Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Dissertação de Mestrado

Teoria Gravitacional da Matéria Induzida

Dannilo José Pereira

João Pessoa

-2014-

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Dissertação de Mestrado

Teoria Gravitacional da Matéria Induzida

Dannilo José Pereira

Dissertação submetida ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, sob orientação do professor Carlos Augusto Romero Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

João Pessoa

-2014-

P436t Pereira, Dannilo José.
Teoria gravitacional da matéria induzida / Dannilo José Pereira. -- João Pessoa, 2014.
78f.
Orientador: Carlos Augusto Romero Filho
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Física. 2. Dimensões extras. 3. Matéria induzida. 4.Teorema de Campbell-Magaard.

UFPB/BC CDU: 53(043)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO DE TITULAÇÃO
mestrado

A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 14 de fevereiro de 2014, na Sala de Reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, APROVA **Dannilo José Pereira** na defesa de sua dissertação intitulada "*Teoria Gravitacional da Matéria Induzida*".

João Pessoa, 14 de fevereiro de 2014

Orientador:

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
(UFPB)

1º Examinador:

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
(UFPB)

2º Examinador:

Prof. Dr. Henrique Pereira de Oliveira
(UERJ)

Campus I – Jardim Universitário
Fone: 083-3216-7422

João Pessoa-PB, Brasil
http://www.fisica.ufpb.br

CEP: 58051-900
secpos@fisica.ufpb.br

Aos meus pais: José Pereira da Silva e Francinete Maria Pereira

Agradecimentos

Neste momento tão importante, queria agradecer a todos que me ajudaram neste trabalho, direta ou indiretamente.

Em primeiro lugar, queria agradecer aos meus pais, que estiveram sempre ao meu lado, nos momentos bons e nos momentos difíceis, sendo eles os principais construtores de minha formação, como pessoa, como físico, ou como qualquer outra coisa.

Em segundo lugar, agradeço à toda minha família: avós, tios, tias, primos, e aos meus irmãos, que serviram de alicerce em tudo que construí.

Agradeço aos meus amigos: amigos de infância, amigos que fiz durante a graduação, durante a pós-graduação, em especial aos brothers Francisco de Assis, Júnior José e Karl Marx, que conviveram comigo desde quando cheguei aqui na capital paraibana.

Agradeço aos professores que tive em toda minha vida, desde os que me ensinaram as operações matemáticas aos que me ensinaram o cálculo diferencial.

Ao professor Dr. Carlos Augusto Romero Filho, com o qual cursei boa parte das disciplinas do mestrado e me orientou na produção deste trabalho, colaborando significativamente para minha formação filosófico-científica.

Ao professor Dr. Edmundo Marinho Monte, que me mostrou a beleza da geometria e me deu a oportunidade de aprender bastante sobre Relatividade Geral e Gravitação em suas reuniões semanais, com o qual iniciei meus trabalhos de mestrado.

Ao Departamento de Física e a Universidade Federal da Paraíba, pelos anos de graduação e pós-graduação, por tudo vivido nesse período.

À minha namorada, com a qual converso enquanto escrevo estes agradecimentos. Ela que está presente em cada instante de minha vida desde quando a conheci.

Agradeço, também, ao A. Einstein, por elaborar a Teoria da Relatividade Geral, abrindo um novo horizonte em toda física, por dimensões nunca dantes navegadas.

Ao povo salgadinhense, que sempre torceu por mim.

E principalmente a Deus, Jesus Cristo, coluna de nossas vidas.

Resumo

Tratamos o problema da imersão do espaço-tempo em variedades pseudo-riemannianas e sua relação com o teorema de Campbell-Magaard. Fazemos, à guisa de introdução e motivação, uma retrospectiva da ideia de dimensões extras na física e, paralelamente, apresentamos uma breve história da teoria de imersões na matemática. Mostramos que a teoria de Kaluza-Klein não pode ser vista como uma teoria de imersão do espaço-tempo. Por fim, mostramos a abordagem da imersão para a teoria de matéria induzida e aplicamos, usando o teorema de Campbell-Magaard, à outras soluções para o espaço-tempo.

Palavras-chave: Física, dimensões extras, matéria induzida, teorema de Campbell-Magaard.

Abstract

We consider the problem of embedding the spacetime in pseudo-Riemannian manifolds and its connection with the Campbell-Magaard theorem. We give a brief history of the evolution of the idea of extra dimensions in physics as well as account of the development of the embedding theory as a branch of mathematics motivated by physics. We show that Kaluza-Klein is not an embedding theory of spacetime. Finally, we show the approach of immersion for the induced matter theory and applied, using the theorem of Campbell-Magaard, the other solutions to the space-time.

keywords: Physical, extra dimensions, induced matter, Campbell-Magaard theorem.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

"A linha tem magnitude numa direção, o plano em duas direções, o sólido em três direções e além destas não existe mais nenhuma outra magnitude, pois as três são a totalidade"

(Aristóteles)

Até o aparecimento da teoria da relatividade especial, em 1905, parecia um tanto fora de cogitação, no mundo científico, a ideia de que o universo em que vivemos possui mais de três dimensões espaciais. Mas, por que exatamente três dimensões? Várias respostas a esta questão têm sido propostas. É sabido que Kepler, ao escrever o seu *Mysterium Cosmographium*, não resistiu à especulação de que a dimensionalidade do nosso mundo estivesse ligada à "natureza tríplice" da Santíssima Trindade, oferecendo assim uma resposta metafísico-religiosa à questão [1]. Nos tempos modernos, menos afeitos à metafísica, procuramos outros tipos de argumentos que possam justificar, através de princípios mais fundamentais, a tridimensionalidade do espaço.

Em 1909, H. Minkowski mostrou que um considerável ganho em simplicidade e elegância na formulação da relatividade especial advém se considerarmos o tempo como uma *quarta dimensão*, com a ideia tradicional de *espaço* cedendo lugar a um novo conceito: o *espaço-tempo* [2]. A genial ideia de Minkowski revelou-se fundamental para a formulação da teoria da relatividade geral, originando um novo tipo de geometria, uma geometria em que a "distância" entre dois pontos não é mais necessariamente positiva. Esta propriedade "estranha" do espaço-tempo de Minkowski, de assinatura não-euclidiana (ou lorentziana), é uma consequência direta do postulado da constância da velocidade da luz em referênciais inerciais. Ademais, essa "unificação" do tempo com o espaço tridimensional, revelou-se bastante frutífera, tendo sido muito bem aceita pelos físicos da época, e logo passou a se constituir em novo paradigma científico[1].

Contudo, apesar do novo paradigma parecer plenamente satisfatório, começaram a aparecer teorias que postulavam a existência de novas dimensões. A história começa com um trabalho pouco conhecido do físico finlandês Gunnar Nordström, publicado em 1914 [3]. Naquela ocasião, Nordström e Mie [4] trabalhavam numa formulação relativista de uma teoria escalar da gravitação no espaço-tempo de Minkowski. A ideia de postular uma *quinta* dimensão ocorreu a Nordström depois que ele percebeu que com esta hipótese seria possível unificar o campo eletromagnético com o campo gravitacional. Vemos aí uma motivação poderosa que levou à conjectura da existência de dimensões extras: a possibilidade de unificação das interações, eterno *leit motiv* da física contemporânea. É primordialmente essa busca de uma teoria unificada que tem nos levado à especulação sobre uma dimensionalidade superior.

A pouca repercussão experimentada pela teoria de Nordström deve-se provavelmente ao fato de ela lidar com uma teoria da gravitação "defeitu-

[1] Naturalmente, pode-se aqui contrapor o argumento de que essa "unificação" não é completa, uma vez que a assinatura lorentziana de certa forma "distingue" a dimensão tempo das outras três dimensões espaciais.

osa", a teoria escalar de Mie [5]. No entanto, pouco depois da formulação da teoria da gravitação de Einstein, Théodor Kaluza, em 1919, com a mesma motivação de unificar as duas únicas interações da natureza conhecidas na época, repete a tentativa de Nordström, dessa vez tendo como base a teoria da gravitação da relatividade geral [6]. De maneira bastante criativa, Kaluza consegue montar um elegante formalismo, definindo um espaço em cinco dimensões, no qual introduz novos graus de liberdade representados pelas componentes extras do tensor métrico, reproduzindo, assim, simultaneamente as equações de Einstein e de Maxwell. Kaluza foi mais além, mostrando que a equação de geodésica no espaço de cinco dimensões leva naturalmente à equação de movimento de uma partícula carregada submetida à força de Lorentz. Mais ainda, na nova teoria transformações de coordenadas envolvendo apenas a dimensão extra são formalmente idênticas a transformações de gauge do eletromagnetismo.

Acrescentemos que, subjacente ao postulado da existência de uma dimensão extra, a teoria de Kaluza admitia também a hipótese de que o campo métrico não dependia da coordenada associada a esta dimensão, suposição que veio a ser chamada mais tarde de *condição cilíndrica*. Evidentemente uma condição desta natureza se reveste de um caráter *ad hoc* e artificial, tornando a teoria menos "palatável" aos espíritos mais rigorosos da época.

A peculiaridade da condição cilíndrica na teoria de Kaluza seria resolvida em 1926, por Oscar Klein [7]. Klein substituiu a condição cilíndrica pela *condição de compacidade*, atribuindo à quinta dimensão a *topologia de um círculo* ou *compacta*, cujo raio extremamente pequeno (da ordem do comprimento de Planck, isto é, $1,6 \times 10^{-35} metros$) "explicaria" a impossibilidade prática de se observar a dimensão extra. Note-se que, mesmo sendo de comprimento muito pequeno, ainda assim a existência de uma dimensão compacta pode ter profundas implicações de caráter teórico e conceptual.

A teoria original de Kaluza-Klein serviu de modelo para novas tentativas de unificação [8, 9], nas quais, além do campo eletromagnético que tem simetria $U(1)$, também os campos associados às interações nucleares fortes, cujos grupos de simetria são $SU(2)$ e $SU(3)$, são levados em conta. Nesse caso, naturalmente, novos graus de liberdade devem ser acrescentados à métrica, o que faz com que o número de dimensões extras deva ser aumentado para, no mínimo, sete, como demonstrou Edward Witten, em 1981 [10]. Analogamente à teoria original, as transformações de gauge nessa generalização do modelo de Kaluza-Klein são equivalentes a transformações de coordenadas ao longo de simetrias da métrica.

Consideramos, agora, o chamado *modelo padrão* da teoria de partículas elementares, isto é, uma teoria de Yang-Mills com grupo de gauge $U(1) \otimes SU(2) \otimes SU(3)$. Suponhamos que a lagrangiana que descreve o modelo padrão seja *supersimétrica*, isto é, invariante com relação a uma transformação que permuta férmions por bósons. Adotemos um esquema análogo ao da teoria de Kaluza-Klein e façamos o acoplamento da lagrangiana com o campo gravitacional da maneira usual. Esse procedimento nos leva a uma extensão da relatividade geral para um espaço-tempo de onze dimensões[2], chamada *supergravidade* [11], uma teoria unificada das quatro interações fundamentais.

A teoria da supergravidade, no entanto, revelou-se insatisfatória por uma série de dificuldades matemáticas [11], tendo sido sucedida por uma outra teoria cujo cenário também inclui um espaço de onze dimensões: a *teoria de supercordas*. Formulada inicialmente, nos anos oitenta, por Michael Green

[2]Uma versão posterior da supergravidade diminuiu o número de dimensões de onze para dez.

e John Schwarz [12], esta nova teoria (da qual, na verdade, existem pelo menos, cinco formulações diferentes) tem gozado de enorme popularidade desde seu aparecimento. Admitindo que as partículas elementares possam ser descritas por objetos unidimensionais com comprimento da ordem do comprimento de Planck ($10^{-33}cm$), cujos modos de vibração estão associados aos vários números quânticos que caracterizam cada partícula, a teoria de supercordas pretende unificar as quatro interações, e constituir-se, ao mesmo tempo, numa teoria quântica da gravitação [13].

Em 1995, Witten mostrou que é possível considerar as cinco formulações diferentes da teoria de supercordas como aspectos diferentes de uma teoria subjacente ainda mais fundamental, e que também postula um espaço de onze dimensões. Nessa teoria, os objetos dinâmicos são as chamadas *d-branas* [14], das quais as cordas são um caso particular. Witten chamou essa teoria de *Teoria M* (o "M" vem de "membrana").

Na busca de uma teoria unificada das quatro interações, uma questão particular tem chamado a atenção dos teóricos: por que a interação gravitacional é tão mais fraca do que as outras três? Esta questão fundamental ficou conhecida como o *problema da hierarquia*, tendo interessado, em certa época, Dirac [15] e Jordan [16], os quais propuseram, como solução, a hipótese de que a "constante" gravitacional deveria variar no tempo. Uma alternativa interessante para resolver o problema da hierarquia foi proposta, já no final do século XX, por Arkani-Hamed, Dimopoulus e Dvali [17]. Nesta teoria, procura-se explicar a diferença já mencionada entre a intensidade da força gravitacional e as intensidades das outras forças pela existência de dimensões extras compactas, de tal modo que a "constante gravitacional fundamental" deveria levar em conta estas dimensões. Assim, a hierarquia seria gerada pela geometria das dimensões extras. Uma das possibilidades contempladas pela teoria de Arkani-Hamed, Dimopoulus e Dvali, é que tanto a matéria quanto as forças não-gravitacionais estejam confinadas ao nosso espaço tridimensional (uma 3-brana), enquanto que a força gravitacional possa se propagar através de um espaço de dimensão superior ("bulk").

Inspirado na ideia de d-branas, surgiu, recentemente, um modelo alternativo envolvendo uma única dimensão extra, que também pretende resolver o problema da hierarquia, o chamado modelo de Randall-Sundrum. Aparentemente bastante promissor, este modelo, analogamente à proposta anterior, trata nosso espaço tridimensional como uma 3-brana, de modo que o espaço-tempo corresponde a uma hipersuperfície quadridimensional imersa numa variedade de cinco dimensões (o chamado "bulk"), com curvatura constante (um espaço de Einstein).

No inicio dos anos 90, o astrofísico Paul Wesson, juntamente com outros colaboradores, desenvolveu uma teoria clássica (não-quântica) também em cinco dimensões. Retomando uma ideia de Einstein [18], a de que em última instância a matéria deveria ter uma origem geométrica, Wesson modificou a teoria de Kaluza-Klein, abandonando a hipótese de que a dimensão extra deva ser compacta, ao mesmo tempo em que ampliou o grupo de invariância da teoria [19, 1]. Nessa abordagem, Wesson propõe que o tensor energia-momentum da matéria, que aparece no lado direito das equações de Einstein, pode, em princípio, ser "gerado" por meios puramente geométricos. Em outras palavras: a curvatura geométrica do espaço-tempo em cinco dimensões induziria a matéria em quatro dimensões; daí, a teoria ser frequentemente referida na literatura como *teoria da matéria induzida.* Na teoria de Wesson, assim como no modelo de Randall-Sundrum, o espaço-tempo usual pode ser visto como uma hipersuperfície quadridimensional imersa num espaço de cinco dimensões que deve ser solução das equações de Einstein no vazio. Um aspecto interessante da teoria da matéria induzida é que a dinâmica de partículas no espaço de cinco dimensões leva ao surgimento de uma "aceleração anômala" no espaço-tempo quadridimensional [4, 22].

A teoria original de Kaluza-Klein, os modelos de Randall-Sundrum e a teoria da matéria induzida têm em comum o fato de serem teorias que postulam a existência de um espaço com cinco dimensões, que, num certo sentido, "contêm" o nosso espaço-tempo. A teoria da matéria induzida e os modelos de Randall-Sundrum são o que se convencionou chamar na literatura de *teorias de imersão*, querendo isto significar que o espaço-tempo aparece nessas duas teorias como uma hipersuperfície *imersa* numa variedade de cinco dimensões. Para que essas teorias sejam consistentes, ou seja, para que seja possível haver imersão de um espaço em outro é necessário que certas condições geométricas sejam satisfeitas. Dizendo de outra forma, teorias de imersão do espaço-tempo devem naturalmente estar sujeitas aos teoremas de imersão da geometria diferencial. Um desses teoremas, o teorema de Campbell-Magaard, tem sido extremamente útil na compreensão da estrutura matemática dessas teorias [5, 2]. Na presente dissertação, um dos nossos objetivos principais é investigar a relação entre teorias de imersão e o teorema de Campbell-Magaard, suas generalizações e aplicações. Para isto, faremos nos próximos capítulos, uma revisão da teoria de Kaluza-Klein e da teoria da matéria induzida.

Referências Bibliográficas

[1] J. Kepler, *Mysterium Cosmographum.* Tradução inglesa: *The Secret of the Universe*, cap.2, A. M. Duncan, Abaris Book, Nova York (1981).

[2] H. Minkowski, *Space and time*, in "The Principle of Relativity", Dover, Nova York (1923).

[3] G. Nordström, *Über die Möglichkeit, das elektromagnetic Feld und das Gravitationsfeld zu vereinigen*, Phys. Zeitschr., 15, 504 (1914). Existe uma tradução inglesa, com o título: *On the possibility of a unification of the electromagnetic and gravitation fields*, publicada em ([8]).

[4] G. Mie, Ann Physik, 40, 25 (1913).

[5] P. Halpern, *The Great Beyond*, John Wiley and Sons, New Jersey (2004).

[6] T. Kaluza, *On the problem of Unity in Physics*, Sitz. Preuss. Akad. Wiss., 33, 966 (1921).

[7] O. Klein, *Quantum theory and five-dimensional theory of relativity*, Zeitschr. Physik 37, 897 (1926) .

