



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

ALEX DE ALBUQUERQUE SILVA

**GRAVITAÇÃO EM BRANAS COM ESPESSURA: TESTES
OBSERVACIONAIS E ALGUNS EFEITOS**

TESE DE DOUTORADO

JOÃO PESSOA

- ABRIL DE 2014 -

ALEX DE ALBUQUERQUE SILVA

**GRAVITAÇÃO EM BRANAS COM ESPESSURA: TESTES
OBSERVACIONAIS E ALGUNS EFEITOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia

JOÃO PESSOA

- ABRIL DE 2014 -

Para Alane.

AGRADECIMENTOS

Aos Professores Fábio Dahia e Carlos Romero por toda orientação e disponibilidade e que tiveram um papel fundamental no desenvolvimento deste trabalho. A meus pais, irmãos, parentes e amigos, pelo apoio, confiança e incentivo. Em especial à minha esposa, Alane, por sempre estar ao meu lado. Aos colegas da universidade, Herondy, Paulo, Luiz, Edu, Júlio Cesar, Denis, Patricio e principalmente a Adiel Lemos, por toda ajuda concedida. A todos que participaram efetivamente para a conclusão deste trabalho. Agradeço acima de tudo a Deus, o Eterno de Israel que, com sua perfeita sabedoria tem traçado meus caminhos.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

RESUMO

Teorias de dimensões extras têm sido amplamente estudadas nos últimos anos, com o intuito original de resolver o problema da hierarquia. Entre os modelos de dimensões extras podemos citar o modelo de branas Randal-Sundrum, que trata o nosso universo como uma brana imersa em um espaço ambiente com uma dimensão extra de comprimento infinito. O aspecto fundamental do cenário de branas é que a matéria e os campos estão confinados em uma hipersuperfície e, apenas, a gravidade tem acesso a todas as dimensões. Sendo assim, testes observacionais envolvendo a gravitação podem oferecer meios de se verificar a existência das dimensões extras. Com esta ideia em mente, neste trabalho, encontramos soluções de buracos negros em uma versão regularizada de uma brana (ou seja, com espessura) do tipo RSII e aplicamos, então, dois testes clássicos da relatividade geral para estas soluções de buracos negros, estudando a influência do movimento transversal nas trajetórias quadrimensionais das partículas. Constatamos que o desvio da luz e o atraso temporal, neste cenário, passam a depender da energia (frequência) do sinal luminoso, podendo, portanto, dar origem ao fenômeno de arco-íris gravitacional. Discutimos também um modelo de branas com espessura, conhecido como modelo de separação de férmions, formulado com o propósito de explicar a estabilidade do próton sem recorrer a algum tipo de simetria. Neste modelo, elétrons e prótons estão localizados em diferentes hipersuperfícies da brana. Verificamos que na presença de um campo gravitacional gerado por um corpo massivo, estas partículas irão sentir diferentes geometrias quadrimensionais. Esta aparente violação do princípio da equivalência, do ponto de vista de observadores quadrimensionais, produz interessantes fenômenos como, por exemplo, a indução, pela gravidade, de um dipolo elétrico em um átomo de Hidrogênio. Verificamos que a Hamiltoniana que descreve este efeito tem a mesma forma da Hamiltoniana de Stark, ou seja, $H = \mu \vec{A} \cdot \delta \vec{r}$, onde a aceleração de maré \vec{A} (devido à separação de elétron e próton na dimensão extra) está no lugar do campo elétrico e a massa reduzida do átomo substitui a carga elétrica.

Palavra Chaves: Dimensões extras, Fat brane, Buracos Negros, Testes da Relatividade Geral.

