

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física



Tese de Doutorado

Tópicos em Defeitos Deformados e o Movimento Browniano

João Rafael Lucio dos Santos

João Pessoa

2013

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Tese de Doutorado

Tópicos em Defeitos Deformados e o Movimento Browniano

João Rafael Lucio dos Santos

Tese submetida ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, sob orientação do Professor Dr. Laércio Losano, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

João Pessoa

2013

S237t Santos, João Rafael Lucio dos.
Tópicos em defeitos deformados e o movimento browniano / João Rafael Lucio dos Santos.- João Pessoa, 2013.
125f. : il.
Orientador: Laércio Losano
Tese (Doutorado) – UFPB/CCEN
1. Física. 2. Teoria clássica de campos. 3. Campos escalares. 4. Movimento browniano. 5. Equação de Langevin. 6. Integrais de trajetória.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

DADOS CURRICULARES

JOÃO RAFAEL LUCIO DOS SANTOS

NASCIMENTO	02.03.1985 - Campos do Jordão SP
FILIAÇÃO	Donizeti João dos Santos Regina Aparecida Lucio dos Santos
2000/2003	Ensino Médio SENAC - Campos do Jordão SP
2003/2008	Graduação em Física - Modalidade Bacharelado Unesp Universidade Estadual Júlio Mesquita Filho SP Campus de Guaratinguetá
2008/2010	Mestrado em Física Unesp Universidade Estadual Júlio Mesquita Filho SP Campus de Guaratinguetá
2012/2013	Doutorado Sanduíche em Física University of Rochester NY River Campus
2010/2013	Doutorado em Física UFPB Universidade Federal da Paraíba PB Campus I - João Pessoa

“Dedico este trabalho ao meu avô João Ferreira Lucio, cuja vida foi breve, contudo inesquecível. À minha mãe Regina Lucio, por todo o seu imensurável apoio ao longo dessa trajetória e para aquela que esteve ao meu lado durante esta jornada e me acompanhará por tantas outras, minha esposa Raphaela Ramalho.”

Agradecimentos

Os frutos deste trabalho são consequência do apoio de diversas pessoas, sem as quais estas linhas não seriam escritas e não teriam significado. Agradeço primeiramente à minha esposa Raphaela Beserra Ramalho por todo o seu amor, carinho, força, atenção e paciência ao longo de todos esses anos. Além de toda a sua família, em especial aos meus sogros Maria Auxiliadora B. Ramalho e Manuel Climério R. Ramalho, aos meus cunhados Climéria B. Ramalho, Joaquim R. de Alencar Neto e Yuki Jane W. de Alencar e aos meus sobrinhos Pedro A. Ramalho Albuquerque e Dylan Ernesto W. de Alencar; muito obrigado por todos os ótimos momentos e por toda a ajuda durante esse período.

Agradeço enormemente à minha família, principalmente à minha mãe Regina A. Lucio, à minha irmã Camila L. Santos, ao meu sobrinho Arthur L. Saraiva e ao meu pai Donizeti J. dos Santos; sem o apoio, carinho e força de vocês nada disso seria possível. Agradeço também a Ezio Colla, por toda a sua amizade, cumplicidade e apoio não só a mim como à toda minha família. A todos os meus amigos, com destaque para Elias Leite Mendonça, Tiago Carlos Adorno de Freitas, Leonardo S. Soares, Pedro Henrique R. S. Moraes e Rafael Augusto Couceiro Correa; por todos os anos de amizade, por nossas discussões sobre física e por todos os desafios que passamos juntos.

Aos colegas de pós-graduação, aos professores e funcionários do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba. Aos colegas e funcionários do Departamento de Física e Astronomia da University of Rochester, em especial à Laura Blumkin. Ao meu orientador Professor Laércio Losano, por seu apoio, paciência, receptividade e por todo o profissionalismo que me passou durante esses quatro anos de convívio. Agradeço ao meu co-orientador Professor Dionísio Bazeia, por sua enorme colaboração junto ao meu doutorado, além de sua paciência, por tantas ideias que discutimos juntos e todo o seu apoio. Agradeço ainda, aqueles que também participaram das investigações contidas

nesta tese: Professor Alvaro de Souza Dutra, Professor Othon Cabo Winter, Professor Marcelo B. Hott, Professor Jorge Mário Malbouisson, Professor Juan Mateos Guilarte, Professor Miguel Ángel González León e Luis Enrique Arroyo Meza. Dedico ainda, minha gratidão às sugestões, comentários, questionamentos e análises dos membros da banca de defesa: Professor Alvaro de Souza Dutra, Professor Francisco de Assis Brito, Professor Roberto Menezes, Professor José Roberto Soares Nascimento, Professor Dionísio Bazeia e Professor Laércio Losano.

Agradeço também, aos amigos que nos ajudaram durante o período de doutorado sanduíche, em especial a Henry Tran e Artem Kopelev. Não poderia terminar estes agradecimentos sem mencionar minha profunda admiração e gratidão ao Professor Ashok Das, por todos os meses de trabalho, por todos os conselhos, ensinamentos e por todo o conhecimento que ele me passou, tanto a nível de pesquisador como a nível pessoal. Há uma série de outras pessoas que contribuíram efetivamente na realização deste processo de formação e infelizmente estas breves linhas são insuficientes para mencionar todas elas, de qualquer modo, espero que minha sincera gratidão as alcance.

Este trabalho contou com apoio da seguinte entidade:

CNPq - Processos 140703/2010-1 e 200030/2012-4.

“A Simplicidade é a Máxima Sofisticação.”

Leonardo Da Vinci

Resumo

A ciência não-linear é tema central de diversas linhas de investigação, cobrindo áreas como a biologia, a física, a matemática e a química. Nossa primeira vertente de trabalho nesta tese, consiste no estudo de não-linearidades via abordagem de teoria clássica de campos. As discussões estão baseadas em soluções estáticas em $(1,1)$ dimensões, com destaque para o chamados defeitos tipo *kink* e *lump*. Nos procedimentos relatados, discorremos a respeito de diversas técnicas para a determinação de novos modelos com suas respectivas soluções analíticas. Um ferramental fundamental para a obtenção desses resultados é o chamado método de deformação, o qual também foi parte essencial para a criação de um método de extensão de modelos, onde visamos a construção de modelos de dois campos reais a partir do acoplamento entre dois modelos de um campo. Tal método também foi exposto em detalhes, bem como as análises sobre estabilidade linear, cálculo de modos zeros, determinação da energia total e dos superpotenciais, relativos às novas famílias de potenciais. Já a segunda linha de pesquisa, refere-se aos conceitos básicos do movimento browniano, onde analisamos as propriedades da solução da equação de Langevin, e na introdução de uma abordagem via integrais de trajetória para descrevê-lo nos moldes de teoria de quântica de campos.

Palavras-chave: Teoria Clássica de Campos, Campos Escalares, Soluções Analíticas, *Kinks*, *Lumps*, Potenciais, Movimento Browniano, Equação de Langevin, Integrais de Trajetória.

Abstract

The non-linear science is a central topic covering several investigation areas, such as biology, chemistry, mathematics and physics. In the first part of this thesis, we studied the non-linearity in the scope of classical field theory. The discussions are based on static solutions in $(1, 1)$ space-time dimensions, and they are focused on kinks and lumps defects. In the related procedures, we show several techniques which allowed us to determine new models with their respective analytical solutions. The main mathematical tool to obtain these results is the so called deformation method, which was also an essential piece in the construction of a new extension method. This method presents the determination of new two scalar fields models from the coupling between two one scalar field systems. The method was analyzed carefully, as well as the linear stability, the zero modes, the total energy and the superpotentials, related with the new families of potentials. Furthermore, in the second part we presented the basics concepts about the Brownian Motion, where we analysed the features of the solution of the Langevin Equation, and we also introduced a path integral approach to this problem in a quantum field theory way.

Keywords: Classical Field Theory, Scalar Fields, Analytical Solutions, Kinks, Lumps, Potentials, Brownian Motion, Langevin Equation, Path Integral.

Sumário

Resumo	i
Abstract	ii
Introdução	1
1 Teoria Clássica de Campos Escalares Reais	5
1.1 Introdução	5
1.2 Teoria de Campos para um Campo Escalar	6
1.3 Teoria de Campos para dois Campos Escalares	9
2 Campos Escalares e o Método da Deformação	12
2.1 Introdução	12
2.2 Método de Deformação	13
2.3 Aplicação o Método de Deformação	14
2.4 Estabilidade Linear	19
3 Novas Famílias de Potenciais Escalares	23
3.1 Introdução	23
3.2 Função de Deformação Composta	24
3.3 Famílias de Modelos para $g(\phi) = \alpha \cos \phi$	25
3.3.1 Nova família de modelos <i>seno</i>	26
Soluções estáticas	27
Máximos e mínimos	28
3.3.2 Nova família de modelos <i>cosseno</i>	30
Soluções estáticas	32
Máximos e mínimos	32

3.3.3	Multiplicidade	33
3.4	Superpotenciais e Energias dos multi sine-Gordon	33
3.5	Famílias de Modelos para $g(\phi) = \phi^r$	36
3.5.1	Modelos da família <i>seno</i> para valores inteiros de a	37
	Kinks topológicos, kinks duplos e lumps não-topológicos tipo sino	37
3.5.2	Modelos da família <i>coseno</i> para valores inteiros de a	41
	Kinks e kinks duplos topológicos e lumps tipo sino não topológicos	42
3.5.3	Famílias de Modelos para a semi-inteiro	46
	Kinks e kinks duplos topológicos e lumps tipo sino e tipo pão de açúcar não topológicos	47
3.6	Famílias de Modelos para $g(\phi) = 1/\phi^r$	48
3.6.1	Modelos da família <i>seno</i> para a inteiro	49
	Kinks, kinks finos e kinks duplos topológicos	50
3.6.2	Famílias de Modelos para a semi-inteiro	52
	Kinks, kinks finos e kinks duplos topológicos	53
3.7	Superpotenciais e Energias para os Kinks e Lumps	55
	Estabilidade e modos zero	57
4	Modelos de Dois Campos a partir de Modelos de Um Campo	60
4.1	Introdução	60
4.2	Generalidades	61
4.3	O Novo Método	63
4.4	Exemplos	65
4.4.1	Exemplo 1: ϕ^4 versus χ^4	65
4.4.2	Exemplo 2: ϕ^4 versus χ^6	67
4.4.3	Exemplo 3: ϕ^4 versus χ^3	69
4.4.4	Exemplo 4: modelo- p	72
5	Movimento Browniano e o Formalismo via Integrais de Trajetória	76
5.1	Introdução	76
5.2	Movimento Browniano - Conceitos Fundamentais	77
5.2.1	Equação de Langevin - Ruído Branco	77
5.2.2	Equação de Langevin - Ruído Colorido	80

5.3	Processos Markovianos e não-Markovianos	81
5.3.1	Processos Markovianos	81
5.3.2	Processos não-Markovianos	83
5.4	A Lagrangiana e a Hamiltoniana para o Movimento Browniano	84
5.5	Formalismo via Integrais de Trajetória	87
Conclusões		96
Apêndice A O Teorema de Noether		99
Trabalhos Publicados		101
Referências		102

Introdução

A ciência não-linear engloba uma diversidade de investigações embasadas em diferentes áreas do conhecimento, percorrendo e muitas vezes conectando estudos em biologia, física, matemática e química. Uma característica intrínseca da ciência não-linear consiste nas dificuldades técnicas, que em geral, estão relacionadas com os procedimentos para solucionar dinâmicas ou equações de movimento de determinados sistemas. Todavia, a grande riqueza desse ramo da ciência refere-se justamente à não-linearidade presente em suas equações.

Um dos exemplos marcantes de fenômenos não-lineares é o da onda solitária observada por John Scott Russell no ano de 1834, enquanto avistava um estreito canal que cortava as cidades escocesas de Edimburgo e Glasgow. As notas de John Scott Russell constam no *14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science* [1], realizado em 1844. Este relato descreve de forma resumida o processo de formação da onda, cuja ocorrência estava relacionada com a parada repentina de um barco que era puxado por um par de cavalos ao longo do canal. Apesar do barco ter parado, a massa de água por ele deslocada ainda estava em movimento, e ao chocar-se com a estrutura do barco criou uma elevação solitária. Tal elevação possuía um formato arredondado e bem definido, mantendo seu curso pelo canal conservando assim, seu contorno e sua velocidade.

As observações de John Scott Russell só seriam equacionadas matematicamente por Korteweg e de-Vries em meados de 1895 [2], através de uma dinâmica não-linear que recebeu o nome de equação da KdV, em homenagem a esses autores. Mais tarde, a onda solitária de Scott Russell foi denominada sóliton, tratando-se de uma classe de oscilações associada com infinitas quantidades conservadas e resultando em um tópico de grande aplicabilidade nos mais diversos contextos, cobrindo descrições de sistemas biológicos [3,4] até modelos em matéria condensada e óptica não-linear [5,6].

A não-linearidade também é tema central de estudos em teoria de campos e, em particular, sua abordagem clássica, nos oferece um arcabouço de não-linearidades muito extenso, resultando em sistemas cujas soluções estáticas são conhecidas na literatura como defeitos. As aplicações das estruturas de defeitos estão presentes em diversas áreas da física, tais como física de altas energias [7–12], cenários de mundos-brana [13–28], modelos cosmológicos, contribuindo para a explicação da expansão acelerada do universo [29–32], física de matéria condensada [33, 34], onde elas estão relacionadas com a formação de padrões [33] e na descrição de interfaces em diversas configurações de sistemas magnéticos [34]. Podemos também aplicá-las em estudos de excitações não-lineares nos condensados de Bose-Einstein [35, 36], bem como na construção de aparatos magnéticos em escala nanométrica [37].

Esta gama de atuação concedeu aos modelos de campo escalar, em especial aqueles de $(1,1)$ dimensões (uma dimensão temporal e uma dimensão espacial), um status de relevância na teoria de campos. Como salientamos, estes modelos possuem um papel fundamental em inúmeras investigações interessantes e muitas delas podem ser vistas em um nível mais pedagógico em [38] e [39].

O escopo central da primeira parte desta tese, baseia-se no estudo dessas soluções analíticas tipo defeitos, com destaque para os chamados *kinks* e *lumps*, bem como nas diversas técnicas que auxiliam na determinação destes defeitos, visando contornar as dificuldades usuais de obter soluções analíticas de modelos não-lineares. Uma ferramenta presente em grande parte das discussões e que foi imprescindível para lidar com as dificuldades previamente mencionadas, trata-se do método de deformação, introduzido na literatura por Bazeia, Losano e Malbouisson [40] em 2002, e utilizado nos mais diferentes contextos, vide [41–52]. Além desse método nos possibilitar a análise de novos sistemas compostos por um único campo escalar, ele foi o pilar fundamental para construirmos um procedimento de extensão, capaz de gerar modelos de dois campos escalares a partir da combinação não-trivial de modelos de um campo.

Uma motivação extra para a determinação de novos modelos de dois campos escalares analíticos, é que podemos tratar com maior realismo uma grande diversidade de cenários, como os estudados em [7, 8, 11, 12, 33, 53–91]. Outro ponto interessante é que modelos caracterizados por um campo escalar complexo podem ser reescritos em termos de sistemas de dois campos escalares reais.

A segunda parte dos trabalhos aqui apresentados, baseia-se na descrição do movimento browniano via equação de Langevin e em discussões preliminares sobre um formalismo de integrais de trajetória que reproduz os resultados bem conhecidos relativos à dinâmica da partícula browniana. Os relatos históricos do movimento browniano iniciam-se em sua primeira observação experimental de caráter científico, realizada pelo botânico Robert Brown em 1827 [93]. A experiência de Brown constituía em partículas de pólen, suspensas em uma solução líquida à temperatura constante, que se movimentavam de forma aleatória. Apesar de Brown ter descrito o fenômeno, ele não conseguiu explicá-lo de forma correta. Porém desde seu parecer, diversos esforços científicos foram realizados no intuito de entender de forma qualitativa e quantitativa, o que ocorre neste tipo de experimento.

O primeiro artigo científico que explicou a verdadeira natureza desse comportamento foi publicado em 1905 por Albert Einstein, [94], no qual ele descreve a velocidade e a posição de uma partícula browniana generalizada, não como grandezas determinísticas mas como quantidades probabilísticas, o que atualmente identificamos como uma abordagem quântica do fenômeno físico. Einstein também calculou uma equação de evolução para a distribuição de probabilidades associada ao movimento browniano e a partir desta, determinou a forma do coeficiente de difusão.

Pouco tempo depois do trabalho de Einstein, dois outros artigos também detalharam a natureza do movimento browniano, apresentando uma abordagem simplificada do ponto de vista quantitativo. A autoria de tais trabalhos pertence a Langevin [95] e a Ornstein e Uhlenbeck [96], e são essas as referências que utilizaremos com mais afinco. Vejamos brevemente os conceitos fundamentais que permeiam os trabalhos mencionados. A fim de estudar o comportamento de uma partícula movendo-se em uma dimensão espacial (por simplicidade), e sujeita à força de atrito devido a viscosidade do líquido no qual ela encontra-se suspensa, utilizamos a segunda lei de Newton,

$$m \dot{v}(t) = -\alpha v(t), \quad (1)$$

onde m é a massa da partícula e α é o coeficiente de atrito. A solução analítica desta dinâmica é simplesmente

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m} t}, \quad (2)$$

informando que para grandes valores de t , a velocidade tende a zero. Contudo, este não era o comportamento observado no movimento browniano, aliás, o que era de se esperar é que para um intervalo de tempo muito grande, a partícula permanecesse em movimento.

No intuito de satisfazer tal exigência física, podemos modificar a dinâmica introduzindo uma nova função cuja natureza é diferente da velocidade. Tal função é conhecida como variável estocástica ou ruído e possui caráter probabilístico. Assim, nossa equação de movimento ganha a forma

$$m \dot{v}(t) = -\alpha v(t) + \eta(t). \quad (3)$$

Agora, a velocidade depende também da existência desse ruído $\eta(t)$, o que faz dela uma função estocástica, bem como a posição da partícula browniana. A equação anterior é conhecida na literatura científica como equação de Langevin.

Por uma questão pedagógica, discorreremos brevemente sobre cada um dos capítulos que fazem parte desta tese. No capítulo 1 expomos uma breve revisão, referente aos conceitos básicos de teoria clássica de campos para densidades lagrangianas compostas por um e dois campos escalares reais. Esta abordagem leva em conta soluções estáticas em $(1, 1)$ dimensões. O capítulo 2 é dedicado à introdução do método de deformação e em sua aplicação para a determinação de novas famílias de potenciais polinomiais de alta ordem de potência. Já o capítulo 3, apresenta uma outra aplicação do método de deformação, desta vez considerando uma deformação composta, a partir da qual obtivemos novas famílias de modelos multi sine-Gordon. Ainda no capítulo 3 mostramos uma nova deformação composta, a qual utilizamos para determinar formas exóticas de defeitos topológicos e não-topológicos para potenciais polinomiais.

No capítulo 4 introduzimos nossa proposta para a construção de modelos de dois campos escalares reais a partir do acoplamento de modelos de um campo escalar, além disso, ilustramos o potencial deste método com diversos exemplos, incluindo um acoplamento de dois sistemas que envolvem soluções analíticas do tipo *kink* duplo. O capítulo 5 expõe os conceitos básicos referentes ao movimento browniano, bem como, detalhes sobre a interpretação física dos ruídos branco e colorido, além de apresentarmos nossa proposta de quantização do movimento browniano via integrais de trajetória e o cálculo das correlações do sistema. Finalmente, a última parte de nossa tese é dedicada às conclusões, comentários finais e futuras ideias de continuidade dos trabalhos aqui iniciados.

Capítulo 1

Teoria Clássica de Campos Escalares Reais

1.1 Introdução

A vertente clássica de teoria de campos é baseada principalmente no estudo de soluções das equações de movimento provenientes da minimização de uma determinada ação. Ao considerarmos sistemas com parte cinemática usual, as características dessas soluções estarão associadas diretamente com o potencial do modelo. Em geral, quando trabalhamos com campos escalares reais, esses potenciais são não-lineares e caso as soluções sejam estáticas, elas são classificadas como defeitos. Os defeitos apresentam-se como topológicos e não-topológicos, em particular no estudo de campos escalares em $(1, 1)$ dimensões, estes defeitos são usualmente denominados por *kinks* e *lumps*, respectivamente.

Os defeitos tipo *kink* também são conhecidos como paredes de domínio em duas ou mais dimensões. Apesar deles serem distribuições de energia como os sólitons de Scott Russell [1] existe uma série de diferenças entre sólitons hidrodinâmicos e defeitos topológicos. A primeira dessas diferenças está no fato das ondas solitárias não permanecerem estáticas. Outro ponto relevante é que sólitons como estes encontrados na hidrodinâmica, preservam sua identidade depois de espalhamento, pois estão associados com infinitas quantidades conservadas, enquanto *kinks* e paredes de domínio não necessariamente possuem esta propriedade, podendo inclusive, dispersar suas energias em colisões e até mesmo

se aniquilar.

Os *kinks* também são caracterizados por possuírem uma carga topológica, sendo esta consequência da conservação de uma corrente topológica. Em termos práticos, os *kinks* são soluções que conectam os mínimos globais vizinhos dos potenciais de cada um dos modelos abordados.

Neste capítulo, temos como proposta apresentar os conceitos fundamentais de teoria clássica de campos escalares, abrangendo sistemas de um e dois campos reais. Além disso, discorreremos sobre o método *BPS* (Bogomol'nyi, Prasad e Somerfield) [90, 91], demonstrando como nossas equações de Eüler-Lagrange podem ser satisfeitas por soluções provenientes de equações diferenciais de primeira ordem.

1.2 Teoria de Campos para um Campo Escalar

Um modelo generalizado composto por um campo escalar real está associado com a densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) , \quad (1.1)$$

cuja ação clássica é

$$S[\phi] = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) dt d^3x , \quad (1.2)$$

integrada sobre o espaço-tempo. Aqui, consideramos teorias de campo relativísticas que obedecem à métrica de Minkowsky, assim, ao longo de nossas discussões utilizaremos a representação $g^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$, para sistemas quadri-dimensionais. A situação mais simples que podemos trabalhar, consiste em um campo escalar em $(1, 1)$ dimensões, ou seja, $\phi = \phi(x, t)$. Deste modo, ao minimizarmos nossa ação clássica, determinamos a equação de Eüler-Lagrange

$$\ddot{\phi} - \phi'' + \frac{dV}{d\phi} = 0 , \quad (1.3)$$

com $\phi' = \partial\phi/\partial x$ e $\dot{\phi} = \partial\phi/\partial t$. Caso nosso campo escalar seja estático ou estejamos considerando o referencial da solução, então $\phi = \phi(x)$, e nossa equação de movimento reduz-se a

$$-\phi'' + \frac{dV}{d\phi} = 0 . \quad (1.4)$$

Esta última pode ser integrada multiplicando ambos os lados por ϕ' , de tal modo que

$$\phi' \phi'' = \frac{dV}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} = \frac{dV}{dx} , \quad (1.5)$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\phi'^2}{2} \right) = \frac{dV}{dx}. \quad (1.6)$$

Consequentemente, em geral temos,

$$\phi' = \pm \sqrt{2V + C}. \quad (1.7)$$

Essa mesma equação de primeira ordem pode ser obtida através de uma abordagem equivalente, porém seu procedimento não trata-se apenas de técnicas algébricas, mas sim de importantes interpretações físicas. Tal abordagem foi apresentada de forma independente por Bogomol'nyi, Prasad e Somerfield [90,91] e esta metodologia é conhecida na literatura como *BPS*. No intuito de demonstrarmos as propriedades do método *BPS*, permita-nos escrever a densidade de energia correspondente à densidade de lagrangiana para o campo $\phi(x)$, ou seja,

$$\rho(x) = -\mathcal{L} = \frac{\phi'^2}{2} + V(\phi), \quad (1.8)$$

deste modo, a energia total do nosso sistema é definida como

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\phi'^2}{2} + V(\phi) \right] dx. \quad (1.9)$$

Agora, podemos completar um quadrado perfeito nessa última equação, resultando em

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\phi' \mp \sqrt{2V} \right)^2 \pm \sqrt{2V} \phi' \right] dx. \quad (1.10)$$

A equação anterior nos informa que a condição para minimização da energia de um sistema como este, requer que

$$\phi' = \pm \sqrt{2V}, \quad (1.11)$$

implicando diretamente na energia

$$E = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2V} \phi' dx. \quad (1.12)$$

Podemos observar também que ao utilizarmos (1.7) para reescrever $V(\phi)$ em (1.9), ficamos com

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\phi'^2 - \frac{C}{2} \right] dx = -(\infty)C + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'^2 dx, \quad (1.13)$$

como estamos interessados em soluções cuja derivada seja suave, bem definida e sua integração seja finita sobre toda a variação espacial, somos levados a impor que $C = 0$

para que nossa energia total seja finita. Consequentemente (1.7) é idêntica ao resultado obtido em (1.11). Digamos ainda, que o potencial $V(\phi)$ possa ser escrito na forma

$$V(\phi) = \frac{W_\phi^2}{2}, \quad (1.14)$$

onde W_ϕ é a derivada em relação ao campo ϕ de uma função $W(\phi)$, a qual denominamos superpotencial. Logo, a energia total vista em (1.12) passa a ser

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{+\infty} W_\phi \phi' dx = |W[\phi(+\infty)] - W[\phi(-\infty)]|, \quad (1.15)$$

enquanto nossa equação diferencial de primeira ordem, fica dada por

$$\phi' = \pm W_\phi(\phi). \quad (1.16)$$

Como discorreremos previamente, outra quantidade física relevante consiste na carga topológica. Essa carga, pode ser determinada a partir da corrente topológica, e em se tratando de sistemas compostos por um campo escalar, uma das maneiras de definir esta corrente é

$$j_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W_\phi, \quad (1.17)$$

onde $\epsilon^{\mu\nu}$ é anti-simétrico, isto é, $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$ e $\epsilon^{00} = \epsilon^{11} = 0$, para $\mu, \nu = 0, 1$ [92]. Deste modo, a assimetria de $\epsilon^{\mu\nu}$ implica na conservação da corrente topológica, ou seja, $\partial_\mu j_T^\mu = 0$, o que nos permite estabelecer a carga topológica como

$$Q_T = \int dx j_T^0 = [W_\phi(x = +\infty) - W_\phi(x = -\infty)], \quad (1.18)$$

para um campo estático. Assim, a carga topológica caracteriza dois tipos de soluções, aquelas onde seu valor é diferente de zero (*kinks*) chamadas de topológicas e aquelas onde a carga é nula (*lumps*) as quais são rotuladas como não-topológicas.

Finalizamos estas generalidades, introduzindo o tensor energia-momento para este modelo. A partir do teorema de Noether¹, verificamos que a minimização de nossa ação em relação à transformações no espaço-tempo, resulta em um tensor energia-momento com a forma

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi - V(\phi) \right). \end{aligned} \quad (1.19)$$

¹Mais detalhes sobre o teorema de Noether são apresentados no Apêndice A.

Consequentemente, ao trabalharmos com campos estáticos $\phi = \phi(x)$ em $(1, 1)$ dimensões, a componente T^{00} é tal que

$$T^{00} = \rho = \frac{\phi'^2}{2} + V(\phi), \quad (1.20)$$

que representa a densidade de energia. Já a componente T^{11} é dada por

$$T^{11} = p = \frac{\phi'^2}{2} - V(\phi), \quad (1.21)$$

caracterizando a pressão ou stress devido ao campo escalar. No caso de potenciais positivos definidos, podemos reescrever a expressão anterior como,

$$\begin{aligned} p &= \frac{\phi'^2}{2} - V(\phi) = \frac{\phi'^2}{2} - \frac{W_\phi^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} (\phi' + W_\phi) (\phi' - W_\phi) = 0, \end{aligned} \quad (1.22)$$

resultando em stress nulo para os estados *BPS*.

1.3 Teoria de Campos para dois Campos Escalares

A descrição de um modelo geral composto por dois campos escalares reais não é muito diferente do formalismo apresentado na seção anterior, onde consideramos apenas um campo escalar. Nossas análises iniciam-se pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} \partial^\mu \chi \partial_\mu \chi - V(\phi, \chi), \quad (1.23)$$

cujas equações de movimento são

$$\phi'' = V_\phi; \quad \chi'' = V_\chi, \quad (1.24)$$

para campos estáticos, ou seja, $\phi = \phi(x)$ e $\chi = \chi(x)$ em $(1, 1)$ dimensões. A densidade de energia correspondente a esse sistema é

$$\rho(x) = \frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} + V(\phi, \chi). \quad (1.25)$$

Desenvolvendo uma vez mais o procedimento *BPS*, temos

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} + V(\phi, \chi) \right] dx. \quad (1.26)$$

Se nosso potencial $V(\phi, \chi)$ for definido como

$$V(\phi, \chi) \equiv \frac{W_\phi^2}{2} + \frac{W_\chi^2}{2}, \quad (1.27)$$

com $W_{\phi_i} \equiv \partial W / \partial \phi_i$ (esta notação será utilizada constantemente no decorrer desta tese).

Logo, a energia total passa a ser

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} + \frac{W_\phi^2}{2} + \frac{W_\chi^2}{2} \right] dx, \quad (1.28)$$

e uma maneira de completarmos os quadrados na relação anterior consiste em

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\phi' \mp W_\phi)^2 + (\chi' \mp W_\chi)^2 \pm 2W_\phi \phi' \pm 2W_\chi \chi' \right] dx. \quad (1.29)$$

Vê-se que as equações diferenciais que minimizam a energia são dadas por

$$\phi' = \pm W_\phi(\phi, \chi), \quad \text{e} \quad \chi' = \pm W_\chi(\phi, \chi), \quad (1.30)$$

resultando em uma energia total escrita de acordo com

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi' W_\phi + \chi' W_\chi) dx, \quad (1.31)$$

ou seja,

$$E_{BPS} = |W(\phi(+\infty), \chi(+\infty)) - W(\phi(-\infty), \chi(-\infty))|. \quad (1.32)$$

Além disso, as equações em (1.30) podem ser rearranjadas de modo a obtermos a equação diferencial

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi}{W_\chi}, \quad (1.33)$$

que relaciona os campos $\phi(x)$ e $\chi(x)$ e sua solução é conhecida como equação de órbita. Este resultado é de extrema importância para resolvermos as equações de primeira ordem obtidas via método *BPS*, pois a equação de órbita nos permite, quando possível, desacoplar as equações em (1.30), o que facilita a determinação de soluções analíticas.

Uma vez que, as características topológicas serão descritas pelo par (ϕ, χ) , a corrente topológica é definida, por exemplo, como

$$j_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W(\phi, \chi), \quad (1.34)$$

quando trabalhamos com modelos de dois campos. Tal definição, resulta na carga topológica

$$Q_T = \int dx j_T^0 = \int dx \frac{dW}{dx} = W(\phi(+\infty), \chi(+\infty)) - W(\phi(-\infty), \chi(-\infty)), \quad (1.35)$$

ou seja, ela é igual em módulo à energia *BPS*. Já o tensor energia-momento é expresso como

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + \partial^\mu \chi \partial^\nu \chi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + \partial^\mu \chi \partial^\nu \chi - g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi + \frac{1}{2} \partial^\beta \chi \partial_\beta \chi - V(\phi, \chi) \right), \end{aligned} \quad (1.36)$$

nesta formulação envolvendo dois campos escalares. Desta maneira, suas componentes T^{00} e T^{11} são tais que

$$T^{00} = \frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} + V(\phi, \chi), \quad \text{e} \quad T^{11} = \frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} - V(\phi, \chi), \quad (1.37)$$

respectivamente. Consequentemente, nossa densidade de energia também é igual à carga topológica e ao considerarmos a definição (1.27) para nosso potencial de dois campos, a pressão torna-se

$$\begin{aligned} T^{11} &= \frac{\phi'^2}{2} + \frac{\chi'^2}{2} - \frac{W_\phi^2}{2} - \frac{W_\chi^2}{2} = \frac{1}{2} (\phi'^2 + \chi'^2 - W_\phi^2 - W_\chi^2) \\ &= \frac{1}{2} [(\phi' + W_\phi)(\phi' - W_\phi) + (\chi' + W_\chi)(\chi' - W_\chi)] = 0, \end{aligned} \quad (1.38)$$

para os defeitos *BPS*.

Capítulo 2

Campos Escalares e o Método da Deformação

2.1 Introdução

Neste capítulo estamos interessados em determinar soluções analíticas para potenciais polinomiais de campos escalares em $(1, 1)$ dimensões. Contudo, torna-se uma tarefa muito difícil encontrar defeitos analíticos, resolvendo as equações de movimento provenientes da densidade de lagrangiana para potenciais polinomiais de grau maior do que seis. Essa dificuldade foi resolvida por Bazeia, Losano e colaboradores em 2006, quando empregou-se o método de deformação [40], calculando-se várias soluções analíticas de diversos potenciais polinomiais gerados a partir de deformações do modelo ϕ^4 , além da análise da estabilidade linear das soluções, por eles obtidas, (vide [97]).

Nas próximas seções descrevemos o método de deformação [40], além de reproduzirmos em detalhes o conteúdo da referência [97], ilustrando o comportamento dos novos potenciais e soluções determinadas via função deformadora. Verificamos ainda, a estabilidade linear dos diferentes tipos de defeitos. As análises relativas ao artigo [97] também serão relevantes no próximo capítulo, onde discorreremos sobre modelos analíticos de maior complexidade.

