Valdir Bezerra (Eletromagnetismo), Eugênio R. de Mello (Mecânica Quântica e Teoria de Campos), Carlos Romero (Cosmologia Matemática e Relatividade Geral) e Alexandre Rosas (Mecânica Estatística).

À CAPES pelo suporte financeiro durante a execução do trabalho.

Em especial quero agradecer ao meu co-orientador, Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly, que acompanhou toda a minha formação acadêmica em física desde a graduação na Universidade Estadual da Paraíba, passando pelo mestrado, até o doutorado que agora finalizo, obrigado por me guiar nesse novo mundo da física, muito obrigado.

E a todos aqueles que de uma forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho, obrigado.

# Resumo

Nesta tese obtemos a geometria gerada por cordas cósmicas em dois modelos de gravitação modificada, a saber: Teorias  $f(R)$  e de Gauss-Bonnet. Determinamos soluções que correspondem ao espaço-tempo gerado pela corda cósmica estática e a corda cósmica com rotação, com e sem estrutura interna em  $f(R)$ , e a corda cósmica estática na teoria de Gauss-Bonnet. Para as soluções estáticas, resolvemos a equação de Dirac, e determinamos a corrente fermiônica.

Encontramos, também, no contexto da Teoria da Relatividade Geral, uma solução com rotação para a nuvem de cordas(Espaço-tempo de Letelier), usando o método de Newman-Janis.

# Abstract

In this thesis we obtain the geometry associated with a cosmic string in two different models of modified gravity, namely:  $f(R)$  and Gauss-Bonnet theories. We Determined the solutions for static cosmic string and spinning cosmic string, with and without interior structure in  $f(R)$  and a static cosmic string in Gauss-Bonnet theory. For the static case, we solved the Dirac equation, and determined the fermionic current.

We also found, in the context general theory of relativity, one solution with rotation corresponding to a rotation cloud of strings(Letelier spacetime), by using the method of Newman-Janis.

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Formação de Defeitos Topológicos</b>	<b>5</b>
1.1 Evolução do Universo e a formação de defeitos . . . . .	6
1.2 Quebra espontânea de simetria . . . . .	7
1.2.1 Quebra espontânea de simetria discreta . . . . .	8
1.2.2 Quebra espontânea de simetria de gauge . . . . .	9
1.3 Transições de fase do Universo . . . . .	11
1.4 Exemplos de defeitos topológicos . . . . .	13
1.4.1 Paredes de domínio . . . . .	13
1.4.2 Monopolos . . . . .	14
1.4.3 Texturas . . . . .	15
1.4.4 Cordas cósmicas . . . . .	16
1.4.5 Corda cósmica no modelo de Higgs Abeliano . . . . .	20
<b>2 Teorias da Gravitação</b>	<b>23</b>
2.1 Relatividade Geral . . . . .	25
2.1.1 Equações de campo . . . . .	27
2.1.2 Ação integral da Relatividade Geral . . . . .	28
2.2 Teorias modificadas da gravitação: $f(R)$ . . . . .	32
2.2.1 Formalismo métrico em $f(R)$ . . . . .	33
2.2.2 Ação e equação de campos . . . . .	34

2.2.3	Formalismo de Palatini . . . . .	38
2.3	Teoria de gravitação de Gauss-Bonnet . . . . .	41
2.3.1	Equações de Campo . . . . .	44
2.3.2	Gravitação $f(\mathcal{G})$ na presença de matéria . . . . .	46
2.3.3	Gravitação $f(\mathcal{G})$ acoplada a um campo escalar . . . . .	47
<b>3</b>	<b>A Métrica da corda em teorias da gravitação</b>	<b>49</b>
3.1	A métrica da Corda Cósmica na Relatividade Geral . . . . .	50
3.1.1	Solução exterior . . . . .	50
3.1.2	Solução interior . . . . .	55
3.2	O Campo gravitacional da corda cósmica em teorias $f(R)$ . . . . .	57
3.2.1	Caso particular: $f(R) = R + \alpha R^2$ . . . . .	57
3.2.2	Caso particular: $f(R) = R + \alpha R^{-1}$ . . . . .	61
3.3	O Campo gravitacional da corda cósmica em teorias $f(\mathcal{G})$ . . . . .	65
3.3.1	A métrica da corda em $f(\mathcal{G})$ . . . . .	66
3.3.2	Solução Interior . . . . .	69
3.3.3	Solução Exterior . . . . .	71
3.4	Soluções da equação de Dirac no espaço-tempo da corda cósmica em $f(R)$ e $f(\mathcal{G})$ . . . . .	72
3.5	Corrente fermiônica . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Solução axialmente simétrica da corda cósmica a partir do método de Newman-Janis em Teorias <math>f(R)</math></b>	<b>78</b>
4.1	Tetradas . . . . .	79
4.2	O método de Newman-Janis . . . . .	81
4.3	Generalização do método para coordenadas esféricas . . . . .	85
4.4	Métrica axialmente simétrica da corda cósmica . . . . .	87

<b>5</b>	<b>A Corda cósmica com estrutura e com rotação em Teorias <math>f(R)</math></b>	<b>94</b>
5.1	Condições de energia em teorias $f(R)$ . . . . .	95
5.1.1	Condições de energia a partir da equação de Raychaudhuri . . . . .	97
5.1.2	Condições de energia a partir do tensor energia momento efetivo . . . . .	99
5.2	O modelo BallPoint Pen para a corda cósmica com rotação . . . . .	102
5.3	A métrica da corda cósmica com rotação . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Espaço-Tempo de Letelier com rotação</b>	<b>108</b>
6.1	Espaço-tempo de Letelier . . . . .	110
6.2	Espaço-tempo de Letelier com rotação . . . . .	113
	<b>Conclusões</b>	<b>119</b>
	<b>A Sistema avançado de coordenadas de Eddington-Finkelstein</b>	<b>123</b>
	<b>B Obtenção de <math>A(r)</math></b>	<b>126</b>
	<b>C O escalar de Gauss-Bonnet</b>	<b>127</b>
	<b>D Deficit angular</b>	<b>129</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>130</b>

# Introdução

Em princípio, toda teoria possui limites no que diz respeito à sua capacidade de descrever o mundo físico ao seu redor. A Teoria da Relatividade Geral (*TRG*), proposta por Einstein, não foge a esta regra. Para tornar mais clara a afirmativa acima, vamos considerar o fenômeno do colapso gravitacional. Para estudar o colapso gravitacional é necessário encontrar soluções para as equações de campo da TRG, procedimento este, nem sempre factível. O fato de não encontrarmos uma solução exata ou aproximada, não nos impede, no entanto, de conhecer, em linhas gerais o comportamento de um objeto em colapso. Isso é possível graças ao teorema da singularidade de Hawking-Penrose[1], segundo o qual o colapso gravitacional leva a formação de buracos negros, previstos pela Teoria da Relatividade Geral.

Nos últimos anos, com a comprovação de que o Universo está em expansão acelerada, o que não tem explicação plausível na TRG, passou-se a questionar se esta era a única teoria fundamental capaz de explicar com sucesso a interação gravitacional dentro dos limites de sua aplicabilidade. Essa expansão acelerada, não pode ser explicado pela TRG, sem o uso de hipóteses *ad hoc*<sup>1</sup>. Dentre estas, temos a considerar a constante cosmológica, modelos de quintessência, entre outras[3]. Foi justamente devido a falta de uma explicação coerente e consistente, e a falha da Teoria da Relatividade Geral de Einstein em explicar a expansão acelerada do Universo, que surgiu a proposta da *Energia Escura*, uma forma hipotética de energia, com pressão negativa que permeia todo o espaço e é responsável pela aceleração do Universo. A energia escura é a hipótese mais aceita para explicar

---

<sup>1</sup>Em física *ad hoc* significa a adição de hipóteses estranhas a uma teoria para salvá-la.

as observações feitas desde a década de noventa do século passado, que indicam que o Universo está se expandindo em ritmo acelerado, sendo responsável por 73% do total da energia do Universo [4].

Juntamente com o problema da constante cosmológica e da energia escura, existe uma gama de outros não previstos ou explicados pela TRG, como a presença da singularidade do Big Bang, o problema da planura, do horizonte e da proliferação de monopolos[5], que levaram à constatação de que o Modelo Cosmológico Padrão é inadequado para descrever o Universo.

No entanto, a extensão do modelo padrão, com a inclusão do processo inflacionário, permite explicar, de modo satisfatório, os problemas relacionados com a planura, o horizonte e a proliferação de monopolos. A impossibilidade de se explicar o problema relacionado a energia escura e a expansão acelerada do Universo, usando a Teoria da Relatividade Geral e especialmente a falta de uma teoria quântica de gravitação, levaram a um cenário em que várias teorias gravitacionais alternativas à Relatividade Geral foram propostas [7], a saber: Teorias  $f(R)$  da Gravitação[6, 7, 8], Teorias de gravidade de Gauss-Bonnet[9] e mais recentemente a teoria de Horava-Lifshitz da gravitação [10], dentre outras. Na teoria de gravitação modificada  $f(R)$  a ação de Einstein-Hilbert é modificada e generalizada, através da substituição do escalar de Ricci por uma função  $f(R)$ , desta grandeza. De forma semelhante ao que acontece em teorias  $f(R)$ , a gravitação de Gauss-Bonnet, também denominada de gravitação  $f(G)$ , modifica a ação de Einstein com a introdução de um novo escalar, denominado escalar de Gauss-Bonnet. A teoria de Horava-Lifshitz [10] sinaliza com a possibilidade de superar a não-renormalizabilidade da TRG, desde que a invariância de Lorentz seja violada no regime de altas energias.

Nessas teorias  $f(R)$  da gravitação, são incluídos invariantes de curvatura de ordem superior na ação gravitacional. As primeiras tentativas neste sentido foram feitas por Weyl[12] e Eddington[11]. Pode-se depreender que alterando a ação e, conseqüentemente, as equações de campo, com diferentes potenciais do escalar de curvatura, as equações de

campo ficam mais complicadas, o que não torna a teoria, necessariamente tão atraente.

A partir da década de sessenta, apareceram indícios de que adicionando-se à ação gravitacional termos de ordem superior, pode-se de fato, obter alguns resultados não prescritos na teoria original, à saber, a TRG. A Relatividade Geral não é uma teoria renormalizável e, portanto, não pode ser quantizada. Em 1962, Utiwama e DeWitt mostraram que a renormalização da TRG exigiria que a ação de Einstein-Hilbert fosse complementada por termos de ordem superior no escalar de curvatura [16]. Mais tarde, Stelle mostrou que termos de ordem superior na ação são de fato renormalizáveis [17], o que de fato colaborou muito para o início das pesquisas na área de gravitação envolvendo alterações na ação, que são os embriões das atuais versões das chamadas Teorias Modificadas da Gravitação[6, 7, 8].

As cordas cósmicas, objeto principal de nosso trabalho, são uma importante fonte de estudos na área da gravitação e cosmologia, e devem ter tido um papel fundamental no processo de formação das grandes estruturas presentes no Universo, no cenário em que a inflação é levada em conta. Suas origens remontam ao final da era inflacionária, e portanto, formam um importante elo de ligação entre o Universo primitivo e o atual. Com o objetivo de melhor compreender a evolução da fase atual acelerada, vamos obter soluções correspondentes a esse defeito topológico, no contexto de teorias modificadas da gravitação, em especial  $f(R)$  e  $f(\mathcal{G})$ . Quem deu o primeiro e importante passo no estudo das cordas cósmicas foi Vilenkin [18], calculando o campo gravitacional de uma corda estática e cilindricamente simétrica em primeira aproximação na Teoria da Relatividade Geral. Em seguida Hiscock[19], conseguiu determinar exatamente o campo exterior de uma corda infinitamente longa. Outros autores determinaram a métrica interna de uma corda adotando modelos específicos para o seu interior como o *ballpoint-pen* e o *flower-pot model*[20]. Estudos sobre os efeitos gravitacionais produzidos pela corda, tal como o espalhamento quântico de partículas, também foram estudados por outros autores [21, 22], todos no contexto da teoria da TRG. A partir do surgimento das teorias modificadas da

gravitação, e suas possíveis e novas possibilidades de análise do Universo em seus regimes extremos, passou-se, então, a pesquisar novamente os campos gravitacionais conhecidos da TRG, de modo a se ter uma melhor compreensão sobre os efeitos introduzidos por essas teorias, tanto no contexto gravitacional quanto no cosmológico.

No intuito de dar prosseguimento as pesquisas sobre cordas, vamos determinar, em algumas teorias de gravitação, as soluções correspondentes a este defeito topológico e enfatizar as semelhanças e diferenças com as cordas cósmicas na TRG.

Os dois primeiros capítulos desta tese são dedicados a revisões. No primeiro abordaremos a formação de defeitos topológicos, dando ênfase à corda cósmica. No segundo capítulo, fazemos uma revisão sobre teorias de gravitação modificadas que iremos utilizar, a saber, Teoria de gravitação  $f(R)$  e Teoria  $f(\mathcal{G})$ . Em seguida, no terceiro capítulo, começamos o estudo sobre cordas cósmicas em teorias modificadas da gravitação. Obteremos as soluções para a corda cósmica em teorias  $f(R)$ , duas internas e duas externas, e duas soluções em gravitação  $f(\mathcal{G})$ , interna e externa[23]. Nos espaços-tempo obtidos, determinaremos as soluções da equação de Dirac. Determinaremos, também, a corrente fermiônica. Os resultados serão objeto de uma análise comparativa com as que já foram obtidas anteriormente na TRG. No quarto capítulo, encontramos as modificações produzidas na geometria externa de uma corda com rotação em teorias  $f(R)$  [23], considerando um método desenvolvido por Newman e Janis[24]. No quinto capítulo, determinamos o espaço-tempo interno de uma corda com rotação [25], em teorias  $f(R)$ , considerando um modelo específico para o seu interior, a saber o modelo *ballpoint pen*. No capítulo 6, apresentamos a solução que corresponde ao espaço-tempo de Letelier com rotação [26], o qual é gerado por uma nuvem de cordas.

# Capítulo 1

## Formação de Defeitos Topológicos

Num dia frio, uma camada de gelo se forma rapidamente sobre a superfície de um lago. Porém, ela não cresce de maneira uniforme sobre a camada fina de água. Em vez disso, a água começa a congelar em locais diferentes e ao mesmo tempo, de forma independente, e as placas de crescimento de gelo começam a juntar-se de modo aleatório, deixando uma faixa estreita entre as partes em forma de zig-zag, formando uma fronteira na superfície do lago. Estas margens irregulares são um exemplo do que denomina-se *defeitos topológicos*.

Assim como a água se transforma em gelo (uma transição de fase), quando a temperatura diminui, levando o sistema físico a um outro estado, isto também acontece com as interações fundamentais entre partículas (bósons e férmions).

Na Cosmologia, a formação de defeitos ocorre em estados físicos fora de equilíbrio, especificamente durante as transições de fase. Se a temperatura cai rapidamente, não haverá tempo hábil suficiente para estabelecer-se o equilíbrio em pequenas regiões, com uma quebra de simetria sendo direcionada, independentemente, para cada região distinta. Isto pode resultar na formação de uma distribuição estocástica de defeitos, tais como os vórtices que aparecem no cristal. Situações semelhantes ocorrem quando simetrias são quebradas em modelos de física de partículas.

Neste capítulo, faremos uma revisão sobre a formação dos defeitos na evolução do Universo, apresentaremos alguns tipos de defeitos e discutiremos o processo da quebra espontânea de simetria.

## 1.1 Evolução do Universo e a formação de defeitos

Em 1924, Edwin Powell Hubble observou que galáxias pareciam estar se afastando da Terra. Além disso, também percebeu que a velocidade delas aumentavam a medida que se distanciavam uma das outras, e que era proporcional a esta distância. Ele imaginou que o Universo estaria inflando como um balão, sugerindo que estaria expandindo-se.

As observações de Hubble deram base observacional a uma teoria que foi elaborada, posteriormente, que diz respeito a forma como o Universo originou-se, denominada *Big Bang*. Segundo esta teoria, no início, o Universo estava concentrado em uma região pequena, em comparação com suas dimensões atuais, extremamente densa e quente, que continha uma “sopa” constituída, principalmente, por partículas de luz e outras partículas que eram criadas e aniquiladas a todo instante. Em um determinado momento, há aproximadamente 13,5 bilhões de anos atrás, ocorreu essa explosão, cuja evolução deu origem ao Universo que conhecemos hoje[28].

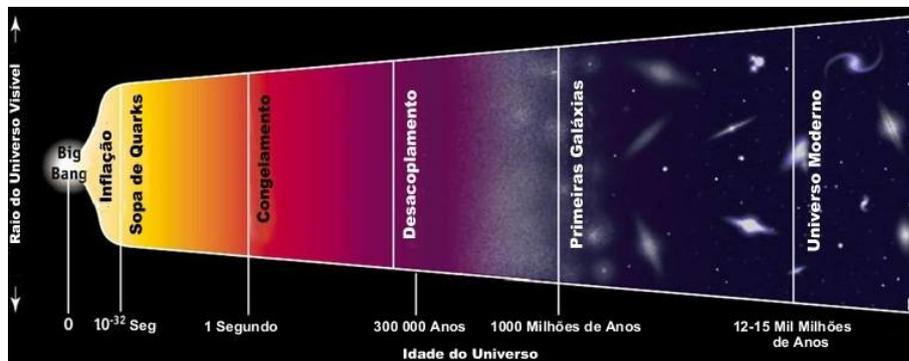


Figura 1.1: Esquema da evolução do Universo desde o Big Bang até os dias atuais.

A partir desse momento inicial, o Universo passou por uma sucessão de transições de fases, a medida que se expandia e se esfriava. As transições entre as primeiras destas fases ocorreram quando o Universo era dominado por uma interação gravitacional fundamentalmente quântica, cujos detalhes são desconhecidos, durante a qual as interações estavam unificadas, sendo caracterizadas por um elevado grau de simetria. Essas transições resultaram em quebras de simetria do sistema e podem ter tido várias

implicações importantes, incluindo a formação de defeitos topológicos como, por exemplo, a formação de cordas cósmicas, monopolos, paredes de domínio e combinações destes defeitos [18].

A origem dos defeitos topológicos é explicada naturalmente pela quebra espontânea de simetria descrita em vários modelos e teorias utilizadas na construção do modelo padrão das interações fundamentais (forças eletrofracas e fortes). Dentro do modelo padrão, essas interações se unificam em uma escala de alta energia, denominada de escala de grande unificação (GUT), que é da ordem de  $10^{16} GeV$ . Nessa escala, possivelmente existia uma grande e complexa unificação entre as interações fundamentais da natureza, e o Universo era regido por um grande número de simetrias que unificavam todas as forças. Durante o processo de esfriamento do Universo, acredita-se que várias simetrias foram quebradas espontaneamente, dando origem a objetos considerados exóticos em suas propriedades, chamados defeitos topológicos. Estes defeitos que resultaram dessas quebras de simetria, são semelhantes a uma rachadura na superfície gelada. A medida que o Universo continuou se esfriando, outras transições de fase devem ter ocorrido e novos defeitos foram formados.

Dentre os defeitos que devem ter sido formados, podemos destacar três tipos, a saber: monopolos, paredes de domínio e cordas cósmicas. No entanto, durante esses processos, os monopolos teriam se aniquilados com os anti-monopolos, as paredes de domínio colapsaram, dando origem a radiação gravitacional e as cordas possivelmente resistiram, em virtude de suas características relacionadas à estabilidade e ao fato de que não geram anisotropia na radiação cósmica de fundo (CMB), que não são observadas, e que seriam geradas por monopolos e paredes de domínio.

## 1.2 Quebra espontânea de simetria

Quando o estado de vácuo de um sistema dinâmico não possui as mesmas simetrias da Lagrangeana que descreve o sistema, dizemos que a simetria foi espontaneamente quebrada. Na verdade, devido a uma variação de estado do sistema físico, ocorrerá uma

mudança na simetria do mesmo entre um estado inicial e final, fazendo assim com que a Lagrangeana, associada a um determinado estado do sistema, não mantenha essa simetria no estado fundamental.

Para entendermos este mecanismo, analisaremos sistemas que apresentam quebra espontânea de simetria discreta e contínua.

### 1.2.1 Quebra espontânea de simetria discreta

Considere a seguinte densidade Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\phi) , \quad (1.2-1)$$

com

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^2 + \lambda \phi^4 , \quad (1.2-2)$$

onde  $\mu^2$  está associado com a massa da partícula e  $\lambda$  é uma constante de acoplamento<sup>1</sup>.

Dependendo dos sinais de  $\mu^2$  e  $\lambda$ , o potencial  $V(\phi)$  poderá ter formas distintas.

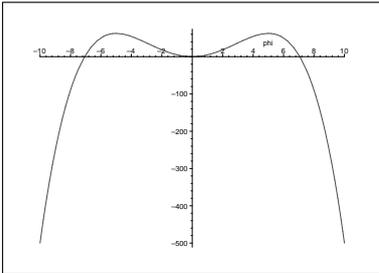


Figura 1.2:  $\lambda < 0, \mu^2 > 0$

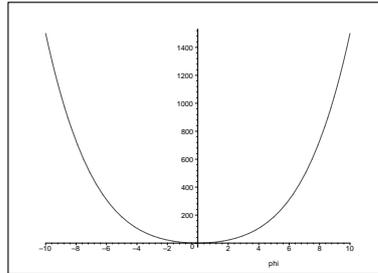


Figura 1.3:  $\lambda > 0, \mu^2 > 0$

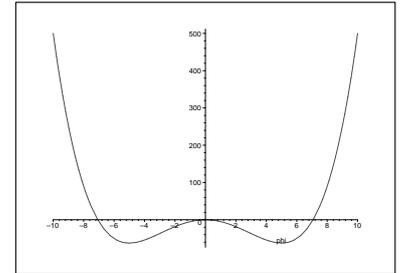


Figura 1.4:  $\lambda > 0, \mu^2 < 0$

*i)* O caso em que  $\lambda < 0$  e  $\mu^2 > 0$ , o qual é descrito pela figura 1.2, corresponde a uma situação não física, onde a partícula poderia perder anergia indefinidamente. Por não ter sentido físico, esta situação não nos interessa.

*ii)* O caso em que  $\lambda > 0$  e  $\mu^2 > 0$  é descrito pela figura 1.3. Esse gráfico nos mostra que não existe nenhum tipo de problema com a energia potencial quando a mesma é

---

<sup>1</sup>No caso específico em que  $\lambda = 0$  e  $\phi$  é um campo real, a equação de movimento corresponde à de Klein-Gordon.

analisada em seu estado de mais baixo valor, estado de vácuo, pois, para  $\phi = 0$ , temos que  $V(\phi) = 0$ . Além disso, uma vez que a Lagrangeana original apresenta uma simetria do tipo  $\phi \rightarrow \phi' = -\phi$ , não haverá quebra de simetria.

iii) No caso em que  $\lambda > 0$  e  $\mu^2 < 0$ , o comportamento do potencial é descrito pela figura 1.4. De acordo com essa figura,  $\phi = 0$  representa um máximo local. Por outro lado, os dois mínimos estão situados em  $\phi = \pm\eta$ , sendo  $\eta = \sqrt{\frac{|\mu^2|}{2\lambda}}$ . O problema nesta situação surge quando a energia potencial  $V(\phi)$  vai diminuindo e chega a  $\phi = 0$ , e o sistema deve escolher um dos dois valores de  $\phi$  que correspondem a energia mais, baixa em relação à  $\phi = 0$ , que são simétricos.

Uma simples análise nos permite concluir que, no terceiro caso, isto é  $\mu^2 = -|\mu^2|$ , o sistema não preservará mais a simetria que ele possuía originalmente. Para tanto, vamos supor que o sistema escolha o ponto  $\phi = \eta$ . Para estudar a física na vizinhança deste mínimo da energia(vácuo) vamos definir um novo campo  $\phi' = \phi - \eta$  e reescrever o potencial em termos deste novo campo. Fazendo isto, encontramos:

$$V(\phi') = \lambda\phi'^4 + 4\lambda\phi'^3\eta + 4\lambda\phi'^2\eta^2 - \frac{|\mu^2|^2}{4\lambda}. \quad (1.2-3)$$

Da análise da expressão acima, podemos ver claramente que, por uma troca do tipo  $\phi' \rightarrow -\phi'$ , não obtemos a simetria que tínhamos inicialmente. Portanto, dizemos que houve uma quebra espontânea de simetria discreta.

### 1.2.2 Quebra espontânea de simetria de gauge

No caso em que a Lagrangeana é invariante por uma transformação do tipo,  $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha\phi}$ , dizemos que a mesma é invariante por uma transformação de gauge global, se  $\alpha$  for constante, e local, se  $\alpha = \alpha(x)$ . Se essa simetria não é preservada no seu estado fundamental, estado de vácuo, haverá uma quebra espontânea de simetria de gauge, e inevitavelmente aparecerão Bósons escalares sem massa, denominados *Bósons de Goldstone*. Entretanto, quando isto acontece em uma teoria envolvendo simetria local de gauge, onde os campos de gauge são necessariamente campos não-massivos, os bósons

de Goldstone são absorvidos como sendo a componente longitudinal desses campos de gauge, os quais comportam-se como massivos com três graus de liberdade de spin.

Para entendermos a quebra espontânea de simetria de gauge, consideraremos a seguinte densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)^* - V(\phi) , \quad (1.2-4)$$

com

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} \left( |\phi|^2 + \frac{\mu^2}{2\lambda} \right)^2 , \quad (1.2-5)$$

sendo  $\phi$  um campo complexo.

Assim, como no caso anterior, teremos três comportamentos distintos para o potencial  $V(\phi)$ . Tais comportamentos são análogos àqueles discutidos anteriormente. Isto significa que o único caso que apresenta quebra espontânea de simetria é aquele em que  $\mu^2 < 0$  e  $\lambda > 0$ , conforme mostra a figura 1.5.

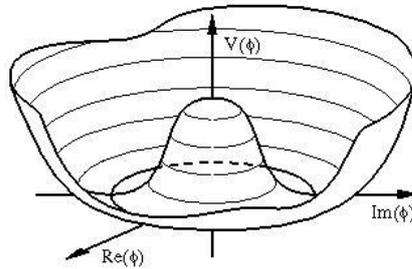


Figura 1.5: Potencial  $V(\phi)$ .

Para facilitar a identificação do estado de vácuo, reescreveremos o potencial dado por (1.2-5), com a seguinte forma:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2 - \eta^2)^2 , \quad (1.2-6)$$

sendo  $\eta$  o valor de  $|\phi|^2$  para o qual o potencial é mínimo (estado de vácuo).

A Lagrangeana, dada por (1.2-4), é invariante por uma transformação de gauge do tipo,  $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha\phi}$ , onde  $\alpha$  é uma constante (*transformação de gauge global*). Por outro lado, para este sistema, o estado de mais baixa energia é infinitamente degenerado.

De fato, o estado de vácuo é representado por  $\phi_0 = \eta e^{i\alpha}$ , em que  $\alpha$  é um número real arbitrário. Sendo assim, o conjunto dos mínimos de  $V(\phi)$  formam um círculo no plano complexo, conforme podemos observar na figura 1.5.

Apenas por uma questão de simplicidade, escolheremos  $\alpha = 0$ , o que implica  $\phi_0 = \eta$ , e, assim como no caso anterior, analisaremos este sistema na vizinhança do seu estado fundamental, através de uma pequena perturbação no campo.

Vamos escolher, então:

$$\phi(x) = \eta + \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(x) + i\phi_2(x)] , \quad (1.2-7)$$

onde  $\phi_1(x)$  e  $\phi_2(x)$  são campos escalares reais.

Substituindo  $\phi(x)$  em (1.2-4), obtemos a seguinte Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - \frac{1}{2}\lambda\eta^2\phi_1^2 + \mathcal{L}_{int} , \quad (1.2-8)$$

onde a Lagrangeana de interação,  $\mathcal{L}_{int}$ , inclui termos que envolvem uma combinação de  $\phi_1(x)$  e  $\phi_2(x)$ . A massa associada ao campo  $\phi_1(x)$  é  $m = \sqrt{\lambda}\eta$ , e o campo  $\phi_2(x)$  é um campo sem massa, denominado *Bóson de Goldstone*. Como podemos ver, a Lagangiana não apresenta mais a sua simetria original por transformação de gauge. Dizemos, então, que houve uma *quebra espontânea da simetria contínua*.

### 1.3 Transições de fase do Universo

Até o momento, analisamos as situações de quebra de simetria e formação de defeitos, sem levar em consideração as mudanças de temperaturas do sistema. Para um estudo mais completo sobre as mudanças de fase do Universo, faz-se necessário uma descrição que leve em conta a temperatura.

A discussão de quebra de simetria, na seção 1.2, foi feita com o uso de potenciais puramente clássicos para determinar o valor esperado do campo de Higgs,  $\phi$ . Na realidade,  $\phi$ , é um campo quântico que interage consigo mesmo e com outros campos quânticos, e o potencial clássico  $V(\phi)$  deve ser modificado por correções. O potencial corrigido,

que é denominado de *potencial efetivo*,  $V_{efe}(\phi)$ , pode ser escrito como uma expansão perturbativa em termos de potências das constantes de acoplamento,

$$V_{efe}(\phi) = V(\phi) + V_1(\phi) + V_2(\phi) + \dots + V_n(\phi) , \quad (1.3-9)$$

em que  $V(\phi)$  é o potencial clássico, e  $V_n(\phi)$  suas perturbações.

Para altas temperaturas, o potencial efetivo pode ser escrito na forma[18]:

$$V_{efe}(\phi) = V(\phi) + \frac{\lambda + 3e^2}{12} T^2 |\phi|^2 - \frac{2\pi^2}{45} T^4 . \quad (1.3-10)$$

As transições de fases cosmológicas são de primeira e segunda ordens. Como um exemplo de transição de fase de segunda ordem, vamos considerar o modelo de Goldstone, onde o potencial  $V(\phi)$  é dado por (1.2-6). Levando isso em conta e desprezando os termos independentes de  $\phi$ , encontramos:

$$V_{efe}(\phi, T) = m^2(T) |\phi|^2 + \frac{\lambda}{4} |\phi|^4 . \quad (1.3-11)$$

onde

$$m^2(T) = \frac{\lambda}{12} (T^2 - 6\eta^2) . \quad (1.3-12)$$

A quantidade  $m(T)$  é a massa efetiva do campo escalar  $\phi$  em um estado simétrico, sendo igual a zero quando  $T = T_c$ , onde  $T_c = \sqrt{6}\eta$ . Para uma temperatura,  $T > T_c$ , o quadrado da massa efetiva é positivo,  $m^2(T) > 0$ . O mínimo para o potencial efetivo é obtido quando  $\phi = 0$ , o valor esperado para  $\phi$  desaparece e a simetria é restaurada. Quando a temperatura está abaixo da temperatura crítica,  $T < T_c$ , o valor do quadrado da massa efetiva torna-se negativo,  $m^2(T) < 0$ , e o campo escalar tem valor esperado diferente de zero. O potencial efetivo,  $V_{efe}(\phi)$ , assume valor mínimo para  $T < T_c$  quando,

$$|\phi| = \frac{1}{\sqrt{6}} (T_c^2 - T^2)^{1/2} . \quad (1.3-13)$$

Este valor representa a magnitude do valor esperado do campo, quando o sistema se arrefece a partir da temperatura crítica.

A forma do potencial efetivo para temperaturas acima e abaixo da temperatura crítica está ilustrado na figura 1.6.

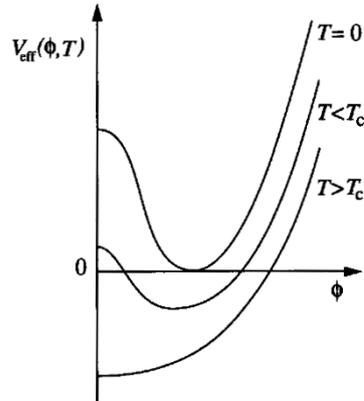


Figura 1.6: O potencial em função da temperatura

## 1.4 Exemplos de defeitos topológicos

A evolução natural do Universo é diretamente responsável pela formação de anomalias existentes no espaço-tempo, que se formaram devido a quebra das simetrias que o mesmo possuía e que foram espontaneamente sendo desfeitas com o processo de resfriamento.

Em teorias de campos, defeitos topológicos são estruturas formadas a partir de uma quebra espontânea de simetria de gauge de um sistema físico que apresenta um conjunto de estados de vácuo degenerados. A cada tipo de simetria que é quebrada, existe um tipo de defeito topológico associado. Dentre eles podemos citar: paredes de domínio, monopolos globais, texturas e cordas cósmicas.

### 1.4.1 Paredes de domínio

As paredes são objetos bidimensionais que se formam quando uma simetria discreta é quebrada durante uma transição de fase. Este tipo de defeito tem algumas propriedades muito peculiares, sendo uma delas que o campo gravitacional de uma parede é repulsivo, ao invés de ser atrativo.

Do ponto de vista da Teoria de Campos, o modelo mais simples, que conduz à formação desse tipo de defeito, é dado pela densidade Lagrangeana do campo escalar real,  $\phi(x)$ , (1.2-1), sendo o potencial descrito pela equação (1.2-2). Nesse caso, como  $\phi$  é função da

variável espacial  $x$ , a densidade Lagrangeana nos conduz a uma equação de movimento, cuja solução é dada por [18]

$$\phi(x) = \eta \tanh\left(\sqrt{\lambda/2}\eta x\right). \quad (1.4-14)$$

Conforme discutimos na seção 1.2, o potencial  $V(\phi)$  tem dois estados degenerados de vácuo, dados nos pontos  $\phi = \pm\eta$ , e, quando o sistema escolhe um desses estados, ocorre uma quebra de simetria. Por sua vez, a equação (1.4-14) nos mostra que o campo assumirá tais valores em dois pontos distintos ao longo do eixo  $x$ . Em outras palavras, existe uma região que separa os dois estados de vácuo, ver fig. 1.7. Tal “fronteira” caracteriza um domínio do tipo *parede*.

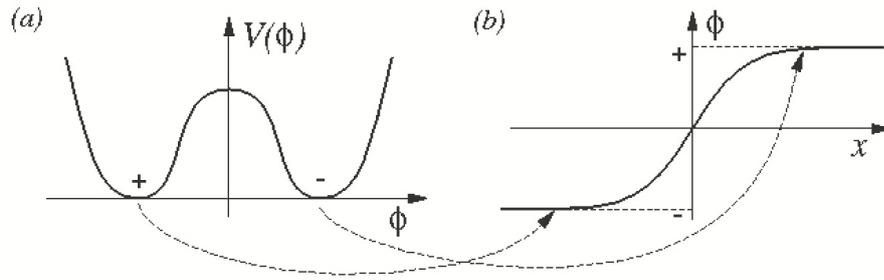


Figura 1.7: Paredes estão associadas a modelos em que existem dois mínimos.

A menos que a escala da quebra da simetria,  $\eta$ , seja muito pequena, a densidade superficial de energia de uma parede de domínio é extremamente grande, e isto poderia implicar num enorme impacto sobre a homogeneidade do Universo e causar uma anisotropia que não é observada[18].

### 1.4.2 Monopolos

Monopolos têm dimensão zero, formam-se quando uma simetria esférica é quebrada. O modelo de monopolo mais simples é a solução de 't Hooft-Polyakov [29] que aparece quando o grupo de simetria  $SU(2)$  é quebrado para  $O(3)$ .