[8] T. Appelquist, A. Chodos e P. Freund, *Modern Kaluza-Klein Theories*, Addison-Wesley, Menlo Park (1987).

[9] P. Collins, A. Martin e E. Squires, *Particle Physics and Cosmology*, Cap. 13, Wiley, Nova York (1989).

[10] E. Witten, *Search for a realistic Kaluza-Klein theory*, Nucl. Phys. B 186, 412 (1981).

[11] P. West, *Introduction to supersymmetry and Supergravity*, World Scientific, Cingapura (1986).

[12] M. Green, J. Schwarz, e E. Witten, *Superstring theory*, Cambridge University Press, Cambridge, England (1987).

[13] Para uma revisão mais atual da teoria de supercordas, ver Joseph Polchinski, *String Theory: Superstring Theory and Beyond vol. 2*, Cambridge University Press (1998).

[14] C. V. Johnson, *D-branes*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).

[15] P. A. M. Dirac, *New basis for cosmology*, Proc. R. Soc. London A 165, 199 (1938).

[16] P. Jordan, *Schwerkraft und Weltall*, Vieweg und Sohn, Braunschweig (1955).

[17] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulus e G. Dvali, *The hierarchy problem and the new dimensions at a milimeter*, Phys. Lett. B 429, 263 (1998).

[18] J. A. Wheeler, *Einstein's vision*, Springer (1968).

[19] J. M. Overduin e P. S. Wesson, *Kaluza-Klein Gravity*, Phys. Rep. 283, 303 (1997).

[20] P. S. Wesson, *Space-Time-Matter*, World Scientific, Cingapura (1999).

[21] P. S. Wesson, B. Mashhoon, H. Liu e W. N. Sajko, *fifth force from fifth dimension*, Phys. Lett. B 456, 34 (1999).

[22] F. Dahia, E. M. Monte e C. Romero, *fifth force from fifth dimension: a comparison between two different approaches*, Mod. Phys. Lett. A 18, 1773 (2003).

[23] J. E. Campbell, *A Course of Differential Geometry*, Clarendon Press, Oxford (1926).

[24] L. Magaard, *Zur Einbettung Räume in Einstein-Räume und konform-euklidische Räume*, tese de doutorado, Universidade de Kiel, Alemanha (1963).

Capítulo 2

A teoria de Kaluza-Klein

"A unificação da gravitação com o eletromagnetismo na teoria de Kaluza-Klein de cinco dimensões me parece inteiramente satisfatória"

(Einstein, carta a Lorentz, 1926)

Como mencionado no capítulo anterior, na abordagem original da teoria de Kaluza-Klein de cinco dimenões, supõe-se a existência de um espaço M^5, de cinco dimensões com uma topologia $M^4 X S^1$, de maneira que a coordenada ψ associada à quinta dimensão é periódica (condição de compacidade). Com o objetivo de geometrizar o campo eletromagnético, obtendo assim uma unificação com a gravitação, a teoria de Kaluza-Klein postula também que a teoria da relatividade geral deve ser válida em cinco dimensões e que a métrica de M^5 deve ser uma solução das equações de Einstein no vazio. Seja $dS^2 = g_{ab}dx^a dx^b$ o elemento de linha de M^5. Por outro lado, por razões que ficarão claras mais adiante, escrevamos g_{ab} na forma [1]:

$$\overline{g}_{ab} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \phi^2 A_\mu A_\nu & \phi^2 A_\mu \\ \phi^2 A_\nu & \phi^2 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

onde A_μ e ϕ são funções do espaço-tempo. Suponhamos, agora, que o grupo de invariância G_5 das transformações de coordenadas admissiveis em M^5 seja o produto direto $G_4 \otimes G_1$, onde G_4 é o grupo geral de transformações da variedade M^4 (i.e., o conjunto de transformações gerais $x'^\mu = x'^\mu(x)$) e G_1 é definido como o conjunto de transformações de coordenadas do tipo $\psi' = \psi + f(x)$, onde $f(x)$ é uma função arbitrária. Um cálculo simples nos mostra, então, que sob G_1 as funções A_μ se transformam como $A'_\mu = A_\mu - \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$. Pensando nas funções A_μ como potenciais eletromagnéticos, podemos interpretar G_1 como uma versão geométrica do grupo das transformações de gauge do eletromagnetismo. Por outro lado, é fácil verificar também que sob G_4 as funções ϕ, A_μ e $g_{\mu\nu}$ comportam-se como escalares, vetores, e tensores, respectivamente.

Devido à condição de compacidade, todos os campos podem ser expandidos em série de Fourier:

$$g_{\mu\nu}(x,\psi) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_{\mu\nu}^{(n)}(x) e^{in\psi/l},$$

$$A_\mu(x,\psi) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_\mu^{(n)}(x) e^{in\psi/l},$$

$$\phi(x,\psi) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \phi^{(n)}(x) e^{in\psi/l}$$

onde l denota o "comprimento" da quinta dimensão, e estamos usando o subscrito n para se referir ao n-ésimo modo de Fourier. Como estamos supondo

[1] Aqui estamos usando a seguinte convenção: as coordenadas de M^4 são denotadas por x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), enquanto que ψ se refere à coordenada de S^1.

l muito pequeno ($\sim 10^{-35}m$), num regime de baixas energias apenas o modo $n = 0$ é mantido na expressão acima. Isto implica em considerar $g_{\mu\nu}$, A_μ e ϕ como efetivamente independentes da quinta coordenada ψ.

As equações de Einstein em cinco dimensões no vazio são

$$G_{ab} = 0 \tag{2.2}$$

ou, equivalentemente,

$$R_{ab} = 0 \tag{2.3}$$

onde $G_{ab} = R_{ab} - R\overline{g}_{ab}/2$ é o tensor de Einstein em cinco dimensões, R_{ab} e R são o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, respectivamente. Todas estas quantidades são calculadas com o tensor métrico de cinco dimensões $\overline{g}_{ab}$[2].

Agora vem o que é realmente interessante na teoria de Kaluza-Klein. Por um cálculo direto podemos mostrar que é possível separar a equação (2.2) no seguinte conjunto de equações:

$$^{(4)}G_{\mu\nu} = \frac{\phi^2}{2}T_{\mu\nu} - \frac{1}{\phi}[\nabla_\mu(\partial_\nu\phi) - g_{\mu\nu}\Box\phi] \tag{2.4}$$

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = -3\frac{\partial^\mu\phi}{\phi}F_{\mu\nu} \tag{2.5}$$

$$\Box\phi = \frac{\phi^3}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2.6}$$

onde as quantidades $^{(4)}G_{\mu\nu} =^{(4)} R_{\mu\nu} -^{(4)} Rg_{\mu\nu}/2$, $^{(4)}R_{\mu\nu}$, $^{(4)}R$, ∇_μ e $\Box\phi$ são calculadas com a "métrica" quadridimensional $^{(4)}g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}(x)$ e, portanto, interpretadas como um "tensor de Einstein" quadridimensional. Além disso, $T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}/4 - F^\alpha_\mu F_{\nu\alpha}$ desempenha o papel do tensor energia-momentum do campo eletromagnético, com $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Aqui, gostaria de fazer dois comentários. Primeiro, notemos que quando $A_\mu = 0$ as equações acima são formalmente equivalentes às equações da teoria

[2]Estamos adotando aqui a seguinte convenção para o tensor de Ricci: $R_{ab} = \partial_c\Gamma^c_{ab} - \partial_b\Gamma^c_{ac} + \Gamma^c_{ab}\Gamma^d_{cd} - \Gamma^c_{ad}\Gamma^d_{bc}$.

gravitacional de Brans-Dicke no vazio [1] com $\omega = 0$ (neste caso, a equação (2.5) se reduz a uma identidade). Segundo, podemos ser levados a pensar que se fizermos $\phi = 1$, então, obteremos as equações de Einstein-Maxwell para um campo de radiação. Contudo, isto não é verdade, pois embora as equações (2.4) e (2.5) nos induzam a tal interpretação, a equação (2.6) para o campo escalar introduz necessariamente o indesejável vínculo $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$. Existe, todavia uma maneira inteligente de superar esta dificuldade: em vez de procurar deduzir a teoria de Maxwell diretamente de (2.2), empreguemos aqui o formalismo lagrangiano. Assim, comecemos escrevendo a ação que descreve um espaço-tempo no vazio em cinco dimensões

$$^{(5)}S = -\frac{1}{16\pi\overline{G}} \int d^5x \sqrt{-\overline{g}}\, ^{(5)}R \tag{2.7}$$

onde $\overline{G}$ é uma "constante gravitacional" em cinco dimensões. Pode-se mostrar facilmente que separando o escalar de curvatura em cinco dimensões $^{(5)}R$ em termos do escalar de curvatura $^{(4)}R$ calculado com $g_{\mu\nu}$, os campos A_μ, ϕ e suas derivadas, e depois integrando (2.7) com relação à coordenada compacta ψ, obtemos como resultado a "ação quadridimensional"

$$^{(4)}S = -\int d^4x \sqrt{-g}\phi \left(\frac{^{(4)}R}{16\pi G} + \frac{1}{4}\phi^2 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{2}{3k^2}\frac{\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi}{\phi^2} \right) \tag{2.8}$$

onde substituimos $k^2 = 16\pi G$, e identificamos $G = \overline{G}/l$ como a constante gravitacional newtoniana em quatro dimensões. Agora, se fizermos $\phi = cte$, reobteremos a ação correspondente à interação do campo gravitacional com o campo eletromagnético. Desse modo, vemos claramente que o campo eletromagnético aparece aqui, exclusivamente, devido à geometria do espaço de cinco dimensões. Como chamamos a atenção no capítulo anterior, a generalização desse procedimento permite incorporar outros tipos de campos, tais como os campos nucleares fraco e forte, constituindo o que chamamos hoje de versão moderna da teoria de Kaluza-Klein [3].

Conforme já disse no capítulo anterior, nosso interesse maior neste trabalho está em investigar as chamadas teorias de imersão. Sendo assim, é importante citar, neste pequeno resumo sobre a teoria de Kaluza-Klein, o fato desta teoria não poder ser tratada como uma teoria de imersão. Sabemos que o que caracteriza uma teoria de imersão é o fato de o espaço-tempo quadridimensional diretamente observável M^4 corresponder a uma hipersuperfície imersa numa variedade M^5, de cinco dimensões [3]. Como já frisamos previamente, exemplos de uma teoria de imersão são os recentes modelos de Randall-Sundrum [3, 4], em que o nosso universo observável é visto como uma hipersuperfície quadridimensional imersa numa variedade anti-de Sitter, de cinco dimensões (a que se costuma referir como "bulk"). Um outro exemplo de teoria de imersão é a teoria de matéria induzida à qual trataremos no próximo capítulo [4].

Para a teoria de Kaluza-Klein, é bastante problemático interpretá-la como uma teoria de imersão pelo fato de que ao buscarmos encontrar uma hipersuperfície Σ_4 de M^5, tal que a métrica induzida em Σ_4 por $\overline{g}_{ab}$ seja $g_{\mu\nu}(x)$, vemos que isso só é possível se não tivermos o campo eletromagnético, quebrando a proposta inicial da teoria. Por exemplo, admitamos a possibilidade da existência de tal superfície, sendo parametrizada por uma equação do tipo $\psi = f(x)$. O elemento de linha de M^5 pode ser escrito como sendo

$$dS^2 = \overline{g}_{ab}dx^a dx^b = (g_{\mu\nu} + \phi^2 A_\mu A_\nu)dx^\mu dx^\nu + 2\phi^2 A_\mu dx^\mu d\psi + \phi^2 d\psi^2. \quad (2.9)$$

Substituindo $d\psi = \partial_\mu f dx^\mu$ em (2.9) obtemos

$$dS^2 = (g_{\mu\nu} + \phi^2 A_\mu A_\nu + 2\phi^2 A_\mu \partial_\nu f + \phi^2 \partial_\mu f \partial_\nu f)dx^\mu dx^\nu.$$

[3] Aqui estamos dando uma definição um tanto informal do que seja uma teoria de imersão. Nos próximos capítulos trataremos o assunto com mais profundidade.

[4] Notemos, porém que, a teoria da matéria induzida admite uma outra formulação, a que considera M^4como "folhas" dentro de uma folheação de M^5.

Para que a métrica induzida seja $g_{\mu\nu}(x)$ devemos ter $A_\mu = -\partial_\mu f$. Ora, mas então vemos que A_μ deve ser um gauge puro, e nesse caso o campo eletromagnético se anula em (2.9). Concluímos, portanto, que no contexto da teoria de Kaluza-Klein o espaço-tempo quadridimensional M^4 só pode ser visto como uma hipersuperfície Σ_4 imersa no espaço de cinco dimensões M^5 se o campo eletromagnético for "desligado". Este fato matemático explica por que o quadripotencial eletromagnético A_μ não aparece desde o início na formulação da teoria da matéria induzida.

Referências Bibliográficas

[1] C. Brans and R. Dicke, *Phys. Rev.*, 124, 925 (1961).

[2] T. Kaluza, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.* 33, 966 (1921). O. Klein, *Z. Phys.* 37, 895 (1926).

[3] T. Appelquist, A. Chodos and P. Freund, "Modern Kaluza-Klein Theories", Addison-Wesley, Menlo Park, 1987.

[4] P. Collins, A. Martin and E. Squires, "Particle Physics and Cosmology", Ch. 13, Wiley, New York, 1989.

[5] See, for instance, P. West, "Introduction to Supersymmetry and Supergravity", Word Scientific, Singapore, 1986.

[6] M. Green and J. H. Schwarz and E. Witten, "Superstring theory", Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[7] Randall, L. and Sundrum, R., *Phys. Rev. Lett.* 83, 3370 (1999).

[8] Randall, L. and Sundrum, R., *Phys. Rev. Lett.* 83, 4690 (1999).

[9] For a brief historical account of Kaluza-Klein theory see A. Pais, "The Science and the Life of Albert Einstein", Ch. 17, Oxford University Press, Oxford (1982).

[10] F. Dahia, E. Monte and C. Romero, *Mod. Phys. Lett.* 18, 1773 (2003).

[11] Romero, C., Tavakol, R. and Zalaletdinov, R., *Gen. Rel. Grav.* 28, 365 (1995).

Capítulo 3

A teoria da matéria induzida

"Não existe uma estrada real para a geometria"

(Euclides)

A teoria da matéria induzida, que surgiu no início dos anos noventa, admite, como postulado fundamental, que o espaço-tempo diretamente observável M^4 pode ser visto como uma hipersuperfície quadridimensional imersa num espaço Ricci-flat de cinco dimensões M^5. Desenvolvida por Wesson e colaboradores [6], nesta abordagem as equações de Einstein no vazio em cinco dimensões conduzem a equações em quatro dimensões na presença de fontes. Dir-se-ia que a física de quatro dimensões seria reobtida da relatividade geral no vácuo em cinco dimensões. Entre os resultados mais significativos da teoria de Wesson estão a dedução, através de uma escolha apropriada da imersão, dos modelos cosmológicos de Friedmann-Robertson-Walker [12], das soluções de Sitter no vácuo [19], e outros. Como já vimos, a teoria de Kaluza-Klein supõe que a quinta dimensão seja compacta. Já no caso da teoria da matéria induzida, tal restrição é abandonada. Um outro princípio adotado pela teoria é que as quantidades clássicas, tais como matéria e energia, devem ter uma interpretação essencialmente geométrica. Dessa maneira, propõe-se que o tensor energia-momentum clássico, que aparece no lado direito das equações de Einstein, seja gerado por meios puramente geométricos. Para um observador no espaço-tempo quadridimensional a dimensão extra surge como a verdadeira fonte da matéria, que por sua vez, curva este espaço-tempo.

Assim, admitamos que o espaço M^5, em que M^4 está imerso, corresponde a uma solução das equações de Einstein em cinco dimensões no vazio. Consideremos um sistema de coordenadas $\{x^a\}$ no qual a geometria de M^5 seja dada por $dS^2 = \overline{g}_{ab}dx^a dx^b$, com o tensor métrico $\overline{g}_{ab} = \overline{g}_{ab}(x, \psi)$ sendo dado por

$$\overline{g}_{ab} = \begin{pmatrix} \overline{g}_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \epsilon\phi^2 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

onde $\epsilon = \pm 1$. (Notemos que agora o potencial eletromagnético da teoria de Kaluza-Klein não mais aparece na métrica, uma vez que todas as componentes não-diagonais $\overline{g}_{4\alpha}$ são nulas.) Observamos, de passagem, que não é possível obter (3.1) a partir de (2.1) por uma transformação de coordenadas permitida pelo grupo de invariância de Kaluza-Klein G^5, a menos no caso trivial em que os potenciais eletromagnéticos sejam do tipo $A_\mu = \partial_\mu \Lambda$ (isto é, um gauge puro), sendo $\Lambda(x)$ uma função diferenciável. Portanto, vemos aqui que uma eventual geometrização do campo eletromagnético na teoria de matéria induzida, diferentemente da teoria de Kaluza-Klein, não é conseguida pondo-se diretamente A_μ na métrica de M^5. Na teoria da matéria induzida, o campo eletromagnético pode manifestar sua presença apenas através do seu tensor energia-momentum, o qual é gerado pela quinta dimensão e pela dependência do campo escalar ϕ e dos campos métricos na quinta coordenada ψ. Portanto, nesta abordagem as "equações de Maxwell" (2.5) são substituídas por um outro conjunto de quatro equações envolvendo apenas a métrica, o campo escalar e suas derivadas. Passemos aos detalhes.