2.2 Método de Deformação

Inicialmente, faremos uma breve revisão de como foi definido o método de deformação, proposto por Bazeia, Losano e Malbouisson em 2002 [40]. Tal método, será a base de grande parte dos problemas abordados nesta tese. Dada a densidade de lagrangiana para um campo escalar em $(1, 1)$ dimensões

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - U(\chi) , \quad (2.1)$$

sua equação de movimento para soluções estáticas fica escrita como

$$-\chi'' + \frac{dU}{d\chi} = 0 , \quad (2.2)$$

com $\chi' = d\chi/dx$, cuja equação diferencial de primeira ordem correspondente é

$$\chi' = \pm \sqrt{2U} . \quad (2.3)$$

Supondo agora uma nova densidade de lagrangiana, também de um campo escalar em $(1, 1)$ dimensões, dada por

$$\mathcal{L}_d = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) . \quad (2.4)$$

verificamos que ao realizarmos uma integral primeira de sua equação de movimento (considerando novamente soluções estáticas), ficamos com a expressão

$$\phi' = \pm \sqrt{2V} , \quad (2.5)$$

a menos de uma constante de integração, que anulamos a fim de obter soluções com energia finita. Agora, permita-nos definir a seguinte relação entre os campos ϕ e χ

$$\chi = f(\phi) ; \quad \phi = f^{-1}(\chi) , \quad (2.6)$$

onde $f(\phi)$ é inversível e é denominada função de deformação. Segundo (2.6), podemos calcular diretamente

$$\chi' = \frac{df}{d\phi} \phi' . \quad (2.7)$$

Substituindo as relações para ϕ' e χ' vistas em (2.3) e (2.5), obtemos

$$V(\phi) = \frac{U(\chi = f(\phi))}{f_\phi^2} , \quad (2.8)$$

onde $f_\phi = df/d\phi$ e a solução analítica do modelo deformado é dada por

$$\phi(x) = f^{-1}(\chi(x)) . \quad (2.9)$$

2.3 Aplicação o Método de Deformação

Com base nos resultados da seção anterior, utilizaremos como ponto de partida para nossa análise um potencial bem conhecido, dado por

$$U(\chi) = \frac{1}{2} (1 - \chi^2)^2, \quad (2.10)$$

implicando na densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \frac{1}{2} (1 - \chi^2)^2, \quad (2.11)$$

que é simétrica pela reflexão $\chi \rightarrow -\chi$ caracterizando a simetria deste sistema como Z_2 . A solução analítica de sua equação de movimento é

$$\chi(x) = \tanh(x), \quad (2.12)$$

para $\chi = \chi(x)$, ou seja, um campo estático. Considerando a função de deformação

$$f(\phi) = \cos(a \arccos[\phi] - m\pi), \quad (2.13)$$

mostramos diretamente que

$$f(\phi) = (-1)^m \cos(a \arccos[\phi]) \quad m \text{ inteiro}, \quad (2.14)$$

$$f(\phi) = (-1)^{2m} \sin(a \arccos[\phi]) \quad m \text{ semi-inteiro}.$$

Ao substituir (2.13) em (2.8) com $U(\chi)$ dado por (2.10), obtemos os seguintes potenciais deformados

$$V_{\sin}^a = \frac{1}{2a^2} (1 - \phi^2) \sin^2(a \arccos[\phi]), \quad (2.15)$$

para m inteiro e

$$V_{\cos}^a = \frac{1}{2a^2} (1 - \phi^2) \cos^2(a \arccos[\phi]), \quad (2.16)$$

para m semi-inteiro. Visando uma análise mais palpável dos potenciais deformados, é conveniente expandirmos em série as funções “ $\sin^2(a \arccos[\phi])$ ” e “ $\cos^2(a \arccos[\phi])$ ”. Deste modo,

$$\begin{aligned} P_{\sin}^a(\phi) &= \sin^2(a \arccos[\phi]) \\ &= \sin^2\left[\frac{a\pi}{2}\right] - 2\left(a \cos\left[\frac{a\pi}{2}\right] \sin\left[\frac{a\pi}{2}\right]\right) \phi + \left(a^2 \cos^2\left[\frac{a\pi}{2}\right] - a^2 \sin^2\left[\frac{a\pi}{2}\right]\right) \phi^2 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{3}a \cos\left[\frac{a\pi}{2}\right] \sin\left[\frac{a\pi}{2}\right] + \frac{4}{3}a^3 \cos\left[\frac{a\pi}{2}\right] \sin\left[\frac{a\pi}{2}\right]\right) \phi^3 \\ &\quad + \frac{1}{3}\left(a^2 \cos^2\left[\frac{a\pi}{2}\right] - a^4 \cos^2\left[\frac{a\pi}{2}\right] - a^2 \sin^2\left[\frac{a\pi}{2}\right] + a^4 \sin^2\left[\frac{a\pi}{2}\right]\right) \phi^4 + \dots, \end{aligned} \quad (2.17)$$

e

$$\begin{aligned}
P_{\cos}^a(\phi) &= \cos^2(a \arccos[\phi]) \\
&= \cos\left[\frac{a\pi}{2}\right]^2 + 2\left(a \cos\left[\frac{a\pi}{2}\right] \sin\left[\frac{a\pi}{2}\right]\right)\phi + \left(-a^2 \cos\left[\frac{a\pi}{2}\right]^2 + a^2 \sin\left[\frac{a\pi}{2}\right]^2\right)\phi^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{3}a \cos\left[\frac{a\pi}{2}\right] \sin\left[\frac{a\pi}{2}\right] - \frac{4}{3}a^3 \cos\left[\frac{a\pi}{2}\right] \sin\left[\frac{a\pi}{2}\right]\right)\phi^3 \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(-a^2 \cos\left[\frac{a\pi}{2}\right]^2 + a^4 \cos\left[\frac{a\pi}{2}\right]^2 + a^2 \sin\left[\frac{a\pi}{2}\right]^2 - a^4 \sin\left[\frac{a\pi}{2}\right]^2\right)\phi^4 + \dots
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Podemos verificar a partir da forma de $P_{\sin}$ e $P_{\cos}$, que para valores de a semi-inteiros, somente as potências ímpares de ϕ são diferentes de zero. Já no caso em que a é um número inteiro são as potências pares de ϕ que sobrevivem. Verificamos ainda, que o grau do polinômio está diretamente relacionado com a escolha do valor da constante a , isto se nos restringirmos a valores inteiros e semi-inteiros de a para $P_{\sin}^a$ e $P_{\cos}^a$, por exemplo:

$$\begin{aligned}
P_{\sin}^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} - \frac{\phi}{2}; & P_{\sin}^{\frac{3}{2}} &= \frac{1}{2} + \frac{3\phi}{2} - 2\phi^3, \\
P_{\sin}^{\frac{5}{2}} &= \frac{1}{2} - \frac{5\phi}{2} + 10\phi^3 - 8\phi^5; & P_{\sin}^2 &= 4\phi^2 - 4\phi^4, \\
P_{\sin}^3 &= 1 - 9\phi^2 + 24\phi^4 - 16\phi^6; & P_{\sin}^4 &= 16\phi^2 - 80\phi^4 + 128\phi^6 - 64\phi^8, \\
P_{\cos}^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} + \frac{\phi}{2}; & P_{\cos}^{\frac{3}{2}} &= \frac{1}{2} - \frac{3\phi}{2} + 2\phi^3, \\
P_{\cos}^{\frac{5}{2}} &= \frac{1}{2} + \frac{5\phi}{2} - 10\phi^3 + 8\phi^5; & P_{\cos}^2 &= 1 - 4\phi^2 + 4\phi^4, \\
P_{\cos}^3 &= 9\phi^2 - 24\phi^4 + 16\phi^6; & P_{\cos}^4 &= 1 - 16\phi^2 + 80\phi^4 - 128\phi^6 + 64\phi^8,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

resultando em formas exatas dos polinômios $P_{\sin}$ e $P_{\cos}$. Agora, podemos substituir esses polinômios nas expressões dos potenciais, gerando uma família de diversos modelos a partir daquela função de deformação, correspondendo a

$$\begin{aligned}
V_{\sin}^{\frac{1}{2}} &= (1 - \phi^2)(1 - \phi); & V_{\sin}^{\frac{3}{2}} &= \frac{1}{9}(1 - \phi^2)(1 + 3\phi - 4\phi^3), \\
V_{\sin}^{\frac{5}{2}} &= \frac{1}{25}(1 - \phi^2)(1 - \phi)(-1 + 2\phi + 4\phi^2)^2; & V_{\sin}^2 &= \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2\phi^2, \\
V_{\sin}^3 &= \frac{1}{18}(1 - 5\phi^2 + 4\phi^4)^2; & V_{\sin}^4 &= \frac{1}{2}(\phi - 3\phi^3 + 2\phi^5)^2, \\
V_{\cos}^{\frac{1}{2}} &= (1 - \phi^2)(1 + \phi); & V_{\cos}^{\frac{3}{2}} &= \frac{1}{9}(1 - \phi^2)(1 - 3\phi + 4\phi^3), \\
V_{\cos}^{\frac{5}{2}} &= \frac{1}{25}(1 - \phi^2)(1 + \phi)(1 + 2\phi - 4\phi^2)^2; & V_{\cos}^2 &= \frac{1}{8}(1 - \phi^2)(1 - 2\phi^2)^2, \\
V_{\cos}^3 &= \frac{1}{18}(1 - \phi^2)\phi^2(3 - 4\phi^2)^2; & V_{\cos}^4 &= \frac{1}{32}(1 - \phi^2)(1 - 8\phi^2 + 8\phi^4)^2.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Essas diferentes famílias de potenciais podem ser expressadas em uma notação mais compacta, através dos chamados polinômios de Chebyshev de primeiro e segundo tipo

[98–100], ou matematicamente,

$$T_a(\theta) = \cos[a \arccos(\theta)], \quad (2.21)$$

e

$$U_a(\theta) = \frac{\sin[(a+1) \arccos(\theta)]}{\sin[\arccos(\theta)]}. \quad (2.22)$$

Estes polinômios são soluções analíticas de uma equação diferencial de segunda ordem, denominada equação de Chebyshev, cuja forma generalizada é

$$(1 - \theta^2) \frac{d^2 y}{d\theta^2} - \theta \frac{dy}{d\theta} + a^2 y = 0, \quad (2.23)$$

para $|\theta| < 1$. Deste modo, as diferentes famílias de potenciais são reescritas como

$$V_{\sin}^a(\phi) = \frac{1}{2a^2} (1 - \phi^2)^2 U_{a-1}^2(\phi); \quad a = 1, 2, 3, \dots \quad (2.24)$$

$$V_{\cos}^a(\phi) = \frac{1}{2a^2} (1 - \phi^2) T_a^2(\phi); \quad a = 1, 2, 3, \dots \quad (2.25)$$

$$V_{\sin}^a(\phi) = V_{\cos}^a(-\phi) = \frac{1}{4a^2} (1 - \phi^2) (1 - T_{2a}(\phi)); \quad a = 1/2, 3/2, 5/2, \dots \quad (2.26)$$

onde observamos nesta última equação que $V_{\sin}^a(\phi)$ e $V_{\cos}^a(\phi)$ estão associados por reflexão, ou seja, pela troca de $\phi \rightarrow -\phi$. Além disso, através da análise cuidadosa dos potenciais gerados e dos zeros das funções *seno* e *coseno*, constatamos que as famílias de potenciais também são descritas por

$$V_{\sin}^a(\phi) = \frac{1}{2a^2} \prod_{j=1}^{\frac{a+1}{2}} \left(1 - \frac{\phi^2}{Z_j^{a/2}}\right)^2; \quad a = 1, 3, 5, \dots \quad (2.27)$$

$$V_{\sin}^a(\phi) = \frac{\phi^2}{2} \prod_{j=1}^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{\phi^2}{Z_j^{a/2}}\right)^2; \quad a = 2, 4, 6, \dots \quad (2.28)$$

com $Z_j^a = \cos\left(\frac{j-1}{a}\pi\right)$, bem como, por

$$V_{\cos}^a(\phi) = \frac{\phi^2}{2} (1 - \phi^2) \prod_{j=1}^{\frac{a-1}{2}} \left(1 - \frac{\phi^2}{Z_j^{a/2}}\right)^2; \quad a = 1, 3, 5, \dots \quad (2.29)$$

$$V_{\cos}^a(\phi) = \frac{1}{2a^2} (1 - \phi^2) \prod_{j=1}^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{\phi^2}{Z_j^{a/2}}\right)^2; \quad a = 2, 4, 6, \dots \quad (2.30)$$

onde, $Z_j^a = \cos\left(\frac{2j-1}{2a}\pi\right)$, e ainda,

$$V_{\sin}^a(\phi) = V_{\cos}^a(-\phi) = \frac{1}{4a^2} (1 - \phi) (1 - \phi^2) \prod_{j=1}^{a-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\phi}{Z_j^a}\right)^2; \quad a = 1/2, 3/2, 5/2, \dots \quad (2.31)$$

para $Z_j^a = \cos\left(\frac{2j-1}{2a}\pi\right)$.

O próximo passo é escrever as soluções gerais correspondentes a essa função de deformação. Para isto, voltemos a (2.12) e (2.13) a partir das quais obtemos essencialmente

$$\phi = \cos\left(\frac{\arccos[\tanh(x)] + m\pi}{a}\right), \quad (2.32)$$

para m inteiro e semi-inteiro.

No intuito de evidenciar as características de cada um dos potenciais de (2.20) e das soluções de suas respectivas equações de movimento, geramos diversos gráficos que vão da Figura 2.1 até a Figura 2.3. Essas figuras, explicitam o fato da escolha das constantes a e m , que aparecem inicialmente na função de deformação, influenciarem nos tipos de defeitos topológicos e no grau dos potenciais analisados.

Simplificando esta discussão com alguns exemplos, analisamos inicialmente os gráficos presentes em Figura 2.1. O gráfico à esquerda, revela que o potencial $V_{\sin}(\phi)$ com a constante $a = 1/2$ não é positivo definido, consequentemente seu mínimo global está localizado no infinito negativo, além disso, ele possui apenas um mínimo local em $\phi = 1$. Já o da direita, mostra a ocorrência de um único tipo de defeito para seu potencial correspondente, no caso um defeito não-topológico do tipo *lump*, isto porque existe somente um mínimo local neste potencial, assim, a solução vai deste mínimo local até o outro zero do potencial (cuja derivada é diferente de zero), retornando ao referido mínimo. A periodicidade da solução, vide equação (2.32), implica que $\phi(x)$ é o mesmo para qualquer valor inteiro de m .

Agora vejamos os gráficos da Figura 2.2. Observamos a ocorrência de um potencial com dois mínimos locais que não é positivo definido. A existência de dois mínimos locais, repercute em defeitos do tipo *kink* e *anti-kink*, que são observados à direita da Figura 2.3, conectando estes mínimos. O gráfico previamente mencionado, resume os diferentes defeitos que podem ser obtidos a partir deste potencial, ou seja, um *kink* (*anti-kink*) ligando dois mínimos locais e um *lump* que sai de um dos mínimos locais, vai até o zero do potencial e retorna ao mínimo local. A periodicidade da solução, indica que ao tomar $m \neq 0$, $m \neq 1$ e $m \neq 2$ desde de que m seja um número inteiro, irá apenas reproduzir uma daquelas soluções apresentadas na Figura 2.3.

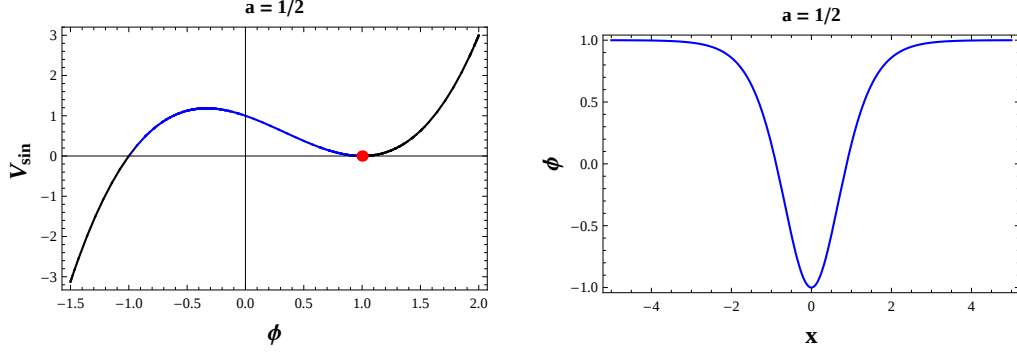


Figura 2.1: Na esquerda observamos o potencial $V_{\sin}^{\frac{1}{2}}(\phi)$ e sua solução tipo *lump*, apresentada à direita. O ponto em vermelho na curva do potencial representa seu mínimo local. Veja que o potencial não é positivo definido.

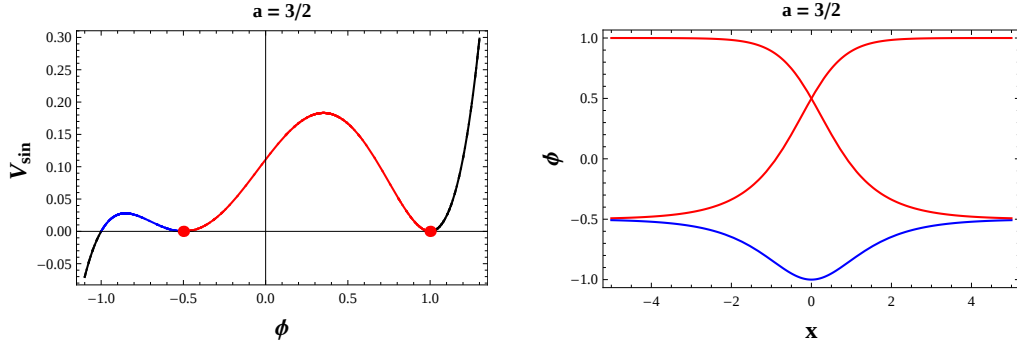


Figura 2.2: Potencial $V_{\sin}^{\frac{3}{2}}$ e suas respectivas soluções analíticas, cujas cores correspondem aos diferentes setores do potencial. As soluções tipo *kink* e *anti-kink* foram obtidas considerando $m = 0$ e $m = 2$, já a solução do tipo *lump* corresponde a $m = 1$.

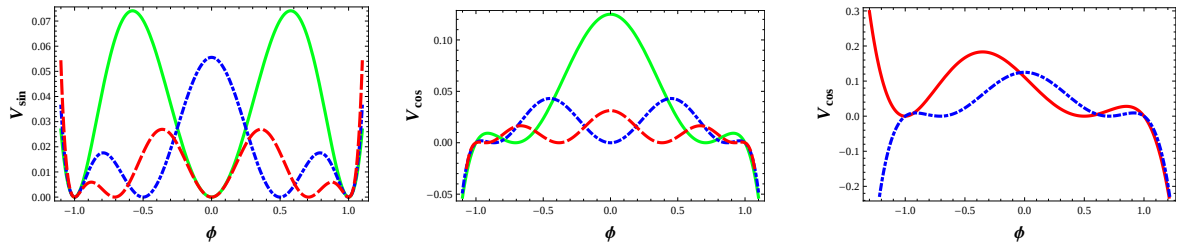


Figura 2.3: Nos gráficos da esquerda e do centro geramos diferentes formas dos potenciais $V_{\sin}^a$ e $V_{\cos}^a$, com $a = 2$ (curva contínua em verde), $a = 3$ (curva tracejada e pontilhada em azul) e $a = 4$ (curva tracejada em vermelho). Vemos que a família de potenciais $V_{\sin}^a$ com a inteiro é composta por potenciais positivos definidos. O terceiro gráfico à direita compara as características de $V_{\cos}^a$ para valores semi-inteiro (curva sólida vermelha) e inteiro (curva pontilhada azul) de a .

Outros gráficos que podemos discutir são aqueles vistos na Figura 2.3, onde verificamos que os potenciais gerados a partir de $V_{\sin}^a$, com a inteiro são positivos definidos, ou seja, todos os seus pontos de mínimos são globais. Assim, empiricamente não teremos mais defeitos do tipo *lump* como soluções das equações de movimento destes potenciais. No que se refere aos potenciais $V_{\cos}^a$, os membros desta família não serão positivos definidos e os valores inteiros e semi-inteiros de a , caracterizam a simetria/assimetria destes potenciais em relação a $\phi = 0$.

2.4 Estabilidade Linear

Para finalizar esta aplicação do método de deformação, verificamos a estabilidade linear dos defeitos determinados a partir de alguns dos potenciais abordados anteriormente. A estabilidade linear resume-se em escrever a solução do campo como sendo composta da solução estática mais uma perturbação que dependa das coordenadas espaciais e do tempo, desta maneira

$$\phi(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t) , \quad (2.33)$$

com $\phi_s(x)$ dado por (2.32). A equação de movimento proveniente da densidade de lagrangiana do campo $\phi(x, t)$ é

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0 . \quad (2.34)$$

Considerando pequenas flutuações em torno da solução estática, temos

$$\left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \eta \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s} - \left. \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_s} = 0 , \quad (2.35)$$

mas os dois últimos termos formam justamente a equação de movimento para a solução estática, vide (1.4), logo

$$\left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \eta \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s} = 0 . \quad (2.36)$$

Para resolver essa equação diferencial, podemos recorrer ao método de separação de variáveis. Deste modo, através do *Ansatz*

$$\eta(x, t) = \sum_n \eta_n(x) \cos(\omega_n t) , \quad (2.37)$$

(2.36) é reescrita como

$$-\frac{d^2 \eta_n}{dx^2} + U(x) \eta_n = \omega_n^2 \eta_n , \quad (2.38)$$

$$\text{com } U(x) = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s}.$$

A última expressão é simplesmente uma equação tipo Schrödinger independente do tempo para a função $\eta_n(x)$, com autovalores dados por ω_n^2 . Para dar continuidade à análise, basta substituirmos o potencial, determinarmos quem é $U(x)$, resolver essa equação de autovalores e descobrir a forma da função $\eta(x, t)$. Contudo, dependendo das características do potencial, essa equação de autovalores pode não ser facilmente solúvel. Ilustraremos apenas a estabilidade para dois casos, um no qual a equação é exatamente solúvel e outro em que a solução foi obtida numericamente. No entanto, tais análises podem ser estendidas para outros defeitos correspondentes a cada um dos novos potenciais gerados.

Analisaremos agora a estabilidade do potencial $V_{\sin}(\phi)$ com a inteiro. Como esta família é composta por potenciais positivos definidos, podemos dizer que

$$V_{\sin}(\phi_s) = \frac{W_{\phi_s}^2}{2}, \quad (2.39)$$

com $W_{\phi_s} = dW/d\phi_s$, consequentemente de (2.4) obtemos $\phi_s' = W_{\phi_s}$, e portanto

$$U = W_{\phi_s\phi_s}^2 + W_{\phi_s} W_{\phi_s\phi_s\phi_s}. \quad (2.40)$$

Substituindo o último resultado na equação de autovalores (2.38), vemos que ela pode ser reescrita em termos dos operadores

$$a^\dagger a = \left(\frac{d}{dx} + W_{\phi_s\phi_s} \right) \left(-\frac{d}{dx} + W_{\phi_s\phi_s} \right), \quad (2.41)$$

como

$$a^\dagger a \eta_n = \omega_n^2 \eta_n. \quad (2.42)$$

Admitindo a existência de estados ligados para o modo zero, ou seja para $\omega_0 = 0$, temos que

$$a \eta_0 = \left(-\frac{d}{dx} + W_{\phi_s\phi_s} \right) \eta_0 = 0, \quad (2.43)$$

que ao ser integrada implica em

$$\eta_0(x) = A e^{\int W_{\phi_s\phi_s} dx}, \quad (2.44)$$

sendo A uma constante de integração. Observando que

$$\frac{d \log(W_{\phi_s})}{dx} = \frac{1}{W_{\phi_s}} W_{\phi_s} W_{\phi_s\phi_s} = W_{\phi_s\phi_s}, \quad (2.45)$$

temos

$$\eta_0(x) = AW_{\phi_s} = A \frac{d\phi_s}{dx} = \frac{\text{sech}(x)}{a} \sin\left(\frac{\arccos[\tanh(x)] + m\pi}{a}\right), \quad (2.46)$$

a menos de uma constante de normalização. A forma dos possíveis $\eta_0(x)$'s será sempre a mesma do gráfico à esquerda da Figura 2.4, onde vemos que a solução com $\omega_0 = 0$ não possui nó, significando que as auto-funções que representam o estado fundamental são aquelas do modo zero, com isto, os defeitos obtidos a partir desses potenciais são estáveis, neste caso, defeitos do tipo *kink*¹.

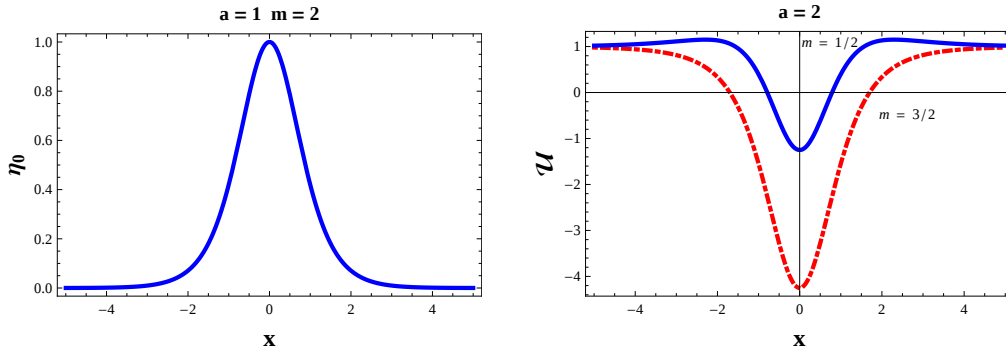


Figura 2.4: Na esquerda, exemplificamos a auto-função obtida no cálculo analítico da estabilidade dos novos potenciais que são positivos definidos. Não há nós nesta função, indicando a estabilidade das soluções estáticas. À direita, verificamos as diferentes características do potencial $U(x)$, apresentado em (2.48).

Para potenciais diferentes daqueles cuja estabilidade foi previamente analisada, recorreremos ao cálculo numérico na tentativa de ao menos ilustrar a estabilidade das soluções de suas equações de movimento. Tomamos como exemplo, o potencial

$$V_{\cos}^2(\phi) = \frac{1}{8} (1 - \phi_s^2) (1 - 2\phi_s^2)^2, \quad (2.47)$$

a partir do qual determinamos que

$$U(x) = -\frac{5}{4} + 12 \cos\left(\frac{\arccos[\tanh(x)] + m\pi}{a}\right)^2 - 15 \cos\left(\frac{\arccos[\tanh(x)] + m\pi}{a}\right)^4, \quad (2.48)$$

onde $\phi_s(x)$ é dado por

$$\phi_s = \cos\left(\frac{\arccos[\tanh(x)] + m\pi}{a}\right).$$

¹Estamos considerando apenas o potencial $V_{\sin}(\phi_s)$ e a inteiro. Além disso, estes potenciais são positivos definidos e unidimensionais, sendo assim, suas equações de movimento não possuem defeitos não-topológicos como soluções.

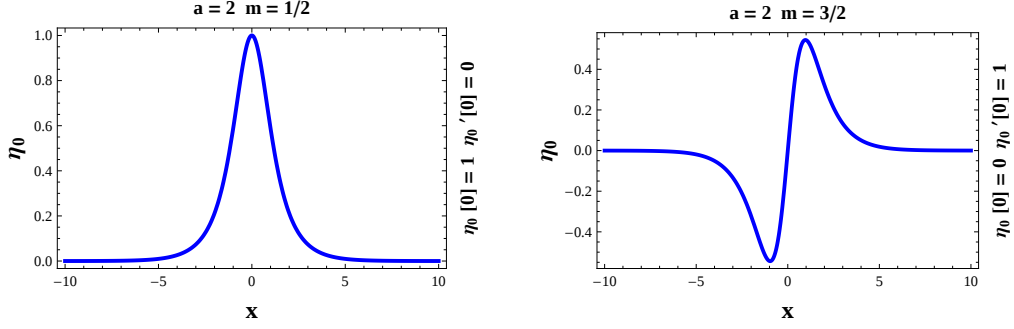


Figura 2.5: O gráfico da esquerda mostra a integração numérica da auto-função relativa à solução estática tipo *kink*, enquanto na direita observamos o comportamento da auto-função correspondente ao defeito tipo *lump*, também calculada via integração numérica. O nó implica na instabilidade do *lump*.

Ao gerar o gráfico para $U(x)$, verificamos que esta função difere para soluções estáticas topológicas ($m = 1/2$) e não-topológicas ($m = 3/2$), Figura 2.4. O resultado da integração numérica da equação de autovalores (2.38), com $U(x)$ dado pela expressão anterior, pode ser visto nos gráficos da Figura 2.5. Nesses últimos, observamos que $\eta_0(x)$ possui um nó, quando analisamos a estabilidade da solução estática tipo *lump* ($m = 3/2$), para o potencial (2.47)². Isso significa, que esta não é a auto-função do estado fundamental, e que o modo zero estaria relacionado a um autovalor $\omega^2 < 0$, resultando na instabilidade do *lump*. Já para o caso do *kink* ($m = 1/2$), a auto-função não possui nós, desta maneira o modo zero representa o estado fundamental indicando que o *kink* desse potencial é estável.

Uma outra maneira de abordar a estabilidade de um potencial com as características daquele apresentado em (2.47), seria reescrevê-lo em termos da derivada de um superpotencial correspondente e aplicar os argumentos discutidos na referência [101]. Os resultados desta seção corroboram com análises de estabilidade linear de defeitos de outros modelos de campos escalares em $(1,1)$ dimensões, como dos modelos ϕ^4 e ϕ^4 invertido.

²O mesmo resultado é obtido para o outro *lump* deste potencial (com $m = 7/2$).

Capítulo 3

Novas Famílias de Potenciais Escalares

3.1 Introdução

Este capítulo aborda uma nova aplicação do método de deformação, onde partimos do bem conhecido modelo ϕ^4 , o qual apresenta quebra espontânea de simetria, no intuito de obter novas famílias de potenciais. Para tanto, utilizaremos novamente o método de deformação, proposto na literatura em [40]. Segundo nossas análises prévias, o método de deformação requer a presença de uma função, conhecida como função de deformação a qual possui um papel fundamental na construção do novo modelo deformado. Aqui nós utilizaremos uma versão da função de deformação chamada de composta, isto porque ela apresenta uma deformação intrínseca. Deste modo, escolhas convenientes da deformação composta nos permite obter novas famílias de modelos, bem como suas soluções analíticas.

O foco da primeira abordagem será nos modelos sine-Gordon, sendo estes de interesse em diversos contextos como aqueles abordados em [102–107]. Além disso, potenciais do tipo duplo, triplo e de outras multi-frequências são temas centrais de estudos em modelos integráveis [108–111], em cenários de mundos-brana [14–23] e em branas com estrutura interna [57–67].

O procedimento é implementado via uma função deformadora específica com diversos parâmetros, cujas alterações nos levam a modelos tipo duplo e triplo sine-Gordon com soluções analíticas. As famílias de potenciais periódicos que introduzimos neste trabalho englobam subestruturas periódicas, a quais identificamos como $\mathcal{M} = 1, 2, \dots$, represen-

tando um número inteiro relativo à multiplicidade do potencial.

Já na segunda parte do presente capítulo, exploramos a função de deformação composta para duas possibilidades distintas de gerar potenciais polinomiais e então estudamos os defeitos deformados em maiores detalhes. Além disso, ilustramos como a função de deformação composta nos permite deformar soluções singulares do modelos de partida em soluções regulares do modelo deformado.

Outro resultado interessante é que todos os potenciais obtidos podem ser escritos de forma fatorada, em termos de fórmulas que imediatamente nos permitem a identificação dos mínimos correspondentes. Analisamos criteriosamente algumas soluções estáticas exóticas, tais como novos tipos de *kinks*, *kinks* duplos, bem como *lumps* tipo *sino* e tipo *pão de açúcar*.

Uma vez que, nosso ponto de partida é o modelo ϕ^4 e ele é descrito por um superpotencial explicitamente conhecido, as expressões dos novos superpotenciais também são calculadas explicitamente, resultando em seus correspondentes estados *BPS* [90,91], bem como, na determinação da sua energia total e análises de estabilidade das soluções dessas famílias de modelos [112].

3.2 Função de Deformação Composta

Neste estudo, seguimos a mesma metodologia básica do capítulo anterior e abordada em detalhes em [97], no entanto, aqui consideramos novas funções $f = f(\phi)$, a partir das quais nós podemos construir diversas famílias de modelos. Assim, tomamos o potencial

$$U(\chi) = \frac{1}{2}(1 - \chi^2)^2,$$

onde a solução tipo defeito deste modelo está fixada na origem ($x_0 = 0$) implicando em duas soluções estáticas, a primeira delas com a propriedade $|\chi| \leq 1$, ou seja, um *kink* regular de energia finita

$$\chi_1(x) = \pm \tanh(x), \quad (3.1)$$

e a segunda para $|\chi| \geq 1$, tratando-se de um *kink* singular de energia infinita

$$\chi_2(x) = \pm \coth(x). \quad (3.2)$$

Este modelo é deformado via a função composta

$$f(\phi) = \cos(a \arccos(g(\phi)) - M\pi). \quad (3.3)$$

Observe que $f(\phi)$ depende de uma função arbitrária $g(\phi)$, do parâmetro real a , e de M que pode ser inteiro ou semi-inteiro, de modo que, para M inteiro, o potencial deformado pode ser escrito como

$$V_{\sin}^a(\phi) = \frac{1}{2a^2} \frac{(1 - g^2(\phi))}{(g'(\phi))^2} \sin^2(a \arccos(g(\phi))) , \quad (3.4)$$

onde $g'(\phi) = dg/d\phi$. Ao trabalharmos com M semi-inteiro, ficamos com

$$V_{\cos}^a(\phi) = \frac{1}{2a^2} \frac{(1 - g^2(\phi))}{(g'(\phi))^2} \cos^2(a \arccos(g(\phi))) . \quad (3.5)$$

Como mostramos logo abaixo, ao utilizarmos diferentes valores para o parâmetro a , fixamos um determinado número de vácuos das novas famílias de potenciais.

A escolha (3.3) trata-se de uma generalização da função de deformação previamente abordada em [97], uma vez que, o trabalho citado baseou-se no caso especial $g(\phi) = \phi$. Constatamos ainda, que os modelos acima identificam famílias de potenciais que apresentam soluções estáticas dadas pela forma geral

$$\phi_S(x) = g^{-1} \left(\cos \left(\frac{\eta(x) + M \pi}{a} \right) \right) , \quad (3.6)$$

onde g^{-1} é a função inversa de $g(\phi)$, e $\eta(x)$ pode ser tanto

$$\theta_1(x) = \arccos(\tanh(x)) , \quad (3.7a)$$

quanto

$$\theta_2(x) = \arccos(\coth(x)) , \quad (3.7b)$$

com θ_1 , além de $\theta_2 \in [0, \pi]$.

3.3 Famílias de Modelos para $g(\phi) = \alpha \cos \phi$

Iniciamos nossa abordagem considerando $g(\phi)$ como uma função periódica do campo escalar, e este será o procedimento responsável pela geração de novas famílias de potenciais periódicos ou novas famílias de potenciais sine-Gordon generalizados. Os diversos potenciais obtidos compreendem novas famílias de modelos analiticamente solúveis e neste sentido, nosso trabalho vem a contribuir com o próprio fortalecimento do método de deformação, introduzido em [40].

Sendo assim, escolhemos a função $g(\phi) = \cos \phi$, e a partir de (3.4) e (3.5) obtemos

$$V_{\sin}^a = \frac{1}{2a^2} \sin^2(a \phi) , \quad (3.8)$$

e

$$V_{\cos}^a = \frac{1}{2a^2} \cos^2(a\phi), \quad (3.9)$$

tratando-se dos modelos sine-Gordon com multiplicidade $\mathcal{M} = 1$, onde o parâmetro a é o responsável por controlar a amplitude e a periodicidade do potencial. Consequentemente, podemos gerar novos potenciais sine-Gordon com multiplicidade mais alta, ao utilizarmos $g(\phi) = \alpha \cos \phi$, onde α é um parâmetro cuja escolha é tomada caso por caso. Tais características serão evidenciadas nas sub-seções procedentes.

3.3.1 Nova família de modelos *seno*

Nesta próxima abordagem, consideramos que $g(\phi) = \tilde{Z}_k^a \cos \phi$, onde a é inteiro e $\tilde{Z}_k^a$ é um dos zeros dos potenciais (2.27) e (2.28), exceto por $\phi = 0$ e $\phi = 1$. Neste caso, ficamos com $\tilde{Z}_k^a = \cos\left(\frac{k}{a}\pi\right)$ onde $k = 1, 2, \dots, \frac{a}{2} - 1$, para a par, além de $k = 1, 2, \dots, \frac{a-1}{2}$ para a ímpar.

A forma polinomial de $V_{\sin}^a$ com seus zeros, para $g(\phi) = \phi$, como vimos, é bem conhecida. Assim, ao trabalharmos com a deformação $g(\phi) = \tilde{Z}_k^a \cos \phi$, as equações (2.27) e (2.28) implicam diretamente em

$$V_{\sin}^{a,k}(\phi) = \frac{1}{2a^2} \frac{1}{\tilde{Z}_k^{a^2} \sin^2 \phi} \prod_{j=1}^{(a+1)/2} \left(1 - \frac{\tilde{Z}_k^{a^2}}{\tilde{Z}_j^{a^2}} \cos^2 \phi\right)^2, \quad (3.10)$$

e

$$V_{\sin}^{a,k}(\phi) = \frac{\cot^2 \phi}{2} \prod_{j=1}^{a/2} \left(1 - \frac{\tilde{Z}_k^{a^2}}{\tilde{Z}_j^{a^2}} \cos^2 \phi\right)^2, \quad (3.11)$$

para valores ímpares e pares de a respectivamente, nos levando a

- para $a > 1$ ímpar:

$$V_{\sin}^{a,k}(\phi) = \frac{1}{2a^2 \tilde{Z}_k^{a^2}} \sin^2(\phi) \prod_{j=1, j \neq k+1}^{(a+1)/2} \left(1 - \frac{\tilde{Z}_k^{a^2}}{\tilde{Z}_j^{a^2}} \cos^2 \phi\right)^2, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{a-1}{2}, \quad (3.12)$$

- para $a > 2$ par:

$$V_{\sin}^{a,k}(\phi) = \frac{1}{8} \sin^2(2\phi) \prod_{j=1, j \neq k+1}^{a/2} \left(1 - \frac{\tilde{Z}_k^{a^2}}{\tilde{Z}_j^{a^2}} \cos^2 \phi\right)^2, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{a}{2} - 1, \quad (3.13)$$

onde $\tilde{Z}_j^a = \cos\left(\frac{j-1}{a}\pi\right)$. Observamos ainda, que o potencial $V_{\sin}^{a,k}(\phi)$ pode ser reescrito de forma compacta em termos dos polinômios de Chebyshev de segundo tipo:

$$V_{\sin}^{a,k}(\phi) = \frac{1}{2a^2 \tilde{Z}_k^{a^2}} \frac{\left(1 - \tilde{Z}_k^{a^2} \cos^2 \phi\right)^2}{\sin^2 \phi} U_{a-1}^2\left(\tilde{Z}_k^a \cos \phi\right). \quad (3.14)$$

Algumas formas explícitas dos membros da família $V_{\sin}^{a,k}(\phi)$, para $a = 3, 4$, e 5 são dados por

$$V_{\sin}^{3,1}(\phi) = \frac{2}{9} \sin^2(\phi) \left(1 - \frac{1}{4} \cos^2(\phi)\right)^2 = \frac{25}{128} \left(\sin(\phi) - \frac{1}{15} \sin(3\phi)\right)^2, \quad (3.15)$$

$$V_{\sin}^{4,1}(\phi) = \frac{1}{8} \sin^2(2\phi) \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2(\phi)\right)^2 = \frac{9}{128} \left(\sin(2\phi) - \frac{1}{6} \sin(4\phi)\right)^2, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} V_{\sin}^{5,1}(\phi) &= \frac{8 \sin^2(\phi)}{25 (1 + \sqrt{5})^2} \left(1 - \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{16} \cos^2(\phi)\right)^2 \left(1 - \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{(1 - \sqrt{5})^2} \cos^2(\phi)\right)^2 \\ &= \frac{(483 - 209\sqrt{5})}{5120} \left(\sin(\phi) - \frac{7(5 + \sqrt{5})}{2(75 - 37\sqrt{5})} \sin(3\phi) + \frac{(7 + 3\sqrt{5})}{2(75 - 37\sqrt{5})} \sin(5\phi)\right)^2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} V_{\sin}^{5,2}(\phi) &= \frac{8 \sin^2(\phi)}{25 (1 - \sqrt{5})^2} \left(1 - \frac{(1 - \sqrt{5})^2}{16} \cos^2(\phi)\right)^2 \left(1 - \frac{(1 - \sqrt{5})^2}{(1 + \sqrt{5})^2} \cos^2(\phi)\right)^2 \\ &= \frac{(483 + 209\sqrt{5})}{5120} \left(\sin(\phi) - \frac{7(5 + \sqrt{5})}{2(205 + 93\sqrt{5})} \sin(3\phi) + \frac{(3 - \sqrt{5})}{2(205 + 93\sqrt{5})} \sin(5\phi)\right)^2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

ilustrando esta nova família de modelos.