ABSTRACT

Theories of extra dimensions have been extensively studied in recent years with the original intention of solving the hierarchy problem. Among the models of extra dimensions we can mention the braneworld models, more precisely, the Randall-Sundrum model, which considers our universe as a brane embedded in an ambient space with an extra dimension of infinite size. The fundamental aspect of the brane models is that matter and fields are confined in a hypersurface and only gravity has access to all dimensions. Thus, observational tests involving gravity may provide a way of verifying the existence of extra dimensions. With this idea in mind, in this work, we find black hole solutions in a regularized version of a RSII type brane and then we consider two classical tests of general relativity to these solutions. We studied the influence of transversal movement in the four-dimensional path of the particles. We note that the deflection of light and the time delay, in this scenario, depend on the energy (frequency) of the light signal and can, therefore, give rise to the phenomenon of gravitational rainbow. We also discuss a model of thick branes known as the split fermion model. In this model electrons and protons are located on different hypersurfaces of the brane. We found that, in the presence of a gravitational field generated by a massive body, these particles will experience different four-dimensional geometries. This violation of the equivalence principle, from the viewpoint of four-dimensional observers, produces interesting phenomena as, for instance, the gravitational induction of an electric dipole in a hydrogen atom. We verified that the Hamiltonian that describes this effect has the same form of the Stark Hamiltonian, i.e., $H = \mu \vec{A} \cdot \delta \vec{r}$, where the tidal acceleration \vec{A} (due to the separation of electron and proton in the extra dimension) substitutes the electric field and the reduced mass atom replaces the electric charge.

Key word: Extra Dimensions, Fat brane, black holes, Tests of General Relativity.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Teorias de dimensões extras	5
2.1	Teoria de Kaluza-Klein	6
2.1.1	A condição cilíndrica de Kaluza	7
2.1.2	Klein e o mecanismo de compactação	8
2.2	Dimensões Extras de Grande Escala: Modelo ADD	10
2.2.1	Confinamento da Matéria	11
2.2.2	Localização de Férmions	13
2.2.3	Potencial Gravitacional em Dimensões Extras	16
2.2.4	Potencial Gravitacional em um Espaço com uma Dimensão Ex- tra compacta.	17
2.2.5	Escala fundamental de comprimento da dimensão extra e o prob- lema da hierarquia	19
2.3	Cenário de branas: modelos de Randall-Sundrum	21
2.3.1	O Modelo RSI	21
2.3.2	Modelo RSII	27
2.4	O modelo DGP	32
2.4.1	Gravidade induzida sobre a brana.	32
2.4.2	Função potencial do campo escalar	34
2.4.3	Campo Gravitacional no modelo DGP	36
2.5	Branas com Espessura	37

2.5.1	Localização de vários férmions	38
2.5.2	Decaimento do próton	40
3	Buracos Negros em Branas	43
3.1	Solução de Garriga e Tanaka	44
3.1.1	O Campo Gravitacional	46
3.1.2	Métrica estática e com simetria esférica na brana	47
3.2	Solução DMPR	49
3.2.1	Tensor Energia-Momento	52
3.2.2	Equações de Campo	54
4	Testes Experimentais da Relatividade em Branas Finas	57
4.1	Testes da relatividade no espaço-tempo de Garriga e Tanaka	59
4.1.1	Desvio da Luz	59
4.1.2	Atraso Temporal	65
4.2	Testes para a solução DMPR	67
4.2.1	Precessão do Periélio	67
4.2.2	Desvio da Luz	71
4.2.3	Atraso temporal	72
5	Buracos negros em branas com espessura	73
5.1	Equações de Campo	74
5.2	Solução aproximada de um buraco negro em uma brana com espessura	77
5.3	Solução do tipo DMPR	82
6	Testes da relatividade em branas com espessura	86
6.1	Movimento de uma partícula de teste em uma brana com espessura . .	87
6.2	Movimento de partículas sem massa	95
6.2.1	Desvio da Luz	98
6.2.2	Atraso temporal	99

7 Polarização elétrica induzida pela gravidade em branas com espes-	
sura.	101
7.1 Equação do movimento	102
7.2 Dipolo elétrico induzido pela gravidade	107
8 Conclusão	113
Apêndice	116
Transformação de coordenadas	116