As componentes do tensor de Ricci de M^5 em termos dos símbolos de Christoffel em cinco dimensões são dadas por

$$R_{ab} = \Gamma^c_{ab,c} - \Gamma^c_{ac,b} + \Gamma^c_{ab}\Gamma^d_{cd} - \Gamma^c_{ad}\Gamma^d_{bc}. \tag{3.2}$$

Identificando $\overline{g}_{\mu\nu}$ como a métrica do nosso espaço-tempo quadridimensional M^4, fazendo $a \to \alpha$, $b \to \beta$, temos então nosso elemento em M^5 dado por

$$dS^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + \epsilon\phi^2 d\psi^2. \tag{3.3}$$

Podemos obter uma equação que nos dá uma relação entre as componentes quadridimensionais de R_{ab} com ${}^{(4)}R_{\alpha\beta}$, o tensor de Ricci quadridimensional calculado com $\overline{g}_{\alpha\beta}$.

Tomando, em (3.2), as componentes $a = \alpha$ e $b = \beta$, ficamos com:

$${}^{(5)}R_{\alpha\beta} = \Gamma^\lambda_{\alpha\beta,\lambda} + \Gamma^4_{\alpha\beta,4} - \Gamma^\lambda_{\alpha\lambda,\beta} - \Gamma^4_{\alpha4,\beta} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\Gamma^\mu_{\lambda\mu} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\Gamma^4_{\lambda4} +$$

$$+\Gamma^4_{\alpha\beta}\Gamma^d_{4d} - \Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\mu} - \Gamma^4_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta4} - \Gamma^d_{\alpha4}\Gamma^4_{\beta d}$$

$$= \Gamma^\lambda_{\alpha\beta,\lambda} - \Gamma^\lambda_{\alpha\lambda,\beta} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\Gamma^\mu_{\lambda\mu} - \Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\mu} + \Gamma^4_{\alpha\beta,4} - \Gamma^4_{\alpha4,\beta} +$$

$$+\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\Gamma^4_{\lambda4} + \Gamma^4_{\alpha\beta}\Gamma^d_{4d} - \Gamma^4_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta4} - \Gamma^d_{\alpha4}\Gamma^4_{\beta d}.$$

Assim,

$${}^{(5)}R_{\alpha\beta} = {}^{(4)}R_{\alpha\beta} + \Gamma^4_{\alpha\beta,4} - \Gamma^4_{\alpha4,\beta} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\Gamma^4_{\lambda4} + \Gamma^4_{\alpha\beta}\Gamma^d_{4d} - \Gamma^4_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta4} - \Gamma^d_{\alpha4}\Gamma^4_{\beta d}. \tag{3.4}$$

Para $a = 4$ e $b = 4$ temos:

$$^{(5)}R_{44} = \Gamma^{\lambda}_{44,\lambda} + \Gamma^{4}_{44,4} - \Gamma^{\lambda}_{4\lambda,4} - \Gamma^{4}_{44,4} + \Gamma^{\lambda}_{44}\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} + \Gamma^{4}_{44}\Gamma^{\mu}_{4\mu} +$$

$$+\Gamma^{\lambda}_{44}\Gamma^{4}_{\lambda 4} - \Gamma^{\lambda}_{4\mu}\Gamma^{\mu}_{4\lambda} - \Gamma^{4}_{4\mu}\Gamma^{\mu}_{44} - \Gamma^{\lambda}_{44}\Gamma^{4}_{\lambda 4},$$

ou seja,

$$^{(5)}R_{44} = \Gamma^{\lambda}_{44,\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{4\lambda,4} + \Gamma^{\lambda}_{44}\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} + \Gamma^{4}_{44}\Gamma^{\mu}_{4\mu} - \Gamma^{\lambda}_{4\mu}\Gamma^{\mu}_{4\lambda} - \Gamma^{4}_{4\mu}\Gamma^{\mu}_{44}. \qquad (3.5)$$

Da definição dos símbolos de Christoffel,

$$\Gamma^{c}_{ab} = \frac{1}{2}g^{cd}(g_{bd,a} + g_{da,b} - g_{ab,d}), \qquad (3.6)$$

temos:

$\Gamma^{4}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{4f}\left(g_{\beta f,\alpha} + g_{f\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,f}\right) = \frac{g^{44}}{2}\left(g_{\beta 4,\alpha} + g_{4\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,4}\right) = \frac{g^{44}}{2}\left(-g_{\alpha\beta,4}\right)$ $= -\frac{g^{44}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}}{2}$;

$\Gamma^{4}_{\alpha 4} = \frac{g^{44}}{2}\left(g_{44,\alpha} + g_{4\alpha,4} - g_{\alpha 4,4}\right) = \frac{g^{44}g_{44,\alpha}}{2}$;

$\Gamma^{4}_{\lambda 4} = \frac{g^{44}g_{44,\lambda}}{2}$;

$\Gamma^{d}_{4d} = \frac{g^{dc}}{2}\left(g_{dc,4} + g_{c4,d} - g_{4d,c}\right) = \frac{g^{dc}}{2}\left(g_{dc,4} + g_{44,4} - g_{44,4}\right) = \frac{g^{dc}\overset{*}{g}_{dc}}{2}$;

$\Gamma^{\lambda}_{\beta 4} = \frac{g^{\lambda c}}{2}\left(g_{4c,\beta} + g_{c\beta,4} - g_{\beta 4,c}\right) = \frac{g^{\lambda 4}g_{44,\beta}}{2} + \frac{g^{\lambda c}\overset{*}{g}_{\beta c}}{2} = \frac{g^{\lambda c}\overset{*}{g}_{\beta c}}{2}$;

$\Gamma^{d}_{\alpha 4} = \frac{g^{dc}}{2}\left(g_{4c,\alpha} + g_{c\alpha,4} - g_{\alpha 4,c}\right) = \frac{g^{d4}g_{44,c}}{2} + \frac{g^{d\gamma}\overset{*}{g}_{\gamma\alpha}}{2}$;

$\Gamma^{4}_{\beta d} = \frac{g^{4c}}{2}\left(g_{dc,\beta} + g_{c\beta,d} - g_{\beta d,c}\right) = \frac{g^{44}g_{d4,\beta}}{2} + \frac{g^{44}g_{4\beta,d}}{2} - \frac{g^{44}g_{\beta d,4}}{2} = \frac{g^{44}g_{d4,\beta}}{2} - \frac{g^{44}\overset{*}{g}_{\beta d}}{2}$.

O asterisco indica derivada com relação a coordenada da dimensão extra ψ. Substituindo, então, os símbolos de Christoffel não-nulos na equação (3.4) ficamos com:

$$^{(5)}R_{\alpha\beta} =^{(4)} R_{\alpha\beta} + \left(-\frac{g^{44}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}}{2}\right)_{,4} - \left(\frac{g^{44}g_{44,\alpha}}{2}\right)_{,\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\left(\frac{g^{44}g_{44,\lambda}}{2}\right)$$

$$+\left(-\frac{g^{44}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}}{2}\right)\left(\frac{g^{dc}\overset{*}{g}_{dc}}{2}\right)-\left(-\frac{g^{44}\overset{*}{g}_{\alpha\lambda}}{2}\right)\left(\frac{g^{\lambda c}\overset{*}{g}_{\beta c}}{2}\right)$$

$$-\left(\frac{g^{d4}g_{44,\alpha}}{2}+\frac{g^{d\gamma}g_{\gamma\alpha}}{2}\right)\left(\frac{g^{44}g_{d4,\beta}}{2}-\frac{g^{44}\overset{*}{g}_{\beta d}}{2}\right)$$

$$=^{(4)} R_{\alpha\beta}-\frac{\overset{*}{g}{}^{44}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}}{2}-\frac{g^{44}\overset{**}{g}_{\alpha\beta}}{2}-\frac{g^{44}_{,\beta}g_{44,\alpha}}{2}-\frac{g^{44}g_{44,\alpha\beta}}{2}$$

$$+\frac{g^{44}g_{44,\lambda}}{2}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}-\frac{g^{44}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}g^{dc}\overset{*}{g}_{dc}}{4}+\frac{g^{44}\overset{*}{g}_{\alpha\lambda}g^{\lambda c}\overset{*}{g}_{\beta c}}{4}-\frac{g^{d4}g_{44,\alpha}g^{44}g_{d4,\beta}}{4}$$

$$+\frac{g^{d4}g_{44,\alpha}g^{44}\overset{*}{g}_{\beta d}}{4}-\frac{g^{d\gamma}g_{\gamma\alpha}g^{44}g_{d4,\beta}}{4}+\frac{g^{d\gamma}g_{\gamma\alpha}g^{44}\overset{*}{g}_{\beta d}}{4}.$$

Finalmente, obtemos

$$^{(5)}R_{\alpha\beta}=^{(4)} R_{\alpha\beta}-\frac{\overset{*}{g}{}^{44}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}}{2}-\frac{g^{44}\overset{**}{g}_{\alpha\beta}}{2}-\frac{g^{44}_{,\beta}g_{44,\alpha}}{2}-\frac{g^{44}g_{44,\alpha\beta}}{2}+\frac{g^{44}g_{44,\lambda}}{2}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$$

$$-\frac{g^{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\mu\nu}g^{44}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}}{4}-\frac{(g^{44})^2\overset{*}{g}_{\alpha\beta}\overset{*}{g}_{44}}{4}+\frac{g^{\lambda\mu}g^{44}\overset{*}{g}_{\alpha\lambda}\overset{*}{g}_{\beta\mu}}{2}-\frac{(g^{44})^2g_{44,\alpha}g_{44,\beta}}{4}. \qquad (3.7)$$

Analogamente, temos

$\Gamma^{\lambda}_{44}=\frac{g^{\lambda\beta}}{2}\left(g_{4\beta,4}+g_{\beta4,4}-g_{44,\beta}\right)=-\frac{g^{\lambda\beta}g_{44,\beta}}{2}$;

$\Gamma^{\lambda}_{4\lambda}=\frac{g^{\lambda\beta}}{2}\left(g_{\lambda\beta,4}+g_{\beta4,\lambda}-g_{4\lambda,\beta}\right)=\frac{g^{\lambda\beta}\overset{*}{g}_{\lambda\beta}}{2}$;

$\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu}=\frac{g^{\mu\beta}}{2}\left(g_{\mu\beta,\lambda}+g_{\beta\lambda,\mu}-g_{\lambda\mu,\beta}\right)=\frac{g^{\mu\beta}g_{\mu\beta,\lambda}}{2}+\frac{g^{\mu\beta}g_{\beta\lambda,\mu}}{2}-\frac{g^{\mu\beta}g_{\lambda\mu,\beta}}{2}=\frac{g^{\mu\beta}g_{\mu\beta,\lambda}}{2}+\frac{g_{\mu\lambda,\mu}}{2}-\frac{g_{\mu\lambda,\mu}}{2}=\frac{g^{\mu\beta}g_{\mu\beta,\lambda}}{2}$;

$\Gamma^{4}_{44}=\frac{g^{44}}{2}\left(g_{44,4}+g_{44,4}-g_{44,4}\right)=\frac{g^{44}\overset{*}{g}_{44}}{2}$;

$\Gamma^{\lambda}_{4\mu}=\frac{g^{\lambda\beta}\overset{*}{g}_{\mu\beta}}{2}$ (similar a $\Gamma^{\lambda}_{4\lambda}$, trocando λ por μ);

$\Gamma^{4}_{4\mu}=\frac{g^{44}}{2}\left(g_{\mu4,4}+g_{44,\mu}-g_{4\mu,4}\right)=\frac{g^{44}g_{44,\mu}}{2}$.

Substituindo as expressões acima na equação (3.5) ficamos com:

$$
{}^{(5)}R_{44} = \left(-\frac{g^{\lambda\beta}g_{44,\beta}}{2}\right)_{,\lambda} - \left(\frac{g^{\lambda\beta}\overset{*}{g}_{\lambda\beta}}{2}\right)_{,4} + \left(-\frac{g^{\lambda\beta}g_{44,\beta}}{2}\right)\left(\frac{g^{\mu\sigma}g_{\mu\sigma,\lambda}}{2}\right)
$$

$$
+ \left(\frac{g^{44}\overset{*}{g}_{44}}{2}\right)\left(\frac{g^{\lambda\beta}\overset{*}{g}_{\lambda\beta}}{2}\right) - \left(\frac{g^{\mu\beta}\overset{*}{g}_{\lambda\beta}}{2}\right)\left(\frac{g^{\lambda\sigma}\overset{*}{g}_{\mu\sigma}}{2}\right) - \left(\frac{g^{44}g_{44,\lambda}}{2}\right)\left(-\frac{g^{\lambda\beta}g_{44,\beta}}{2}\right).
$$

Isto é,

$$
\begin{aligned}
{}^{(5)}R_{44} = &-\frac{g^{\lambda\beta}_{,\lambda}g_{44,\beta}}{2} - \frac{g^{\lambda\beta}g_{44,\beta\lambda}}{2} - \frac{\overset{*}{g}{}^{\lambda\beta}\overset{*}{g}_{\lambda\beta}}{2} - \frac{g^{\lambda\beta}\overset{**}{g}_{\lambda\beta}}{2} - \frac{g^{\lambda\beta}g_{44,\beta}g^{\mu\sigma}g_{\mu\sigma,\lambda}}{4} \\
&+ \frac{g^{44}\overset{*}{g}_{44}g^{\lambda\beta}\overset{*}{g}_{\lambda\beta}}{4} - \frac{g^{\mu\beta}\overset{*}{g}_{\lambda\beta}g^{\lambda\sigma}\overset{*}{g}_{\mu\sigma}}{4} + \frac{g^{44}g_{44,\lambda}g^{\lambda\beta}g_{44,\beta}}{4}.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Usando o elemento de linha (3.3), podemos simplificar as equações (3.7) e (3.8). Na equação (3.7), podemos simplificar os termos que dependem das derivadas da coordenada extra, observando que

$$
\begin{aligned}
-\frac{g^{44}_{,\beta}g_{44,\alpha}}{2} - \frac{g^{44}g_{44,\alpha\beta}}{2} + \frac{g^{44}g_{44,\lambda}}{2}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \frac{(g^{44})^2 g_{44,\alpha}g_{44,\beta}}{4} = &-\frac{\epsilon^2(\phi^{-2})_{,\beta}(\phi^2)_{,\alpha}}{2} \\
-\frac{\epsilon^2(\phi^{-2})(\phi^2)_{,\alpha\beta}}{2} + \frac{\epsilon^2(\phi^{-2})(\phi^2)_{,\lambda}}{2}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \frac{\epsilon^4(\phi^{-4})(\phi^2)_{,\alpha}(\phi^2)_{,\beta}}{4}
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{2\phi^{-3}\phi_{,\beta}2\phi\phi_{,\alpha}}{2} - \frac{\phi^{-2}(2\phi\phi_{,\alpha})_{,\beta}}{2} + \frac{\phi^{-2}2\phi\phi_{,\lambda}}{2}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \frac{\phi^{-4}(2\phi\phi_{,\alpha})(2\phi\phi_{,\beta})}{4}
$$

$$
= 2\phi^{-2}\phi_{,\beta}\phi_{,\alpha} - \phi^{-2}(\phi_{,\beta}\phi_{,\alpha} + \phi\phi_{,\alpha,\beta}) + \phi^{-1}\phi_{,\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \phi^{-2}\phi_{,\beta}\phi_{,\alpha}
$$

$$
= \phi^{-2}(2\phi_{,\beta}\phi_{,\alpha} - \phi_{,\beta}\phi_{,\alpha} - \phi_{,\beta}\phi_{,\alpha}) - \phi^{-2}(\phi\phi_{,\alpha,\beta}) + \phi^{-1}\phi_{,\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}
$$

$$= -\phi^{-1}\phi_{,\alpha,\beta} + \phi^{-1}\phi_{,\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$$

$$= -\frac{1}{\phi}\left(\phi_{\alpha,\beta} - \phi_{,\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\right) = -\frac{\phi_{\alpha;\beta}}{\phi},$$

onde estamos denotando $\phi_{,\alpha} = \phi_{\alpha}$ e $\phi_{\alpha;\beta}$ é a derivada covariante de ϕ_{α} em relação a coordenada x^{β}. Usando essa relação em (3.7) e resolvendo os outros termos que possuem derivadas em relação à coordenada ψ, temos

$$^{(5)}R_{\alpha\beta} =^{(4)} R_{\alpha\beta} - \frac{\phi_{\alpha;\beta}}{\phi} + \frac{\epsilon \overset{*}{g}_{\alpha\beta}\overset{*}{\phi}}{\phi^3} - \frac{\epsilon \overset{**}{g}_{\alpha\beta}}{2\phi^2} - \frac{\epsilon g^{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}}{4\phi^2} - \frac{\epsilon \overset{*}{g}_{\alpha\beta}\overset{*}{\phi}}{2\phi^3} + \frac{\epsilon g^{\lambda\mu}\overset{*}{g}_{\alpha\lambda}\overset{*}{g}_{\beta\mu}}{2\phi^2}$$

$$=^{(4)} R_{\alpha\beta} - \frac{\phi_{\alpha;\beta}}{\phi} + \frac{2\epsilon \overset{*}{g}_{\alpha\beta}\overset{*}{\phi} - \epsilon \overset{*}{g}_{\alpha\beta}\overset{*}{\phi}}{2\phi^3} - \frac{\epsilon \overset{**}{g}_{\alpha\beta}}{2\phi^2} + \frac{\epsilon g^{\lambda\mu}\overset{*}{g}_{\alpha\lambda}\overset{*}{g}_{\beta\mu}}{2\phi^2} - \frac{\epsilon g^{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}}{4\phi^2}.$$