Notamos diretamente a diversidade de modelos sine-Gordon presente neste primeiro exemplo relativo a potenciais periódicos, incluindo variações no modelo sine-Gordon, no duplo sine-Gordon, no triplo sine-Gordon, e assim por diante. Ilustramos estes modelos nas Figuras 3.1 e 3.2, onde encontram-se os potenciais $V_{\sin}^{5,1}$, $V_{\sin}^{6,1}$, $V_{\sin}^{7,1}$ e $V_{\sin}^{8,1}$.

Soluções estáticas

Uma vantagem relevante em utilizar o método de deformação é que podemos obter as estruturas de defeitos dos novos modelos explicitamente. A partir da equação (3.6) e da escolha $g(\phi) = \tilde{Z}_k^a \cos \phi$, podemos verificar diretamente que as soluções estáticas dos potenciais $V_{\sin}^{a,k}(\phi)$, são escritas segundo

$$\phi_{m,n}^{a,k}(x) = \pm \arccos \left(\frac{1}{\tilde{Z}_k^a} \cos \left(\frac{\theta_1(x)}{a} + \frac{M \pi}{a} \right) \right) + n \pi, \quad (3.19)$$

onde $\theta_1(x) = \arccos(\tanh(x))$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, e M é um número inteiro variando de: $M = k, \dots, a - k - 1$.

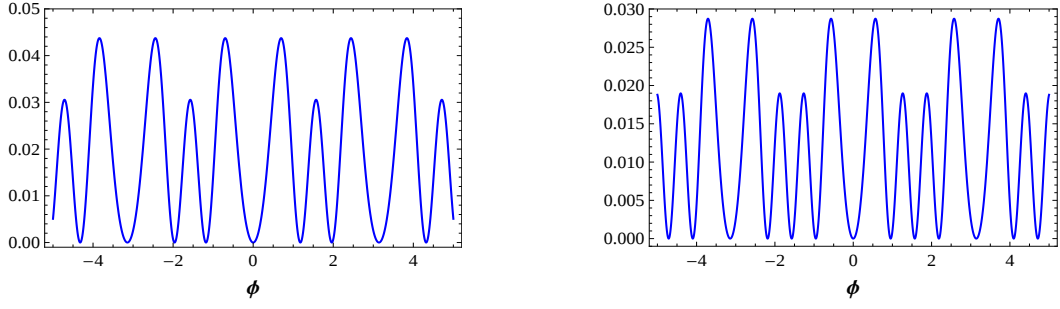


Figura 3.1: Gráficos dos potenciais $V_{\sin}^{5,1}(\phi)$, no painel esquerdo, e $V_{\sin}^{6,1}(\phi)$, no painel direito. Esses potenciais possuem multiplicidade $\mathcal{M} = 2$, resultando em membros que pertencem à família duplo sine-Gordon.

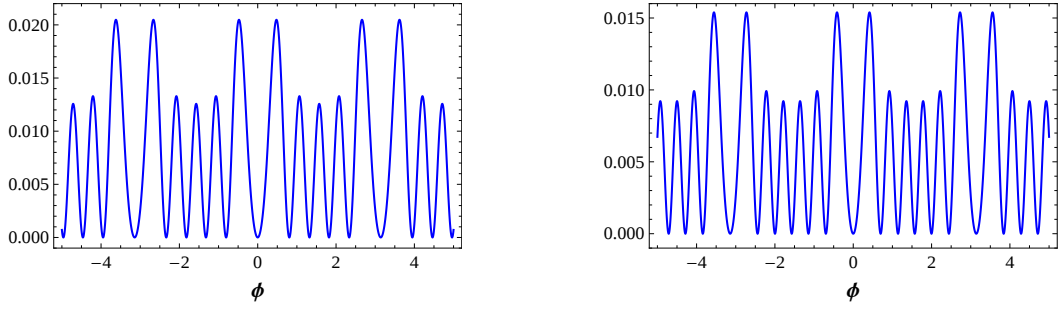


Figura 3.2: Potenciais $V_{\sin}^{7,1}(\phi)$, à esquerda desta figura, e $V_{\sin}^{8,1}(\phi)$, à direita. Tais potenciais possuem multiplicidade $\mathcal{M} = 3$, caracterizando-os como membros da família triplo sine-Gordon.

Máximos e mínimos

Os máximos e mínimos do potencial aparecem quando tomamos a derivada destes potenciais com respeito ao campo $\phi(x)$ tendendo a zero. Se o potencial é não negativo, então os mínimos correspondem aos zeros obtidos a partir de $V_{\sin}^{a,k} = 0$. Estas informações nos auxiliaram muito a caracterizar as propriedades dos potenciais $V_{\sin}^{a,k}$. Assim, ao considerarmos o caso a ímpar, obtemos os mínimos

$$\bar{\phi}_1 = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.20)$$

e

$$\bar{\phi}_2 = \pm \arccos(\pm Z_{j,k}) + 2M\pi, \quad j, k = 1, \dots, \frac{a+1}{2}, j \neq k, \quad M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.21)$$

onde $Z_{j,k} = Z_j^a / \tilde{Z}_k^a$. Já os máximos são tais que

$$\tilde{\phi}_1 = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.22)$$

e $\tilde{\phi}_2$, que obedece a relação

$$1 + \sum_{j=1, j \neq k}^{(a+1)/2} \frac{2Z_{k,j}^2 \sin^2(\tilde{\phi}_2)}{1 - Z_{k,j}^2 \cos^2(\tilde{\phi}_2)} = 0. \quad (3.23)$$

Nossas análises relativas à (3.22) nos permitem estipular que os máximos possuem altura dada por $h = 1/2a^2 \tilde{Z}_k^{a^2}$ e as alturas dos outros máximos, provenientes da equação (3.23), podem ser calculadas numericamente.

No caso de valores pares de a , os mínimos desta família são tais que

$$\bar{\phi}_1 = n\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (3.24)$$

$$\bar{\phi}_2 = \pm \arccos(\pm Z_{j,k}) + 2M\pi, \quad j = 1, \dots, \frac{a}{2}, j \neq k+1, \quad M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.25)$$

com $Z_{j,k} = Z_j^a / \tilde{Z}_k^a$. Já os máximos representados pela notação $\tilde{\phi}$, devem satisfazer

$$\cos(2\tilde{\phi}) + \frac{\sin^2(2\tilde{\phi})}{2} \sum_{j=1, j \neq k}^{a/2} \frac{Z_{k,j}^2}{1 - Z_{k,j}^2 \cos^2(\tilde{\phi})} = 0, \quad (3.26)$$

onde $Z_{k,j} = \tilde{Z}_k^a / Z_j^a$, a qual também podemos resolver numericamente. Na tabela abaixo mostramos alguns exemplos de valores de alturas para diferentes escolhas dos parâmetros a e k . Uma vez que, nossos máximos são periódicos, consideramos somente os seus valores positivos mais próximos de zero, representando assim as diferentes famílias de máximos.

a	3	4	5	5	6	6	7	7	7
k	1	1	1	2	1	2	1	2	3
max_1	1.571	0.928	0.699	1.571	0.567	0.936	0.479	0.723	1.571
h_1	0.223	0.078	0.044	0.210	0.029	0.074	0.021	0.044	0.206
max_2	-	2.214	1.571	-	1.264	2.205	1.065	1.571	-
h_2	-	0.078	0.031	-	0.019	0.074	0.013	0.026	-
max_3	-	-	2.443	-	1.878	-	1.571	2.419	-
h_3	-	-	0.044	-	0.019	-	0.012	0.044	-
max_4	-	-	-	-	2.575	-	2.077	-	-
h_4	-	-	-	-	0.029	-	0.013	-	-
max_5	-	-	-	-	-	-	2.663	-	-
h_5	-	-	-	-	-	-	0.021	-	-

3.3.2 Nova família de modelos *coseno*

Trabalharemos agora com a deformação $g(\phi) = \tilde{Z}_k^a \cos \phi$, onde a é um número inteiro e $\tilde{Z}_k^a$ trata-se de um dos zeros dos potenciais (2.29) e (2.30), exceto por $\phi = 0$ e $\phi = 1$. Nesse caso da família *coseno*, nós temos $\tilde{Z}_k^a = \cos\left(\frac{2k-1}{2a}\pi\right)$, com $k = 1, \dots, \frac{a}{2}$, para a par e $k = 1, 2, \dots, \frac{a-1}{2}$, para a ímpar.

A forma polinomial de $V_{\cos}^a$, com seus zeros para $g(\phi) = \phi$, já foi discutida em maiores detalhes no capítulo anterior e na referência [97]. Assim, a escolha $g(\phi) = \tilde{Z}_k^a \cos \phi$ resulta em reescrevermos (2.29) e (2.30) como

- para $a > 1$ ímpar:

$$V_{\cos}^{a,k}(\phi) = \frac{1}{8} \sin^2(2\phi) \left(1 - \tilde{Z}_k^{a^2} \cos^2 \phi\right) \prod_{j=1, j \neq k}^{\frac{a-1}{2}} \left(1 - \frac{\tilde{Z}_k^{a^2}}{\tilde{Z}_j^{a^2}} \cos^2 \phi\right)^2, \quad k = 1, \dots, \frac{a-1}{2}, \quad (3.27)$$

- para a par:

$$V_{\cos}^{a,k}(\phi) = \frac{1}{2a^2 \tilde{Z}_k^{a^2}} \sin^2(\phi) \left(1 - \tilde{Z}_k^{a^2} \cos^2 \phi\right) \prod_{j=1, j \neq k}^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{\tilde{Z}_k^{a^2}}{\tilde{Z}_j^{a^2}} \cos^2 \phi\right)^2, \quad k = 1, \dots, \frac{a}{2}, \quad (3.28)$$

onde $\tilde{Z}_j^a = \cos\left(\frac{2j-1}{2a}\pi\right)$. Os potenciais $V_{\cos}^{a,k}(\phi)$ também podem ser escritos de forma compacta via os polinômios de Chebyshev de primeiro tipo, de modo que

$$V_{\cos}^{a,k}(\phi) = \frac{1}{2a^2 \tilde{Z}_k^{a^2}} \frac{\left(1 - \tilde{Z}_k^{a^2} \cos^2 \phi\right)}{\sin^2 \phi} T_a^2\left(\tilde{Z}_k^a \cos \phi\right). \quad (3.29)$$

As formas explícitas de $V_{\cos}^{a,k}(\phi)$, para $a = 4$ e 5 ambos com $k = 1$ são

$$\begin{aligned} V_{\cos}^{4,1}(\phi) &= \frac{1}{8} \frac{\sin^2(\phi)}{(2 + \sqrt{2})} \left(1 - \frac{(2 + \sqrt{2})}{4} \cos^2(\phi)\right) \left(1 - \frac{(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})} \cos^2(\phi)\right)^2 \\ &= \frac{(235 - 108\sqrt{2})}{4096} \left[1 - \frac{(744 - 524\sqrt{2})}{(686 - 451\sqrt{2})} \cos(2\phi) + \frac{(72 - 68\sqrt{2})}{(686 - 451\sqrt{2})} \cos(4\phi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(24 + 12\sqrt{2})}{(686 - 451\sqrt{2})} \cos(6\phi) + \frac{(10 + 7\sqrt{2})}{(686 - 451\sqrt{2})} \cos(8\phi) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{\cos}^{5,1}(\phi) &= \frac{1}{8} \sin^2(2\phi) \left(1 - \frac{(5 + \sqrt{5})}{8} \cos^2(\phi) \right) \left(1 - \frac{(5 + \sqrt{5})}{(5 - \sqrt{5})} \cos^2(\phi) \right)^2 \\
&= \frac{(97 - 21\sqrt{5})}{4096} \left[1 - \frac{(46 - 22\sqrt{5})}{(194 - 42\sqrt{5})} \cos(2\phi) - \frac{(152 - 56\sqrt{5})}{(194 - 42\sqrt{5})} \cos(4\phi) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(21 - 33\sqrt{5})}{(194 - 42\sqrt{5})} \cos(6\phi) - \frac{(42 + 14\sqrt{5})}{(194 - 42\sqrt{5})} \cos(8\phi) + \frac{(25 + 11\sqrt{5})}{(194 - 42\sqrt{5})} \cos(10\phi) \right],
\end{aligned}$$

ilustrando esta nova família de modelos. Aqui, podemos notar que, temos novas variações de modelos sine-Gordon, compreendendo novos sine-Gordon, duplos sine-Gordon, triplos sine-Gordon, e assim por diante. A fim de evidenciar estas características, geramos os potenciais presentes na Figura 3.3, a qual contém $V_{\cos}^{4,1}$ e $V_{\cos}^{5,1}$, além daqueles da Figura 3.4, onde podemos observar $V_{\cos}^{6,1}$ e $V_{\cos}^{7,1}$.

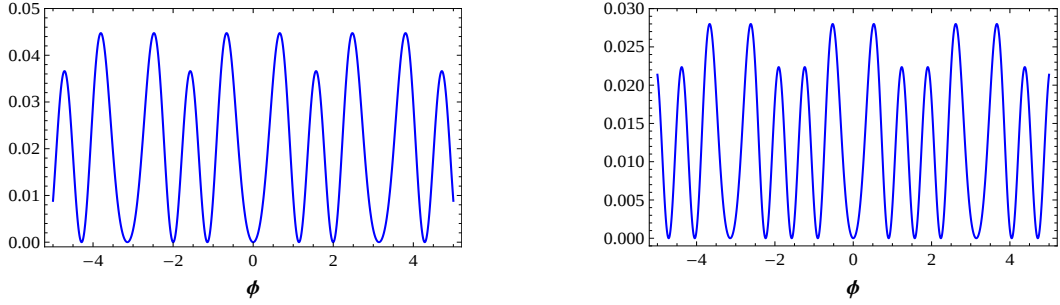


Figura 3.3: Gráficos dos potenciais $V_{\cos}^{4,1}(\phi)$, no painel esquerdo, e $V_{\cos}^{5,1}(\phi)$, no painel direito. Estes potenciais possuem multiplicidade $\mathcal{M} = 2$, indicando que eles fazem parte da família duplo sine-Gordon.

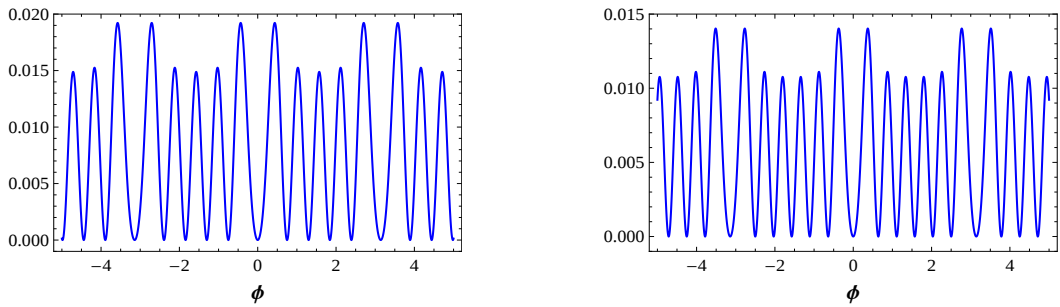


Figura 3.4: Potenciais $V_{\cos}^{6,1}(\phi)$, à esquerda da Figura, e $V_{\cos}^{7,1}(\phi)$, à direita. Estes potenciais possuem multiplicidade $\mathcal{M} = 3$, implicando que eles são membros da família triplo sine-Gordon.

Soluções estáticas

Para determinar os defeitos estáticos vinculados aos potenciais $V_{\cos}^{a,k}(\phi)$, devemos partir da expressão (3.6) e também de $g(\phi) = \tilde{Z}_k^a \cos \phi$. Desta maneira, temos

$$\phi_{m,n}^{a,k}(x) = \pm \arccos \left(\frac{1}{\tilde{Z}_k^a} \cos \left(\frac{\theta_1(x)}{a} + \frac{(2M-1)\pi}{2a} \right) \right) + n\pi, \quad (3.30)$$

onde $\theta_1(x) = \arccos(\tanh(x))$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, e M é um número inteiro cuja variação é $M = k, \dots, a - k$.

Máximos e mínimos

Novamente, como no caso da família *seno*, os potenciais acima são positivos definidos. Consequentemente, seus mínimos são calculados considerando $V_{\cos}^{a,k} = 0$, e a partir da derivada do potencial, excluindo os mínimos, nós obtemos os valores de seus máximos. Logo, para a ímpar, os mínimos são dados por

$$\bar{\phi}_1 = \frac{n\pi}{2}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.31)$$

e

$$\bar{\phi}_2 = \pm \arccos(\pm Z_{j,k}) + 2M\pi, \quad j, k = 1, \dots, \frac{a-1}{2}, j \neq k, \quad M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.32)$$

onde $Z_{j,k} = Z_j^a / \tilde{Z}_k^a$. Já os máximos dos nossos potenciais obedecem a relação

$$4 \cos(2\tilde{\phi}) \left(1 - Z_k^{a2} \cos^2(\tilde{\phi}) \right) + Z_k^{a2} \sin^2(2\tilde{\phi}) + 2 \sin^2(2\tilde{\phi}) \left(1 - Z_k^{a2} \cos^2(\tilde{\phi}) \right) \sum_{j=1, j \neq k}^{(a-1)/2} \frac{Z_{k,j}^2}{1 - Z_{k,j}^2 \cos^2(\tilde{\phi})} = 0, \quad (3.33)$$

com $Z_{k,j} = \tilde{Z}_k^a / Z_j^a$, que pode ser resolvida numericamente caso a caso, analogamente as análises da família *seno*. Ao trabalharmos com valores pares de a , os mínimos obedecem as relações

$$\bar{\phi}_1 = n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.34)$$

e

$$\bar{\phi}_2 = \pm \arccos(\pm Z_{j,k}) + 2M\pi, \quad j, k = 1, \dots, \frac{a}{2}, j \neq k, \quad M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.35)$$

para $Z_{j,k} = Z_j^a / \tilde{Z}_k^a$. Os máximos por sua vez, satisfazem

$$\tilde{\phi}_1 = \frac{(2M+1)\pi}{2} \quad M = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (3.36)$$

e para $a > 2$ também temos $\tilde{\phi}_2$, o qual obtemos a partir de

$$Z_k^{a^2} \sin^2(\tilde{\phi}_2) + \left(1 - Z_k^{a^2} \cos^2(\tilde{\phi}_2)\right) \left[1 + 2 \sin^2(\tilde{\phi}_2) \sum_{j=1, j \neq k}^{a/2} \frac{Z_{k,j}^2}{1 - Z_{k,j}^2 \cos^2(\tilde{\phi}_2)}\right] = 0, \quad (3.37)$$

com $Z_{k,j} = \tilde{Z}_k^a / Z_j^a$. Os máximos de (3.36) possuem altura $h = 1/2 a^2 \tilde{Z}_k^{a^2}$, enquanto as alturas daqueles provenientes de (3.37) podem ser calculadas numericamente.

3.3.3 Multiplicidade

O potencial do modelo sine-Gordon possui um número infinito de setores topológicos e cada um destes setores é descrito pela mesma solução tipo *kink*. Assim, ao definirmos que $\mathcal{M}$ denota a multiplicidade do *kink*, então o modelo sine-Gordon tradicional é caracterizado por um *kink* de multiplicidade $\mathcal{M} = 1$. Já um potencial do tipo duplo sine-Gordon, possui dois setores topológicos distintos, que também repetem-se indefinidamente, e portanto, está relacionado com defeitos tipo *kink* de multiplicidade $\mathcal{M} = 2$. Consequentemente, um potencial triplo sine-Gordon possui defeitos do tipo *kink* com multiplicidade $\mathcal{M} = 3$ e assim por diante. As diferentes multiplicidades dos potenciais estudados nas seções anteriores são dependentes do parâmetro a , uma vez que, a variação de k depende do valor de a . Essas multiplicidades estão descritas de forma compacta na tabela abaixo

Família	a ímpar	a par
$V_{\sin}^{a,k}$	$\mathcal{M}_k^a = \frac{a+1}{2} - k$	$\mathcal{M}_k^a = \frac{a}{2} - k$
$V_{\cos}^{a,k}$	$\mathcal{M}_k^a = \frac{a+1}{2} - k$	$\mathcal{M}_k^a = \frac{a+2}{2} - k$

Uma outra característica interessante no que compete à multiplicidade, é que quanto maior é o valor de a e quanto menor for o valor de k , maior é a multiplicidade dos modelos.

3.4 Superpotenciais e Energias dos multi sine-Gordon

Alguns sistemas físicos permitem a derivação explícita dos superpotenciais. Seja W uma função do campo escalar ϕ , sua relação com o potencial de nossa teoria é tal que

$$V = \frac{1}{2} W_\phi^2. \quad (3.38)$$

Agora, a partir do procedimento de deformação, nós podemos escrever que se $\mathcal{W}(\chi)$ é o nosso superpotencial de partida, então o superpotencial do modelo deformado, $W(\phi)$

deve obedecer

$$\frac{dW}{d\phi} = \frac{1}{f_\phi} \frac{d\mathcal{W}}{d\chi} (\chi \rightarrow f(\phi)). \quad (3.39)$$

No caso do modelo χ^4 , previamente utilizado para a implementar o método de deformação, nós temos

$$\frac{d\mathcal{W}}{d\chi} = 1 - \chi^2, \quad (3.40)$$

o qual pode ser utilizado para determinar os superpotenciais dos modelos deformados.

As expressões para os superpotenciais são de grande utilidade, isto porque, podemos utilizá-las para obter a energia das estruturas de defeitos correspondentes, já que sabemos que a energia do defeito topológico $\chi(x)$, com o potencial descrito em termos do superpotencial $\mathcal{W}(\chi)$ é

$$E = |\mathcal{W}(\chi(+\infty)) - \mathcal{W}(\chi(-\infty))|, \quad (3.41)$$

onde $\chi(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \chi(x)$ e $\chi(x)$ é uma solução estática do tipo *kink*.

Alternativamente, o superpotencial pode ser obtido diretamente da integração de (3.38), o que nos leva à

$$W(\phi) = \pm \int d\phi \sqrt{2V(\phi)}, \quad (3.42)$$

contudo, tal integral nem sempre implica em uma forma explícita de W . Porém, este não é o caso dessas famílias de potenciais sine-Gordon que obtivemos. Logo, as formas explícitas de superpotenciais da família *seno* com $a = 3, 4, 5$, e 6 são

$$W_{\sin}^{3,1}(\phi) = \frac{5}{8} \cos(\phi) - \frac{1}{72} \cos(3\phi), \quad (3.43)$$

$$W_{\sin}^{4,1}(\phi) = \frac{3}{16} \cos(2\phi) - \frac{1}{64} \cos(4\phi), \quad (3.44)$$

$$W_{\sin}^{5,1}(\phi) = \frac{(75 - 37\sqrt{5})}{80(1 - \sqrt{5})} \cos(\phi) - \frac{7(5 + \sqrt{5})}{480(1 - \sqrt{5})} \cos(3\phi) + \frac{(7 + 3\sqrt{5})}{800(1 - \sqrt{5})} \cos(5\phi), \quad (3.45)$$

$$W_{\sin}^{5,2}(\phi) = \frac{1}{160} (55 + 19\sqrt{5}) \left[\cos(\phi) - \frac{7}{6} \frac{(5 + \sqrt{5})}{(205 + 93\sqrt{5})} \cos(3\phi) + \frac{1}{10} \frac{(3 - \sqrt{5})}{(205 + 93\sqrt{5})} \cos(5\phi) \right], \quad (3.46)$$

$$W_{\sin}^{6,1}(\phi) = \frac{3}{64} + \frac{11}{256} \cos(2\phi) + \frac{3}{64} \cos(4\phi) - \frac{3}{256} \cos(6\phi), \quad (3.47)$$

$$W_{\sin}^{6,2}(\phi) = \frac{1}{64} - \frac{47}{256} \cos(2\phi) + \frac{1}{64} \cos(4\phi) - \frac{1}{2304} \cos(6\phi). \quad (3.48)$$

Já no caso da família *coseno* as formas explícitas do superpotencial para $a = 4$ e diferentes valores do parâmetro k são

$$W_{\cos}^{4,1}(\phi) = \frac{1}{64} (\sqrt{2} - 1) \left[16 \operatorname{arccsc} \left(\frac{2 \sec(\phi)}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \right) - \cos(\phi) \sqrt{5 + 2\sqrt{2} - (2\sqrt{2} + 3) \cos(2\phi)} \times (5\sqrt{2} - (4 + 3\sqrt{2}) \cos(2\phi)) \right], \quad (3.49)$$

$$W_{\cos}^{4,2}(\phi) = \frac{1}{64} (\sqrt{2} + 1) \left[16 \operatorname{arccsc} \left(\frac{2 \sec(\phi)}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \right) + \cos(\phi) \sqrt{5 - 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} - 3) \cos(2\phi)} \times (5\sqrt{2} + (4 - 3\sqrt{2}) \cos(2\phi)) \right]. \quad (3.50)$$

As expressões acima nos possibilitam obter as energias *BPS* correspondentes para cada setor topológico distinto. Deste modo, nossas análises finais consistem em calcular explicitamente algumas energias. Começamos nossas discussões com a família de modelos *seno*, considerando o potencial $V_{\sin}^{3,1}$, cuja multiplicidade é $\mathcal{M} = 1$, implicando em uma única solução topológica com energia $E = 1.222$.

O potencial $V_{\sin}^{4,1}$ também possui multiplicidade $\mathcal{M} = 1$ e seu *kink* tem energia $E = 0.375$. A situação muda quando consideramos potenciais como, por exemplo, $V_{\sin}^{5,1}$ cuja multiplicidade é $\mathcal{M} = 2$, vide Figura 3.1, significando que ele possui dois *kinks* distintos, sendo um para cada setor topológico. Esses defeitos foram rotulados como *kink* grande e *kink* pequeno. Tais rótulos referem-se à altura dos máximos do potencial nos diferentes setores. Assim, as energias desses dois defeitos são $E_g = 0.211$ e $E_p = 0.123$.

Um outro potencial que também possui multiplicidade $\mathcal{M} = 2$ é $V_{\sin}^{6,1}$, cujo gráfico também encontra-se na Figura 3.1. As energias correspondentes aos dois defeitos topológicos deste duplo sine-Gordon são $E_g = 0.139$ e $E_p = 0.076$. Como uma última análise referente à família *seno*, consideramos $V_{\sin}^{7,1}$, o qual pode ser observado em detalhes na Figura 3.2. A multiplicidade desse potencial é $\mathcal{M} = 3$ e as energias dos defeitos tipo *kink* são $E_g = 0.099$, $E_m = 0.053$ e $E_p = 0.050$, onde os rótulos representam *kinks* grande, médio e pequeno, respectivamente.

Vejamos agora as energias *BPS* para os potenciais da família *coseno*. O potencial $V_{\cos}^{2,1}$ possui multiplicidade $\mathcal{M} = 1$ e a energia de seu defeito é $E = 1.285$. Um outro potencial também com multiplicidade $\mathcal{M} = 1$ é $V_{\cos}^{3,1}$, apresentando um *kink* de energia $E = 0.610$. Analisamos também dois exemplos de potenciais com multiplicidade $\mathcal{M} = 2$, dados por

$V_{\cos}^{4,1}$ e $V_{\cos}^{5,1}$, cujas respectivas energias de seus defeitos são $E_g = 0.206$, $E_p = 0.147$, $E_g = 0.129$ e $E_p = 0.090$, respectivamente. Já o potencial $V_{\cos}^{6,1}$ é o primeiro membro com multiplicidade $\mathcal{M} = 3$, para o qual as energias de cada um dos diferentes *kinks* são $E_g = 0.088$, $E_m = 0.061$ e $E_p = 0.059$.

3.5 Famílias de Modelos para $g(\phi) = \phi^r$

Esta seção compreende o estudo da família de modelos proveniente da escolha $g(\phi) = \phi^r$, onde $r = n/m$ é um número racional e positivo, ou seja, a razão de dois números naturais diferentes de zero, ou matematicamente $n, m \in \mathbb{N}^*$. A partir da solução geral (3.6), os defeitos estáticos dos potenciais $V_{\sin}^a(\phi)$ e $V_{\cos}^a(\phi)$ são escritos como

$$\phi_S^k(x) = s(r) \cos^{1/r} \left(\frac{\eta(x) + M \pi}{a} \right), \quad (3.51)$$

onde $M = k - 1$ para a família *seno* ou $M = (2k - 1)/2$ para a família *coseno* com o parâmetro k sendo um número natural positivo. Devemos salientar, que apenas alguns poucos valores de k produzem diferentes soluções estáticas e tais valores também dependem da escolha do parâmetro a . O símbolo $s(r)$ em (3.51) possui a seguinte definição: se $r = \frac{2p}{2q-1}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $s(r)$ consiste em tomar o sinal $\pm$ e o módulo antes de extrair a raiz ímpar na equação (3.51):

$$\phi_S^k(x) = \pm \left| \cos^{2q-1} \left(\frac{\eta(x) + M \pi}{a} \right) \right|^{\frac{1}{2p}}. \quad (3.52)$$

Para qualquer outro valor de r o símbolo é simplesmente igual à unidade, ou seja, $s(r) = 1$. Isto ocorre, porque existem duas raízes reais para potências pares e apenas uma raiz real para potências ímpares. Uma vez que, r é positivo, a função de deformação $\chi = g(\phi) = \phi^r$ mapeia a variação do campo $|\chi| \leq 1$ em $|\phi| \leq 1$, além disso, todos os zeros do potencial deformado ficam confinados no intervalo $-1 \leq \phi \leq 1$. Desta maneira, para obter soluções estáticas com energia finita, devemos trabalhar com o *kink* regular $\eta(x) = \theta_1(x)$, mencionado na equação (3.7a).

Uma característica geral dos modelos gerados pela deformação (3.3) com $g(\phi) = \phi^r$, é que o número de soluções estáticas topológicas e não-topológicas é determinado somente pelo parâmetro a . Observamos ainda, que os potenciais podem ser escritos na forma polinomial para a inteiro ou semi-inteiro, como mostraremos nas próximas subseções.

3.5.1 Modelos da família *seno* para valores inteiros de a

Investigamos a família de modelos dada por $V_{\sin}^{a,r}$, especificando que o parâmetro a é um número inteiro. A forma polinomial de $V_{\sin}^{a,1}$, com seus zeros (e multiplicidades) é conhecida, e assim, realizando a deformação $g(\phi) = \phi^r$ ficamos com

- para a ímpar:

$$V_{\sin}^{a,r}(\phi) = \frac{1}{2a^2r^2} \phi^{2-2r} \prod_{j=1}^{(a+1)/2} \left(1 - \frac{\phi^{2r}}{Z_j^{a^2}}\right)^2, \quad (3.53)$$

- para a par:

$$V_{\sin}^{a,r}(\phi) = \frac{1}{2r^2} \phi^2 \prod_{j=1}^{a/2} \left(1 - \frac{\phi^{2r}}{Z_j^{a^2}}\right)^2, \quad (3.54)$$

onde $Z_j^a = \cos\left(\frac{j-1}{a}\pi\right)$ com as restrições que o potencial deve ser real e não singular. Assim sendo, caso a seja ímpar consideramos somente $r \leq 1$. O potencial *seno* $V_{\sin}^{a,r}(\phi)$ pode ser escrito em termos dos polinômios de Chebyshev de segundo tipo na variável ϕ^r :

$$V_{\sin}^{a,r}(\phi) = \frac{1}{2a^2r^2} \phi^{2-2r} (1 - \phi^{2r})^2 U_{a-1}^2(\phi^r). \quad (3.55)$$

As formas explícitas de $V_{\sin}^{a,r}(\phi)$, para $a = 1, 2, 3, 4$ são dadas por

$$V_{\sin}^{1,r}(\phi) = \frac{1}{2r^2} \phi^{2-2r} (1 - \phi^{2r})^2, \quad (3.56)$$

$$V_{\sin}^{2,r}(\phi) = \frac{1}{2r^2} \phi^2 (1 - \phi^{2r})^2, \quad (3.57)$$

$$V_{\sin}^{3,r}(\phi) = \frac{8}{9r^2} \phi^{2-2r} (1 - \phi^{2r})^2 \left(\frac{1}{4} - \phi^{2r}\right)^2, \quad (3.58)$$

$$V_{\sin}^{4,r}(\phi) = \frac{2}{r^2} \phi^2 (1 - \phi^{2r})^2 \left(\frac{1}{2} - \phi^{2r}\right)^2, \quad (3.59)$$

ilustrando esta nova família de modelos. Podemos ver que, nos casos $r > 1$ e inteiro e para $r > 1/2$ e semi-inteiro, devemos tomar valores pares de a .

Kinks topológicos, kinks duplos e lumps não-topológicos tipo sino

Os defeitos analíticos descritos pela relação (3.51) podem ser classificados em três tipos distintos: *kink* topológico, *lump* não-topológico e *kink* duplo topológico. Essas classes de defeitos dependem dos potenciais $V_{\sin}^{a,r}(\phi)$. O caso especial previamente estudado em [97] consiste na escolha $r = 1$, onde existem duas classes de modelos: a primeira para a ímpar a qual compreende potenciais do tipo ϕ^4 , já que são diferentes de zero na origem, e outra

classe para a par, implicando em modelos tipo ϕ^6 , ou seja, os potenciais tocam o zero na origem.

Vejamos então, os novos potenciais que podemos construir e vamos compará-los com seus predecessores supramencionados.

1.1. $V_{\sin}^{a,r}(\phi)$. Para $a = \text{par}$, $r = n$ ou $r = n/m$, n inteiro e m ímpar, os potenciais são positivos definidos e simétricos com relação ao ponto $\phi = 0$, comportando-se como o modelo ϕ^6 , tais como os gráficos das Figuras 3.5 e 3.8. Os vácuos e as soluções estáticas

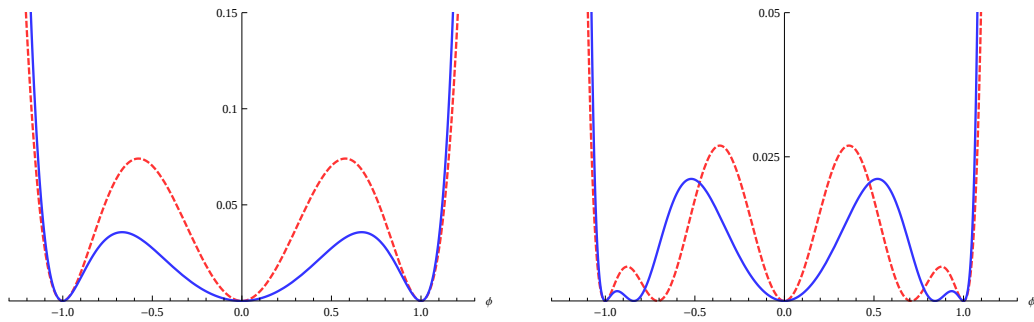


Figura 3.5: À esquerda, apresentamos os gráficos para $V_{\sin}^{2,1}(\phi)$ e $V_{\sin}^{2,2}(\phi)$, gerados com linhas tracejada (vermelho) e sólida (azul), respectivamente, e nos gráficos da direita temos $V_{\sin}^{4,1}(\phi)$ e $V_{\sin}^{4,2}(\phi)$, gerados com linhas tracejada (vermelho) e sólida (azul), respectivamente. Esses potenciais pertencem à família de modelos ϕ^6

são dados por

$$\phi_v^j = \pm \left| \cos \left(\frac{j-1}{a} \pi \right) \right|^{\frac{1}{r}}, \quad j = 1, \dots, \frac{a}{2} + 1, \quad (3.60)$$

$$\phi_S^k(x) = \pm \left| \cos \left(\frac{\arccos(\tanh(x)) + (k-1)\pi}{a} \right) \right|^{\frac{1}{r}}, \quad (3.61)$$

$k = 1, \dots, a$. Observamos a existência de $a + 1$ vácuos e a pares de *kink/anti-kink*, ambos para n par e ímpar. Os defeitos correspondentes a todos esses casos são pares *kink/anti-kink*, topológicos, interpolando os vácuos consecutivos desses potenciais.