O campo gravitacional associado ao monopolo global apresenta características geométricas e topológicas muito interessantes. Os efeitos locais e globais associados a

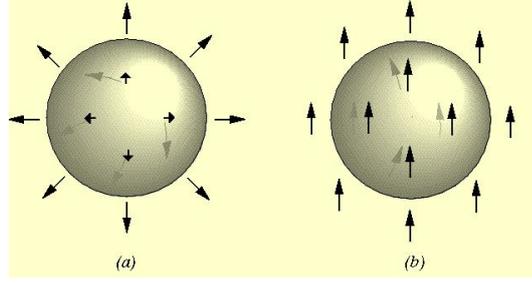


Figura 1.8: Monopolos-quebra de simetrias

esse campo tem sido objeto de intensos estudos [30, 31, 32].

O monopolo de 't Hooft-Polyakov é baseado no modelo de Georgi-Glashow [18], que consiste em um campo de gauge interagindo com um outro campo escalar, o isotripleto de Higgs,  $\phi_a = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ . A Lagrangeana para este modelo é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G_a^{\mu\nu}G_{a\mu\nu} + \frac{1}{2}\nabla^\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi) \quad (1.4-15)$$

onde  $\nabla_\mu$  representa a derivada covariante;  $G^{\mu\nu} = \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu + ie[W^\mu, W^\nu]$ , a força do campo de Gauge;  $W^\mu$ , o potencial de Gauge; e  $V(\phi) = \frac{1}{4}(\lambda)(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 - a^2)^2$  o potencial associado ao campo.

A dimensão de um monopolo de 't Hooft-Polyakov, isto é, do seu núcleo, é estimado utilizando-se o comprimento de onda de Compton, de bósons de Gauge massivos, associados com os geradores de grupos de simetrias quebradas, e com as massas das partículas de Higgs que sobreviveram.

### 1.4.3 Texturas

No contexto da matéria condensada, elas aparecem em um superfluido<sup>2</sup>, os quais apresentam um grande número de estados ligados de algumas classes de bósons de Goldstone [18]. Texturas formam-se quando grupos de simetria mais complicados são quebrados. São defeitos topológicos deslocalizados e instáveis. Topologicamente, no

---

<sup>2</sup>A superfluidez consiste num estado anômalo de líquidos, de natureza quântica, que se encontram sob uma temperatura muito baixa, comportando-se como se não tivesse viscosidade e apresentando uma transmissão de calor anormalmente elevada.

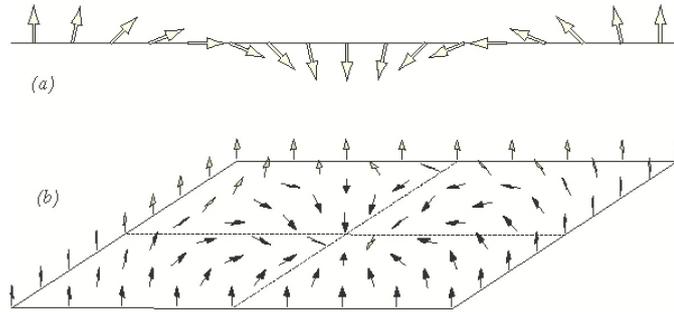


Figura 1.9: a) Textura em uma dimensão. b) Textura em duas dimensões de um campo escalar  $\phi$ .

entanto, só há garantias suficientes para a existência de defeitos estáveis, e as texturas fornecem um exemplo em que a estabilidade não deve ser tomada como garantia. Texturas não foram definitivamente confirmadas através da detecção, mas a sua existência é compatível com as atuais observações do Universo. No final de 2007 um evento na radiação cósmica de fundo detectado pelo *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*<sup>3</sup> foi interpretado como sendo, possivelmente, um sinal de uma textura.

#### 1.4.4 Cordas cósmicas

Devido ao esfriamento do Universo, a energia associada irá diminuir, até atingir a energia mínima(energia do estado de vácuo). A escolha do vácuo é totalmente independente para as regiões acausalmente separadas, e dá origem à formação de grandes áreas do Universo, denominadas *Domínios* [33, 34]. Quando estes domínios colapsam entre si, eles dão lugar a arestas na sua interface. Se desenharmos um círculo imaginário em torno de uma destas arestas com o ângulo  $\theta$  variando em  $2\pi$ , então, a contração deste círculo não reduz o mesmo a um ponto. Trata-se de uma pequena região do espaço-tempo em torno dessa linha onde a variável  $\theta$  não está definida e, por continuidade, o campo deve ser nulo, isto é,  $\phi = 0$ . A fim de minimizar o gradiente espacial da energia nestas pequenas regiões, as linhas formam um defeito, denominado *corda cósmica* [35], no caso

<sup>3</sup>Trata-se de um telescópio que mede as diferenças na temperatura da radiação remanescente do Big bang.

do campo escalar complexo.

As cordas são objetos unidimensionais, ou podem ser laços. Cordas idealizadas são muito finas e podem estender-se indefinidamente. Como um exemplo, podemos considerar o modelo de um campo escalar complexo cuja densidade Lagrangeana é dada por (1.2-4), com  $V(\phi)$  sendo descrito por (1.2-6). De acordo com a discussão realizada na seção 1.2, o conjunto dos mínimos de  $V(\phi)$  forma um círculo no plano complexo. Naturalmente, quando o sistema assume um desses valores, sobre esse círculo, ocorre uma quebra de simetria. Como o sistema pode escolher entre diferentes mínimos, é razoável esperarmos que estes estejam separados de algum modo [Fig. 1.10]. Essa fronteira caracteriza a corda cósmica.

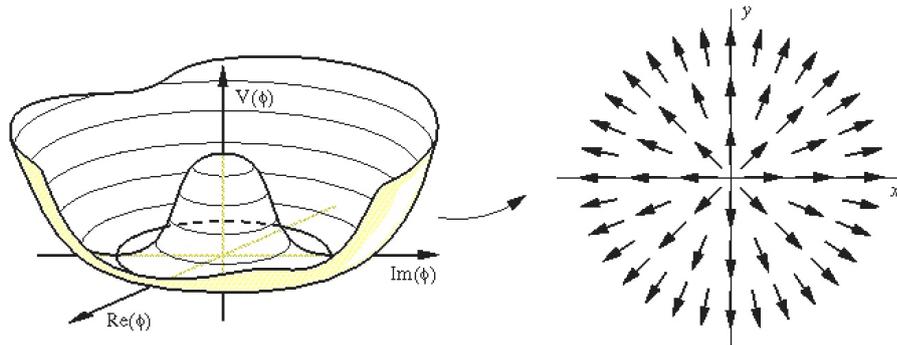


Figura 1.10: Cordas cósmicas estão associadas a modelos nos quais um conjunto de mínimos não estão conectados.

Sempre que ocorrer uma transição de fase cosmológica, cordas cósmicas ou outros defeitos topológicos devem ser formados. Este processo foi primeiramente sugerido por Kibble e por isso, o processo da formação de defeitos ficou conhecido como o mecanismo de Kibble[18].

A corda cósmica é um defeito topológico unidimensional análogo ao vórtice no hélio líquido. Possui uma massa muito grande, e deve ter tido um papel importante na evolução do Cosmos e na formação das estruturas existentes no Universo. Do ponto de vista da interação gravitacional não há potencial Newtoniano, associado a corda, e portanto, uma partícula colocada na presença da corda, não sofre atração gravitacional. A topologia de

sua seção transversal é não trivial e isto induz alguns tipos de fenômenos gravitacionais, como o fenômeno conhecido como *lente gravitacional* e a polarização do vácuo(efeito quântico), dentre outros [37, 38, 39, 40, 41, 42, 43].

As massas e dimensões de cordas cósmicas são em grande parte determinada pela escala de energia em que a transição de fase ocorreu. A escala de grande unificação de energia é da ordem de  $10^{15}$  GeV, o que indica que nesta escala de energia, a transição de fase ocorreu entre  $10^{-37}$  e  $10^{-35}$  segundos após o Big Bang, momento em que a temperatura do Universo era da ordem de  $10^{28}$ K. A espessura de uma corda cósmica é tipicamente comparável ao comprimento de onda de Compton de uma partícula com a massa do elétron, ou seja, cerca de  $10^{-29}$  cm. Esta distância é muito menor do que as escalas de comprimento importantes para a astrofísica e cosmologia, e portanto, podemos considerar que cordas cósmicas possuem espessura zero. A massa por unidade de comprimento de uma corda, convencionalmente denotada por  $\mu$ , é proporcional ao quadrado da escala de energia,  $\eta$ , e tem um valor estimado em cerca de  $10^{21}g/cm$ . Não existe nenhuma restrição quanto ao comprimento de uma corda cósmica, e nem a sua forma. Em alguns casos as cordas possuem cúspides, e formam laços fechados.

O interesse em cordas cósmicas começou no início da década de 80, e foi intensificado nos anos 90 [44] devido ao fato de que elas forneciam uma alternativa viável à inflação, como uma forma de explicar as perturbações de densidade primordiais que teriam dado origem à formação de galáxias e seus aglomerados. No início do milênio atual, no entanto, os dados fornecidos pelo satélite WMAP [45], indicam que cordas cósmicas não produzem a anisotropiana na temperatura da radiação cósmica de fundo(CMB), compatíveis com as condições para a formação de estruturas [46]. Recentemente, chegou-se a conclusão de que cordas cósmicas e supercordas não são objetos completamente distintos. Existe, de fato, uma conexão entre eles, uma vez que a teoria de supercordas comporta a existência de defeitos macroscópicos como as cordas cósmicas [47]. Em particular, no cenário de branas, a colisão destas pode dar origem a cordas cósmicas[48], estes novos fatos reacenderam o

interesse no estudo das cordas cósmicas, na perspectiva de serem sementes para a formação de estruturas.

As cordas cósmicas podem contribuir para outros fenômenos cosmológicos como por exemplo, a bariogênese [49]. Cordas em formas de laços(loops) com cúspides, podem também contribuir para a origem de raios cósmicos ultra enérgicos [50].

Essas cordas são na verdade *defeitos de fábrica* do Universo, um subproduto do resfriamento do Universo, instantes depois do Big Bang. A maneira mais fácil de se pensar sobre essas cordas é vê-las como o equivalente cósmico de fraturas no gelo de um lago congelado. Logicamente, é complicado compreender toda complexidade existente a partir dessa analogia. As cordas cósmicas são bastante densas, podendo ter sua massa muito maior que a da Terra, caso seu comprimento seja da ordem de 1 Km. Elas se expandem juntamente com o Universo, podendo esticar até alcançar o tamanho do Universo conhecido atualmente em uma linha reta(corda retilínea), ou formarem anéis massivos milhares de vezes maiores que as galáxias. Ainda não foi possível observar diretamente essas cordas, mas há evidências de provas indiretas de sua existência [52]. Vários quasars localizados nas regiões mais remotas do Universo visível, foram estudados. Todos os quasars emitiam jatos de energia em uma direção particular, e através de um estudo muito cauteloso, foi possível definir as direções dos jatos. De todos os objetos estudados, alguns jatos desses quasars formaram um par de enormes anéis, sugerindo que existiam duas estruturas massivas circulares, para que desse modo, pudessem orientar a direção dos jatos. Os únicos candidatos conhecidos que podem dar origem a essas estruturas colossais são as cordas cósmicas, fornecendo assim a evidência indireta que elas existem. Se a existência das cordas for mesmo confirmada, teremos dado um grande passo para compreender a formação de grandes estruturas do Universo[51].

### 1.4.5 Corda cósmica no modelo de Higgs Abeliano

Vamos considerar um campo de Higgs,  $\phi$ , um campo vetorial  $A_\mu$ , e a densidade Lagrangeana dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + |\mathcal{D}_\mu\phi|^2 - V(\phi) \quad (1.4-16)$$

onde,

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.4-17)$$

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (1.4-18)$$

e o potencial  $V(\phi)$  é dado pela equação (1.2-6). O potencial efetivo, a uma certa temperatura  $T$ , pode ser escrito na forma,

$$V(\phi, T) = V(\phi) + V_T(\phi), \quad (1.4-19)$$

com,

$$V_T(\phi) \cong \begin{cases} \frac{1}{8}\lambda T^2|\phi|^2, & \text{para } T \gg T_C \approx \eta, \\ 0, & \text{para } T \ll T_C \approx \eta \end{cases} \quad (1.4-20)$$

Quando  $T = T_C$ , ocorre uma transição de fase. Em  $T = 0$ ,  $\langle |\phi| \rangle = \eta$ , e portanto, o campo de Higgs tem valor esperado no vácuo diferente de zero, a simetria de gauge é quebrada e  $\phi$  adquire a fase  $\langle \phi \rangle = \eta e^{i\theta}$ .

Como consequência da quebra de simetria, o campo de Higgs juntamente com os campos de gauge adquirem as seguintes massas dadas, respectivamente, por

$$m_H^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_\eta = 2\lambda\eta^2 \quad (1.4-21)$$

e

$$m_A = e\eta. \quad (1.4-22)$$

Neste caso o vácuo é degenerado e corresponde ao círculo  $S^1$ , compreendido entre  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . O primeiro grupo de homotopia  $\pi^1(S^1)$  é isomórfico ao grupo dos inteiros, por adição. Um elemento de  $\pi^1(S^1)$  é um círculo com  $n$  voltas, com  $n$  inteiro. Como  $\pi^1(S^1)$  é não-trivial, então, cordas cósmicas podem existir nesse cenário.

Traçando-se uma curva no espaço físico, conforme mostra a figura 1.11, no vácuo, onde  $|\phi| = \eta$ , temos que se a fase de  $\phi$  é alterada de  $2\pi$ , quando circulamos a corda cósmica uma vez ou  $n$  vezes, o contorno deve envolver uma região com densidade de energia diferente de zero, com  $|\phi| < \eta$ . O contorno no espaço físico corresponde ao que está indicado no espaço de Higgs.

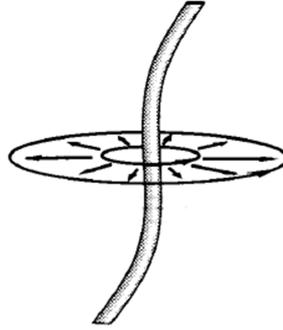


Figura 1.11: Espaço físico da corda cósmica.

Vamos contrair o contorno no espaço físico. Como  $\phi$  é contínuo, quando o contorno é contraído a aproximadamente um ponto,  $\phi$  tenderia a um valor constante nesse contorno. Isto somente seria possível se existisse um ponto envolvido pelo contorno, com  $\phi = 0$ , o que não é verdade. Portanto, dessa forma mostramos a existência da corda.

Quando  $r \mapsto \infty$  ( $r$  é a distância da localização da corda), o estado de vácuo, com densidade de energia igual a zero deve ser atingido, o que implica,

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \rightarrow 0, \quad (1.4-23)$$

$$\mathcal{D}_\mu \rightarrow 0, \quad (1.4-24)$$

nesse limite.

Como  $\phi \rightarrow \eta e^{i\theta}$ , isto implica,

$$\vec{A} \rightarrow \frac{1}{er} \hat{e}_\theta \quad (1.4-25)$$

quando  $r \rightarrow \infty$ .

Portanto, a corda cósmica carrega um fluxo magnético,

$$\Phi_{CC} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{2\pi}{e}. \quad (1.4-26)$$

e uma energia por unidade de comprimento dada por,

$$\mu \approx 2\pi\eta^2 \ln\left(\frac{m_H}{m_A}\right) (e^2 \ll 2\lambda \ll 1). \quad (1.4-27)$$

## Capítulo 2

# Teorias da Gravitação

A Cosmologia atual se depara com duas questões fundamentais que dizem respeito a inflação e a energia escura! Por que e como o Universo primitivo teve um período de rápida expansão acelerada e o atual se expande de maneira acelerada? Qual a razão para a semelhança, nesse aspecto, da evolução do Universo em pequena e em grande escala?

Os cenários que descrevem esses períodos de aceleração, tanto para os primórdios do Cosmos, quanto para seu estado atual, são semelhantes em seus aspectos, o que é, por isso, bastante natural esperar que a mesma teoria (princípio físico) esteja por trás de ambas as épocas. De fato, existem várias propostas para a construção de um modelo cosmológico que contemple, ao mesmo tempo, os dois cenários, a era inflacionária e a atual fase acelerada do Universo. Boa parte dessas teorias utilizam a energia escura como um componente inflacionário. Dentre elas podemos citar: escalar, espinorial, teoria vetorial não-Abeliana, constante cosmológica, fluido com uma equação de estado não usual, e em dimensões superiores [7]. As mesmas propostas também se destinam a descrever a era inflacionária. Esta situação é bastante razoável, pois a evolução dos parâmetros cosmológicos não está definida com grande precisão. Até mesmo seus valores atuais são definidos com, pelo menos, 3,5% de erro. Além disso, para se trabalhar com uma das propostas acima, somos forçados a introduzir os seguintes componentes cosmológicos extras: inflação, energia e matéria escura [8]. Mesmo se tal cenário parece ser parcialmente bem sucedido, é inevitável introduzir um novo conjunto de problemas. Por

exemplo: temos que acoplar, juntamente com a matéria usual, componentes de matéria e energia escura durante a evolução do Universo; e compatibilizar com o modelo padrão de teoria de partículas elementares, e a consistência matemática de sua formulação [36]. Outra proposta natural é a de não introduzir campos extras para resolver os problemas cosmológicos, que é a solução mais econômica.

A Teoria da Relatividade Geral<sup>1</sup>, que é atualmente a mais aceita para descrever a gravitação em pequenas e grandes escalas, pode ser considerada como paroximadamente válida em curvaturas extremas, o que é previsto pelas Teorias de Grande Unificação [53]. No Universo primitivo, quando as interações fundamentais ainda eram unificadas, uma única força deve ter determinado a evolução e expansão do Cosmos. Uma hipótese razoável, e bastante aceita pela comunidade científica [7], é a alternativa gravitacional de uma descrição unificada da inflação cósmica e da energia escura, que é, atualmente, utilizada como um dos fatores que causam a expansão acelerada do Universo [4].

Uma alternativa no contexto da Teoria da Relatividade Geral é constituída através da modificação apropriada na ação, dando origem a uma teoria de gravitação modificada que deve descrever de forma consistente a inflação no Universo primitivo e a aceleração atual, sem a introdução de qualquer outro componente, como matéria e energia escura. Assim, tanto a aceleração primordial, no início do Universo, quanto a atual, podem ter sido causadas simplesmente, pelo fato de que, alguns termos sub-dominantes da ação gravitacional podem ter se tornados extremamente importantes e dominantes quando a curvatura é grande ou pequena. Além disso, esta abordagem também pode ser considerada como uma solução aproximada para o problema da constante cosmológica [3].

Neste capítulo faremos uma revisão sobre teorias modificadas da Relatividade Geral que têm recebido bastante atenção da comunidade científica nos últimos anos[53, 57, 58]. Concentraremos nossa revisão em teorias que são formuladas a partir de uma modificação da ação de Einstein-Hilbert, da TRG, as chamadas teorias  $f(R)$  e  $f(\mathcal{G})$ (teoria de Gauss-

---

<sup>1</sup>Na próxima seção, faremos uma breve revisão em Teoria da Relatividade Geral, como parte introdutória para teorias modificadas da gravitação.

Bonnet).

Obteremos as equações de campo através da aplicação de um princípio variacional e analisaremos as características básicas de cada teoria, como expressa através das equações de campo. Antes porém, faremos uma breve revisão sobre os princípios fundamentais da Relatividade Geral.

## 2.1 Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade geral, publicada em 1915 por Albert Einstein, leva em conta as ideias da Teoria da Relatividade Restrita sobre o espaço e o tempo e propõe a generalização do princípio da relatividade do movimento entre sistemas inerciais para sistemas que incluam campos gravitacionais, ou seja, para observadores acelerados. Esta generalização trouxe modificações profundas no nosso conhecimento sobre espaço-tempo, levando, entre outras conclusões, à de que a matéria curva o espaço-tempo à sua volta, o que significa dizer que altera a geometria em torno do corpo material. Em outras palavras, ela sugere que a gravitação seja um efeito causado pela geometria do espaço-tempo, e não uma ação a distância, como propunha a mecânica clássica. Portanto, nessa abordagem geométrica da teoria da gravitação, a curvatura do espaço-tempo é uma medida da intensidade do campo gravitacional.

O postulado base da Teoria da Relatividade Geral, chamado de Princípio da Equivalência, especifica que sistemas acelerados e sistemas submetidos a campos gravitacionais são fisicamente equivalentes. Nas próprias palavras de Einstein em seu trabalho de 1915:

*Iremos, portanto, assumir a completa equivalência física entre um campo gravitacional e a correspondente aceleração de um sistema de referência. Esta hipótese estende o princípio da relatividade restrita para sistemas de referência uniformemente acelerados.*

As propriedades geométricas do espaço e do tempo não são independentes, como previa a mecânica Newtoniana, mas estão interligadas entre si de uma forma inseparável, e são

determinadas pela distribuição de matéria e energia no espaço. A presença de um corpo material, ou de uma distribuição de energia, induz ao seu redor, o que a Relatividade Geral denominou de espaço-tempo, uma geometria, uma distorção espaço-temporal medida pela curvatura local, que por sua vez, determina as propriedades geométricas desta localidade. Em uma definição mais geral, a Teoria da Relatividade Geral, propôs a unificação dos conceitos de matéria e energia, e colocou o tempo como sendo uma quarta dimensão nos sistemas de coordenadas. Apesar de seus conceitos parecerem bem mais complicados que as definições de espaço da mecânica clássica, a Teoria da Relatividade Geral nos permite descrever as propriedades geométricas do espaço-tempo de maneira elegante. Sendo a matéria (ou seu equivalente energético) o único responsável por encurvar o espaço-tempo ao seu redor, podemos tirar conclusões sobre a estrutura geométrica do Universo, com base nas considerações sobre a distribuição de matéria no Universo.

Podemos imaginar que, no que diz respeito a geometria, o Universo se comporta de forma análoga a uma superfície que possui pequenas deformações que se afastam levemente de um plano. Tal modelo, pode apropriadamente ser chamado de um Universo quase-Euclidiano. Mas, cálculos mostram que num Universo quase-Euclidiano, a densidade média de matéria seria necessariamente nula. Um modelo deste tipo não condiz com as observações. Se estamos interessados num Universo com uma densidade média de matéria que difere de zero, ainda que esta diferença seja pequena, então, não podemos admitir um modelo quase-Euclidiano para descrição do Universo como um todo. Alguns resultados indicam que, se a matéria fosse distribuída de maneira uniforme, o Universo seria necessariamente esférico, ou elíptico [59]. A Teoria da Relatividade Geral fornece-nos uma íntima conexão, entre o espaço-tempo, o processo de expansão do Universo e a densidade média de matéria nele distribuída. Em outras palavras, se sua distribuição média de matéria for inferior a um certo valor, conhecido como densidade crítica<sup>2</sup>, então a atração gravitacional seria demasiadamente pequena, para impedir sua expansão, o

---

<sup>2</sup>A densidade crítica do Universo é um parâmetro cosmológico, definido por  $\rho = \frac{8\pi G}{3H^2}$ , sendo  $G$  a constante gravitacional de Newton e  $H$  o parâmetro de Hubble.

Universo seria aberto, ou ilimitado. Se a distribuição média de matéria fosse superior à densidade crítica, provavelmente, ele deixaria de se expandir e começaria novamente, a se contrair. Esta contração iria ser acelerada e, eventualmente, produziria o Big Crunch, que é o inverso do Big Bang, o Universo seria fechado e limitado. Se a densidade média de matéria fosse exatamente igual à densidade crítica, a expansão não iria parar e aproximaria-se cada vez mais do limite definido. O Universo seria, então, plano [59].

### 2.1.1 Equações de campo

De maneira a estabelecer uma relação matemática entre matéria-energia e curvatura, Einstein dotou o espaço-tempo de uma estrutura métrica, de modo que, toda a informação geométrica do espaço-tempo está contida em um objeto matemático chamado tensor métrico,  $g_{\mu\nu}$ . Naturalmente, a expressão deste tensor depende da distribuição de matéria-energia, a qual é representada por um tensor de segunda ordem,  $T_{\mu\nu}$ , denominado tensor energia-momento.

Para determinarmos  $g_{\mu\nu}$ , devemos resolver um conjunto de dez equações,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} , \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 . \quad (2.1-1)$$

denominado de equações de Einstein, onde  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein. Nesta expressão,  $G$  é a constante Newtoniana da gravitação, e as quantidades  $R_{\mu\nu}$  e  $R$  são, respectivamente, o tensor e o escalar de Ricci, sendo definidos por:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\rho}^{\rho}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} \quad (2.1-2)$$

e

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} , \quad (2.1-3)$$

em que

$$\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda} \left( \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \right) , \quad (2.1-4)$$

são os símbolos de Christoffel.

O conjunto (2.1-1) representa as equações básicas da Teoria da Relatividade Geral. Uma vez conhecida a distribuição de matéria-energia, dada por  $T_{\mu\nu}$ , essas equações podem ser utilizadas para se obter todas as informações relevantes sobre a geometria. Na construção dessas equações, Einstein levou em conta que, em um certo limite, tais equações devem corresponder à equação que descreve o campo gravitacional na mecânica clássica (Equação de Poisson) [60].

Desde que o tensor energia-momento obedeça a lei covariante de conservação de energia,  $\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$ , temos que a divergência covariante em todo o lado esquerdo de (2.1-1) é nula, ou seja,

$$\nabla^\nu \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \equiv 0. \quad (2.1-5)$$

Através de uma contração dos índices  $\mu$  e  $\nu$  em (2.1-1), as equações de campo de Einstein podem ser escritas também da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (2.1-6)$$

No espaço-tempo vazio, o tensor energia-momento é nulo, e as equações de Einstein são reduzidas à seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.1-7)$$

Vale a pena ressaltar que o espaço-tempo vazio, não é necessariamente, um espaço-tempo plano. Quando as equações de campo de Einstein no vácuo são satisfeitas, o tensor de Riemann é, então, igual ao tensor de Weyl, que é, em geral, diferente de zero. Somente quando todas as componentes do tensor de Riemann são nulas é que o espaço-tempo é plano.

### 2.1.2 Ação integral da Relatividade Geral

Embora as equações de Einstein não tenham sido derivadas originalmente de um princípio variacional, podemos obtê-las partindo de uma ação. Faremos aqui uma breve explanação de como isso pode ser feito.

A ação do campo gravitacional pode ser escrita da seguinte forma [60]:

$$S_G = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_G d^4x , \quad (2.1-8)$$

sendo  $g$  o determinante da métrica e  $\mathcal{L}_G$  a densidade Lagrangeana. Por sua vez, a integral (2.1-8) deve ser tomada sobre todo o espaço-tempo quadrimensional.

Para construirmos esta ação, devemos ter em mente que a densidade Lagrangeana é uma função escalar. Além disso, temos que levar em conta que as equações de Einstein possuem, no máximo, termos de segunda ordem de derivadas no tensor métrico,  $g_{\mu\nu}$ . Desse modo,  $\mathcal{L}_G$  deve conter apenas termos lineares em  $g_{\mu\nu}$  ou derivadas de primeira ordem, pois a variação da ação, geralmente, aumenta a ordem das equações. O único escalar que possui tais características, é o escalar de Ricci. Contudo, vale salientar que este escalar inclui também termos de segunda ordem no tensor métrico. Porém, estes termos ocorrem de forma linear, ao invés de quadrática e, devido a esta linearidade, não dão origem af equações de terceira ordem após a variação da ação. Portanto, a ação pode ser escrita como:

$$S_G = \int \sqrt{-g} R d^4x . \quad (2.1-9)$$

em que  $g$  é o determinante da métrica,  $g_{\mu\nu}$ .

Podemos ainda adicionar, a esta integral, uma outra densidade Lagrangeana que trata de outras contribuições do sistema físico que estamos considerando, além do campo gravitacional. Adicionando o termo correspondente a ação associada a outros campos obtemos,

$$S = S_G + 2\kappa S_M , \quad (2.1-10)$$

onde

$$S_M = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_M d^4x , \quad (2.1-11)$$

sendo  $\kappa = 8\pi G$  uma constante de acoplamento, e  $\mathcal{L}_M$  a densidade Lagrangeana para todos os outros campos. Tomando a variação do primeiro termo da equação (2.1-10), com

respeito a  $g^{\mu\nu}$ , obtemos:

$$\delta S_G = \int \left\{ \delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \right\} d^4x . \quad (2.1-12)$$

Admitindo que estamos em um sistema geodésico, onde  $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = 0$ , podemos mostrar, após algumas manipulações algébricas, que:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho (\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho) - \nabla_\nu (\delta\Gamma_{\mu\rho}^\rho) . \quad (2.1-13)$$

Conseqüentemente, usando este resultado e lembrando que a derivada covariante do tensor métrico é nula ( $\nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0$ ), o segundo termo da integral (2.1-12) pode ser reescrito como:

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}\nabla_\sigma W^\sigma , \quad (2.1-14)$$

onde

$$W^\sigma = g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu \quad (2.1-15)$$

é um tensor contravariante de primeira ordem. Vale salientar que a equação (2.1-14) é uma equação tensorial. Logo, é válida em todos os sistemas de coordenadas e em todos os pontos do espaço-tempo, e não apenas no sistema geodésico [60]. Por outro lado,

$$\nabla_\sigma W^\sigma = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\sigma(\sqrt{-g}W^\sigma) . \quad (2.1-16)$$

Então, substituindo (2.1-14) em (2.1-12) e levando em conta (2.1-16), encontramos:

$$\int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x = \int \partial_\sigma(\sqrt{-g}W^\sigma)d^4x \quad (2.1-17)$$

Usando o teorema da divergência e o fato que a variação dos símbolos de Christoffel são nulas na fronteira da integração, a equação acima torna-se:

$$\int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x = \int \sqrt{-g}W^\sigma n_\sigma d^3x = 0 \quad (2.1-18)$$

Tendo desenvolvido o segundo termo da integral da ação, representada pela equação (2.1-12), vamos, agora, desenvolver o termo que possui a variação do tensor métrico da mesma integral. Para tanto, devemos usar a seguinte propriedade [60]:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (2.1-19)$$

Desta forma conseguimos mostrar que

$$\int R_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) d^4x = \int \sqrt{-g} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x . \quad (2.1-20)$$

Substituindo (2.1-18) e (2.1-20) em (2.1-12), concluímos que

$$\delta S_G = \int \sqrt{-g} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x , \quad (2.1-21)$$

que representa a variação da ação do campo gravitacional. Resta-nos, agora, desenvolver a variação da ação para os outros campos,  $S_M$ . Variando este termo, obtemos:

$$\delta S_M = \int \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \delta(\partial_\alpha g^{\mu\nu}) \right] d^4x . \quad (2.1-22)$$

Usando o fato de que

$$\delta(\partial_\alpha g^{\mu\nu}) = \partial_\alpha(\delta g^{\mu\nu}) , \quad (2.1-23)$$

e fazendo uma integração por partes, podemos reescrever a equação acima como

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x , \quad (2.1-24)$$

onde o tensor  $T_{\mu\nu}$ , o qual é denominado *tensor energia-momento*, é definido por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left[ \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial \partial_\alpha g^{\mu\nu}} \right] \right\} . \quad (2.1-25)$$

Finalmente, usando as equações (2.1-21) e (2.1-24), temos que a variação da ação é dada por

$$\delta S = \delta S_G + \delta S_M = \int \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \kappa T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x . \quad (2.1-26)$$

Então, aplicando o princípio variacional, isto é, exigindo que  $\delta S = 0$ , e, além disso, usando o fato que  $\delta g^{\mu\nu}$  é arbitrário, chegamos ao seguinte resultado:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} . \quad (2.1-27)$$

A partir da próxima seção, daremos ênfase a teorias de gravitação modificadas, que também se propõem a explicar as interações gravitacionais de forma análoga à Relatividade Geral.

## 2.2 Teorias modificadas da gravitação: $f(R)$

Modificações na Teoria da Relatividade Geral foram propostas logo após o seu surgimento no ano de 1915. Essas modificações remontam a Weyl, em 1919, e Eddington, em 1923, que começaram a considerar modificações na teoria incluindo invariantes de ordem superior na ação[36]. Estas primeiras tentativas foram provocadas principalmente pela curiosidade científica e uma vontade de questionar e, portanto, compreender a teoria recém proposta. Naturalmente, qualquer alteração proposta que complicasse a ação e, conseqüentemente, as equações de campo, sem aparente motivação teórica ou experimental, não seria muito atraente. No entanto, a motivação ainda estava por vir.

As motivações que justificavam uma modificação na TRG começaram a surgir em 1960. Nesse ano, apareceram indicações de que complicar a ação gravitacional, por um aumento na ordem do escalar de curvatura, poderia ter seus méritos. A TRG não é renormalizável e, portanto, não pode ser canonicamente quantizada. Em 1962, Utiyama e DeWitt [16] mostraram que uma renormalização na ação de Einstein-Hilbert deveria ser suplementada por termos de ordem superior no escalar de curvatura. Mais tarde, Stelle [17] mostrou que as ações de ordem superior são de fato renormalizáveis. Resultados mais recentes mostram que, quando correções quânticas ou teoria das cordas são levadas em conta, a ação admite termos de ordem superior no escalar de Ricci[36].

Tais considerações estimularam o interesse em teorias da gravitação de ordens superiores, isto é, as modificações na ação de Einstein-Hilbert, para incluir invariantes de curvatura de ordens superiores no escalar de Ricci. No entanto, a relevância de tais modificações foi considerada restrita apenas para regimes de campos gravitacionais muito fortes. Portanto, as correções da TRG foram consideradas importantes apenas em escalas próximas à escala de Planck e, conseqüentemente, no início do Universo ou perto de singularidades de buracos negros. De fato, há estudos relevantes, tais como o cenário de inflação e tentativas de evitar singularidades cosmológicas[58].

Mais recentemente, novas evidências, provenientes da astrofísica e cosmologia,

revelaram dados observacionais bastante inesperados acerca da evolução do Universo. Os dados provenientes de diferentes fontes, tais como a radiação cósmica de fundo e pesquisas de supernovas, parecem indicar que a composição de energia do Universo é a seguinte: 4% de matéria bariônica, 20% de matéria escura e 76% de energia escura [4]. A matéria escura não aparece apenas em dados cosmológicos, mas também em observações astrofísicas. A questão da falta de massa já havia sido colocada em 1933 para os aglomerados de galáxias e em 1959 para as galáxias individuais e uma resposta satisfatória definitiva está pendente desde então. Foram feitas diversas tentativas para contornar o problema da constante cosmológica ou propor alternativas dinâmicas para a energia escura. Infelizmente, todas essas tentativas possuem problemas. Por outro lado, cenários simples para a energia escura dinâmica, como quintessência não parecem ser bem motivados teoricamente.

Mesmo que se diga, que modificar a gravidade é a maneira mais correta de continuar proseguindo, esta não é uma tarefa muito fácil. Para começar, existem inúmeras maneiras de se introduzir essa modificação. Deixando de lado o início das tentativas de generalizar a teoria de Einstein, a maioria das quais tem se demonstrado serem não viáveis, sendo a mais conhecida alternativa à TRG, teoria escalar tensorial, existem ainda numerosas propostas para modificar a gravidade na literatura atual. Exemplos típicos são DGP (teoria da gravidade de Dvali-Gabadadze-Porrati) [61], gravidade no mundo das branas [62] e a teoria de Einstein-Aether [63].

O tema desta seção remete a uma classe diferente de teorias, teorias de gravitação modificadas  $f(R)$ . Estas teorias surgiram por uma generalização simples do Lagrangeano na ação de Einstein-Hilbert, sobre os quais discutiremos seus principais aspectos físicos e matemáticos.