Finalmente,

$$^{(5)}R_{\alpha\beta} =^{(4)} R_{\alpha\beta} - \frac{\phi_{\alpha;\beta}}{\phi} + \frac{\epsilon}{2\phi^2}\left(\frac{\overset{*}{\phi}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}}{\phi} - \overset{**}{g}_{\alpha\beta} + g^{\lambda\mu}\overset{*}{g}_{\alpha\lambda}\overset{*}{g}_{\beta\mu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}\right). \tag{3.9}$$

Notemos que na equação (3.8), os termos que não dependem de derivadas de ψ podem ser simplificados e colocados na seguinte forma:

$$-\frac{g^{\lambda\beta}_{,\lambda}g_{44,\beta}}{2} - \frac{g^{\lambda\beta}g_{44,\beta\lambda}}{2} - \frac{g^{\lambda\beta}g_{44,\beta}g^{\mu\sigma}g_{\mu\sigma,\lambda}}{4} + \frac{g^{44}g_{44,\lambda}g^{\lambda\beta}g_{44,\beta}}{4} =$$

$$= -\frac{\epsilon g^{\lambda\beta}_{,\lambda}(2\phi\phi_{,\beta})}{2} - \frac{\epsilon g^{\lambda\beta}(2\phi\phi_{,\beta})_{,\lambda}}{2} - \frac{\epsilon g^{\lambda\beta}(2\phi\phi_{,\beta})g^{\mu\sigma}g_{\mu\sigma,\lambda}}{4} + \frac{\epsilon^2\epsilon(\phi^{-2})(2\phi\phi_{,\lambda})g^{\lambda\beta}(2\phi\phi_{,\beta})}{4}$$

$$= -\epsilon\phi g^{\lambda\beta}_{,\lambda}\phi_{,\beta} - \epsilon g^{\lambda\beta}(\phi_{,\lambda}\phi_{,\beta} + \phi\phi_{,\beta,\lambda}) - \frac{\epsilon\phi g^{\lambda\beta}g^{\mu\sigma}g_{\mu\sigma,\lambda}\phi_{,\beta}}{2} + \epsilon g^{\lambda\beta}\phi_{,\lambda}\phi_{,\beta}$$

$$= -\epsilon\phi\left(g^{\lambda\beta}_{,\lambda}\phi_{\beta} + g^{\lambda\beta}\phi_{\beta,\lambda} + \frac{g^{\lambda\beta}g^{\mu\sigma}g_{\mu\sigma,\lambda}\phi_{\beta}}{2}\right)$$

$$= -\epsilon\phi g^{\mu\nu}\phi_{\mu;\nu} = -\epsilon\phi\Box\phi.$$

Aqui usamos a definição da derivada covariante $\phi_{\beta;\lambda} = \phi_{\beta,\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\lambda}\phi_{\sigma}$, o que nos leva a concluir que

$$g^{\beta\lambda}\phi_{\beta,\lambda} + \frac{g^{\beta\lambda}g^{\sigma\mu}g_{\beta\lambda,\mu}\phi_{\sigma}}{2} = g^{\mu\nu}\phi_{\mu;\nu} + \frac{g^{\beta\lambda}g^{\sigma\mu}g_{\mu\beta,\lambda}\phi_{\sigma}}{2} + \frac{g^{\beta\lambda}g^{\sigma\mu}g_{\mu\lambda,\beta}\phi_{\sigma}}{2}.$$

Por outro lado, levando em conta que, $(\delta^{\mu}_{\nu})_{,\mu} = 0$, temos

$$(g^{\lambda\sigma}_{,\lambda} + g^{\beta\lambda}g^{\sigma\mu}g_{\mu\beta,\lambda})\phi_{\sigma} = 0.$$

Substituindo as relações obtidas na equação (3.8) ficamos com

$$^{(5)}R_{44} = -\epsilon\phi\Box\phi - \frac{\overset{*}{g}{}^{\lambda\beta}\overset{*}{g}_{\lambda\beta}}{2} - \frac{g^{\lambda\beta}\overset{**}{g}_{\lambda\beta}}{2} + \frac{\overset{*}{\phi}g^{\lambda\beta}\overset{*}{g}_{\lambda\beta}}{2\phi} - \frac{g^{\mu\beta}g^{\lambda\sigma}\overset{*}{g}_{\lambda\beta}\overset{*}{g}_{\mu\sigma}}{4} \tag{3.10}$$

onde $\Box\phi \equiv g^{\mu\nu}\phi_{\mu;\nu}$. As equações (3.9) e (3.10) relacionam, então, as componentes do tensor de Ricci R_{ab} com a métrica definida em (3.3).

Sabemos que as equações (3.9) e (3.10) devem satisfazer

$$R_{ab} = 0, \tag{3.11}$$

já que o espaço-tempo é "Ricci-flat". Para $^{(5)}R_{\alpha\beta} = 0$, usando (3.9), teremos

$$^{(4)}R_{\alpha\beta} - \frac{\phi_{\alpha;\beta}}{\phi} + \frac{\epsilon}{2\phi^2}\left(\frac{\overset{*}{\phi}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}}{\phi} - \overset{**}{g}_{\alpha\beta} + g^{\lambda\mu}\overset{*}{g}_{\alpha\lambda}\overset{*}{g}_{\beta\mu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}\right) = 0,$$

ou ainda,

$$
{}^{(4)}R_{\alpha\beta} = \frac{\phi_{\alpha;\beta}}{\phi} - \frac{\epsilon}{2\phi^2}\left(\frac{\overset{*}{\phi}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}}{\phi} - \overset{**}{g}_{\alpha\beta} + g^{\lambda\mu}\overset{*}{g}_{\alpha\lambda}\overset{*}{g}_{\beta\mu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}\right). \quad (3.12)
$$

Para ${}^{(5)}R_{44} = 0$, usando (3.10) e notando também que $(\delta^{\mu}_{\nu})_{,4} = 0$ implica $g^{\mu\beta}g^{\lambda\sigma}\overset{*}{g}_{\lambda\beta}\overset{*}{g}_{\mu\sigma} + \overset{*}{g}^{\mu\sigma}\overset{*}{g}_{\mu\sigma} = 0$, teremos

$$
\epsilon\phi\Box\phi = -\frac{\overset{*}{g}^{\lambda\beta}\overset{*}{g}_{\lambda\beta}}{4} - \frac{g^{\lambda\beta}\overset{**}{g}_{\lambda\beta}}{2} + \frac{\overset{*}{\phi}g^{\lambda\beta}\overset{*}{g}_{\lambda\beta}}{2\phi}, \quad (3.13)
$$

que pode ser considerada como uma equação para o campo escalar ϕ. Usando a equação (3.12), podemos encontrar o escalar de Ricci em quatro dimensões através da contração $R = g^{\alpha\beta(4)}R_{\alpha\beta}$. Para isso, eliminamos a derivada covariante usando (3.13), de modo a obter

$$
{}^{(4)}R = \frac{\epsilon}{4\phi^2}[\overset{*}{g}^{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\mu\nu} + (g^{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\mu\nu})^2]. \quad (3.14)
$$

Finalmente, podemos, agora, encontrar uma expressão para o tensor energia-momentum a partir da equação de Einstein

$$
{}^{(4)}G_{\alpha\beta} = kT_{\alpha\beta} \quad (3.15)
$$

onde k é a constante de Einstein e $T_{\alpha\beta}$ é interpretado como o tensor energia-momentum da matéria em quatro dimensões, dado explicitamente por

$$
\begin{aligned}
k^{(4)}T_{\alpha\beta} = {}& \frac{\phi_{\alpha;\beta}}{\phi} - \frac{\epsilon}{2\phi^2}\left(\frac{\overset{*}{\phi}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}}{\phi} - \overset{**}{g}_{\alpha\beta} + g^{\lambda\mu}\overset{*}{g}_{\alpha\lambda}\overset{*}{g}_{\beta\mu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\alpha\beta}\right) \\
& + \frac{\epsilon}{2\phi^2}\frac{g_{\alpha\beta}}{4}\{\overset{*}{g}^{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\mu\nu} + (g^{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\mu\nu})^2\}. \quad (3.16)
\end{aligned}
$$

A equação (3.16) preserva a simetria do tensor $T_{\alpha\beta}$, que contêm derivadas de ϕ em relação às coordenadas espaciais $\{x^{\alpha}\}$, além de possuir derivadas em relação à coordenada extra ψ. A expressão obtida acima é compatível com expressões obtidas por outras teorias, em que as propriedades da matéria em M^4 são expressas a partir de soluções de $G_{ab} = 0$, sendo similar a solução de Schwarzschild em quatro dimensões, só que sem a dependência da dimensão extra. A teoria em questão não é plausível para o caso em que $R_{ab} \neq 0$, pela perda de contato direto com a solução de Scwarzschild e as propriedades da matéria em quatro dimensões.

Outras equações de campo podem ser obtidas considerando a componente não-nula $R_{4\alpha}$, a partir de

$$^{(5)}R_{4\alpha} = 0 \tag{3.17}$$

fazendo a expansão

$$^{(5)}R_{4\alpha} = (\Gamma^{\lambda}_{4\alpha})_{,\lambda} + (\Gamma^{4}_{4\alpha})_{,4} - (\Gamma^{\lambda}_{4\lambda})_{,\alpha} - (\Gamma^{4}_{44})_{,\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{4\alpha}\Gamma^{a}_{\lambda a}$$

$$+ \Gamma^{4}_{4\alpha}\Gamma^{a}_{4a} - \Gamma^{a}_{4\mu}\Gamma^{\mu}_{\alpha a} - \Gamma^{d}_{44}\Gamma^{4}_{\alpha d}. \tag{3.18}$$

Usando os símbolos de Christoffel não-nulos

$\Gamma^{\lambda}_{4\alpha} = \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(g_{\alpha\mu,4} + g_{\mu4,\alpha} - g_{4\alpha,\mu}) = \frac{g^{\lambda\mu}\overset{*}{g}_{\alpha\mu}}{2}$;
$\Gamma^{4}_{4\alpha} = \frac{1}{2}g^{44}(g_{\alpha4,4} + g_{44,\alpha} - g_{4\alpha,4}) = \frac{g^{44}g_{44,\alpha}}{2}$;
$\Gamma^{\lambda}_{4\lambda} = \frac{g^{\lambda\beta}\overset{*}{g}_{\lambda\beta}}{2}$;
$\Gamma^{4}_{44} = \frac{1}{2}g^{44}(g_{44,4} + g_{44,4} - g_{44,4}) = \frac{g^{44}\overset{*}{g}_{44}}{2}$;
$\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} = \frac{g^{\mu\sigma}g_{\mu\sigma,\lambda}}{2}$;
$\Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\lambda\sigma,\alpha} + g_{\sigma\alpha,\lambda} - g_{\alpha\lambda,\sigma})$;
$\Gamma^{\lambda}_{44} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(g_{4\alpha,4} + g_{\alpha4,4} - g_{44,\alpha}) = -\frac{g^{\alpha\lambda}g_{44,\alpha}}{2}$;
$\Gamma^{4}_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2}g^{44}(g_{\lambda4,\alpha} + g_{4\alpha,\lambda} - g_{\alpha\lambda,4}) = -\frac{g^{44}\overset{*}{g}_{\alpha\lambda}}{2}$.

Portanto, teremos, em (3.18), que

$$^{(5)}R_{4\alpha} = \frac{g^{44}g^{\lambda\beta}}{4}(\overset{*}{g}_{\lambda\beta}g_{44,\alpha} - g_{44,\beta}\overset{*}{g}_{\alpha\lambda}) + \frac{g^{\lambda\mu}_{,\lambda}\overset{*}{g}_{\mu\alpha}}{2} + \frac{g^{\lambda\mu}\overset{*}{g}_{\mu\alpha,\lambda}}{2} - \frac{g^{\lambda\beta}_{,\alpha}g_{\lambda\beta}}{2}$$

$$
-\frac{g^{\lambda\beta}g_{\lambda\beta,\alpha}}{2}+\frac{g^{\lambda\sigma}g^{\mu\beta}\overset{*}{g}_{\sigma\alpha}g_{\mu\beta,\lambda}}{4}+\frac{\overset{*}{g}{}^{\mu\beta}g_{\mu\beta,\alpha}}{4}, \tag{3.19}
$$

onde usamos o fato que $(g_{44}g^{44})_{,\alpha}=0$ e $(g_{44}g^{44})_{,4}=0$, o que nos dá $\overset{*}{g}{}^{44}g_{44,\alpha}-g^{44}_{,\alpha}\overset{*}{g}_{44}=0$. Uma forma alternativa para a equação (3.19) é dada por

$$
{}^{(5)}R_{4\alpha}=\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{g^{\beta\lambda}\overset{*}{g}_{\lambda\alpha}}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{g^{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\mu\nu}}{2}\right)+\left(\frac{g^{\mu\beta}g_{\mu\beta,\lambda}}{2}\right)\left(\frac{g^{\lambda\sigma}\overset{*}{g}_{\sigma\alpha}}{2}\right)
$$

$$
-\left(\frac{g^{\lambda\beta}g_{\beta\mu,\alpha}}{2}\right)\left(\frac{g^{\mu\sigma}\overset{*}{g}_{\sigma\lambda}}{2}\right)-\frac{g^{44}g_{44,\beta}}{2}\left(\frac{g^{\beta\lambda}\overset{*}{g}_{\lambda\alpha}-\delta^{\beta}_{\alpha}g^{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\mu\nu}}{2}\right), \tag{3.20}
$$

em que $(\Gamma^{4}_{4\alpha})_{,4}=(\Gamma^{4}_{44})_{,\alpha}$ e substituimos o último termo de (3.19) por $g^{\mu\beta}_{,\alpha}\overset{*}{g}_{\mu\beta}/4$. Como $\partial/\partial x^{\alpha}=\delta^{\beta}_{\alpha}\partial/\partial x^{\beta}$ e

$$
\frac{-g^{44}g_{44,\beta}}{2}=\sqrt{g_{44}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{44}}}\right),
$$

chegamos à expressão final:

$$
\frac{{}^{(5)}R_{4\alpha}}{\sqrt{g_{44}}}=\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left[\frac{1}{2\sqrt{g_{44}}}(g^{\beta\lambda}\overset{*}{g}_{\lambda\alpha}-\delta^{\beta}_{\alpha}g^{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\mu\nu})\right]+\left(\frac{g^{\mu\beta}g_{\mu\beta,\lambda}}{2}\right)\left(\frac{g^{\lambda\sigma}\overset{*}{g}_{\sigma\alpha}}{2\sqrt{g_{44}}}\right)
$$

$$
-\left(\frac{g^{\lambda\beta}g_{\beta\mu,\alpha}}{2}\right)\left(\frac{g^{\mu\sigma}\overset{*}{g}_{\sigma\lambda}}{2\sqrt{g_{44}}}\right). \tag{3.21}
$$

A equação acima sugere a introdução do tensor

$$
P^{\beta}_{\alpha}\equiv\frac{1}{2\sqrt{g_{44}}}(g^{\beta\lambda}\overset{*}{g}_{\lambda\alpha}-\delta^{\beta}_{\alpha}g^{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\mu\nu}), \tag{3.22}
$$

o qual possui divergência dada por

$$
P^{\beta}_{\alpha;\beta}=(P^{\beta}_{\alpha})_{,\beta}+\Gamma^{\beta}_{\beta\mu}P^{\mu}_{\alpha}-\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}P^{\beta}_{\mu}.
$$

Podemos, então, escrever a equação (3.21) na forma

$$
\frac{{}^{(5)}R_{4\alpha}}{\sqrt{g_{44}}}=P^{\beta}_{\alpha;\beta}. \tag{3.23}
$$

Por outro lado, da equação (3.17) temos também que

$$P^{\beta}_{\alpha;\beta} = 0, \tag{3.24}$$

equação que tem a forma de uma lei de conservação, em que

$$P_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\sqrt{g_{44}}}(\overset{*}{g}_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\overset{*}{g}_{\mu\nu}) \tag{3.25}$$

pode, então, ter uma interpretação física, dando mais consistência para a teoria.

É importante mencionar que, na verdade, existem pelo menos duas versões distintas da teoria de matéria induzida, às quais nos referiremos como a abordagem de *folheação* e abordagem de *imersão.* Estas duas abordagens levam a resultados diferentes no que diz respeito à dinâmica de partículas e campos, e são definidas da seguinte maneira: [10, 11]

i) A abordagem de folheação faz uso de uma congruência de um campo vetorial $V = \frac{\partial}{\partial\psi}$, definido em M^5, e supõe implicitamente que as equações que governam as leis físicas observadas são, num certo sentido, equações em cinco dimensões "projetadas" na folheação de hipersuperfície $\{\Sigma\}$ (definidas por $\psi = cte$) ortogonais a V. Nesta abordagem, a geometria do nosso espaço-tempo quadridimensional é determinada induzindo-se a métrica de M^5 nas folhas, de tal modo que ${}^{(4)}g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x, \psi)$ (note-se neste caso a dependência do tensor métrico na coordenada extra ψ).

ii) Na abordagem de imersão, faz-se também a hipótese de que a variedade M^5 seja folheada pelo conjunto de hipersuperfícies $\{\Sigma\}$ ortogonais a um campo vetorial V. Aqui, todavia, a geometria do espaço-tempo M^4 não é determinada pela folheação inteira, mas apenas por uma folha particular Σ^4 (digamos, $\psi = 0$), escolhida do conjunto de hipersuperfícies $\{\Sigma\}$, na qual o tensor métrico é induzido pela variedade ambiente M^5. Observe-se que nesta abordagem a geometria é determinada em termos de quantidades que são definidas exclusivamente em Σ^4; em particular, a métrica de M^4 é dada por ${}^{(4)}g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x, \psi = 0)$.