1.2. $V_{\sin}^{a, \frac{n}{2}}$. Para a par e $r = n/2 \geq 1/2$ semi-inteiro, os potenciais também são positivos definidos, mas são assimétricos com respeito a $\phi = 0$, que nestes casos trata-se de um dos mínimos de V . Estes potenciais não correspondem à invariância $\phi \rightarrow -\phi$ e todos os seus máximos locais são não negativos, veja Figura 3.6. Os vácuos e as soluções estáticas são

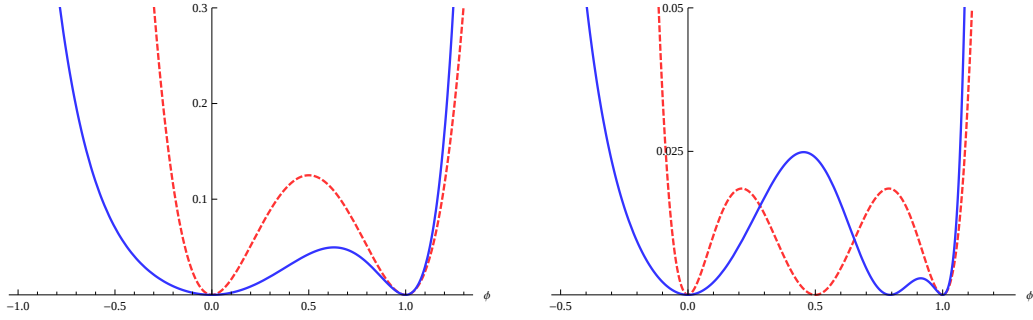


Figura 3.6: No primeiro painel, ilustramos os potenciais $V_{\sin}^{2,1/2}(\phi)$ e $V_{\sin}^{2,3/2}(\phi)$, gerados com linhas tracejada (vermelho) e sólida (azul), respectivamente, já no segundo painel, temos $V_{\sin}^{4,1/2}(\phi)$ e $V_{\sin}^{4,3/2}(\phi)$, gerados com linhas tracejada (vermelho) e sólida (azul), respectivamente.

$$\phi_v^j = \left(\cos^2 \left(\frac{j-1}{a} \pi \right) \right)^{\frac{1}{n}}, \quad j = 1, 2, \dots, \frac{a}{2} + 1, \quad (3.62)$$

$$\phi_S^k(x) = \left(\cos^2 \left(\frac{\arccos(\tanh(x)) + (k-1)\pi}{a} \right) \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (3.63)$$

$k = 1, 2, \dots, a$. Esses modelos apresentam $a/2 + 1$ vácuos e $a/2$ pares topológicos do tipo *kink/anti-kink*.

1.3. $V_{\sin}^{a, \frac{1}{2}}(\phi)$. Para esta escolha a é ímpar e $r = 1/2$, implicando em potenciais da família *seno* não-negativos somente para $\phi \geq 0$, e o zero em $\phi = 0$ não é um ponto crítico, veja o gráfico na Figura 3.7. Os vácuos e as soluções estáticas são tais que

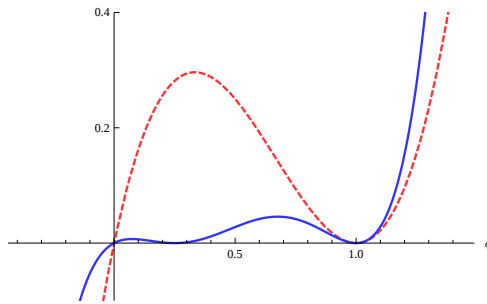


Figura 3.7: Gráficos dos potenciais $V_{\sin}^{1,1/2}(\phi)$ e $V_{\sin}^{3,1/2}(\phi)$, ilustrados com linhas tracejada (vermelho) e sólida (azul), respectivamente.

$$\phi_v^j = \cos^2 \left(\frac{j-1}{a} \pi \right), \quad j = 1, 2, \dots, \frac{a+1}{2}, \quad (3.64)$$

$$\phi_S^k(x) = \cos^2 \left(\frac{\arccos(\tanh(x)) + (k-1)\pi}{a} \right), \quad (3.65)$$

$k = 1, 2, \dots, a$. Para estes potenciais, existem $(a+1)/2$ vácuos além de a defeitos - um *lump* não-topológico e $(a-1)/2$ defeitos topológicos do tipo *kink/anti-kink*. As soluções relativas à $k < (a+1)/2$ são *kinks* topológicos interpolando dois dos mínimos locais. Para $k > (a+1)/2$ encontramos *anti-kinks* topológicos que conectam os vácuos nos sentidos opostos aos dos *kinks*. A outra classe de soluções compreende os valores $k = (a+1)/2$ comportando-se assintoticamente como $\phi = \cos^2 \left(\frac{a-1}{2a} \pi \right)$ para $x = \pm\infty$, tratando-se de diferentes *lumps* não-topológicos.

1.4. $V_{\sin}^{a, \frac{n}{m}}(\phi)$. Nesta família, consideramos a inteiro e $r = n/m$ não inteiro, com m ímpar, e $n = 1, 2, \dots, m-1$, resultando em potenciais positivos definidos e simétricos com respeito à origem, onde $V = 0$, os quais podem ser observados em detalhes na Figura 3.8.

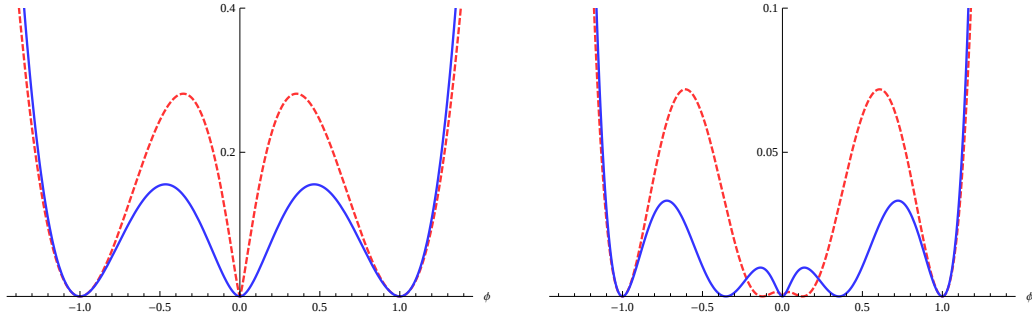


Figura 3.8: Gráficos dos potenciais $V_{\sin}^{1,1/3}(\phi)$ linhas tracejada (vermelho) e $V_{\sin}^{2,1/3}(\phi)$ sólida (azul), ilustrados no painel esquerdo. No painel direito, apresentamos $V_{\sin}^{3,1/3}(\phi)$ e $V_{\sin}^{4,1/3}(\phi)$, gerados com linhas tracejada (vermelho) e sólida (azul), respectivamente.

Uma novidade bastante interessante ocorre nestes casos, tratando-se do fato da origem não ser um vácuo do potencial V , isto é, $\frac{dV}{d\phi} \big|_{\phi=0}$ é ambígua para $r > 1/2$ e $\frac{d^2V}{d\phi^2} \big|_{\phi=0} \rightarrow \infty$ se $r < 1/2$.

Este comportamento, gera um defeito conectando os dois mínimos vizinhos mais próximos da origem, resultando em soluções do tipo *kink* duplo. Os vácuos e as soluções estáticas são tais que

$$\phi_v^j = \pm \left| \cos^m \left(\frac{j-1}{a} \pi \right) \right|^{\frac{1}{n}}, \quad j = 1, \dots, \frac{a+1}{2}, \quad (3.66)$$

$$\phi_S^k(x) = \pm \left| \cos^m \left(\frac{\arccos(\tanh(x)) + (k-1)\pi}{a} \right) \right|^{\frac{1}{n}}, \quad (3.67)$$

onde $k = 1, \dots, a$ e $k \neq \frac{a+1}{2}$ para defeitos *kink/anti-kink*, além de

$$\phi_S^k(x) = \pm \frac{|x|}{x} \left| \cos^m \left(\frac{\arccos(\tanh(x)) + (k-1)\pi}{a} \right) \right|^{\frac{1}{n}}, \quad (3.68)$$

onde $k = \frac{a+1}{2}$ para *kinks* (+) e *anti-kinks* (-) duplos¹. Existem $a+1$ vácuos e a defeitos topológicos - $(a-1)$ *kinks/anti-kinks* e um par de *kink/anti-kink* duplo ao redor da origem - tanto para n par quanto para n ímpar.

Deste modo, tomamos $n = 1$ e $k = (a+1)/2$. Nestes casos, os *kinks* escapam da origem e conectam os mínimos mais próximos de $\phi = 0$, dados por $\phi = \cos^m \left(\frac{a-1}{2a} \pi \right)$ e $\phi = \cos^m \left(\frac{a+1}{2a} \pi \right)$. O caráter dessas soluções é topológico, conectando dois mínimos diferentes do potencial, contudo, elas são *kinks* e *anti-kinks* duplos. Essa forma especial de defeito foi introduzida na literatura pela referência [113] e vemos sua aparição inesperada dentre os membros dessa família de potenciais. Na Figura 3.9 ilustramos o comportamento das soluções do tipo *kink/anti-kink* duplo, para $a = 1$ e $r = 1/3$.

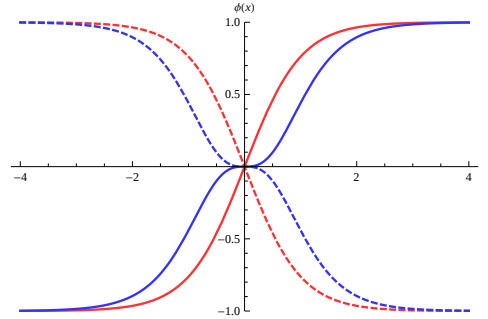


Figura 3.9: Nesta figura vemos o par *kink* linha sólida e *anti-kink* linha pontilhada, representado as soluções analíticas de $V_{\sin}^{1,1/3}$ (azul) e $V_{\sin}^{1,1}$ (vermelho). As soluções de $V_{\sin}^{1,1/3}$ são do tipo *kink/anti-kink* duplo.

3.5.2 Modelos da família *cos seno* para valores inteiros de a

Nesta seção, investigamos a família de modelos dada por $V_{\cos}^{a,r}$, nos restringindo a casos específicos em que a é um número inteiro. Assim como nas análises prévias, a forma

¹ A forma $\frac{|x|}{x}$ representa uma notação na qual consideramos sinais diferentes para cada um dos ramos da solução $\phi_S^k(x)$.

polinomial de $V_{\cos}^{a,1}$, com seus zeros e multiplicidades é bem conhecida e foi abordada em amplos detalhes no capítulo 2. Deste modo, trabalhamos com a deformação $g(\phi) = \phi^r$, nos levando aos potenciais

- com a ímpar:

$$V_{\cos}^{a,r}(\phi) = \frac{1}{2r^2} \phi^2 (1 - \phi^{2r}) \prod_{j=1}^{\frac{a-1}{2}} \left(1 - \frac{\phi^{2r}}{Z_j^{a^2}} \right)^2, \quad (3.69)$$

- com a par:

$$V_{\cos}^{a,r}(\phi) = \frac{1}{2a^2 r^2} \phi^{2-2r} (1 - \phi^{2r}) \prod_{j=1}^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{\phi^{2r}}{Z_j^{a^2}} \right)^2, \quad (3.70)$$

onde $Z_j^a = \cos\left(\frac{2j-1}{2a}\pi\right)$. Para que o potencial seja real e não apresente singularidades, nossa potência deve ser tal que $r \leq 1$ para valores pares de a . Os potenciais tipo *coseno* $V_{\cos}^{a,r}(\phi)$ podem ser escritos em termos dos polinômios de Chebyshev de primeiro tipo na variável ϕ^r , resultando em

$$V_{\cos}^{a,r}(\phi) = \frac{1}{2a^2 r^2} \phi^{2-2r} (1 - \phi^{2r}) T_a^2(\phi^r). \quad (3.71)$$

As formas explícitas para os potenciais $V_{\cos}^{a,r}(\phi)$ com $a = 1, 2, 3, 4$ são

$$V_{\cos}^{1,r}(\phi) = \frac{1}{2r^2} \phi^2 (1 - \phi^{2r}), \quad (3.72)$$

$$V_{\cos}^{2,r}(\phi) = \frac{1}{2r^2} \phi^{2-2r} (1 - \phi^{2r}) \left(\frac{1}{2} - \phi^{2r} \right)^2, \quad (3.73)$$

$$V_{\cos}^{3,r}(\phi) = \frac{8}{9r^2} \phi^2 (1 - \phi^{2r}) \left(\frac{3}{4} - \phi^{2r} \right)^2, \quad (3.74)$$

$$V_{\cos}^{4,r}(\phi) = \frac{1}{32r^2} \phi^{2-2r} (1 - \phi^{2r}) (1 - 8\phi^{2r} + 8\phi^{4r})^2, \quad (3.75)$$

ilustrando nossa nova família de modelos. Vemos aqui que, nos casos em que $r > 1$ inteiro e para $r > 1/2$ semi-inteiro, nosso parâmetro a deve ser ímpar.

Kinks e kinks duplos topológicos e lumps tipo sino não topológicos

Os defeitos analíticos descritos pela fórmula (3.51), podem ser classificados em três tipos: *kink* topológico, *lump* tipo *sino* não topológico e *kink* topológico. Essas classes de defeitos dependem da natureza do potencial $V_{\cos}^{a,r}(\phi)$. Como verificamos anteriormente, no caso $r = 1$, existem duas classes de modelos: uma para a ímpar do tipo ϕ^4 invertido, possuindo um zero na origem, já a segunda compreende os valores pares de a , resultando em modelos

do tipo ϕ^6 invertidos. Em nossas discussões, procuramos descrever os nossos potenciais, caso por caso, e compará-los com seus antecessores, determinados previamente em [97] .

1.1. $V_{\cos}^{a,r}(\phi)$. Para $a = \text{ímpar}$, $r = n$ ou $r = n/m$, com n inteiro e m ímpar, os potenciais são positivos definidos se e somente se $|\phi| \leq 1$ e seus zeros denotados por $\phi = \pm 1$ não são pontos críticos, reproduzindo o comportamento do modelo ϕ^4 invertido. Apresentamos alguns potenciais em mais detalhes nas Figuras 3.10 e 3.13. Os vácuos e

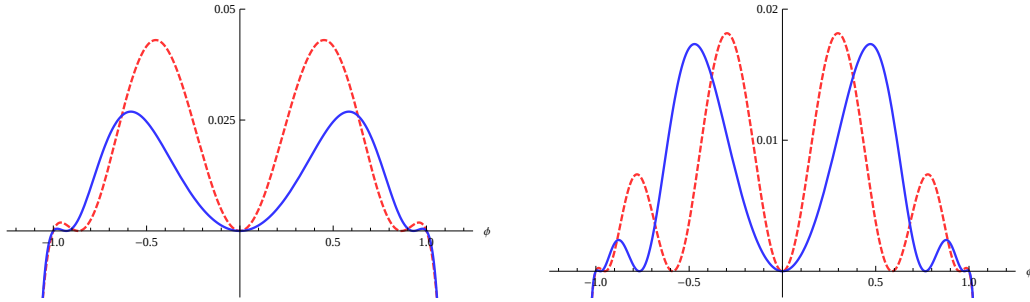


Figura 3.10: Potenciais $V_{\cos}^{3,1}(\phi)$ e $V_{\cos}^{3,2}(\phi)$, ilustrados com linhas tracejada (vermelho) e sólida (azul), respectivamente, apresentados no painel à esquerda. No painel à direita, observamos os potenciais $V_{\cos}^{5,1}(\phi)$ e $V_{\cos}^{5,2}(\phi)$, gerados com linhas tracejada (vermelho) e sólida (azul), respectivamente. Estes potenciais comportam-se como o modelo ϕ^4 invertido.

soluções estáticas são

$$\phi_v^j = \pm \left| \cos \left(\frac{2j-1}{2a} \pi \right) \right|^{\frac{1}{r}}, \quad j = 1, \dots, \frac{a+1}{2}, \quad (3.76)$$

$$\phi_S^k(x) = \pm \left| \cos \left(\frac{2 \arccos(\tanh(x)) + (2k-1)\pi}{2a} \right) \right|^{\frac{1}{r}}, \quad (3.77)$$

onde $k = 1, \dots, a-1$ para defeitos *kinks/anti-kinks* e $k = a$ para o defeito *lump*. Existem a vácuos, além de $2a$ defeitos - $(a-1)$ pares de *kink/anti-kink* topológicos e dois *lumps* tipo *sino* não topológicos, tanto para n par quanto para n ímpar.

1.2. $V_{\cos}^{a, \frac{n}{2}}$. Aqui trabalhamos com a ímpar e $r = n/2 \geq 1/2$ semi-inteiro, os potenciais resultantes não são simétricos e positivos definidos apenas para $\phi \leq 1$, além disso, o zero no ponto $\phi = 1$ não é um ponto crítico. Observamos ainda, que todos os seus pontos críticos são não-negativos, veja na Figura 3.11. Os vácuos e as soluções estáticas são

$$\phi_v^j = \left(\cos^2 \left(\frac{2j-1}{2a} \pi \right) \right)^{\frac{1}{n}}, \quad j = 1, 2, \dots, \frac{a+1}{2}, \quad (3.78)$$

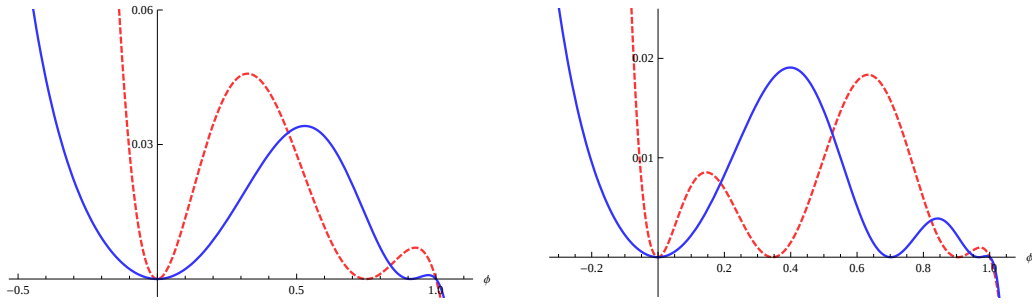


Figura 3.11: Nesta figura apresentamos à esquerda, os potenciais $V_{\cos}^{3,1/2}(\phi)$ e $V_{\cos}^{3,3/2}(\phi)$, gerados com linhas tracejada (vermelho) e sólida (azul), respectivamente. Nos gráficos da direita, vemos os potenciais $V_{\cos}^{5,1/2}(\phi)$ e $V_{\cos}^{5,3/2}(\phi)$, ilustrados com linhas tracejada (vermelho) e sólida (azul), respectivamente.

$$\phi_S^k(x) = \left(\cos^2 \left(\frac{2 \arccos(\tanh(x)) + (2k-1)\pi}{2a} \right) \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (3.79)$$

com $k = 1, 2, \dots, a-1$, para defeitos *kink/anti-kink*, e $k = a$ para o defeito *lump*. Existem $(a+1)/2$ vácuos não-negativos e a defeitos, sendo $(a-1)/2$ pares de *kinks/anti-kinks* topológicos e um *lump* tipo *sino* não topológico.

1.3. $V_{\cos}^{a, \frac{1}{2}}(\phi)$. Para esta escolha o parâmetro a é par e $r = 1/2$. Os potenciais da família *coseno* são positivos definidos para $0 \leq \phi \leq 1$, além disso, os zeros $\phi = 0, 1$ não são pontos críticos e todos os seus pontos críticos são não negativos, como ilustrado nos gráficos da Figura 3.12. Nossos vácuos e soluções estáticas para esta família são

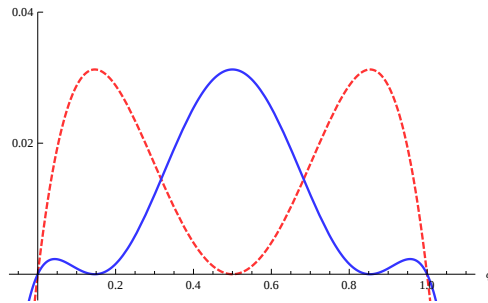


Figura 3.12: Gráficos dos potenciais $V_{\cos}^{2,1/2}(\phi)$ e $V_{\cos}^{4,1/2}(\phi)$, gerados com linhas tracejada (vermelho) e sólida (azul), respectivamente.

$$\phi_v^j = \cos^2 \left(\frac{2j-1}{2a} \pi \right), \quad j = 1, 2, \dots, \frac{a}{2}, \quad (3.80)$$

$$\phi_S^k(x) = \cos^2 \left(\frac{2 \arccos(\tanh(x)) + (2k-1)\pi}{2a} \right), \quad (3.81)$$

onde $k = 1, 2, \dots, (a-1) \forall k \neq a/2$ para defeitos *kink/anti-kink* e $k = a/2$ ou a para o defeito *lump*. Neste caso, existem $a/2$ vácuos e um total de a defeitos - dois *lumps* do tipo *sino* não topológicos e $(a-2)/2$ pares de *kinks/anti-kinks*.

1.4. $V_{\cos}^{a, \frac{n}{m}}(\phi)$. No estudo desta família, consideramos a par e $r = n/m$ não inteiro, com m ímpar e $n = 1, 2, \dots, m-1$. Nossos potenciais são não negativos apenas para $|\phi| < 1$ além de serem simétricos com relação à origem, onde $V = 0$. Os zeros destes potenciais em $\phi = \pm 1$ mais uma vez, não são pontos críticos, como observamos na Figura 3.13. Neste caso, a origem não é um dos vácuos de V , pois $\frac{dV}{d\phi} \big|_{\phi=0}$ é ambígua para $r > 1/2$ e

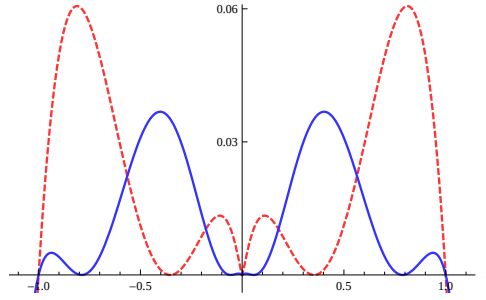


Figura 3.13: Potenciais $V_{\cos}^{2,1/3}(\phi)$ e $V_{\cos}^{4,1/3}(\phi)$, ilustrados com linhas tracejada (vermelho) e sólida (azul), respectivamente.

$\frac{d^2V}{d\phi^2} \big|_{\phi=0} \rightarrow \infty$ para $r < 1/2$. Uma vez mais, este comportamento está relacionado com defeitos que conectam os dois mínimos mais próximos da origem, resultando em soluções do tipo *kink/anti-kink* duplo. Os vácuos e soluções estáticas desta família são

$$\phi_v^j = \pm \left| \cos^m \left(\frac{2j-1}{2a} \pi \right) \right|^{\frac{1}{n}}, \quad j = 1, \dots, \frac{a}{2}, \quad (3.82)$$

$$\phi_S^k(x) = \pm \left| \cos^m \left(\frac{2 \arccos(\tanh(x)) + (2k-1)\pi}{2a} \right) \right|^{\frac{1}{n}}, \quad (3.83)$$

onde $k = 1, 2, \dots, (a-1) \forall k \neq a/2$, para o par *kink/anti-kink*, $k = a$ para defeitos do tipo *lump* e

$$\phi_S^k(x) = \pm \frac{|x|}{x} \left| \cos^m \left(\frac{2 \arccos(\tanh(x)) + (2k-1)\pi}{2a} \right) \right|^{\frac{1}{n}}, \quad (3.84)$$

com $k = a/2$ para os defeitos tipo *kink/anti-kink* duplo. Existem a vácuos e $2a$ defeitos - $(a - 2)$ pares de *kink/anti-kink*, um par de *kink/anti-kink* duplo conectando os vácuos ao redor da origem e dois *lumps* do tipo *sino* - para n par e ímpar. Na Figura 3.14, nós plotamos as soluções estáticas para o potencial *coseno* com $a = 4$ e $r = 1/3$.

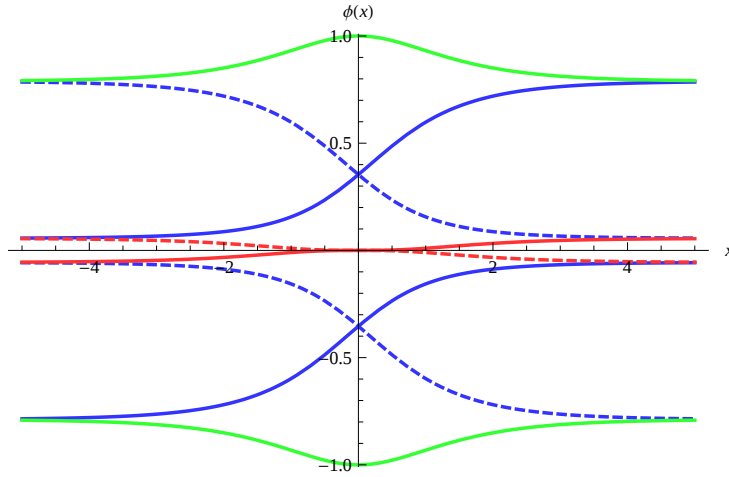


Figura 3.14: Defeitos *kink/anti-kink* (linha sólida azul), *kink/anti-kink* duplo (linha vermelha tracejada) e *lump* (linha verde sólida) correspondentes aos diferentes setores do potencial $V_{\cos}^{2,1/3}$.

3.5.3 Famílias de Modelos para a semi-inteiro

Ao estudarmos as famílias de potenciais para estes valores do parâmetro a , verificamos que elas possuem uma relação de reflexão entre si, ou seja, $V_{\cos}^{a,r}(\phi) = V_{\sin}^{a,r}(-\phi)$, o que as faz essencialmente iguais. Deste modo, examinaremos em detalhes apenas uma dessas famílias, no caso, aquela relativa aos potenciais do tipo *seno*, os quais são escritos segundo

$$V_{\sin}^{a,r}(\phi) = \frac{1}{4a^2r^2} \phi^{2-2r}(1 - \phi^r)(1 - \phi^{2r}) \prod_{j=1}^{a-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\phi^r}{Z_j^a}\right)^2, \quad (3.85)$$

onde $Z_j^a = \cos\left(\frac{2j-1}{2a}\pi\right)$ e $r \leq 1$ como restrição para que os potenciais sejam reais. Os potenciais da família *seno* também podem ser escritos em termos dos polinômios de Chebyshev de primeiro tipo, de tal maneira que

$$V_{\sin}^{a,r}(\phi) = \frac{1}{4a^2r^2} \phi^{2-2r}(1 - \phi^{2r})(1 - T_{2a}(\phi^r)), \quad (3.86)$$

onde $T_a(\theta)$ é dado pela relação (2.21). As formas explícitas dos potenciais desta família, para $a = 1/2, 3/2, 5/2$ são

$$V_{\sin}^{1/2,r}(\phi) = \frac{1}{r^2} \phi^{2-2r} (1 - \phi^r) (1 - \phi^{2r}) , \quad (3.87)$$

$$V_{\sin}^{3/2,r}(\phi) = \frac{1}{9r^2} \phi^{2-2r} (1 - \phi^r) (1 - \phi^{2r}) (1 + 2\phi^r)^2 , \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} V_{\sin}^{5/2,r}(\phi) &= \frac{1}{25r^2} \phi^{2-2r} (1 - \phi^r) (1 - \phi^{2r}) \\ &\times (1 - 2\phi^r - 4\phi^{2r})^2 , \end{aligned} \quad (3.89)$$

ilustrando nossa nova família de modelos.

Kinks e kinks duplos topológicos e lumps tipo sino e tipo pão de açúcar não topológicos

Os defeitos analíticos descritos pela expressão (3.51) podem ser classificados em três classes distintas: *kink* topológico, *lump* não topológico tipo *sino* e tipo *pão de açúcar*. Esses tipos de defeitos dependem basicamente da escolha dos potenciais $V_{\sin}^{a,r}(\phi)$. O caso $r = 1$, foi descrito em detalhes no trabalho [97].

Aqui, nós consideramos $V_{\sin}^{a,\frac{n}{m}}(\phi)$ para r sendo a razão de dois números positivos naturais, de tal maneira que $r = n/m < 1$. Os potenciais são não negativos apenas para $\phi \geq -1$, não simétricos e o zero em $\phi = -1$ não é um ponto crítico, como podemos ver na Figura 3.15. Os vácuos são $\phi_v^1 = 1$ além de

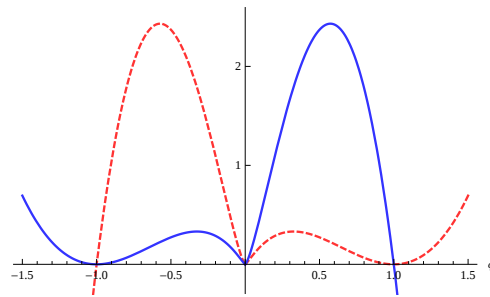


Figura 3.15: Potenciais $V_{\cos}^{1/2,1/3}$ e $V_{\sin}^{1/2,1/3}$, ilustrados com linhas sólida (azul) e tracejada (vermelha), respectivamente.

$$\phi_v^j = - \left(\cos \left(\frac{2j-3}{2a} \pi \right) \right)^{\frac{1}{r}} , \quad j = 2, \dots, a + \frac{1}{2} , \quad (3.90)$$

para $a > 1/2$. Já as soluções estáticas são

$$\phi_S^k(x) = \left(\cos \left(\frac{\arccos(\tanh(x)) + (k-1)\pi}{a} \right) \right)^{\frac{1}{r}}, \quad (3.91)$$

onde $k = 1, \dots, 2a$. Todas as soluções estáticas são descritas por (3.91), aquelas que interpolam os vácuos dos potenciais são topológicas, enquanto as outras que evoluem entre o zero $\phi = -1$ e o vácuo vizinho mais próximo, para $k = a + 1/2$, são não topológicas. No exemplo da Figura 3.15, a origem não é um vácuo do potencial, uma vez que, $\frac{dV}{d\phi} \big|_{\phi=0}$ é ambígua para $r > 1/2$ e $\frac{d^2V}{d\phi^2} \big|_{\phi=0} \rightarrow \infty$ para $r < 1/2$. Desta forma, neste setor ao redor de $\phi = 0$ (para $a = \frac{1}{2}$), surge como solução um defeito não topológico exótico, o qual denominamos *lump* tipo *pão de açúcar*², além disso, esta família de potenciais também apresenta soluções do tipo *kink/anti-kink* duplo, ao considerarmos $a \geq 3/2$. Quando utilizamos $a > 1/2$, temos defeitos do tipo *lump* tipo *sino*, um par de *kink/anti-kink* duplo e $a - 3/2$ pares de *kink/anti-kink* topológicos. Na Figura 3.16 representamos graficamente as soluções *lumps* do tipo pão de açúcar para os potenciais da família *coseno* e *seno*, com $a = 1/2$ e $r = 1/3$, respectivamente.

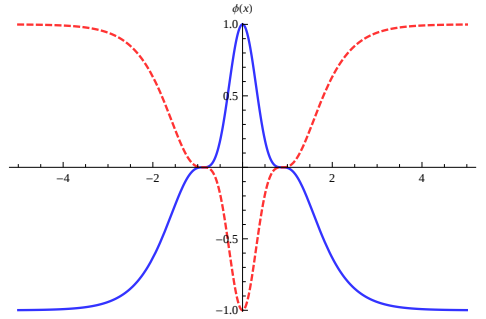


Figura 3.16: Gráficos para as soluções estáticas dos potenciais $V_{\cos}^{1/2,1/3}$ e $V_{\sin}^{1/2,1/3}$ geradas com linhas sólida (azul) e tracejada (vermelha), respectivamente. As soluções estáticas de $V^{1/2,1/3}$ são *lumps* tipo pão de açúcar.

3.6 Famílias de Modelos para $g(\phi) = 1/\phi^r$

Nesta seção, vamos considerar o caso $g(\phi) = 1/\phi^r$, onde $r = n/m$. Como em nossas análises anteriores, r é um número racional positivo, ou seja, a razão entre dois números

²Estes defeitos também foram discutidos na referência [101].

naturais diferentes de zero, matematicamente descritos como $n, m \in \mathbb{N}^*$. A partir da equação (3.6), nós somos capazes de determinar analiticamente as soluções estáticas dos potenciais $V_{\sin}^a(\phi)$ e $V_{\cos}^a(\phi)$, dadas por

$$\phi_S^k(x) = s(r) \cos^{-1/r} \left(\frac{\eta(x) + M \pi}{a} \right), \quad (3.92)$$

onde M está relacionado com k , e apenas para alguns poucos valores de k produzem defeitos diferenciados, sendo que, k também depende do valor do parâmetro a , como explicamos em mais detalhes logo abaixo. O símbolo $s(r)$ em (3.92) é definido da mesma forma apresentada em (3.51).

Para n positivo, a função de deformação $\chi = g(\phi) = 1/\phi^n$ mapeia a variação $|\chi| \leq 1$ na variação $|\phi| \geq 1$, bem como a variação $|\chi| \geq 1$ em $|\phi| \leq 1$. Assim, para obtermos as soluções estáticas dos potenciais deformados que cobrem $-1 \leq \phi \leq 1$, devemos escolher $\eta(x) = \theta_2(x)$, como na relação (3.7b), já para $\phi \leq -1$ ou $\phi \geq 1$ escolhemos $\eta(x) = \theta_1(x)$, como em (3.7a). Uma característica geral desses modelos gerados pela deformação (3.3) com $g(\phi) = 1/\phi^r$, é que o número de setores topológicos é determinado apenas por a , como descrevemos abaixo. Os potenciais podem ser escritos de forma polinomial, para a inteiro ou semi-inteiro, como evidenciaremos a seguir.

3.6.1 Modelos da família *seno* para a inteiro

Permita-nos investigar diversas famílias de modelos relativas ao potencial $V_{\sin}^{a,r}$, para casos específicos em que a é um número inteiro. A forma polinomial de $V_{\sin}^{a,1}$, com seus zeros e multiplicidades são bem conhecidas. Assim, nosso foco será considerar a deformação $g(\phi) = 1/\phi^r$ e os seguintes casos:

- com a ímpar:

$$V_{\sin}^{a,r}(\phi) = \frac{1}{2a^2r^2} \phi^{2-2ar} \prod_{j=1}^{(a+1)/2} \left(\phi^{2r} - \frac{1}{Z_j^{a^2}} \right)^2, \quad (3.93)$$

- com a par:

$$V_{\sin}^{a,r}(\phi) = \frac{1}{2r^2} \phi^{2-2ar} \prod_{j=1}^{a/2} \left(\phi^{2r} - \frac{1}{Z_j^{a^2}} \right)^2, \quad (3.94)$$

onde $Z_j^a = \cos\left(\frac{j-1}{a}\pi\right)$ e $r \leq 1/a$ com a restrição que o potencial seja real. O potencial tipo *seno*, $V_{\sin}^{a,r}(\phi)$ pode ser escrito em termos dos polinômios de Chebyshev de segundo

tipo, de tal modo que

$$V_{\sin}^{a,r}(\phi) = \frac{1}{2a^2r^2} \phi^{2-2r} (1 - \phi^{2r})^2 U_{a-1}^2(\phi^{-r}) , \quad (3.95)$$

onde $U_a(\theta)$ é descrito em detalhes na equação (2.22). As formas explícitas do potencial $V_{\sin}^{a,r}(\phi)$ com $a = 1, 2, 3, 4$ são

$$V_{\sin}^{1,r}(\phi) = \frac{1}{2r^2} \phi^{2-2r} (1 - \phi^{2r})^2 , \quad (3.96)$$

$$V_{\sin}^{2,r}(\phi) = \frac{1}{2r^2} \phi^{2-4r} (1 - \phi^{2r})^2 , \quad (3.97)$$

$$V_{\sin}^{3,r}(\phi) = \frac{1}{18r^2} \phi^{2-6r} (1 - \phi^{2r})^2 (4 - \phi^{2r})^2 , \quad (3.98)$$

$$V_{\sin}^{4,r}(\phi) = \frac{1}{2r^2} \phi^{2-8r} (1 - \phi^{2r})^2 (2 - \phi^{2r})^2 , \quad (3.99)$$

ilustrando nossa nova família de modelos. Podemos observar que, o parâmetro r fica restrito aos valores $r \leq 1/a$, e o primeiro membro desta família, para $a = 1$, é idêntico aquele visto em (3.56).

Kinks, kinks finos e kinks duplos topológicos

Os defeitos descritos analiticamente pela equação (3.92) podem ser classificados em três tipos distintos: *kink* simples, *kink* fino e *kink* duplo topológicos. As classes de defeitos dependem somente dos potenciais $V_{\sin}^{a,r}(\phi)$. Estes modelos possuem potenciais positivos definidos e são descritos caso a caso.