### 2.2.1 Formalismo métrico em $f(R)$

Como vimos na seção anterior, as equações de Einstein podem ser obtidas a partir de uma modificação na ação de Einstein-Hilbert.

De acordo com alguns autores [36], há pelo duas formas de fazer isso, a saber, os formalismos métrico e de Palatini. No formalismo métrico, tomamos a variação da ação com relação à métrica. No de Palatini, a métrica e a conexão são consideradas variáveis independentes e variamos a ação em relação a ambas, sob a condição importante de que a ação de matéria não depende da conexão.

Em uma teoria na qual a Lagrangeana é linear em  $R$ , como é o caso da Teoria da Relatividade Geral, a escolha do princípio variacional é irrelevante, pois ambos levam as mesmas equações de campo. Contudo, quando a Lagrangeana depende de  $R$ , através de uma função não linear  $f(R)$ , isso não acontece [58]. Conseqüentemente, em uma teoria  $f(R)$  haverá duas versões das equações de campo, as quais dependem do princípio variacional adotado. Aqui, deduziremos tais equações utilizando o formalismo métrico.

### 2.2.2 Ação e equação de campos

A ação na teoria  $f(R)$  é escrita da seguinte forma:

$$S = S_G + 2\kappa S_M , \quad (2.2-28)$$

sendo

$$S_G = \int \sqrt{-g} f(R) d^4x , \quad (2.2-29)$$

e  $S_M$  dado pela equação (2.1-11).

Tomando a variação de  $S_G$ , dado pela equação acima, encontramos:

$$\delta S_G = \int d^4x \left[ \delta \sqrt{-g} f(R) + \sqrt{-g} \delta f(R) \right], \quad (2.2-30)$$

Usando a propriedade (2.1-19) e o fato que

$$\delta f(R) = f'(R) [\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}] , \quad (2.2-31)$$

podemos escrever

$$\delta S_G = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} f(R) \right] \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} , \quad (2.2-32)$$

onde a linha representa a derivada da função com respeito ao escalar de Ricci.

Assim, como na seção anterior, escolheremos um sistema geodésico. Nesse sistema, a derivada covariante de um tensor é igual a sua derivada usual [60]. Portanto, a equação (2.1-14) ainda pode ser escrita como:

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \partial_\sigma W^\sigma. \quad (2.2-33)$$

De posse deste resultado, vemos que a segunda integral de (2.2-32) toma a forma:

$$\int dx^4 \sqrt{-g} f(R)' g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int dx^4 \sqrt{-g} f(R)' \partial_\sigma W^\sigma. \quad (2.2-34)$$

Resolvendo a integral do lado direito por partes e assumindo que os campos se anulam no infinito, obtemos

$$\int dx^4 \sqrt{-g} f(R)' \partial_\sigma W^\sigma = - \int dx^4 W^\sigma \partial_\sigma (\sqrt{-g} f(R)'). \quad (2.2-35)$$

Por outro lado, em um sistema geodésico, a variação dos símbolos de Christoffel é dada por:

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} [\partial_\mu (\delta g_{\lambda\nu}) + \partial_\nu (\delta g_{\lambda\mu}) - \partial_\lambda (\delta g_{\mu\nu})], \quad (2.2-36)$$

e, conseqüentemente,

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} \partial_\mu (\delta g_{\nu\alpha}). \quad (2.2-37)$$

Assim, substituindo (2.2-36) e (2.2-37) na expressão de  $W^\sigma$ , dada por (2.1-15), obtemos:

$$W^\sigma = \partial^\sigma (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) - \partial^\mu (g_{\mu\nu} \delta g^{\sigma\nu}). \quad (2.2-38)$$

Logo, reescrevendo a integral (2.2-34) em termos desse novo vetor, encontramos

$$\int dx^4 \sqrt{-g} f(R)' g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int dx^4 \partial_\sigma [\sqrt{-g} f(R)'] [\partial^\mu (g_{\mu\nu} \delta g^{\sigma\nu}) - \partial^\sigma (g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu})]. \quad (2.2-39)$$

Resolvendo esta integral por partes e descartando a divergência total, chegamos à seguinte expressão:

$$\int dx^4 \sqrt{-g} f(R)' g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int dx^4 [g_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial_\sigma (\sqrt{-g} f(R)') - g_{\sigma\nu} \partial^\sigma \partial_\mu (\sqrt{-g} f(R)')] \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.2-40)$$

Substituindo este resultado na equação (2.2-32), obtemos:

$$\delta S_G = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[ f(R)' R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} f(R) \right] \delta g^{\mu\nu} + \int dx^4 \left[ g_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial_\sigma (\sqrt{-g} f(R)') - g_{\sigma\nu} \partial^\sigma \partial_\mu (\sqrt{-g} f(R)') \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.2-41)$$

Utilizando a relação da divergência,

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} V^\mu), \quad (2.2-42)$$

podemos reescrever (2.2-41) como

$$\delta S_G = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[ f(R)' R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} f(R) + g_{\mu\nu} \square f(R)' - \nabla_\mu \nabla_\nu f(R)' \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.2-43)$$

sendo  $\square \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu$  o D'alembertiano. Então, usando (2.1-24) e (2.2-43), encontramos que a variação da ação é

$$\delta S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[ f(R)' R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} f(R) + g_{\mu\nu} \square f(R)' - \nabla_\mu \nabla_\nu f(R)' - \kappa T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.2-44)$$

Por fim, aplicando o princípio variacional e, além disso, usando o fato que  $\delta g^{\mu\nu}$  é arbitrário, chegamos à expressão:

$$f(R)' R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} f(R) + g_{\mu\nu} \square f(R)' - \nabla_\mu \nabla_\nu f(R)' = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.2-45)$$

A equação (2.2-45) é, obviamente, um conjunto de equações diferenciais de quarta ordem no tensor métrico, uma vez que inclui a segunda derivada do escalar de curvatura. Para uma ação linear em  $R$ , todos os termos de quarta ordem desaparecem, com exceção dos dois primeiros do lado esquerdo, e o conjunto reduz-se ao resultado padrão das equações de Einstein.

Se tomarmos o traço de (2.2-45), obtemos:

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\square f'(R) = \kappa T, \quad (2.2-46)$$

onde,  $T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ . Isto representa uma séria indicação de que as equações de campo, em teorias  $f(R)$ , representam uma gama de soluções muito mais ampla do que na Relatividade

Geral. Como exemplo, podemos mencionar aqui o teorema de Jebsen-Birkhoff, afirmando que a solução de Schwarzschild é a única solução de vácuo esfericamente simétrica, o que não se sustenta mais em gravitação  $f(R)$ . Ou ainda, poderíamos tomar como outro exemplo a solução de vácuo  $T = 0$ , em que, diferentemente do que se observa na RG, o escalar de curvatura é diferente de zero.

A equação (2.2-46) é muito útil no estudo de vários aspectos das teorias  $f(R)$ . Por exemplo, podemos usá-la para fazer algumas observações sobre soluções maximalmente simétricas, isto é, aquelas em que o escalar de Ricci é constante. Para  $R = \text{const.}$  e  $T_{\mu\nu} = 0$ , a eq. (2.2-46) reduz-se a:

$$f'(R)R - 2f(R) = 0, \quad (2.2-47)$$

que, para um dado  $f(R)$ , é uma equação algébrica em  $R$ . Se  $R = 0$  for uma raiz desta equação, a expressão (2.2-45) se reduz a  $R_{\mu\nu} = 0$ , e a simetria máxima é a solução do espaço-tempo de Minkowski. Por outro lado, se a raiz da eq. (2.2-47) for  $R = C$ , sendo  $C$  uma constante, a eq. (2.2-45) se reduz a  $R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}C/4$ , e a solução de simetria máxima é o espaço-tempo de de Sitter, ou anti-Sitter, dependendo do sinal de  $C$ , tal como na Teoria da Relatividade Geral.

Outra questão que deve ser destacada é a conservação da energia<sup>3</sup>. Em gravitação  $f(R)$  o tensor energia momento de matéria é minimamente acoplado com a métrica. Ainda assim, podemos usar os argumentos gerais, baseados na invariância da ação sob difeomorfismos do espaço-tempo na variedade, para mostrar que  $T_{\mu\nu}$  apresenta divergência nula. Em outras palavras, as regras de conservação de energia têm o mesmo princípio que na Teoria da Relatividade Geral. O mesmo resultado pode ser obtido para as equações de campo (2.2-45). Com o uso da divergência nula do tensor energia-momento, pode-se mostrar que esta equação também apresenta divergência nula [36].

Finalmente, é possível escrevermos as equações (2.2-45) na forma das equações de

---

<sup>3</sup>No último capítulo desta tese faremos uma abordagem bastante detalhada sobre conservação da energia em teorias  $f(R)$ .

Einstein. De fato, de (2.2-45) temos que

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left( \mathcal{T}_{\mu\nu} - \frac{\mathcal{T}}{2} g_{\mu\nu} \right), \quad (2.2-48)$$

com

$$\mathcal{T} = \frac{1}{f'(R)} \left\{ T + \frac{1}{\kappa} [f(R) - Rf'(R) - 3\Box f'(R)] \right\}, \quad (2.2-49)$$

e

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{f'(R)} \left[ T_{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa} (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \Box) f'(R) \right]. \quad (2.2-50)$$

No capítulo 5 desta tese, trataremos desta abordagem, e faremos uma dedução do tensor energia-momento efetivo, a partir das equações modificadas de Einstein (2.2-45).

### 2.2.3 Formalismo de Palatini

A idéia fundamental do formalismo de Palatini para teorias  $f(R)$  é considerar a métrica e as conexões como campos independentes, e conseqüentemente fazer a variação da ação com respeito a ambos.

Do ponto de vista físico, considerar a métrica  $g_{\mu\nu}$  e a conexão  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  como campos independentes, implica em disassociar a estrutura métrica do espaço-tempo de sua estrutura geodésica. A estrutura causal do espaço-tempo é definida por  $g_{\mu\nu}$ , enquanto que as trajetórias das partículas são reguladas por  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ . Em princípio, esta disassociação enriquece a estrutura geométrica do espaço-tempo e generaliza o formalismo baseado somente na métrica.

Por meio das equações de campo de Palatini, esta estrutura dual do espaço-tempo é naturalmente vista como uma estrutura bimétrica da teoria: ao invés de uma métrica e uma conexão independente, o formalismo de Palatini pode ser visto como contendo duas métricas independentes,  $g_{\mu\nu}$  e  $h_{\mu\nu} = f'(R)g_{\mu\nu}$ . No formalismo de Palatini, para gravidade em teorias  $f(R)$ , a nova métrica  $h_{\mu\nu}$  é relacionada com a conexão  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ , em virtude do fato que este último torna-se a conexão de Levi-Civita de  $h_{\mu\nu}$ . Nesse formalismo, a ação é formalmente a mesma, mas agora o tensor de Riemann e o tensor de Ricci são construídos

com conexão independente. Para maior clareza de notação, denotaremos o tensor de Ricci construído com esta conexão independente como  $\mathcal{R}_{\mu\nu}$  e o escalar correspondente  $\mathcal{R}$ . A ação tem a seguinte forma:

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(\mathcal{R}) + S_m(g_{\mu\nu}, \Psi). \quad (2.2-51)$$

Neste formalismo, a ação depende apenas da métrica e dos campos de matéria. Isto é crucial para a derivação das equações lineares de Einstein a partir da ação (2.2-51), e é a principal característica do formalismo de Palatini. Uma conexão afim normalmente define o transporte paralelo e a derivada covariante. Por outro lado, a ação do campo de matéria  $S_m$  é geralmente considerada um escalar covariante que inclui derivadas dos campos de matéria. Portanto, estas derivadas deveriam ser derivadas covariantes para um campo de matéria geral. No entanto,  $S_m$ , deveria incluir todos os campos possíveis. Portanto, partindo do princípio que o  $S_m$  é independente da conexão isso só pode significar uma de duas coisas: ou estamos nos restringindo a campos específicos, ou estamos implicitamente admitindo que é a conexão de Levi-Civita da métrica que realmente define o transporte paralelo. Isto implica que a gravitação na formulação de Palatini em teorias  $f(R)$  é uma teoria métrica no sentido de que, a mesmo satisfaz os postulados métricos.

Variando a ação (2.2-51), independentemente com respeito à métrica e a conexão, respectivamente, e usando a relação:

$$\delta\mathcal{R}_{\mu\nu} = \bar{\nabla}_\lambda \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \bar{\nabla}_\nu \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda$$

encontramos as seguintes equações:

$$f'(R)\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(\mathcal{R})g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.2-52)$$

e

$$\bar{\nabla}_\sigma (\sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\sigma\mu}) \delta_\lambda^\nu - \bar{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\mu\nu}) = 0, \quad (2.2-53)$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento usual, e  $\bar{\nabla}_\lambda$  a derivada covariante definida com a conexão independente. Tomando-se o traço da eq. (2.2-53), temos que

$$\bar{\nabla}_\sigma (\sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\sigma\mu}) = 0, \quad (2.2-54)$$

o que implica que podemos escrever as equações de campo numa forma mais simples, a saber,

$$f'(\mathcal{R}) \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(\mathcal{R}) g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.2-55)$$

e

$$\bar{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} f'(\mathcal{R}) g^{\mu\nu}) = 0. \quad (2.2-56)$$

A partir daqui é fácil perceber como as equações de Palatini podem nos levar de volta à Gravitação de Einstein, com  $f(\mathcal{R}) = R$ , que implica  $f'(\mathcal{R}) = 1$ . Desse modo  $\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$ ,  $\mathcal{R} = R$  e a equação (2.2-55) voltaria a representar o conjunto de equações usuais da Teoria da Relatividade Geral. Surpreendentemente, apesar de os dois formalismos fornecerem os mesmos resultados para ações lineares, eles conduzem a resultados diferentes para ações mais gerais em  $f(R)$ [8].

Tomando-se o traço da eq. (2.2-55), temos

$$f'(R)R - 2f(R) = 0 \quad (2.2-57)$$

Para um dado  $f(R)$  esta equação se torna uma equação algébrica em  $R$ . Para todos os outros casos em que  $T = 0$ , incluindo o vácuo,  $R$  será, portanto, uma constante e uma raiz da equação

$$f'(R)R - 2f(R) = 0 \quad (2.2-58)$$

Não necessitamos considerar os casos em que esta equação não possui raízes, já que pode ser demonstrado que as equações de campo tornam-se inconsistentes. Portanto, as escolhas de  $f(R)$  que levam a esse comportamento devem simplesmente ser evitadas. A equação (2.2-58) pode ser identicamente satisfeita se  $f(R) \propto R^2$ . Uma vantagem que o formalismo de Palatini apresenta em relação ao formalismo métrico está nas equações

geradas por este, enquanto que no formalismo métrico as equações geradas são de quarta ordem, no de Palatini estas são reduzidas para segunda ordem.

## 2.3 Teoria de gravitação de Gauss-Bonnet

Até agora, estudamos modificações para a ação de Einstein-Hilbert através da introdução de uma função geral do escalar de Ricci. Entre as possíveis modificações da Teoria da Relatividade Geral, este pode ser um caso muito especial. Na verdade, pode-se pensar em uma Lagrangeana com infinitas possibilidades de todos os escalares construídos a partir do tensor de Riemann e suas derivadas. Se considerarmos uma Lagrangeana como uma ação fundamental para a gravitação, geralmente encontramos problemas sérios nas representações de partículas em tais modelos. É bem conhecido que tal alteração iria introduzir graus de liberdade extras. Na verdade, é possível demonstrar que estas teorias, em geral, apresentam outras partículas e que algumas delas podem conduzir à problemas em descrições físicas das mesmas. Por exemplo, além do gráviton, uma outra partícula de spin-2 aparece frequentemente nas equações, que no entanto, tem o termo de sua energia cinética com sinal oposto ao usual [64]. O gráviton não interage com esta nova partícula, e com todas as outras partículas padrão também. Partículas deste tipo foram denominadas *fantasmas*. A presença de fantasmas implica a existência de partículas que se propagam com energia negativa. Isto, por sua vez, implica que o vácuo de uma partícula (ou mais do que uma) e uma partícula fantasma (ou mais do que uma) podem aparecer, ao mesmo tempo, sem violar a conservação de energia. Pode-se perguntar: É possível remover esses fantasmas de spin 2? Para responder a esta pergunta, deve-se primeiro introduzir um tipo de escalar denominado de escalares de *Lovelock*<sup>4</sup>. Esses escalares são combinações particulares do tensor de Riemann, que tem uma propriedade fundamental, qual seja: se estiverem presentes na Lagrangeana, eles introduzem unicamente termos de segunda ordem nas equações de movimento. Após Einstein ter proposto a Teoria da Relatividade

---

<sup>4</sup>São formados a partir de uma contração particular do tensor de Riemann. Para maiores detalhes ver [65]

Geral, e Hilbert ter encontrado a Lagrangeana para descrevê-la, Kretschmann, apontou que apenas a covariância geral não seria suficiente para explicar a forma da Lagrangeana para a TRG[66]. Na ação, ele introduziu, em vez do escalar de Ricci, o escalar que foi denominado escalar de Kretschmann, dado por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (2.3-59)$$

A primeira vista, esta ação parece ter uma boa justificativa. O tensor de Riemann é um tensor fundamental para a gravitação, e o escalar  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}$  pode ser construído. Além disso, isto é uma teoria na qual as identidades de Bianchi permanecem, como nas equações de movimento, tendo os seus dois lados conservados. No entanto, nas equações de movimento existem termos proporcionais a  $\nabla_\mu \nabla_\nu R^{\mu\cdot\alpha\beta\cdot\nu}$ , juntamente com o seu parceiro simétrico,  $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ . Isto obriga-nos a conhecer, em geral, uma parte específica do espaço-tempo, juntamente com os elementos da métrica  $g_{\mu\nu}$  em primeira, segunda e terceira derivada. Portanto, a teoria tem muitos mais graus de liberdade que a Relatividade Geral. Além do escalar de Kretschmann há outro escalar,  $R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}$ , que é quadrático no tensor de Riemann.

Pode-se evitar o aparecimento de termos proporcionais à  $\nabla_\mu \nabla_\nu R^{\mu\cdot(\alpha\beta)\cdot\nu}$  considerando a seguinte quantidade escalar:

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (2.3-60)$$

que é denominado de escalar de Gauss-Bonnet(*GB*)[27]. Se o invariante de Gauss-Bonnet for utilizado em uma Lagrangeana  $n$ -dimensional, cuja ação é dada por:

$$S = \int d^n x \sqrt{-g} \mathcal{G}, \quad (2.3-61)$$

as equações de movimento provenientes desta ação, incluirão apenas os termos de segunda derivada da métrica. A diferença entre este escalar e o termo de Einstein-Hilbert, é que o tensor (2.3-61) não é linear nas derivadas de segunda ordem da métrica.

Voltando a falar sobre os escalares tipo *Lovelock*, podemos nos perguntar: Quantos são? A resposta é simples, infinitos. Cada um deles é composto de combinações lineares

de potências iguais do tensor de Riemann. No entanto, por razões topológicas, os únicos escalares não-nulos tipo *Lovelock*, em quatro dimensões, são o escalar de Ricci e o de Gauss-Bonnet. Portanto, pelas mesmas razões apresentadas para o termo  $GB$ , uma função geral  $f(R)$  só irá introduzir termos nas equações de movimento da forma  $\nabla_\mu \nabla_\nu \partial f / \partial R$ . Uma vez mais, os novos graus de liberdade adicionais introduzidos na teoria provém de uma quantidade escalar,  $\partial f / \partial R$ . Em resumo, os escalares tipo *Lovelock* na Lagrangeana evitam que as equações de movimento fiquem com graus de liberdade extras no tensor. Uma análise mais detalhada das perturbações desses espaços-tempo maximalmente simétricos mostram que, se os escalares não são usados no processo, novos tensores extras com graus de liberdade semelhantes começam a aparecer[27]. Efetivamente essas teorias, como a gravidade Kretschmann, introduzem dois grávitons, que tem operadores cinéticos com sinais opostos, sendo um deles fantasma. A fim de se livrar deste fantasma, precisamos usar os escalares tipo *Lovelock*. Portanto, em quatro dimensões, pode-se estudar, em princípio, a seguinte ação:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} f(\mathcal{G}, R) \quad (2.3-62)$$

Esta teoria não irá introduzir dois spins fantasmas. Mesmo assim, os modos escalares devem ser analisados com maior detalhe: eles podem ainda tornar-se fantasmas. Vamos discutir mais detalhadamente o que é um fantasma e por que precisamos evitar isso em uma teoria sensata de gravitação.

## Fantasmas

Um modo fantasma é um grau de propagação da liberdade com um termo cinético na ação com sinal oposto. Para verificar se um modo fantasma está se propagando sobre um determinado espaço-tempo, é necessário expandir a ação até segunda ordem em termos dos campos de perturbação. Após a integração de todos os campos auxiliares, fica-se com um número mínimo de campos de gauge  $\vec{\phi}$ . No entanto, não importa quais campos são usados, que normalmente precisam (para Lagrangeanas não singulares), para definir o

operador cinético, o qual na Lagrangeana aparece como sendo  $L = \dot{\phi}^t A \dot{\phi} + \dots$  [67]. Então, os auto-valores da matriz  $A$  definem se o modo é fantasma ou não. Um auto-valor negativo corresponde a um campo fantasma. No espaço-tempo de FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) por exemplo, a matriz será, em geral, dependente do tempo, assim como o sinal dos auto-valores. Portanto, é preciso certificar-se de que os modos extras introduzidos por essas teorias não possuem sinais errados em qualquer momento durante a evolução do Universo. Um sinal geral na Lagrangeana não afeta as equações clássicas de movimento. No entanto, no nível quântico, se quisermos preservar a causalidade, o modo fantasma pode ser interpretado como uma partícula que se propaga com energia negativa.

### 2.3.1 Equações de Campo

Vamos considerar, a partir de agora, um outro conjunto de equações de movimento, obtidas a partir de uma função adicionada à ação da Relatividade Geral, dependente topologicamente do invariante de Gauss-Bonnet (2.3-60). A ação inicial é escrita da seguinte forma [67]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ f(\mathcal{G}) + \frac{R}{2\kappa^2} \right] + \mathcal{L}, \quad (2.3-63)$$

onde  $\mathcal{L}$  é a densidade Lagrangeana de matéria,  $\kappa = 8\pi G$ , sendo  $G$  a constante de gravitação, e  $\mathcal{G}$  o escalar de Gauss-Bonnet, dado por:

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (2.3-64)$$

Variando (2.3-63) com respeito a  $g_{\mu\nu}$ , encontramos as seguintes equações:

$$G_{\mu\nu} + 8[R_{\mu\rho\nu\sigma} + R_{\rho\nu}g_{\sigma\mu} + 1/2(g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})R - R_{\rho\sigma}g_{\nu\mu} - R_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} + \quad (2.3-65)$$

$$R_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}] \nabla^\rho \nabla^\sigma F(\mathcal{G}) + g_{\mu\nu} [\mathcal{G}F(\mathcal{G}) - f(\mathcal{G})] = \kappa T_{\mu\nu}$$

sendo  $G_{\mu\nu}$  o tensor de Einstein,  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$  o tensor de Riemman,  $R$  seu escalar,  $T_{\mu\nu}$  o tensor energia momento e  $F(\mathcal{G}) = df(\mathcal{G})/d\mathcal{G}$ . Se fizermos,  $f(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ , nesta última equação,

retomaremos o caso das equações da Teoria da Relatividade Geral. Para uma análise geral desta expressão vamos consideraar a métrica de FLRW. A componente  $\mu = \nu = 0$  de (2.3-65) corresponde à seguinte equação diferencial:

$$3H^2 = GF(G) - f(G) - 24H^3\dot{F}(G) + (\rho_m + \rho_r). \quad (2.3-66)$$

O ponto representa a derivada com respeito ao tempo,  $H$  é o parâmetro de Hubble e  $\rho_m$  e  $\rho_r$  são as densidades de energia da matéria e a radiação, respectivamente. Podemos perceber a aceleração cósmica pela existência de um ponto de de Sitter satisfazendo a seguinte condição:

$$3H_1^2 = G_1F(G_1) - f(G_1), \quad (2.3-67)$$

sendo  $H_1$  e  $G_1$  o parâmetro de Hubble e o escalar de Gauss-Bonnet no ponto de de Sitter, respectivamente. Para que tenhamos uma estabilidade nas equações no ponto de de Sitter, vamos exigir a seguinte condição,

$$0 < H_1^6 dF/d\mathcal{G}(H_1) < 1/384. \quad (2.3-68)$$

Nestas condições o escalar de Gauss Bonnet é dado por,

$$\mathcal{G} = 24H^2 \left( H^2 + \dot{H} \right) = -12H^4 (1 + 3\omega_{eff}), \quad (2.3-69)$$

onde  $\omega_{eff} = -1 - 2\dot{H}/3H^2$  é a equação efetiva de estado do fluido. Temos  $\mathcal{G} < 0$  e  $\dot{\mathcal{G}} > 0$ , tanto durante a era de radiação, quanto na dominada pela matéria. O escalar de  $GB$  muda de sinal durante a transição da era de matéria ( $G = -12H^4$ ) para a época de de Sitter ( $G = 24H^4$ ). O escalar  $GB$  dentro e fora de um corpo esféricamente simétrico ( de massa  $M$  e raio  $r$ ) com uma densidade de massa homogênea é dada por  $\mathcal{G} = -48(GM)^2/r^6$  e  $\mathcal{G} = 48(GM)^2/r^6$ , respectivamente. Nas proximidades do Sol ou da Terra, por exemplo, o módulo do escalar  $GB$ ,  $|\mathcal{G}|$ , é muito maior do que o seu valor atual,  $\mathcal{G}_0$ . A medida que avançamos do interior para o exterior de uma estrela, o termo  $GB$  passa de valores negativos para positivos. Isto significa que  $f(\mathcal{G})$  e as suas derivadas em relação a  $\mathcal{G}$  tem de

ser regulares para valores negativos e positivos de  $\mathcal{G}$ , cujas amplitudes são muito maiores do que  $\mathcal{G}_0$ .

As discussões anteriores mostram que modelos viáveis de  $f(\mathcal{G})$  precisam obedecer às seguintes condições:

i)  $f(\mathcal{G})$  e suas derivadas precisam ser regulares nos intervalos considerados;

ii)  $d^2 f/d\mathcal{G}^2 > 0$  para qualquer valor de  $\mathcal{G}$  e tende para zero no limite em que o módulo de  $\mathcal{G}$  for para o infinito;

iii)  $0 < H_1^6 d^2 f/d\mathcal{G}^2(H_1) < 1/384$  no ponto de de Sitter.

É importante chamar a atenção para o fato de que outros modelos podem ser introduzidos seguindo o mesmo procedimento.

### 2.3.2 Gravitação $f(\mathcal{G})$ na presença de matéria

Na presença de matéria, outros graus de liberdade aparecem na ação. Vamos levar em conta um fluido perfeito com a seguinte equação de estado barotrópica<sup>5</sup>,  $\omega_m = P_m/\rho_m$ . Para pequenas escalas no espaço de Fourier há duas velocidades diferentes de propagação dadas por[68]:

$$c_1^2 = \omega_m, \quad (2.3-70)$$

$$c_2^2 = 1 + \frac{2\dot{H}}{H^2} + \frac{(1 + \omega_m)\kappa^2 \rho_m}{(1 + 4\mu)3H^2}. \quad (2.3-71)$$

O primeiro resultado é esperado, uma vez que corresponde à velocidade de propagação da matéria. Este último resultado é devido ao fato de que as equações de movimento em FLRW são diferentes, nos dois casos. Lembramos que para modelos viáveis de  $f(\mathcal{G})$  devemos ter que a quantidade,  $|\mu| \ll 1$ , onde  $\mu \equiv H\dot{F}(\mathcal{G})$  e  $F(\mathcal{G}) = df/d\mathcal{G}$ . Desde que  $3H^2 \approx 8\pi\mathcal{G}\rho_m$  e  $\dot{H}/H^2 \approx -3/2(1 + \omega_m)$ , a eq. (2.3-71) pode ser escrita na forma

$$c_2^2 \approx -(1 + 2\omega_m). \quad (2.3-72)$$

---

<sup>5</sup>A barotropia de um fluido é uma característica pela qual a densidade do fluido só depende da pressão, sendo sua temperatura constante.

Durante a era da radiação ( $\omega_m = 1/3$ ) e a era da matéria ( $\omega_m = 0$ ), os modos de momento altos eram instáveis. Em particular, isto leva ao crescimento violento de perturbações de densidade de matéria incompatíveis com as observações atuais[69]. O princípio da instabilidade negativa pode ser caracterizada por:

$$\mu \approx \left( \frac{aH}{k} \right)^2, \quad (2.3-73)$$

sendo  $a(t)$  o fator de escala. Desde que,  $\mu \neq 0$ , sempre poderemos encontrar um número de onda  $k$  que satisfaça esta condição.

### 2.3.3 Gravitação $f(\mathcal{G})$ acoplada a um campo escalar

O acoplamento escalar com o termo de  $GB$  aparece frequentemente como correções de ordem superior, em baixas energias. Mas explicitamente, a ação efetiva em quatro dimensões é dada por[70],

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} \left[ \frac{R}{2} + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + L_M + L_c \right], \quad (2.3-74)$$

onde  $\phi$  é o campo escalar que controla o parâmetro de acoplamento,  $g_s^2 = e^\phi$ . A ação acima é uma ação na qual o campo está diretamente acoplado ao escalar de curvatura,  $R$ , e  $L_m$  é a Lagrangeana de campos de matéria adicionais, como fluidos, áxions<sup>6</sup>, etc.. . A Lagrangeana  $L_c$  corresponde a correções de ordem superior, incluindo o acoplamento entre o termo  $GB$  e o campo escalar. Um conjunto de correções possíveis incluem termos da seguinte forma[71]:

$$L_c = -\frac{1}{2} \alpha' \lambda \xi(\phi) [cG + d(\nabla\phi)^4], \quad (2.3-75)$$

onde  $\alpha$  é o parâmetro de expansão da corda<sup>7</sup>,  $\xi(\phi)$  é uma função geral do campo  $\phi$ ,  $\lambda$  é um parâmetro adicional que depende do tipo de teoria de cordas:  $\lambda = -1/4$ ,  $\lambda = -1/8$  e 0, correspondendo a bosônico, heterótico e supercordas, respectivamente. Os parâmetros  $c$  e  $d$  são de ajuste. Se quisermos que a ação esteja de acordo com a amplitude de

---

<sup>6</sup>O axion é uma partícula hipotética fundamental postulada pela teoria de Peccei-Quinn em 1977.

<sup>7</sup>Neste contexto estamos nos referindo a uma corda de Teoria das Cordas, e não a uma corda cósmica.

espalhamento de grávitons, estes coeficientes devem ter os seguintes valores:  $c = -1$ ,  $d = 1$  e  $\xi(\phi) = -e^{-\phi}$ . Num cenário do Pré-Big-Bang, o campo evolui de um regime fracamente acoplado ( $g_s \ll 1$ ), em direção a uma região fortemente acoplada ( $g_s > 1$ ), durante a qual o parâmetro de Hubble cresce no cenário de supercordas (superinflação) [70]. Esta superinflação é impulsionado por uma energia cinética do campo e é chamada de Pré-Big-Bang. Se  $L_c = 0$ , estes ramos são desligados um do outro, com a aparência de uma singularidade curva. No entanto, a presença da correção  $L_c$  permite a existência de soluções não singulares que ligam dois ramos distintos do espaço-tempo [71]. Em um contexto Ekpirótico<sup>8</sup> do Universo, onde um potencial  $V(\phi)$  negativo está presente na ação de Einstein, é possível perceber as soluções não singulares, sendo elas correções semelhantes a  $L_c$ , dadas anteriormente, eq.(2.3-75) [72]. Para um sistema em que um campo é acoplado ao termo de  $GB$ , pode-se também perceber soluções regulares sem termos de derivadas de ordens superiores. Estes resultados mostram que o termo de  $GB$  pode desempenhar um papel crucial para eliminar curvaturas singulares.

Em resumo, a gravitação de Gauss Bonnet com um acoplamento de campo escalar permite soluções não singulares num regime de curvatura grande (campo gravitacional intenso), mas é difícil de compatibilizar um acoplamento deste tipo com a aceleração cósmica em escalas de baixa energia, lembrando que os modelos para energia escura baseados em gravitação  $f(G)$ , também sofrem do problema de instabilidade ultravioleta. Isto mostra como a presença do termo de  $GB$  torna difícil satisfazer todas as restrições experimentais e de observação. Esta propriedade é diferente da gravitação em teorias  $f(R)$ , na qual modelos viáveis de energia escura podem ser construídos mais facilmente.

---

<sup>8</sup>O modelo ekpirótico do Universo é uma alternativa para o modelo padrão da inflação cósmica para o universo primitivo. Para maiores detalhes ver [72].

## Capítulo 3

# A Métrica da corda em teorias da gravitação

Neste capítulo, iremos deduzir a métrica do espaço-tempo associado a uma corda cósmica em duas teorias diferentes de gravitação modificada, a saber, Teoria de gravitação  $f(R)$  e Teoria de Gauss-Bonnet. A escolha dessa solução em particular deve-se ao fato de que, caso exista, a corda cósmica é um importante elo entre o Universo primitivo e o atual, uma vez que poderia ser usada, em princípio, para explicar a formação de estruturas presentes no nosso Universo [18], em um cenário que inclui o processo de inflação.

Para fins de comparação com nossos resultados, apresentaremos, na seção 3.1, um resultado conhecido que corresponde: a solução externa e interna da corda cósmica em Relatividade Geral. No que se refere às teorias modificadas da gravitação, analisaremos, na seção 3.2, as modificações produzidas no campo gravitacional de uma corda cósmica[23], quando obtidas a partir de uma teoria  $f(R)$ , nas situações específicas em que  $f(R) = R + \alpha R^n$ , para  $n = 2$  e  $n = -1$ , onde  $\alpha$  é um parâmetro constante. É importante chamar atenção para o fato de que  $n = 2$  corresponde ao modelo inflacionário de Starobinsky[13] e  $n = -1$  ao modelo CDTT[14]. Ainda no contexto de teorias modificadas, na seção 3.3, encontraremos a solução para uma corda estática na teoria da gravitação de Gauss-Bonnet, e, na seção 3.4, obtemos as soluções da equação de Dirac no espaço-tempo da corda cósmica em  $f(R)$  e  $f(\mathcal{G})$ .

## 3.1 A métrica da Corda Cósmica na Relatividade Geral

O primeiro e importante passo para o estudo das cordas em Relatividade Geral foi dado por Vilenkin [18], que determinou em primeira ordem de aproximação na densidade linear de massa, o campo gravitacional de uma corda estática, infinita e sem dimensão transversal usando as equações linearizadas de Einstein. Em seguida Linet[15] obteve a solução exata para uma corda sem estrutura, e Hiscock [19], estendeu os resultados obtidos por Vilenkin[18], e obteve a solução exata de vácuo de uma corda com estrutura.

Nesta seção, com o objetivo de comparar as soluções da corda em teorias de gravitação modificadas, iremos descrever as duas soluções da Relatividade Geral, interna e externa da corda, obtidas por Hiscock.

### 3.1.1 Solução exterior

Nosso objetivo agora é encontrar uma solução para as equações de Einstein, que descreva o campo gravitacional de uma corda cósmica, retilínea, homogênea e estática que tem densidade linear de massa  $\mu$ , situada ao longo do eixo  $z$ .