Capítulo 1

Introdução

Modelos de unificação das forças fundamentais da natureza parecem requerer a existência de dimensões extras, como por exemplo, o modelo pioneiro de Kaluza-Klein. Em um artigo publicado em 1921, o matemático alemão, Theodor Kaluza, propôs a unificação entre a gravidade e o eletromagnetismo e para isso ele levou em conta um espaço-tempo de cinco dimensões. Posteriormente um físico sueco, Oskar Klein, forneceu uma justificativa para explicar por que a quinta dimensão não é observada na natureza. Este é o modelo conhecido como Kaluza-Klein e neste cenário a dimensão extra está enrolada, formando um círculo de raio l da ordem do comprimento de Planck. Assim, neste modelo, a dimensão extra torna-se praticamente indetectável. Essa ideia de dimensões extras foi abandonada por um tempo. Contudo, com o advento da tecnologia juntamente com os avanços da física teórica, os estudos sobre dimensões extras foram resgatados e dessa vez com o objetivo de resolver o problema da hierarquia, que nada mais é que a enorme diferença entre as escalas de Planck $10^{18} GeV$ e a eletrofraca $10^3 GeV$. Nesse contexto, surgem as teorias de branas onde o universo é tratado como uma hipersuperfície imersa em um espaço ambiente com dimensões superiores denominado de "bulk". Neste tipo de modelo, a hipersuperfície, também chamada de brana (em alusão a uma membrana), contém a matéria e os campos quadrimensionais usuais em um estado de confinamento [3, 71], no entanto, a gravidade é capaz de se propagar na direção das dimensões extras.

Podemos, destacar quatro importantes modelos neste cenário. O primeiro deles é o modelo proposto pelo Arkani-Hamed, Dimopoulos e o Dvali, conhecido por modelo ADD [5], que consiste de um modelo de branas cuja dimensão extra é compacta e possui uma escala de comprimento da ordem do milímetro. Este modelo exige a existência de no mínimo duas dimensões extras, para poder resolver o problema da hierarquia e ainda permanecer compatível com os dados experimentais. Outros importantes modelos são aqueles propostos por Lisa Randall e Raman Sundrum, denominados de modelos RS, existem dois modelos nesse cenário, denominados por RSI e RSII [66, 67]. No primeiro modelo, RSI, existe uma única dimensão extra, mas o espaço ambiente possui uma constante cosmológica negativa. A dimensão extra é compactada por meio da existência de duas branas com tensões iguais e com sinais contrários localizadas em pontos fixos do espaço ambiente. Já no modelo RSII, a segunda brana é colocada no infinito e isto faz com que a dimensão extra passe a ter um comprimento infinito ao contrário do que acontecia com os modelos anteriores. Devemos também mencionar o modelo DGP proposto por Dvali *et al.* [32], onde o espaço ambiente tem também cinco dimensões não compactas, a exemplo do RSII, mas não possui constante cosmológica. No entanto, a gravidade é descrita por uma Lagrangeana modificada, e, como veremos, isso induz uma gravidade aproximadamente igual à descrita pela teoria Newtoniana sobre a brana.

A principal diferença entre cada um destes modelos, está baseada na forma como a dimensão extra é escondida dos dados observacionais. Nesse sentido, o campo gravitacional se mostra uma boa ferramenta para se investigar a existência destas dimensões extras.

No contexto da teoria de campos, a brana pode ser descrita por meio de uma parede de domínio formada por um certo campo escalar real. Neste caso, a brana teria uma certa espessura e as branas finas dos modelos ADD, RSI, RSII, citados seriam idealizações obtidas no limite em que a espessura vai a zero.

Nesse trabalho iremos investigar soluções de buracos negros em branas com

espessura, onde utilizamos uma variação de soluções de buracos negros em branas finas do tipo RSII já conhecidas na literatura [39, 27]. Discutiremos também a aplicação de testes clássicos da relatividade geral (precessão do periélio, desvio da luz e atraso temporal) para esses tipos de soluções.