3.1 Aplicações à Cosmologia

Interessantes aplicações da teoria da matéria induzida incluem a obtenção de inúmeros modelos cosmológicos a partir de uma "redução dimensional", isto é, passando de cinco para quatro dimensões, nos moldes do procedimento descrito anteriormente. Consideremos, por exemplo, a métrica definida num espaço de cinco dimensões M^5 dada por [19]

$$dS^2 = \psi^2 dt^2 - t^{2/\alpha}\psi^{2/(1-\alpha)}(dx^2 + dy^2 + dz^2) - \alpha^2(1-\alpha)^{-2}t^2 d\psi^2. \quad (3.26)$$

Podemos verificar facilmente que a métrica acima é uma solução das equações para o vazio, ou seja, M^5 é um espaço Ricci-flat, pois satisfaz a equação (3.11). Por outro lado, um cálculo direto usando a equação (3.16) nos mostra que a métrica induzida na hipersuperfície $\psi = cte$ está associada a um tensor energia-momentum cuja únicas componentes não-nulas são

$$T^0_0 = \frac{3}{\alpha^2 t^2 \psi^2}$$

$$T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = \frac{3 - 2\alpha}{\alpha^2 t^2 \psi^2}.$$

As equações acima podem perfeitamente ser interpretadas como representando as componentes de um tensor energia-momentum associado a um fluido perfeito quadridimensional, obedecendo à equação de estado $p = \lambda\rho$, com $\lambda = \frac{2\alpha-3}{3}$ e $\frac{3}{2} \leq \alpha \leq 3$ [19]. A generalização desse interessante resultado para n dimensões é imediata [13].

Vejamos outro exemplo ilustrativo de como uma solução n-dimensional pode ser gerada por um espaço de $n+1$ dimensões através do esquema da teoria de matéria induzida. Comecemos com a métrica definida num espaço Ricci-flat M^{n+1} de $n+1$ dimensões cujo elemento de linha é dado por

$$dS^2 = \frac{\Gamma}{3}\psi^2 dt^2 - \psi^2 e^{2\sqrt{\frac{\Gamma}{3}}t} \sum_{i=1}^{n-1} (dx^i)^2 - d\psi^2. \tag{3.27}$$

Seguindo o mesmo procedimento descrito no caso anterior, pode-se verificar que a métrica induzida por (3.27) na hipersuperfície $\psi = cte$ é uma métrica do tipo de Sitter, solução das equações de Einstein no vazio em n dimensões com constante cosmológica $\Lambda_n = \frac{\Gamma}{6}(n-1)(n-2)$. Este exemplo ilustra como a constante cosmológica da solução de de Sitter pode ser vista também como uma manifestação das dimensões extras do espaço-tempo [13, 14].

3.2 A teoria da matéria induzida e a imersão do espaço-tempo

Poderia parecer, a esta altura, que qualquer solução da relatividade geral poderia ser obtida da teoria de matéria induzida por uma escolha apropriada da hipersuperfície Σ. É importante salientar que boa parte dos modelos quadridimensionais obtidos por este processo provém de uma variedade M^5 sem curvatura [16, 17]. No entanto, é impossível obter-se, por este mecanismo, a solução exterior de Schwarzschild, a partir de uma variedade de cinco dimensões sem curvatura. Isto foi mostrado, pela primeira vez, por Kasner, em 1921 [5]. Sabe-se, também, que para obter a solução de Gödel, a partir de um espaço sem curvatura, seriam necessárias dez dimensões [1]. Além do mais, uma questão crucial para a consistência da teoria da matéria induzida diz respeito à possibilidade de sempre se conseguir "gerar" um tensor energia-momentum arbitrário através do mecanismo de redução dimensional descrito acima. Ora, traduzindo matematicamente, isto é equivalente à questão de se saber se é sempre possível fazer a imersão de um espaço-tempo arbitrário num espaço Ricci-flat de cinco dimensões. Como veremos adiante, esta questão é precisamente resolvida pelo teorema de Campbell-Magaard, que discutiremos no próximo capítulo sobre as teorias de imersão.

Referências Bibliográficas

[1] P. Collins, A. Martin and E. Squires, "Particle Physics and Cosmology", Ch. 13, Wiley, New York, 1989.

[2] See, for instance, P. West, "Introduction to Supersymmetry and Supergravity", Word Scientific, Singapore, 1986.

[3] M. Green and J. Schwarz and E. Witten, "Superstring theory", Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[4] J. M. Overduin, P. S. Wesson, *Phys. Rep.* 283, 303 (1997).

[5] P. S. Wesson, "Space-Time-Matter", World Scientific, Singapore (1999).

[6] M. J. Duff, *Int. J. Mod. Phys. A*, 11 (1996) 5623 (1996).

[7] A. Einstein, "The meaning of Relativity", p. 129, Princeton University Press, Princeton (1956). J. A. Wheeler, "Einstein's Vision", Springer, Berlin (1968). A. Salam, *Rev. Mod. Phys.* 52, 525 (1968).

[8] C. Romero, R. Tavakol and R. Zalaletdinov, *Gen. Rel. Grav.* 28, 365 (1996). J. E. Lidsey, C. Romero, R. K. Tavakol and S. Rippl, *Class. Quant. Grav.* 14, 865 (1997). S. Seahra, P. Wesson, *Class. Quantum Grav.* 20, 1321 (2003).

[9] J. Campbell, "A Course of Differential Geometry", Oxford: Claredon, (1926). L. Magaard, "Zur einbettung riemannscher Raume in Einstein-Raume und konformeuclidische Raume", PhD Thesis, Kiel, (1963).

[10] F. Dahia, E. Monte and C. Romero, *Mod Phys. Lett.* 18, 1773 (2003).

[11] J. Ponce de Leon, *Extra force from an extra dimension: comparison between brane theory, stm and other approaches,* Gen. Rel. Grav. 36, 1335 (2004).

[12] D. Kalligas, P. S. Wesson, and C. W. F. Everitt, *Astrophys. J.* 439, 548 (1995).

[13] S. Rippl, C. Romero e R. Tavakol, *Class. Quantum Grav.* 12, 2411 (1995).

[14] O. Gron, *Astron. Atrophys.* 193, 1 (1988).

[15] E. Kasner, *Am. J. Math.* 43, 126 (1921).

[16] Ponce de Leon, Gen. Rel. Grav. 20, 539 (1988).

[17] D. J. Mc Manus, *J. Math. Phys.* 35, 4889 (1994).

[18] J. Rosen, *Embedding of various relativistic Riemannian spaces into pseudo-Euclidean spaces,* Rev. Mod, Phys. 37, 204 (1965).

[19] Ponce de Leon, Gen. Rel. Grav. 20, 539 (1988).

Capítulo 4

Teorias de imersão para o espaço-tempo

"Deus sempre geometrizou"

(Platão)

4.1 Breve histórico sobre as teorias de imersão

Historicamente a definição usual de superfície regular na geometria diferencial clássica supunha a existência de um espaço "ambiente", euclidiano, o $\mathbb{R}^3$, no qual a superfície estaria, digamos, "imersa". Podemos dizer que a ideia abstrata de variedade diferenciável nasceu da necessidade de libertar o conceito de superfície de um espaço ambiente. Para isto, foi fundamental a descoberta feita por Gauss [1] de que as propriedades geométricas mais relevantes das superfícies são propriedades intrínsecas à própria superfície. De fato, Gauss verificou que o cálculo das chamadas grandezas métricas, isto é, comprimento, ângulo, área, e outras, pode ser feito simplesmente a partir da *primeira forma fundamental*, ou seja, sem "sair" da superfície, sem a necessidade de se fazer referência a um espaço "imersor" de dimensão superior. Assim, o conceito do que hoje chamamos *variedade diferenciável riemanniana* foi formulado explicitamente, pela primeira vez, em 1850, por Riemann, em sua famosa tese, publicada somente em 1868 [2]. Nesta obra monumental, que teria enorme influência no desenvolvimento da geometria moderna [3, 4], Riemann concebe a ideia de um "espaço" como uma variedade topológica de um número arbitrário de dimensões dotada de uma métrica expressa em termos de uma forma diferencial quadrática.

De posse do conceito de um espaço completamente caracterizado por suas propriedades intrínsecas, prescindindo, portanto, de qualquer referência a um espaço exterior com um número maior de dimensões, os geômetras se perguntaram se seria ou não possível "realizar" concretamente tal espaço abstrato como um sub-espaço, ou uma subvariedade, do espaço euclidiano com um número maior de dimensões. A resposta a esta questão importante veio dada, na forma de uma conjectura, formulada em 1873 por Schläfli [5], pouco tempo depois da publicação do trabalho de Riemann. Nesta conjectura, Schäfli propunha que qualquer variedade riemanniana n-dimensional M_n com métrica analítica positiva-definida poderia ser imersa [1]localmente como uma subvariedade de um espaço euclidiano N-dimensional $\mathbb{R}^N$, com $N = n(n+1)/2$. A veracidade da conjectura de Schläfli foi comprovada somente em 1926 por Janet [10], e mesmo assim, através de uma demonstração incompleta. A prova definitiva deste resultado, agora transformado em teorema, deve-se, finalmente, a E. Cartan [11], em 1927. Desse modo, a partir desse teorema

[1]Estamos usando o termo imersão no mesmo sentido dado à palavra *embedding*, em inglês. Os textos de matemática em língua portuguesa via de regra preferem, entretanto, usar o termo *mergulho*, em lugar de imersão, reservando para este último o significado que o inglês atribui a *immersion*. Além do mais, está subtendido que estamos tratando, em todo o texto, de *imersões isométricas (isometric embeddings)*.

(teorema de Janet-Cartan), podemos considerar como equivalentes as abordagens intrínseca e extrínseca da geometria riemanniana. Enfraquecendo a hipótese de analiticidade e substituindo-a por diferenciabilidade de classe C^∞, Greene demonstrou que $N = (n/2)(n+3)$ [8].

Como é sabido, a teoria da gravitação de Einstein procura descrever o nosso espaço-tempo em termos de uma variedade pseudo-riemanniana (ou semi-riemanniana), onde a condição de ser positiva-definida, imposta sobre a métrica, é trocada pela condição de ser lorentziana. Com esta motivação, Friedman [11], em 1961, estendeu o teorema de Janet-Cartan para variedades pseudo-riemannianas. Na verdade, o problema da imersão de espaços pseudo-riemannianos como subvariedades de espaços pseudo-euclidianos (espaços sem curvatura, com métrica de assinatura arbitrária) há muito que havia despertado o interesse dos físicos. Basta citar, por exemplo, o trabalho pioneiro de Kasner [10], publicado em 1921, no qual ele demonstrava que era impossível fazer a imersão do espaço-tempo de Schwarzschild num espaço de cinco dimensões sem curvatura. O próprio Einstein [3] abordaria este mesmo tema, publicando um artigo em 1941, em que dava uma demonstração alternativa do resultado obtido previamente por Kasner. Nesse ponto, vale a pena mencionar uma aplicação importante da teoria de imersões na gravitação, devido a Fronsdal [12], que, independentemente de Kruskal [13], fez a extensão completa da solução de Schwarzschild, representando esta última como uma hipersuperfície de quatro dimensões globalmente imersa num espaço pseudo-euclidiano de seis dimensões.

Até aqui temos nos reportado à questão da imersão local, isto é, a imersão de um subconjunto aberto, simplesmente conexo, correspondendo à vizinhança de um dado ponto da variedade riemanniana M^n, a ser imersa. A imersão global de toda a variedade M^n num espaço ambiente euclidiano $\mathbb{R}^N$

constitui-se num problema consideravelmente mais complexo e foi abordado brilhantemente por John Nash [14] em 1956. Nash conseguiu dois resultados fundamentais: primeiro, se M^n for uma variedade compacta, então $N = n(3n + 11)/2$; segundo, se M^n não for compacta, $N = n(n + 1)(3n + 11)/2$. A extensão do trabalho de Nash para variedades pseudo-riemannianas coube a Clarke, em 1970. Pouco antes, porém, desse trabalho de Clarke, aplicações importantes da teoria de imersões à relatividade geral já haviam sido vislumbradas. De fato, Hawking [15] e Geroch [16] perceberam que a questão da natureza e a existência de singularidades no Universo está intimamente ligada a propriedades globais do modelo geométrico que pretende descrever o nosso espaço-tempo M^n. Podemos ilustrar esse ponto da seguinte maneira. Propriedades causais do espaço-tempo, essenciais à possibilidade de existirem singularidades, dependem do tipo de imersão possível de M^n. Ora, se a variedade M^n puder ser imersa num espaço pseudo-euclidiano E^N dotado de métrica hiperbólica (i. e. lorentziana), então conclui-se que M^n não pode conter curvas do tipo-tempo fechadas (as quais violam a causalidade) pela simples razão de estas últimas não serem admissíveis em E^N.

O advento da teoria da relatividade geral, em 1916, injetou na matemática da primeira metade do século XX um enorme interesse em geometria riemanniana e na teoria de tensores. Esse interesse deu origem, mais recentemente, a novos desenvolvimentos da geometria, tais como, geometria semi-riemanniana e lorentziana [17, 18]. Por outro lado, a descoberta dos famosos *teoremas de singularidades* de Hawking e Penrose [12] abriram caminho para uma fértil aplicação da topologia diferencial à relatividade [20].

Voltando à teoria de imersões, em 1926 foi publicado (postumamente) um livro sobre geometria diferencial [5], cujo objetivo, conforme diz o autor no prefácio, era "explicar" a linguagem matemática da teoria de Einstein de uma maneira clara. Nesse livro, o matemático inglês J. E. Campbell obtém um resultado inédito, de certo modo inesperado, na forma de um teorema cujo teor é o seguinte: toda variedade riemanniana analítica de dimensão n pode ser localmente e analiticamente imersa numa variedade riemanniana analítica de dimensão $n+1$ cuja curvatura de Ricci é nula (teorema de Campbell). A grande novidade desse resultado, comparado ao teorema de Janet-Cartan, é que a codimensão p do espaço ambiente cai drasticamente de $p = n(n-1)/2$ para $p = 1$. Aqui, não podemos nos furtar ao comentário de que, do ponto de vista da história da ciência, não deixa de ser notável que a publicação do teorema de Campbell, relativo a imersões em espaços dotados de curvatura, tenha precedido a publicação do teorema de Janet-Cartan que trata somente de imersões num espaço euclidiano. A demonstração do teorema de Campbell, publicada em seu livro, estava incompleta, conforme verificou-se posteriormente. No entanto, em 1963, uma tese de doutorado defendida por Lorenz Magaard [22], na Universidade de Kiel, apresentou uma prova completa e definitiva do teorema, que passou a ser conhecido como teorema de Campbell-Magaard. A tese de Magaard continha também resultados a respeito da imersão de variedades em espaços conformalmente planos.

O teorema de Campbell-Magaard, como destacamos anteriormente, é crucial, por razões de consistência, para a teoria gravitacional da matéria induzida e outras teorias de imersão do espaço-tempo. De fato, quando essa teoria surgiu, a ideia de que qualquer configuração de matéria poderia ser gerada por um mecanismo de imersão tinha, na realidade, um caráter conjectural. Conheciam-se vários exemplos, na maior parte das vezes tirados de modelos cosmológicos, em que o tensor momentum-energia $T_{\mu\nu}$, que descrevia macroscopicamente a distribuição de matéria, provinha da redução dimensional de um espaço de cinco dimensões. Todavia não era claro que tal procedimento funcionaria para qualquer escolha do $T_{\mu\nu}$. A descoberta de que este problema pode ser traduzido precisamente em termos da possibilidade de imersão do espaço-tempo em cinco dimensões, solução das equações de Einstein no vazio, levou a uma "redescoberta" do teorema de Campbell-Magaard, passando este a ser alvo de estudos e extensões, com uma nova motivação advinda das recentes teorias da gravitação que postulam a existência de uma dimensão extra.

A seguir, veremos alguns resultados provenientes das teorias de imersão, em especial, algumas extensões do teorema de Campbell-Magaard, a partir da formulação de teoremas, generalizando a aplicação do teorema de Campbell-Magaard nas teorias de imersão para a gravitação em cinco dimensões, dentre elas, a teoria da matéria induzida.

4.2 Imersão de soluções da relatividade geral em espaços de dimensão superior

Antes de falarmos em imersão da relatividade geral em cinco dimensões, iniciamos aqui discutindo brevemente a imersão de soluções da relatividade geral em espaços planos. Tais imersões possuem raízes na ideia de relacionar dimensões extras com certas simetrias exibidas pelas partículas elementares [33], assim como na busca de uma compreensão geométrica dessas soluções quando vistas como hipersuperfícies de espaços de dimensão superior.

Quando falamos de imersão, podemos considerar dois tipos delas: locais e globais. Abordaremos apenas imersões locais, devido à dificuldade e à pouca quantidade de trabalhos com imersões globais de espaços de Riemann.

Trataremos a seguir de alguns teoremas importantes para nosso trabalho, em relação às imersões locais de variedades riemannianas n-dimensionais em um espaço plano m-dimensional ($n \leq m$):

Teorema I [34]: Qualquer espaço riemanniano n-dimensional analítico pode ser localmente e isometricamente imerso em um espaço plano m-dimensional, com $n \leq m \leq n(n+1)/2$.

Teorema II [10]: Uma solução n-dimensional não-plana das equações de Einstein no vazio não pode ser imersa em um espaço plano (n+1)-dimensional.