1.1. $V_{\sin}^{a,\frac{1}{a}}(\phi)$. Para a ímpar e $r = 1/a$, os potenciais são não negativos e simétricos com respeito à origem, assim como o modelo ϕ^4 - possuindo um máximo na origem, contudo trata-se de um máximo pontiagudo para $a > 1$, veja por exemplo o gráfico da Figura 3.17. Nesta família, existem $a + 1$ vácuos e a pares de defeitos. Em todos os casos, os defeitos são *kinks/anti-kinks* topológicos, interpolando vácuos consecutivos do potencial. Os vácuos são

$$\phi_v^j = \pm \left| \cos \left(\frac{j-1}{a} \pi \right) \right|^{-\frac{1}{r}} , \quad (3.100)$$

onde $j = 1, \dots, \frac{a+1}{2}$. As soluções estáticas, para $|\phi| \leq 1$, são

$$\begin{aligned} \phi_S^1(x) &= \mp \psi^0, \quad x > 0, \\ \phi_S^1(x) &= \pm \psi^1, \quad x < 0, \end{aligned} \quad (3.101a)$$

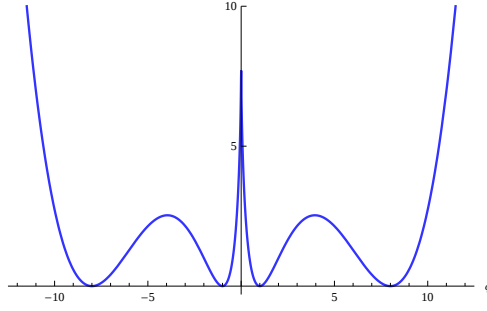


Figura 3.17: Gráfico do potencial $V_{\sin}^{3,1/3}(\phi)$, como função do campo escalar ϕ .

tomando os sinais $(-)(+)$ para o defeito *kink* e $(+)(-)$ para *anti-kink*, onde

$$\psi^\ell(x) = \left(\cos \left(\frac{\arccos(\coth(x)) + (\ell - 1)\pi}{a} \right) \right)^{-\frac{1}{r}}, \quad (3.101b)$$

já considerando $|\phi| \geq 1$, eles são dados por

$$\phi_S^k(x) = \pm \left| \cos \left(\frac{\arccos(\tanh(x)) + (\tilde{k} - 1)\pi}{a} \right) \right|^{-\frac{1}{r}}, \quad (3.102)$$

onde $\tilde{k} = k - (a + 1)/2$ com $k = 2, \dots, a$.

Neste caso, $\frac{dV}{d\phi}$ é ambígua na origem, para $a > 1$, causando o máximo pontiagudo. Assim, os defeitos entre os mínimos vizinhos de $\phi = 0$ são mais finos do que os *kinks* tradicionais, e por isso denominados de *kinks* finos. Na Figura 3.18 ilustramos o formato dessa nova solução topológica, para $a = 3$ e $r = 1/3$.

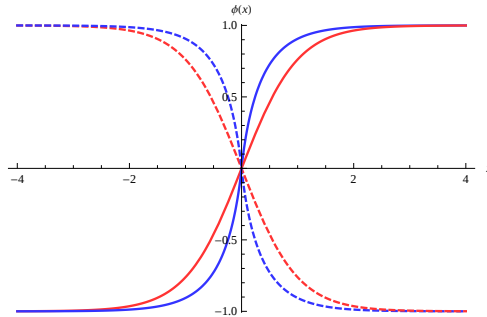


Figura 3.18: Gráficos dos *kinks* (linha sólida) e *anti-kinks* (linha tracejada), representando as soluções de $V_{\sin}^{3,1/3}$ (azul) e $V_{\sin}^{1,1}$ (vermelho). As soluções de $V_{\sin}^{3,1/3}$ são os chamados *kinks* finos.

1.2. $V_{\sin}^{a, \frac{n}{m}}(\phi)$. No caso desta família, consideramos n inteiro, m ímpar e $r = n/m < 1/a$ não inteiro, resultando em potenciais positivos definidos e simétricos com respeito à origem, onde $V = 0$, como o modelo ϕ^6 , possuindo um mínimo na origem com concavidade negativa, o que nos fornece uma solução do tipo *kink* duplo ao redor de $\phi = 0$, veja por exemplo o gráfico da Figura 3.19.

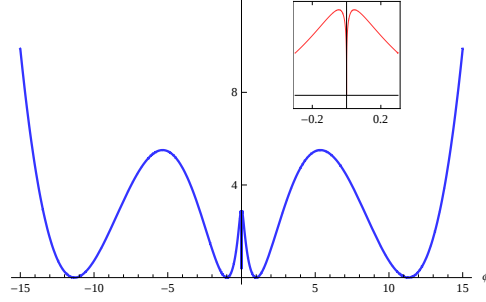


Figura 3.19: Potencial $V_{\sin}^{3,2/7}(\phi)$ como função do campo escalar ϕ . Ao lado mostramos em detalhes o comportamento peculiar deste potencial próximo à origem.

No caso em que a é ímpar, existem $a+1$ vácuos e a pares de defeitos topológicos, destes $(a-1)$ pares tipo *kink/anti-kink* e um par *kink/anti-kink* duplo ao redor da origem, para n par e ímpar. Novamente, os vácuos são dados por (3.100), já as soluções estáticas topológicas *kink/anti-kink* duplo, são dadas por (3.101), exceto para o caso $a = 1$ e n ímpar, quando temos

$$\phi_S^1 = \pm (\coth(x))^{-\frac{1}{r}}, \quad (3.103)$$

e os outros $(a-1)$ pares de *kinks/anti-kinks* são expressos em termos de (3.102), onde novamente, $\tilde{k} = k - (a+1)/2$ com $k = 2, \dots, a$.

Para a par, existem a vácuos e $(a-1)$ pares de defeitos topológicos - $(a-2)$ pares de *kinks/anti-kinks* e um par de *kink/anti-kink* duplo ao redor da origem, para n par e ímpar. Este caso também apresenta vácuos descritos por (3.100), onde $j = 1, \dots, \frac{a}{2}$ e as soluções estáticas são dadas por (3.101) e (3.102), onde $\tilde{k} = k - a/2$ com $k = 2, \dots, (a-1)$.

3.6.2 Famílias de Modelos para a semi-inteiro

Do mesmo modo que os potenciais abordados previamente, as famílias *coseno* e *seno* são reflexões uma da outra quando consideramos a semi-inteiro, ou seja, $V_{\cos}^{a,r}(\phi) = V_{\sin}^{a,r}(-\phi)$.

Consequentemente, trabalharemos explicitamente com os potenciais da família *seno*, que são escritos segundo

$$V_{\sin}^{a,r}(\phi) = \frac{1}{4a^2r^2} \phi^{2-2ar} (1 - \phi^r)(1 - \phi^{2r}) \prod_{j=1}^{a-\frac{1}{2}} \left(\phi^r + \frac{1}{Z_j^a} \right)^2, \quad (3.104)$$

onde $Z_j^a = \cos\left(\frac{2j-1}{2a}\pi\right)$ e $r \leq 1/a$, com a restrição do potencial ser real. Para valores semi-inteiros de a , os potenciais $V_{\sin}^a(\phi)$ podem ser denotados em termos dos polinômios de Chebyshev de primeiro tipo, ou seja,

$$V_{\sin}^{a,r}(\phi) = \frac{1}{4a^2r^2} \phi^2 (\phi^{2r} - 1) (1 - T_{2a}(\phi^{-r})), \quad (3.105)$$

onde $T_a(\theta)$ pode ser visto em (2.21). As formas explícitas desses potenciais, para $a = 1/2, 3/2, 5/2$ são dadas por

$$V_{\sin}^{1/2,r}(\phi) = \frac{1}{r^2} \phi^{2-r} (1 - \phi^r) (1 - \phi^{2r}), \quad (3.106)$$

$$V_{\sin}^{3/2,r}(\phi) = \frac{1}{9r^2} \phi^{2-3r} (1 - \phi^r) (1 - \phi^{2r}) (2 + \phi^r)^2, \quad (3.107)$$

$$V_{\sin}^{5/2,r}(\phi) = \frac{1}{25r^2} \phi^{2-5r} (1 - \phi^r) (1 - \phi^{2r}) (4 + 2\phi^r - \phi^{2r})^2, \quad (3.108)$$

ilustrando nossa nova família de modelos.

Kinks, kinks finos e kinks duplos topológicos

Os defeitos analiticamente descritos pela relação (3.92) são classificados em três classes distintas: *kinks* topológicos simples, finos e duplos. Esses defeitos dependem da estrutura de cada um dos potenciais $V_{\sin}^{a,r}(\phi)$. Para as escolhas $r = 1/a$ ou $r = n/m$, com n par e m ímpar, estes modelos estão relacionados com potenciais não negativos, os quais descrevemos caso a caso. Iniciamos nossa abordagem com

1.1. $V_{\sin}^{a,\frac{1}{a}}(\phi)$. Os potenciais são positivos definidos e simétricos com relação à origem, obedecendo o mesmo comportamento do modelo ϕ^4 , possuindo um máximo na origem, contudo novamente temos um máximo pontiagudo para $a > 3/2$, veja por exemplo, a Figura 3.20.

Em geral, existem N vácuos e $N-1$ pares de defeitos, sendo um deles um par *kink/anti-kink* finos, conectando os vácuos próximos à origem, exceto no caso $a = 1/2$ onde os defeitos não são finos. Para as escolhas $a = 1/2$ e $a = 3/2$ temos $N = 2$, para $a = 5/2$

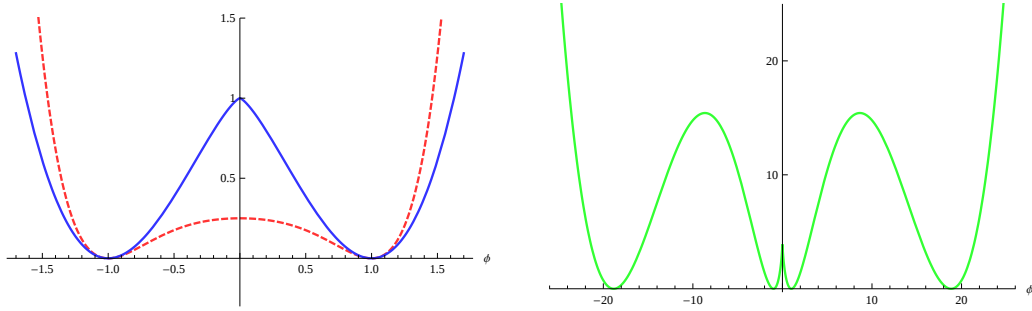


Figura 3.20: Potenciais $V_{\text{sin}}^{1/2,2}(\phi)$ (linha sólida) e $V_{\text{sin}}^{3/2,2/3}(\phi)$ (linha tracejada), apresentados no painel esquerdo. No painel direito, podemos conferir o potencial $V_{\text{sin}}^{5/2,2/5}(\phi)$ como função do campo escalar ϕ .

e $a = 7/2$ ficamos com $N = 4$, já para $a = 9/2$ e $a = 11/2$ temos $N = 6$ e assim por diante. Em qualquer das situações, todos os defeitos são pares *kink/anti-kink* topológicos, interpolando os vácuos consecutivos do potencial. Os vácuos são

$$\phi_v^j = \pm \left| \cos \left(\frac{j-1}{a} \pi \right) \right|^{-\frac{1}{r}}, \quad j = 1, \dots, \frac{N}{2}. \quad (3.109)$$

Nossas soluções estáticas, para o par *kink/anti-kink* ao redor da origem são dadas por (3.101), exceto no caso $a = 1/2$, onde temos

$$\phi_S(x) = \pm \frac{|x|}{x} (2 \coth^2(x) - 1)^{-\frac{1}{r}}. \quad (3.110)$$

Já para $a > 3/2$, os outros pares de *kinks/anti-kinks* são descritos analiticamente por (3.102), onde $\tilde{k} = k - N/2$ e $k = 2, \dots, (N-1)$.

1.2. $V_{\text{sin}}^{a, \frac{n}{m}}(\phi)$.

Para n par, m ímpar e $r = n/m < 1/a$, nossos potenciais são positivos definidos e simétricos com relação à origem, onde $V = 0$, como no modelo ϕ^6 , possuindo um mínimo na origem, mas com concavidade negativa o que nos fornece uma solução do tipo *kink* duplo conectando os mínimos ao redor da origem, como podemos conferir na Figura 3.21.

Em geral, existem $N + 1$ mínimos, N vácuos, sendo $N - 1$ pares de *kinks/anti-kinks* topológicos e um deles um par *kink/anti-kink* duplo conectando os mínimos próximos à origem. Nos casos em que $a = 1/2$ e $a = 3/2$ temos $N = 2$, já $a = 5/2$ e $a = 7/2$ correspondem a $N = 4$, para $a = 9/2$ e $a = 11/2$ ficamos com $N = 6$ e assim por diante. Os vácuos desses modelos são obtidos via (3.109). No caso de suas soluções

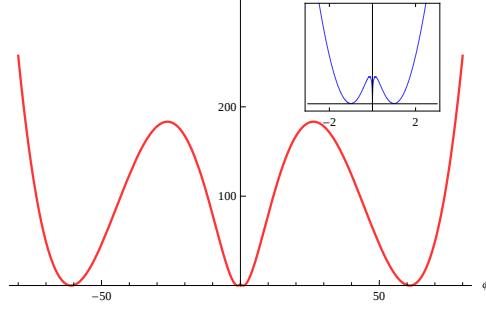


Figura 3.21: Gráficos do potencial $V_{\sin}^{5/2,2/7}(\phi)$ como função do campo escalar ϕ . Podemos conferir em detalhes o comportamento peculiar deste potencial ao redor da origem.

analíticas, (3.101) refere-se à solução *kink/anti-kink* duplo, exceto para $a = 1/2$, cuja forma é apresentada em (3.110). Ao considerarmos $a > 3/2$, os outros pares de defeitos *kinks/anti-kinks* são descritos por (3.102), onde $\tilde{k} = k - N/2$ e $k = 2, \dots, (N - 1)$.

3.7 Superpotenciais e Energias para os Kinks e Lumps

Como vimos, quando temos potenciais não negativos, em geral, é possível reescrevê-los em termos de superpotenciais $W = W(\phi)$, de tal maneira que

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2 ; \quad W(\phi) = \pm \int d\phi \sqrt{2V(\phi)}.$$

Esta é justamente a situação para a família de potenciais *seno* com a inteiro. Contudo, nos outros casos, como por exemplo, para a família *coseno* com a inteiro e para as famílias de *seno* e *coseno* com a semi-inteiro, os potenciais podem não ser positivos definidos. De qualquer modo, podemos seguir as investigações realizadas na referência [101] e introduzir superpotenciais tanto para potenciais que apresentam soluções topológicas quanto para aqueles em que ocorrem defeitos não topológicos.

Particularmente, para $r = 1$, no caso das famílias *seno* e *coseno* e a inteiro ou semi-inteiro, os superpotenciais podem ser expressados em termos dos polinômios de Chebyshev como

$$W_{\sin}^{a,1}(\phi) = \frac{1}{a^2(a^2 - 4)} [(a^2(1 - \phi^2) - 2) T_a(\phi) - 2a\phi(1 - \phi^2) U_{a-1}(\phi)], \quad (3.111a)$$

$$W_{\cos}^{a,1}(\phi) = \frac{\sqrt{1 - \phi^2}}{a^2(a^2 - 4)} [(a^2(1 - \phi^2) - 2) U_{a-1}(\phi) + 2a\phi T_a(\phi)], \quad (3.111b)$$

para $a \neq 2$, além de

$$W_{sin}^{2,1}(\phi) = \frac{1}{4}\phi^2(2 - \phi^2), \quad (3.112a)$$

$$W_{cos}^{2,1}(\phi) = \frac{\phi}{8}(3 - 2\phi^2)\sqrt{1 - \phi^2} + \frac{1}{8}\arcsin(\phi). \quad (3.112b)$$

Agora, no caso da família *seno* fixamos $a \in \mathbb{Z}^+$ como um inteiro positivo, ao tomarmos $r \neq 2$, na relação

$$W_{sin}^{a,r}(\phi) = \frac{1}{ar} \int d\phi \phi^{1-r}(1 - \phi^{2r})U_{a-1}(\phi^r), \quad (3.113)$$

obtemos diretamente

$$W_{sin}^{1,r}(\phi) = \frac{\phi^{2-r}}{r} \left(\frac{\phi^{2r}}{r+2} + \frac{1}{r-2} \right), \quad (3.114)$$

$$W_{sin}^{2,r}(\phi) = \frac{\phi^2}{4r} \left(\frac{\phi^{2r}}{r+1} - 1 \right), \quad (3.115)$$

$$W_{sin}^{3,r}(\phi) = \frac{\phi^{2-r}}{9r} \left(\frac{4\phi^{4r}}{3r+2} - \frac{5\phi^{2r}}{r+2} - \frac{1}{r-2} \right), \quad (3.116)$$

$$W_{sin}^{4,r}(\phi) = \frac{\phi^2}{8r} \left(\frac{2\phi^{4r}}{2r+1} - \frac{3\phi^{2r}}{r+1} + 1 \right), \quad (3.117)$$

$$W_{sin}^{5,r}(\phi) = \frac{\phi^{2-r}}{25r} \left(\frac{16\phi^{6r}}{5r+2} - \frac{28\phi^{4r}}{3r+2} + \frac{13\phi^{2r}}{r+2} + \frac{1}{r-2} \right). \quad (3.118)$$

Já no caso $r = 2$, temos

$$W_{sin}^{1,2}(\phi) = \frac{\phi^4}{8} - \frac{1}{2}\log|\phi|, \quad (3.119)$$

$$W_{sin}^{3,2}(\phi) = \frac{\phi^8}{12} - \frac{5\phi^4}{24} + \frac{1}{6}\log|\phi|. \quad (3.120)$$

Ao trabalharmos com a família *coseno* e fixarmos $a \in \mathbb{Z}^+$ como um inteiro positivo, ao tomarmos $r \neq 2$ em

$$W_{cos}^{a,r}(\phi) = \frac{1}{ar} \int d\phi \phi^{1-r}\sqrt{1 - \phi^{2r}}T_a(\phi^r), \quad (3.121)$$

determinamos que

$$W_{cos}^{1,r}(\phi) = \frac{\phi^2}{2r(2+r)} \left(2\sqrt{1 - \phi^{2r}} + r {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{r}, 1 + \frac{1}{r}, \phi^{2r} \right] \right), \quad (3.122)$$

$$\begin{aligned} W_{cos}^{2,r}(\phi) &= \frac{\phi^{2-r}}{8r(1+r)(r-2)} \left(2\sqrt{1 - \phi^{2r}} (1 + r + (r-2)\phi^{2r}) \right. \\ &\quad \left. + B(2r-1)\phi^{r-2} \left[\phi^{2r}, \frac{1}{2} + \frac{1}{r}, \frac{1}{2} \right] \right), \end{aligned} \quad (3.123)$$

$$W_{cos}^{3,r}(\phi) = \frac{\phi^2}{18r(2+r)(2+3r)} \left(2\sqrt{1-\phi^{2r}} (-6-13r+4(2+r)\phi^{2r}) + r(2-9r) {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{r}, 1 + \frac{1}{r}, \phi^{2r} \right] \right), \quad (3.124)$$

onde ${}_2F_1$ é a Função Hipergeométrica Gaussiana e B a Função Beta Incompleta de Eüler. No caso em que $r = 2$, ficamos com

$$W_{cos}^{2,2}(\phi) = \frac{1}{24} \sqrt{1-\phi^4} (5-2\phi^4) + \frac{1}{8} \log(\phi^2) - \frac{1}{8} \log(2+2\sqrt{1-\phi^4}). \quad (3.125)$$

Uma grande motivação para obter os superpotenciais relativos as nossas famílias é o fato deles simplificarem os cálculos relacionados com as energias de cada um dos defeitos. Verificamos diretamente, que as soluções tipo *kink* possuem energia generalizada dada por

$$E^{a,r,k}(\phi_k) = |W^{a,r}(Z_k) - W^{a,r}(Z_{k+1})|, \quad (3.126)$$

e no caso dos defeitos tipo *lump* [101] as energias correspondentes são

$$E^{a,r,k}(\phi_k) = 2 |W^{a,r}(Z_k) - W^{a,r}(\phi(x=0))|. \quad (3.127)$$

Estabilidade e modos zero

Com respeito à questão da estabilidade linear, a maior parte das novas soluções encontradas em nossos estudos são *kinks* ordinários interpolando vácuos consecutivos dos potenciais, ou *lumps* clássicos conectando um vácuo em $x = -\infty$ com ele mesmo em $x = +\infty$. Há diversos estudos relativos à estabilidade dessas soluções, a partir dos quais podemos afirmar que *kinks* correspondem a soluções estáveis, enquanto *lumps* são instáveis. Contudo, em nossas análises nós determinamos uma classe de soluções do tipo *kink* duplo, cuja estabilidade não fica clara. Consequentemente, discutiremos em mais detalhes a estabilidade deste novo tipo de solução, escolhendo um exemplo genérico e analisando-o cuidadosamente. Trabalhamos com o potencial

$$V_{cos}^{2,\frac{1}{3}}(\phi) = \frac{9}{2} \phi^{\frac{4}{3}} \left(\frac{1}{2} - \phi^{\frac{2}{3}} \right)^2 \left(1 - \phi^{\frac{2}{3}} \right), \quad \phi_S(x) = \pm \frac{\sinh^3\left(\frac{x}{2}\right)}{\cosh^{\frac{3}{2}} x}, \quad (3.128)$$

cuja forma e o par de defeitos *kink/anti-kink* duplo encontram-se nas Figuras 3.22 e 3.23, respectivamente. O superpotencial deste modelo é escrito segundo

$$W(\phi) = \frac{3}{128} \left(\sqrt{1-\phi^{2/3}} (-48\phi^{7/3} + 40\phi^{5/3} + 2\phi + 3\phi^{1/3}) - 3 \arcsin(\phi^{1/3}) \right), \quad (3.129)$$

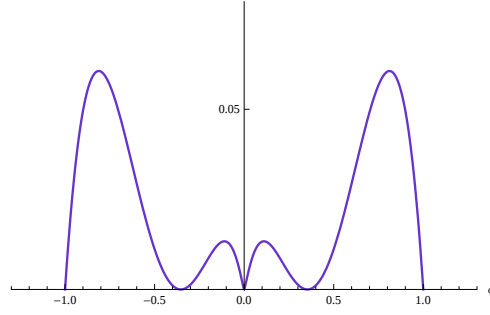


Figura 3.22: Potencial $V_{\cos}^{2, \frac{1}{3}}(\phi)$ escrito em função do campo escalar ϕ .

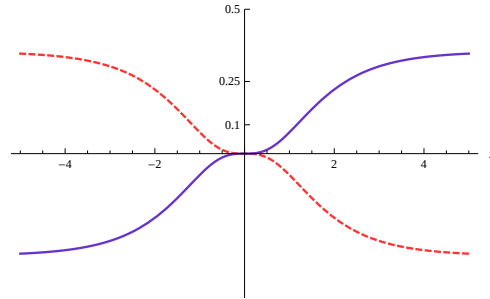


Figura 3.23: Defeitos *kink* duplo (linha sólida azul) e *anti-kink* duplo (linha vermelha tracejada) em função da coordenada x .

de tal maneira que a energia correspondente ao *kink* duplo é dada em termos da diferença

$$W\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - W\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{16} \left(1 - \frac{3\pi}{16}\right).$$

O potencial do tipo Schrödinger que governa as pequenas flutuações ao redor desses *kinks* possui a forma $K = -\frac{d^2}{dx^2} + U(x)$, onde o potencial tipo poço exibe a seguinte relação analítica

$$U(x) = 1 + \frac{1}{2 \sinh^2 \frac{x}{2}} - \frac{5}{2 \cosh x} - \frac{35}{4 \cosh^2 x},$$

cuja forma pode ser apreciada em detalhes na Figura 3.24 (gráfico esquerdo). Podemos notar diretamente, que ao tomarmos os limites $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U(x) = 1$, $\lim_{x=0} U(x) = +\infty$, o potencial $U(x)$ é qualitativamente similar ao potencial de Lennard-Jones em física molecular [114].

Podemos verificar diretamente, que a função de onda para o estado fundamental, isto

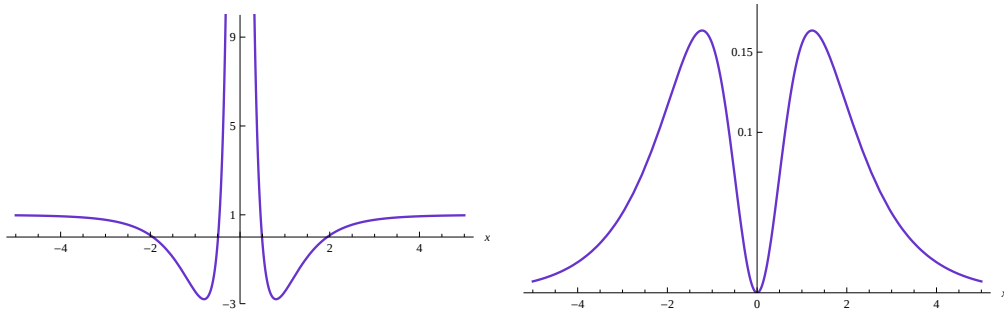


Figura 3.24: Potencial tipo poço $U(x)$ (à esquerda) e função de onda (à direita) correspondente ao estado fundamental, contra o eixo x .

é, $\psi_0(x) = \frac{d\phi}{dx}(x)$, possui a forma explícita

$$\psi_0(x) = \frac{3 \sinh \frac{x}{2} \sinh x}{4 \cosh^{\frac{5}{2}} x}.$$

Este poço de potencial, não admite estados com energia negativa, isto porque o aparente nó na função de onda correspondente ao estado fundamental, não é um nó no sentido estrito. Somos levados à esta conclusão, devido a não ocorrência de mudança de sinal na função de onda, comportamento este que observamos por exemplo, no gráfico da Figura 2.5 no capítulo 2, o que nos informa que o centro da solução *kink* duplo não pode ser perturbado, local este, no qual o campo atinge o valor zero. As outras funções de onda de estados excitados deste potencial compõem estados de espalhamento, nos assegurando a estabilidade destes defeitos topológicos, por mais peculiar que seja o formato da solução do estado fundamental relativo à perturbação, apresentada no gráfico da direita na Figura 3.24.

Capítulo 4

Modelos de Dois Campos a partir de Modelos de Um Campo

4.1 Introdução

Na literatura científica, observamos que o modelo básico descrito por um único campo escalar real, pode ser estendido para casos em que consideramos dois campos escalares reais, o que nos leva diretamente a modelos mais sofisticados, os quais novamente possuem grande aplicabilidade em diversos ramos de ciência não-linear. Contudo, modelos compostos por dois campos escalares são, em geral, mais difíceis de serem resolvidos analiticamente, e nossa proposta neste estudo é apresentar um algoritmo que nos permite construir novos modelos de dois campos escalares com suas respectivas soluções. Estas discussões cobrem, em sua maior parte, acoplamentos entre soluções do tipo *kink*, que satisfazem modelos descritos por potenciais positivos definidos e como apontamos anteriormente, são denominadas estados *BPS* (Bogomolnyi-Prasad-Sommerfeld) [90,91].

Um dos problemas centrais no que concerne a modelos de dois campos escalares acoplados, é que precisamos resolver as equações de movimento relativas à variação de nossa ação, e tais equações de movimento são em geral equações diferenciais de segunda ordem acopladas. Um procedimento muito eficaz no tratamento desta questão é denominado método das órbitas tentativas, [73], contudo a primeira abordagem deste método também esbarra na questão de integrar equações diferenciais de segunda ordem acopladas.

Posteriormente, foi demonstrado que o método das órbitas tentativas poderia ser muito eficiente quando aplicado a equações diferenciais de primeira ordem, as quais surgem como consequência dos estados *BPS*, veja por exemplo as referências [87, 115, 116].

A técnica fundamental que permeia nosso trabalho, é baseada no método de deformação [40] envolvendo dois modelos de um campo escalar real. Nossa ideia resume-se em utilizar um acoplamento entre esses dois modelos de um campo para construir um modelo efetivo de dois campos. Como descreveremos em maiores detalhes, é possível implementar um procedimento geral, o que nos capacita a realizar os mais variados acoplamentos entre modelos de um campo e obter um modelo de dois campos analiticamente solúvel.

4.2 Generalidades

Nesta seção, vamos reescrever resumidamente, algumas definições básicas envolvendo teoria de campo escalar para modelos de dois campos, no espaço tempo de Minkowski. Isto porque, gostaríamos de clarificar ao máximo todos os passos fundamentais para a construção do nosso método. Como vimos previamente, iniciamos nossa análise introduzindo a densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} \partial^\mu \chi \partial_\mu \chi - V(\phi, \chi). \quad (4.1)$$

Mais uma vez, como trabalhamos com campos estáticos, nossas equações de movimento são reescritas segundo

$$\phi'' = \frac{\partial V}{\partial \phi}; \quad \chi'' = \frac{\partial V}{\partial \chi}. \quad (4.2)$$

Agora, vamos redefinir nosso potencial como

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} W_\phi^2 + \frac{1}{2} W_\chi^2, \quad (4.3)$$

o que nos leva as equações diferenciais de primeira ordem

$$\phi' = \pm W_\phi; \quad \chi' = \pm W_\chi. \quad (4.4)$$

Já a densidade de energia é tal que

$$\rho(x) = \frac{1}{2} (\phi' \mp W_\phi)^2 + \frac{1}{2} (\chi' \mp W_\chi)^2 \pm \frac{dW}{dx}, \quad (4.5)$$

e vemos que a energia é minimizada para as soluções que obedecem às relações presentes em (4.4), implicando na energia total

$$E_{BPS} = |W(\phi(\infty), \chi(\infty)) - W(\phi(-\infty), \chi(-\infty))|. \quad (4.6)$$

Um aspecto interessante sobre os modelos de dois campos, é que podemos utilizar o chamado método do fator integrante para determinar uma órbita analítica entre os campos ϕ e χ . A fim de implementar esta técnica, reescrevemos as equações (4.4) como

$$\phi_\chi = \frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi(\phi, \chi)}{W_\chi(\phi, \chi)}, \quad (4.7)$$

tratando-se de um dos pontos centrais de nosso trabalho, que nos inspirou a propor modelos de dois campos novos e recuperar casos já bem estabelecidos, como veremos em breve.

Permita-nos também, reapresentar algumas características sobre o método de deformação¹ para modelos de um campo escalar real. Como vimos durante esta tese, o método de deformação baseia-se em relacionar a densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi); \quad V(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2, \quad (4.8)$$

cujas soluções estáticas obedecem a equação diferencial de primeira ordem

$$\phi' = W_\phi(\phi), \quad (4.9)$$

com um modelo deformado, descrito pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L}_d = \frac{1}{2} \partial^\mu \chi \partial_\mu \chi - U(\chi); \quad U(\chi) = \frac{1}{2} W_\chi^2 \quad (4.10)$$

com defeitos que obedecem à relação

$$\chi' = W_\chi(\chi). \quad (4.11)$$

O método de deformação requer que esses modelos sejam conectados por uma função inversível específica, denominada função de deformação e denotada por $f(\chi)$. Essa conexão entre os campos escalares é representada por

$$\phi = f(\chi); \quad \chi = f^{-1}(\phi), \quad (4.12)$$

implicando em

$$\phi' = \frac{df}{d\chi} \chi'. \quad (4.13)$$

¹Aqui utilizamos uma notação diferente daquela apresentada nas definições do capítulo 2 apenas por uma questão de conveniência.

Deste modo, o potencial $U(\chi)$ pode ser obtido a partir do potencial relativo ao campo ϕ , segundo

$$U(\chi) = \frac{V(\phi \rightarrow \chi)}{f_\chi^2}, \quad (4.14)$$

e podemos escrever também que

$$W_\phi(\phi \rightarrow \chi) = W_\phi(\chi) = \frac{df}{d\chi} W_\chi(\chi). \quad (4.15)$$

4.3 O Novo Método

O procedimento que queremos introduzir é baseado na ideia de utilizar as equações (4.13) e (4.15), para escrever uma relação do tipo

$$\frac{df}{d\chi} = \frac{\phi'(\chi)}{\chi'(\chi)} = \frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi(\chi)}{W_\chi(\chi)}. \quad (4.16)$$

Vemos que esta estrutura é muito parecida com aquela apresentada em (4.7), para um modelo de dois campos. Então nos inspiramos neste fato para incluir o ponto fundamental de nosso método, baseado em utilizar a função de deformação para reescrever (4.16) como

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi(\phi, \chi)}{W_\chi(\phi, \chi)}, \quad (4.17)$$

que deve resultar em uma relação de órbita para um modelo de dois campos efetivo. O primeiro passo na direção deste modelo efetivo, é perceber que podemos expressar nossa equação diferencial de primeira ordem para o campo $\phi(x)$ de três formas distintas mas equivalentes, dadas por

$$\phi' = W_\phi(\phi), \quad \phi' = W_\phi(\chi), \quad \phi' = W_\phi(\phi, \chi), \quad (4.18)$$

onde, na segunda expressão substituímos $\phi \rightarrow f(\chi)$ em todos os termos de W_ϕ resultando em $W_\phi(\chi)$, já na terceira expressão, nós modificamos $\phi \rightarrow f(\chi)$ parcialmente, ou seja, trocamos o campo ϕ em $W_\phi(\phi)$ de uma forma particular, fazendo W_ϕ uma função específica dos campos ϕ e χ . Este último procedimento é realizado de forma que $W_\phi(\phi, \chi)$ não seja simplesmente uma combinação de $W_\phi(\phi)$ com $W_\phi(\chi)$, isto é, caso $W_\phi(\phi)$ contenha um termo ϕ^3 , por exemplo, ele será reescrito como $\phi^3 = \phi \times \phi^2$ que por sua vez, pode ser expresso segundo $\phi \times f^2(\chi)$ ou $\phi^2 \times f(\chi)$, resultando em diferentes acoplamentos entre os campos escalares. O mesmo mecanismo pode ser implementado no caso de (4.11), para a qual obtemos

$$\chi' = W_\chi(\chi), \quad \chi' = W_\chi(\phi), \quad \chi' = W_\chi(\phi, \chi). \quad (4.19)$$

Deste modo, definimos os seguintes parâmetros a_i , b_i , e c_i , onde $i = 1, 2, 3$ e com os vínculos $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, $b_1 + b_2 + b_3 = 1$, e $c_1 + c_2 + c_3 = 0$. Tais constantes são relacionadas com as equações (4.18) e (4.19), de forma a trocarmos $W_\phi \rightarrow a_1 W_\phi(\chi) + a_2 W_\phi(\phi, \chi) + a_3 W_\phi(\phi)$ e $W_\chi \rightarrow b_1 W_\chi(\chi) + b_2 W_\chi(\phi, \chi) + b_3 W_\chi(\phi)$. Esse último passo, nos leva a escrever

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi}{W_\chi} = \frac{a_1 W_\phi(\chi) + a_2 W_\phi(\phi, \chi) + a_3 W_\phi(\phi) + c_1 g(\chi) + c_2 g(\phi, \chi) + c_3 g(\phi)}{b_1 W_\chi(\chi) + b_2 W_\chi(\phi, \chi) + b_3 W_\chi(\phi)}, \quad (4.20)$$

onde a função de contra-peso $g(\phi) = g(\chi) = g(\phi, \chi)$ é em princípio arbitrária e construída via a função de deformação, do mesmo modo que as diferentes formas de W_ϕ e W_χ . Ao invés de adicionarmos o termo $c_1 g(\chi) + c_2 g(\phi, \chi) + c_3 g(\phi)$ ao numerador de (4.20), poderíamos adicioná-lo ao denominador, contudo, isto somente faria com que os campos ϕ e χ trocassem de papel no modelo efetivo.

A forma específica de g para cada um dos novos modelos de dois campos, é obtida através de um segundo vínculo, o qual surge devido ao fato das derivadas do superpotencial efetivo de dois campos $W(\phi, \chi)$, obedecerem à propriedade

$$W_{\phi\chi} = W_{\chi\phi}. \quad (4.21)$$

Podemos identificar na expressão (4.20) que trocamos W_χ por

$$b_1 W_\chi(\chi) + b_2 W_\chi(\phi, \chi) + b_3 W_\chi(\phi). \quad (4.22)$$

e ainda, que substituímos W_ϕ por

$$a_1 W_\phi(\chi) + a_2 W_\phi(\phi, \chi) + a_3 W_\phi(\phi) + c_1 g(\chi) + c_2 g(\phi, \chi) + c_3 g(\phi). \quad (4.23)$$

Desta forma, ao impormos a condição (4.21), ficamos com o vínculo

$$b_2 W_{\chi\phi}(\phi, \chi) + b_3 W_{\chi\phi}(\phi) = a_1 W_{\phi\chi}(\chi) + a_2 W_{\phi\chi}(\phi, \chi) + c_1 g_\chi(\chi) + c_2 g_\chi(\phi, \chi), \quad (4.24)$$

o qual será utilizado para calcular a função de contra-peso g . Este procedimento nos permite determinar a forma final de $W(\phi, \chi)$ e, uma vez que, este superpotencial foi construído a partir de modelos de um campo com soluções analíticas, o modelo efetivo resultante automaticamente engloba este par de soluções como uma de suas possíveis órbitas. Portanto, buscamos clarificar o método e sua abrangência com diversos exemplos, que analisamos em detalhes na próxima seção.