Uma solução analítica de buraco negro em uma brana fina tem sido intensivamente procurada nos últimos anos (soluções numéricas de buracos negros em branas já foram encontradas [61, 36, 82, 83], e nós discutiremos brevemente sobre tais soluções). Contudo, apesar de todo o esforço despendido nesse sentido, apenas soluções "parciais" foram encontradas, entre elas podemos citar a solução obtida por Garriga e Tanaka [39], cuja métrica descreve o espaço-tempo de um buraco negro num regime de campo fraco. Outra solução bem conhecida é a chamada solução DMPR [27], obtida por Dadhich, Maartens, Papadoupoulos e Rezania, cuja métrica tem a forma semelhante a solução de Reissner-Nördstrom, mas ao contrário desta, a solução DMPR apresenta uma carga de maré que surge como efeito da gravidade livre no bulk. Apesar de ser exata, a solução DMPR não é completa por estar restrita à brana e, portanto, não descreve a geometria do espaço ambiente. Além disso, no limite de longas distâncias, ela não reproduz a solução de Garriga e Tanaka. Por isso, espera-se que a solução DMPR corresponda, aproximadamente, a solução de buraco negro real, apenas no seu entorno. Longe do buraco negro, a solução seria aproximadamente aquela descrita por Garriga e Tanaka. Partindo dessas soluções obtivemos soluções correspondentes para buracos negros em uma brana com espessura.

Estudamos também o comportamento de partículas de testes no espaço-tempo descrito por tais soluções e verificamos a influência do movimento transversal ao longo da dimensão extra. Neste contexto, aplicaremos aqui os testes clássicos da relatividade geral para uma das métricas que descrevem buracos negros em uma brana com espessura e verificamos a influência do movimento oscilatório transversal sobre os nossos resultados. Como veremos, em consequência do movimento transversal, o desvio da luz passa a depender da energia de radiação, produzindo desta forma o chamado

arco-íris gravitacional.

Seguindo essa linha de investigar os efeitos das supostas dimensões extras, consideraremos, por fim, um modelo de branas com espessura que postula uma separação espacial entre os férmions ao longo da dimensão extra. Este modelo assume que léptons e bárions vivem em diferentes fatias da brana com o intuito de explicar a estabilidade do próton sem recorrer a algum tipo de simetria. Veremos que em decorrência dos férmions estarem localizados em diferentes fatias da brana, os léptons e bárions sentirão diferentes forças gravitacionais mesmo quando se encontram na mesma posição quadrimensional, em outras palavras, no espaço-tempo produzido por uma massa M presa à brana. A métrica induzida será diferente para distintas fatias da brana. Isto significa que léptons e bárions irão sentir diferentes geometrias. Disso resulta uma aceleração de maré \vec{A} , devida a separação dos férmions na dimensão extra, que produz uma força interna em um átomo de hidrogênio, por exemplo, induzindo desta maneira um efeito de dipolo elétrico na direção paralela a brana. Teremos assim em efeito Stark induzido pela gravidade na brana.

Capítulo 2

Teorias de dimensões extras

Desde o início do século passado, mais precisamente após a formulação da Teoria da Relatividade Geral de Einstein, os físicos tem se dedicado à busca por uma teoria de unificação das forças fundamentais da natureza. Com esse objetivo, em 1921, o matemático Theodor Kaluza apresentou um modelo onde o campo gravitacional é unificado com o eletromagnetismo, admitindo a existência de uma dimensão extra no espaço-tempo. Posteriormente, em 1926, o físico sueco Oscar Klein introduz algumas modificações nesse modelo que passou a ser conhecido por teoria de Kaluza-Klein. Esse é o primeiro modelo de dimensões extras no contexto da Teoria da Relatividade Geral. Acontece que, na teoria de Kaluza-Klein, o tamanho da dimensão extra é da ordem do comprimento de Plack ($10^{-35}m$), sendo assim praticamente impossível de ser medido.

Mais de sete décadas se passaram, até que novamente as dimensões extras se tornaram objeto de um intenso estudo por parte do físicos. Durante esse tempo, mais dois tipos de forças foram descobertas; as forças nucleares fraca e forte. É importante ressaltar que as forças eletromagnética e nuclear fraca já foram unificadas com sucesso, formando o que denominamos por força eletro-fraca. A motivação original desses novos modelos de dimensões extras, conhecidos como modelos de branas, foi explicar a grande diferença entre as escalas de energia das forças eletro-fraca e gravitacional.