O teorema II foi provado pela primeira vez por Kasner em 1921 [10] e explica porque a solução de Schwarszchild não pode ser imersa em um espaço-tempo plano 5-dimensional, um problema que também foi considerado alguns anos depois por Einstein [11]. Portanto, para incorporar uma métrica de Schwarszchild em um espaço pseudo-euclidiano pentadimensional precisamos de, no mínimo, seis dimensões, resultado que foi obtido, novamente, por Kasner [12]. No entanto, como veremos a seguir, é possível incorporar a solução de Schwarszchild em um espaço com tensor de Ricci nulo para cinco dimensões, e este é um caso especial de um teorema provado a seguir.

4.3 Imersão de soluções da relatividade geral em cinco dimensões

Como podemos ver, o teorema I coloca um limite superior para o número de dimensões necessárias para a imersão local de soluções da relatividade geral num espaço de dimensão superior, enquanto o teorema II implica que soluções da relatividade geral no vácuo não podem ser imersas em um espaço plano pentadimensional. Não obstante, imersões locais de soluções da relatividade geral no vácuo em um espaço com tensor de Ricci nulo pentadimensional são sempre possíveis, e garantimos isso pelo seguinte teorema.

Teorema III: Qualquer espaço Ricci-flat[2] n-dimensional analítico pode ser

[2]Vamos nos permitir neste texto, por simples conveniência, o uso da expressão inglesa Ricci-flat para designar a propriedade do tensor de Ricci nulo ser nulo. Assim, espaço

imerso localmente em um espaço Ricci-flat (n +1)-dimensional analítico.

A prova deste teorema é simples. Suponhamos um elemtento de linha de um espaço n-dimensional, a ser imerso, dado por

$$^{(n)}dS^2 = ^{(n)} g_{\alpha\beta}(x^\mu)dx^\alpha dx^\beta, \tag{4.1}$$

onde α, β, ... $= 0$, ..., $n-1$ para o caso. Agora, vamos construir a imersão, definindo o elemento de linha no espaço (n +1)-dimensional sob a forma

$$^{(n+1)}dS^2 = ^{(n)} g_{\alpha\beta}(x^\mu)dx^\alpha dx^\beta + \epsilon d\psi^2. \tag{4.2}$$

Para este caso especial pode-se verificar facilmente que o tensor de Ricci (n +1)-dimensional calculado a partir de (4.2) é dado por

$$^{(n+1)}R_{\alpha\beta} = ^{(n)} R_{\alpha\beta} \tag{4.3}$$

e

$$^{(n+1)}R_{\alpha n} = 0 = ^{(n+1)} R_{nn}. \tag{4.4}$$

Assim, os espaços Ricci-flat n-dimensionais dados por (4.2) podem ser imersos em espaços Ricci-flat (n +1)-dimensionais. Uma observação importante diz respeito ao fato do teorema ser válido independentemente da assinatura da métrica do espaço n-dimensional e do sinal de ϵ. A imersão da solução de Schwarszchild obtida por Wesson [35] é, então, uma consequência direta deste teorema. Devemos acrescentar, porém, que os teoremas I, II e IV (enunciado a seguir) são altamente não-trivial, enquanto que o teorema III é bastante trivial, tendo sido incluído por razões metodológicas.

Um ponto importante para justificar o procedimento de Wesson, é considerar a extensão do teorema III para soluções fora do vazio. A questão, então, é saber se é possível fazer a imersão local de uma variedade riemanniana arbitrária n-dimensional em algum espaço (n +1)-dimensional Ricci-flat.

Ricci-flat significa um espaço cujo tensor de Ricci é nulo.

Além do interesse matemático, esta questão é de fundamental importância no contexto do esquema de Wesson, uma vez que uma resposta afirmativa implicaria que todas as soluções das equações de Einstein poderiam, em princípio, ser incorporadas em espaços Ricci-flat pentadimensionais. Uma forma equivalente para esta pergunta seria perguntar se qualquer ${}^{(n)}T_{\alpha\beta}$ pode ser dado pela equação (3.16). Acontece que tal teorema existe.

Teorema IV [21]: Qualquer espaço riemanniano n-dimensional analítico pode ser imerso localmente em um espaço Ricci-flat (n +1)-dimensional.

Este é, então, o importante teorema obtido por Campbell em 1926 com sua demonstração sendo completada, depois, por Magaard [22], do qual existem poucas referências na literatura. Para simplificar a obscura notação usada por Campbell na demonstração do teorema, faremos apenas um esboço breve dos principais pontos da prova de Campbell (mais comentários no apêndice), em uma notação que torna transparente a sua relação com a teoria de Wesson.

Partimos de uma variedade riemanniana n-dimensional analítica com métrica dada por

$$
{}^{(n)}dS^2 = {}^{(n)} g_{\alpha\beta}(x^\mu)dx^\alpha dx^\beta, \tag{4.5}
$$

e com elemento de linha do espaço (n +1)-dimensional definido por

$$
{}^{(n+1)}dS^2 = g_{\alpha\beta}(x^\mu, \psi)dx^\alpha dx^\beta + \epsilon\phi^2(x^\mu, \psi)d\psi^2, \tag{4.6}
$$

onde ψ é a coordenada extra e $g_{\alpha\beta}$ e ϕ são funções analíticas das $(n + 1)$ coordenadas. Suponha que $g_{\alpha\beta}$, quando restrita a uma certa hipersuperfície $\psi = \psi_0$, resulta em ${}^{(n)}g_{\alpha\beta}$, isto é

$$
g_{\alpha\beta}(x^\lambda, \psi_0) = {}^{(n)} g_{\alpha\beta}(x^\lambda). \tag{4.7}
$$

Em outras palavras, ${}^{(n)}g_{\alpha\beta}$ é a métrica induzida na hipersuperfície $\psi = \psi_0$. Suponha também que os análogos das equações (3.12), (3.13) e (3.24) valem para $\psi = \psi_0$. Claramente, isso é equivalente a exigir que o tensor de Ricci (n +1)-dimensional seja nulo na hipersuperfície $\psi = \psi_0$. Por fim, definamos as funções $\Omega_{\alpha\beta}(x^\mu, \psi)$ pelas equações

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \psi} = -2\phi\Omega_{\alpha\beta}. \tag{4.8}$$

Com estas definições as equações (3.12), (3.13) e (3.24) tomam a forma

$$^{(n)}g^{\lambda\mu}(\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\lambda\mu} - 2\Omega_{\alpha\lambda}\Omega_{\beta\mu})\phi + \epsilon\phi_{,\alpha;\beta} - \overset{*}{\Omega}_{\alpha\beta} - \epsilon\phi R_{\alpha\beta} = 0, \tag{4.9}$$

$$^{(n)}g^{\lambda\beta}(\epsilon\phi_{,\lambda;\beta} - \overset{*}{\Omega}_{\lambda\beta} - \phi^{(n)}g^{\alpha\rho}\Omega_{\beta\rho}\Omega_{\lambda\alpha}) = 0, \tag{4.10}$$

e

$$^{(n)}g^{\mu\nu}(\Omega_{\alpha\nu;\mu} - \Omega_{\nu\mu;\alpha}) = 0, \tag{4.11}$$

tomando os valores das funções $\Omega_{\alpha\beta}$ e ϕ em $\psi = \psi_0$. Suponhamos, agora, que a função $\Omega_{\alpha\beta}$ dada em $\psi = \psi_0$ satisfaz as seguintes condições [21]:

$$\Omega_{\alpha\beta} = \Omega_{\beta\alpha}, \tag{4.12}$$

$$\Omega^{\alpha}_{\beta;\alpha} = \Omega_{\beta}, \tag{4.13}$$

$$\Omega_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha\beta} - \Omega^2 = -\epsilon^{(n)}R, \tag{4.14}$$

onde $\Omega^{\alpha}_{\beta} \equiv^{(n)} g^{\alpha\lambda}\Omega_{\lambda\beta}$, $\Omega \equiv^{(n)} g^{\mu\nu}\Omega_{\mu\nu}$ e $^{(n)}R =^{(n)} g^{\mu\nu(n)}R_{\mu\nu}$ é o escalar de curvatura do espaço n-dimensional. Supondo também que $g_{\alpha\beta}$ e $\Omega_{\alpha\beta}$ variam de acordo com (4.8) e que

$$\frac{\partial \Omega^{\alpha}_{\beta}}{\partial \psi} = \phi(-\epsilon^{(n)}R^{\alpha}_{\beta} + \Omega\Omega^{\alpha}_{\beta}) + \epsilon g^{\alpha\lambda}\phi_{,\lambda;\beta}, \tag{4.15}$$

respectivamente, com $g_{\alpha\beta}$, em acordo com (4.7), satisfazendo a condição inicial

$$\overset{*}{g}_{\alpha\beta} = -2\phi(x^\lambda, \psi_0)\Omega_{\alpha\beta}(x^\lambda, \psi_0), \tag{4.16}$$

onde $^{(n)}R^{\alpha}_{\beta}$ é agora calculado em termos de $g_{\alpha\beta}(x, \psi)$, usado também para baixar e subir índices. É possível provar [21] que as equações (4.12) – (4.14) são válidas para todo $\psi \in viz.\{\psi_0\}$. Segue-se que (4.8), (4.13), (4.14) e (4.15) implicam

$$^{(n+1)}R_{ab} = 0, \tag{4.17}$$

para qualquer valor de ψ numa vizinhança de ψ_0. De toda forma, temos, então, que a métrica dada por (4.6) representa uma imersão da métrica (4.5) em um espaço Ricci-flat de dimensão $(n+1)$.

4.4 Aplicações do teorema de Campbell

Uma característica importante do teorema de Campbell está, implicitamente, no fato dele fazer uso das equações de Gauss-Codazzi. Este caráter do teorema possibilita o mínimo para a construção da imersão. Ilustramos alguns exemplos simples de aplicações do teorema, a seguir:

(a) Suponhamos a possibilidade de imersão da métrica

$$dS^2 = dt^2 - t(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{4.18}$$

correspondendo ao espaço plano do modelo FLRW com equação de estado para radiação dada por $p = \rho/3$, num espaço Ricci-flat. Primeiro, de (4.18) calculamos $^{(4)}R^{\alpha}_{\beta}$ e $^{(4)}R$, obtendo

$$^{(4)}R^{\alpha}_{\beta} = diag[(3/4t^2), -(1/4t^2), -(1/4t^2), -(1/4t^2)]$$

e $^{(4)}R = 0$. Com a equação (4.14) teremos

$$\Omega_{\alpha\beta}\Omega^{\alpha\beta} - \Omega^2 = 0. \tag{4.19}$$

Uma simples escolha de $\Omega_{\alpha\beta}$ de forma a satisfazer trivialmente (4.13) e (4.19) é $\Omega_{\alpha\beta} \equiv 0$. Levando em conta (4.8) e (4.15) escrevemos

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \psi} = 0, \tag{4.20}$$

e

$$\frac{1}{\phi}g^{\lambda\alpha}\phi_{,\lambda;\beta} =^{(4)} R^{\alpha}_{\beta}. \tag{4.21}$$

É claro que a equação (4.20) com a condição inicial (4.7) implica que $g_{\alpha\beta} =^{(4)} g_{\alpha\beta}$. Fica restando apenas a equação (4.21) para ser resolvida. Contraindo os índices α e β, esta equação resulta em

$$\Box\phi = 0. \tag{4.22}$$

Como R^{α}_{β} dependente unicamente da variável t, admitimos que $\phi = \phi(t)$ e, assim, (4.22) torna-se

$$\frac{d(t^{3/2}\phi)}{dt} = 0, \tag{4.23}$$

cuja solução geral é

$$\phi(t) = at^{-1/2} + b, \tag{4.24}$$

onde a e b são constantes arbitrárias. Fazendo $a = 1$ e $b = 0$, asseguramos que (4.24) seja uma solução para (4.21), obtendo, finalmente, a métrica pentadimensional

$$dS^2 = dt^2 - t(dx^2 + dy^2 + dz^2) + \epsilon t^{-1} d\psi^2, \tag{4.25}$$

solução obtida previamente por Wesson [36] e por Chodos [38] em diferentes contextos.

(b) Um segundo exemplo de imersão, em um espaço Ricci-flat pentadimensional, é a imersão da métrica de de Sitter

$$dS^2 = dt^2 - e^{2\sqrt{\Lambda/3}t}(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{4.26}$$

onde Λ é a constante cosmológica. Se tomarmos, agora, $\phi = 1$ simplificaremos bastante (4.15) e (4.8). Calculando novamente ${}^{(4)}R$ e ${}^{(4)}R^{\alpha}_{\beta}$ para (4.26), obtemos

$${}^{(4)}R = -4\Lambda \tag{4.27}$$

e

$$^{(4)}R^{\alpha}_{\beta} = -\Lambda\delta^{\alpha}_{\beta}, \tag{4.28}$$

que substituindo em (4.15) leva a

$$\frac{\partial\Omega^{\alpha}_{\beta}}{\partial\psi} = \epsilon\Lambda\delta^{\alpha}_{\beta} + \Omega\Omega^{\alpha}_{\beta}. \tag{4.29}$$

Para o caso em que a dimensão extra é do tipo espaço ($\epsilon = -1$) esta equação é satisfeita se escolhermos

$$\Omega^{\alpha}_{\beta} = -\psi^{-1}\delta^{\alpha}_{\beta}, \tag{4.30}$$

em $\psi = \psi_0 = \pm\sqrt{3/\Lambda}$. Integrando (4.8) e usando as condições iniciais (4.7) obtemos

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\Lambda}{3}\psi^{2(4)}g_{\alpha\beta}. \tag{4.31}$$

Verificamos facilmente que a função (4.30) satisfaz as condições (4.13) e (4.14). Finalmente, podemos escrever a métrica pentadimensional do espaço ambiente Ricci-flat

$$^{(5)}dS^{(2)} = \Lambda\frac{\psi^2}{3}dt^2 - \Lambda\frac{\psi^2}{3}e^{2\sqrt{\Lambda/3}t}(dx^2 + dy^2 + dz^2) - d\psi^2, \tag{4.32}$$

com a métrica (4.26) induzida na hipersuperfície $\psi = \psi_0 = \pm\sqrt{3/\Lambda}$.

(c) Como exemplo final, consideremos a imersão de soluções das equações de Einstein para o vazio. Para as equações (4.13) – (4.15) a escolha trivial

$$\Omega_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha;\beta} = 0, \tag{4.33}$$

é uma solução. A métrica geral do espaço ambiente, como esperado, é então

$$^{(5)}dS^2 =^{(4)} g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} - \epsilon\phi^2 d\psi^2, \tag{4.34}$$

com a função ϕ satisfazendo (4.33).

Referências Bibliográficas

[1] K. F. Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, in Karl Friedrich Gauss Werke IV (1827). Tradução inglesa: *General Investigations of curved Superficies* by C. J. Morehead and A. M. Hiltebeitel, Raven Press, New York (1965).

[2] B. Riemann, *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1854). A tese foi apresentada em 10 de junho de 1854, na Universidade de Göttingen, tendo sido publicada no periódico *Abh. Königl. gesellsch, 13, 1 (1868).*

[3] D. J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, Dover, New York (1987).

[4] C. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons Inc, New York (1991).

[5] L. Schläfli, *Nota alla Memoria del Signor Beltrami*, "*Sugli spazìi di curvatura constante*", Ann. di Mat. 2ł série, 5, 170 (1871).

[6] M. Janet, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace eucliddien*, Ann. Soc. Polon. Math. 5, 38 (1926).

[7] E. Cartan, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace eucliddien*, Ann. Soc. Polon. Math. 6, 1 (1927).

[8] R. E. Greene, *Isometric embedding of Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds*, Memoirs Amer. Nath. Soc. 97, 1 (1970).

[9] A. Friedman, *Local isometric embedding of Riemannian manifolds with indefinite metric*, J. Math. Mech. 10, 625 (1961).

[10] E. Kasner, *The impossibility of Einstein fields immersed in flat space of five dimensions*, Am. J. Math. 43, 126 (1921).

[11] A. Einstein, Revista da Universidade de Tucuman, A2, 11 (1941).

[12] C. Fronsdal, *Completion and embedding of the Schwarzschild solution*, Phys. Rev. 116, 778 (1959).

[13] M. D. Kruskal, *Maximal extension of Schwarzschild metric*, 119, 1743 (1960).

[14] J. Nash, *The embedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. Math. 63, 20 (1956).

[15] S. W. Hawking, Proc. Roy. Soc. Lond. A 294, 511; 295, 490; 300, 187 (1967).

[16] R. Geroch, Tese de doutorado, Universidade de Princeton, 1967.

[17] Para uma exposição bastante completa sobre geometria semi-riemanniana ver O'Neil, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, London (1983).

[18] Desenvolvimentos recentes de aspectos globais da geometria lorentziana podem ser encontrados em J. K. Beem e Paul E. Ehrlich, *Global Lorentziana Geometry*, Marcel Dekker, New York (1981).

[19] S. W. Hawking e G. F. R. Ellis, *The Large Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, England (1973).

[20] Ver, por exemplo, R. Penrose, *Techniques of Differential Topology in Relativity*, Siam, Philadelphia (1972).

[21] J. E. Campbell, *A Course of Differential Geometry*, Claredon Press, Oxford (1926).

[22] L. Magaard, *Zur Einbettung Riemannscher Räume in Einstein-Räume und Konform-euklidische Räume*, tese de doutorado, Universidade de Kiel, Alemanha (1963).

[23] C. Romero, R. Tavakol e R. Zalaletdinov, *The Embedding of General Relativity in Five Dimensions*, Gen. Rel. Grav. 28, 365 (1996).