4.4 Exemplos

Nesta seção, temos como objetivo ilustrar a aplicabilidade de nosso método através de alguns exemplos, que seguem logo abaixo.

4.4.1 Exemplo 1: ϕ^4 versus χ^4

Este primeiro exemplo consiste no acoplamento do modelo ϕ^4 com um modelo também de quarta ordem, que não é positivo definido, conhecido como χ^4 invertido. Iniciamos considerando o modelo de um campo descrito pelo campo escalar ϕ , cuja solução topológica obedece a equação

$$\phi' = W_\phi = a(1 - \phi^2), \quad (4.25)$$

e sua forma é dada segundo

$$\phi(x) = \tanh(ax). \quad (4.26)$$

Aqui a é um parâmetro real e adimensional. Este modelo trata-se do ϕ^4 padrão, com quebra espontânea de simetria.

Para deformá-lo em seu parceiro invertido, devemos considerar a conexão

$$\phi = f(\chi) = \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}. \quad (4.27)$$

na qual b é um outro parâmetro real que controla a função de deformação. A equação diferencial de primeira ordem, correspondente à esta deformação é

$$\chi' = W_\chi = -a\chi \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}, \quad (4.28)$$

com solução analítica

$$\chi(x) = b \operatorname{sech}(ax). \quad (4.29)$$

O passo seguinte, consiste em escrever cada uma das equações diferenciais de primeira ordem de três maneiras diferentes e equivalentes. Logo, segundo nossa função de deformação e sua inversa, obtemos

$$W_\phi(\phi) = a(1 - \phi^2) \quad (4.30a)$$

$$W_\phi(\chi) = \frac{a}{b^2} \chi^2, \quad (4.30b)$$

$$W_\phi(\phi, \chi) = \frac{a}{b} \chi \sqrt{1 - \phi^2}, \quad (4.30c)$$

bem como,

$$W_\chi(\chi) = -a \chi \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{b^2}}, \quad (4.31a)$$

$$W_\chi(\phi) = -a b \phi \sqrt{1 - \phi^2}, \quad (4.31b)$$

$$W_\chi(\phi, \chi) = -a \chi \phi. \quad (4.31c)$$

Como queremos evitar a presença de raízes em nossos potenciais polinomiais, vamos escolher $a_2 = b_1 = b_3 = 0$. Além disso, tomamos $c_2 = 0$ na equação (4.23), implicando diretamente em $a_1 + a_3 = 1$, $b_2 = 1$ e $c_1 = -c_3$. Consequentemente, ao substituir tais resultados no vínculo (4.24), determinamos que

$$g(\chi) = -\frac{1}{2} \frac{a}{c_1} \left(1 + 2 \frac{a_1}{b^2}\right) \chi^2, \quad (4.32)$$

e via função de deformação, podemos reescrever o último como

$$g(\phi) = -\frac{1}{2} \frac{a b^2}{c_1} \left(1 + 2 \frac{a_1}{b^2}\right) (1 - \phi^2). \quad (4.33)$$

Deste modo, ao aplicarmos todos esses ingredientes na relação (4.23), encontramos diretamente que

$$W_\phi = -\frac{a}{2} \chi^2 + a \left(1 + \frac{b^2}{2}\right) (1 - \phi^2), \quad (4.34)$$

e segundo a expressão (4.22), ficamos com

$$W_\chi = -a \chi \phi. \quad (4.35)$$

Assim, o passo final consiste em integrações simples em relação aos campos ϕ e χ , para calcularmos a forma final do superpotencial efetivo, que nesse caso é tal que

$$W(\phi, \chi) = a \left(1 + \frac{1}{2} b^2\right) \left(\phi - \frac{1}{3} \phi^3\right) - \frac{1}{2} a \phi \chi^2. \quad (4.36)$$

Além disso, este modelo de dois campos possui como um de seus pares de soluções analíticas as relações

$$\phi(x) = \tanh(ax), \quad \chi(x) = b \operatorname{sech}(ax). \quad (4.37)$$

Um caso particularmente interessante, ocorre ao identificarmos

$$a = 2r \quad \text{e} \quad b = \pm \sqrt{\frac{1}{r} - 2} \quad (4.38)$$

com $r \in (0, 1/2)$, nos levando à

$$W_r(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3} \phi^3 - r \phi \chi^2, \quad (4.39)$$

com a órbita

$$\phi(x) = \tanh(2rx), \quad (4.40a)$$

$$\chi(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{r} - 2} \operatorname{sech}(2rx). \quad (4.40b)$$

Este modelo é conhecido na literatura científica pela denominação BNRT (Bazeia, Nascimento, Ribeiro e Toledo, [117]) e é tema central de diversas investigações científicas, algumas delas presentes nas referências [68–70, 76, 82, 83, 85, 86].

4.4.2 Exemplo 2: ϕ^4 versus χ^6

Este próximo exemplo foi construído combinando os modelos ϕ^4 e χ^6 , os quais admitem soluções tipo *kink*. Aqui, iniciamos nossas discussões a partir da equação de primeira ordem

$$\phi' = W_\phi = a^2 - (\phi - a)^2, \quad (4.41)$$

com a solução topológica

$$\phi(x) = a + a \tanh(ax). \quad (4.42)$$

A função de deformação que consideramos nesta aplicação é

$$\phi = f(\chi) = 2a - \frac{a}{b^2} \chi^2, \quad (4.43)$$

implicando na seguinte equação diferencial de primeira ordem para o campo χ :

$$\chi' = W_\chi = -\frac{a}{2} \chi \left(2 - \frac{\chi^2}{b^2} \right), \quad (4.44)$$

cujo defeito analítico é

$$\chi(x) = b \sqrt{1 - \tanh(ax)}. \quad (4.45)$$

O procedimento requer que as equações diferenciais de primeira ordem sejam reescritas como

$$W_\phi(\phi) = a^2 - (\phi - a)^2, \quad W_\phi(\chi) = \frac{a^2}{b^2} \left(2\chi^2 - \frac{\chi^4}{b^2} \right), \quad W_\phi(\phi, \chi) = \frac{a^2 \chi^2}{b^2} \left(\frac{\chi^2}{b^2} + 2 \frac{\phi - a}{a} \right), \quad (4.46)$$

além de,

$$W_\chi(\chi) = -\frac{a}{2} \left(2 - \frac{\chi^2}{b^2} \right) \chi, \quad W_\chi(\phi, \chi) = -\frac{a}{2} \left(1 + \frac{\phi - a}{a} \right) \chi. \quad (4.47)$$

Aqui, escolhemos $b_3 = 0$, para evitar raízes quadradas em nosso potencial polinomial, culminando em $b_1 + b_2 = 1$. Além disso, trabalhamos com $c_1 = 0$, implicando em $c_3 = -c_2$, bem como em uma função g dada por

$$g(\phi, \chi) = -\frac{b_2}{4c_2} \chi^2 - \frac{a_2 a^2}{c_2} \frac{\chi^2}{b^2} \left(\frac{\chi^2}{b^2} + 2 \frac{\phi - a}{a} \right) - \frac{a_1 a^2}{c_2 b^2} \left(2\chi^2 - \frac{\chi^4}{b^2} \right), \quad (4.48)$$

e a partir de nossa função de deformação, podemos expressá-la na forma

$$g(\phi) = -\frac{b_2 b^2}{4c_2} \left(1 - \frac{\phi - a}{a} \right) - \frac{a^2 (a_2 + a_1)}{c_2} \left(1 - \frac{(\phi - a)^2}{a^2} \right). \quad (4.49)$$

As informações prévias nos permitem determinar o superpotencial

$$W(\phi, \chi) = -\frac{(1 - b_2)a}{2} \left(\chi^2 - \frac{\chi^4}{4b^2} \right) - b_2 \phi \frac{\chi^2}{4} + \frac{b_2 b^2}{4} \left(2\phi - \frac{\phi^2}{2a} \right) + \left(a\phi^2 - \frac{\phi^3}{3} \right), \quad (4.50)$$

composto pelos campos escalares ϕ e χ .

Diversos modelos interessantes podem ser gerados para diferentes escolhas dos parâmetros a , b e b_2 . Em particular, ao definirmos que $b^2 = 2$, $a = \pm 1/2$ e $b_2 = 1$, nosso superpotencial ganha a forma

$$W(\phi, \chi) = \phi - \frac{\phi^3}{3} - \frac{\chi^2}{4} \phi, \quad (4.51)$$

tratando-se do modelo BNRT para $r = 1/4$; veja (4.39). Contudo, este acoplamento resulta nas órbitas laterais deste modelo, descritas por

$$\phi(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{x}{2}\right), \quad \chi(x) = \pm \sqrt{2 + 2 \tanh\left(\frac{x}{2}\right)} \quad (4.52)$$

e

$$\phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{x}{2}\right), \quad \chi(x) = \pm \sqrt{2 - 2 \tanh\left(\frac{x}{2}\right)}. \quad (4.53)$$

Na Figura 4.1 podemos ver as diferentes órbitas do modelo BNRT, com $r = 1/4$, encontradas nas seções 4.4.1 e 4.4.2. Os mínimos, representados com pontos vermelhos, são $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -2)$ e $(0, 2)$ no plano (ϕ, χ) . Já na Figura 4.2, apresentamos alguns exemplos das diferentes formas que o potencial de dois campos, determinado a partir de (4.50), pode assumir. Os potenciais foram gerados considerando $a = 1$ e $b = \pm 1$. Os mínimos do gráfico na parte superior são $(0, -\sqrt{2})$, $(0, 0)$, $(0, \sqrt{2})$, $(2, -\sqrt{2})$, $(2, 0)$ e $(2, \sqrt{2})$. No caso do gráfico da parte inferior, temos os mínimos $(0, -\sqrt{2})$, $(0, \sqrt{2})$, $(-0.5, 0)$ e $(2, 0)$.

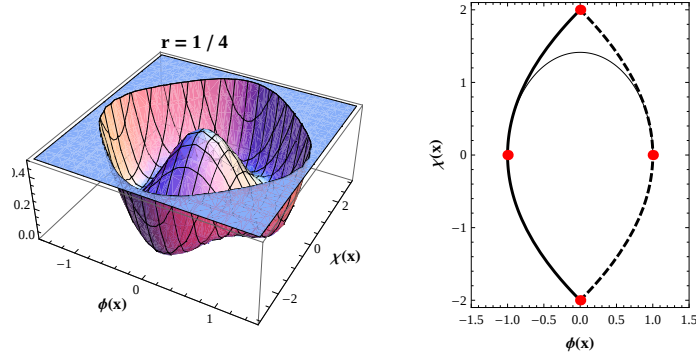


Figura 4.1: Os gráficos presentes nesta Figura mostram o potencial $V(\phi, \chi)$ para o modelo BNRT com $r = 1/4$, discutido em detalhes nas seções 4.4.1 e 4.4.2, bem como, as órbitas analíticas de cada uma dessas seções. As linhas sólidas correspondem aos defeitos abordados em (4.52), já as linhas tracejadas na borda referem-se à (4.53) enquanto a linha central representa (4.40).

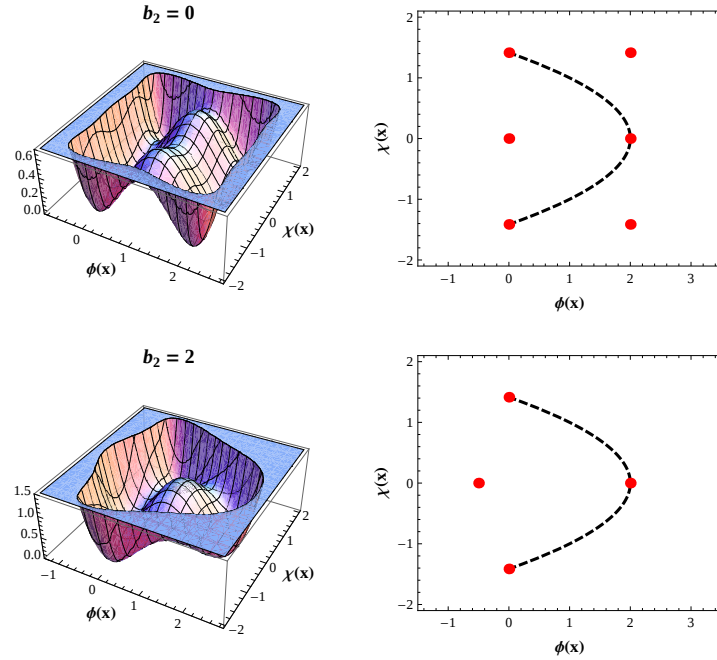


Figura 4.2: Nesta Figura ilustramos o potencial de dois campos $V(\phi, \chi)$ determinado na seção 4.4.2 com $a = 1$ e $b = \pm 1$, seus mínimos (pontos vermelhos) e suas órbitas correspondentes.

4.4.3 Exemplo 3: ϕ^4 versus χ^3

Este exemplo baseia-se no acoplamento de potenciais com potência quádrupla e cúbica. Para tanto, iniciamos nosso procedimento escrevendo a equação diferencial de primeira

ordem para o modelo ϕ^4 normalizado, ou seja,

$$\phi' = W_\phi = 1 - \phi^2. \quad (4.54)$$

Com solução analítica dada por

$$\phi(x) = \tanh(x). \quad (4.55)$$

Agora, consideramos a seguinte função de deformação

$$\phi = \sqrt{1 - \frac{\chi}{a}}, \quad (4.56)$$

e via o método de deformação para um campo obtemos diretamente que

$$\chi' = W_\chi = -2\chi \sqrt{1 - \frac{\chi}{a}}, \quad (4.57)$$

cujo defeito analítico é

$$\chi(x) = a \operatorname{sech}^2(x). \quad (4.58)$$

Ao utilizarmos a relação (4.56), determinamos que

$$W_\phi(\phi) = 1 - \phi^2, \quad W_\phi(\chi) = \frac{\chi}{a}, \quad (4.59)$$

e

$$W_\chi(\phi, \chi) = -2\phi\chi, \quad W_\chi(\phi) = -2a\phi(1 - \phi^2), \quad (4.60)$$

isto porque, estamos evitando a presença de raízes em nosso potencial polinomial. Assim, neste acoplamento trabalharemos com os vínculos $a_2 = b_1 = c_1 = 0$, refletindo em $a_3 + a_1 = 1$, $b_2 + b_3 = 1$ e $c_3 = -c_2$. Desta maneira, podemos determinar diretamente que nossa função $g(\phi, \chi)$ possui a forma

$$g(\phi, \chi) = -\frac{2ab_3}{c_2}(1 - 3\phi^2)\chi - \frac{b_2}{c_2}\chi^2 - \frac{a_1}{ac_2}\chi. \quad (4.61)$$

Uma vez mais, utilizamos a função de deformação para reescrever a última equação somente em termos do campo ϕ , resultando em

$$g(\phi) = \left(-\frac{2a^2b_3}{c_2}(1 - 3\phi^2) - \frac{a^2b_2}{c_2}(1 - \phi^2) - \frac{a_1}{c_2} \right) (1 - \phi^2). \quad (4.62)$$

Todos esses ingredientes nos permitem calcular diretamente que nosso superpotencial efetivo de dois campos é

$$\begin{aligned} W(\phi, \chi) = & (5b_2 - 6)a^2\frac{\phi^5}{5} + (1 + 8a^2 - 6a^2b_2)\frac{\phi^3}{3} - 2a(1 - b_2)(1 - 3\phi^2)\phi\chi \\ & - b_2\phi\chi^2 + (1 + 2a^2 - a^2b_2)\phi \end{aligned} \quad (4.63)$$

que ao ser derivado em relação a ϕ e χ , nos leva à

$$W_\phi = (1 - \phi^2) (1 + (2 - b_2)a^2 - (6 - 5b_2)a^2\phi^2) - 2a(1 - b_2)(1 - 3\phi^2)\chi - b_2\chi^2, \quad (4.64)$$

e

$$W_\chi = -2a(1 - b_2)(1 - 3\phi^2)\phi - 2b_2\phi\chi, \quad (4.65)$$

respectivamente. Ao substituirmos estas duas últimas expressões em (4.3), computamos a estrutura final do potencial de dois campos $V(\phi, \chi)$.

Para ilustrar este modelo de dois campos, geramos os gráficos presentes na Figura 4.3, onde apresentamos as diferentes formas do potencial $V(\phi, \chi)$ com $a = 1$, correspondente a este acoplamento. Os mínimos do primeiro gráfico são $(-\sqrt{2}, 0)$, $(-1, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -\sqrt{2})$ e $(0, \sqrt{2})$, no plano (ϕ, χ) . Enquanto o segundo potencial possui os vácuos $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -0.7208)$ e $(0, 1.3874)$. Em ambos os casos, as órbitas analíticas conectam os pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ (linhas sólidas).

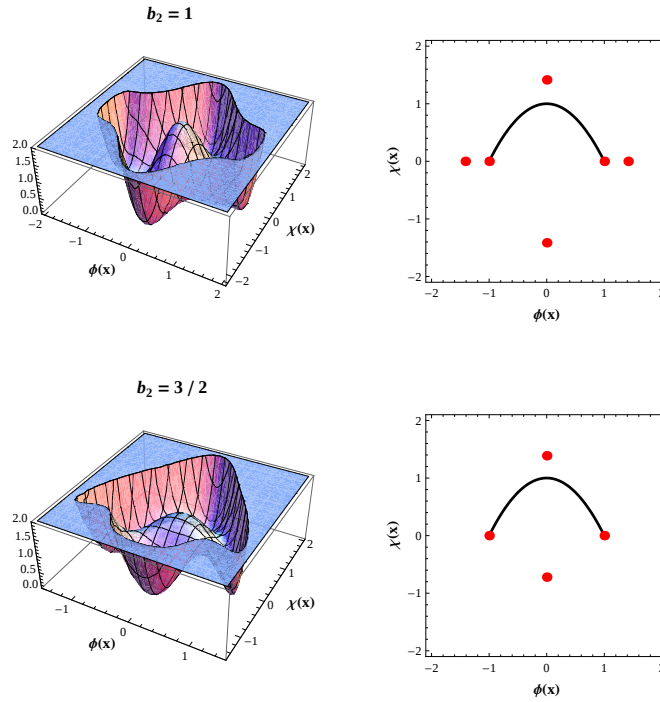


Figura 4.3: Diferentes estruturas do potencial $V(\phi, \chi)$ ambos para $a = 1$, com seus mínimos (pontos vermelhos) e suas respectivas órbitas analíticas, para o acoplamento $\phi^4 - \chi^3$.

4.4.4 Exemplo 4: modelo- p

Nosso exemplo final, aborda uma generalização do chamado modelo- p , descrito em detalhes na referência [113]. Iniciamos este acoplamento a partir da equação diferencial de primeira ordem

$$\phi' = W_\phi = p(\phi^{(p-1)/p} - \phi^{(p+1)/p}) \quad (4.66)$$

onde $p = 1, 3, 5, \dots$ é ímpar e inteiro. Note que o caso $p = 1$ corresponde ao modelo ϕ^4 padrão. Contudo, para outros valores de p surgem soluções do tipo *kink* duplo. A solução geral deste modelo é

$$\phi(x) = \tanh^p(x), \quad (4.67)$$

como encontrado em [113]. Devido à complexidade deste modelo, vamos realizar um acoplamento simples envolvendo outra teoria também descrita pelo modelo- p , culminando na deformação

$$\phi = f(\chi) = \frac{\chi}{a}, \quad (4.68)$$

de modo que, ao aplicarmos o método de deformação usual, encontramos

$$\chi' = W_\chi = p a [(\chi/a)^{(p-1)/p} - (\chi/a)^{(p+1)/p}], \quad (4.69)$$

com a seguinte solução analítica:

$$\chi(x) = a \tanh^p(x). \quad (4.70)$$

Nosso próximo passo, consiste em reescrever as equações diferenciais de primeira ordem via a função de deformação e sua inversa, resultando nas expressões

$$\begin{aligned} W_\phi(\phi) &= p(\phi^{(p-1)/p} - \phi^{(p+1)/p}), \quad W_\phi(\chi) = p \left[\left(\frac{\chi}{a} \right)^{(p-1)/p} - \left(\frac{\chi}{a} \right)^{(p+1)/p} \right], \\ W_\phi(\phi, \chi) &= p \left[\left(\frac{\chi}{a} \right)^{(p-1)/p} - \phi \left(\frac{\chi}{a} \right)^{1/p} \right], \end{aligned} \quad (4.71)$$

e

$$\begin{aligned} W_\chi(\chi) &= p a \left[\left(\frac{\chi}{a} \right)^{(p-1)/p} - \left(\frac{\chi}{a} \right)^{(p+1)/p} \right], \quad W_\chi(\phi) = p a (\phi^{(p-1)/p} - \phi^{(p+1)/p}), \\ W_\chi(\phi, \chi) &= p a \left[\left(\frac{\chi}{a} \right)^{(p-1)/p} - \phi \left(\frac{\chi}{a} \right)^{1/p} \right]. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Consequentemente, ao escolhermos $c_1 = 0$ e $b_3 = 0$ (no intuito de evitar potências negativas na forma final do potencial), ficamos com $c_3 = -c_2 = 0$ e $b_1 + b_2 = 1$, o que nos leva à função de contra-peso

$$g(\phi, \chi) = -\frac{b_2 p^2 a^2}{c_2 p + 1} \left(\frac{\chi}{a}\right)^{(p+1)/p} - \frac{a_2}{c_2} p \left[\left(\frac{\chi}{a}\right)^{(p-1)/p} - \phi \left(\frac{\chi}{a}\right)^{1/p} \right] - \frac{a_1}{c_2} p \left[\left(\frac{\chi}{a}\right)^{(p-1)/p} - \left(\frac{\chi}{a}\right)^{(p+1)/p} \right]. \quad (4.73)$$

Como nos casos prévios, a aplicação da função de deformação nos permite reescrever a relação acima como

$$g(\phi) = -\frac{b_2 p^2 a^2}{c_2 p + 1} \phi^{(p+1)/p} - \frac{a_2 + a_1}{c_2} p (\phi^{(p-1)/p} - \phi^{(p+1)/p}). \quad (4.74)$$

Deste modo, os resultados anteriores possibilitam a determinação do superpotencial efetivo

$$W(\phi, \chi) = b_1 p^2 a^2 \left[\frac{1}{2p-1} \left(\frac{\chi}{a}\right)^{(2p-1)/p} - \frac{1}{2p+1} \left(\frac{\chi}{a}\right)^{(2p+1)/p} \right] + b_2 p^3 \frac{a^2 \phi^{(2p+1)/p}}{(p+1)(2p+1)} + b_2 p^2 a^2 \left[\frac{1}{2p-1} \left(\frac{\chi}{a}\right)^{(2p-1)/p} - \frac{\phi}{p+1} \left(\frac{\chi}{a}\right)^{(p+1)/p} \right] + p^2 \left[\frac{\phi^{(2p-1)/p}}{2p-1} - \frac{\phi^{(2p+1)/p}}{2p+1} \right]. \quad (4.75)$$

A partir do superpotencial, calculamos diretamente as derivadas

$$W_\phi = p (\phi^{(p-1)/p} - \phi^{(p+1)/p}) + \frac{b_2 p^2 a^2}{p+1} \left[\phi^{(p+1)/p} - \left(\frac{\chi}{a}\right)^{(p+1)/p} \right], \quad (4.76)$$

e

$$W_\chi = b_1 p a \left[\left(\frac{\chi}{a}\right)^{(p-1)/p} - \left(\frac{\chi}{a}\right)^{(p+1)/p} \right] + b_2 p a \left[\left(\frac{\chi}{a}\right)^{(p-1)/p} - \phi \left(\frac{\chi}{a}\right)^{1/p} \right]. \quad (4.77)$$

Logo, somos capazes de escrever a forma final do potencial $V(\phi, \chi)$ e construir o modelo de dois campos correspondente. Uma escolha interessante de nossos parâmetros, consiste em tomar $p = 3$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ e $a = 1$ nas relações W_ϕ e W_χ , implicando em

$$W_\phi = 3\phi^{2/3} - \frac{3}{4}\phi^{4/3} - \frac{9}{4}\chi^{4/3}; \quad W_\chi = 3\chi^{2/3} - 3\phi\chi^{1/3} \quad (4.78)$$

cujo superpotencial é

$$W(\phi, \chi) = \frac{9}{5} (\phi^{5/3} + \chi^{5/3}) - \frac{9}{28} \phi^{7/3} - \frac{9}{4} \phi \chi^{4/3}. \quad (4.79)$$

As soluções analíticas deste modelo são

$$\phi(x) = \tanh^3(x) \quad \text{e} \quad \chi(x) = \tanh^3(x), \quad (4.80)$$

demonstrando pela primeira vez, um modelo de dois campos escalares composto pelo acoplamento de dois *kinks* duplos.

A fim de ilustrar nosso modelo de dois campos, geramos os potenciais presentes na Figura 4.4. O primeiro caso, trata-se de $V(\phi, \chi)$ com $p = 1$, $a = 1/2$, $b_2 = 1$, $b_1 = 0$ e $b_3 = 0$, com os mínimos $(-1, -0.5)$, $(-0.3780, -1.3229)$, $(0.3780, 1.3229)$ e $(1, 0.5)$, cuja órbita analítica é dada por (4.67) e (4.70).

No segundo caso, observamos a forma de $V(\phi, \chi)$ para o acoplamento entre dois *kinks* duplos, onde consideramos $p = 3$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ e $b_3 = 0$, com os vácuos $(-1, -1)$, $(-1, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, -1)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, -1)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$ no plano (ϕ, χ) . Os defeitos do tipo *kink* duplo que compõem esta órbita podem ser vistos na Figura 4.5.

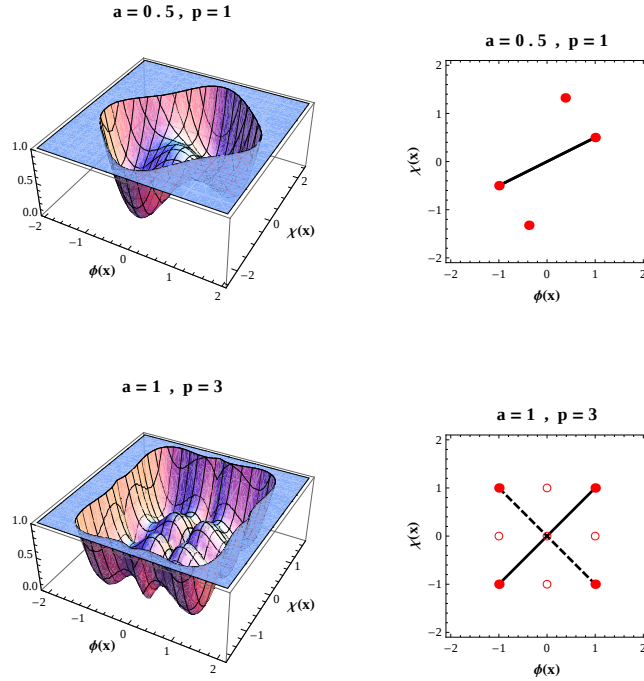


Figura 4.4: Os gráficos mostram diferentes formas do potencial $V(\phi, \chi)$, seus vácuos e suas respectivas órbitas analíticas para acoplamento entre modelos- p . Os pontos vazios representam os mínimos $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$.

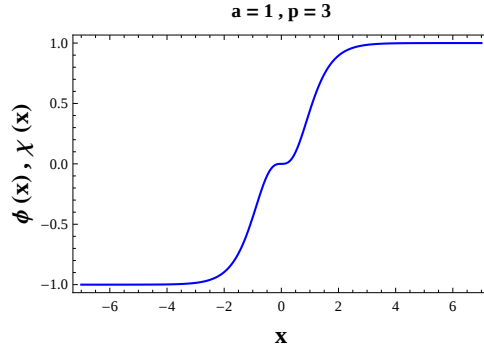


Figura 4.5: Soluções do tipo *kink* duplo para os campos $\phi(x)$ e $\chi(x)$.

Os pontos vazios no plano (ϕ, χ) mostram mínimos onde $V_{\phi\phi}(\phi_{min}, \chi_{min}) = \infty$ ou $V_{\chi\chi}(\phi_{min}, \chi_{min}) = \infty$, sendo este comportamento o responsável pelo aparecimento de *kinks* duplos. Além disso, ao invertermos o sinal da solução analítica do campo χ determinamos a órbita correspondente à linha tracejada na Figura 4.4. Evidentemente, é possível obter diversos novos modelos ao trabalharmos com valores distintos tanto para p quanto para os outros parâmetros.

Capítulo 5

Movimento Browniano e o Formalismo via Integrais de Trajetória

5.1 Introdução

A versão mais popular na literatura científica da equação de Langevin, é conhecida como Markoviana, tratando-se de uma abordagem simplificada, onde consideramos um modelamento ideal de interações entre a partícula suspensa e o líquido. Porém, há também uma outra versão mais elaborada chamada de não-Markoviana que, tanto quanto a Markoviana, possui uma série de aplicações. Na primeira parte deste capítulo, apresentamos de forma detalhada os conceitos fundamentais do movimento browniano, e ainda, discutiremos sobre as características e diferenças dos processos Markovianos e não-Markovianos.

Já na segunda parte deste capítulo, propomos uma abordagem alternativa para a obtenção das correlações relativas à equação de Langevin Markoviana, na qual a dinâmica é obtida através de um formalismo lagrangiano e hamiltoniano e utilizamos o método das integrais de trajetória para quantizar a ação correspondente ao movimento browniano. Esta abordagem é fundamentada em conceitos largamente utilizados em teoria quântica de campos, e esperamos que ela nos traga novas interpretações a respeito do movimento browniano, bem como, possibilite uma discussão deste problema via formalismos de teoria de campos à temperatura finita, como o formalismo da dinâmica dos campos térmicos [125] e de Schwinger [125–127].

5.2 Movimento Browniano - Conceitos Fundamentais

5.2.1 Equação de Langevin - Ruído Branco

As discussões a respeito do movimento browniano são baseadas no estudo da equação diferencial

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v + \eta(t), \quad (5.1)$$

que é nada mais, nada menos, do que a lei de Newton para uma partícula de massa “ m ”, suspensa em uma solução líquida e sujeita a uma força de atrito com coeficiente α , além de, uma função estocástica $\eta(t)$, mais conhecida como ruído. Este termo está relacionado com os incontáveis graus de liberdade experimentados por nossa partícula browniana, devido a interação desta com as partículas do líquido. Nossa função estocástica satisfaz as correlações

$$\langle \eta(t) \rangle = 0; \quad \langle \eta(t) \eta(t') \rangle = 2B \delta(t - t'), \quad (5.2)$$

onde B é o parâmetro de dispersão relativo à distribuição gaussiana e as correlações caracterizam um comportamento conhecido como ruído branco, ou Markoviano. Ao integramos (5.1), determinamos que a velocidade da partícula fica escrita como

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t} + \frac{e^{-\frac{\alpha}{m}t}}{m} \int_0^t ds \eta(s) e^{\frac{\alpha}{m}s}, \quad (5.3)$$

e podemos utilizar este resultado junto com as correlações para determinar que a média da velocidade quadrática é

$$\langle v^2(t) \rangle = \left(v_0^2 - \frac{B}{m\alpha} \right) e^{-\frac{2\alpha}{m}t} + \frac{B}{m\alpha}. \quad (5.4)$$

Sabemos ainda, a partir do teorema de equipartição de energia, que energia livre de um gás ideal unidimensional é dada por

$$E = \frac{T}{2}; \quad \text{com } k_B = 1, \quad (5.5)$$

onde T representa a temperatura do gás. Assim, se igualarmos a última equação com a energia cinética de nossa partícula, obteremos a relação

$$\langle v^2(t) \rangle = \frac{T}{m}, \quad (5.6)$$

e estabelecendo que a configuração de equilíbrio térmico ocorre em $t \rightarrow \infty$ na equação (5.4), ficamos com

$$\langle v^2(t) \rangle = \frac{B}{m\alpha} = \frac{T}{m}; \quad B = \alpha T, \quad (5.7)$$

nos informando que a constante “ B ” é independente da massa da partícula e positivo definida. Tal resultado é conhecido na literatura como teorema da flutuação-dissipação. Contudo, o parâmetro físico mais interessante relativo ao movimento browniano, é o coeficiente de difusão. Para obtê-lo, devemos trabalhar com a evolução temporal da coordenada de nossa partícula browniana, ou seja, $x(t)$, cuja forma pode ser determinada a partir de

$$x(t) = x_0 + \int_0^t dt' v(t'), \quad (5.8)$$

implicando em

$$\langle x(t) \rangle = x_0 + \frac{v_0 m}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m} t}), \quad (5.9)$$

além de,

$$\langle x^2(t) \rangle = x_0^2 + 2 x_0 v_0 \frac{m}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m} t}) + \lim_{t' \rightarrow t} \int_0^t \int_0^{t'} d\bar{t} d\bar{t}' \langle v(\bar{t}) v(\bar{t}') \rangle. \quad (5.10)$$

O próximo passo consiste em desenvolver as integrais da média $\langle v(t)v(t') \rangle$. Este procedimento é muito popular em livros textos e seguimos a linha apresentada em [118]. Assim, temos

$$\langle v(t)v(t') \rangle = v_0^2 e^{-\frac{\alpha}{m}(t+t')} + \frac{e^{-\frac{\alpha}{m}(t+t')}}{m^2} \int_0^t \int_0^{t'} ds ds' \langle \eta(s)\eta(s') \rangle e^{\frac{\alpha}{m}(s+s')}, \quad (5.11)$$

mas por outro lado,

$$\frac{1}{m^2} \int_0^t \int_0^{t'} ds ds' \langle \eta(s)\eta(s') \rangle e^{\frac{\alpha}{m}(s+s')} = \frac{2B}{m^2} \int_0^t ds e^{\frac{2\alpha}{m}s} \Theta(t' - s); \quad \text{para } t < t', \quad (5.12)$$

ou

$$\frac{1}{m^2} \int_0^t \int_0^{t'} ds ds' \langle \eta(s)\eta(s') \rangle e^{\frac{\alpha}{m}(s+s')} = \frac{2B}{m^2} \int_0^{t'} ds' e^{\frac{2\alpha}{m}s'} \Theta(t - s'); \quad \text{para } t > t', \quad (5.13)$$

o que nos leva a,

$$\langle v(t)v(t') \rangle = e^{-\frac{\alpha}{m}(t+t')} \left\{ v_0^2 + \frac{B}{\alpha m} \left(e^{\frac{2\alpha}{m}t} - 1 \right) \right\}; \quad \text{para } t < t', \quad (5.14)$$

ou

$$\langle v(t)v(t') \rangle = e^{-\frac{\alpha}{m}(t+t')} \left\{ v_0^2 + \frac{B}{\alpha m} \left(e^{\frac{2\alpha}{m}t'} - 1 \right) \right\}; \quad \text{para } t > t'. \quad (5.15)$$

Consequentemente, culminamos no seguinte resultado

$$\begin{aligned} \lim_{t' \rightarrow t} \int_0^t \int_0^{t'} d\bar{t} d\bar{t}' \langle v(\bar{t}) v(\bar{t}') \rangle &= \frac{v_0^2 m^2}{\alpha^2} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t})^2 + \lim_{t' \rightarrow t} 2 \frac{T}{m} \int_0^t \int_0^{t'} d\bar{t} d\bar{t}' e^{-\frac{\alpha}{m}(\bar{t}' - \bar{t})} \\ &\quad - \lim_{t' \rightarrow t} \frac{T}{m} \int_0^t \int_0^{t'} d\bar{t} d\bar{t}' e^{-\frac{\alpha}{m}(\bar{t}' + \bar{t})}, \end{aligned}$$

onde o fator “2”, em frente ao segundo termo à direita da igualdade, computa as duas possibilidades de ordenamento temporal entre os intervalos t e t' , além de utilizarmos o fato de $B = \alpha T$. Agora, ao realizarmos as integrações simples, obtemos

$$\lim_{t' \rightarrow t} \int_0^t \int_0^{t'} d\bar{t} d\bar{t}' \langle v(\bar{t}) v(\bar{t}') \rangle = \frac{v_0^2 m^2}{\alpha^2} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m} t})^2 + \frac{T m}{\alpha^2} \left[-5 + 4 e^{-\frac{\alpha}{m} t} - e^{-\frac{2\alpha}{m} t} + 2 e^{\frac{\alpha}{m} t} \right], \quad (5.16)$$

e expandindo $e^{\frac{\alpha}{m} t}$ em série de Taylor, encontramos

$$\lim_{t' \rightarrow t} \int_0^t \int_0^{t'} d\bar{t} d\bar{t}' \langle v(\bar{t}) v(\bar{t}') \rangle = \frac{v_0^2 m^2}{\alpha^2} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m} t})^2 + \frac{T m}{\alpha^2} \left[-3 + 4 e^{-\frac{\alpha}{m} t} - e^{-\frac{2\alpha}{m} t} + \frac{2\alpha}{m} t \right], \quad (5.17)$$

implicando em,

$$\begin{aligned} \langle x(t)^2 \rangle &= x_0^2 + 2 x_0 v_0 \frac{m}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m} t}) + \frac{v_0^2 m^2}{\alpha^2} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m} t})^2 \\ &\quad + \frac{T m}{\alpha^2} \left[-3 + 4 e^{-\frac{\alpha}{m} t} - e^{-\frac{2\alpha}{m} t} + \frac{2\alpha}{m} t \right], \end{aligned} \quad (5.18)$$

além de,

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{T m}{\alpha^2} \left[-3 + 4 e^{-\frac{\alpha}{m} t} - e^{-\frac{2\alpha}{m} t} + \frac{2\alpha}{m} t \right]. \quad (5.19)$$

Após calcularmos as últimas equações, podemos analisar o que ocorre com a coordenada $x(t)$ nos valores extremos de t . Primeiramente, focamos em pequenos valores do tempo, o que nos leva a

$$\langle x(t) \rangle = x_0 + v_0 t - \frac{v_0}{2} \frac{\alpha}{m} t^2; \quad \langle x^2(t) \rangle = x_0^2 + 2 x_0 v_0 t + v_0 \left(v_0 - \frac{\alpha x_0}{m} \right) t^2, \quad (5.20)$$

tratando-se do comportamento esperado de um sistema clássico, sem qualquer influência do ruído. Já, para grandes valores de t , simplesmente determinamos que

$$\langle \Delta x^2 \rangle \rightarrow \frac{2T}{\alpha} t \equiv 2 D t, \quad (5.21)$$

consequentemente,

$$D = \frac{T}{\alpha}, \quad (5.22)$$

e “ D ” é nosso coeficiente de difusão. Este é o celebrado resultado obtido por Einstein em 1905 [94], todavia, esta abordagem do problema remete aos trabalhos de Langevin [95] e G. E. Uhlenbeck e L. S. Ornstein, [96].