Nesse capítulo iremos apresentar de maneira sucinta alguns modelos de dimensões extras: ADD, RSI, RSII e DGP. A diferença principal entre os modelos está na forma como a dimensão extra é escondida das observações, como veremos adiante.

Por fim, trataremos do modelo fat brane, no qual o universo é imaginado como sendo uma brana (parede de domínio) em três dimensões imersa em um espaço-tempo de cinco dimensões e onde a matéria, bem como os campos de gauge, estão aprisionados nessa parede por meio da ação de um campo escalar. Essa brana possui uma espessura e os campos de férmions estão presos nelas em pontos distintos ao longo da dimensão extra, denominaremos esse modelo de fat brane. Uma motivação para esse modelo, é que ele consegue explicar a estabilidade do próton sem impor uma lei de conservação do número bariônico.

2.1 Teoria de Kaluza-Klein

Com o intuito de realizar a unificação entre a teoria do eletromagnetismo de Maxwell e a Relatividade Geral de Einstein, em 1921 Kaluza propôs um modelo onde o espaço-tempo possui cinco dimensões, assumindo que a dimensão extra seria uma dimensão espacial z , de forma que o conjunto completo das coordenadas em um espaço-tempo (4+1)-dimensional seria (x^μ, z) , $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Admitindo que a equação do campo gravitacional em cinco dimensões também é dada pelas equações de Einstein, então, no vácuo a métrica em cinco dimensões, g_{AB} ($A, B = 0, 1, 2, 3, 4$), obedece as seguintes equações [55]:

$$G_{AB} = 0 \tag{2.1}$$

ou de maneira equivalente:

$$R_{AB} = 0 \tag{2.2}$$

onde $G_{AB} \equiv R_{AB} - Rg_{AB}/2$ é o tensor de Einstein 5-dimensional, R_{AB} e $R = g_{AB}R^{AB}$

são o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, respectivamente, em cinco dimensões. A ausência de matéria nestas equações vêm da suposição utilizada por Kaluza de que o universo em dimensões mais altas está vazio. A ideia de Kaluza, foi indentificar a parte quadridimensional de g_{AB} como sendo $g_{\mu\nu}$, a parte $g_{\mu z}$ com A_μ (o potencial eletromagnético) e a parte g_{zz} com ϕ (o campo escalar) [55, 54, 75].

Kaluza propôs a seguinte parametrização para a métrica g_{AB}

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \kappa^2 \phi^2 A_\mu A_\nu & \kappa \phi^2 A_\mu \\ \kappa \phi^2 A_\nu & \phi^2 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

A assinatura da métrica 4-dimensional é tomada como sendo $(+ - - -)$ e utilizamos as unidades $c = \hbar = 1$.

2.1.1 A condição cilíndrica de Kaluza

Como veremos, a teoria de Kaluza consegue unificar a gravidade e o eletromagnetismo postulando a existência de uma dimensão extra no espaço-tempo. Contudo, a teoria ainda deveria explicar o fato de que a dimensão extra não é observada. Com esse intuito, Kaluza impõe que os campos não dependem da coordenada extra. Matematicamente isso é equivalente a seguinte condição:

$$\frac{\partial g_{AB}}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

Essa exigência é conhecida como condição cilíndrica.