Admitiremos também uma simetria da corda em relação ao ângulo  $\phi$ , e por fim, que a mesma se mantenha invariante por *boosts* na direção  $z$ . Diante disto, podemos escrever o elemento de linha do espaço-tempo gerado pela mesma como sendo [35],

$$ds^2 = -A(r)^2 dt^2 + dr^2 + C(r)^2 d\phi^2 + D(r)^2 dz^2 . \quad (3.1-1)$$

Como estamos admitindo uma invariância por *boosts* na direção de  $z$ , de acordo com as transformações de Lorentz, o termo  $(dt^2 - dz^2)$  deve ser um invariante, e isto só acontece se  $A(r)^2 = D(r)^2$ . Levando isto em conta, a métrica (3.1-1) torna-se,

$$ds^2 = -A(r)^2 (dt^2 - dz^2) + dr^2 + C(r)^2 d\phi^2 . \quad (3.1-2)$$

Vamos admitir que a solução da corda cósmica está associada a um tensor energia-

momento da seguinte forma:

$$T_{\mu}^{\nu} = \sigma(r) \text{diag}(1, 0, 0, 1), \quad (3.1-3)$$

com  $\sigma(r) = \sigma_0$  para  $r < r_0$  e  $\sigma(r) = 0$  para  $r > r_0$ , onde  $r_0$  é o raio do núcleo da corda. Esta escolha implica que a solução interior possui um tensor energia-momento, tal que  $T_0^0 = T_3^3 = \sigma_0$  e  $T_1^1 = T_2^2 = 0$ . A expressão para o tensor energia-momento, dada por (3.1-3), corresponde ao de uma corda situada ao longo do eixo  $z$ , infinitamente longa e com uma certa espessura, de raio  $r_0$ . A forma do tensor  $T_{\mu}^{\nu}$  dada por (3.1-3) é consistente com as simetrias da corda. No limite em que a espessura da corda tende à zero,  $r_0 \rightarrow 0$ , a densidade de energia  $\sigma(r)$ , na equação (3.1-3), torna-se,

$$T_{\mu}^{\nu} = \mu \frac{\delta(r)}{r} \text{diag}(1, 0, 0, 1), \quad (3.1-4)$$

sendo  $\mu$  a densidade linear da corda. Os símbolos de Christoffel não nulos relativos à métrica (3.1-2) são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{A(r)} \frac{dA}{dr}, & \Gamma_{00}^1 &= -A(r) \frac{dA}{dr}, \\ \Gamma_{22}^1 &= C(r) \frac{dC}{dr}, & \Gamma_{33}^1 &= A(r) \frac{dA}{dr}, \\ -\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{C(r)} \frac{dC}{dr}, & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{01}^0 = -\Gamma_{31}^3. \end{aligned} \quad (3.1-5)$$

Usando estas expressões, podemos mostrar que as componentes não nulas do tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma}, \quad (3.1-6)$$

são,

$$R_0^0 = R_3^3 = - \left[ \frac{1}{A(r)} \frac{d^2 A(r)}{dr^2} + \frac{1}{A(r)C(r)} \frac{dA(r)}{dr} \frac{dC(r)}{dr} + \frac{1}{A^2(r)} \left( \frac{dA(r)}{dr} \right)^2 \right], \quad (3.1-7)$$

$$R_1^1 = - \left[ \frac{2}{A(r)} \frac{d^2 A(r)}{dr^2} + \frac{1}{C(r)} \frac{d^2 C(r)}{dr^2} \right] \quad (3.1-8)$$

e

$$R_2^2 = - \left[ \frac{1}{C(r)} \frac{d^2 C(r)}{dr^2} + \frac{2}{A(r)C(r)} \frac{dA(r)}{dr} \frac{dC(r)}{dr} \right]. \quad (3.1-9)$$

Substituindo (3.1-7)-(3.1-9), juntamente com (3.1-3), nas equações de Einstein, escritas na forma:

$$R_{\nu}^{\mu} = 8\pi G \left( T_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} T_{\alpha}^{\alpha} \right) , \quad (3.1-10)$$

obtemos as seguintes equações,

$$\frac{1}{A(r)} \frac{d^2 A(r)}{dr^2} + \frac{1}{A(r)C(r)} \frac{dA(r)}{dr} \frac{dC(r)}{dr} + \frac{1}{C(r)} \frac{d^2 C(r)}{dr^2} = -8\pi G \sigma(r) \quad (3.1-11)$$

$$\frac{2}{A(r)} \frac{d^2 A(r)}{dr^2} + \frac{1}{A(r)^2} \left( \frac{dA(r)}{dr} \right)^2 = 0 \quad (3.1-12)$$

$$\frac{1}{A(r)^2} \left( \frac{dA(r)}{dr} \right)^2 + \frac{2}{A(r)C(r)} \frac{dA(r)}{dr} \frac{dC(r)}{dr} = 0 \quad (3.1-13)$$

Utilizando o princípio de conservação da energia podemos mostrar que  $A(r)$  é uma constante<sup>1</sup>, que por uma transformação conveniente de coordenadas, podemos fazer, sem nenhuma perda de generalidade,  $A(r) = 1$ . Levando isto em conta, a equação (3.1-11) torna-se:

$$\frac{1}{C(r)} \frac{d^2 C(r)}{dr^2} = -8\pi G \sigma(r) . \quad (3.1-14)$$

O espaço-tempo associado a esta métrica não possuirá uma singularidade cônica, sobre o eixo de simetria, se a função  $C(r)$  satisfizer as seguintes condições:

$$C(0) = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{dC(r)}{dr} \right|_{r=0} = 1 . \quad (3.1-15)$$

A densidade linear da corda é definida como sendo a integral de  $T_0^0$  sobre a superfície bidimensional  $t$  e  $z$  constantes, sendo dada por:

$$\mu = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{g} T_0^0 . \quad (3.1-16)$$

Substituindo o determinante da métrica  $g$  e a componente  $T_0^0$  do tensor energia-momento encontramos,

$$\mu = \frac{1}{4G} \left( 1 - \left. \frac{dC(r)}{dr} \right|_{r \rightarrow \infty} \right) . \quad (3.1-17)$$

---

<sup>1</sup>Os cálculos que demonstram que  $A(r)$  é uma constante para qualquer métrica escrita sob a forma (3.1-2) estão no Apêndice B.

Admitindo que a corda cósmica seja muito fina, isto é, que o tensor energia-momento seja dado por (3.1-4), temos que a função  $\sigma(r)$  será nula, exceto quando  $r = 0$ . Então, de acordo com a equação (3.1-14), vemos que, na região exterior à corda, o termo  $dC/dr$  é constante. Sendo assim, a equação (3.1-17) torna-se:

$$\mu = \frac{1}{4G} \left( 1 - \frac{dC}{dr} \right), \quad (3.1-18)$$

de onde deduzimos que,

$$C(r) = (1 - 4\mu G) r. \quad (3.1-19)$$

Com isso, a métrica que descreve o espaço-tempo produzido por uma corda cósmica, será dada por[15]:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (1 - 4\mu G)^2 r^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (3.1-20)$$

Como era de se esperar, quando  $\mu \rightarrow 0$ , a métrica da corda (3.1-20) se reduz à métrica de Minkowski em coordenadas cilíndricas, para todos os pontos do plano  $\mathcal{R}^2$ . Isto quer dizer que, quando não existe corda, o espaço-tempo é plano. No entanto, podemos ver que, embora tenhamos  $\mu \neq 0$ , o espaço-tempo (3.1-20) é localmente plano, mas não o é globalmente, isto significa que o espaço-tempo gerado pela corda cósmica é Minkowskiano, localmente, porém, não o é do ponto de vista global. De fato, se fizermos a mudança de coordenada  $\phi' = (1 - 4\mu G) \phi$ , a métrica (3.1-20) adquire a seguinte forma:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi'^2 + dz^2, \quad (3.1-21)$$

que é a métrica do espaço plano de Minkowski. No entanto, o ângulo  $\phi'$  varia entre 0 e  $2\pi(1 - 4\mu G)$ . Deste modo, o espaço-tempo dado pelo elemento de linha (3.1-21) é localmente plano, exceto em  $r = 0$ . O espaço-tempo da corda difere do espaço-tempo de Minkowski apenas globalmente, e corresponde ao espaço de Minkowski do qual foi subtraída uma fatia compreendida pelo ângulo  $8\pi\mu G$ . Então, a seção  $(t, z) = const.$  do espaço-tempo da corda tem a geometria de um cone, e  $r = 0$  é uma singularidade física,

e não uma singularidade de coordenadas, como acontece no caso em que o ângulo  $\phi$  tem a sua variação entre 0 e  $2\pi$ , na ausência da corda.

Portanto, a principal característica do espaço-tempo da corda é a existência de um déficit de ângulo  $\delta = 2\pi(1 - 4\mu G)$ , que corresponde a diferença entre o comprimento de um círculo de raio unitário no espaço-tempo de Minkowski e o de um outro, também de raio unitário, no espaço-tempo cônico, dado por (3.1-20).

Espaços-tempo cônicos desse tipo foram investigados por Marder [54], originalmente, como exemplo de espaço-tempo com fonte singular. Posteriormente, Vilenkin[55] mostrou que a métrica dada por (3.1-20), desprezando-se os termos de ordem  $\mu^2$ , representa a solução das equações de Einstein que descrevem o espaço-tempo de uma corda cósmica sem espessura e infinitamente longa, na aproximação de campo fraco, e Linet[15] mostrou que a eq.(3.1-20) corresponde a solução exata.

Vamos fazer  $(1 - 4\mu G) = \nu^2$  e introduzir uma nova coordenada radial  $\rho$ , tal que  $r = \nu\rho^{1/\nu}$ . Desta forma a parte cônica da métrica dada por (3.1-20) pode ser escrita como sendo conformalmente plana e dada por

$$ds^2 = -dt^2 + e^{-4V} (d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2) + dz^2, \quad (3.1-22)$$

onde  $V = \frac{\nu-1}{4\nu} \ln \rho^2$ . O escalar de Ricci associado ao espaço-tempo dado por (3.1-22) pode ser visto com uma distribuição sendo dado por

$$R = 4\pi \frac{(\nu - 1)}{\nu} \frac{\delta^{(2)}(x)}{\sqrt{g^{(2)}}}, \quad (3.1-23)$$

onde  $g^{(2)} = r^2/\nu^2$ .

As equações de Einstein fornecem uma conexão entre o parâmetro relativo à estrutura cônica do espaço-tempo,  $\nu$ , e o que determina a densidade linear de energia,  $\mu$ , através da relação  $1/\nu = (1 - 4\mu G)$  ou  $1/\nu = (1 - 4\mu G/c^2)$ . Note que a quantidade  $c^4/G \approx 1,34 \times 10^{28} g/cm.c^2$  tem a dimensão de densidade linear de energia e define a escala característica da densidade linear de massa da corda cósmica que é de, aproximadamente,  $10^{28} g/cm$ .

Há uma propriedade interessante do espaço-tempo da corda cósmica, que diz respeito ao fato de que o potencial Newtoniano gerado por ela é nulo. De fato, na aproximação de campo fraco, o potencial Newtoniano  $\Phi$  obedece a seguinte equação

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G T r(T^{\mu\nu}) \quad (3.1-24)$$

Em virtude da estrutura do tensor energia-momento dado por (3.1-4), o segundo membro da equação (3.1-24) é identicamente nulo, e portanto, não há fonte para o potencial Newtoniano, e como consequência, não há força sobre partículas que se movem relativamente à corda cósmica.

### 3.1.2 Solução interior

A solução interior da corda cósmica estática e cilindricamente simétrica pode ser escrita na forma geral dada por:

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\psi} d\phi^2 + e^{2\lambda}(dr^2 + dz^2), \quad (3.1-25)$$

sendo  $\nu$ ,  $\psi$  e  $\lambda$  funções somente de  $r$ . Seguindo o procedimento adotado por Hiscock [19], o tensor energia-momento para o interior da corda é dado por[19]:

$$T_0^0 = -T_3^3 = -\epsilon, \quad (3.1-26)$$

e todas as outras componentes são nulas. Nessas condições, as componentes não-nulas das equações de Einstein para a métrica (3.1-25) são:

$$e^{-2\lambda} \left[ \frac{d^2\psi}{dr^2} + \left( \frac{d\psi}{dr} \right)^2 + \frac{d^2\lambda}{dr^2} \right] = -8\pi\epsilon, \quad (3.1-27)$$

$$e^{-2\lambda} \left[ \frac{d^2\nu}{dr^2} + \left( \frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \frac{d^2\lambda}{dr^2} \right] = 0, \quad (3.1-28)$$

$$e^{-2\lambda} \left[ \frac{d\psi}{dr} \frac{d\nu}{dr} + \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\nu}{dr} + \frac{d\psi}{dr} \frac{d\lambda}{dr} \right] = 0, \quad (3.1-29)$$

$$e^{-2\lambda} \left[ \frac{d^2\nu}{dr^2} + \left( \frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{d^2\psi}{dr^2} + \left( \frac{d\psi}{dr} \right)^2 + \frac{d\nu}{dr} \frac{d\psi}{dr} - \frac{d\psi}{dr} \frac{d\lambda}{dr} \right] = -8\pi\epsilon. \quad (3.1-30)$$

Utilizamos a lei de conservação de energia para o tensor energia-momento,  $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$ , temos:

$$\left(\frac{d\nu}{dr} + \frac{d\lambda}{dr}\right)\epsilon = 0. \quad (3.1-31)$$

Isto implica que, usando a eq. (3.1-28) podemos mostrar que  $\nu$  e  $\lambda$  são constantes, e que por conveniência e sem perda de generalidade, podemos fazer  $\nu = \lambda = 0$ . A equação (3.1-29) torna-se uma identidade, enquanto (3.1-27) e (3.1-29) tornam-se idênticas e são dadas por:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 = -8\pi\epsilon. \quad (3.1-32)$$

cuja solução é:

$$\psi = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{C_1 \sin(2r\sqrt{2\pi\epsilon})^2 + C_2 \cos(2r\sqrt{2\pi\epsilon})^2}{8\pi\epsilon} \right] \quad (3.1-33)$$

A métrica não possuirá uma singularidade cônica sobre seu eixo de simetria se impusermos as condições:  $C_2 = 0$  e  $C_1 = r_* = (8\pi\epsilon)^{-1/2}$ . Estas condições são obtida a partir da hipótese de que  $\epsilon$  é uma constante,  $\epsilon_0$  [56]. Nesse caso, a métrica será dado por:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + dz^2 + r_*^2 \sin(r/r_*)d\phi^2. \quad (3.1-34)$$

A equação (3.1-34) representa a geometria da região interior da corda cósmica na Teoria da Relatividade Geral. A métrica de uma corda cósmica sem estrutura pode ser obtida impondo que  $r_0 \rightarrow 0$ , e que a massa por unidade de comprimento,  $\mu$ , permaneça constante, de modo que a validade da solução dada por (3.1-20), seja estendida até  $r = 0$ , onde a métrica é singular. Na verdade, o correto seria dizer que a superfície  $r = 0$  é uma superfície singular, e não faz parte do espaço-tempo da corda.

As soluções dadas por (3.1-20) serão utilizadas como referências para comparações com as soluções em teorias modificadas de gravitação que veremos a seguir.

## 3.2 O Campo gravitacional da corda cósmica em teorias $f(R)$

Em teorias  $f(R)$  da gravitação não existem restrições, em princípio, sobre as escolhas da função  $f(R)$ . Desde que as condições de energia sejam satisfeitas, qualquer escolha particular para  $f(R)$  é aceitável. A Teoria da Relatividade Geral, possivelmente desprezou alguns termos de aproximação no escalar de curvatura de Ricci [7], de modo que, em regimes de grandes curvaturas esta teoria não fornece resultados com precisão. No intuito de tentar corrigir essa falha, escolhemos como modelo para o cálculo da geometria interna e externa de uma corda a função  $f(R) = R + \alpha R^n$ . Nesse contexto, determinaremos o espaço-tempo de uma corda para duas situações específicas:  $n = -1$  e  $n = 2$ .

Nosso objetivo agora é encontrar uma solução para as equações modificadas de Einstein (2.2-45), que descrevem o campo gravitacional de uma corda cósmica. Por simplicidade, trataremos de uma corda retilínea, homogênea, estática e com densidade linear de massa  $\mu$ , situada ao longo do eixo  $z$ . Nesse modelo, a corda não possuirá nenhuma dependência com o tempo, e portanto, será considerada estática. Admitiremos, também, uma simetria da corda em relação ao ângulo  $\phi$ , e, por fim, que a mesma se mantenha invariante por *boosts* na direção  $z$ . Estas são, basicamente, as mesmas condições impostas sobre a corda na Relatividade Geral. Diante disto, podemos escrever o elemento de linha do espaço-tempo gerado pela mesma como sendo,

$$ds^2 = A(r)^2(dt^2 - dz^2) - dr^2 - C(r)^2 d\phi^2 . \quad (3.2-35)$$

Para representarmos o interior da corda, admitiremos que o tensor energia-momento possui a mesma forma descrita pela gravitação de Einstein dada pela eq. (3.1-3):

### 3.2.1 Caso particular: $f(R) = R + \alpha R^2$

Para cada escolha da função  $f(R)$  podemos ter, em princípio, resultado diferente para a geometria, mas não para a topologia, necessariamente. Vamos considerar, inicialmente, uma função  $f(R)$  que consiste em um termo linear e outro quadrático em  $R$ , que

significa dizer que vamos modificar a ação de Einstein-Hilbert, acrescentando um termo proporcional a  $R^2$ .

Para a escolha  $f(R) = R + \alpha R^2$ , podemos mostrar que as equações (2.2-45), adquirem a seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + 2\alpha \left[ R(R_{\mu\nu} - \frac{R}{4}g_{\mu\nu}) - \nabla_\mu \nabla_\nu R + \frac{g_{\mu\nu}}{6\alpha}(\kappa T + R) \right] = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.2-36)$$

ou mais simplesmente,

$$G_{\mu\nu} + G_{\mu\nu}^m = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.2-37)$$

sendo  $G_{\mu\nu}$  o tensor de Einstein e  $G_{\mu\nu}^m$  o termo adicional devido a introdução do fator  $\alpha R^2$  na ação de Hilbert-Einstein, sendo dado por

$$G_{\mu\nu}^m = 2\alpha \left[ R(R_{\mu\nu} - \frac{R}{4}g_{\mu\nu}) - \nabla_\mu \nabla_\nu R + \frac{g_{\mu\nu}}{6\alpha}(\kappa T + R) \right], \quad (3.2-38)$$

que, obviamente, para  $\alpha = 0$ , é nulo.

A partir da eq. (3.2-36), e com um pouco de álgebra, é possível mostrar que  $A(r)$  é uma constante<sup>2</sup>. Assim, sem nenhuma consequência física para o sistema, podemos escolher um referencial no qual  $A(r) = 1$ . Fazendo isto, as componentes do tensor de Ricci não-nulas e o escalar de curvatura são dadas por:

$$R_0^0 = R_3^3 = 0, \quad R_1^1 = R_2^2 = \frac{C''(r)}{C(r)} \quad \text{e} \quad R = \frac{2}{C(r)}C''(r). \quad (3.2-39)$$

Sendo assim, tomando  $\mu = \nu = 0$ , em (3.2-36), e usando os resultados acima, encontramos uma equação diferencial para a função  $C(r)$ ,

$$\left( \frac{d^2 C}{dr^2} \right)^2 + C(r)w(r) = 0 \quad (3.2-40)$$

com

$$w(r) = \frac{1}{12\alpha} \left[ 1 - \sqrt{1 - 24\alpha\kappa\sigma(r)} \right]. \quad (3.2-41)$$

Faremos uma separação entre a parte interna,  $r < r_0$ , e externa da corda,  $r > r_0$ , levando em consideração que a densidade de energia da corda é constante para  $r < r_0$  e nula na parte externa, que corresponde a solução de vácuo.

---

<sup>2</sup>O cálculo que demonstra que  $A(r)$  é uma constante encontra-se no Apêndice B.

**Parte interna,  $r < r_0$**

Na região em que  $r < r_0$ , a equação diferencial (3.2-40), torna-se:

$$\left(\frac{d^2C}{dr^2}\right)^2 + C(r)w_0 = 0 \quad (3.2-42)$$

com

$$w_0 = \frac{1}{12\alpha} [1 - \sqrt{1 - 24\alpha\kappa\sigma_0}] . \quad (3.2-43)$$

Para que a corda não tenha uma singularidade cônica no ponto  $r = 0$  devemos impor as mesmas condições impostas na Relatividade Geral, isto é,

$$C(0) = 0 \quad \text{e} \quad \left.\frac{dC(r)}{dr}\right|_{r=0} = 1 . \quad (3.2-44)$$

Levando isto em conta, temos que a solução da equação (3.2-42) é dada por

$$C(r) = \frac{1}{\sqrt{w_0}} \sin \sqrt{w_0}r . \quad (3.2-45)$$

Portanto, o elemento de linha que descreve o espaço-tempo na região interna à corda é:

$$ds_{(-)}^2 = dt^2 - dz^2 - dr^2 - \frac{1}{w_0} \sin^2(\sqrt{w_0}r) d\phi^2 . \quad (3.2-46)$$

Essa solução nos mostra que o déficit angular azimutal da corda depende de  $w_0 = [1 - \sqrt{1 - 24\alpha\kappa\sigma_0}] / 12\alpha$ . Portanto, o déficit angular depende não só da densidade de energia, como na solução da Teoria da Relatividade Geral, mas também do parâmetro  $\alpha$  associado ao termo que modifica a ação da TRG. A forma estrutural de ambas as soluções é basicamente a mesma, a menos de uma redefinição de constantes. Suas outras características são mantidas.

**Parte Externa,  $r > r_0$**

A métrica que descreve o espaço-tempo externo à corda, deve ser estática, com simetria cilíndrica e solução de vácuo das equações de Einstein. A forma mais geral para este tipo de métrica foi dada, em 1917, por Levi-Civita [73]:

$$ds_{(+)}^2 = r^{2m} dt^2 - r^{-2m} \left[ r^{2m^2} (dr^2 + dz^2) + a^2 r^2 d\phi^2 \right] , \quad (3.2-47)$$

sendo  $m$  e  $a$  duas constantes.

Como devemos ter invariância de Lorentz na direção  $z$ , as componentes  $g_{00}$  e  $g_{33}$  devem ser iguais. Ao igualarmos esses coeficientes, encontramos em uma equação de segundo grau, em  $m$ , cujas raízes são  $m = 0$  ou  $m = 2$ . Contudo, como  $m = 2$  é fisicamente indesejável<sup>3</sup>, devemos escolher  $m = 0$ . Neste caso, a equação (3.2-47) torna-se:

$$ds_{(+)}^2 = dt^2 - dr^2 - a^2 r^2 d\phi^2 - dz^2. \quad (3.2-48)$$

Na solução dada por (3.2-48),  $a$  é o parâmetro de conicidade e está relacionado com a massa por unidade de comprimento. A métrica dada por (3.2-48) é solução da equação (2.2-46) com  $T = 0$ , que é o caso que está sendo considerado, uma vez que estamos tratando da solução exterior à corda cósmica.

Uma vez que conhecemos a métrica que descreve o espaço-tempo interior à corda cósmica, podemos utilizar as condições de continuidade da métrica e de sua derivada primeira, em  $r$ , para encontrarmos a constante  $a$ . A continuidade da métrica nos fornece as seguintes relações:

$$g_{22}^{(-)}|_{r=r_0} = g_{22}^{(+)}|_{r=r_0} \implies ar_0 = \frac{\sin(\sqrt{\omega_0}r_0)}{\sqrt{\omega_0}}, \quad (3.2-49)$$

e de sua derivada,

$$\left. \frac{dg_{22}^{(-)}}{dr} \right|_{r=r_0} = \left. \frac{dg_{22}^{(+)}}{dr} \right|_{r=r_0} \implies a^2 r_0 = \frac{\sin(\sqrt{\omega_0}r_0)}{\sqrt{\omega_0}} \cos(\sqrt{\omega_0}r_0), \quad (3.2-50)$$

Então, substituindo (3.2-49) em (3.2-50), temos:

$$a = \cos(\sqrt{\omega_0}r_0). \quad (3.2-51)$$

Para obtermos uma relação com o resultado da Relatividade Geral, é conveniente expressarmos a constante  $a$  em termos da densidade linear de massa da corda. Tal densidade linear é definida como sendo a integral da densidade de energia  $T_0^0 = \sigma(r)$

---

<sup>3</sup>A medida que a coordenada radial  $r$  diminui, a circunferência de um círculo com  $r$  constante aumenta, divergindo no limite em que  $r \rightarrow 0$ .

sobre a superfície bidimensional  $t$  e  $z$  constantes, eq.(3.1-16),

$$\mu = \sigma_0 \int \sqrt{g^{(-)}} \sigma(r) d^2 x, \quad (3.2-52)$$

sendo  $g^{(-)}$  o determinante da métrica interna. Resolvendo a integral (3.2-52), encontramos

$$a = 1 - \frac{\omega_0}{2\pi\sigma_0} \mu. \quad (3.2-53)$$

Usando a relação acima, podemos escrever a métrica da região exterior à corda como:

$$ds_{(+)}^2 = dt^2 - dr^2 - dz^2 - \left(1 - \frac{\omega_0 \mu}{2\pi\sigma_0}\right)^2 r^2 d\phi^2, \quad (3.2-54)$$

Se fizermos a mudança de coordenadas  $\phi' = a\phi$ , obteremos a métrica do espaço-tempo de Minkowski, na qual o ângulo  $\theta'$  varia entre 0 e  $2\pi a$ . Isto mostra que a métrica exterior à corda difere da métrica de Minkowski apenas globalmente e que localmente elas são equivalentes. A diferença do ponto de vista global está associado ao déficit angular  $\delta\phi$ , dado por  $\delta\phi = 2\pi [1 - a] = \omega_0 \mu / \sigma_0$ . Este resultado é semelhante ao obtido pela TRG.

Note que em (3.2-54),  $\omega_0$  é dado pela expressão:

$$\omega_0 = \frac{1}{12\alpha} (1 - \sqrt{1 - 24\alpha\kappa\sigma_0}) \quad (3.2-55)$$

e se fizermos  $\alpha \rightarrow 0$ , obteremos o mesmo resultado da TRG. Mais adiante mostraremos que esse resultado é apenas uma particularização de um resultado mais geral para soluções de vácuo cilíndricamente simétricas em teorias  $f(R)$ .

### 3.2.2 Caso particular: $f(R) = R + \alpha R^{-1}$

Nesta seção, o procedimento utilizado para se resolver as equações de campo de Einstein modificadas, é idêntico ao realizado na seção anterior, em virtude da semelhança entre os dois casos.

Podemos fazer a seguinte pergunta: Porque não resolver a equação (2.2-45) para uma função mais geral, do tipo  $f(R) = R + \alpha R^n$ ? A razão pela qual não foi tentado o caso geral é que a equação diferencial gerada não possui uma solução analítica quando

$f(R) = R + \alpha R^n$ , tendo-se inevitavelmente que se particularizar para  $n = -1$  e  $n = 2$ , de modo a obter uma solução analítica.

No capítulo 5 desta tese abordamos um caso bastante geral para as teorias  $f(R)$ , e obtemos uma solução para a corda cósmica, sem especificar a forma de  $f(R)$ .

Dando procedimento a análise das possíveis soluções da corda em  $f(R)$ , vamos, agora, considerar outra forma específica, dada por  $f(R) = R + \alpha R^{-1}$ . Considerando, então, esta forma da função  $f(R)$ , obtemos a seguinte equação, com o uso de (2.2-45):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \alpha \left[ (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \Delta) R^{-2} - \frac{1}{2R} g_{\mu\nu} - \frac{R_{\mu\nu}}{R^2} \right] = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.2-56)$$

Tomando-se, novamente, o traço de ambos os membros desta equação e substituindo-se nela mesma, obtemos o seguinte resultado

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \alpha \left[ \nabla_\mu \nabla_\nu R^{-2} + \frac{g_{\mu\nu}}{3\alpha} (\kappa T + R) - \frac{1}{2R} g_{\mu\nu} - \frac{R_{\mu\nu}}{R^2} \right] = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.2-57)$$

A componente,  $\mu = \nu = 0$ , desta expressão gera uma equação diferencial semelhante a (3.2-42), dada por

$$\left( \frac{d^2 C}{dr^2} \right)^2 + C(r)s(r) = 0, \quad (3.2-58)$$

sendo,

$$s(r) = -\frac{1}{2} \left[ -\kappa\sigma(r) - \sqrt{\kappa^2\sigma^2 + 3\alpha} \right]. \quad (3.2-59)$$

Como continuamos tratando da mesma situação física, uma corda cósmica de raio  $r_0$  com densidade linear de massa  $\mu$  e densidade de energia  $\sigma(r)$ , as condições de contorno que foram impostas sobre a solução externa (3.2-44) para o caso anterior  $R^2$ , podem ser usadas no presente caso, e dessa forma, determinamos a solução interior e exterior à corda, pelo mesmo procedimento adotado. Essas soluções são as seguintes:

$$ds_{(-)}^2 = dt^2 - dz^2 - dr^2 - \frac{1}{s_0} \sin(\sqrt{s_0}r)^2 d\phi^2, \quad (3.2-60)$$

e

$$ds_{(+)}^2 = dt^2 - dr^2 - dz^2 - \left( 1 - \frac{s_0\mu}{2\pi\sigma_0} \right)^2 r^2 d\phi^2, \quad (3.2-61)$$

sendo,

$$s_0 = -\frac{1}{2} \left( -\kappa\sigma_0 - \sqrt{\kappa^2\sigma_0^2 + 3\alpha} \right). \quad (3.2-62)$$

Apenas por uma redefinição de constantes, esses resultados são iguais aos encontrados anteriormente para  $n = 2$ , eqs. (3.2-46) e (3.2-54). As soluções de vácuo (3.2-54) e (3.2-61), representam casos particulares de uma solução mais geral para cordas cósmicas cilíndricamente simétricas em teorias  $f(R)$  apresentada por Azadi [75]. Nessa solução generalizada a abordagem usada por Azadi [75] é bastante diferente da que usamos nesta seção, mas os resultados equivalentes. No trabalho de Azadi [75], a métrica do espaço-tempo da corda é escrito em termos das coordenadas cilíndricas de Weyl, e toma a seguinte forma

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left( -e^{2k(r)-2u(r)}, e^{2k(r)-2u(r)}, w(r)e^{-2u(r)}, e^{2u} \right) \quad (3.2-63)$$

sendo,

$$R = \frac{-wu'' + wk'' - w'u' + w'' + wu'^2}{we^{2k}}, \quad (3.2-64)$$

o escalar de curvatura. Com a ajuda das equações (2.2-45) e considerando o escalar de curvatura identicamente nulo, que é o nosso caso para as soluções (3.2-54) e (3.2-61), Azadi [75] chega a uma expressão para a métrica, que é dada por

$$ds^2 = \tilde{r}^{2m(m\mp 1)}(d\tilde{r}^2 + d\tilde{z}^2) + \tilde{r}^{2\mp 2m}d\tilde{\phi}^2 - \tilde{r}^{\pm 2m}d\tilde{t}^2, \quad (3.2-65)$$

onde,

$$\tilde{t} = e^{\tilde{c}_4 - c_3} A^{\frac{1}{m(m\mp 1)+1}} t$$

$$\tilde{z} = e^{c_3} A^{\frac{\mp m}{m(m\mp 1)+1}} z$$

$$\tilde{\phi} = e^{-c_3} A^{-\frac{1\mp m}{m(m\mp 1)+1}} \phi$$

$$\tilde{\rho} = A^{\frac{1}{m(m\mp 1)+1}} \rho$$

$$A = e^{\frac{\tilde{c}_4 - c_3}{c_6}}$$

com  $\tilde{c}_4 = c_4 - \frac{c_5}{c_6} \ln c_6$  e  $m = \sqrt{\frac{c_5}{c_6}}$ ,  $c_3$ ,  $c_4$ ,  $c_5$  e  $c_6$  sendo constantes. A expressão (3.2-65) é semelhante a encontrada por Levi-Civita(3.2-47) para simetrias cilíndricas que utilizamos

para deduzir nossa solução. Tomando  $m = 0$  em (3.2-65), encontramos uma solução exterior com déficit angular correspondente ao espaço-tempo de uma corda cósmica:

$$ds^2 = -d\tilde{t}^2 + d\tilde{\rho}^2 + d\tilde{z}^2 + a_0^2 \tilde{\rho}^2 d\phi^2, \quad (3.2-66)$$

onde o parâmetro  $a_0$  está relacionado com a massa gravitacional por unidade de comprimento da corda [74]. Esta solução, representa uma forma geral para soluções cilindricamente simétricas em teorias  $f(R)$ , com  $R$  constante. As duas soluções de vácuo (3.2-54) e (3.2-61), embora não tenham o escalar de Ricci constante, são casos particulares de (3.2-66). O parâmetro  $a_0$ , pode ser ajustado convenientemente de forma que as nossas soluções tornam-se dependentes apenas destas escolhas particulares de  $a_0$ .

A solução da corda cósmica na teoria  $f(R)$  pode ser reduzida à encontrada por Hiscock [19] em 1985, simplesmente tomando-se o limite do parâmetro  $\alpha$  indo para zero nas nossas equações (3.2-54) e (3.2-61). Fazendo uma comparação entre as duas soluções, concluímos que é possível passar de uma para outra através da relação

$$\rho_* = \frac{1}{\sqrt{w_0}},$$

sendo  $\rho_* = \frac{1}{8\pi\sigma}$ , a constante na solução de Hiscock e,

$$w_0 = \frac{1}{12\alpha} (1 - \sqrt{1 - 24\alpha\sigma_0\kappa}),$$

para  $n = 2$ , ou ,

$$s_0 = -\frac{1}{2} \left( -\kappa\sigma_0 - \sqrt{\kappa^2\sigma^2 + 3\alpha} \right),$$

para  $n = -1$ , constantes para as soluções encontradas em  $f(R)$ . A mesma relação é válida para a parte externa.

Diferentemente do caso de Hiscock [19], as nossas soluções apresentam dependência na densidade de energia  $\sigma(r)$ , sendo  $\sigma(r) = \sigma_0$  para a parte interna e  $\sigma(r) = 0$  para a parte externa da corda. O espaço-tempo descrito por elas apresenta um déficit angular diferente,<sup>4</sup> dado por:

$$\delta\phi = \frac{\omega_0}{\sigma_0} \mu, \quad (3.2-67)$$

---

<sup>4</sup>O cálculo detalhado sobre déficit angular encontra-se no Apêndice D desta tese.

para  $n = 2$ , ou,

$$\delta\phi = \frac{s_0}{\sigma_0}\mu. \quad (3.2-68)$$

para  $n = -1$ . Esse espaço-tempo apresenta uma singularidade a uma distância radial,

$$r = \frac{1}{\sqrt{w_0}} \tan \sqrt{w_0} r_0, \quad (3.2-69)$$

sendo  $r_0$  o raio da corda.

Como já dissemos, nossas soluções de vácuo representam um caso particular da solução encontrada por Azadi[75] para um escalar de Ricci constante, porém as duas soluções internas da corda (3.2-46) e (3.2-60), que são as soluções para  $n = 2$  e  $n = -1$ , respectivamente, são diferentes das encontradas por Azadi [75], pois o deficit angular é função senoidal da coordenada radial  $r$ , apresentando divergências para casos em que  $r = \frac{2n\pi}{\sqrt{s_0}}$ , sendo  $n$  inteiro positivo.