5.2.2 Equação de Langevin - Ruído Colorido

As próximas discussões também remetem ao trabalho de Uhlenbeck e Ornstein, [96], onde eles consideram uma equação de Langevin para um oscilador harmônico forçado. A ideia é partir da dinâmica

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v - kx, \quad (5.23)$$

e adicionar o ruído estocástico $\eta(t)$, nos levando a

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v - kx + \eta(t), \quad (5.24)$$

onde fica claro que, ao tomarmos $k = 0$, nós obtemos a equação de Langevin para o movimento browniano. Aqui, novamente consideramos um ruído branco, implicando nas correlações

$$\langle \eta(t) \rangle = 0; \quad \langle \eta(t) \eta(t') \rangle = 2B \delta(t - t'). \quad (5.25)$$

Nós também podemos reescrever nossa dinâmica em uma forma mais conveniente, dada por

$$\dot{v} = -\omega^2 x - \gamma v + \frac{\eta}{m}, \quad (5.26)$$

com,

$$\omega^2 = \frac{k}{m}; \quad \gamma = \frac{\alpha}{m}. \quad (5.27)$$

Uma possível solução para (5.26) é

$$v(t) = e^{-\gamma t} \int_{-\infty}^t ds e^{\gamma s} \left(-\omega^2 x(s) + \frac{\eta(s)}{m} \right), \quad (5.28)$$

a qual, reescrevemos como

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega^2 \int_{-\infty}^t ds e^{-\gamma(t-s)} x(s) + \bar{\eta}(t), \quad (5.29)$$

onde

$$\bar{\eta}(t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t ds e^{-\gamma(t-s)} \eta(s), \quad (5.30)$$

é nosso novo ruído. Com este resultado em mãos em conjunto com as funções de correlação para o ruído branco, nós constatamos que

$$\begin{aligned} \langle \bar{\eta}(t) \bar{\eta}(t') \rangle &= \frac{1}{m^2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t'} ds ds' e^{-\gamma(t+t')} e^{\gamma(s+s')} \langle \eta(s) \eta(s') \rangle \\ &= \frac{2B}{m^2} e^{-\gamma(t+t')} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t'} ds ds' e^{\gamma(s+s')} \delta(s - s'), \end{aligned} \quad (5.31)$$

então,

$$\langle \bar{\eta}(t) \bar{\eta}(t') \rangle = \frac{2B}{m^2} e^{-\gamma(t+t')} \int_{-\infty}^t ds e^{2\gamma s} \Theta(t' - s) \quad \text{para} \quad t < t', \quad (5.32)$$

ou em outras palavras,

$$\langle \bar{\eta}(t) \bar{\eta}(t') \rangle = \frac{2B}{m^2} e^{-\gamma(t+t')} \int_{-\infty}^{t'} ds' e^{2\gamma s'} \Theta(t - s') \quad \text{para} \quad t > t', \quad (5.33)$$

e consequentemente,

$$\langle \bar{\eta}(t) \bar{\eta}(t') \rangle = \frac{B}{\alpha m} e^{-\gamma(t'-t)} \quad \text{para} \quad t < t', \quad (5.34)$$

ou

$$\langle \bar{\eta}(t) \bar{\eta}(t') \rangle = \frac{B}{\alpha m} e^{-\gamma(t-t')} \quad \text{para} \quad t > t'. \quad (5.35)$$

Deste modo, ao trabalharmos com $t > t'$, verificamos a partir de (5.29) que

$$\frac{dx}{dt} = -\omega^2 \int_{-\infty}^t ds K(s, t) x(s) + \bar{\eta}(t), \quad (5.36)$$

com a correlação,

$$\langle \bar{\eta}(t) \bar{\eta}(t') \rangle = \frac{B}{\alpha m} K(t, t'), \quad (5.37)$$

e a função $K(t, t')$ é conhecida como kernel de memória, possuindo a forma

$$K(t, t') = e^{-\gamma(t-t')}. \quad (5.38)$$

É relevante salientar, que o ruído $\bar{\eta}(t)$ continua gaussiano, e este kernel de memória foi o primeiro exemplo de como obter um ruído diferenciado, consequentemente, ele é o mais encontrado na literatura científica no que tange a ruídos coloridos (não-Markovianos).

5.3 Processos Markovianos e não-Markovianos

5.3.1 Processos Markovianos

Os trabalhos científicos envolvendo a equação de Langevin, em sua grande maioria, estão relacionados com a versão Markoviana ou descrição via ruído branco, desta equação. Uma maneira geral de escrever tal dinâmica, é dada por

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{\delta S[x(t')]}{\delta x(t)} + \eta(t), \quad (5.39)$$

onde $x(t)$ é uma variável generalizada e $S[x(t)]$ representa uma ação clássica e

$$\frac{\delta S[x(t')]}{\delta x(t)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \{S[x(t') + \epsilon \delta(t' - t)] - S[x(t')]\} , \quad (5.40)$$

conhecida como derivada funcional. Assim, se desejarmos recuperar a equação de Langevin para o movimento browniano, abordada na seção anterior, basta escolhermos

$$x(t) = v(t); \quad S[v(t)] = \alpha \int dt \frac{v^2}{2} , \quad (5.41)$$

e uma vez que, consideramos um ruído gaussiano, as correlações referentes à (5.39) continuam escritas como

$$\langle \eta(t) \rangle = 0; \quad \langle \eta(t) \eta(t') \rangle = 2 B \delta(t - t') . \quad (5.42)$$

Uma definição simplificada de um processo Markoviano, é que a variável estocástica relativa a ele, em nosso caso, o ruído $\eta(t)$, descreve uma dinâmica que interage instantaneamente com o sistema físico. Podemos exemplificar tal comportamento abordando novamente o movimento browniano. Como vimos, neste sistema, o ruído representa as interações entre a partícula browniana e as partículas do líquido, e caso as interações sejam de natureza Markoviana, elas ocorrerão instantaneamente, o que é considerado um modelo ideal.

Outra descrição comumente encontrada para um processo Markoviano, é que este trata-se de um processo sem memória, uma vez que, a evolução temporal da distribuição de probabilidade relativa ao processo depende somente de seu valor imediatamente anterior. Uma consequência deste comportamento, é que se nosso sistema dinâmico Markoviano é preparado no estado de equilíbrio, ele permanecerá nesta configuração. A fim de clarificar esta afirmação, voltamos à solução da equação de Langevin para o movimento browniano, onde temos

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m} t} + \int_0^t ds \eta(s) e^{-\frac{\alpha}{m} (t-s)} .$$

Deste modo, ao calcularmos a correlação $\langle v^2(t) \rangle$, encontramos

$$\langle v^2(t) \rangle = \left(v_0^2 - \frac{B}{m \alpha} \right) e^{-\frac{\alpha}{m} t} + \frac{B}{m \alpha} .$$

A partir do último resultado, podemos inferir que a configuração de equilíbrio ocorre para $t \rightarrow \infty$, implicando em

$$\langle v^2(t) \rangle = \frac{B}{m \alpha} , \quad (5.43)$$

porém, o mesmo resultado seria obtido para qualquer instante de tempo, se nossa velocidade inicial for

$$v_0^2 = \frac{B}{m\alpha}, \quad (5.44)$$

o que significa que o sistema foi preparado em equilíbrio e como trata-se de um processo Markoviano, suas características são imutáveis.

5.3.2 Processos não-Markovianos

Ao descrevermos sistemas físicos reais, nós esperamos que suas interações ocorram em intervalos finitos de tempo, ou em outras palavras, estes sistemas são não-Markovianos, veja por exemplo, [119]. Podemos dizer assim, que o processo Markoviano é uma classe especial de processos não-Markovianos como mencionado por [120–122]. Deste modo, ao trabalharmos com processos não-Markovianos os efeitos de memória são essenciais para a evolução temporal da distribuição de probabilidades e a equação de Langevin é escrita em termos de uma nova estrutura dinâmica, conhecida como equação de Langevin generalizada.

Há evidências que ao considerarmos intervalos de tempo longos o suficiente, a dinâmica não-Markoviana tenderia à Markoviana, contudo, não podemos generalizar este comportamento para todos os tipos de sistemas físicos, como foi observado na referência [123], na qual são abordados casos em que este limite nem sempre é verdadeiro, mas sim dependente dos parâmetros físicos dos sistemas analisados.

A maneira padrão de introduzir um kernel de memória na equação de Langevin é dada segundo

$$\frac{dx(t)}{dt} = - \int ds K(t, s) \frac{\delta S[x(t')]}{\delta x(s)} + \eta(t), \quad (5.45)$$

na qual vemos claramente que, se

$$K(t, s) = \delta(t - s), \quad (5.46)$$

recuperamos a abordagem Markoviana. Além disso, as correlações para nosso ruído são

$$\langle \eta(t) \rangle = 0; \quad \langle \eta(t) \eta(t') \rangle = 2 K(t, t'), \quad (5.47)$$

significando que, agora estamos trabalhando com ruído colorido, e caso ele seja gaussiano, sua distribuição de probabilidade correspondente é

$$P[\eta] = \mathcal{N} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int dt dt' \eta(t) [K^{-1}(t, t')] \eta(t') \right\}. \quad (5.48)$$

Consequentemente, nós concluímos que os sistemas dinâmicos físicos fora do equilíbrio térmico são, em geral, descritos por processos não-Markovianos, cujas soluções são determinadas via integração da forma geral da equação de Langevin. Este comportamento peculiar também foi alvo de discussão do trabalho desenvolvido por Gleiser e Ramos, [124], no qual eles determinaram a dinâmica fora do equilíbrio térmico de uma interação do tipo ϕ^4 em teoria de campo escalar.

5.4 A Lagrangiana e a Hamiltoniana para o Movimento Browniano

A definição de uma lagrangiana e de uma hamiltoniana para o movimento browniano é de suma importância para o estabelecimento do formalismo de integrais de trajetória. Nossa proposta para uma lagrangiana que nos leve à equação de Langevin, inicia-se segundo

$$\mathcal{L} = \lambda (\dot{v} + \gamma v) , \quad (5.49)$$

onde as variáveis $\lambda(t)$ e $v(t)$ são determinísticas e γ é uma constante. A partir desta lagrangiana, calculamos diretamente que

$$\Pi_v = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} = \lambda ; \quad \Pi_\lambda = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 , \quad (5.50)$$

onde Π_v e Π_λ são os momentos canonicamente conjugados com respeito as variáveis $v(t)$ e $\lambda(t)$, respectivamente. Os ingredientes anteriores, nos possibilitam definir os multiplicadores de Lagrange

$$\varphi_1 = \Pi_v - \lambda \simeq 0 ; \quad \varphi_2 = \Pi_\lambda \simeq 0 , \quad (5.51)$$

os quais serão essenciais na construção da hamiltoniana

$$H = \Pi_v \dot{v} + \Pi_\lambda \dot{\lambda} - \mathcal{L} + \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 , \quad (5.52)$$

ou

$$H = -\gamma \lambda v + \alpha_1 (\Pi_v - \lambda) + \alpha_2 \Pi_\lambda . \quad (5.53)$$

Tomamos por definição, que os multiplicadores de Lagrange são constantes, implicando em

$$\dot{\varphi}_1 = \{\Pi_v - \lambda, H\} = \gamma \lambda - \alpha_2 = 0 , \quad (5.54)$$

além é claro de,

$$\dot{\varphi}_2 = \{\Pi_\lambda, H\} = \gamma v + \alpha_1 = 0, \quad (5.55)$$

resultando em

$$\alpha_1 = -\gamma v; \quad \alpha_2 = \gamma \lambda. \quad (5.56)$$

Substituindo as últimas relações em nossa hamiltoniana, encontramos diretamente que

$$H = \gamma (\lambda \Pi_\lambda - v \Pi_v), \quad (5.57)$$

já os parênteses de Poisson envolvendo os multiplicadores de Lagrange, nos levam à

$$\{\varphi_1, \varphi_2\} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \Pi_v} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \Pi_v} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \Pi_\lambda} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \Pi_\lambda} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda}, \quad (5.58)$$

ou seja,

$$\{\varphi_1, \varphi_2\} = -1 = -\{\varphi_2, \varphi_1\}, \quad (5.59)$$

as quais podem ser reescritas na notação matricial

$$\{\varphi_a, \varphi_b\} = C_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.60)$$

Consequentemente, somos capazes de utilizar a matriz C_{ab} e sua inversa C_{ab}^{-1} como base para a definição dos parênteses de Dirac, cuja forma geral é

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \varphi_a\} C_{ab}^{-1} \{\varphi_b, B\}. \quad (5.61)$$

Agora, determinamos diversos parênteses de Dirac partindo de

$$\{v, v\}_D = -\{v, \varphi_1\} C_{12}^{-1} \{\varphi_2, v\} - \{v, \varphi_2\} C_{21}^{-1} \{\varphi_1, v\} = 0, \quad (5.62)$$

e procedendo de maneira análoga, verificamos que

$$\{\Pi_v, \Pi_v\}_D = 0; \quad \{v, \Pi_v\}_D = 1, \quad (5.63)$$

além de,

$$\{\lambda, \lambda\}_D = 0; \quad \{\Pi_\lambda, \Pi_\lambda\}_D = 0; \quad \{\lambda, \Pi_\lambda\}_D = 0, \quad (5.64)$$

e

$$\{v, \Pi_\lambda\}_D = 0; \quad \{\Pi_v, \Pi_\lambda\}_D = 0; \quad \{v, \lambda\}_D = 1. \quad (5.65)$$

Os resultados anteriores nos levam a concluir definitivamente que

$$\Pi_\lambda = 0; \quad \Pi_v = \lambda, \quad (5.66)$$

implicando diretamente na hamiltoniana

$$H = -\gamma v \Pi_v, \quad (5.67)$$

bem como, na dinâmica

$$\dot{v} = \{v, H\}_D = -\gamma v \{v, \Pi_v\}_D = -\gamma v, \quad (5.68)$$

ou

$$\dot{v} + \gamma v = 0. \quad (5.69)$$

Determinamos ainda, que a dinâmica obedecida pelo momento canonicamente conjugado é

$$\dot{\Pi}_v = \{\Pi_v, H\}_D = \gamma \Pi_v; \quad \dot{\Pi}_v - \gamma \Pi_v = 0. \quad (5.70)$$

O próximo passo consiste em acoplar o ruído estocástico Markoviano $\eta(t)$ à nossa lagrangiana inicial, de tal maneira que

$$\mathcal{L} = \lambda \left(\dot{v} + \gamma v - \frac{\eta}{m} \right), \quad (5.71)$$

consequentemente, nossa função $v(t)$ não é mais determinística. Uma vez mais, podemos determinar diretamente que os momentos canonicamente conjugados da lagrangiana anterior são

$$\Pi_v = \lambda; \quad \Pi_\lambda = 0, \quad (5.72)$$

assim como, definir os multiplicadores de Lagrange

$$\varphi_1 = \Pi_v - \lambda \simeq 0; \quad \varphi_2 = \Pi_\lambda \simeq 0, \quad (5.73)$$

e finalmente, nossa hamiltoniana possui a seguinte estrutura:

$$H = -\lambda (\gamma v - \eta) + a_1 (\Pi_v - \lambda) + a_2 \Pi_\lambda. \quad (5.74)$$

Desta maneira, podemos calcular as constantes a_1 e a_2 impondo que

$$\dot{\varphi}_1 = \{\varphi_1, H\} = \gamma \lambda - a_2 = 0, \quad (5.75)$$

e

$$\dot{\varphi}_2 = \gamma v - \frac{\eta}{m} + a_1 = 0, \quad (5.76)$$

o que resulta em

$$a_1 = -\gamma v + \frac{\eta}{m}; \quad a_2 = \gamma \lambda. \quad (5.77)$$

Consequentemente, podemos reescrever nossa hamiltoniana segundo

$$H = \Pi_v \left(-\gamma v + \frac{\eta}{m} \right) + \gamma \lambda \Pi_\lambda, \quad (5.78)$$

e uma vez mais,

$$\{\varphi_a, \varphi_b\} = C_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C_{ab}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.79)$$

além dos parênteses de Dirac,

$$\{v, \Pi_v\}_D = \{v, \lambda\}_D = 1, \quad (5.80)$$

o que nos leva a concluir definitivamente que

$$H = \lambda \left(-\gamma v + \frac{\eta}{m} \right); \quad \lambda = \Pi_v. \quad (5.81)$$

Com a forma final da hamiltoniana em mãos, somos capazes de calcular diretamente as equações de primeira ordem,

$$\dot{v} = \{v, H\}_D = -\gamma v + \frac{\eta}{m}; \quad \dot{\lambda} = \{\lambda, H\}_D = \gamma \lambda, \quad (5.82)$$

corroborando com as dinâmicas via equação de movimento e via parênteses de Poisson.

5.5 Formalismo via Integrais de Trajetória

Ao falarmos em teoria quântica de campos, um objeto que é de extrema importância trata-se do propagador, ou em outras palavras, das funções de Green que solucionam nossas equações de movimento. Tais propagadores são calculados considerando o valor esperado no vácuo do produto temporalmente ordenado dos campos que compõem um determinado modelo, ou seja,

$$\Delta_{i,j,\dots}(x_1, x_2, \dots) = \langle 0 | T(\phi_i(x_1) \phi_j(x_2) \dots) | 0 \rangle. \quad (5.83)$$

Este último resultado pode ser reescrito em uma forma mais conveniente ao realizarmos a quantização dos campos via integrais de trajetória. Como é bem conhecido, há diversas vantagens em adotar esse procedimento de quantização, no nosso caso em especial, as integrais de trajetória simplificam muito a determinação das correlações, uma vez que, trabalharemos com quantidades clássicas ou “*c-numbers*” e não com os operadores de campo.

Além disso, a quantização de modelos mais sofisticados é facilitada quando realizada via integrais de trajetória.

No intuito de auxiliar na compreensão dos cálculos futuros, vamos expor uma breve e pouco rigorosa introdução a respeito do cálculo de correlações utilizando as integrais de trajetória¹. Sendo assim, considere

$$|x\rangle \quad \text{e} \quad |p\rangle, \quad (5.84)$$

tratando-se de um estado quântico na representação de coordenadas e um estado quântico na representação dos momentos, respectivamente. Estes estados formam bases ortonormais, implicando nas propriedades algébricas

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x') \quad \text{e} \quad \langle p|p'\rangle = \delta(p - p'), \quad (5.85)$$

além das identidades

$$\int dx |x\rangle \langle x| = 1 \quad \text{e} \quad \int dp |p\rangle \langle p| = 1. \quad (5.86)$$

Outra relação interessante pode ser obtida considerando

$$\begin{aligned} \langle x|x'\rangle &= \delta(x - x') \\ \int dp \langle x|p\rangle \langle p|x'\rangle &= \delta(x - x') \\ \int dp \langle x|p\rangle \langle p|x'\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ip(x-x')}, \end{aligned} \quad (5.87)$$

onde utilizamos a transformada de Fourier da Delta de Dirac na última equação², logo constatamos que

$$\langle p|x\rangle = \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\pi}} = \langle x|p\rangle^\dagger. \quad (5.88)$$

Ambos os estados são definidos na representação de Schrödinger, mas como bem sabemos, estados na representação de Heisenberg são relacionados a estados na representação de Schrödinger segundo

$$|x, t\rangle_H = e^{iHt}|x\rangle, \quad (5.89)$$

de modo a manter a amplitude de probabilidade invariante, ou seja,

$$\langle x, t|x, t\rangle = \langle x|e^{-iHt}e^{iHt}|x\rangle = \langle x|x\rangle. \quad (5.90)$$

¹Para mais detalhes a respeito desses conceitos fundamentais e uma abordagem mais aprofundada, vide [128].

²Ao longo de nossas discussões, consideramos $\hbar = 1$.

Podemos ainda, mostrar facilmente a identidade

$$\begin{aligned}
\int dx |x, t\rangle \langle x, t| &= \int dx e^{iHt} |x\rangle \langle x| e^{-iHt} \\
&= e^{iHt} \left\{ \int dx |x\rangle \langle x| \right\} e^{-iHt} \\
&= e^{iHt} 1 e^{-iHt} = 1.
\end{aligned} \tag{5.91}$$

A fim de construir uma descrição baseada nas integrais de trajetória para o movimento browniano, partimos da hamiltoniana

$$H = \lambda \left(\frac{\eta}{m} - \gamma v \right), \tag{5.92}$$

aqui, como mencionamos, $\eta(t)$ é um ruído Markoviano (branco), cujas correlações são

$$\langle \eta(t) \rangle = 0; \quad \langle \eta(t) \eta(t') \rangle = 2B \delta(t - t'), \tag{5.93}$$

além disso, nossa variável estocástica está relacionada à uma distribuição de probabilidade gaussiana, ou seja,

$$P[\eta] = \mathcal{N} \exp \left\{ -\frac{1}{4B} \int_{t_i}^{t_f} \eta^2 dt \right\}, \tag{5.94}$$

na qual o parâmetro B é sua dispersão.

O primeiro passo para estabelecer o formalismo das integrais de trajetória, consiste em escrever a amplitude de transição $\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle$ como

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int dx_1 \langle x_f, t_f | x_1, t_1 \rangle \langle x_1, t_1 | x_i, t_i \rangle, \tag{5.95}$$

onde utilizamos a identidade

$$\int dx_1 |x_1, t_1\rangle \langle x_1, t_1| = 1.$$

Assim, ao dividirmos nosso intervalo temporal em “ N ” partes iguais, constatamos que

$$t_f - t_i = N\epsilon; \quad t_n = t_i + n\epsilon, \tag{5.96}$$

e o limite contínuo requer $N \rightarrow \infty$ e $\epsilon \rightarrow 0$. Isto leva nossa amplitude de transição à seguinte representação

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dx_1 \dots dx_{N-1} \langle x_f, t_f | x_{N-1}, t_{N-1} \rangle \dots \langle x_1, t_1 | x_i, t_i \rangle, \tag{5.97}$$

a qual podemos reescrever segundo

$$\begin{aligned}
\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dx_1 \dots dx_{N-1} \langle x_f | e^{-iH(t_f - t_{N-1})} | x_{N-1} \rangle \dots \langle x_1 | e^{-iH(t_1 - t_i)} | x_i \rangle \\
&\quad \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dx_1 \dots dx_{N-1} \langle x_f | e^{-iH\epsilon} | x_{N-1} \rangle \dots \langle x_1 | e^{-iH\epsilon} | x_i \rangle.
\end{aligned}$$

Como H é escrito em termos dos operadores $\hat{p}$ e $\hat{x}$, é importante atentarmos para o fato de que esses operadores não comutam. Deste modo, o operador H pode ser escrito de duas representações equivalentes, são elas a ordem normal (O.N) e a ordem de Weyl (O.W)³. Na ordem normal, o operador momento $\hat{p}$ é tomado a esquerda do operador coordenada $\hat{x}$, ou seja,

$$\hat{p} \hat{x} = p x, \quad \hat{x} \hat{p} = p x, \quad (5.98)$$

resultando no produto interno

$$\langle p_j | H^{\text{O.N}} | x_k \rangle = \langle p_j | x_k \rangle H(x_k, p_j), \quad (5.99)$$

bem como, em

$$\langle x' | H^{\text{O.N}} | x \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} e^{-ip(x-x')} H(x, p). \quad (5.100)$$

Já na ordem de Weyl, o produto de operadores $\hat{p} \hat{x}$ é dado por

$$\hat{p} \hat{x} = \frac{1}{2} (p x + x p). \quad (5.101)$$

Logo, considerando o ordenamento de Weyl, o produto interno da nossa hamiltoniana é

$$\langle x' | H(\hat{x}, \hat{p}) | x \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} e^{-ip(x-x')} H\left(\frac{x+x'}{2}, p\right), \quad (5.102)$$

que ao ser substituído na amplitude de transição, resulta em

$$\begin{aligned} \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dx_1 \dots dx_{N-1} \frac{dp_1}{2\pi} \dots \frac{dp_N}{2\pi} \\ &\times \exp \left\{ i\epsilon \sum_{n=1}^N \left[p_n \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} \right) - H\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}, p_n\right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

a qual pode ser representada como

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \exp \left\{ i \int dt [p \dot{x} - H(x, p)] \right\}, \quad (5.103)$$

onde utilizamos a notação padrão

$$\int \mathcal{D}x = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dx_1 \dots dx_{N-1} \quad \text{e} \quad \int \mathcal{D}p = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dp_1 \dots dp_N. \quad (5.104)$$

Desta maneira, a amplitude de transição para o movimento browniano possui a forma

$$\langle v_f, t_f | v_i, t_i \rangle = \frac{\mathcal{N}}{(2\pi)^N} \int \mathcal{D}v \mathcal{D}\lambda \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \lambda \left(\dot{v} + \gamma v - \frac{\eta}{m} \right) \right\}, \quad (5.105)$$

³Podemos também escrever o produto dos operadores $\hat{p} \hat{x}$ em termos da representação generalizada $\hat{p} \hat{x} = \frac{1}{\alpha\beta} (\alpha p x + \beta x p)$, nos levando aos mesmos produtos internos obtidos via ordem normal e via ordem de Weyl.

sendo $\mathcal{N}$, uma constante de normalização que iremos determinar após o cálculo das integrais. A partir do resultado anterior, podemos definir o seguinte funcional gerador na ausência de fontes (funcional de vácuo)

$$Z[0] = \frac{\tilde{\mathcal{N}}}{(2\pi)^N} \int \mathcal{D}v \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}\eta \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \lambda \left(\dot{v} + \gamma v - \frac{\eta}{m} \right) - \frac{1}{4B} \int_{t_i}^{t_f} dt \eta^2 \right\}, \quad (5.106)$$

onde a integração sobre $\eta(t)$ leva em conta a influência do ruído em nosso sistema. Ao completarmos um quadrado perfeito com respeito aos termos que envolvem o ruído, concluímos que

$$-\frac{1}{4B} \left(\eta^2 + 4i \frac{\lambda B}{m} \eta \right) = -\frac{1}{4B} \left(\eta + 2i \frac{\lambda B}{m} \right)^2 - \frac{B\lambda^2}{m^2}, \quad (5.107)$$

implicando em uma integração gaussiana simples sobre a variável estocástica $\eta(t)$, nos levando à

$$Z[0] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}v \mathcal{D}\lambda \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \lambda (\dot{v} + \gamma v) - \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{B\lambda^2}{m^2} \right\}, \quad (5.108)$$

onde redefinimos a normalização de forma a obter

$$\tilde{\mathcal{N}} = \left(\frac{\pi}{B} \right)^{\frac{N}{2}} \mathcal{N}. \quad (5.109)$$

O passo seguinte, consiste em completar novamente um quadrado perfeito no expoente da equação (5.108), culminando em

$$-\frac{B\lambda^2}{m^2} + i\lambda (\dot{v} + \gamma v) = -\frac{1}{B} \left(\frac{B\lambda}{m} - \frac{i}{2} m (\dot{v} + \gamma v) \right)^2 - \frac{m^2}{4B} (\dot{v} + \gamma v)^2, \quad (5.110)$$

e após realizarmos uma integração gaussiana para $\lambda(t)$, ficamos com

$$Z[0] = \mathcal{N} (B\pi)^{\frac{N}{2}} \int \mathcal{D}v \exp \left\{ -\frac{m^2}{2\tilde{B}} \int_{t_i}^{t_f} dt (\dot{v} + \gamma v)^2 \right\}, \quad (5.111)$$

onde $\tilde{B} = 2B$. Além disso, podemos reescrever nosso expoente segundo

$$\begin{aligned} (\dot{v} + \gamma v)^2 &= \dot{v}^2 + 2\gamma v \dot{v} + \gamma^2 v^2 \\ &= \frac{d}{dt} (v \dot{v}) - v \ddot{v} + \gamma \frac{d}{dt} (v^2) + \gamma^2 v^2, \end{aligned} \quad (5.112)$$

cujas integrações em relação à variável temporal é

$$\int_{t_i}^{t_f} dt (\dot{v} + \gamma v)^2 = \int_{t_i}^{t_f} dt v \left(-\frac{d^2}{dt^2} + \gamma^2 \right) v + \text{termos de contorno}. \quad (5.113)$$

Estes termos de contorno contribuem somente com fatores de fase, os quais podem ser absorvidos pela constante de normalização. Assim, o funcional de vácuo é escrito como

$$\begin{aligned} Z[0] &= \mathcal{N} (B\pi)^{\frac{N}{2}} \int \mathcal{D}v \exp \left\{ -\frac{m^2}{2\widetilde{B}} \int_{t_i}^{t_f} dt v A v \right\} \\ &= \mathcal{N} \left(\frac{2B\pi}{m} \right)^N (\det A)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (5.114)$$

onde,

$$A = \left(-\frac{d^2}{dt^2} + \gamma^2 \right). \quad (5.115)$$

O procedimento padrão adotado no cálculo deste determinante, consiste em impor que A satisfaz uma equação de autovalores do tipo

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2} + \gamma^2 \right) \psi_n(t) = \lambda_n \psi_n(t), \quad (5.116)$$

cuja solução analítica é

$$\psi_n(t) = C \sin \left(\frac{n\pi(t-t_i)}{t_f-t_i} \right), \quad (5.117)$$

onde C é uma constante de normalização e os autovetores satisfazem a condição $\psi_n(t_i) = \psi_n(t_f) = 0$. Podemos determinar o valor de C a partir de uma normalização simples, ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_f} dt |\psi(t)|^2 &= \int_{t_i}^{t_f} dt |C|^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi(t-t_i)}{t_f-t_i} \right) \\ &= \frac{t_f-t_i}{2} |C|^2 = 1, \end{aligned} \quad (5.118)$$

logo, $|C| = \sqrt{\frac{2}{t_f-t_i}}$. Consequentemente,

$$\psi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{t_f-t_i}} \sin \left(\frac{n\pi(t-t_i)}{t_f-t_i} \right), \quad (5.119)$$

que ao ser substituído em (5.116), nos leva a

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{t_f-t_i} \right)^2 + \gamma^2. \quad (5.120)$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \det \left(-\frac{d^2}{dt^2} + \gamma^2 \right) &= \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n\pi}{t_f-t_i} \right)^2 + \gamma^2 \right] \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{t_f-t_i} \right)^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{\gamma(t_f-t_i)}{n\pi} \right)^2 \right] \\ &= \widetilde{C} \frac{\sinh \gamma(t_f-t_i)}{\gamma(t_f-t_i)} = \widetilde{C} \frac{\sinh \gamma\tau}{\gamma\tau}, \end{aligned} \quad (5.121)$$

para

$$\tilde{C} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{t_f - t_i} \right)^2 ; \quad \tau = t_f - t_i \text{ (intervalo de tempo total)}. \quad (5.122)$$

Permita-nos analisar nosso funcional gerador com uma fonte $J(t)$, dado pela relação

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}v \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt v \tilde{A} v - \int dt J v \right\}, \quad (5.123)$$

no qual, $\tilde{A} = \frac{m^2}{\tilde{B}} A$. Vamos também, redefinir $v(t)$ como

$$v(t) = \tilde{v}(t) + \frac{\tilde{B}}{m^2} \int dt' G(t - t') J(t'), \quad (5.124)$$

onde estamos considerando

$$\tilde{A} G(t - t') = -\frac{m^2}{\tilde{B}} \delta(t - t'), \quad (5.125)$$

ou

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2} + \gamma^2 \right) G(t - t') = -\delta(t - t'). \quad (5.126)$$

Após estes procedimentos, determinamos que

$$\tilde{A} v(t) = \tilde{A} \tilde{v}(t) - J(t), \quad (5.127)$$

bem como,

$$\frac{1}{2} v(t) \tilde{A} v(t) + J(t) v(t) = \frac{1}{2} \tilde{v}(t) \tilde{A} \tilde{v}(t) + \frac{\tilde{B}}{2m^2} \int_{t_i}^{t_f} dt' J(t) G(t - t') J(t'), \quad (5.128)$$

resultando no funcional gerador

$$Z[J] = Z[0] \exp \left\{ -\frac{\tilde{B}}{2m^2} \int dt dt' J(t) G(t - t') J(t') \right\}. \quad (5.129)$$

Consequentemente, somos capazes de obter nossas correlações físicas computando as derivadas do funcional gerador $Z[J]$ com respeito à fonte $J(t)$ e, após isto, tomando o limite $J \rightarrow 0$. Logo, verificamos diretamente que

$$\langle v(t) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \left. \frac{\delta Z[J]}{\delta J(t)} \right|_{J=0} = -\frac{\tilde{B}}{m^2} G(t - t') J(t) \Big|_{J=0} = 0, \quad (5.130)$$

e a natureza gaussiana do nosso ruído implica que este resultado será o mesmo para todas as potências ímpares de $v(t)$. Nós também estamos interessados em obter a correlação

$$\langle v(t) v(t') \rangle = \frac{1}{Z[0]} \left. \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(t) \delta J(t')} \right|_{J(t)=J(t')=0} = -\frac{\tilde{B}}{m^2} G(t - t'), \quad (5.131)$$

indicando que para determinarmos $\langle v^2(t) \rangle$, precisamos da forma explícita da função $G(t - t')$. Como mostramos previamente, o propagador deve satisfazer a relação

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2} + \gamma^2 \right) G(t - t') = -\delta(t - t').$$

O procedimento padrão para resolver tal equação, consiste em escrever $G(t - t')$ e $\delta(t - t')$ em termos de suas Transformadas de Fourier, cujas formas são

$$G(t - t') = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} G(k) e^{-ik(t-t')} \quad \text{e} \quad \delta(t - t') = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-ik(t-t')}. \quad (5.132)$$

Aplicando as transformadas em (5.126), encontramos

$$G(k) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k^2 + \gamma^2}, \quad (5.133)$$

e consequentemente,

$$G(t - t') = -\frac{1}{2\pi} \int dk \frac{e^{-ik(t-t')}}{(k + i\gamma)(k - i\gamma)}. \quad (5.134)$$

Nossa análise revela que o propagador possui dois polos, localizados em $k = \pm i\gamma$. Então, ao integramos sobre o contorno superior do plano formado pelas partes real e imaginária de k , obtemos

$$G(t - t') = -\frac{(2i\pi)}{2\pi} \frac{e^{\gamma(t-t')}}{2i\gamma} = -\frac{e^{-\gamma(t'-t)}}{2\gamma}, \quad (5.135)$$

que vamos representar na notação

$$G_-(t - t') = -\theta(t' - t) \frac{e^{-\gamma(t'-t)}}{2\gamma}, \quad (5.136)$$

garantindo a convergência do nosso propagador. Por outro lado, ao integramos sobre o contorno inferior deste plano complexo, determinamos

$$G(t - t') = -\frac{(-2i\pi)}{2\pi} \frac{e^{-\gamma(t-t')}}{-2i\gamma} = -\frac{e^{-\gamma(t-t')}}{2\gamma},$$

o qual expressamos como

$$G_+(t - t') = -\theta(t - t') \frac{e^{-\gamma(t-t')}}{2\gamma}. \quad (5.137)$$

Consequentemente, nosso propagador efetivo possui a forma

$$\begin{aligned} G(t - t') &= G_+(t - t') + G_-(t - t') \\ &= -[\theta(t - t') + \theta(t' - t)] \frac{e^{-\gamma|t-t'|}}{2\gamma} = -\frac{e^{-\gamma|t-t'|}}{2\gamma}. \end{aligned} \quad (5.138)$$

Assim, ao substituirmos o propagador na correlação $\langle v(t) v(t') \rangle$, encontramos

$$\langle v(t) v(t') \rangle = -\frac{\tilde{B}}{m^2} \left(-\frac{e^{-\gamma|t-t'|}}{2\gamma} \right) = \frac{B}{m^2 \gamma} e^{-\gamma|t-t'|}, \quad (5.139)$$

e fica claro que para $t = t'$, a correlação $\langle v^2(t) \rangle$ é simplesmente

$$\langle v^2(t) \rangle = \frac{B}{m^2 \gamma} = \frac{B}{m \alpha}, \quad (5.140)$$

onde utilizamos a definição $\gamma = \alpha/m$.