Podemos utilizar a condição cilíndrica (2.4) juntamente com métrica na forma dada por (2.3), para obter as equações de Einstein[65]:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2 \phi^2}{2} T_{\mu\nu}^{EM} - \frac{1}{\phi} [\nabla_\mu (\partial_\nu \phi) - g_{\mu\nu} \square \phi], \quad (2.5a)$$

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = -3 \frac{\partial^\mu \phi}{\phi} F_{\mu\nu} \quad (2.5b)$$

$$\square \phi = \frac{\kappa^2 \phi^3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.5c)$$

onde $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - Rg_{\mu\nu}/2$ é o tensor de Einstein em 4 dimensões com a métrica $g_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}^{EM} \equiv g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}/4 - F_\rho^\alpha F_{\sigma\alpha}$ é o tensor energia-momento eletromagnético, e $F_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, corresponde ao tensor eletromagnético. Se tomarmos $\phi \equiv cte = 1$, as duas primeiras equações acima se reduzem às equações de Einstein e as equações de Maxwell em quatro dimensões na ausência da matéria:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{EM}, \quad (2.6a)$$

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.6b)$$

Portanto, podemos derivar, as equações de Maxwell no vácuo e as equações da Teoria da Relatividade Geral em quatro dimensões acopladas, a partir das equações de Einstein no vácuo em cinco dimensões.

2.1.2 Klein e o mecanismo de compactação

Na tentativa de explicar a natureza aparentemente 4-dimensional do universo, em 1926 o físico Oscar Klein, assumiu que a dimensão extra deveria ter a topologia de um círculo e além disto, deveria possuir uma escala de comprimento muito pequena [60]. Como efeito desta topologia, qualquer quantidade $f(x^\mu, z)$ deve ser periódica com respeito à dimensão extra. Por exemplo, para o campo escalar $\phi(x^\mu, z)$ definido no espaço de cinco dimensões devemos ter:

$$\phi(x^\mu, z) = \phi(x^\mu, z + 2\pi l) \quad (2.7)$$

onde l é o comprimento da dimensão extra.

Sendo assim, o campo pode ser expandido em séries de Fourier [37]:

$$\phi(x^\mu, z) = \sum_n \phi^{(n)}(x^\mu) e^{inz/l} \quad (2.8a)$$

onde n refere-se ao n -ésimo modo de Fourier. Note que apenas no modo zero ($n = 0$) existir, o campo ϕ será independente da dimensão extra.

Para ilustrar o argumento de Klein vamos, agora, considerar a equação de Klein-Gordon para um campo escalar sem massa em cinco dimensões

$$\square_{(5)}\phi = 0 \quad (2.9)$$

onde $\square_{(5)} = \square - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador D'Lambertiano em cinco dimensões.

A equação (2.9) pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis, onde escrevemos $\phi(x^\mu, z) = \chi(x^\mu) \varphi(z)$ e, então, encontramos,

$$\square\chi(x^\mu) = m^2\chi(x^\mu) \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z^2} + m^2\varphi(z) = 0 \quad (2.10b)$$

Podemos interpretar a constante de separação m^2 como sendo a massa do campo χ . Resolvendo a equação (2.10b) e impondo a condição de periodicidade $\varphi(z) = \varphi(z + 2\pi l)$, podemos verificar que os valores permitidos para a constante de separação são:

$$m^2 = \frac{n^2}{l^2} \quad (2.11)$$

De um ponto de vista quadrimensional, o campo $\phi(x^\mu, z)$ pode ser decomposto em um modo zero ($n = 0$) sem massa juntamente com modos massivos que chamaremos

de modos de Kaluza-Klein (KK) para $n \neq 0$. Desta forma, cada modo KK pode ser interpretado como um tipo diferente de partícula com massa $m_n = |n|/l$. Assim, cada modo KK carrega uma energia mínima da ordem de n/l , e para serem excitados seria necessário, no mínimo, uma energia da mesma ordem. Para energias abaixo da escala $1/l$, somente o modo com $n = 0$ é relevante, ou seja, a baixas energias a física é efetivamente quadrimensional [60, 28, 75].

Admitindo que l é muito pequeno (da ordem do comprimento de Planck) então, a energia necessária para excitar os modos com $n \neq 0$ é bastante elevada ($\sim 1/l$). Desta forma, os modos KK com massa ficariam fora do alcance experimental e assim, somente o modo zero ($n = 0$), seria observado. Isso é equivalente à condição cilíndrica exigida na teoria de Kaluza.