### 3.3 O Campo gravitacional da corda cósmica em teorias $f(\mathcal{G})$

Nesta seção, vamos nos concentrar em uma outra forma de gravitação modificada, a teoria gravitacional de Gauss-Bonnet, que já foi discutida no capítulo 2 desta tese. A teoria  $f(\mathcal{G})$  da gravitação, como também é conhecida, introduz um escalar na ação de Einstein-Hilbert de modo que as equações de campo geradas são diferentes das equações de Einstein da gravitação, na expectativa de explicar alguns fatos recentes em cosmologia, como a aceleração do Universo e a questão da matéria e energia escura[68]. As cordas cósmicas por sua vez tem um papel fundamental na formação de estruturas do nosso Universo como possíveis sementes de formação, e por isso se faz necessária uma atenção especial às mesmas. Nesta seção, iremos estudar um pouco mais sobre o espaço-tempo gerado por uma corda cósmica do ponto de vista das teorias de gravitação modificadas de Gauss-Bonnet. Não existe, até o momento, nenhum trabalho específico nesse sentido. O

que faremos é uma comparação do resultado obtido com a métrica da corda já existente, dada por (3.1-20) na Teoria da Relatividade Geral com a que encontraremos.

### 3.3.1 A métrica da corda em $f(\mathcal{G})$

Como já foi dito anteriormente, em teorias  $f(\mathcal{G})$ , a ação é dada por[69]<sup>5</sup>,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ f(\mathcal{G}) + \frac{R}{2} \right] + \mathcal{L}, \quad (3.3-70)$$

onde  $\mathcal{L}$  é a densidade Lagrangeana da matéria, e  $\mathcal{G}$  o escalar de Gauss-Bonnet, que é dado por

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (3.3-71)$$

Variando (3.3-70) com respeito a  $g_{\mu\nu}$ , encontramos as seguintes equações de campo:

$$G_{\mu\nu} + 8[R_{\mu\rho\nu\sigma} + R_{\rho\nu}g_{\sigma\mu} + 1/2(g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})R - R_{\rho\sigma}g_{\nu\mu} - R_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} + R_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}] \nabla^\rho \nabla^\sigma F(\mathcal{G}) + g_{\mu\nu} [\mathcal{G}F(\mathcal{G}) - f(\mathcal{G})] = \kappa T_{\mu\nu} \quad (3.3-72)$$

sendo  $G_{\mu\nu}$  o tensor de Einstein,  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$  o tensor de Riemman,  $R$  seu escalar,  $T_{\mu\nu}$  o tensor energia momento e  $F(\mathcal{G}) = df/d\mathcal{G}$ . De modo análogo ao que foi feito para o caso em teorias  $f(R)$ , aqui também, teremos que fazer algumas restrições ao espaço-tempo interior da corda: consideraremos uma corda estática e homogênea, situada ao longo do eixo  $z$  e que tenha uma densidade de massa uniforme. O elemento de linha para este caso foi descrito em outras seções. Ele é dado por<sup>6</sup>

$$ds^2 = A(r) (dt^2 - dz^2) - dr^2 + C(r)^2 d\phi^2. \quad (3.3-73)$$

O tensor energia momento da corda é descrito por:

$$T_\mu^\nu = \sigma(r) \text{diag}(1, 0, 0, 1), \quad (3.3-74)$$

---

<sup>5</sup>Nesta seção adotaremos  $\kappa = 8\pi G = 1$ .

<sup>6</sup>Estamos adotando sempre as mesmas condições físicas para a métrica da corda em TRG para podermos comparar as novas soluções em teorias modificadas, com a da TRG.

sendo  $\sigma(r)$  a densidade de energia da corda:

$$\sigma(r) = \begin{cases} \sigma_0, & \text{se } r \leq r_0, \\ 0, & \text{se } r > r_0 \end{cases} \quad (3.3-75)$$

sendo  $r$  uma coordenada radial e  $r_0$  o raio da corda.

Fazendo  $\mu = \nu = 0$  na equação (3.3-72), obtemos o seguinte resultado:

$$G_{00} + 8[R_{0\rho 0\sigma} + R_{\rho 0}g_{\sigma 0} + 1/2(g_{00}g_{\sigma\rho} - g_{0\sigma}g_{0\rho})R - R_{\rho\sigma}g_{00} - R_{00}g_{\sigma\rho} + \quad (3.3-76)$$

$$R_{0\sigma}g_{0\rho}] \nabla^\rho \nabla^\sigma F(\mathcal{G}) + g_{00} [\mathcal{G}F(\mathcal{G}) - f(\mathcal{G})] = \kappa^2 T_{00},$$

sendo,

$$G_{00} = -\frac{A(r)}{C(r)} \left( \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{dC}{dr} \frac{dA}{dr} + \frac{d^2 C}{dr^2} A \right), \quad (3.3-77)$$

$$R = \frac{2}{A^2 C} \left[ 2AC \frac{d^2 A}{dr^2} + 2A \frac{dA}{dr} \frac{dC}{dr} + \left( \frac{dA}{dr} \right)^2 C + \frac{d^2 C}{dr^2} A^2 \right], \quad (3.3-78)$$

$$R_{00} = \frac{1}{C} \left[ AC \frac{d^2 A}{dr^2} + AC \frac{dA}{dr} + \left( \frac{dA}{dr} \right)^2 C \right], \quad (3.3-79)$$

e

$$T_{00} = \sigma(r)A(r)^2. \quad (3.3-80)$$

Como está demonstrado no Apêndice B deste trabalho, a componente da métrica  $A(r)$  é uma constante, resultado este válido qualquer que seja a teoria de gravitação. Levando-se este fato em consideração e fazendo,  $A(r) = 1$ , as equações de (3.3-77) a (3.3-80) tornam-se:

$$G_{00} = -\frac{1}{C(r)} \frac{d^2 C}{dr^2}, \quad (3.3-81)$$

$$R = \frac{2}{C(r)} \frac{d^2 C}{dr^2}, \quad (3.3-82)$$

$$R_{00} = 0, \quad (3.3-83)$$

e

$$T_{00} = \sigma(r), \quad (3.3-84)$$

sendo as componentes do tensor de Riemann dadas por:  $R_{0101} = R_{0202} = R_{0303} = 0$ . O invariante de Gauss-Bonnet,  $\mathcal{G}$ , é calculado a partir de (3.3-71)<sup>7</sup>, sendo dado por:

$$\mathcal{G} = -3 \left( \frac{1}{C} \frac{d^2 C}{dr^2} \right)^2. \quad (3.3-85)$$

Substituindo todas essas relações juntamente com,

$$R_{22} = -C \frac{d^2 C}{dr^2} \quad (3.3-86)$$

em (3.3-76), nós obtemos:

$$[\mathcal{G}F(\mathcal{G}) - f(\mathcal{G})] - \frac{1}{C} \frac{d^2 C}{dr^2} = \sigma(r) \quad (3.3-87)$$

onde  $f(\mathcal{G})$  é uma função do escalar de Gauss-Bonnet ainda a ser definida,  $F(\mathcal{G})$  representa a derivada de  $f(\mathcal{G})$  com respeito ao escalar  $\mathcal{G}$  e  $\sigma(r)$  é a densidade de energia da corda, dada por (3.3-75).

Entre as várias possibilidades e formas que podemos escrever a função  $f(\mathcal{G})$ , preferimos a escolha feita por Cognola [76]. Dentre os vários motivos pelo qual utilizaremos este modelo, podemos citar a simplificação das equações de campo, a possibilidade de se utilizar as condições de energia, caso sejam necessárias para a resolução das equações e ainda o fato de que modelos deste tipo podem produzir quintessência, fantasmas ou ainda a constante cosmológica, e ainda explicar transições de fase entre as eras de aceleração e desaceleração do Universo[76]. Nestes termos temos:

$$f(\mathcal{G}) = \alpha \mathcal{G}^n, \quad (3.3-88)$$

com  $\alpha$  sendo uma constante e  $n$  um expoente arbitrário a ser definido. A primeira derivada de (3.3-88) é:

$$F(\mathcal{G}) = n\alpha \mathcal{G}^{n-1}. \quad (3.3-89)$$

Substituindo (3.3-85), (3.3-88) e (3.3-89), a eq. (3.3-87) toma a seguinte forma:

$$\alpha(n-1) \left[ -3 \frac{1}{C(r)^2} \left( \frac{d^2 C}{dr^2} \right)^2 \right]^n - \frac{1}{C(r)} \frac{d^2 C}{dr^2} = \sigma(r). \quad (3.3-90)$$

---

<sup>7</sup>O cálculo detalhado do escalar de Gauss-Bonnet encontra-se no Apêndice C deste trabalho.

Devido a impossibilidade de se obter a solução analítica desta equação, para  $n$  qualquer, faremos escolhas particulares. No caso em que  $n = 1$  temos a solução usual da corda cósmica na Teoria da Relatividade Geral(3.1-21). Vamos considerar, portanto,  $n = 2$ . Qualquer que seja o valor de  $n$  escolhido, teremos duas situações distintas a serem analisadas, a parte interna e a externa, sendo ambas diferenciadas pela densidade de energia,

$$\sigma(r) = \begin{cases} \sigma_0, & \text{se } r \leq r_0, \\ 0, & \text{se } r > r_0 \end{cases} \quad (3.3-91)$$

Analisemos separadamente cada região da Corda.

### 3.3.2 Solução Interior

Neste caso a densidade de energia é constante e se estende até  $r = r_0$ , o mesmo sendo válido para sua densidade de massa. Assim, da eq. (3.3-91) temos que  $\sigma(r) = \sigma_0$  e a equação diferencial (3.3-90), torna-se para  $n = 2$ :

$$9\alpha \left[ \frac{1}{C(r)} \left( \frac{d^2C}{dr^2} \right) \right]^4 - \frac{1}{C(r)} \frac{d^2C}{dr^2} = \sigma_0. \quad (3.3-92)$$

A relação entre  $\alpha$  e  $\sigma_0$  é muito importante para a solução desta equação, pois para alguns valores de  $\sigma_0$ , ela não possui solução, e portanto, a densidade de energia  $\sigma_0$ , deve ser usada como um parâmetro de ajuste, que permita a obtenção de soluções para valores específicos de  $\sigma_0$ . Em geral, a eq.(3.3-92) só terá solução para valores de densidade de energia positiva, como mostra o gráfico da figura 3.1.

A equação (3.3-92) não possui solução analítica conhecida. Neste caso, vamos restringir nossa solução a um caso especial em que o termo,

$$\xi^2 = \frac{1}{C(r)} \left( \frac{d^2C}{dr^2} \right), \quad (3.3-93)$$

é constante, o que de fato também é verdade, se  $\alpha$  for uma constante, uma vez que  $\sigma_0$  é constante no interior da corda, de acordo com a escolha feita. O termo (3.3-93) deve ser ajustado de tal maneira que a expressão (3.3-92) seja uma identidade. As condições de energia impostas sobre a forma da função  $f(\mathcal{G})$  dada por (3.3-88), nos obriga a escolher

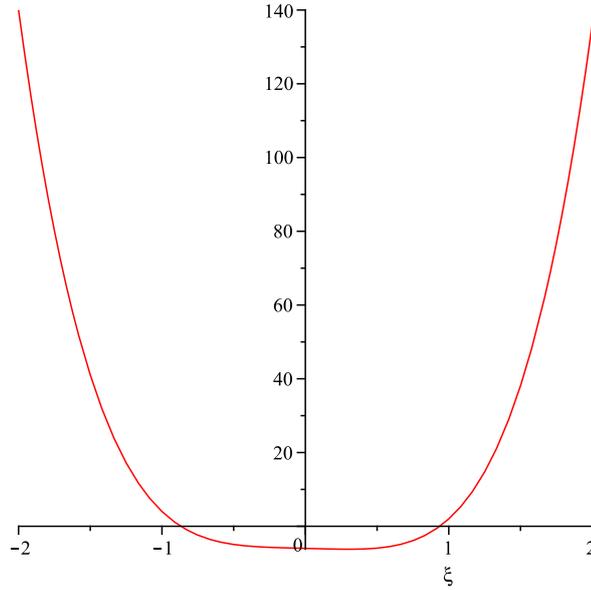


Figura 3.1: O gráfico mostra a variação do termo  $\zeta$  em função de  $\chi$  para valores positivos da densidade de energia.

valores positivos para  $\alpha$  [76]. Nesse caso, só existirá solução para (3.3-92) para os casos em que a densidade de energia da corda,  $\sigma_0$ , seja positiva.

Fazendo  $\zeta = \alpha^{1/3}\sigma_0$  e  $\chi = \alpha^{1/3}\xi$ , a equação diferencial (3.3-92) torna-se adimensional,

$$\zeta(\alpha) = 9\chi(\alpha, r)^4 - \chi(\alpha, r). \quad (3.3-94)$$

Para valores de  $\chi$  em que,  $\chi \leq 0$ , e  $\chi \geq 3^{-2/3}$ ,  $\zeta$  e conseqüentemente  $\sigma_0$ , assumem valores positivos, ver figura (3.1). Então, para valores de  $\xi \geq 9\alpha^{-1/3}$  e  $\xi \leq 0$ , temos as condições de energia satisfeitas. Porém, como  $\xi$  pode assumir valores positivos ou negativos, devemos levar em consideração que para valores positivos isso irá gerar na solução exterior da corda um superávit de ângulo planar, e como sabemos das soluções obtidas anteriormente em Relatividade Geral e em teorias  $f(R)$ , a corda cósmica não possui um superávit de ângulo planar e sim um déficit. Assim, podemos excluir valores positivos para  $\xi$ , e a equação (3.3-93) transforma-se em

$$\left(\frac{d^2C}{dr^2}\right) + C(r)\xi^2 = 0, \quad (3.3-95)$$

cuja a solução é

$$C(r) = c_1 \sin(\xi r) + c_2 \cos(\xi r). \quad (3.3-96)$$

Usando as duas condições de contorno para a corda cósmica,

$$C(r) \Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{dC(r)}{dr} \Big|_{r=0} = 1 \quad (3.3-97)$$

encontramos que,

$$C(r) = \frac{1}{\xi} \sin(\xi r). \quad (3.3-98)$$

Assim, a solução interna para a corda cósmica em teoria de gravitação de Gauss-Bonnet pode ser escrita na forma,

$$ds_{(-)}^2 = dt^2 - dr^2 - \frac{1}{\xi^2} \sin^2(\xi r) d\phi^2 - dz^2. \quad (3.3-99)$$

A menos de uma redefinição de constantes, esta solução é idêntica ao caso da encontrada por Hiscock [19] e das teorias de gravitação  $f(R)$ [23]. No caso da solução das teorias  $f(R)$ , eq. (3.2-60), temos uma coincidência maior ainda, pois a constante  $s_0$  em  $f(R)$  assume um caráter estritamente positivo, de acordo, portanto, com o que assumimos para a constante  $\xi$ .

### 3.3.3 Solução Exterior

Uma solução externa para a corda cósmica foi encontrada por Hiscock[19], a qual descreve um objeto unidimensional, infinitamente longo e com simetria axial. Para esta solução em gravitação  $f(\mathcal{G})$  procederemos de maneira análoga ao que foi feito por Hiscock [19] em 1985. Consideramos como solução geral para um objeto com simetria axial, a métrica de Levi-Civita[73],

$$ds^2 = r^{2m} dt^2 - r^{-2m} \left[ r^{2m^2} (dr^2 + dz^2) + a^2 r^2 d\phi^2 \right] \quad (3.3-100)$$

com  $a$  e  $m$  sendo constantes. Fazendo a mesma escolha feita por Hiscock [19], qual seja,  $m = 0$ , temos:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - a^2 r^2 d\phi^2 - dz^2. \quad (3.3-101)$$

Aproveitando-se que já determinamos o espaço-tempo interno à corda (3.3-99), vamos utilizar o princípio físico de continuidade da métrica e de sua derivada na fronteira da corda, como foi feito no caso exterior para teorias  $f(R)$ [23]. Para isto vamos utilizar as eqs. (3.2-49) e (3.2-50),

$$g_{22}^{(-)}|_{r=r_0} = g_{22}^{(+)}|_{r=r_0} \quad \left. \frac{dg_{22}^{(-)}}{dr} \right|_{r=r_0} = \left. \frac{dg_{22}^{(+)}}{dr} \right|_{r=r_0}. \quad (3.3-102)$$

Usando estas relações, encontramos o seguinte resultado

$$a = \cos(\xi r_0). \quad (3.3-103)$$

A densidade superficial de massa da corda é dada por:

$$\mu = \sigma_0 \int \sqrt{-g^{(-)}} d\sigma \quad (3.3-104)$$

sendo  $g^{(-)}$  o determinante da métrica interna e  $d\sigma$  uma superfície bidimensional dada por  $d\sigma = d\phi dr$ . Integrando-se (3.3-104) e substituindo-se (3.3-103), encontramos o seguinte resultado

$$a = \left( 1 - \frac{\xi^2 \mu}{2\pi \sigma_0} \right). \quad (3.3-105)$$

Portanto, a métrica externa do espaço-tempo gerado pela corda cósmica em  $f(\mathcal{G})$  fica sendo então,

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \left( 1 - \frac{\xi^2 \mu}{2\pi \sigma_0} \right)^2 r^2 d\phi^2 - dz^2. \quad (3.3-106)$$

Fica evidente a semelhança entre esta solução de vácuo e a que foi obtida por Hiscock [19], dada pela equação (3.1-20), bem como com as soluções externas em teorias  $f(R)$ , dadas pelas eqs. (3.2-54) e (3.2-61). Note que o déficit angular é diferente, como seria de se esperar, sendo dado por  $\delta\phi = \xi^2 \mu / \sigma_0$ .

### 3.4 Soluções da equação de Dirac no espaço-tempo da corda cósmica em $f(R)$ e $f(\mathcal{G})$

Vamos admitir que a corda cósmica seja infinitamente longa, estática e muito fina (sem espessura), de modo que possamos descartar a solução interior.

Os elementos de linha que descrevem o espaço-tempo exterior à corda cósmica, no contexto das Teorias  $f(R)$  com  $f(R) = R + \alpha R^n$ , com  $n = -1$  e  $n = 2$  e para a Teoria de Gravitação de Gauss-Bonnet para  $f(\mathcal{G}) = \alpha \mathcal{G}^2$ , foram determinados nas seções anteriores desta tese, e possuem a mesma estrutura algébrica, podendo assim, serem escritos na forma geral, dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \lambda_i^{-2} r^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (3.4-107)$$

onde,

$$\lambda_i = \left(1 - \frac{s_i \mu}{2\pi\sigma_0}\right)^{-1}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.4-108)$$

sendo,

$$s_1 = \frac{1}{12\alpha} [1 - \sqrt{1 - 24\alpha\kappa\sigma_0}], \quad (3.4-109)$$

$$s_2 = -\frac{1}{2} \left[-\kappa\sigma_0 + \sqrt{\kappa^2\sigma_0^2 + 3\alpha}\right], \quad (3.4-110)$$

e

$$s_3 = \xi^2, \quad (3.4-111)$$

para  $f(R) = R + \alpha R^n$ ,  $n = -1, n = 2$  e  $f(\mathcal{G}) = \alpha \mathcal{G}^2$ , respectivamente. o parâmetro  $\kappa$  é dado por,  $\kappa = 8\pi G$ , sendo  $G$  a constante gravitacional,  $\sigma(r)$  a densidade de energia da corda e  $\xi$  é uma constante dada pela expressão (3.3-93).

A equação de Dirac é dada por,

$$[-i\gamma^\mu(x) (\partial_\mu - \Gamma_\mu) + M] \Psi = 0, \quad (3.4-112)$$

onde

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2} \Sigma^{ab} e_{(a)}^\nu \nabla_\mu e_{(b)\nu}, \quad (3.4-113)$$

com

$$\Sigma^{ab} = -\frac{1}{4} [\gamma^{(a)}, \gamma^{(b)}] \quad (3.4-114)$$

e

$$\gamma^\mu = e_{(a)}^\mu(x) \gamma^a. \quad (3.4-115)$$

Vamos escolher a representação das matrizes de Dirac como sendo

$$\gamma^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.4-116)$$

e

$$\gamma^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4-117)$$

onde  $\sigma^i$  são as matrizes de Pauli. A base tetrada será dada por

$$e_{(0)}^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (3.4-118)$$

$$e_{(1)}^\mu = \left( 0, \cos \phi, \frac{-\lambda_i}{\rho} \sin \phi, 0 \right), \quad (3.4-119)$$

$$e_{(2)}^\mu = \left( 0, \sin \phi, \frac{\lambda_i}{\rho} \cos \phi, 0 \right), \quad (3.4-120)$$

$$e_{(3)}^\mu = (0, 0, 0, 1). \quad (3.4-121)$$

Usando as tetradas dadas por (3.4-118)-(3.4-121), e as relações dadas em (3.4-113) e (3.4-114), obtemos o seguinte resultado:

$$\gamma^0 = \gamma^{(0)}; \quad \gamma^\rho = \gamma^{(1)} \cos \phi + \gamma^{(2)} \sin \phi; \quad (3.4-122)$$

$$\gamma^\phi = -\frac{\lambda_i}{\rho} \sin \phi \gamma^{(1)} + \frac{\lambda_i}{\rho} \cos \phi \gamma^{(2)}; \quad (3.4-123)$$

$$\gamma^3 = \gamma^{(3)}; \quad (3.4-124)$$

$$\gamma^\mu \Gamma_\mu = \frac{-(\lambda_i - 1)}{2\rho} \gamma^\rho. \quad (3.4-125)$$

Usando os resultados anteriores, a equação de Dirac, dada por (3.4-112), toma a seguinte forma:

$$\left[ -i\gamma^\mu \partial_\mu + i \frac{(\lambda_i - 1)}{2\rho} \gamma^\rho + M \right] \Psi(x) = 0 \quad (3.4-126)$$

A solução da equação (3.4-126) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Psi = e \begin{bmatrix} a_+(e) e^{i\ell\phi} \\ b_+(e) e^{i(\ell+1)\phi} \\ a_-(e) e^{i\ell b} \\ b_-(e) e^{i(\ell+1)\phi} \end{bmatrix}, \quad (3.4-127)$$

onde  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Substituindo (3.4-127) em (3.4-126), obtemos as seguintes equações:

$$\partial_\rho^2 a_\pm + \frac{1}{\rho} \partial_\rho a_\pm + \left\{ \frac{[\lambda_i(l + 1/2) - 1/2]^2}{\rho^2} + E^2 - M^2 - p_z^2 \right\} a_\pm = 0 \quad (3.4-128)$$

$$\partial_\rho^2 b_\pm + \frac{1}{\rho} \partial_\rho b_\pm + \left\{ \frac{[\lambda_i(l + 1/2) - 1/2]^2}{\rho^2} + E^2 - M^2 - p_z^2 \right\} b_\pm = 0 \quad (3.4-129)$$

As soluções de (3.4-128) e (3.4-129) são as seguintes:

$$a_\pm(\rho) = A_\pm J_{\beta_\pm}(p_\perp, \rho), \quad (3.4-130)$$

$$b_\pm(\rho) = B_\pm J_{\beta_\pm}(p_\perp, \rho), \quad (3.4-131)$$

onde  $A_\pm$  e  $B_\pm$  são constantes de normalização,  $p_\perp = \sqrt{E^2 - p_z^2 - M^2}$ ,  $\beta_\pm = |\lambda_i(l + 1/2) \pm 1/2|$  e  $J_{\beta_\pm}$  são as funções de Bessel de primeira ordem.

Portanto, as soluções correspondentes a uma partícula espinorial nos espaços-tempo da corda cósmica, nos diferentes cenários que consideramos, contém informações sobre a estrutura topológica desses espaços, codificadas nos parâmetro de conicidade, e que dependem explicitamente de estarmos em  $f(R)$  ou  $f(\mathcal{G})$ , e no primeiro, se tomamos  $n = 2$  ou  $n = -1$ .

### 3.5 Corrente fermiônica

Nesta seção vamos calcular a corrente associada aos férmions, que é definida da seguinte forma

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (3.5-132)$$

onde  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  é o espinor adjunto.

Se considerarmos  $\psi$  como sendo um campo com massa,  $J^\mu$  pode ser escrito como

$$J^\mu = \frac{1}{2m} \partial_\nu (\bar{\psi} \Sigma^{\mu\nu} \psi) + \frac{i}{4m} g^{\mu\sigma} \bar{\psi} \bar{\partial}_\sigma \psi + \frac{i}{2m} \bar{\psi} [\partial_\sigma (\gamma^\sigma \Gamma_\sigma), \gamma^\mu] + \frac{i}{4m} \bar{\psi} ([\partial_\sigma \gamma^\sigma, \gamma^\mu] + [\gamma^\sigma, \partial_\sigma \gamma^\mu]), \quad (3.5-133)$$

onde,

$$\bar{\psi}\bar{\partial}_\sigma\psi \equiv \bar{\psi}\partial_\sigma\psi - (\partial_\sigma\bar{\psi})\psi \quad (3.5-134)$$

e  $\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ . A equação (3.5-133) representa a decomposição de Gordon da corrente fermiônica,  $\gamma^\mu$ .

No espaço-tempo da corda cósmica em  $f(R)$  e  $f(\mathcal{G})$ , cuja métrica é dada na forma geral pela equação (3.4-107), obtemos os seguintes resultados,

$$\begin{aligned} [\partial_\sigma\gamma^\sigma, \gamma^0] &= \frac{2\lambda_i}{\rho}\gamma^{(0)}\gamma^{(\rho)}, \\ [\gamma^\sigma\Gamma_\sigma, \gamma^0] &= \frac{1}{\rho}(\lambda_i - 1)\gamma^{(0)}\gamma^{(\rho)}, \\ [\gamma^\sigma\partial_\sigma\gamma^3] &= [\gamma^\sigma, \partial_\sigma\gamma^\rho] = [\gamma^\sigma\Gamma_\sigma, \gamma^\rho] = [\gamma^\sigma, \partial_\sigma\gamma^0] = 0, \\ [\partial_\sigma\gamma^\sigma, \gamma^\phi] &= \frac{\lambda_i^2}{\rho^2}[\gamma^{(\phi)}, \gamma^{(\rho)}], \\ [\gamma^\sigma, \partial_\sigma\gamma^\phi] &= 2[\gamma^\sigma\Gamma_\sigma, \gamma^\phi] = \frac{\lambda_i}{\rho^2}(\lambda_i - 1)[\gamma^{(\rho)}, \gamma^{(\phi)}], \\ [\partial_\sigma\gamma^\sigma, \gamma^3] &= \frac{\lambda_i}{\rho}[\gamma^{(3)}, \gamma^{(\rho)}], \\ [\gamma^\sigma\Gamma_\sigma, \gamma^3] &= \frac{1}{2\rho}(1 - \lambda_i)[\gamma^{(\rho)}, \gamma^{(3)}], \\ \Sigma^{01} &= \frac{i}{2}[\gamma^0, \gamma^1] = -i\gamma^{(0)}\gamma^{(\rho)}, \\ \Sigma^{02} &= i\frac{\lambda_i}{\rho}\gamma^{(0)}\gamma^{(\phi)}, \\ \Sigma^{03} &= i\gamma^{(0)}\gamma^{(3)}. \\ \Sigma^{12} &= i\frac{\lambda_i}{2\rho}[\gamma^{(\rho)}, \gamma^{(\phi)}], \\ \Sigma^{13} &= \frac{i}{2}[\gamma^{(\rho)}, \gamma^{(3)}], \\ \Sigma^{23} &= i\frac{\lambda_i}{2\rho}[\gamma^{(\phi)}, \gamma^{(3)}], \\ \gamma^\mu\Gamma_\mu &= \frac{1}{2\rho}(1 - \lambda_i)\gamma^{(\rho)}. \end{aligned} \quad (3.5-135)$$

Usando os resultados dados em (3.5-135) e substituindo em (3.5-133) obtemos as seguinte componentes da corrente fermiônica,

$$J_0 = \vec{\nabla}_{\lambda_i} \cdot \vec{P}, \quad (3.5-136)$$

$$J_\rho = -\partial_t P_\rho + (\vec{\nabla}_{\lambda_i} \times \vec{M})_\rho + j_{(\rho),conv.}, \quad (3.5-137)$$

$$J_\phi = -\partial_t P_\phi + (\vec{\nabla}_{\lambda_i} \times \vec{M})_\phi + \frac{1}{\rho}(1 - \lambda_i)M_z + j_{(\phi),conv.}, \quad (3.5-138)$$

$$J_z = -\partial_t P_z + (\vec{\nabla}_{\lambda_i} \times \vec{M})_z + j_{(z),conv.}, \quad (3.5-139)$$

onde a parte convectiva(subíndice "conv"), é obtida de,  $\frac{i}{4m}g^{\mu\sigma}\bar{\psi}\partial_\sigma\psi$ .  $\vec{\nabla}_{\lambda_i}$  significa que o operador gradiente é calculado no espaço-tempo da corda cósmica. eq. (3.4-107).

As densidades de polarização são dadas por:

$$P_\rho = \frac{i}{2m}\bar{\psi}\gamma_{(0)}\gamma_{(\rho)}\psi, \quad (3.5-140)$$

$$P_\phi = \frac{i}{2m}\bar{\psi}\gamma_{(0)}\gamma_{(\phi)}\psi, \quad (3.5-141)$$

$$P_\rho = \frac{i}{2m}\bar{\psi}\gamma_{(0)}\gamma_{(3)}\psi, \quad (3.5-142)$$

e as componentes do vetor  $\vec{M}$ , que é a densidade de corrente de magnetização, com respeito a um dado campo magnético externo, são:

$$M_\rho = \frac{i}{4m}\bar{\psi}[\gamma_{(\phi)}, \gamma_{(3)}]\psi, \quad (3.5-143)$$

$$M_\phi = \frac{i}{4m}\bar{\psi}[\gamma_{(3)}, \gamma_{(rho)}]\psi, \quad (3.5-144)$$

$$M_z = \frac{i}{4m}\bar{\psi}[\gamma_{(\rho)}, \gamma_{(\phi)}]\psi. \quad (3.5-145)$$

Esses resultados nos mostram que a corrente depende da conicidade do espaço-tempo da corda, e que os valores da polarização e da magnetização, e portanto, da corrente, dependem dos parâmetros que foram introduzidos em  $f(R)$  e  $f(\mathcal{G})$ , e também, da escolha da expressão para a função  $f(R)$ .

## Capítulo 4

# Solução axialmente simétrica da corda cósmica a partir do método de Newman-Janis em Teorias $f(R)$

Newman e Janis mostraram que é possível obter uma solução axialmente simétrica (como a métrica de Kerr) através de uma transformação complexa de coordenadas sobre a métrica de Schwarzschild [24]. Este mesmo procedimento foi utilizado para obter uma métrica estacionária e axialmente simétrica, conhecida como o espaço-tempo de Kerr-Newman, a partir da solução de Reissner-Nordstrom [77]. Através de um tratamento matemático elegante e conciso, Schiffer et al, provaram, de maneira rigorosa, que é possível obter a métrica de Kerr usando uma transformação complexa a partir da solução de Schwarzschild [78]. Gurses e Gurey, em 1975[79], mostraram que, se uma métrica pudesse ser escrita na forma de Kerr-Child, uma transformação complexa de coordenadas seria permitida na Relatividade Geral [79], desvinculando assim o método de Newman-Janis do caso particular de simetrias esféricas, conforme previsto inicialmente. Desse modo, mesmo em casos específicos, nos quais as métricas geradoras possuam simetria cilíndrica, esse método pode, em princípio, ser utilizado.

De Laurentis mostrou que é possível usar uma transformação complexa do tipo Newman-Janis, para se obter soluções estacionárias, a partir de sua correspondente estática, em teorias  $f(R)$  [80]. Nesse caso, especificamente, a transformação é feita sobre teorias onde  $f(R) = R^{1+\delta}$ , sendo  $R$  o escalar de curvatura de Ricci. Outros autores têm

discutido, em detalhes, soluções esfericamente simétricas em teorias  $f(R)$  da gravitação, considerando também o limite de campos fracos [81].

Neste capítulo, obteremos, a partir de uma solução estática da corda cósmica, que será utilizada como *semente*, a solução em teorias  $f(R)$  de gravitação, axialmente simétrica (com rotação) e consistente com a solução análoga da Teoria da Relatividade Geral nos limites em que  $\alpha \rightarrow 0$ . Para isto, será necessário encontrar um algoritmo do tipo Newman-Janis para o caso cilíndrico. Nas seções 4.1 e 4.2 faremos uma revisão sobre tetradas e o método de Newman-Janis, respectivamente. Em 4.3 apresentamos uma generalização para coordenadas esféricas, e na última seção, 4.4, faremos uma aplicação do método para obtermos a métrica da corda cósmica em  $f(R)$  com rotação[23].

## 4.1 Tetradas

Uma tetrada tipo espaço é um conjunto de quatro campos de vetores ortonormais, um tipo tempo e três espaciais, definidos em uma variedade Lorentziana, que é interpretada fisicamente como um modelo de espaço-tempo, onde temos:

$$\gamma_m \equiv (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3). \quad (4.1-1)$$

Um caso bastante comum é o de uma tetrada ortonormal, onde os seus eixos formam um sistema localmente inercial, em cada ponto do espaço-tempo, de modo que o produto escalar entre cada um dos eixos constituem o espaço-tempo de Minkowski  $\eta_{mn}$ ,

$$\gamma_m \cdot \gamma_n = \eta_{mn}. \quad (4.1-2)$$

Uma base tetrada é um conjunto matricial  $\gamma_{mn}$  tal que:

$$\gamma_m \cdot \gamma_n \equiv \gamma_{mn}. \quad (4.1-3)$$

Associado com a base tetrada existe em cada ponto do espaço existe um conjunto de coordenadas locais,

$$\xi^m \equiv (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3). \quad (4.1-4)$$

As coordenadas locais  $\xi^m$  não se estendem além do sistema local em cada ponto. Um intervalo em  $\xi^m$  é dado por:

$$dx = \gamma_m d\xi^m, \quad (4.1-5)$$

e o elemento de linha é,

$$ds^2 = \gamma_{mn} d\xi^m d\xi^n. \quad (4.1-6)$$

A base da tetrada  $e_m^\mu$  é definida como sendo uma matriz de transformação entre a tetrada  $\gamma_{mn}$  e a base coordenada  $g_{\mu\nu}$ ,

$$\gamma_m = e_m^\mu g_\mu, \quad (4.1-7)$$

onde  $e_m^\mu$  é uma matriz  $4 \times 4$ , com todas as 16 componenetes independentes. A distância no espaço-tempo em termos da base de tetrada é:

$$ds^2 = \gamma_{mn} e_\mu^m dx^\mu e_\nu^n dx^\nu, \quad (4.1-8)$$

Se definirmos o inverso da matriz  $e_\mu^m$  como sendo  $e_m^\nu$ , temos uma relação entre as bases tetradas dada por:

$$e_\mu^m e_m^\nu = \delta_\mu^\nu. \quad (4.1-9)$$

Uma relação entre a base tetrada e uma matriz simétrica  $\zeta_{mn}$ , pode ser construída,

$$e_m^\mu e_{n\mu} = \zeta_{mn} \quad (4.1-10)$$

ou também podemos fazer,

$$\zeta^{\mu m} \zeta_{m\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (4.1-11)$$

Como consequência dessas várias definições conseguimos estabelecer uma relação entre a base tetrada  $e_{m\mu}$ , a base coordenada  $g_{\mu\nu}$  e o espaço-tempo plano  $\eta_{mn}$ , que pode ser escrita da seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} = \eta^{mn} e_{m\mu} e_{n\nu}. \quad (4.1-12)$$

Qualquer vetor pode ser expresso em termos desta base de tetrada dada por (4.1-12). Um tipo de tetrada muito interessante são as tetradas nulas. Ela pode ser obtida se fizermos

uma escolha para base do tipo:  $\gamma^m \equiv (l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu)$ , sendo  $\bar{m}^\mu$  o complexo conjugado de  $m^\mu$ , e exigirmos que a mesma satisfaça as condições de ortogonalidade dadas por:

$$l^\mu m_\mu = l^\mu \bar{m}_\mu = n^\mu m_\mu = n^\mu \bar{m}_\mu = 0, \quad (4.1-13)$$

condições de base nula do tipo,

$$l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = m^\mu m_\mu = \bar{m}^\mu \bar{m}_\mu = 0, \quad (4.1-14)$$

e condições de normalização,

$$l_\mu n^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = 1. \quad (4.1-15)$$

Com essas condições, teremos uma base tetrad nula, que é utilizada em diversas situações físicas, como em nosso problema da corda com rotação que será estudado neste capítulo.