A última equação trata-se exatamente da correlação do estado de equilíbrio térmico, que obtemos via a abordagem padrão do movimento browniano. Esta correlação nos permite calcular explicitamente o valor do parâmetro “ B ”, assumindo a igualdade entre a energia cinética média para a nossa distribuição de velocidades com a energia térmica no estado de equilíbrio (teorema de equipartição), ou em outras palavras,

$$\frac{m}{2} \langle (\Delta v)^2 \rangle = \frac{m}{2} \langle v^2(t) \rangle = \frac{B}{2\alpha} = \frac{T}{2},$$

resultando em $B = \alpha T$, onde T é a temperatura do nosso sistema. Assim, este valor do parâmetro “ B ” é uma consequência direta da conservação da energia total, exigida pelo estado de equilíbrio do sistema físico.

Conclusões

Iniciamos nossos comentários finais a partir das diversas aplicações do método de deformação. Ilustramos no capítulo 2, como este procedimento pode ser utilizado na determinação de novos potenciais polinomiais deformando o modelo ϕ^4 . Esta primeira aplicação permitiu a obtenção de novas soluções analíticas de modelos compostos por um campo escalar estático, com alto grau de não-linearidade. Além disso, os conceitos apresentados no capítulo mencionado, nos inspiraram a considerar maiores graus de complexidade no processo de deformação, resultando nos modelos analisados no capítulo 3.

No capítulo 3, estudamos primeiramente uma diversidade de modelos descritos por potenciais periódicos. Tal investigação, baseada em uma função de deformação composta, nos levou à obtenção de novas famílias de potenciais e também possibilitou explorar os setores topológicos de cada um de seus constituintes, além das correspondentes estruturas de defeitos. Os potenciais periódicos são caracterizados pela multiplicidade em seus distintos setores, sendo este, o parâmetro que utilizamos para definir as diferentes famílias multi sine-Gordon. É relevante enfatizarmos que calculamos os superpotenciais desses modelos explicitamente, tratando-se de um procedimento importante para investigar as energias dos *kinks*. Além disso, as energias dos defeitos topológicos foram determinadas diretamente, via função deformadora.

Outra característica interessante é que estes modelos periódicos, abrem novas linhas de investigação em diversos contextos. Um dos mais interessantes, seria introduzir estes modelos multi sine-Gordon em cenários de mundos-brana, nos quais as branas podem conter multi estruturas. Tal aplicação pode ser realizada no escopo de diversas referências na literatura dessa temática, como por exemplo, nos trabalhos [14–18, 24–28, 57–67].

A segunda parte do capítulo 3 é fundamentada no estudo de modelos relativísticos também descritos por um campo escalar real. Nestas análises novamente utilizamos uma deformação composta $f(g(\phi))$. A forma funcional explícita desta deformação foi $f(g(\phi)) =$

$\cos(a \arccos(g(\phi) - M\pi)$, com a e M inteiros ou semi-inteiros, e com $g(\phi) = \phi^r$ ou $g(\phi) = 1/\phi^r$, para diversos valores de r . Além disso, a partir da segunda deformação composta, ou seja, $g(\phi) = 1/\phi^r$, nós conseguimos deformar soluções singulares do modelos de partida em soluções regulares do modelo deformado.

As novas famílias correspondentes à essas deformações foram estudadas em grandes detalhes, para as quais determinamos defeitos tipo *kink*, *lump* e outras formas de soluções topológicas e não-topológicas, além dos superpotenciais, os quais nos permitem calcular as energias, bem como analisar a estabilidade linear e obter os modos zeros. Evidenciamos ainda, que todos os potenciais puderam ser expressados em uma forma fatorada, informando imediatamente suas estruturas de mínimos correspondentes. Como mostramos, as duas famílias de modelos comportam-se de maneira muito diferente e acreditamos que elas podem ser utilizadas em diversas aplicações práticas. Uma investigação potencialmente interessante seria a presença desses cenários distintos na abordagem de Randall-Sundrum [17], estendido para suportar campos escalares, vide [18] e como foi recentemente considerado nos trabalhos [129–134]. Outras ideias relevantes, seriam nas considerações sobre a formação de padrões na natureza [33], bem como em teorias k -generalizadas [29–32].

As análises do capítulo 4 discorrem sobre nossa proposta de um novo procedimento para gerar modelos de dois campos escalares reais. Nosso método inicia-se com um modelo de um campo escalar conhecido, o qual é utilizado para gerar um novo modelo de um campo via o método de deformação. Então, acoplamos esses dois modelos de um campo de forma não-trivial, determinando um modelo efetivo de dois campos. Este procedimento foi ilustrado com diversos exemplos, mostrando sua eficiência e aplicabilidade envolvendo os mais complexos acoplamentos. Uma vantagem muito importante com respeito a este mecanismo, é que ele nos informa automaticamente um dos pares de soluções analíticas dos novos sistemas.

Esta investigação nos leva à questões interessantes, como por exemplo, na extensão do procedimento para a construção de modelos de três ou mais campos, além do acoplamento entre potenciais de um campo que são não-polinomiais. Outra questão estaria relacionada com modelos cosmológicos, onde este procedimento poderia descrever interações entre energia e matéria escura, como vemos nas referências [135–138]. Há ainda, a possibilidade de sua aplicação em cenários de mundos-brana e também em modelos que descrevem

polímeros em matéria condensada [139–141].

As discussões a respeito do movimento browniano e dos processos Markovianos e não-Markovianos, clarificaram diversas dúvidas a respeito do tratamento de sistemas termodinâmicos fora do equilíbrio térmico, e esperamos também, implementar estes conceitos nos métodos de quantização estocástica que recaiam no formalismo de integrais temporalmente fechadas (formalismo de Schwinger), de maneira consistente. Nossas análises preliminares revelam ainda, que o movimento browniano pode ser descrito com sucesso em termos de uma formulação baseada em integrais de trajetória, deste modo, várias técnicas utilizadas em teoria quântica de campos podem ser aplicadas nesta abordagem.

Outra característica interessante, é que o procedimento via integrais de trajetória esboça uma maneira mais natural de quantizar esse sistema físico e esperamos aplicar este mecanismo também à equação de Langevin generalizada. Além disso, é relevante salientar que nossa abordagem é diferente da formulação padrão via integrais de trajetória adotada na literatura, como podemos ver nos trabalhos [142–144]. Isto porque, nessas referências, os autores usualmente realizam uma mudança de variáveis ao ruído contido na distribuição de probabilidade gaussiana vista em (5.94), reescrevendo $\eta(t)$ em termos de v e $\dot{v}$, via equação de Langevin. Portanto, apesar de nossas investigações nesta linha estarem em um estágio inicial, acreditamos que elas tenham um potencial muito interessante, tanto na descrição usual do movimento browniano relativo a um ruído Markoviano, quanto para equações de Langevin que consideram ruídos não-Markovianos, bem como para a aplicação de formalismos de teoria de campos à temperatura finita.

Finalmente, podemos concluir que os temas abordados neste período de formação caracterizaram discussões passíveis de serem estendidas em um futuro próximo. Algumas das ideias anteriormente citadas, estão em fase de discussão e esperamos que elas nos levem a outros resultados frutíferos.

Apêndice A

O Teorema de Noether

Partimos da ação generalizada

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\partial_\mu \phi, \phi, x^\mu), \quad (\text{A.1})$$

cujas minimização resulta em

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x' \mathcal{L}(\partial_\mu \phi', \phi', x'^\mu) - \int d^4x \mathcal{L}(\partial_\mu \phi, \phi, x^\mu) \\ &= \int d^4x' (\mathcal{L} + \delta \mathcal{L}) - \int d^4x \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

na qual $d^4x' = J(x', x) d^4x$, com $J(x', x)$ denotando o jacobiano da transformação infinitesimal $x'^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu$. Este jacobiano pode ser determinado a partir da relação

$$J(x', x) = \det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \right) = \det (\delta_\alpha^\mu + \partial_\alpha \delta x^\mu) \simeq 1 + \partial_\mu \delta x^\mu. \quad (\text{A.3})$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x (\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\mu \delta x^\mu) \\ &= \int d^4x \delta \phi \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right\} + \int d^4x \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ou seja,

$$\delta S = \int d^4x \delta \phi \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right\} + \int_\sigma \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right\} d\sigma_\mu, \quad (\text{A.5})$$

onde o primeiro termo à direita da igualdade trata-se da equação de movimento do sistema, e o segundo de uma integral calculada sobre o contorno σ . Sabemos que o valor mínimo da

variação requer $\delta S = 0$, significando que nossa equação de movimento deve ser obedecida além de $\delta \phi = 0$ e $\delta x^\mu = 0$ no contorno. Contudo, podemos obter interpretações físicas relevantes se somarmos e subtrairmos o termo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\partial^\nu \phi) \delta x_\nu, \quad (\text{A.6})$$

na segunda integral da equação (A.5), implicando em reescrevê-la como

$$\int_\sigma \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} [\delta \phi + (\partial^\nu \phi) \delta x_\nu] + \left[g^{\mu\nu} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi \right] \delta x_\nu \right\} d\sigma_\mu, \quad (\text{A.7})$$

ou ainda,

$$\int_\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - T^{\mu\nu} \delta x_\nu \right] d\sigma_\mu = 0, \quad (\text{A.8})$$

que deve se anular a fim de garantir que $\delta S = 0$. Nesta última expressão, definimos que

$$\Delta \phi \equiv \delta \phi + (\partial^\nu \phi) \delta x_\nu, \quad (\text{A.9})$$

onde $\Delta \phi$ corresponde à variação total do campo ϕ , e

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (\text{A.10})$$

é o tensor energia-momento. Ao considerarmos transformações genéricas contínuas nas coordenadas e nos campos, ou seja,

$$\delta x_\mu = X_{\mu\alpha} \delta \omega^\alpha \quad \Delta \phi = \Phi_\alpha \delta \omega^\alpha, \quad (\text{A.11})$$

a integral sobre o contorno σ fica com a forma

$$\int_\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Phi_\alpha - T^{\mu\nu} X_{\nu\alpha} \right] \delta \omega^\alpha d\sigma_\mu = 0, \quad (\text{A.12})$$

e uma vez que $\delta \omega^\alpha$ é arbitrário, reescrevemos a equação anterior como

$$\int_\sigma J_\alpha^\mu d\sigma_\mu = 0; \quad J_\alpha^\mu = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Phi_\alpha - T^{\mu\nu} X_{\nu\alpha} \right], \quad (\text{A.13})$$

ou ainda,

$$\int d^4x \partial_\mu J_\alpha^\mu = 0, \quad (\text{A.14})$$

resultando na conservação da corrente J_α^μ , sob transformações genéricas contínuas. Deste modo, o teorema de Noether estabelece que para cada transformação de simetria existe um conjunto de quantidades conservadas.

Trabalhos Publicados

D. Bazeia, L. Losano, J. M. C. Malbouisson e J. R. L. Santos, “*Multi-sine-Gordon models*” European Physical Journal C **71** 1767 (2011).

L. E. Arroyo Meza, A. de Souza Dutra, J. R. L. dos Santos, M. B. Hott e O. C. Winter, “*Disclosing the generic behavior of topological solutions: An orbit-based approach*” Europhysics Letters **98** 10011 (2012).

D. Bazeia, M. A. González León, L. Losano, J. Mateos Guilarte e J. R. L. Santos, “*Construction of new scalar field models from the standard theory*” Physica Scripta **87** 045101 (2013).

D. Bazeia, L. Losano e J. R. L. Santos, “*Kinklike structures in scalar field theories: from one-field to two-field models*” Physics Letters A **377** 1615 (2013).

Referências

- [1] J. S. Russell, “*Report on Waves*”, 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, 311 (1844).
- [2] D. J. Korteweg e G. de-Vries, “*On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*”, Philos. Mag. **39** 422 (1895).
- [3] M. Peyrard, “*Nonlinear dynamics and statistical physics of DNA*”, Nonlinearity **17**, R1 (2004).
- [4] M. Daniel e V. Vasumathi, “*Solitonlike base pair opening in a helicoidal DNA: An analogy with a helimagnet and a cholesteric liquid crystal*”, Phys. Rev. E **79** 012901 (2009).
- [5] R. K. Bullough, P. M. Jack, P. W. Kitchenside e R. Saunders, “*Solitons in Laser Physics*”, Physica Scripta. **20** 364 (1979).
- [6] R. K. Bullough e Miki Wadati, “*Optical solitons and quantum solitons*”, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **6** S205 (2004).
- [7] A. Vilenkim e E.P.S. Shellard, “**Cosmic strings and other topological defects**”, Cambridge, Cambridge/UK, 1994.
- [8] N. Manton e P. Sutcliffe, “**Topological solitons**”, Cambridge, Cambridge/UK, 2004.
- [9] M. Toharia e M. Trodden, “*Metastable kinks in the orbifold*”, Phys. Rev. Lett. **100** 041602 (2008).
- [10] S. Dutta, D.A. Steer e T. Vachaspati, “*Creating Kinks from Particles*”, Phys. Rev. Lett. **101** 121601 (2008).

- [11] G. Basar e G.V. Dunne, “*Self-Consistent Crystalline Condensate in Chiral Gross-Neveu and Bogoliubov–de Gennes Systems*”, Phys. Rev. Lett. **100** 200404 (2008).
- [12] A. Alonso-Izquierdo, M. A. Gonzalez Leon e J. Mateos Guilarte, “*Kinks in a Non-linear Massive Sigma Model*”, Phys. Rev. Lett. **101** 131602 (2008).
- [13] M. Cvetič e H.H. Soleng, “*Supergravity Domain Walls*”, Phys. Rep. **282** 159 (1997).
- [14] L. Randall e R. Sundrum, “*Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*”, Phys. Rev. Lett. **83** 3370 (1999).
- [15] O. DeWolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser e A. Karch, “*Modeling the fifth dimension with scalars and gravity*”, Phys. Rev. D **62** 046008 (2000).
- [16] C. Csáki, J. Erlich, T.J. Hollowood e Y. Shirman, “*Universal aspects of gravity localized on thick branes*”, Nucl. Phys. B **581** 309 (2000).
- [17] L. Randall e R. Sundrum, “*An Alternative to Compactification*”, Phys. Rev. Lett. **83** 4690 (1999).
- [18] W.D. Goldberger e M.B. Wise, “*Modulus Stabilization with Bulk Fields*”, Phys Rev. Lett. **83** 4922 (1999).
- [19] G. Dvali, G. Gabadadze e M. Porrati, “*4D gravity on a brane in 5D Minkowski space*”, Phys. Lett.B **485** 208 (2000).
- [20] G. Dvali e G. Gabadadze, “*Gravity on a brane in infinite-volume extra space*”, Phys. Rev. D **63** 065007 (2001).
- [21] C. Deffayet, “*On brane world cosmological perturbations*”, Phys. Rev. D **66** 103504 (2002).
- [22] P. Brax e C. van de Bruck, “*Cosmology and brane worlds: a review*”, Class. Quant. Grav. **20** R201 (2003).
- [23] P. Brax, C. van de Bruck e A. C. Davis, “*Brane World Cosmology*”, Rep. Prog. Phys. **67** 2183 (2004).
- [24] D.Z. Freedman, C. Nunez, M. Schnabl e K. Skenderis, “*Fake supergravity and domain wall stability*”, Phys. Rev. D **69** 104027 (2004).

- [25] A. Celi et al., “*On the fakeness of fake supergravity*”, Phys. Rev. D **71** 045009 (2005).
- [26] D. Bazeia, C.B. Gomes, L. Losano e R. Menezes, “*First-order formalism and dark energy*”, Phys. Lett. B **633** 415 (2006).
- [27] V.I. Afonso, D. Bazeia e L. Losano, “*First-order formalism for bent brane*”, Phys. Lett. B **634** 526 (2006).
- [28] K. Skenderis e P.K. Townsend, “*Hidden supersymmetry of domain walls and cosmologies*”, Phys. Rev. Lett. **96** 191301 (2006).
- [29] C. Armendariz-Picon, T. Damour e V. F. Mukhanov, “*k-Inflation*”, Phys. Lett. B **458** 209 (1999).
- [30] J. Garriga e V. F. Mukhanov, “*Perturbations in k-inflation*”, Phys. Lett. B **458** 219 (1999).
- [31] T. Chiba, T. Okabe e M. Yamaguchi, “*Kinetically driven quintessence*”, Phys. Rev. D **62** 023511 (2000).
- [32] R. J. Scherrer, “*Purely Kinetic k Essence as Unified Dark Matter*”, Phys. Rev. Lett. **93** 011301 (2004).
- [33] D. Walgraef, “**Spatio-temporal pattern formation**”, Springer-Berlag, NY, 1997.
- [34] G. Bertotti, “**Hysteresis in magnetism**”, Academic, San Diego/CA, 1998.
- [35] J. Belmonte-Beitia, V.M. Perez-Garca, V. Vekslerchik e V.V. Konotop, “*Localized Nonlinear Waves in Systems with Time- and Space-Modulated Nonlinearities*”, Phys. Rev. Lett. **100** 164102 (2008).
- [36] A.T. Avelar, D. Bazeia e W.B. Cardoso, “*Solitons with Cubic and Quintic Nonlinearities Modulated in Space and Time*”, Phys. Rev. E **79** 025602(R) (2009).
- [37] A. Vanhaverbeke, A. Bischof e R. Allenspach, “*Control of Domain Wall Polarity by Current Pulses*”, Phys. Rev. Lett. **101** 107202 (2008).
- [38] R. Rajaraman, “**Solitons and Instantons**”, North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [39] T. Vachaspati, “**Kinks and Domain Walls**”, Cambrigde Univ. Press, NY, 2006.

- [40] D. Bazeia, L. Losano e J. M. C. Malbouisson, “*Deformed defects*”, Phys. Rev. D **66** 101701 (2002).
- [41] D. Bazeia e L. Losano, “*Deformed defects with applications to braneworlds*”, Phys. Rev. D **73** 025016 (2006).
- [42] V.I. Afonso, D. Bazeia, M.A. Gonzalez Leon, L. Losano e J. Mateos Guilarte, “*Constructing networks of defects with scalar fields*”, Phys. Lett. B **662** 75 (2008).
- [43] V.I. Afonso, D. Bazeia, M.A. Gonzalez Leon, L. Losano e J. Mateos Guilarte, “*Construction of topological defect networks with complex scalar fields*”, Nucl. Phys. B **810** 427 (2009).
- [44] A. de Souza Dutra, “*Continuously deformable topological structure*”, Physica D **238** 798 (2009).
- [45] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes e M.A.M. Sousa, “*New family of sine-Gordon models*”, EPL **87** 21001 (2009).
- [46] W. T. Cruz, M. O. Tahim e C.A.S. Almeida, “*Graviton resonances on deformed branes*”, EPL **88** 41001 (2009).
- [47] A.E.R. Chumbes e M.B. Hott, “*Nonpolynomial potentials with deformable topological structures*”, Phys. Rev. D **81** 045008 (2010).
- [48] D. Bazeia, M.A. Gonzalez Leon, L. Losano e J. Mateos Guilarte, “*New scalar field models and their defect solutions*”, EPL **93** 21001 (2011).
- [49] C.A. Almeida, D. Bazeia, L. Losano e J.M.C. Malbouisson, “*New results for deformed defects*”, Phys. Rev. D **69** 067702 (2004).
- [50] V.I. Afonso, D. Bazeia, M.A. Gonzalez Leon, L. Losano e J. Mateos Guilarte, “*Orbit-based deformation procedure for two-field models*”, Phys. Rev. D **76** 025010 (2007).
- [51] A. de Souza Dutra, “*Deformed solitons: The case of two coupled scalar fields*”, arxiv:0705.3237.
- [52] D. Bazeia, Ashok Das, L. Losano e M.J. Santos, “*Traveling wave solutions of non-linear partial differential equations*”, Appl. Math. Lett. **23** 681 (2010).

- [53] W. P. Su, J. R. Schrieffer e A. J. Heeger, “*Solitons in Polyacetylene*”, Phys. Rev. Lett. **42** 1698 (1979).
- [54] W. P. Su, J. R. Schrieffer e A. J. Heeger, “*Soliton excitations in polyacetylene*”, Phys. Rev. B **22** 2099 (1980).
- [55] D. K. Campbell e A. R. Bishop, “*Solitons in polyacetylene and relativistic-field-theory models*”, Phys. Rev. B **24** 4859 (1981).
- [56] R. Jackiw e J.R. Schrieffer, “*Solitons with fermion number 1/2 in condensed matter and relativistic field theories*”, Nucl. Phys. B **190** 253 (1981).
- [57] A. Campos, “*Critical Phenomena of Thick Branes in Warped Spacetimes*”, Phys. Rev. Lett. **88** 141602 (2002).
- [58] D. Bazeia, C. Furtado e A.R. Gomes, “*Brane Structure from a Scalar Field in Warped Spacetime*”, JCAP **0402** 002 (2004).
- [59] D. Bazeia e A.R. Gomes, “*Bloch Brane*”, JHEP **0405** 012 (2004).
- [60] A. Melfo, N. Pantoja e J. D. Tempo, “*Fermion localization on thick branes*”, Phys. Rev. D **73** 044033 (2006).
- [61] D. Bazeia e F.A. Brito, L. Losano, “*Scalar fields, bent branes, and RG flow*”, JHEP **0611** 064 (2006).
- [62] V. Dzhunushaliev, “*Thick brane solution in the presence of two interacting scalar fields*”, Grav. Cosmol. **13** 302 (2007).
- [63] A. de Souza Dutra, A.C. Amaro de Faria Jr. e M. Hott, “*Degenerate and critical Bloch branes*”, Phys. Rev. D **78** 043526 (2008).
- [64] Yu-Xiao Liu, Li-Da Zhang, Li-Jie Zhang e Yi-Shi Duan, “*Fermions on thick branes in the background of sine-Gordon kinks*”, Phys. Rev. D **78** 065025 (2008).
- [65] C. A. S. Almeida, M. M. Ferreira Jr., A. R. Gomes e R. Casana, “*Fermion localization and resonances on two-field thick branes*”, Phys. Rev. D **79** 125022 (2009).
- [66] Yu-Xiao Liu, Zhen-Hua Zhao, Shao-Wen Wei e Yi-Shi Duan, “*Bulk matters on symmetric and asymmetric de Sitter thick branes*”, JCAP **02** 003 (2009).

- [67] Yu-Xiao Liu, Hai-Tao Li, Zhen-Hua Zhao, Jing-Xin Li e Ji-Rong Ren, “*Fermion resonances on multi-field thick branes*”, JHEP **0910** 091 (2009).
- [68] J.R. Morris, “*Domain defects in strings and walls*”, Phys. Rev. D **51** 697 (1995).
- [69] J.D. Edelstein, M.L. Trobo, F.A. Brito e D. Bazeia, “*Kinks inside supersymmetric domain ribbons*”, Phys. Rev. D **57** 7561 (1998).
- [70] D. Bazeia e F. A. Brito, “*Entrapment of a network of domain walls*”, Phys. Rev. D **62** 101701(R) (2000).
- [71] Y.V. Kartashov, B.A. Malomed e L. Torner, “*Solitons in nonlinear lattices*”, Rev. Mod. Phys. **83** 247 (2011).
- [72] C. Montonen, “*On solitons with an Abelian charge in scalar field theories: (I) Classical theory and Bohr-Sommerfeld quantization*”, Nucl. Phys. B **112** 349 (1976).
- [73] R. Rajaraman, “*Solitons of Coupled Scalar Field Theories in Two Dimensions*”, Phys. Rev. Lett. **42** 200 (1979).
- [74] H.M. Ruck, “*Solitons in cyclic symmetric field theories*”, Nucl. Phys. B **167** 320 (1980).
- [75] E.R.C. Abraham e P.K. Townsend, “*Intersecting extended objects in supersymmetric field theories*”, Nucl. Phys. B **351** 313 (1991).
- [76] D. Bazeia, M. J. dos Santos e R. F. Ribeiro, “*Solitons in systems of coupled scalar fields*”, Phys. Lett. A **208** 84 (1995).
- [77] B. Chibisov e M. Shifman, “*BPS-saturated walls in supersymmetric theories*”, Phys. Rev. D **56** 7990 (1997).
- [78] G.W. Gibbons e P.K. Townsend, “*Bogomol’nyi Equation for Intersecting Domain Walls*”, Phys. Rev. Lett. **83** 1727 (1999).
- [79] P.M. Saffin, “*Tiling with Almost-BPS-Invariant Domain-Wall Junctions*”, Phys. Rev. Lett. **83** 4249 (1999).
- [80] H. Oda, K. Ito, M. Naganuma e N. Sakai, “*An Exact Solution of BPS Domain Wall Junction*”, Phys. Lett. B **471** 140 (1999).

- [81] S.M. Carroll, S. Hellerman e M. Trodden, “*Domain wall junctions are $1/4$ BPS states*”, Phys. Rev. D **61** 065001 (2000).
- [82] D. Bazeia e F.A. Brito, “*Tiling the Plane without Supersymmetry*”, Phys. Rev. Lett. **84** 1094 (2000).
- [83] D. Bazeia e F.A. Brito, “*Bags, junctions, and networks of BPS and non-BPS defects*”, Phys. Rev. D **61** 105019 (2000).
- [84] K. Ito, M. Naganuma, H. Oda e N. Sakai, “*Nonnormalizable zero modes on BPS junctions*”, Nucl. Phys. B **586** 231 (2000).
- [85] A. Alonso Izquierdo, M. A. González León e J. Mateos Guilarte, “*Kink variety in systems of two coupled scalar fields in two space-time dimensions*”, Phys. Rev. D **65** 085012 (2002).
- [86] D. Bazeia, J. Menezes e M.M. Santos, “*Complete factorization of equations of motion in supersymmetric field theories*”, Nucl. Phys. B **636** 132 (2002).
- [87] D. Bazeia, W. Freire, L. Losano e R.F. Ribeiro, “*Topological Defects and the Trial Orbit Method*”, Mod. Phys. Lett. A **17** 1945 (2002).
- [88] M. Shifman e A. Yung, “*Supersymmetric solitons*”, Rev. Mod. Phys. **79** 1139 (2007).
- [89] P.P. Avelino, D. Bazeia, R. Menezes e J. Oliveira, “*Bifurcation and pattern changing with two real scalar fields*”, Phys. Rev. D **79** 085007 (2009).
- [90] M. K. Prasad e C. M. Sommerfield, “*Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon*”, Phys. Rev. Lett. **35** 760 (1975).
- [91] E. B. Bogomolnyi, “*The stability of classical solutions*”, Sov. J. Nucl. Phys. **24** 449 (1976).
- [92] D. Bazeia, “*Topological solitons in a vacuumless system*”, Phys. Rev. D **60** 067705 (1999).
- [93] R. Brown, “*A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*”, Phil. Mag. **4** 161 (1828).

- [94] Albert Einstein, Ann. Phys. **17** 549 (1905), “*On the Movement of Small Particles Suspended in Stationary Liquids Required by the Molecular-Kinetic Theory of Heat*”, The Collected Papers of Albert Einstein, traduzido por Anna Beck, Princeton U.P. Princeton - NJ, **2** 123 (1989).
- [95] Don S. Lemons e Anthony Gythiel, Paul Langevin’s 1908 paper “*On the Theory of Brownian Motion - Sur la théorie du mouvement brownien*”, C. R. Acad. Sci. (Paris) **146** 530533 (1908).
- [96] G. E. Uhlenbeck e L. S. Ornstein, “*On the Theory of the Brownian Motion*”, Physical Review **36** 823 (1930).
- [97] D. Bazeia, L. Losano, M. A. González León e J. Mateos Guilarte, “*Deformed defects for scalar fields with polynomial interactions*”, Phys. Rev. D **73** 105008 (2006).
- [98] G. Arfken, “**Mathematical Methods for Physicists**”, 3rd ed. Orlando FL, Academic Press, p. 735, 1985.
- [99] W. E. Boyce, e R. C. DiPrima, “**Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**”, 4th ed. New York, Wiley, p. 232 e 252, 1986.
- [100] D. Zwillinger, “**Handbook of Differential Equations**”, 3rd ed. Boston MA, Academic Press, p. 127, 1997.
- [101] A.T. Avelar, D. Bazeia, L. Losano e R. Menezes, “*New lump-like structures in scalar-field models*”, Eur. Phys. J. C **55** 133 (2008).
- [102] G. Mussardo, V. Riva e G. Sotkov, “*Semiclassical scaling functions of sine-Gordon model*”, Nucl. Phys. B **699** 545 (2004).
- [103] M. Thies e K. Urlichs, “*Baryons in massive Gross-Neveu models*”, Phys. Rev. D **71** 105008 (2005).
- [104] H. Blass e H.L. Carrion, “*Solitons, kinks and extended hadron model based on the generalized sine-Gordon theory*”, JHEP **0701** 027 (2007).
- [105] D. Bazeia, L. Losano, J. M. C. Malbouisson e R. Menezes, “*Classical behavior of deformed sine-Gordon models*”, Physica D **237** 937 (2008).

- [106] L. A. Ferreira, B. Piette e W. J. Zakrzewski, “*Wobbles and other kink-breather solutions of the sine-Gordon model*”, Phys. Rev. E **77** 036613 (2008).
- [107] G. Mussardo, “*Neutral bound states in kink-like theories*”, Nucl. Phys. B **779** 101 (2007).
- [108] G. Delfino e G. Mussardo, “*Non-integrable aspects of the multi-frequency sine-Gordon model*”, Nucl. Phys. B **516** 675 (1998).
- [109] G. Z. Tóth, “*A nonperturbative study of phase transitions in the multi-frequency sine-Gordon model*”, J. Phys. A **37** 9631 (2004).
- [110] G. Takacs e F. Wagner, “*Double sine-Gordon model revisited*”, Nucl. Phys. B **741** 353 (2006).
- [111] L. A. Ferreira e W. J. Zakrzewski, “*The concept of quasi-integrability: a concrete example*”, JHEP **05** 130 (2011).
- [112] D. Bazeia e M.M. Santos, “*Classical stability of solitons in systems of coupled scalar fields*”, Phys. Lett. A **217** 28 (1996).
- [113] D. Bazeia, J. Menezes e R. Menezes, “*New Global Defect Structures*”, Phys. Rev. Lett. **91** 241601 (2003).
- [114] J. E. Lennard-Jones, “*On the Determination of Molecular Fields*”, Proc. R. Soc. Lon. A **106** 463 (1924).
- [115] M. A. Shifman e M. B. Voloshin, “*Degenerate domain wall solutions in supersymmetric theories*”, Phys. Rev. D **57** 2590 (1998).
- [116] A. de Souza Dutra, “*General solutions for some classes of interacting two field kinks*”, Phys. Lett. B **626** 249 (2005).
- [117] D. Bazeia, J. R. S. Nascimento, R. F. Ribeiro e D. Toledo, “*Soliton stability in systems of two real scalar fields*”, J. Phys. A: Math. Gen. **30** 8157 (1997).
- [118] S. R. A. Salinas, “**Introduction to Statistical Physics**”, Springer, New York 2000.

- [119] S. A. Adelman, “*Fokker-Planck Equations for Simple Non-Markovian Systems*”, J. Chem. Phys. **64** 124 (1976).
- [120] N.G. van Kampen, “*Remarks on Non-Markov Processes*”, Brazilian Journal of Physics **28** no. 2 (1998).
- [121] J. Luczka, “*Non-Markovian stochastic processes: Colored noise*”, CHAOS **15** 026107 (2005).
- [122] Michele Ceriotti, Giovanni Bussi e Michele Parrinello, “*Langevin Equation with Colored Noise for Constant-Temperature Molecular Dynamics Simulations*”, Phys. Rev. Lett. **102** 020601 (2009).
- [123] R. L. S. Farias, Rudnei O. Ramos e L. A. da Silva, “*Stochastic Langevin equations: Markovian and non-Markovian dynamics*”, Phys. Rev. E **80** 031143 (2009).
- [124] Marcelo Gleiser e Rudnei O. Ramos, “*Microphysical approach to nonequilibrium dynamics of quantum fields*”, Phys. Rev. D **50** 2441 (1994).
- [125] A. Das, “**Finite Temperature Field Theory**”, World Scientific, 1997.
- [126] J. Schwinger, “*Brownian Motion of a Quantum Oscillator*”, J. Math. Phys. **2** 407. (1961).
- [127] John A. R. Bedoya, “**Formalismo de Schwinger para Trajetórias Temporalmente Fechadas**”, Dissertação de Mestrado apresentada ao IFT - Unesp, 2009.
- [128] A. Das, “**Field Theory A Path Integral Approach**”, Second Ed, World Scientific Lecture Notes in Physics - Vol. 75, 2006.
- [129] H. T. Li, Y. X. Liu, Z. H. Zhao e H. Guo, “*Fermion resonances on a thick brane with a piecewise warp factor*”, Phys. Rev. D **83** 045006 (2011).
- [130] R.A.C. Correa, A. de Souza Dutra e M.B. Hott, “*Fermion localization on degenerate and critical branes*”, Class. Quant. Grav. **28** 155012 (2011).
- [131] R.C. Fonseca, F.A. Brito e L. Losano, “*4D gravity on a BPS brane in 5D AdS-Minkowski space*”, Phys. Lett. B **697** 493 (2011).

- [132] W.T. Cruz, A.R. Gomes e C.A.S. Almeida, “*Graviton resonances on deformed branes*”, EPL **96** 31001 (2011).
- [133] R.R. Landim, G. Alencar, M.O. Tahim e N.R. Costa Filho, “*A Transfer Matrix Method for Resonances in Randall-Sundrum Models*”, JHEP **1108** 071 (2011).
- [134] D. Bazeia, F. A. Brito e F. G. Costa, “*3D black holes on a 2-brane in 4D Minkowski space*”, Phys. Lett. B **704** 631 (2011).
- [135] G. R. Farrar e P. J. E. Peebles, “*Interacting dark matter and dark energy*”, Astrophys. J. **604** 1 (2004).
- [136] G. Huey e B.D. Wandelt, “*Interacting quintessence, the coincidence problem, and cosmic acceleration*”, Phys. Rev. D **74** 023519 (2004).
- [137] S. Micheletti, E. Abdalla e B. Wang, “*Field theory model for dark matter and dark energy in interaction*”, Phys. Rev. D **79** 123506 (2009).
- [138] O. Bertolami, P. Carrilho e J. Paramos, “*Two-scalar-field model for the interaction of dark energy and dark matter*”, Phys. Rev. D **86** 103522 (2012).
- [139] D. Bazeia e E. Ventura, “*Topological twistons in crystalline polyethylene*”, Chem. Phys. Lett **303** 341 (1999).
- [140] E. Ventura, A.M. Simas e D. Bazeia, “*Exact topological twistons in crystalline polyethylene*”, Chem. Phys. Lett. **320** 587 (2000).
- [141] A de Souza Dutra, J R dos Santos e O C Winter, “*Extended class of exact twistons and crystalline polyethylene*”, J. Phys. A: Math. Theor. **43** 365402 (2010).
- [142] M. Namiki, “**Stochastic Quantization**”, Springer-Verlag, Berlin p. 16 1992.
- [143] E. Gozzi, “*Functional-integral approach to Parisi-Wu stochastic quantization: Scalar theory*”, Phys. Rev. D **28** 1922 (1983).
- [144] Andrea Crisanti e Umberto Marini Bettolo Marconi, “*Effective action method for the Langevin equation*”, Phys. Rev. E **51** 4237 (1995).