2.2 Dimensões Extras de Grande Escala: Modelo

ADD

O modelo ADD surge como uma tentativa de resolver o chamado problema da hierarquia, que é a enorme diferença de magnitude entre a escala eletro-fracas e a escala de Planck. No modelo ADD as dimensões extras estão escondidas por meio de um mecanismo de confinamento da matéria e dos campos em uma hipersuperfície (quadrimensional) imersa em um espaço ambiente maior (*bulk*) e apenas a gravidade pode se propagar ao longo da dimensão extra [5]. Em contraste com o modelo proposto por Kaluza, que possui dimensões extras compactas com comprimentos da ordem do comprimento de Planck, no modelo ADD as dimensões extras, ainda são compactas, mas podem atingir a escala de comprimento submilimétrica, sem conflitos com a experiência.

Para entender este modelo, vamos ilustrar o mecanismo de localização de férmions numa parede de domínio neste cenário e em seguida discutiremos os efeitos das dimensões extras sobre a gravitação.

2.2.1 Confinamento da Matéria

Consideremos um campo escalar real $\phi = \phi(x^\mu, z)$, cuja ação é dado por [71, 72, 73]:

$$S = \int d^4x dz \left[\frac{1}{2} (\partial_A \phi)^2 - V(\phi) \right] \quad (2.12)$$

onde $A = 0, 1, 2, 3, 4$ e $V(\phi)$ é o potencial escalar.

Vamos escolher um potencial adequado com o intuito de obter uma solução do tipo parede de domínio, desta maneira, tomamos

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{8} (\phi^2 - \nu^2)^2 \quad (2.13)$$

O comportamento deste potencial é visto na figura (2.1)

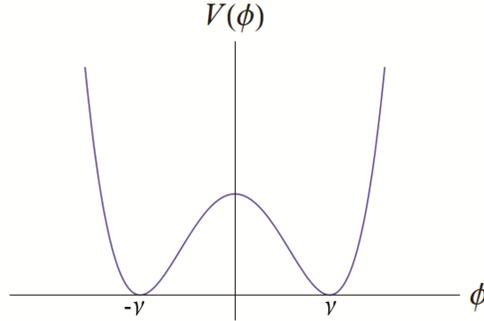


Figura 2.1: Gráfico do potencial escalar em função do campo.

Para este potencial temos dois valores de menor energia $\phi = -\nu$ e $\phi = \nu$. Notamos ainda que para $\phi = 0$, existe um máximo instável

Por meio das equações de Euler-Lagrange, podemos obter a equação dinâmica do campo, dada por

$$\partial_0^2 \phi - \partial_\mu^2 \phi + \frac{\lambda^2}{2} \phi_0 (\phi_0^2 - \nu^2) = 0 \quad (2.14)$$

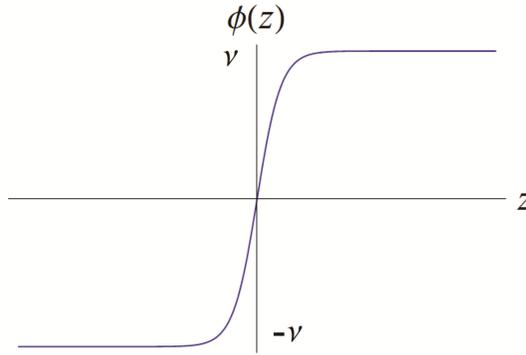


Figura 2.2: Solução do tipo parede de domínio.

Uma solução desta equação é a seguinte função:

$$\phi(z) = \nu \tanh\left(\frac{\lambda\nu z}{2}\right) \quad (2.15)$$

Esta configuração conecta os estados fundamentais do campo escalar, ou seja, quando $\phi_0 = (z \rightarrow -\infty) = -\nu$ e $\phi_0 = (z \rightarrow +\infty) = +\nu$ e é conhecida como parede de domínio [71, 72, 73, 75].