## 4.2 O método de Newman-Janis

Nesta seção, descreveremos como gerar, com o uso do algoritmo de Newman-Janis (ANJ), a métrica de Kerr-Newman (buraco negro carregado com rotação), a partir da solução de Reissner-Nordström.

Trataremos o ANJ como um procedimento de cinco etapas, segundo o qual geramos novas soluções das equações de Einstein, a partir de métricas estáticas e esfericamente simétricas. O procedimento é o seguinte:

1. Devemos escrever o elemento de linha gerador(semente) estático e esfericamente simétrico, em um sistema de coordenadas avançadas nulas  $(u, r, \theta, \phi)$ , no qual a componente  $g_{rr}$  é eliminada e um termo cruzado é introduzido. Neste caso, como a forma geral do elemento de linha estático e esfericamente simétrico é

$$ds^2 = e^{2\phi(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}\theta^2 d\phi^2), \quad (4.2-16)$$

deve-se fazer a mudança de coordenadas

$$t = u + \int e^{\lambda(r)-\phi(r)} dr, \quad (4.2-17)$$

de modo que o elemento de linha possa ser escrito na seguinte forma,

$$ds^2 = e^{2\phi(r)} du^2 + 2e^{\phi(r)+\lambda(r)} dudr - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}\theta^2 d\phi^2). \quad (4.2-18)$$

No caso em que o algoritmo é aplicado à solução de Reissner-Nordström, a métrica deve ser escrita nas coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein<sup>1</sup>, pois, nesse sistema o elemento de linha

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{Q^2}{r^2}\right) du^2 + 2dudr - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (4.2-19)$$

2. A forma contravariante do tensor métrico deve ser expressa em termos de uma tetrada nula do tipo:

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \bar{m}^\nu - m^\nu \bar{m}^\mu, \quad (4.2-20)$$

onde as componentes devem obedecer as relações de ortonormalidade,

$$l_\mu l^\mu = m_\mu m^\mu = n_\mu n^\mu = 0, \quad (4.2-21)$$

$$l_\mu n^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = 1, \quad (4.2-22)$$

$$l_\mu m^\mu = n_\mu m^\mu = 0, \quad (4.2-23)$$

em que a barra denota o complexo conjugado.

A tetrada pode ser escolhida da seguinte maneira:  $l^\mu$  é um vetor tangente nulo<sup>2</sup> indo para fora do cone de luz,  $n^\mu$  um vetor nulo na origem, e  $m^\mu$  um vetor tangente a uma esfera bidimensional, com  $r$  e  $u$  constantes.

É conveniente utilizar a notação de tetrada introduzida por Newman e Penrose[82]:

$$Z_a^\nu = (l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu), \quad a = 1, 2, 3, 4. \quad (4.2-24)$$

---

<sup>1</sup>No Apêndice A desta tese falamos um pouco mais sobre o sistema de coordenadas de Eddington-Finkelstein.

<sup>2</sup>É um vetor representado por um segmento orientado nulo, de comprimento zero.

Os vetores nulos da base tetrada, para o espaço-tempo de Reissner-Nordstrom, descrito na forma avançada de Eddington-Finkelstein, eq. (4.2-19), são:

$$l^\mu = \delta_1^\mu , \quad (4.2-25)$$

$$n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2m}{r} - \frac{Q^2}{r^2} \right) \quad (4.2-26)$$

e

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left( \delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \delta_3^\mu \right) . \quad (4.2-27)$$

Esses vetores, juntamente com a expressão (4.2-20), devem reproduzir a forma contravariante da métrica (4.2-19).

- Devemos estender as coordenadas  $x^\rho$  para um novo sistema de coordenadas complexas  $\tilde{x}^\rho$ ,

$$x^\sigma \mapsto \tilde{x}^\sigma , \quad (4.2-28)$$

e, simultaneamente, fazemos com que os vetores da base tetrada  $Z_a^\nu$  fiquem sujeitos a uma transformação do tipo:

$$Z_a^\nu(x^\sigma) \rightarrow \tilde{Z}_a^\nu(\tilde{x}^\sigma, \bar{\tilde{x}}^\sigma) , \quad (4.2-29)$$

exigindo que a forma antiga da tetrada e, conseqüentemente, a métrica, sejam recuperadas quando  $\tilde{x}^\rho = \bar{\tilde{x}}^\rho$ . Em suma, o efeito desta transformação “tilde” é criar uma nova métrica cujas componentes são funções reais de coordenadas complexas, ou seja,

$$g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu} : \tilde{X} \times \tilde{X} \mapsto \mathfrak{R}. \quad (4.2-30)$$

enquanto,

$$\tilde{Z}_a^\mu(\tilde{x}^\rho, \bar{\tilde{x}}^\rho)|_{\tilde{x}^\rho = \bar{\tilde{x}}^\rho} = Z_a^\mu(x^\rho) . \quad (4.2-31)$$

Uma transformação deste tipo, não é única, pois existem diferentes escolhas de transformações que satisfazem essas condições, (4.2-30) e (4.2-31). Por esse motivo, o método de Newman-Janis tem recebido críticas de alguns autores [83].

No artigo original de Newman-Janis [24], a forma da complexificação escolhida para a métrica de Reissner-Nordström, dada por (4.2-19), foi a seguinte:

$$l^\mu \mapsto \tilde{l}^\mu = \delta_1^\mu, \quad (4.2-32)$$

$$n^\mu \mapsto \tilde{n}^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left[ 1 - m \left( \frac{1}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) - \frac{Q^2}{\tilde{r}\tilde{r}} \right] \delta_1^\mu \quad (4.2-33)$$

e

$$m^\mu \mapsto \tilde{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\tilde{r}} \left( \delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\theta} \tilde{\delta}_3^\mu \right). \quad (4.2-34)$$

Podemos verificar que, quando  $\tilde{r} = \bar{\tilde{r}}$ , estes vetores voltam a ter a forma original antes da complexificação, fornecida pelas eqs.(4.2-25)-(4.2-27), satisfazendo, assim, a condição (4.2-31).

4. Façamos, agora, uma transformação complexa nas coordenadas, do tipo,

$$\tilde{x}^\sigma = x^\sigma + iy^\rho(x^\sigma), \quad (4.2-35)$$

em que  $y^\rho(x^\sigma)$  é uma função analítica das variáveis reais  $x^\sigma$ . Deve-se levar em conta que os vetores  $\tilde{Z}_a^\nu$  se transformam como:

$$Z_a^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\rho} \tilde{Z}_a^\rho. \quad (4.2-36)$$

No caso original de Newman-Janis para gerar o espaço-tempo de Kerr-Newman, a escolha da função  $y^\rho(x^\sigma)$  foi a seguinte:

$$\tilde{x}^\rho = x^\rho + ia \cos \theta (\delta_0^\rho - \delta_1^\rho). \quad (4.2-37)$$

A partir desta equação, vemos que a transformação inversa é

$$x^\rho = \tilde{x}^\rho - ia \cos \tilde{\theta} (\delta_0^\rho - \delta_1^\rho). \quad (4.2-38)$$

Substituindo as equações (4.2-32) - (4.2-34) e (4.2-38) na relação de transformação, dada por (4.2-36), encontramos as componentes da base tetrada no sistema  $x^\rho = (u, r, \theta, \phi)$ . Então, de posse desses resultados e levando em conta a expressão que

define o tensor métrico em termos das componentes tetradas, Eq. (4.2-20), chegamos ao seguinte resultado para a métrica:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2 \text{sen}^2 \theta / \Sigma & (1 + a^2 \text{sen}^2 \theta) / \Sigma & 0 & -a / \Sigma \\ (1 + a^2 \text{sen}^2 \theta) / \Sigma & 1 - \frac{2mr - Q^2 - a^2 \text{sen}^2 \theta}{\Sigma} & 0 & a / \Sigma \\ 0 & 0 & -1 / \Sigma & 0 \\ -a / \Sigma & a / \Sigma & 0 & 1 / \Sigma \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} \quad (4.2-39)$$

e portanto, as componentes covariantes são:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2mr - Q^2}{\Sigma} & 1 & 0 & a \text{sen}^2 \theta \frac{2mr - Q^2}{\Sigma} \\ 1 & 0 & 0 & -a \text{sen}^2 \theta \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ a \text{sen}^2 \theta \frac{2mr - Q^2}{\Sigma} & -a \text{sen}^2 \theta & 0 & -\text{sen}^2 \theta \left( r^2 + a^2 - a^2 \text{sen}^2 \theta \frac{2mr - Q^2}{\Sigma} \right) \end{pmatrix}. \quad (4.2-40)$$

sendo  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ .

5. Finalmente, devemos fazer a seguinte transformação,

$$u = t + f(r) \quad \text{e} \quad \phi = \psi + g(r). \quad (4.2-41)$$

Tal mudança permitirá escrever a métrica nas coordenadas de *Boyer-Lindquist*, isto é, um conjunto de coordenadas no qual apenas o termo  $g_{t\phi}$  encontra-se fora da diagonal principal da matriz que representa as componentes covariantes do tensor métrico. A justificativa para esta transformação é o fato que a componente  $g_{t\phi}$  está associada à rotação [84].

### 4.3 Generalização do método para coordenadas esféricas

Nesta seção faremos uma revisão da aplicação do método de complexificação de coordenadas de Newman-Janis para um caso de simetria esférica de forma geral.

Nas várias etapas do ANJ, o único ponto de ambiguidade é a transformação “tilde”, que é descrita no terceiro passo. Aplicando este passo à forma geral da métrica geradora esfericamente simétrica e estática, Eq. (4.2-19), teremos:

$$\tilde{l}^\mu = \delta_1^\mu, \quad (4.3-42)$$

$$\tilde{n}^\mu = e^{-\lambda(\tilde{r},\tilde{r})-\phi(\tilde{r},\tilde{r})}\delta_0^\mu - \frac{1}{2}e^{-2\lambda(\tilde{r},\tilde{r})}\delta_1^\mu \quad (4.3-43)$$

e

$$\tilde{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\tilde{r}} \left( \delta_2^\mu + \frac{i}{\text{sen}\tilde{\theta}}\delta_3^\mu \right). \quad (4.3-44)$$

Utilizando a expressão para a transformação vetorial da base tetrada, Eq. (4.2-36), para as componentes  $a = 1, 2, 3$ , respectivamente, e com o auxílio da relação inversa da transformação, dada por (4.2-38), obtemos os vetores da base tetrada em termos de coordenadas reais:

$$l^\mu = \delta_1^\mu, \quad (4.3-45)$$

$$n^\mu = e^{-\lambda(r,\theta)-\phi(r,\theta)}\delta_0^\mu - \frac{1}{2}e^{-2\lambda(r,\theta)}\delta_1^\mu \quad (4.3-46)$$

e

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(r - ia \cos \theta)} \left( \delta_2^\mu + i a \text{sen}\theta(\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \frac{i}{\text{sen}\theta}\delta_3^\mu \right). \quad (4.3-47)$$

A forma contravariante da métrica é obtida substituindo diretamente esses resultados em (4.2-20). Fazendo isto, encontramos:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{\sigma} & e^{-(\lambda+\phi)} + \frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{\sigma} & 0 & -\frac{a}{\Sigma} \\ e^{-(\lambda+\phi)} + \frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{\sigma} & -\left( e^{-2\lambda} + \frac{a^2 \text{sen}^2 \theta}{\Sigma} \right) & 0 & \frac{a}{\Sigma} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Sigma} & 0 \\ -\frac{a}{\Sigma} & \frac{a}{\Sigma} & 0 & -\frac{1}{\Sigma \text{sen}^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (4.3-48)$$

Consequentemente,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\phi} & e^{\phi+\lambda} & 0 & a \text{sen}^2 \theta e^\phi (e^\lambda - e^\phi) \\ e^{\phi+\lambda} & 0 & 0 & -a e^{\phi+\lambda} \text{sen}^2 \theta \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ a \text{sen}^2 \theta e^\phi (e^\lambda - e^\phi) & -a e^{\phi+\lambda} \text{sen}^2 \theta & 0 & \Theta(r, \theta) \end{pmatrix}. \quad (4.3-49)$$

com  $\Theta(r, \theta) = -\text{sen}^2 \theta [r^2 + a^2 \cos^2 \theta + a^2 \text{sen}^2 \theta e^\phi (2e^\lambda - e^\phi)]$ .

Para finalizarmos, devemos fazer com que (4.3-49) adquira a forma de Boyer-lindquist. Para tanto, realizaremos uma transformação nas coordenadas, semelhante às eqs. (4.2-41), para eliminar os termos  $g_{tr}$  e  $g_{r\phi}$ , restando apenas a componente  $g_{t\phi}$  como o único termo não-nulo fora da diagonal. Para que isto seja satisfeito, as funções  $f(r)$  e  $g(r)$  devem ser dadas por:

$$g(r) = \frac{e^\lambda (\Sigma + a^2 \text{sen}^2 \theta e^{\lambda+\phi})}{e^\phi (\Sigma + a^2 \text{sen}^2 \theta e^{2\lambda})} \quad (4.3-50)$$

e

$$f(r) = -\frac{ae^{2\lambda}}{\Sigma + a^2 \text{sen}^2 \theta e^{2\lambda}}. \quad (4.3-51)$$

Depois de algumas manipulações algébricas, encontramos que, nas coordenadas  $(t, r, \theta, \psi)$ , a métrica assume a forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\phi} & 0 & 0 & a \text{sen}^2 \theta e^\phi (e^\lambda - e^\phi) \\ 0 & \frac{-\Sigma}{\Sigma e^{-2\lambda} + a^2 \text{sen}^2 \theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Theta(r, \theta) \end{pmatrix}, \quad (4.3-52)$$

que representa a forma geral de uma métrica esféricamente simétrica, com rotação, obtida através de uma complexificação de coordenadas.

A partir da próxima seção, iremos aplicar o método de Newman-Janis ao caso particular de uma corda cósmica e faremos uma generalização para simetrias cilíndricas.

## 4.4 Métrica axialmente simétrica da corda cósmica

Originalmente, o ANJ foi concebido para obtenção de novas soluções das equações de Einstein a partir de soluções estáticas com simetria esférica. Contudo, De Laurentis [80] mostrou que esse método pode ser utilizado em teorias  $f(R)$ , e para outras simetrias.

Nesta seção, adaptaremos o ANJ para obtermos, a partir de uma métrica com simetria cilíndrica, uma solução axialmente simétrica para as equações das teorias  $f(R)$ , com rotação[23]. Especificamente, utilizaremos, como semente, a métrica da corda cósmica obtida no capítulo anterior, para obtenção de uma solução axialmente simétrica (solução com rotação). Por simplicidade, admitiremos que a corda cósmica é infinitamente longa, estática e muito fina, o que faz com que possamos descartar a solução interior.

O elemento de linha que descreve o espaço-tempo exterior a essa corda, no contexto das teorias  $f(R)$ , com  $f(R) = R + \alpha R^n$ , pode ser escrita como:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \kappa_i(r)^2 d\phi^2 - dz^2, \quad (4.4-53)$$

em que

$$\kappa_i(r) = \left(1 - \frac{S_i \mu}{2\pi \sigma_0}\right) r, \quad i = 1, 2, \quad (4.4-54)$$

sendo

$$s_1 = \frac{1}{12\alpha} \left[ 1 - \sqrt{1 - 24\alpha\kappa\sigma_0} \right], \quad (4.4-55)$$

para o caso em que  $n = -1$ , e

$$s_2 = -\frac{1}{2} \left[ -\kappa\sigma_0 - \sqrt{\kappa^2\sigma_0^2 + 3\alpha} \right], \quad (4.4-56)$$

para  $n = 2$ .

Usando esses resultados, podemos perceber que, para diferentes valores de  $n$ , obtemos apenas uma mudança na componente  $g_{\phi\phi}$  da métrica. Isto implica em diferentes déficits angulares, para as escolhas  $n = -1$  e  $n = 2$ . É importante, ressaltar, no entanto, que todas as métricas mantêm a mesma forma algébrica quando  $f(R) = R + \alpha R^n$ , de modo que podemos tratá-la de uma forma geral para qualquer que seja o valor de  $n$ , como demonstrado no capítulo 3, desta tese.

Adotando o procedimento de Newman-Janis, vamos reescrever a métrica (4.4-53) no sistema de coordenadas de Eddington-Finkelstein, ou seja, a coordenada  $g_{rr}$  é eliminada<sup>3</sup> e um termo cruzado é introduzido, transformando-a em,

$$ds^2 = dv^2 + 2dvdr - \kappa_i(r)^2 d\phi^2 - dz^2. \quad (4.4-57)$$

Na forma matricial, as componentes covariantes do tensor métrico são dados por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa_i(r)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.4-58)$$

Por sua vez, as componentes contravariantes são representadas pela matriz

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\kappa_i(r)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.4-59)$$

Essa métrica pode ser colocada numa base tetrada nula, como dada em (4.2-20),

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \bar{m}^\nu - m^\nu \bar{m}^\mu. \quad (4.4-60)$$

---

<sup>3</sup>Posteriormente essa coordenada será reintroduzida por uma nova mudança no sistema de coordenadas.

Neste caso, os vetores que compõe a base de tetrada são os seguintes:

$$l^\mu = \delta_1^\mu , \quad (4.4-61)$$

$$n^\mu = -\frac{1}{2}\delta_1^\mu + \delta_0^\mu \quad (4.4-62)$$

e

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \delta_3^\mu + \frac{i\delta_2^\mu}{\kappa_i(r)} \right] , \quad (4.4-63)$$

com  $l^\mu$ ,  $n^\mu$ ,  $m^\mu$  e  $\bar{m}^\mu$  satisfazendo as mesmas propriedades algébricas dadas em (4.2-21)-(4.2-23), a saber:

$$l_\mu l^\mu = m_\mu m^\mu = n_\mu n^\mu = 0; \quad (4.4-64)$$

$$l_\mu n^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = 1; \quad (4.4-65)$$

$$l_\mu m^\mu = n_\mu \bar{m}^\mu = 0 . \quad (4.4-66)$$

Seguindo o roteiro de Newman-Janis, devemos agora *transformar* as coordenadas reais em coordenadas complexas. Fazendo isto, a base tetrada é reescrita como:

$$l^\mu \mapsto \tilde{l}^\mu = \delta_1^\mu , \quad (4.4-67)$$

$$n^\mu \mapsto \tilde{n}^\mu = -\frac{1}{2}\delta_1^\mu + \delta_0^\mu \quad (4.4-68)$$

e

$$m^\mu \mapsto \tilde{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \delta_3^\mu + \frac{i\delta_2^\mu}{\kappa_i(\tilde{r}, \bar{\tilde{r}})} \right] . \quad (4.4-69)$$

A função  $\kappa_i(r)$ , que antes era uma função exclusivamente real, passa agora a ser uma função real de uma nova variável complexa,  $\tilde{r}$ , e do seu complexo conjugado  $\bar{\tilde{r}}$ , de tal modo que, quando colocada em sua forma explícita, a função  $\kappa_i(\tilde{r}, \bar{\tilde{r}})$  tenha a mesma forma de  $\kappa_i(r)$  quando  $\tilde{r} = \bar{\tilde{r}}$ , obedecendo a condição imposta por (4.2-31). Uma forma da função  $\kappa_i$  satisfazer estes requisitos é escrevê-la como

$$\kappa_i(\tilde{r}, \bar{\tilde{r}}) = \left( 1 - \frac{s_i \mu}{2\pi\sigma_0} \right) \sqrt{\tilde{r}\bar{\tilde{r}}} \quad (4.4-70)$$

A nova métrica é obtida fazendo-se uma transformação complexa de coordenadas do tipo (4.2-35), ou seja,

$$\tilde{x}^\sigma = x^\sigma + iy^\rho(x^\alpha), \quad (4.4-71)$$

onde  $y^\rho(x^\sigma)$  é uma função analítica das variáveis reais  $x^\sigma$ .

Obviamente, uma transformação do tipo (4.4-71) não é única, tornando o processo do cálculo da métrica com rotação dependente da escolha a ser feita, que deve ser aquela mais apropriada, do ponto de vista matemático. Tendo várias transformações complexas possíveis, obviamente tivemos que tentar algumas até conseguirmos o resultado desejado, que se realiza através da seguinte transformação:

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu - ia(\delta_1^\mu - \delta_0^\mu)r, \quad (4.4-72)$$

sendo  $a$  uma constante.

Uma relação inversa para (4.4-72) pode ser colocada de forma geral em termos das coordenadas complexas  $\tilde{x}^\mu$ , sendo dada por:

$$x^\mu = \tilde{x}^\mu - \frac{ia}{(1+ia)}(\delta_1^\mu - \delta_0^\mu)\tilde{r}. \quad (4.4-73)$$

Então, com o auxílio da expressão (4.2-36) e as equações (4.4-67)-(4.4-69), vemos que os novos vetores da base tetradada, em função das coordenadas  $x^\mu$ , são descritos pelas expressões:

$$l^\mu = \frac{1}{(1+ia)}(\delta_1^\mu + ia\delta_0^\mu), \quad (4.4-74)$$

$$n^\mu = \frac{1}{2(1+ia)}[(2+ia)\delta_0^\mu - \delta_1^\mu] \quad (4.4-75)$$

e

$$\tilde{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\delta_3^\mu + \frac{i\delta_2^\mu}{\kappa_i(r)}\right]. \quad (4.4-76)$$

De posse desses resultados e com o uso da expressão (4.4-60), encontramos as novas componentes contravariantes da métrica, que são dadas por:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{ia(2+ia)}{(1+ia)^2} & \frac{1}{(1+ia)^2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{(1+ia)^2} & -\frac{1}{(1+ia)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\kappa_i(r)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.4-77)$$

Suas componentes covariantes são expressas por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & (a^2 - 2ia) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa_i(r)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.4-78)$$

Analogamente a (4.4-77), sua forma covariante possui apenas uma componente simétrica fora da diagonal principal, tornando nosso caminho matematicamente mais fácil para a determinação de sua forma com rotação. Para tornar a rotação evidente em (4.4-78), vamos fazer novamente uma transformação nas coordenadas, pois a forma com que está apresentada não deixa claro que a métrica possui rotação. Para alcançarmos nosso objetivo, vamos escrever (4.4-78) na forma convencional,

$$ds^2 = g_{00}dv^2 + 2g_{01}dvdr + g_{11}dr^2 + g_{22}d\phi^2 + g_{33}dz^2, \quad (4.4-79)$$

ou seja, temos que realizar uma transformação sobre (4.4-79) de modo que a componente  $g_{01}$  seja nula e a componente da rotação azimutal,  $g_{02}$ , seja diferente de zero. Para isso, devemos escrever a métrica (4.4-79) na forma de Boyer-Lindquist [84]. Com esse objetivo, adotamos a seguinte transformação na coordenada  $v$ :

$$dv = dt + md\phi - \frac{dr}{(1 + ia)}, \quad (4.4-80)$$

sendo  $m$  uma constante.

De fato, substituindo (4.4-80) em (4.4-79), obtemos:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 + [m^2 - \epsilon_i^2 r^2] d\phi^2 + 2md\phi dt - dz^2, \quad (4.4-81)$$

ou em forma matricial,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ m & 0 & [m^2 - \epsilon_i^2 r^2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1. \end{pmatrix}, \quad (4.4-82)$$

onde

$$\epsilon_i = \left(1 - \frac{s_i \mu}{2\pi\sigma_0}\right). \quad (4.4-83)$$

O parâmetro  $m$  caracteriza os termos relacionados à rotação da corda. Se fizermos  $m = 0$  em (4.4-82), obtemos uma corda estática como tínhamos inicialmente, eq. (4.4-53). A constante  $\alpha$ , que está embutida no termo  $\epsilon_i$ , caracteriza as teorias  $f(R)$  de gravitação modificada, dependendo apenas da escolha específica de  $n$ . Se fizermos  $\alpha = 0$ , em qualquer uma das teorias  $f(R)$ , retomamos o caso da solução da corda cósmica com rotação na Teoria da Relatividade Geral. Fazendo  $m = \alpha = 0$  em (4.4-82), recuperamos a solução estática da corda usual obtida por Hiscock [19], dada pela equação (3.1-20).

A métrica da corda com rotação em Relatividade Geral é dada por:

$$ds^2 = [F(r)dt - M(r)d\phi]^2 - A(r)^2d\phi^2 - dr^2 - dz^2, \quad (4.4-84)$$

ou ainda

$$ds^2 = F(r)^2dt^2 + [M(r)^2 - A(r)^2]d\phi^2 - 2M(r)F(r)dtd\phi - dr^2 - dz^2, \quad (4.4-85)$$

sendo  $F$ ,  $M$  e  $A$  apenas funções de  $r$ . A solução exterior à métrica tem a solução de vácuo plano, isto é:

$$F(r) = 1, \quad M(r) = m \quad \text{e} \quad A(r) = B(r + r_0), \quad (4.4-86)$$

onde  $m$ ,  $B$  e  $r_0$  sendo constantes.

Substituindo (4.4-86) em (4.4-85) e fazendo  $r' = r + r_0$ , encontramos:

$$ds^2 = (dt - md\phi)^2 + (1 - 4\mu G)^2 r'^2 d\phi^2 - dr'^2 - dz^2. \quad (4.4-87)$$

Localmente este é o espaço-tempo de Minkowski, mas globalmente, apresenta uma topologia diferente. Note que se  $m \neq 0$ , existe uma estrutura helicoidal no tempo, e se  $B < 1$  a seção  $t = z = \text{const}$  tem uma topologia cônica. A constante  $m$  é determinada através do momento angular por unidade de comprimento  $J$ , sendo dada por  $m = 4J$ . Por sua vez, a constante  $B$ , a qual é expressa por  $B = 1 - 4G\mu$ , é uma medida do deficit angular do cone.

As métricas da corda na Relatividade Geral e em teorias  $f(R)$  possuem formas algébricas semelhantes. Então, diante disso, esperávamos que as soluções com rotação

também possuíssem as mesmas características. De fato, comparando (4.4-81) e (4.4-87), podemos ver que a corda cósmica com rotação em  $f(R)$ , eq. (4.4-81), tem a mesma forma algébrica da Relatividade Geral, eq.(4.4-87), e são idênticas no limite em que  $\alpha \rightarrow 0$ , caso em que  $\kappa_i(r) = 1 - 4\mu G$ . A solução em teorias  $f(R)$  mantêm o caráter constante do momento angular  $J$ , sendo idêntico ao caso da Relatividade Geral. Especificamente na solução que obtivemos, ele é identificado como uma constante na transformação complexa da variável temporal  $d\tilde{v}$ , em (4.4-80), que foi previamente escolhida como tal para este fim.

# Capítulo 5

## A Corda cósmica com estrutura e com rotação em Teorias $f(R)$

No capítulo anterior deduzimos a solução de vácuo para a corda cósmica com rotação em teorias  $f(R)$ , dada pela eq.(4.4-81). No intuito de compreender melhor a geometria de uma corda cósmica com rotação em teorias modificadas e as alterações produzidas no espaço-tempo, vamos determinar a solução interna para uma corda cósmica com rotação adotando um modelo específico para descrever o seu interior. Para a corda cósmica, dois modelos diferentes tem sido adotados para descrever a sua geometria interna: O ballpoint pen, modelo proposto independentemente por Gott e Hiscock[85, 86], que substitui a singularidade cônica no eixo da corda por uma curvatura do espaço-tempo constante na região interior, e o flower-pot-model, desenvolvido por Allen e Ottewill[87], que apresenta uma curvatura concentrada sobre um anel no espaço-tempo interior da corda. Para este trabalho adotaremos o modelo do ballpoint-pen proposto por Hiscock [86] e encontraremos a métrica associada a uma corda cósmica com estrutura e rotação em  $f(R)$ [25].

Diferentemente dos trabalhos que realizamos anteriormente sobre cordas, onde sempre adotamos um modelo para a função  $f(R)$ , neste capítulo, não vamos adotar nenhuma forma específica para esta função. Portanto, a solução está obtida para qualquer  $f(R)$ . Apenas nos resultados finais, particularizaremos a função  $f(R)$  para efeito de comparação com um resultado já obtido anteriormente para o modelo do ballpoint pen da corda cósmica com rotação, encontrado por Jansen e Harald[88], na Teoria da Relatividade

Geral.

Conforme enfatizamos anteriormente, as equações diferenciais geradas por teorias  $f(R)$  de gravitação nem sempre possuem uma solução analítica, devido principalmente ao seu elevado grau de componentes não lineares. As equações obtidas, dada o grau de complexidade, não tinham soluções analíticas conhecidas. Tivemos, então, que desenvolver um detalhado estudo das condições de energia em teorias  $f(R)$  para o espaço-tempo específico da corda cósmica com rotação.

Na próxima seção detalhamos um pouco do trabalho que foi feito sobre estas condições de energia.

## 5.1 Condições de energia em teorias $f(R)$

Uma solução matemática, necessariamente não representa uma solução física, pois, uma equação pode ter várias soluções que não atendem as condições físicas. No entanto, devemos considerar e estabelecer alguns critérios sobre as mesmas, para selecionar aquelas soluções que obedecem a critérios físicos bem estabelecidos, como por exemplo, aquelas baseados nas condições de energia obedecidas pelo sistema. Como é conhecido, as condições de energia são utilizadas em vários contextos da física para se encontrar resultados fisicamente aceitáveis em diversas situações. Em teorias  $f(R)$  a situação não é diferente, em vários casos recorreremos as condições de energia para uma simplificação de nossas equações [89, 90], e para selecionar as soluções que possuem significado físico. As condições físicas impostas sobre um sistema, através das quais, se derivam as condições de energia, a partir da equação de Raychaudhuri, são independentes da teoria geométrica da gravitação adotada [91], permitindo assim, estender o mesmo raciocínio utilizado na Teoria da Relatividade Geral, para a determinação das condições de energia, em teorias de gravitação modificadas, tipo  $f(R)$ .

Procedendo-se de modo semelhante ao que é encontrado na Relatividade Geral, vamos reescrever as equações de campo das teorias  $f(R)$  de gravitação no formalismo métrico,

dada pela eq. (2.2-45) e que podem ser colocadas da seguinte forma:

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{T}_{\mu\nu} - \frac{\mathcal{T}}{2}g_{\mu\nu}, \quad (5.1-1)$$

sendo,

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{f(R)'} [T_{\mu\nu} + (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f(R)'], \quad (5.1-2)$$

$$\mathcal{T} = \frac{1}{f(R)'} (T + f - Rf(R)' - 3\square f') \quad (5.1-3)$$

A linha representa a derivada da função com relação ao seu argumento.  $\square$  é o D'Alembertiano na forma covariante,  $\nabla_\mu$  é o operador derivada covariante e  $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$  é o traço do tensor energia-momento, onde  $T_{\mu\nu}$  é:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & q_\phi & 0 & 0 \\ 0 & p_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_z \end{pmatrix},$$

sendo  $p_i$  as pressões em suas respectivas direções e  $q_\phi$  o fluxo de energia.

As condições de energia obtidas a partir da equação de Raychaudhuri na Relatividade Geral são as seguintes:

Condições de Energia na Relatividade Geral		
Tipo	Inequação	Condição
fraca	$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0$	$\rho \geq 0, \rho + p_i > 0$
nula	$T_{\mu\nu}\kappa^\mu \kappa^\nu \geq 0$	$\rho + p_i \geq 0$
forte	$(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})v^\mu v^\nu \geq 0$	$\rho + \sum_i p_i \geq 0, \rho + p_i \geq 0$
dominante	$-T_\mu^\nu v^\mu \geq 0$	$\rho \geq 0, \rho \geq  p_i $

onde  $\rho$  é a densidade de energia.

Como foi já dito, as inequações obtidas a partir da equação de Raychaudhuri, que norteiam o princípio de conservação de energia, são independentes da teoria de gravitação que se está utilizando. Assim, para deduzirmos todas as condições específicas de energia para a geometria interna de uma corda cósmica com rotação em teorias  $f(R)$ , basta seguirmos o mesmo roteiro que é feito em Relatividade Geral. Neste caso, como já reescrevemos as equações de movimento das teorias  $f(R)$  de uma forma semelhante as da TRG, eq. (5.1-1), as condições de energia em teorias de gravitação modificada  $f(R)$  ficam sendo expressas por:

Condições de Energia em $f(R)$	
Tipo	Inequação
fraca	$\mathcal{T}_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0$
nula	$\mathcal{T}_{\mu\nu}\kappa^\mu \kappa^\nu \geq 0$
forte	$(\mathcal{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{T}g_{\mu\nu})v^\mu v^\nu \geq 0$
dominante	$-\mathcal{T}_\mu^\nu v^\mu \geq 0$

O tensor energia-momento em teoria  $f(R)$ ,  $\mathcal{T}_{\mu\nu}$  e o seu traço  $\mathcal{T}$ , agora são dados pelas eqs. (5.1-2) e (5.1-3), respectivamente. Os vetores  $\kappa^\mu$  e  $v^\mu$  são tangentes à geodésica, que podem ser escritos em termos de uma base tetrada<sup>1</sup> da seguinte forma:

$$\kappa^\mu = e_0^\mu + ae_1^\mu + be_2^\mu + ce_3^\mu, \quad (5.1-4)$$

$$v^\mu = \gamma (e_0^\mu + ae_1^\mu + be_2^\mu + ce_3^\mu), \quad (5.1-5)$$

com,

$$\gamma = \sqrt{1 - a^2 - b^2 - c^2}, \quad (5.1-6)$$

sendo  $e_\mu^\nu$  a nossa base de tetrada, tal que  $e_\mu^m e_m^\nu = \delta_\mu^\nu$ .

Vamos dividir o estudo das condições de energia em teorias  $f(R)$  em duas partes: na primeira faremos a dedução das condições de energia forte e nula, baseados na equação de Raychaudhuri, e posteriormente, faremos uma redefinição do tensor energia-momento, que nos ajudará a encontrar as duas outras condições de energia, fraca e dominante.

### 5.1.1 Condições de energia a partir da equação de Raychaudhuri

Começemos por determinar a condição de energia forte. Para tal, consideremos a seguinte desigualdade:

$$R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0. \quad (5.1-7)$$

Para o cálculo específico de condições de energia, vamos considerar o espaço-tempo de uma corda cósmica com rotação em teorias  $f(R)$  como sendo:

$$ds^2 = [dt - M(r)d\theta]^2 + A(r)d\theta^2 - dr^2 - dz^2. \quad (5.1-8)$$

---

<sup>1</sup>Para mais detalhes sobre base tetrada, consultar a seção 4.1 desta tese.