[24] F. Dahia e C. Romero, *The embedding of the space-time in five-dimensions: an extension of the Campbell-Magaard theorem*, J. Math. Phys. 43, 5804 (2002).

[25] E. Anderson e J. Lidsey, *Embeddings in non-vacuum spacetimes*, Class. Quantum Grav. 18, 4831 (2001).

[26] L. Randall e R. Sundrum, *A large mass hierarchy from a small extra dimension*, Phys. Rev. Lett. 83, 3370 (1999).

[27] L. Randall e R. Sundrum, *An alternative to compactification*, Phys. Rev. Lett. 83, 4690 (1999).

[28] F. Dahia e C. Romero, *The embedding of the spacetime in five-dimensional spacetimes with arbitrary non-degenerate Ricci-tensor*, J. Math. Phys. 43, 3097 (2002).

[29] E. Anderson, F. Dahia, J. Lidsey e C. Romero, *Embeddings in spacetimes sourced by scalar fields*, J. Math. Phys. 44, 5108 (2003).

[30] F. Dahia e C. Romero, *On the embedding of branes in five-dimensional spaces*, Class. Quant. Grav. 21, 927 (2004).

[31] S. Chervon, F. Dahia e C. Romero, *Harmonic maps and isometric embeddings of the spacetine*, Phys. Lett. A 326, 171 (2004).

[32] N. I. Katzourakis, *Bundle-theoretical globalization of Campbell-Magaard embedding theorem in the context of MD gravity*, math-ph/0407067 (2004).

[33] T. Applequist, A. Chodos e P. Freund, *Modern Kaluza-Klein Theories*, Addison-Wesley, New York (1987).

[34] L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, Princeton (1949).

[35] P. S. Wesson, *Gen. Rel. Grav.* 16, 193 (1984).

[36] P. S. Wesson, *J. Astrophys*, 394, 19 (1992).

[37] J. Ponce de Leon, *Gen. Rel. Grav.* 20, 539 (1988).

[38] A. Chodos e S. Detweiler, *Phys. Rev. D* 21, 2167 (1980).

Capítulo 5

Conclusão e perspectivas

Por que o espaço físico do Universo em que vivemos se nos apresenta como sendo tridimensional? Ou ainda, se quisermos incluir o tempo como uma dimensão, por que o espaço-tempo tem quatro dimensões? Será que não existem dimensões extras, escondidas, que não percebemos diretamente nas nossas observações, mas que podem se manifestar indiretamente através de novos fenômenos ainda desconhecidos [1] suscetíveis de serem observados? Qual é o mistério que está por por trás da dimensionalidade do Universo [1]?

Questões como esta certamente são muito difíceis de responder. Podemos ter duas atitudes diante de uma indagação dessa natureza. Ou bem a quadridimensionalidade do espaço-tempo é aceita como um axioma, ou procuramos explicá-la deduzindo-a, como um teorema, de algum princípio físico mais fundamental. Ou ainda, deixamos a questão em aberto, e formulamos teorias onde a dimensionalidade possa ser superior a quatro, explorando consequências teóricas cuja consistência com a realidade física possa ser testada.

[1] Possíveis correções à gravitação Newtonniana em escalas de distâncias menores que 1mm estão sendo investigadas experimentalmente através de medidas do efeito Casimir e da força de Van de Waals. Ver ref. [1].

Teorias físicas que postulam a existência de dimensões extras, como os modelos de supercordas e branas, constituem hoje importantes segmentos da física teórica, com ideias férteis, buscando encontrar teorias de unificação para as interações da natureza, resolvendo o problema da quantização do campo gravitacional. Formulações multidimensionais como a teoria de Kaluza-Klein e a teoria da matéria induzida, mesmo se tratando esta última de uma teoria clássica (não-quântica), contém forte componente estético, usando à geometria que remontam às ideias de Einstein de "geometrizar" a matéria [3].

Ilustremos com a teoria de matéria induzida, uma teoria de imersão do espaço-tempo. Quando os primeiros modelos foram formulados, o mecanismo matemático pelo qual se fazia a imersão em cinco dimensões era apenas uma conjectura, não estava garantido por um teorema bem conhecido. Entretanto, o teorema fundamental, necessário para garantir a consistência da teoria, já havia sido demonstrado pelo matemático inglês Campbell [5], em 1926, mas era completamente desconhecido dos físicos, tendo sido redescoberto nos anos noventa [6].

Nesta dissertação, abordamos justamente este tema: a relação vital entre os teoremas de imersão da geometria diferencial moderna e teorias que pressupõem a existência de dimensões superiores do espaço-tempo. Com esta motivação, apresentamos os resultados que julgamos de maior relevância, obtidos em trabalhos para teorias de imersão do espaço-tempo, buscando maior consitência para estas teorias. Procuramos enfocar o assunto de uma maneira unificada e auto-consistente, incluindo ideias originais com novas perspectivas e caminhos mais sólidos para as teorias de imersão.

Referências Bibliográficas

[1] Ver, por exemplo, V. M. Mostepanenko, *Experimental status of corrections to newtonian gravitation inspired by extra dimensions*, Proceedings of the fifth Alexander Friedmann International Seminar on Gravitation and Cosmology, João Pessoa, Brazil, editado por V. M. Mostepanenko e C. Romero, publicado em Int. J. Mod. Phys. A 17, 4307 (2002).

[2] R. Feynman. *The character of a physical law*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts (1965).

[3] A. Einstein, *The meaning of relativity*, Princeton University Press, Princeton (1922), pag. 129.

[4] E. P. Wigner, *The unreasonable effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 13, 1 (1960).

[5] J. E. Campbell, *A Course of Differential Geometry*, Clarendon Press, Oxford (1926).

[6] C. Romero, R. Tavakol e R. Zalaletdinov, *The Embedding of General Relativity in Five Dimensions*, Gen. Rel. Grav. 28, 365 (1996).

Apêndice A

O teorema de Campbell-Magaard

Aqui faremos uma pequena exposição sobre o teorema de Campbell-Magaard, com o objetivo de esclarecer mais sua formulação e mostrar sua importância dentro das teorias de imersão para a gravitação. Faremos uma explanação sobre imersão e as equações de compatibilidade (equações de Gauss-Codazzi) enunciando por fim o teorema de Campbell-Magaard.

A.1 Noções básicas da teoria de imersões

Inicialmente procuraremos introduzir de uma forma sucinta certas noções básicas da teoria de imersões em geometria diferencial, com vistas ao nosso objetivo final, que é enunciar o teorema de Campbell-Magaard. Faremos uma rápida introdução ao problema da imersão, buscando ser o mais objetivo possível, definindo as noções fundamentais e enunciando alguns resultados importantes. Para um tratamento mais rigoroso e sofisticado remetemos o leitor às referências [1, 3, 4, 5, 7]. Uma breve revisão da teoria, com aplicações à teoria da gravitação pode ser encontrada em [6, 13].

Definição: Uma métrica g de classe C^r (analítica) definida numa variedade diferenciável analítica [2] M^n de dimensão n é definida como sendo um

[2]Daqui em diante, estaremos empregando o termo *variedade* no sentido de *variedade*

campo tensorial de classe C^r (analítico), simétrico, do tipo $(0,2)$, e não-degenerado. Em outras palavras, denotando por T_pM^n o espaço tangente em cada ponto $p \in M^n$, g é uma aplicação bilinear de $T_pM^n \times T_pM^n \to \mathbb{R}$, satisfazendo as seguintes propriedades:

i) $g(V,W) = g(W,V)$, $\forall\ V,\ W \in T_pM^n$;

ii) se $g(V,W) = 0$, $\forall\ W \in T_pM^n$, então $V = 0$.

Uma variedade M^n dotada de uma métrica g, com as propriedades acima, é dita *pseudo-riemanniana* (ou *semi-riemanniana*). Se $\{x\} = \{x^1, ..., x^n\}$ é um sistema de coordenadas de M^n, então as componentes da métrica g são definidas por $g_{\alpha\beta}(x) \equiv g(\partial_\alpha, \partial_\beta)$, onde $\{\partial_\alpha\}$ é uma base local de coordenadas, $\alpha,\ \beta = 0, ..., n$. Adotaremos a convenção geral de representar a métrica pelo "elemento de linha" $dS^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$. A diferenciabilidade de g depende da diferenciabilidade das componentes $g_{\alpha\beta}(x)$, isto é, g é de classe C^r (analítica) se, e somente se, $g_{\alpha\beta}(x)$ é de classe C^r (analítica). A assinatura de g fica determinada pelo número s $(0 \leq s \leq n)$ de autovalores positivos de $g_{\alpha\beta}$. Se $s = n$, dizemos que M^n é uma variedade *riemanniana*; se $s = 1$, M^n é dita *lorentziana*.

Sejam M^n e $\overline{M}^m$ duas variedades pseudo-riemannianas de dimensão m e n $(m \geq n)$ com métricas g e $\overline{g}$, respectivamente. Uma aplicação diferenciável $f : U \subset M^n \to \overline{M}^m$ é dita ser uma imersão local de classe C^r (analítica) se as seguintes condições forem satisfeitas: i) f é de classe C^r (analítica); ii) a diferencial *df* é injetiva em cada ponto $p \in M^n$; iii) f é um homeomorfismo sobre $f(U)$, com $f(U)$ tendo a topologia induzida por $\overline{M}^m$. Dizemos ainda que f é uma imersão *isométrica* se $g(V,W) = \overline{g}(df(V), df(W))$ para todo $V,\ W \in T_pM^n$, $p \in U \subset M^n$. Chamamos de *codimensão* de $\overline{M}^m$ o número $k = m - n$. Se $U = M^n$ a imersão é dita *global*. No caso em que $M^n \subset \overline{M}^m$ e

analítica, assim como consideraremos apenas *métricas analíticas*.

a inclusão $i : M^n \to \overline{M}^m$ é uma imersão dizemos que M^n é uma *subvariedade* de $\overline{M}^m$.

Consideraremos a partir de agora imersões de codimensão $k = 1$. Assim, seja $\{y\} = \{y^1, ..., y^{n+1}\}$ um sistema de coordenadas de um aberto que contenha $f(U)$. Em termos das parametrizações $\{x\}$ e $\{y\}$ podemos representar a imersão f pelas equações

$$y^a = y^a(x^1, ..., x^n) \tag{5.1}$$

onde $a = 1, ..., n + 1$ [3]. É imediato mostrar que a condição de isometria $g(V, W) = \overline{g}(df(V), df(W))$ pode ser expressa em termos de coordenadas por

$$g_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial y^a}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^b}{\partial x^\beta}\overline{g}_{ab}(y).$$

Um teorema bastante útil, demonstrado por Magaard [2, 13], mostra que existem certos sistemas de coordenadas do espaço ambiente $\overline{M}^m$ que são, num certo sentido, "adaptáveis" à imersão quando a co-dimensão de $\overline{M}^m$ é igual a um, isto é, $m = n + 1$. Enunciemos o teorema.

Teorema (Magaard): Sejam M^n uma variedade pseudo-riemanniana de dimensão n com métrica g, $\{x^\mu\}$ um sistema de coordenadas locais de uma vizinhança U de $p \in M^n$, com coordenadas $(x_p^1, ..., x_p^n)$ definidas pela parametrização $x : U \to M^n$. Uma condição necessária e suficiente para que M^n, com elemento de linha $dS^2 = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta$, possa ser imersa local, isometrica e analiticamente numa variedade $\overline{M}^{n+1}$ de dimensão $n+1$ é que existam funções analíticas

$$\overline{g}_{\alpha\beta} = \overline{g}_{\alpha\beta}(x^1, ..., x^n, x^{n+1}) \tag{5.2}$$

$$\overline{\phi} = \overline{\phi}(x^1, ..., x^n, x^{n+1}) \tag{5.3}$$

[3]Neste texto, usaremos a seguinte convenção: índices gregos e latinos variam de 1 a n, e de 1 a $n + 1$, respectivamente.

definidas em um aberto $D \subset x(U) \times \mathbb{R}^n$ contendo o ponto $(x_p^1, ..., x_p^n, 0)$, satisfazendo as seguintes condições:

$$\overline{g}_{\alpha\beta}(x^1, ..., x^n, 0) = g_{\alpha\beta}(x^1, ..., x^n)$$

num aberto de $x(U)$; $\overline{g}_{\alpha\beta} = \overline{g}_{\beta\alpha}$, $\left|\overline{g}_{\alpha\beta}\right| \neq 0$; $\overline{\phi} \neq 0$ e que

$$d\overline{S}^2 = \overline{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + \varepsilon \overline{\phi}^2 dx^{n+1} dx^{n+1} \tag{5.4}$$

com $\varepsilon^2 = 1$, representa o elemento de linha de $\overline{M}^{n+1}$ numa vizinhança coordenada V de $\overline{M}^{n+1}$ [2, 13].

A. 2 As equações de Gauss-Codazzi

Sejam M^n e $\overline{M}^m$ duas variedades diferenciáveis de dimensão n e m $(m \geq n)$, respectivamente, e $f : U \subset M^n \to \overline{M}^m$ uma imersão M^n em $\overline{M}^m$. Se dotarmos $\overline{M}^m$ de uma métrica $\overline{g}$, então $\overline{g}$ naturalmente induz uma métrica em M^n através da definição $g(V, W) = \overline{g}(df(V), df(W))$ para todo V, $W \in T_p M^n$, $p \in U \subset M^n$. Desse modo, a aplicação f passa a se constituir numa imersão isométrica de M^n em $\overline{M}^m$. Observemos que no caso de $M^n \subset \overline{M}^m$ e f ser a inclusão de M^nem $\overline{M}^m$, então df é a identidade, e temos $g(V, W) = \overline{g}(V, W)$, identificando aqui o método usual de se introduzirem métricas riemannianas em superfícies. De fato, este foi o caminho que levou às definições da primeira e segunda formas quadráticas associadas a uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ (o produto interno entre dois vetores tangentes a um ponto p de uma superfície S é definido simplesmente como o produto interno desses vetores em $\mathbb{R}^3$). A generalização dessa ideia para dimensões arbitrárias levou posteriormente aos conceitos de curvatura intrínseca e extrínseca, assim como às equações de Gauss-Codazzi. Consideremos o caso em que $m = n+1$, f é uma inclusão e M^n é identificada a uma *hipersuperfície* Σ_0 de $\overline{M}^{n+1}$. O fato de Σ_0 possuir uma métrica induzida g nos permite definir uma *conexão riemanniana*, *derivada covariante*, *tensor de curvatura* e outros objetos geométricos associados a g. Por outro lado, o fato dessa estrutura métrica ter-se originado a partir da métrica $\overline{g}$ do espaço ambiente $\overline{M}^{n+1}$ faz com que haja uma relação entre os objetos geométricos de M^n e $\overline{M}^{n+1}$. Isto leva, por outro lado, a que tenhamos dois tipos de curvatura: intrínseca e extrínseca. Vamos ilustrar esse ponto da seguinte maneira. A curvatura intrínseca seria aquela que poderia ser perfeitamente detectável por "seres" que "habitassem" a hipersuperfície, através de medidas métricas feitas exclusivamente na hipersuperfície, sem a necessidade de "observar" o espaço "exterior" à hipersuperfície. Um clássico exemplo é a curvatura gaussiana de uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^3$, que depende apenas da primeira forma quadrática definida na superfície, que, em princípio, poderia ser dada *a priori*, fato que não escapou ao espírito atento de Gauss. A curvatura extrínseca, por sua vez, depende do particular espaço ambiente escolhido. Como exemplo, temos a curvatura média de superfícies, ou a curvatura de curvas imersas em $\mathbb{R}^3$.

No caso mais geral que estamos considerando, a curvatura intrínseca de uma hipersuperfície Σ_0 de $\overline{M}^{n+1}$ tem sua expressão no *tensor de curvatura* calculado com a conexão de Levi-Civita induzida em Σ_0. Por outro lado, a curvatura extrínseca é definida como sendo a projeção da variação de um campo N de vetores normais a Σ_0 sobre Σ_0. Examinemos com mais detalhes estes conceitos.

Sejam $T(M)$ o conjunto de todos os campos vetoriais diferenciáveis em uma variedade M. Chamamos de *conexão afim* em M a aplicação $\nabla : T(M) \times T(M) \to T(M)$ que associa ao par de vetores (V, W) o vetor $\nabla_V W$, satisfazendo às seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fV+gW} Z = f\nabla_V Z + g\nabla_W Z$

ii) $\nabla_V(W+Z) = \nabla_V W + \nabla_V Z$

iii) $\nabla_V(fW) = f\nabla_V W + V[f]W$, onde f, g são funções diferenciáveis definidas em M; V, W, $Z \in T(M)$ e $V[f]$ denota a aplicação do vetor V na função f.

Precisamos, agora, introduzir o conceito de *derivada covariante* de um vetor V. Faremos isso enunciando a seguinte proposição, de fácil demonstração ([1]):

Proposição: Dada M uma variedade diferenciável munida de uma conexão ∇, existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V definido ao longo de uma curva $\alpha(t)$ um outro campo vetorial em $\alpha(t)$, chamado *derivada covariante de V ao longo de $\alpha(t)$*, tal que:

i) $\frac{D(V+W)}{dt} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$;

ii) $\frac{D(fV)}{dt} = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde W é um campo vetorial ao longo de α e f é uma função diferenciável definida no domínio de $\alpha(t)$;

iii) Se V for induzido por um campo vetorial $Z \in T(M)$, isto é, $V(t) = Z(\alpha(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)} Z$, onde $\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt}$.