Ao substituirmos  $v^\mu$  na inequação (5.1-7), sendo  $a = b = c = 0$  para a condição forte, a única componente diferente de zero será:

$$\mathcal{T}_{00} - \frac{\mathcal{T}}{2} g_{00} \geq 0, \quad (5.1-9)$$

onde todas as componentes devem ser cuidadosamente calculadas na base tetrada  $e_m^\mu$ . O D'Alembertiano para a métrica (5.1-8) é dado por:

$$\square f' = \frac{1}{A(r)} \frac{dA(r)}{dr} \frac{dR}{dr} f'' + \frac{d}{dr} \left( \frac{dR}{dr} \right) f'' + \left( \frac{dR}{dr} \right)^2 f''', \quad (5.1-10)$$

Substituindo esses resultados na inequação (5.1-9), após algumas manipulações algébricas encontramos a seguinte expressão para a condição de energia forte da corda cósmica com rotação,

$$\rho + \sum_i p_i + f(R) - Rf(R)' - \square f(R)' \geq 0. \quad (5.1-11)$$

Sendo  $\sum_i p_i$  o somatório das pressões. Para a determinação da condição de energia nula devemos considerar a seguinte desigualdade:

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} \kappa^\mu \kappa^\nu \geq 0. \quad (5.1-12)$$

Desenvolvendo o mesmo procedimento para esta inequação, com  $b = c = 0$  e  $a = 1$  para a condição nula no vetor  $\kappa^\mu$ , encontramos a seguinte expressão:

$$\rho + p_r + \frac{1}{A(r)} \frac{dA(r)}{dr} \frac{dR}{dr} f'' \geq 0. \quad (5.1-13)$$

Expressões semelhantes podem ser encontradas para  $p_\phi$  e  $p_z$ , e são dadas por:

$$\rho + p_\phi \geq 0. \quad (5.1-14)$$

$$\rho + p_z + \frac{d}{dr} \left( \frac{dR}{dr} \right) f'' + \left( \frac{dR}{dr} \right)^2 f''' \geq 0. \quad (5.1-15)$$

Devido ao fato de não estarmos tratando de um fluido ideal, temos 3 condições de energia nula distintas, pois, em nosso modelo de corda as componentes da pressão

são diferentes, ou seja,  $p_r \neq p_\phi \neq p_z$ . Todas essas condições, foram obtidas partindo da equação de Raychaudhuri, para as teorias  $f(R)$ , considerada como um caso mais abrangente da Teoria da Relatividade Geral. Logo, se fizermos  $f(R) = R$ , em qualquer uma de nossas inequações acima reobtemos imediatamente as condições de energia usuais para a TRG.

### 5.1.2 Condições de energia a partir do tensor energia momento efetivo

Para a determinação de tais condições, poderíamos proceder do mesmo modo que na subseção anterior, partindo da equação de Raychaudhuri para as condições fraca e dominante,  $\mathcal{T}_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0$  e  $-\mathcal{T}_\mu^\nu v^\mu \geq 0$ , respectivamente, e com o auxílio de (5.1-2) encontraríamos duas condições restantes. Porém, uma outra importante definição em teorias  $f(R)$  deve ser levada em consideração, neste momento, que é o fato de que nesse tipo de teoria, podemos definir um tensor energia momento efetivo,  $T_{\mu\nu}^{efe}$ , dado por :

$$T_{\mu\nu}^{efe} = \frac{1}{f'} \left[ \mathcal{T}_{\mu\nu} + \frac{(f - Rf')}{2} g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f' \right]. \quad (5.1-16)$$

Com esta definição, nossa análise se torna bem mais simples, pois, o tensor energia momento efetivo nos ajuda a compreender bem melhor a extensão das teorias  $f(R)$ , e com o seu auxílio, por exemplo, podemos, a partir da condição de energia forte usual da Teoria da Relatividade Geral,  $\rho + p_1 + p_2 + p_3 \geq 0$ , fazermos uma extensão do tipo,  $\rho^{efe} + p_1^{efe} + p_2^{efe} + p_3^{efe} \geq 0$ , sendo  $\rho^{efe}$ , a densidade de energia efetiva da corda, dada pela componente  $\mu = \nu = 0$  da equação (5.1-16). Assim, uma simples extensão nos permite obter a condição de energia forte em teorias  $f(R)$ , que é dada por

$$\rho + \sum_i p_i + f - Rf' - \square f' \geq 0, \quad (5.1-17)$$

e corresponde exatamente a equação obtida anteriormente considerando a equação de Raychaudhuri, eq. (5.1-11). O tensor energia-momento efetivo funciona como uma espécie de *extensão* de uma teoria de campos que se baseia na variação do escalar de curvatura,

sendo em todos os casos mais abrangente que a Teoria da Relatividade Geral. No caso particular de  $f(R) = R$ , ele também volta a ser o tensor energia-momento usual, como esperado. As componentes desse tensor, como densidade de energia, pressão e fluxo de energia, também são uma generalização das componentes usuais,

$$\rho^{efe} = \frac{1}{f'} \left[ \rho - \frac{(f - Rf')}{2} + \square f' \right], \quad (5.1-18)$$

$$p_r^{efe} = \frac{1}{f'} \left[ p_r + \frac{(f - Rf')}{2} + \frac{A' f''}{A} \frac{dR}{dr} - \square f' \right], \quad (5.1-19)$$

$$p_\phi^{efe} = \frac{1}{f'} \left[ p_\phi + \frac{(f - Rf')}{2} - \square f' \right], \quad (5.1-20)$$

$$p_z^{efe} = \frac{1}{f'} \left[ p_z + \frac{(f - Rf')}{2} + \left( \frac{dR}{dr} \right)^2 f''' + \frac{d^2 R}{dr^2} f'' - \square f' \right], \quad (5.1-21)$$

embora as pressões se apresentem em todas as direções da corda, o fluxo de energia é direcionado apenas no sentido azimutal da corda cósmica, sendo dado por

$$q_\phi^{efe} = \frac{1}{f'} \left[ q_\phi + \frac{1}{2A'} \frac{dM}{dr} \frac{dR}{dr} f'' \right]. \quad (5.1-22)$$

Para qualquer um dos casos acima, ao fazermos  $f(R) = R$  recuperamos as condições de energia usuais e suas respectivas componentes de densidade e fluxo de energia. Com o uso dessas novas definições de pressão e densidade de energia, podemos agora estender o princípio das condições de energia fraca e dominante da Teoria da Relatividade Geral, do mesmo modo que foi feito anteriormente para a condição forte. Estas duas condições são dadas, respectivamente, por

$$\rho^{efe} \geq 0, \quad \rho^{efe} + p_i^{efe} \geq 0 \quad \text{e} \quad \rho^{efe} \geq |p_i|, \quad (5.1-23)$$

onde  $i = (1, 2, 3)$ . Usando essas condições, e as eqs. (5.1-18) a (5.1-21) obtemos as seguintes relações:

i) Condições de energia fraca,

$$\rho - \frac{(f - Rf')}{2} + \square f' \geq 0, \quad (5.1-24)$$

$$\rho + p_r + \frac{dA}{dr} \frac{1}{A(r)} \frac{dR}{dr} f'' \geq 0, \quad (5.1-25)$$

$$\rho + p_\phi \geq 0, \quad (5.1-26)$$

$$\rho + p_z + \left( \frac{dR}{dr} \right)^2 f''' + \frac{d^2 R}{dr^2} f'' \geq 0, \quad (5.1-27)$$

ii) Condições de energia dominante,

$$\rho - \frac{1}{2} (f - Rf') + \square f' \geq \left| p_r + \frac{1}{2} (f - Rf') + \frac{dA}{dr} \frac{1}{A(r)} \frac{dR}{dr} f'' - \square f' \right|, \quad (5.1-28)$$

$$\rho - \frac{1}{2} (f - Rf') + \square f' \geq \left| p_\phi + \frac{1}{2} (f - Rf') - \square f' \right|, \quad (5.1-29)$$

$$\rho - \frac{1}{2} (f - Rf') + \square f' \geq \left| p_z + \frac{1}{2} (f - Rf') + \left( \frac{dR}{dr} \right)^2 f''' + \frac{d^2 R}{dr^2} f'' - \square f' \right|. \quad (5.1-30)$$

As equações de campo da TRG podem ser reescritas em termos do novo tensor energia-momento efetivo,

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{\mathcal{R}}{2} g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{efe} \quad (5.1-31)$$

com  $T_{\mu\nu}^{efe}$  já definido anteriormente em (5.1-16) e,

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = f' R_{\mu\nu} - \frac{f}{2} g_{\mu\nu} - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f', \quad (5.1-32)$$

Rearranjando as equações de campo em termos do tensor energia-momento efetivo, ficará bem mais fácil o procedimento matemático para determinação das componentes de (5.1-31). A seguir faremos isto.

## 5.2 O modelo BallPoint Pen para a corda cósmica com rotação

O elemento de linha nas regiões interna e externa à corda, assume a seguinte forma[88]:

$$ds^2 = - [F(r)dt + M(r)d\phi]^2 + A(r)^2 d\phi^2 + dr^2 + dz^2. \quad (5.2-33)$$

sendo  $F$ ,  $M$  e  $A$  funções apenas de  $r$ . Na região exterior a solução é de vácuo. Portanto, o espaço-tempo é localmente plano, no caso em consideração. Vamos determinar somente a solução que descreve a região interior da corda com rotação, uma vez que a região exterior já fo determinada anteriormente no capítulo 4 desta tese. Neste caso, para o modelo do ballpoint pen que iremos utilizar, fazemos  $F(r) = 1$  em (5.2-33), e portanto, temos

$$ds^2 = - [dt + M(r)d\phi]^2 + A(r)^2 d\phi^2 + dr^2 + dz^2. \quad (5.2-34)$$

Por uma questão de simplificação matemática, vamos definir todas as grandezas físicas e componentes matemáticas em termos de uma nova base de tetrata dada por:

$$e_\mu^0 dx^\mu = F(r)dt + M(r)d\phi, \quad (5.2-35)$$

$$e_\mu^1 dx^\mu = A(r)d\phi, \quad (5.2-36)$$

$$e_\mu^2 dx^\mu = dz, \quad (5.2-37)$$

$$e_\mu^3 dx^\mu = dr. \quad (5.2-38)$$

Com esta definição estabelecemos uma relação entre a base coordenada e a base tetrada, bem como o tensor métrico de Minkowski e o do espaço-tempo curvo, dada pela seguinte expressão:

$$\eta_{mn} = e_m^\mu e_n^\nu g_{\mu\nu}, \quad (5.2-39)$$

onde  $\eta_{mn}$  é a métrica do espaço-tempo plano de Minkowski,

$$\eta_{mn} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$g_{\mu\nu}$  é a métrica na base coordenada (5.2-33) e  $e_m^\mu$  são as matrizes de transformação entre as bases, dadas por:

$$e_m^\mu = \begin{pmatrix} 1/F & -M/FA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e sua inversa

$$e_\mu^m = \begin{pmatrix} F & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Todos os vetores, ou tensores, das equações modificadas de Einstein, eq. (5.1-31), terão de ser calculados na nova base tetrada (5.2-39).

### 5.3 A métrica da corda cósmica com rotação

Nosso objetivo, agora, é encontrar uma solução para as equações modificadas de Einstein (5.1-31), que descreva o campo gravitacional de uma corda cósmica com rotação azimutal, que possua uma estrutura interna, com densidade linear de massa  $\mu$ , situada ao longo do eixo  $z$  e que obedeça as condições de energia para os limites relativísticos descritas anteriormente. Considerando, novamente, o espaço-tempo descrito em (5.2-34):

$$ds^2 = -[dt + M(r)d\phi]^2 + A(r)^2 d\phi^2 + dr^2 + dz^2, \quad (5.3-40)$$

encontramos que o escalar de curvatura para esta métrica é dado por:

$$R = \frac{1}{2} \left( \frac{M'}{A} \right)^2 - 2 \frac{A''}{A} \quad (5.3-41)$$

onde a linha representa a derivada com respeito ao argumento da função, nesse caso  $r$ . As componentes não nulas das equações de Einstein modificadas, na base tetrada, em termos

da base coordenada, podem ser obtidas com o uso de (5.2-39). As componentes do tensor de Riemann na base tetrada são:

$$\bar{R}_{00} = \frac{1}{2} \left( \frac{M'}{A} \right)^2, \quad (5.3-42)$$

$$\bar{R}_{01} = \left( \frac{M''}{2A} \right) - \left( \frac{M' A'}{2A} \right), \quad (5.3-43)$$

$$\bar{R}_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{M'}{A} \right)^2 - \frac{A''}{A}, \quad (5.3-44)$$

$$\bar{R}_{33} = \frac{1}{2} \left( \frac{M'}{A} \right), \quad (5.3-45)$$

A barra indica que a quantidade está expressa na base tetrada. Podemos ainda mostrar que as equações (5.1-31) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\frac{df(R)}{dR} \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{f(R)}{2} \bar{g}_{\mu\nu} + (\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu - \bar{g}_{\mu\nu} \square) \frac{df(R)}{dr} = \bar{T}_{\mu\nu}, \quad (5.3-46)$$

onde todas as componentes estão calculadas na base tetrada (5.2-39), e  $\bar{\nabla}_\nu$  representa a derivada covariante na base tetrada. O escalar de Ricci não apresenta variação entre as duas bases. Tomando a componente,  $\mu = \nu = 0$ , desta equação, encontramos:

$$\rho^{efe} = \frac{3}{4} \left( \frac{M'}{A} \right)^2 - \frac{d^2 A}{dr^2} \frac{1}{A(r)}. \quad (5.3-47)$$

Para que possamos integrar essa equação, que deve obedecer a condição de energia fraca (5.1-24), podemos admitir uma forma bem mais simples para a densidade de energia, dada por

$$\rho^{efe} = \frac{3}{4} \left( \frac{M'}{A} \right)^2 + \lambda, \quad (5.3-48)$$

sendo  $\lambda > 0$ . Podemos garantir que a condição de energia seja satisfeita e que o problema tenha solução, que é dada por:

$$A(r) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} r, \quad (5.3-49)$$

onde impusemos que  $A(0) = 0$  e  $\frac{dA}{dr}|_{r=0} = 1$  de modo que a solução não possua uma singularidade cônica no seu eixo de simetria. Uma discussão mais aprofundada sobre o parâmetro  $\lambda$  merece ser feita, e isto faremos posteriormente, na determinação da função  $M(r)$ .

As componentes não-nulas das equações de Einstein modificadas (5.3-46), em termos das funções  $A(r)$  e  $M(r)$  e ainda da função  $f(R)$ , são as seguintes:

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{df(R)}{dR} \left( \frac{M'}{A} \right)^2 + \frac{f(R)}{2} - \square \left( \frac{df}{dR} \right), \quad (5.3-50)$$

$$p_r = \frac{df(R)}{dR} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{M'}{A} \right)^2 - \frac{A''}{A} \right] - \frac{f(R)}{2} - \frac{A'}{A} \frac{dR}{dr} \frac{d^2 f(R)}{dR^2} + \square \left( \frac{df}{dR} \right), \quad (5.3-51)$$

$$p_\phi = \square \left( \frac{df}{dR} \right) - \frac{f(R)}{2}, \quad (5.3-52)$$

$$p_z = \frac{1}{2} \frac{df(R)}{dR} \left( \frac{M'}{A} \right)^2 - \frac{f(R)}{2} - \left( \frac{dR}{dr} \right)^2 \frac{d^3 f(R)}{dR^3} - \frac{d^2 f(R)}{dR^2} \frac{d^2 R}{dr^2} + \square \left( \frac{df}{dR} \right). \quad (5.3-53)$$

$$q_\phi = \frac{df(R)}{dR} \left( \frac{M''}{2A} - \frac{M' A'}{2A^2} \right) - \frac{M'}{2A} \frac{dR}{dr} \frac{d^2 f(R)}{dR^2} \frac{df(R)}{dR}, \quad (5.3-54)$$

Para determinarmos a função  $M(r)$ , vamos invocar a condição de energia forte, dada pela eq. (5.1-11). Vamos substituir as equações (5.3-50) a (5.3-53), que são as formas explícitas da densidade e das pressões, em (5.1-11). Assim procedendo, chegamos a seguinte equação:

$$\frac{dM(r)}{dr} - \sin \sqrt{\lambda} r - \gamma = 0, \quad (5.3-55)$$

cuja solução é:

$$M(r) = \gamma r - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left( \cos \sqrt{\lambda} r - 1 \right), \quad (5.3-56)$$

com  $\gamma$  sendo uma constante adimensional, positiva ou nula, que satisfaça as condições de energia, e que é dada por

$$\gamma = \frac{1}{r_0\sqrt{\lambda}} \left( \cos \sqrt{\lambda}r_0 - 1 \right), \quad (5.3-57)$$

onde  $r_0$  é o raio da corda. Para obtermos a solução (5.3-56), consideramos que exatamente na origem,  $r = 0$ , o observador não deverá sentir a rotação da corda, de modo que a componente  $g_{02}$  da métrica deve ser zero, e para isso,  $M(r = 0) = 0$ . Para encontrarmos a constante  $\gamma$  em termos de  $\lambda$  fizemos a junção das duas soluções, externa e interna, na fronteira, em  $r = r_0$ . Tendo em vista que a solução interna deve coincidir com a solução de vácuo externa, em  $r = r_0$ , também fizemos  $M(r = r_0) = 0$ .

Encontramos um resultado, no mínimo intrigante, para as duas funções  $A(r)$  e  $M(r)$ , dadas pelas eqs. (5.3-49) e (5.3-56), pois ambas são dependentes de  $\lambda$ . O fato reside justamente nessa dependência, a questão é que desde que  $\gamma$  foi escolhido como sendo maior ou igual a zero como uma forma possível de se resolver a equação (5.3-55), ao fazermos coincidir a solução interior com a solução exterior na fronteira,  $r = r_0$ , encontramos a expressão (5.3-57) como forma explícita de  $\gamma$ , porém, a única forma de não violarmos as condições de energia do nosso sistema físico foi fazendo  $\cos \sqrt{\lambda}r_0 = 1$ , o que nos leva a uma vasta possibilidade de valores para  $\lambda$ ,

$$\lambda = \frac{4n^2\pi^2}{r_0^2}, \quad (5.3-58)$$

todos positivos, como exigidos pela equação (5.3-48), para que a densidade de energia permaneça positiva, garantindo a condição de energia fraca, com  $n = (1, 2, 3, \dots)$ . Este resultado faz com que tenhamos uma distribuição discreta nos possíveis valores de  $\lambda$  e conseqüentemente uma quantização na densidade de energia efetiva da corda, eq. (5.3-47),

$$\rho = \frac{3\lambda}{4} \left( \frac{\gamma + \sin \sqrt{\lambda}r}{\sin \sqrt{\lambda}r} \right)^2 + \lambda. \quad (5.3-59)$$

Nesta expressão levamos em consideração que a função  $f(R)$  possui a seguinte forma específica:  $f(R) = R + \alpha R^2$ .

A densidade de energia efetiva apresenta uma divergência em  $r = 0$  e outra próxima a superfície da corda, tendo um comportamento aproximadamente constante nesse intervalo. As grandezas físicas associadas ao interior da corda cósmica com rotação, tais como pressão, fluxo e densidade de energia dadas pelas eqs. (5.3-50)-(5.3-54), são dependentes da constante  $\lambda$  e também de  $\alpha$ , de modo que o sinal escolhido para  $\alpha$ , positivo ou negativo, é de fundamental importância para cada uma das grandezas. No caso específico da densidade de energia, eq. (5.3-50), também apresenta um comportamento quantizado semelhante ao caso efetivo, porém nessa situação devemos escolher o parâmetro  $\alpha$  como sendo negativo, caso contrário teremos uma densidade negativa de energia. Para um caso particular  $r = r_0$ , exatamente sobre a superfície da corda, nossa expressão para  $M(r)$  é nula, e o observador deixa de sentir rotação, a pressão sobre ele também desaparece, e a função  $A(r)$  torna-se uma constante. A solução que encontramos para a corda é bastante diferente do modelo que já existe na Teoria da Relatividade Geral, principalmente no aspecto de distribuição de energia, que em um determinado ponto se apresenta como contínua e em outro discreta.

## Capítulo 6

# Espaço-Tempo de Letelier com rotação

Nos anos 70 e 80 do século passado, houve uma intensa discussão sobre a teoria das cordas geométricas, cuja motivação foi a possibilidade de sua aplicação em modelos de partículas elementares. Originalmente, foi proposta uma extensão do modelo relativístico de nuvem de poeira para um fluido perfeito.

Em trabalho pioneiro sobre esse tema, Letelier [92] apresentou um tratamento invariante de gauge para o modelo de fluido de cordas incoerente, e obteve soluções particulares das equações de Einstein, no contexto do modelo mencionado. Letelier [92] apresentou duas razões principais para estudar as equações de Einstein para uma nuvem de cordas. A primeira foi que cordas relativísticas, consideradas classicamente, podem ser usadas na construção de modelos para as interações [93, 94].

A segunda razão de acordo com Letelier [92], está associada ao fato de que o Universo pode ser representado por uma coleção de objetos estendidos, e portanto, um modelo cosmológico com uma poeira de cordas poderia fornecer os elementos, via a construção de um modelo, para investigar as propriedades relacionadas com essa descrição que usa nuvem de cordas.

O tratamento geral de cordas utilizando um modelo invariante de gauge para uma nuvem de cordas, iniciado por Letelier [92], no qual foram obtidas as soluções das equações para uma nuvem de cordas com simetria esférica, plana e cilíndrica, foi generalizado para

um fluido de cordas [95], no qual foi considerada a pressão ou a tensão produzida pelas cordas que formam a nuvem.

Dando sequência ao tratamento relativístico da nuvem de cordas, onde foram considerados efeitos gravitacionais produzidos por cordas e associados ao acoplamento destas com o campo gravitacional, Letelier [96] investigou o papel de uma nuvem de cordas em modelos cosmológicos, em especial, o modelo de Bianchi tipo I e o espaço-tempo de Kantowski-Sachs. No modelo adotado por Letelier [96], cada corda possui uma certa massa, e é formado por uma corda sem massa, com partículas com massa colocadas ao longo de sua extensão, as cordas desse modelo foram chamadas de p-cordas[97], mais recentemente, nos anos 90 do século passado, as cordas cósmicas foram investigadas em vários cenários, em especial, em modelos cosmológicos, tendo em vista a possibilidade de que esses defeitos topológicos possam ter gerado a flutuação de densidade de energia em escala suficiente para explicar a formação de estruturas [18]. Nesse cenário, o desacordo entre a entropia na radiação cósmica de fundo (CMB) prevista pelas cordas cósmicas e os dados observacionais, descartaram o uso de cordas como sementes cósmicas no processo de formação de estruturas [18]. Mais recentemente, chegou-se a conclusão de que as cordas cósmicas foram formadas no final da era inflacionária, e que a existência de redes de cordas no Universo primitivo não entram em contradição com os dados observacionais da atualidade [98], e que o papel importante, originalmente atribuído a esses defeitos, passou a ser reconsiderado, tendo em vista a ligação entre as cordas cósmicas e as supercordas, prevista na cosmologia de Branas [99].

Trabalhos recentes sobre cenários contendo nuvens de cordas consideram modelos cosmológicos inhomogeneous, em que um fluido de cordas é a fonte do campo gravitacional [100], bem como cordas cósmicas como fonte do modelo cosmológico de Bianchi tipo II [101].

Neste capítulo, vamos obter a solução correspondente a um espaço-tempo gerado por uma nuvem de cordas, com rotação[26], a partir da solução obtida por Letelier [92], que

corresponde ao espaço-tempo(espaço-tempo de Letelier) gerado por uma nuvem de cordas, com simetria esférica. Na seção II, faremos uma breve revisão sobre a solução obtida por Letelier [92]. Na seção III, obteremos a solução estacionária, com o uso do método de complexificação de coordenadas desenvolvido por Newman e Janes [102]. Na seção IV, apresentaremos os comentários finais.

## 6.1 Espaço-tempo de Letelier

Nesta seção, vamos apresentar a solução das equações de Einstein obtidas por Letelier [92], para uma nuvem de cordas com simetria esférica como fonte. Para obter essa solução, as equações de Einstein são resolvidas para uma métrica estática com simetria esférica dado por,

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (6.1-1)$$

onde  $\nu$  e  $\lambda$  são funções somente de  $r$ .

As simetrias do espaço-tempo em consideração restringem a densidade  $\rho$  e a grandeza,

$$\Sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{AB} \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda^A} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda^B}, \quad (6.1-2)$$

onde  $\epsilon^{AB}$  é o tensor de Levi-Civita em duas dimensões, definido por:  $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$ , e  $\lambda$  é um parâmetro tal que  $x^\mu = x^\mu(\lambda^A)$  descreve a superfície de universo da corda( $\lambda^A = \lambda^0, \lambda^1$ ), onde  $\lambda^0$  e  $\lambda^1$  são parâmetros tipo-tempo e tipo-espaço, a depender somente de  $r$ . Desta forma, as simetrias restringem  $\Sigma_{\mu\nu}$  a ter somente duas componentes diferentes de zero, a saber,  $\Sigma_{01}$  e  $\Sigma_{23}$ . Esta quantidade  $\Sigma^{\mu\nu}$ , que é esfericamente simétrica, é tal que  $\Sigma^{0i}(i = 1, 2, 3)$ , bem como  $\Sigma^{ij} \equiv \Sigma^k$ (permutações cíclicas de i,j,k), apontam na direção radial.

A solução geral para  $\Sigma^{01}$  é [92]

$$\Sigma^{01} = \frac{a}{er^2} e^{-(\lambda+\nu)/2}, \quad (6.1-3)$$

onde  $a$  é uma constante de integração positiva [92]. As equações de Einstein, neste caso são dadas por [92],

$$2\nu'' - \lambda'\nu' + 4\nu'/r + \nu'^2 = 0, \quad (6.1-4)$$

$$2\nu'' - \lambda'\nu' - 4\nu'/r + \nu'^2 = 0, \quad (6.1-5)$$

$$e^{-\lambda} \left[ 1 + \frac{r}{2}(\nu' - \lambda') - 1 \right] = -a. \quad (6.1-6)$$

De (6.1-4) e (6.1-5), encontramos a seguinte relação:

$$\nu' + \lambda' = 0, \quad (6.1-7)$$

e portanto,

$$\nu = -\lambda, \quad (6.1-8)$$

onde foi omitida a constante de integração, uma vez que ela pode ser escolhida como sendo igual a zero por uma redefinição conveniente da coordenada temporal.

As equações (6.1-6) e (6.1-7) nos fornecem o seguinte resultado:

$$(e^{-\lambda}r)' = 1 - a. \quad (6.1-9)$$

Resolvendo (6.1-6) e usando a relação dada por (6.1-8), obtemos

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - a = \frac{2m}{r}, \quad (6.1-10)$$

sendo  $m$  uma constante de integração. Agora vamos considerar o caso geral, isto é,

$$\Sigma^{\mu\nu} = \Sigma^{\mu\nu}(t, r), \quad \rho = \rho(t, r), \quad \lambda = \lambda(t, r) \quad e \quad \nu = \nu(t, r). \quad (6.1-11)$$

Da mesma forma que no caso anterior, encontramos que as únicas componentes não-nulas são  $\Sigma_{01} = -\Sigma_{10}$ . Portanto, a componente  $T_{01}$  do tensor energia-momento é nula [92]. Isto implica que  $\lambda$  é independente do tempo, e como consequência  $\Sigma_{01}$ ,  $\rho$  e  $\nu$  são também, independentes do tempo. Portanto, a solução em que  $\nu = \nu(r)$  e  $\lambda = \lambda(r)$  é a mais geral, para a simetria considerada.

As diferentes condições de energia impõem condições sobre  $\Sigma^{\mu\nu}$ . Considerando as condições de energia, temos:

1. Condição de energia fraca, isto é,

$$T^{\mu\nu}u_\mu u_\nu \geq 0, \quad (6.1-12)$$

onde  $u_\mu$  é um vetor tipo tempo, ou seja,  $u_\mu u^\mu > 0$ .

2. Condição de energia dominante,

$$T^{\mu\nu}u_\mu u_\nu > 0 \quad (6.1-13)$$

$$u_\mu T^{\mu\alpha} T_\alpha^\nu u_\nu > 0 \quad (6.1-14)$$

3. Condição de energia forte, isto é,

$$\left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) u^\mu u^\nu \geq 0. \quad (6.1-15)$$

A condição de energia forte, aplicada a solução encontrada, fica reduzida a [92],

$$r^2 [(\tilde{u}^2)^2 + \sin^2 \theta (\tilde{u}^3)^2] > 0, \quad (6.1-16)$$

onde  $\tilde{u}^\mu = u^\mu / (u^\alpha u_\alpha)^{1/2}$ .

Por outro lado, as condições de energia fraca e dominante nos fornecem o seguinte resultado

$$r^2 [(u^2)^2 + \sin^2 \theta (u^3)^2] \geq 0. \quad (6.1-17)$$

Note que estas condições não impõem nenhuma restrição com respeito ao valor da constante de integração  $a$ .

Uma vez que as constantes  $a$  e  $m$  não estão relacionadas, pois são constantes de integração independentes, então, a métrica

$$ds^2 = \left( 1 - a - \frac{2m}{r} \right) dt^2 - \left( 1 - a - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (6.1-18)$$

representa o espaço-tempo associado a uma partícula de massa  $m$ , colocada na origem de um sistema de coordenadas, envolta por uma nuvem de cordas esfericamente simétricas [92].

A solução dada pela equação (6.1-18) tem um raio de horizonte dado por

$$r_H = \frac{2m}{(1-a)}, \quad a \neq 1. \quad (6.1-19)$$

Caso  $a$  seja menor do que a unidade, a nuvem de cordas irá aumentar o raio de Schwarzschild por um fator de  $(1-a)^{-1}$ . Quando  $a > 1$ , a equação (6.1-18) representa um espaço-tempo homogêneo [92]. A nuvem de cordas sozinha, isto é,  $m = 0$ , não tem horizonte. Ela tem, no entanto, uma singularidade em  $r = 0$ , isto pode ser visto do fato de que

$$R = \frac{2a}{r^2} \quad (6.1-20)$$

e

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48m^2}{r^6} + \frac{16ma}{r^5} + \frac{4a^2}{r^4} \quad (6.1-21)$$

A métrica dada pela equação (6.1-18) possui simetria esférica, e sua fonte é uma nuvem de cordas [92]. O espaço-tempo correspondente, estamos denominando espaço-tempo de Letelier.

## 6.2 Espaço-tempo de Letelier com rotação

A solução obtida por Letelier[92] que descreve o espaço-tempo de uma nuvem de cordas, é estática. Ela é dada pela equação (6.1-18). Nesta seção, vamos obter a versão estacionária desta métrica[26], ou seja, a métrica do espaço-tempo de Letelier, com rotação, cujo parâmetro associado denotaremos  $J$ , e representa o momento-angular por unidade de massa. Para obter a solução estacionária, vamos adotar o método desenvolvido por Newman-Janis [102], cujo fundamento está na complexificação das coordenadas.

Fazendo uma redefinição das coordenadas e da massa  $m$ , na equação (6.1-18), dada por

$$(1-a)^{1/2}t = T, \quad (6.2-22)$$

$$(1-a)^{-1/2}r = R, \quad (6.2-23)$$

$$\frac{m}{(1-a)^{3/2}} = M, \quad (6.2-24)$$

o elemento de linha, (6.1-18), para a nuvem de cordas pode ser escrito na forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{R}\right) dT^2 - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} dR^2 - (1-a)R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (6.2-25)$$

Vamos reescrever a métrica dada pela equação (6.2-25), com o uso de uma nova coordenada,  $U$ , definida por

$$U = T - R - 2GM \ln\left(\frac{R}{2GM} - 1\right). \quad (6.2-26)$$

Neste caso, obtemos o seguinte resultado,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{R}\right) dU^2 + 2dUdR - (1-a)R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (6.2-27)$$

As componentes contravariantes,  $g^{\mu\nu}$ , são dadas por:

$$g^{00} = 0 \quad (6.2-28)$$

$$g^{11} = -\left(1 - \frac{2GM}{R}\right) \quad (6.2-29)$$

$$g^{01} = 1 \quad (6.2-30)$$

$$g^{22} = -\frac{1}{(1-a)R^2} \quad (6.2-31)$$

$$g^{33} = -\frac{1}{(1-a)R^2 \sin^2\theta} \quad (6.2-32)$$

Usando o método de Newman-Janis [102], podemos escrever  $g^{\mu\nu}$  da seguinte forma:

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \bar{m}^\nu - m^\nu \bar{m}^\mu \quad (6.2-33)$$

onde os vetores  $l^\mu$ ,  $n^\nu$ , e  $m^\mu$  são dados por consistência, pelas seguintes equações:

$$l^\mu = \delta_1^\mu \quad (6.2-34)$$

$$n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM}{R}\right) \delta_1^\mu, \quad (6.2-35)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(1-a)R} \left(\delta_2^\mu + \frac{i}{\sin\theta} \delta_3^\mu\right) \quad (6.2-36)$$

onde a barra denota o complexo conjugado.

De acordo com o algoritmo de Newman-Janis [102],  $R$  passa a admitir valores complexos, daí a referência a complexificação, e dessa forma, os vetores  $l^\mu$ ,  $n^\nu$ , e  $m^\mu$  passam a ser reescritos na seguinte maneira:

$$l^\mu = \delta_1^\mu \quad (6.2-37)$$

$$n^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left[ 1 - GM \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{\bar{R}} \right) \right] \delta_1^\mu \quad (6.2-38)$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(1-a)\bar{R}} \left( \delta_2^\mu - \frac{i}{\sin \theta} \delta_3^\mu \right) \quad (6.2-39)$$

Agora vamos introduzir o parâmetro que representa a rotação,  $J$ , que corresponde ao momento angular por unidade de massa, e realizar a seguinte complexificação de coordenadas,

$$\begin{aligned} u' &= u - iJ \cos \theta \\ r' &= r + iJ \cos \theta \\ \theta' &= \theta \\ \phi' &= \phi. \end{aligned} \quad (6.2-40)$$

Assim, usando (6.2-40), os vetores  $l^\mu$ ,  $n^\nu$ ,  $m^\mu$  e seu complexo conjugado  $\bar{m}^\mu$ , podem ser reescritos nas novas coordenadas, na forma,

$$l'^\mu = \delta_1^\mu \quad (6.2-41)$$

$$n'^\mu = \delta_0^\mu - \frac{1}{2} \left[ 1 - GM \left( \frac{r'}{r'^2 + J^2 \cos^2 \theta'} \right) \right] \delta_1^\mu \quad (6.2-42)$$

$$m'^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(1-a)(r' + iJ \cos \theta')} \left[ iJ \sin \theta' (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu + \frac{i}{\sin \theta'} \delta_3^\mu \right] \quad (6.2-43)$$

$$\bar{m}'^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(1-a)(r' - iJ \cos \theta')} \left[ -iJ \sin \theta' (\delta_0^\mu - \delta_1^\mu) + \delta_2^\mu - \frac{i}{\sin \theta'} \delta_3^\mu \right] \quad (6.2-44)$$

A nova métrica na base de tetrada,

$$g'^{\mu\nu} = l'^\mu n'^\nu + l'^\nu n'^\mu - m'^\mu \bar{m}'^\nu - m'^\nu \bar{m}'^\mu \quad (6.2-45)$$

com  $l^\mu$ ,  $n^\nu$ ,  $m^\mu$  e  $\bar{m}^\mu$  sendo dados pelas eqs. (6.2-41)-(6.2-44), representa o espaço-tempo de uma nuvem de cordas, com rotação, ou melhor, o espaço-tempo de Letelier com rotação.

Usando as equações (6.2-41)-(6.2-44) e (6.2-45), podemos determinar as componentes contravariantes da métrica, e daí, as componentes covariantes. Em termos das coordenadas  $(u', r', \theta', \phi')$ , as componentes de  $g'_{\mu\nu}$  são dadas por:

$$g'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2GM r'}{r'^2 + J^2 \cos^2 \theta'} & 1 & 0 & \frac{2GM J r' \sin^2 \theta'}{r'^2 + J^2 \cos^2 \theta'} \\ 1 & 0 & 0 & -J^2 \sin^2 \theta' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2GM J r' \sin^2 \theta'}{r'^2 + J^2 \cos^2 \theta'} & -J^2 \sin^2 \theta' & 0 & g'_{\phi\phi} \end{pmatrix}$$

onde,

$$g'_{\phi\phi} = -\sin^2 \theta' \left\{ (1-a)r'^2 + \frac{2GM J r' \sin^2 \theta'}{r'^2 + J^2 \cos^2 \theta'} + J^2 [(1-a) \cos^2 \theta' + \sin^2 \theta'] \right\}. \quad (6.2-46)$$

Esta métrica ainda não está na forma apropriada para verificarmos se ela corresponde, de fato, ao espaço-tempo de Letelier com rotação. Para colocá-la numa forma que fique evidente seu caráter estacionário, vamos fazer mais uma transformação de coordenadas que corresponde as de Boyer-Lindquist [103], dada por

$$\begin{aligned} t &= u' - r' - GM \ln(r'^2 - 2GM r' + J^2) - \frac{2G^2 M^2 \arctan\left(\frac{r' - GM}{\sqrt{J^2 - G^2 M^2}}\right)}{\sqrt{J^2 - G^2 M^2}} \\ r &= r' \\ \theta &= \theta' \\ \phi &= \phi' + \frac{J \arctan\left(\frac{r' - GM}{\sqrt{J^2 - G^2 M^2}}\right)}{\sqrt{J^2 - G^2 M^2}} \end{aligned} \quad (6.2-47)$$

Usando as transformações de coordenadas dadas em (6.2-47), a métrica  $g'_{\mu\nu}$  toma a seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2GM r}{r^2 + J^2 \cos^2 \theta} & 0 & 0 & -\frac{2GM J r \sin^2 \theta}{r^2 + J^2 \cos^2 \theta} \\ 0 & \frac{-r^2 + J^2(a \sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}{r^2 - 2GM r + J^2} & 0 & g_{r\phi} \\ 0 & 0 & -(1-a)(r^2 + J^2 \cos^2 \theta) & 0 \\ -\frac{2GM J r \sin^2 \theta}{r^2 + J^2 \cos^2 \theta} & g_{\phi r} & 0 & g_{\phi\phi} \end{pmatrix}$$

onde,

$$g_{r\phi} = -\frac{aJ [r^2 \sin^2 \theta - J^2 \cos^2 \theta (1 + \cos^2 \theta)]}{r^2 - 2GM r + J^2} \quad (6.2-48)$$

$$g_{\phi\phi} = -\sin^2\theta\{(1-a)r^4 + 2J^2r^2(1-a)\cos^2\theta\} + 2GMJ^2r\sin^2\theta + J^4\cos^2\theta[(1-a)\cos^2\theta + \sin^2\theta]/(r^2 + J^2\cos^2\theta). \quad (6.2-49)$$

Note que fazendo  $a = 0$ , portanto na ausência da nuvem de cordas, a métrica  $g_{\mu\nu}$  fica reduzida a métrica de Kerr, nas coordenadas de Boyer-Lindquist.

Vamos considerar agora, a aproximação em que desprezamos os termos de ordem  $\geq J^2/r^2$ . Então a métrica  $g_{\mu\nu}$ , juntamente com as definições (6.2-48) e (6.2-49), fica reduzida a,

$$g_{\mu\nu} \cong \begin{pmatrix} 1 - \frac{2GM}{r} & 0 & 0 & -2GMJr\sin^2\theta \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} & 0 & -\frac{aJ\sin^2\theta}{1-2GM/r} \\ 0 & 0 & -(1-a)r^2 & 0 \\ -2GMJr\sin^2\theta & -\frac{aJ\sin^2\theta}{1-2GM/r} & 0 & -(1-a)r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Fazendo  $a = 0$  nesta última expressão temos,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \quad (6.2-50)$$

A expressão (6.2-50) corresponde a métrica de Lense-Thirring. Se usarmos as coordenadas originais adotadas para escrever a eq. (6.1-18) a componente  $g_{rr}$  será  $g_{rr} = (1 - a - 2M/r)^{-1}$ , e portanto, a raiz de  $g_{rr}$ , a saber,  $2M/(1-a)$ , será o raio do horizonte, que é o mesmo do caso estático. A razão para este resultado reside no fato de que desprezamos os termos da ordem igual ou superior a  $J^2/r^2$ , o que significa que estamos considerando baixa rotação.

O tratamento relativístico de cordas, usando o formalismo invariante de gauge, permitiu a obtenção da solução, que com simetria esférica correspondente a uma nuvem de cordas geométricas, com partículas, como fonte das equações de Einstein. A solução esfericamente simétrica que obtemos, estamos denominando espaço-tempo de Letelier [92].

A partir da solução obtida por Letelier em [92], usamos o método da complexificação das coordenadas, e obtivemos uma solução que corresponde ao espaço-tempo de Letelier com rotação. O método utilizado funciona para se construir a solução de Kerr a partir da solução de Schwarzschild, ou para se construir a solução de Kerr-Newman a partir da

de Reissner-Nordstrom. O método que adotamos tem sido utilizado para construção de soluções estacionárias a partir de soluções sem rotação, tanto em espaços com simetria esférica, quanto naqueles com simetria cilíndrica.

# Conclusões

Nesta tese, focalizamos um único tipo de defeito topológico, a saber, a corda cósmica. Dedicamos o estudo a esse tipo de defeito com base nas teorias de gravitação modificadas e na Teoria da Relatividade Geral. Em particular trabalhamos com duas teorias modificadas: Teoria de Gravitação  $f(R)$  e Teoria de gravitação de Gauss-Bonnet (também conhecida como  $f(\mathcal{G})$ ). Escolhemos trabalhar com cordas, devido a sua importância fundamental para a possível explicação da formação das estruturas que compõe o nosso Universo, e por sua importância, caso existam, no contexto cosmológico. Decidimos trabalhar com teorias de gravitação modificadas devido ao seu enorme potencial em descrever as interações fundamentais da matéria em regimes extremos, onde a Teoria da Relatividade Geral não fornece as respostas a problemas recentemente colocados pelas observações.

Nossa contribuição encontra-se nos últimos capítulos desta tese. No capítulo 3, deduzimos três soluções inéditas da corda cósmica, duas em  $f(R)$  e uma em  $f(\mathcal{G})$ . Nas três soluções consideramos uma corda com características semelhantes à da Relatividade Geral: uma corda cósmica estática, infinitamente longa, situada ao longo do eixo  $z$ , com simetria axial e invariante por boosts ao longo de seu comprimento. No primeiro caso, deduzimos a solução para uma corda cósmica em teorias  $f(R)$ , com a seguinte forma:  $f(R) = R + \alpha R^n$ . Restringimos a dois casos distintos,  $n = 2$  e  $n = -1$ , nos quais analisamos uma solução para a região interna e outra para a parte externa à corda. Chegamos a conclusão de que nossas duas soluções externas são soluções cilíndricamente simétricas semelhantes as obtidas por Azadi[75]. No caso das regiões internas observamos uma ligeira diferença

em relação a solução anteriormente obtida por Hiscock [19]. Neste caso, uma redefinição apropriada de constantes torna as soluções idênticas. A outra solução da corda, deduzimos com base na teoria de Gravitação de Gauss-Bonnet, que embora seja diferente das teorias  $f(R)$ , nos forneceu um resultado semelhante, na forma, aos obtidos em  $f(R)$  e na Teoria da Relatividade Geral. Para as teorias de Gauss-Bonnet escolhemos a função como sendo dada por:  $f(\mathcal{G}) = \alpha \mathcal{G}^n$ , com  $n = 2$ . Nesta situação também encontramos duas soluções, uma para o seu interior e outra de vácuo. Ambas as soluções são formalmente idênticas às soluções em teorias  $f(R)$ , a menos de uma redefinição apropriada de constantes. O que diferencia uma da outra e ambas da Relatividade Geral é o seu déficit angular, e a dependência com os parâmetros que caracterizam as soluções em cada teoria. Como último trabalho deste capítulo encontramos as soluções da equação de Dirac no espaço-tempo da corda cósmica em  $f(R)$  e  $f(\mathcal{G})$ , com o uso das soluções da corda em  $f(R)$  e  $f(\mathcal{G})$  que foram determinadas nas seções anteriores. As soluções que correspondem a uma partícula espinorial nos espaços-tempo da corda, nestes contextos, contém informações sobre a estrutura topológica de cada solução, que é determinada através dos parâmetros que as caracterizam.

No capítulo 4, fizemos um detalhado processo de desenvolvimento para a obtenção de uma geometria que descreve o espaço-tempo de uma corda cósmica com rotação. O principal objetivo deste capítulo era obter a geometria externa de uma corda cósmica com rotação em teorias  $f(R)$ , a partir de uma solução estática, que coincidissem com a solução da corda com rotação em Relatividade Geral no limite em que  $\alpha \rightarrow 0$ . Para este fim partimos da solução de vácuo da corda cósmica em teorias  $f(R)$  que obtivemos no capítulo 3. Como já tínhamos a solução estática da corda, para que a mesma adquirisse rotação adaptamos, para o caso de simetria cilíndrica, um método conhecido como *Complexificação de Coordenadas*, desenvolvido por Newman e Janis[24], no qual, uma solução estática, é submetida a uma transformação complexa de coordenadas e dessa forma constrói-se a solução estacionária correspondente. Como o método desenvolvido por

Newman e Janis tratava exclusivamente de simetrias esféricas, tivemos que fazer algumas modificações na transformação complexa de coordenadas e na base de tetrada utilizada por Newman-Janis, originalmente[24]. Para fins de comparação do o resultado, utilizamos uma solução da corda com rotação em Relatividade Geral, já conhecida. Podemos observar que apesar de sairmos de uma solução estática, cilíndricamente simétrica em teorias de gravitação  $f(R)$ , nosso espaço-tempo obtido reduz-se exatamente a do caso da Teoria da Relatividade Geral, no limite em que o parâmetro  $\alpha$  vai à zero. Podemos observar que o momento angular da corda  $J$ , é exatamente o mesmo da Relatividade no caso limite, e ainda que nossa solução se reduz ao caso estático da corda de Hiscock[19], quando fazemos o termo de rotação igual à zero.

O capítulo 5 desta tese é dedicado integralmente à obtenção de um modelo que descreve com precisão, o espaço-tempo de uma corda cósmica com rotação, no modelo ballpoint pen. Diferentemente dos casos anteriores, neste, adotamos um modelo específico para a geometria interna de uma corda, o *ballpoint pen*, que substitui a singularidade cônica no eixo da corda por um espaço com curvatura constante, na região interior. Antes porém, tivemos que fazer um estudo detalhado sobre as condições de energia de uma corda cósmica com rotação, pois até então, esse estudo não havia sido feito, e não constava na literatura. Este estudo de condições de energia baseou-se principalmente na equação de Raychalduri e em uma redefinição que adotamos para o tensor energia-momento da corda, através da qual foi possível determinar quais eram exatamente as condições de energia que deveríamos impor às nossas equações à fim de encontrar um resultado fisicamente aceitável. Somente através das condições de energia é que conseguimos determinar exatamente o espaço-tempo interior da corda. Nesse capítulo, encontramos que as grandezas físicas da corda, como pressão, densidade e fluxo de energia, possuem a partir de uma determinada região um caráter quantizado, e isso é surpreendente, pois até então a distribuição de energia de uma corda assumia valores unicamente contínuos na Relatividade Geral, e isso era válido para o seu interior e exterior. Portanto, o que encontramos, quando decidimos analisar a

corda com rotação em teorias de gravitação  $f(R)$ , é que existe uma distribuição quantizada de energia da corda quando a mesma é dotada de um modelo específico como o ballpoint pen e a função  $f(R)$  assume uma forma específica, em nosso caso:  $f(R) = R + \alpha R^n$ . Vale ressaltar também que durante todo o desenvolvimento deste trabalho não especificamos em momento algum a forma da função  $f(R)$ . Apenas para comparar com as soluções da Relatividade Geral, adotamos  $f(R) = R + \alpha R^n$ . No último capítulo da tese, capítulo 6, obtivemos a solução correspondente a uma nuvem de cordas cósmicas no espaço-tempo de Letelier com rotação. Para isso, fizemos uso, novamente, do método de complexificação de coordenadas de Newman-Janis, onde partimos de uma solução estática já existente e obtivemos uma solução estacionária correspondente a esse espaço-tempo.

Nessas soluções que obtivemos da corda cósmica em teorias de gravitação modificada, podemos perceber que em todas elas, com a excessão do modelo do ballpoint pen, existe uma semelhança muito grande com suas respectivas soluções na Teoria da Relatividade, em geral, elas diferem umas das outras apenas por uma redefinição apropriada de constantes, o que implica que, apenas o déficit angular da geometria de cada espaço-tempo determinado em teorias modificadas é alterado. Porém, um fato que pode mostrar que as teorias de gravitação modificadas que trabalhamos, que são construídas a partir da introdução de termos de ordem superior no escalar de curvatura na ação, como  $f(R)$  e  $f(\mathcal{G})$ , devem, de fato, serem analisadas com mais detalhes, é o fato de termos encontrado uma distribuição de energia quantizada para o interior de uma corda cósmica, sem paralelo da mesma solução em Relatividade Geral, que pode servir de parâmetro para uma melhor comparação entre a Teoria da Relatividade Geral e as Teorias modificadas da gravitação.

# Apêndice A

## Sistema avançado de coordenadas de Eddington-Finkelstein

Uma técnica muito utilizada para contornar o problema de coordenadas insatisfatórias é esquadrihar o espaço-tempo com geodésicas, as quais continuam sendo coordenadas independentes e não serão afetadas de nenhuma forma pelos limites de validade de um sistema de coordenadas local. Das muitas possibilidades, o sistema de coordenadas de Eddington-Finkelstein, usa como esquadrihamento, as linhas de mundo nulas de fótons que se movem radialmente em uma variedade. O estudo desse sistema pode ser dividido em duas partes: o sistema avançado e o retardado.

Se, em particular, desejamos desenvolver uma melhor descrição de um sistema de partículas em queda, vamos começar pela construção de um novo sistema de coordenadas, com base em fótons caindo radialmente. Lembre-se que a linha de mundo de um fóton radialmente em curso é dada da seguinte forma:

$$t = -r - 2\mu \ln \left| \frac{r}{2\mu} - 1 \right| + \text{const.}$$

Sendo  $t$  e  $r$  coordenadas temporal e radial, respectivamente, e  $\mu$  a massa do fóton. Vamos utilizar a constante de integração como a nova coordenada, que denotaremos por  $p$ . Assim, fazemos a seguinte transformação de coordenadas:

$$p = t + r + 2\mu \ln \left| \frac{r}{2\mu} - 1 \right|, \quad (\text{A.0-1})$$

onde  $p$ , por razões históricas, é conhecido como parâmetro de tempo avançado, sendo uma

coordenada nula. Desde que  $p$  seja uma constante ao longo de toda a linha de mundo do fóton em curso radial, será uma boa coordenada onde quer que penetre. Diferenciando  $p$ , obtemos:

$$dp = dt + \frac{r}{r - 2\mu} dr \quad (\text{A.0-2})$$

substituindo  $dt$  no espaço-tempo de Schwarzschild pela equação (A.0-2), vemos que em termos do parâmetro  $p$  o elemento de linha toma a seguinte forma simples:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) dp^2 - 2dpdr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{A.0-3})$$

Podemos observar imediatamente que este elemento de linha não apresenta nenhuma divergência no ponto  $r = 2\mu$ . De fato, é regular para todo o espaço  $0 < r < \infty$ , o qual é o intervalo percorrido por um fóton em queda numa geodésica. Assim, em certo sentido, a transformação (A.0-1) ampliou a gama de coordenadas da solução de uma forma que lembra a continuação analítica de uma função complexa. Pode-se argumentar que a transformação de coordenadas (A.0-1) não pode ser utilizada no ponto  $r = 2\mu$ , porque a torna singular. No entanto, isso deve acontecer para que se possa retirar a singularidade de coordenadas daquele ponto. Como já era esperado, a métrica (A.0-3) é especialmente conveniente para cálculos de caminhos de geodésicas nulas. Em particular, veremos que geodésicas nulas (para as quais  $ds = d\theta = d\phi = 0$ ) são dadas em geral por,

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \left(\frac{dp}{dr}\right)^2 - 2\frac{dp}{dr} = 0,$$

a qual possui duas soluções

$$p = \text{const.}$$

e

$$p = 2r + 4\mu \ln \left| \frac{r}{2\mu} - 1 \right| + \text{const.},$$

que correspondem a geodésicas nulas radiais entrando e saindo, respectivamente. Uma vez que  $p$  é uma coordenada nula, o que pode não ser tão familiar, é comum trabalhar

com a coordenada tipo tempo  $t'$ , definida por:

$$t' = p - r = t + 2\mu \ln \left| \frac{r}{2\mu} - 1 \right|.$$

Então, o elemento de linha (A.0-3) toma a seguinte forma,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) dt'^2 - \frac{4\mu}{r} dt' dr - \left(1 + \frac{2\mu}{r}\right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (\text{A.0-4})$$

o qual, novamente, é regular para o intervalo  $0 < r < \infty$ . As coordenadas  $(t', r, \theta, \phi)$  são chamadas de *sistema de coordenadas avançado de Eddington-Finkelstein*. Podemos observar que o elemento de linha (A.0-4) não é invariante com respeito a transformação  $t' \rightarrow -t'$ , sob a qual o segundo termo do lado direito muda de sinal. É fácil ver que a trajetória radial de uma partícula, ou de fótons, em queda livre nesse elemento de linha (A.0-4) é contínua no raio de Schwarzschild  $r = 2\mu$ , sem singularidades. As mudanças na estrutura do cone de luz no raio de Schwarzschild, depois de ter atravessado a fronteira  $r = 2\mu$ , é dirigida para a singularidade. Analogamente, podemos observar que um fóton, ou partícula, começando de um ponto  $r < 2\mu$  não pode escapar para a região  $r > 2\mu$ . O raio de Schwarzschild define um horizonte de eventos, um ponto sem retorno.

# Apêndice B

## Obtenção de $A(r)$

Com a utilização do princípio de conservação da energia podemos mostrar que para uma métrica qualquer que for escrita sob a forma dada em (3.1-2), a função  $A(r)$  sempre será uma constante.

A derivada covariante do tensor energia momento deve ser nula:

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0 \quad (\text{B.0-1})$$

de modo que,

$$\partial_{\mu} T_{\nu}^{\mu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} = 0 \quad (\text{B.0-2})$$

cuja a única componenete diferente de zero é,

$$-\Gamma_{01}^0 T_0^0 = 0 \quad (\text{B.0-3})$$

logo,

$$\Gamma_{01}^0 = 0 \quad (\text{B.0-4})$$

usando a expressão para  $\Gamma_{01}^0$  dada em (3.1-6), e substituindo em (B.0-4), obtemos o seguinte resultado

$$\frac{dA(r)}{dr} = 0, \quad (\text{B.0-5})$$

o que implica que,  $A(r)$  é necessariamente uma constante.

# Apêndice C

## O escalar de Gauss-Bonnet

O escalar de Gauss-Bonnet é dado por,

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (\text{C.0-1})$$

sendo  $R$  o escalar de Ricci,  $R_{\alpha\beta}$  o tensor de Ricci e  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  o tensor de Riemman. Vamos analisar o termo  $R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$ ,

$$R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} = R_{11}R^{11} + R_{22}R^{22} \quad (\text{C.0-2})$$

sendo,

$$R_{11} = R^{11} = -\frac{1}{C} \frac{d^2C}{dr^2}$$
$$R_{22} = C \frac{d^2C}{dr^2}$$

e

$$R^{22} = \frac{1}{C^3} \frac{d^2C}{dr^2},$$

assim,

$$R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} = 2 \left( \frac{1}{C} \frac{d^2C}{dr^2} \right)^2. \quad (\text{C.0-3})$$

O segundo termo é,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{1212}R^{1212} \quad (\text{C.0-4})$$

sendo,  $R_{1212} = C \frac{d^2C}{dr^2}$  e  $R^{1212} = \frac{1}{C^3} R^{1212}$  os únicos termos não nulos do tensor de Riemman.

Assim, temos

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = \left( \frac{1}{C} \frac{d^2C}{dr^2} \right)^2. \quad (\text{C.0-5})$$

## O escalar de Gauss-Bonnet

---

Usando a expressão para o escalar de Ricci dado por  $R = 2\frac{1}{C}\frac{d^2C}{dr^2}$ , e substituindo em (C.0-1), obtemos

$$\mathcal{G} = -3 \left( \frac{1}{C} \frac{d^2C}{dr^2} \right)^2. \quad (\text{C.0-6})$$

# Apêndice D

## Deficit angular

Podemos calcular o déficit angular no espaço-tempo da corda cósmica, utilizando o fato de que  $\delta\phi = 2\pi - 2\pi a$ , isto nos dará a diferença que existe entre o que deveríamos ter no espaço plano e o que está faltando. Caso a constante  $a$  fosse maior que a unidade,  $a > 1$ , não teríamos um déficit, e sim, um excesso angular, no caso considerado, o parâmetro  $a$  é dado por:

$$a = \cos(\sqrt{\omega_0}r),$$

e portanto o déficit angular pode ser escrito na forma

$$\delta\phi = 2\pi - 2\pi \cos(\sqrt{\omega_0}r),$$

ou

$$\delta\phi = 2\pi - 2\pi \left(1 - \frac{\omega_0\mu}{2\pi\sigma_0}\right),$$

e finalmente,

$$\delta\phi = \frac{\omega_0}{\sigma_0}\mu.$$

O valor obtido acima corresponde ao déficit angular para  $n = 2$ . Os outros casos são análogos, e a obtenção do déficit angular é feita com o uso apropriado dos parâmetros que as caracterizam.

# Bibliografia

- [1] S. W. Hawking e R. Penrose, Proc. R. Soc. A, **314**, 529 (1970).
- [2] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York (1972).
- [3] S. Weinberg, Rev.Mod. Phys. **61**, 1 (1989).
- [4] P.J.E. Peebles e Bharat Ratra. Rev.Mod.Phys. **75**, 559 (2003).
- [5] A.H. Guth, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).
- [6] Salvatore Capozziello e Maria Felicia De Laurentis, Phys.Rept. **509**, 167 (2011).
- [7] Antonio De Felice e Shinji Tsujikawa,  $f(R)$  Theories, Living Rev.Rel **13**, 3 (2010).
- [8] Thomas P. Sotiriou e Valerio Faraoni,  $f(R)$  Theories of Gravity, Rev.Mod.Phys. **82**, 451 (2010) .
- [9] Nadiezhda M. Garcia, Francisco S. N. Lobo, José P. Mimoso e Tiberiu Harko. J.Phys.Conf.Ser. **314**, 012060 (2011).
- [10] P. Horava, JHEP **0903** (2009) 020, [arXiv:0812.4287]; P. Horava, Phys. Rev. D **79** (2009) 084008, [arXiv:0901.3775]; P. Horava, Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 161301, [arXiv:0902.3657].
- [11] A. S. Eddington, The Mathematical Theory of Relativity, Cambridge University Press, Cambridge, (1923).
- [12] H. Weyl, Ann. Phys. **59**, 101 (1919).

- [13] A.A. Starobinsky, Phys.Lett. **91B**, 99 (1980).
- [14] Sean M. Carro, Vikram Duvvuri, Mark trodden e Michael S. Turner, Phys.Rev. **D 70**, 043528 (2004).
- [15] B. Linet, Gen.Rel.Grav. **17**, 1109 (1985).
- [16] R. Utiyama e B. S. De Witt, J. Math. Phys. **3**, 608 (1962).
- [17] K. S. Stelle, Phys. Rev. D **16**, 953 (1977).
- [18] A. Vilenkin e E. P. S. Shellard, Cosmic Strings and Other Topological Defects. Cambridge University Press, Cambridge, England, (1994).
- [19] W.A.Hiscock, Phys. Rev. D **31**, 12 (1985).
- [20] B. Allen e A. C. Ottewill, Phys. Rev. D **42**, 2669 (1990).
- [21] S. Deser e Jackiw, Commun. Math. Phys. **118**, 495 (1988).
- [22] J. Spinelly, E. R. Bezerra de Mello e V. B. Bezerra, Class. and Quantum Grav. **18**, 1555 (2001).
- [23] D.Barbosa, J.Spinelly e V.B.Bezerra, *Spinning Cosmic String in  $f(R)$  Gravity*, (2013) (a ser submetido para publicação).
- [24] S. P. Drake e Peter Szekeres, An Explanation of the Newman-Janis Algorithm, University of Adelaide, Adelaide, (1998).
- [25] D.Barbosa, J.Spinelly e V.B.Bezerra, *On a model with Internal Structure of a Spinning Cosmic String in  $f(R)$ gravity*,(2013)(a ser submetido para publicação).
- [26] D.Barbosa e V.B.Bezerra, *On the Rotating Letelier Spacetime*, (2013)(a ser submetido para publicação).
- [27] K.S. Stelle, Gen. Relativ. Gravit., **9**, 353 (1978).

- [28] J.N. Islan, An Introduction to Mathematical Cosmology, Second Edition. University of Chittagong, Bangladesh. (2004).
- [29] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B79**, 276 (1974).
- [30] M. Barriola e A. Vilenkin, Phys.Rev.Lett. **63**, 341(1989).
- [31] V.B. Bezerra e N.R. Khusnutdinov, Mod.Phys. A **17**, 875 (2002); Class.Quantum Grav. **19**, 3127 (2002); E.R. Bezerra de Mello, V.B. Bezerra e N.R. Khusnutdinov, Phys.Rev. D **60**, 063506 (1999).
- [32] E.R. Bezerra de Mello, V.B. Bezerra e N.R. Khusnutdinov, J. Math. Phys. **42**, 562 (2001).
- [33] H.R. Brandenberger, Topological Defects and Cosmology, Brown University Physics Department, United States (1998).
- [34] A. Gangui, Cosmology from Topological Defects, Instituto de Astronomia y Física del Espacio, Argentina, (2003).
- [35] A. Vilenkin, Cosmic Strings and Domain Walls, Phys. Rep. **121**, 263 (1985).
- [36] V. Faraoni, Cosmology in Scalar-Tensor Gravity, Kluwer Academic, Dordrecht, (2004).
- [37] Yi-Zen Chu I Tanmay Vachaspati, Phys.Rev.D **87** (2003) 083512; Jurgen Audretsch I Athanasios Economou, Phys.Rev.D **45**, 1103 (1992).
- [38] E.R. Bezerra de Mello e A.A. Sahariam, Class. Quantum Grav. **30**, 015002 (2013).
- [39] E.R. Bezerra de Mello, V.B. Bezerra, H.I. Mota e A.A. Sahariam. Phys. Rev. D **86**, 065023 (2012).
- [40] E.R. Figueiredo Medeiros e E.R. Bezerra de Mello, Eur. Phys. J. C **72**, 2051 (2012).

- [41] Vladimir D.Skarzhinsky, Diego D. Harari e U.L.F. Jasper, Phys. Rev. D **49**, 711 (1994); E.R. Bezerra de Mello, V.B. Bezerra e A.A. Sahariam, Phys. Lett. B **645**, 295 (2007).
- [42] V.B. Bezerra, Ann. Phys.**203**, 392 (1990); Geusa de A.Marques e V.B. Bezerra, Phys.Lett. A, **318** (2003); Geusa de A. Marques, V.B. Bezerra e Sandro G. Fernando, Phys. Lett. A **341**, 39 (2005).
- [43] V.B. Bezerra, Phys. Rev. D **35**, 2031 (1987).
- [44] T.W.B Kibble, Rep.Prog.Phys. **58**, 477 (1995).
- [45] C.L.Bennet et al, Astrophys.J.Suppl. **148**, 1 (2003).
- [46] C.Cantaldi e J.Magueijo, Phys.Rev.Lett. **82**, 2034 (1999); F.R.Bouchet, P.Peter, A.Rizuelo e M.Sakellariadou,Phys.Rev.D **65**, 021301 (2002); R.Darrer, M.Kunz e A.Melchiorri, Phys.Rep.**364**, 1 (2002).
- [47] Mairi Sakellariadou, Phys.Proc.Suppl.**68**, 192 (2009).
- [48] G.Drali e A.Vilenkin, JCAP **0403**, 010 (2009).
- [49] R.H.Brandenberger e A.C.Davis, Phys.Lett.B **263**, 239 (1991).
- [50] P.Bhattacharjel e N.C.Rana, Phys.Lett. B **365**, (1990).
- [51] M. Sazhin et al, Montly Not.Roy.Ast.Soc. **343**, 353 (2003).
- [52] Robert Poltis and Dejan Stojkovic. Phys. Rev. Lett. **105**, 161301 (2010).
- [53] W. de Boer, Grand Unified Theories and Supersymmetry in Particle Physics and Cosmology. Inst. fur Experimentelle Kernphysik. Universitat Karlsruhe, Germany,(1994).
- [54] L. Marder, Proc.Phys.Soc. A **252**, 45 (1959).

- [55] A.Vilenkin, *Phy.Rev. D* **23**, 852 (1981).
- [56] J.Richard Gott, *Astrop.J.* **288**, 422 (1985).
- [57] Y. Fujii e K. Maeda, *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*, Cambridge University Press, Cambridge, (2003).
- [58] Salvatore Capozziello e Valerio Faraoni, *Beyond Einstein Gravity. A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*, Ed.Springer New York, (2011).
- [59] Hawking, S. W.; ELLIS, G. F. R. *The Large Scale Structure of Space-Time*. New York. Cambridge University Press, (1973).
- [60] Moshe Carmeli, *Classical Fields, General Relativity and Gauge Theory*, John Wiley and Sons. New York,(1982).
- [61] The Phenomenology of Dvali-Gabadadze-Porrati Cosmologies, Arthur Lue. arXiv:astro-ph/0510068. (2005).
- [62] Roy Maartens, *Brane-World Gravity*, Institute of Cosmology and Gravitation, (2004).
- [63] Einstein Aether Theory. Christopher Eling, Ted Jacobson e David Mattingly. arXiv:gr-qc/0410001. (2005).
- [64] B. Zwiebach, *Phys. Lett. B*, **156**, 315 (1985).
- [65] D.Lovelock, *J. Math. Phys.*, **12**, 498 (1971).
- [66] E. Kretschmann, *Ann. Phys. (Leipzig)*, **53**, 16 (1917).
- [67] A. De Felice e T. Suyama, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **34**, 34 (2009).
- [68] De Felice, A., Mota, D.F., and Tsujikawa, S., Matter instabilities in general Gauss-Bonnet gravity, arXiv e-print, (2009). [arXiv:0911.1811 [gr qc]].

- [69] B. Li, J.D. Barrow e D.F. Mota, *Phys. Rev. D*, **76**, 044027 (2007).
- [70] M. Gasperini e G. Veneziano, *Astropart. Phys.* **1**, 317 (1993).
- [71] M. Gasperini, M. Maggiore, and G. Veneziano, *Nucl. Phys. B*, **494**, 315 (1997).
- [72] S. Tsujikawa, R. Brandenberger and F. Finelli, *Phys. Rev. D*, **66**, 083513 (2002).
- [73] T. Levi-Civita, *Rend.Accad.Naz.Lincei* **26**, 307 (1917).
- [74] M. Anderson, *The mathematical Theory of Cosmic Strings*, IOP Publishing Lt, (2003).
- [75] A. Azadi, D. Momeni e M. Nouri-Zonoz, *Physics Letters B* **370**, 210 (2008).
- [76] A. Banijamali e B. Fazlpour, *Astro.Spa.Sci.* **2**, 340 (2012).
- [77] E.T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash e R. Torrence, *J. Math. Phys.* **6**, 918 (1965).
- [78] G.C. Debney, R.P. Kerr and A. Schild, *J. Math. Phys.* **10**, 1842 (1969).
- [79] M. Gurses and F. Gurse, *J. Math. Phys.* **16**, 2385 (1975).
- [80] M. De Laurentis, *From Clifton-Barrow spherically summetric to axially symmetric solution in f(R) gravity*, arXiv:1111.2071v1(2011).
- [81] S. Capozziello, A. Stabile e A. Troisi, *Class. Quant. Grav.* **25**, 085004 (2008).
- [82] E.T. Newman e R. Penrose, *J. Math. Phys.* **3**, 566 (1962).
- [83] E.J. Flaherty, *Hermitian and Kahlerian geometry en relativity*, *Lecture notes in Physics*, **46**, Springer-Verlag, Berlin (1976).
- [84] Matt Visser. *The Kerr spacetime: A brief introduction*, School of Mathematics, Statistics, and Computer Science Victoria University of Wellington. New Zealand, (2008).

- [85] J. R. Gott, *Astrophys J.*, **288**, 422 (1985).
- [86] W. A. Hiscock, *Phys. Rev. D* **31**, 3288 (1985).
- [87] B. Allen and A. C. Ottewill, *Phys. Rev. D* **42**, 2669 (1990).
- [88] Bjorn Jensen e Harald H. Soleng. *Phys.Rev.D* **45**, 10 (1992).
- [89] J.H. Kung, *Phys. Rev. D* **52**, (1995) 6922; *Phys. Rev. D* **53**, 3017 (1996).
- [90] S.E. Perez Bergliaffa, *Phys. Lett. B* **642**, 311 (2006).
- [91] J. Santos, J.S. Alcantiz, M.J. Rebouças and F.C. Carvalho, *Phys.Rev.D* **76**, 083513 (2007).
- [92] P.S. Letelier, *Phys.Rev. D* **20**, 1294 (1970).
- [93] M.Kalb e P. Ramond, *Phys.Rev. D* **9**, 2273 (1974).
- [94] P.S. Letelier, *Phys.Rev. D* **15**, 1055 (1977).
- [95] P.S. Letelier, *Il. Nuovo, B* **63**, 519 (1981).
- [96] P.S Letelier, *Phys.Rev. D* **28**, 2414 (1983).
- [97] P.S Letelier, *J. Math. Phys.* **19**, 1908 (1978).
- [98] R. Jeannerot, J. Rocher e M. Sakellariadou, *Phys.Rev. D* **68**, 103514 (2003).
- [99] M. Sakellariadou, *Phys. Trans. Roy. Soc. London A*, **366**, 2881 (2008).
- [100] Anil K. Yadav, Vineet K. Yadav e Lallan Yadav, *Int. J. Theor. Phys.* **48**, 568 (2005).
- [101] Hassan Amirhashchi, *Research in Astron. Astrophys.* **13**, 387 (2013).
- [102] E.T. Newman e A.I. Janis, *J. Math. Phys.* **6**, 915 (1965).
- [103] R.H.Boyer e R.W.Lindquist, *J.Math.Phys.* **8**, 265 (1967).