Vejamos mais algumas definições importantes. Dizemos que um campo de vetores V de M é dito ser *paralelo* se a derivada covariante de V ao longo de α, $\frac{DV}{dt}$, se anula. Dizemos ainda que a conexão ∇ é *compatível* com a métrica g de M se para todo par de vetores paralelos V e W ao longo de qualquer curva diferenciável $\alpha(t)$ de M, $g(V,W)$ for constante. Uma conexão afim ∇ é *simétrica* se satisfaz a condição $\nabla_V W - \nabla_W V = [V,W]$, para todo V, $W \in T_pM$, onde $[V,W]$ é o comutador entre V e W. É possível mostrar [1] que existe uma única conexão afim ∇ simétrica compatível com a métrica. Tal conexão recebe o nome de *conexão de Levi-Civita* (ou conexão *pseudo-riemanniana*).

Seja $V = V^a \frac{\partial}{\partial x^a} \equiv V^a \partial_a$ a expressão de um vetor V numa base de coordenadas $\{x^a\}$ [4]. Definindo os símbolos de Christoffel pela equação $\nabla_{\partial_a}\partial_b = \Gamma^c_{ab}\partial_c$, mostra-se facilmente que as componentes da conexão de Levi-Civita são dadas por

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2}g^{cd}(g_{ad,b} + g_{bd,a} - g_{ab,d}) \tag{5.5}$$

onde g^{ab} é a matriz inversa de g_{ab}, e $g_{ab,c} \equiv \partial_c g_{ab}$.

Da mesma forma como podemos induzir métricas em subvariedades a partir da métrica do espaço ambiente, dada uma conexão afim $\overline{\nabla}$ definida em $\overline{M}^{n+1}$, com métrica dada por (5.4), podemos também induzir uma conexão ∇ em uma hipersuperfície Σ_0 de $\overline{M}^{n+1}$ da seguinte maneira. Sejam V e W dois campos vetoriais de Σ_0 definidos numa vizinhança de um ponto $q \in \Sigma_0$. Sejam, por outro lado, $\overline{V}$ e $\overline{W}$ dois campos vetoriais de $\overline{M}^{n+1}$, extensões de V e W, respectivamente, definidos em q. Definimos a conexão ∇ na hipersuperfície Σ_0, induzida por $\overline{\nabla}$, pela equação

$$\nabla_V W(q) = \Pi(\overline{\nabla}_{\overline{V}}\overline{W})(q) \tag{5.6}$$

onde Π é o operador de projeção

$$\Pi(\overline{V}) = \overline{V} - \varepsilon\overline{g}(\overline{V}, \overline{N})\overline{N}$$

sendo $\overline{N} = \frac{1}{\phi}\frac{\partial}{\partial\psi}$ um vetor normal a Σ_0 em q, onde, por conveniência [5], usaremos a partir de agora a notação $\psi = x^{n+1}$.

De posse dos conceitos e resultados vistos acima, estamos agora em condições de definir as curvaturas intrínsecas e extrínsecas de uma subvariedade Σ_0 de dimensão n imersa numa variedade $\overline{M}^{n+1}$ de dimensão $n+1$. Comecemos pela curvatura intrínseca. Definimos o tensor de curvatura de Σ_0 do

[4] Lembremos que em todo o texto estamos adotando a chamada *convenção de soma de Einstein*, segundo a qual índices repetidos denotam *soma* nesses índices.

[5] De agora em diante, estaremos usando, por conveniência, o sistema de coordenadas $\{x^a\}$ no qual a métrica de M^{n+1} assume a forma de (5.4).

seguinte modo. Sejam V, W e Z campos vetoriais de Σ_0. A curvatura R de Σ_0 é definida como sendo a aplicação que associa a cada par de vetores (V, W) o mapeamento $R(V, W) : T(\Sigma_0) \to T(\Sigma_0)$ dado por

$$R(V, W)Z = \nabla_W \nabla_V Z - \nabla_V \nabla_W Z + \nabla_{[V,W]} Z. \tag{5.7}$$

Vemos que a curvatura pode ser associada a um tensor de ordem 4 se definirmos a aplicação $R : T(\Sigma_0) \times T(\Sigma_0) \times T(\Sigma_0) \times T(\Sigma_0) \to \mathbb{R}$, em cada ponto $q \in \Sigma_0$, por

$$R(V, W, Z, X) = g(R(V, W)Z, X)$$

com $X \in T(\Sigma_0)$. É imediato ver que as componentes deste tensor num sistema de coordenadas será dado por

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta}$$

onde $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = g^{\lambda\alpha} R_{\lambda\beta\mu\nu}$, com $R_{\lambda\beta\mu\nu} = R(\partial_\lambda, \partial_\beta, \partial_\mu, \partial_\nu)$. Interpretamos o tensor (5.7) como uma "medida" da curvatura intrínseca de Σ_0.

Para definir a curvatura extrínseca de Σ_0 num ponto $q \in \Sigma_0$ procedemos da seguinte maneira. Seja N um campo vetorial normal a Σ_0. Isto é, $g(N, V) = 0 \;\forall\; V \in T(\Sigma_0)$. Consideremos, agora, $\overline{N}$ e $\overline{V}$ como extensões de N e V, respectivamente, em M^{n+1}. É possível mostrar que $\Pi(\overline{\nabla}_{\overline{V}}\overline{N})(q) = \overline{\nabla}_{\overline{V}}\overline{N}(q)$, o que implica $\overline{\nabla}_{\overline{V}}\overline{N}(q) \in T(\Sigma_0)$. Podemos, então, definir uma aplicação $\Omega : T(\Sigma_0) \to T(\Sigma_0)$ dada por

$$\Omega(V) = -\overline{\nabla}_{\overline{V}}\overline{N}.$$

Ora, a derivada $-\overline{\nabla}_{\overline{V}}\overline{N}$ naturalmente nos dá uma medida de como o vetor normal $\overline{N}$ varia ao longo de direções tangentes à subvariedade Σ_0. Portanto, Ω dá uma indicação de como Σ_0 se "curva" com relação ao espaço ambiente M^{n+1}. Por esta razão Ω recebe o nome de *curvatura extrínseca* de Σ_0.

Estamos agora em condições de relacionar a geometria de Σ_0 com a geometria de $\overline{M}^{n+1}$. A ideia aqui é decompor a curvatura de $\overline{M}^{n+1}$ numa parte que diz respeito à curvatura intrínseca de Σ_0 e, noutra, relacionada à sua curvatura extrínseca. Isto é obtido deduzindo-se a seguinte equação a partir de (5.6) e (5.7):

$$R(V,W)Z = \overline{R}(V,W)Z + \varepsilon g(Z,\Omega(V))\Omega(W) - \varepsilon g(Z,\Omega(W))\Omega(V)$$

$$- \varepsilon g(Z,[\nabla_W(\Omega(V)) - \Omega(\nabla_W V)] - [\nabla_V(\Omega(W)) - \Omega(\nabla_V W)])N. \qquad (5.8)$$

Esta equação é conhecida como *equação de Gauss*. No sistema de coordenadas que estamos utilizando ela toma a forma

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \overline{R}_{\alpha\beta\mu\nu} + \varepsilon(\Omega_{\mu\beta}\Omega_{\nu\alpha} - \Omega_{\nu\beta}\Omega_{\mu\alpha}), \qquad (5.9)$$

onde definimos as componentes do *tensor de curvatura extrínseca* $\Omega_{\alpha\beta} = g(\partial_\alpha, \Omega(\partial_\beta))$, que nas coordenadas que estamos empregando, assumem a forma

$$\Omega_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2\overline{\phi}}\frac{\partial \overline{g}_{\alpha\beta}}{\partial\psi}. \qquad (5.10)$$

Por outro lado, fazendo o produto interno de $R(V,W)Z$ com o campo normal N, obtemos a equação

$$g(Z,[\nabla_W(\Omega(V)) - \Omega(\nabla_W V)] - [\nabla_V(\Omega(W)) - \Omega(\nabla_V W)]) = g(\overline{R}(V,W)Z,N) \qquad (5.11)$$

conhecida como *equação de Codazzi*. No sistema de coordenadas de Magaard, a equação de Codazzi fica numa forma bastante simplificada:

$$\nabla_\mu\Omega_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha\Omega_{\mu\beta} = \frac{1}{\overline{\phi}}\overline{R}_{(n+1)\beta\alpha\mu}. \qquad (5.12)$$

As equações de Gauss e Codazzi, deduzidas acima, nos permite decompor o tensor de Ricci da variedade M^{n+1} em suas partes intrínsecas e extrínsecas com relação à subvariedade Σ_0. Este fato é bastante útil para uma formulação clara e precisa do teorema de Campbell-Magaard. Com este fim, consideremos a equação de Gauss com os índices α e ν contraídos (com a métrica $\overline{g}$) [6]. Obtemos, então,

$$R_{\mu\beta} = \overline{R}_{\mu\beta} - \overline{R}^{(n+1)}_{\ldots\ldots\ldots\mu(n+1)\beta} - \varepsilon g^{\alpha\mu}(\Omega_{\mu\beta}\Omega_{\nu\alpha} - \Omega_{\nu\beta}\Omega_{\mu\alpha}). \tag{5.13}$$

Agora, calculando $\overline{R}^{(n+1)}_{\ldots\ldots\ldots\mu(n+1)\beta}$ a partir do elemento de linha (5.4) e usando a expressão (5.10) para a curvatura extrínseca, encontramos

$$\overline{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} + \varepsilon g^{\nu\mu}(\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\nu\mu} - 2\Omega_{\nu\beta}\Omega_{\alpha\mu}) - \frac{\varepsilon}{\overline{\phi}}\frac{\partial\Omega_{\alpha\beta}}{\partial\psi} + \frac{1}{\overline{\phi}}\nabla_\alpha\nabla_\beta\overline{\phi}. \tag{5.14}$$

A equação de Codazzi, por sua vez, nos leva a

$$\overline{R}_{\alpha(n+1)} = \overline{\phi}g^{\nu\beta}(\nabla_\nu\Omega_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha\Omega_{\nu\beta}).$$

Por fim, a componente $\overline{R}_{(n+1)(n+1)}$ do tensor de Ricci pode ser expressa como

$$\overline{R}_{(n+1)(n+1)} = \varepsilon\overline{\phi}^2 g^{\alpha\beta}\left(-\frac{\varepsilon}{\overline{\phi}}\frac{\partial\Omega_{\alpha\beta}}{\partial\psi} + \frac{1}{\overline{\phi}}\nabla_\alpha\nabla_\beta\overline{\phi} - \varepsilon g^{\nu\mu}\Omega_{\nu\beta}\Omega_{\alpha\mu}\right). \tag{5.15}$$

A. 3 O teorema de Campbell-Magaard

Vimos anteriormente que, usando as equações de Gauss-Codazzi, é possível fazer uma decomposição do tensor de Ricci da variedade ambiente $\overline{M}^{n+1}$ em duas partes: uma intrínseca e outra extrínseca. Suponhamos, agora, que $\overline{M}^{n+1}$ é uma variedade pseudo-riemanniana *Ricci-flat*, isto é, com tensor de Ricci nulo. Nesse caso, um pouco de álgebra mostra que as equações (5.13), (5.14) e (5.15) são equivalentes ao seguinte conjunto de equações:

$$\overline{R}_{\alpha\beta} + \varepsilon(\overline{\Omega}_{\alpha\beta} - \overline{\Omega}_{\mu\beta}\overline{\Omega}^{\mu}_{\alpha}) - \frac{\varepsilon}{\overline{\phi}}\frac{\partial\overline{\Omega}_{\alpha\beta}}{\partial\psi} + \frac{1}{\overline{\phi}}\overline{\nabla}_\alpha\overline{\nabla}_\beta\overline{\phi} = 0 \tag{5.16}$$

[6] Estamos adotando a seguinte convenção na definição do tensor de Ricci: $\overline{R}_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}\overline{R}_{\mu\alpha\nu\beta}$.

$$\overline{\nabla}_{\nu}(\overline{\Omega}^{\alpha\nu} - \overline{g}^{\alpha\nu}\overline{\Omega}) = 0 \tag{5.17}$$

$$\overline{R} + \varepsilon(\overline{\Omega}^2 - \overline{\Omega}^{\mu\nu}\overline{\Omega}_{\mu\nu}) = 0 \tag{5.18}$$

onde $\overline{\Omega} = \overline{g}^{\alpha\beta}\overline{\Omega}_{\alpha\beta}$ denota o traço de $\overline{\Omega}_{\alpha\beta}$, e $\overline{R} = \overline{g}_{\alpha\beta}\overline{R}^{\alpha\beta}$ é o escalar de curvatura.

Por causa da segunda identidade de Bianchi [1], as equações acima não são independentes. De fato, pode-se mostrar que a primeira delas propaga as outras duas. Em outras palavras, se (5.17) e (5.18) são satisfeitas na hipersuperfície $\psi = 0$, e (5.16) é válida numa certa vizinhança ϑ desta hipersuperfície em $\overline{M}^{n+1}$, então, (5.17) e (5.18) serão satisfeitas também em ϑ. Portanto, é suficiente exigir que as equações (5.17) e (5.18) sejam satisfeitas em $\psi = 0$ para garantir que elas valerão para uma família de hipersuperfícies $\psi = cte$.

Longas manipulações algébricas, omitidas aqui, feitas por Magaard o conduziram à forma "canônica", para a equação (5.16), dada por

$$\frac{\partial^2 \overline{g}_{\alpha\beta}}{\partial\psi^2} = F_{\alpha\beta}\left(\overline{g}_{\mu\nu}, \frac{\partial\overline{g}_{\mu\nu}}{\partial\psi}\right)$$

onde as funções $F_{\alpha\beta}$ são analíticas com relação aos seus argumentos. Dessa maneira, de acordo com o teorema de Cauchy-Kowalewskaya [8], existe uma única solução $\overline{g}_{\alpha\beta}(x,\psi)$ satisfazendo as seguintes condições iniciais:

$$\overline{g}_{\alpha\beta}(x,0) = g_{\alpha\beta}(x)$$

$$\frac{\partial\overline{g}_{\alpha\beta}}{\partial\psi} = -2\Omega_{\alpha\beta}(x).$$

Ora, no problema de imersão que estamos abordando, as condições iniciais acima representam a métrica e a curvatura extrínseca da hipersuperfície $\psi = 0$, enquanto que a solução da equação (5.16) nos dá a métrica de $\overline{M}^{n+1}$. Desse modo, se pudermos garantir que as "equações de vínculo" (5.17) e

(5.18) sempre têm solução, qualquer que seja a métrica $g_{\alpha\beta}$, então a solução encontrada $\overline{g}_{\alpha\beta}$ satisfará as equações de Einstein no vazio, isto é, $\overline{R}_{ab} = 0$. Em outras palavras, $\overline{M}^{n+1}$ é uma variedade Ricci-flat. Pensando agora em Σ_0 como uma variedade M^n, arbitrária, pseudo-riemanniana, de dimensão n, vemos que M^n pode ser localmente imersa em $\overline{M}^{n+1}$, com a imersão sendo dada pela aplicação $y^\alpha = x^\alpha$, $y^{n+1} = \psi = 0$, onde $\{x^\alpha\}$ e $\{y^\alpha\} = \{y^1, ..., y^n, y^{n+1} = \psi\}$ denotam sistemas de coordenadas locais de M^n e $\overline{M}^{n+1}$, respectivamente.

Como notou Magaard, as equações de vínculo (5.17) e (5.18) sempre possuem solução algébrica. Podemos ver isto simplesmente notando que temos $n(n+1)/2$ variáveis (as componentes da curvatura extrínseca $\Omega_{\alpha\beta}(x)$) e $n+1$ equações de vínculo, enquanto que a métrica $g_{\alpha\beta}(x)$ deve ser considerada como conhecida. Portanto, para $n > 2$, existem mais variáveis que equações. Assim, empregando a equação (5.15) para expressar um elemento de $\Omega_{\alpha\beta}(x)$ em termos dos outros, Magaard mostrou que a equação (5.14) também pode ser colocada numa forma canônica com relação a n componentes de $\Omega_{\alpha\beta}(x)$ convenientemente escolhidas. Assim, novamente fazendo uso do teorema de Cauchy-Kowalewskaya, podemos garantir a existência da solução. É importante notar, mais uma vez, que o número de variáveis é maior do que o número de equações; portanto, podemos dizer que temos ainda $(n+1)(n/2-1)$ graus de liberdade. Dessa análise, vemos que diferentes escolhas livres de $\Omega_{\alpha\beta}(x)$ podem levar a diferentes espaços imersores. Nesse sentido, então a imersão não é única.

Referências Bibliográficas

[1] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston (1992).

[2] M. Dajczer, *Submanifolds and Isometric Immersions*, Publish or Perish, Houston (1990).

[3] L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, Princeton (1964).

[4] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, publish or Perish, Houston (1979).

[5] S. Kobayashi e K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers, New York-London (1969).

[6] H. Goenner, *Local isometric embedding of Riemannian manifolds and Einstein's theory of gravitation*, in "General Relativity and Gravitation: one hundred year after the birth of Albert Einstein", vol. 1, 441, editado por A. Held, Plenum Press, New York (1980).

[7] F. Dahia, *Imersão do espaço-tempo e a generalização do teorema de Campbell-Magaard*, tese de doutorado, João Pessoa, Universidade Federal da Paraíba (2001).

[8] R. Courant e D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. II. Wiley, New York (1989).

[9] N. I. Katzourakis, *Bundle-theoretical globalization of Campbell-Magaard embedding theorem in the context of MD gravity*, math-ph/0407067 (2004).