Podemos ainda, considerar a densidade de energia correspondente a parede de domínio. Iniciamos pela densidade de Hamiltoniana associada ao campo ϕ . Pode-se verificar que a densidade de Hamiltoniana é dada por

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{1}{2}(\partial_A\phi)^2 + \frac{\lambda^2}{8}(\phi^2 - \nu^2)^2 \quad (2.16)$$

Para uma solução do tipo parede de domínio, dada por (2.15), encontramos

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 \nu^4}{\cosh^4\left(\frac{\lambda\nu z}{2}\right)} \quad (2.17)$$

A distribuição de energia está concentrada em torno de $z = 0$. Além disso, notamos que quanto maior λ , maior a concentração de energia. Sendo assim, λ pode ser associada com o inverso da espessura da brana. Temos portanto a seguinte distribuição de energia ilustrada na figura (2.3).

Integrando com relação a z obtemos a densidade de energia por 3-volume no campo.

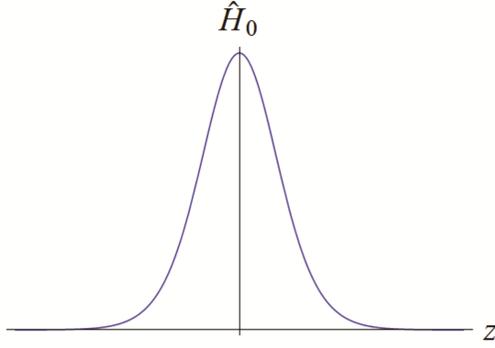


Figura 2.3: Densidade de energia na brana em $z = 0$.

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 v^4}{\cosh^4\left(\frac{\lambda v z}{2}\right)} dz = \frac{2\lambda v^3}{3} \quad (2.18)$$

No limite em que a espessura vai a zero ($\lambda \rightarrow \infty$), mantendo σ constante, a parede de domínio dá origem uma estrutura conhecida como 3-brana.

2.2.2 Localização de Férmions

Férmions são descritos por espinores (ψ), e a equação do movimento dos férmions é a equação de Dirac. Admitindo, que a Lagrangeana do campo de Dirac em cinco dimensões, tem a seguinte forma [73]:

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\Gamma^A\partial_A\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \quad (2.19)$$

a ação será, então, dada por

$$S_{1/2} = \int d^4x dz (i\bar{\Psi}\Gamma^A\partial_A\psi - m\bar{\Psi}\psi) \quad (2.20)$$

onde as matrizes de Dirac em cinco dimensões são:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \quad (2.21)$$

$$\Gamma^z = -i\gamma^5$$

explicitamente, $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1_{2 \times 2} \\ 1_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$

Para estudar o comportamento de férmions numa parede de domínio, devemos admitir que o férmion interage com o campo escalar por meio de uma intera o do tipo Yukawa [73]. Neste caso, a a o da intera o toma a seguinte forma:

$$S_{int} = -h \int d^4x dz \phi \bar{\Psi} \Psi \quad (2.22)$$

onde h   uma constante de acoplamento.

Assim, a a o total será

$$S = \int d^4x dz (i\bar{\Psi} \Gamma^A \partial_A \Psi - m\bar{\Psi} \Psi - h\phi \bar{\Psi} \Psi) \quad (2.23)$$

Para um férmion sem massa, ou seja, $m = 0$, temos:

$$S = \int d^4x dz (i\bar{\Psi} \Gamma^A \partial_A \Psi - h\phi_0 \bar{\Psi} \Psi) \quad (2.24)$$

Da a o acima obtemos a seguinte equa o do movimento

$$i\Gamma^z \partial_z \Psi + i\Gamma^\mu \partial_\mu \Psi - h\phi_0 \Psi = 0 \quad (2.25)$$

Admitindo $\Psi_{(5)}(x, z) = \psi(x) f(z)$, e impondo a seguinte restri o ao espinor $\gamma^5 \psi = -\psi$, obtemos, pelo método de separa o de varáveis, a seguinte equa o para os campos

$$\left[\frac{1}{f(z)} \partial_z f(z) + h\phi_0 \right] \psi(x) - i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = 0 \quad (2.26)$$

onde $\psi(x)$ é o espinor de Dirac em 4-D. Para partículas sem massa, a condição $\gamma^5\psi = -\psi$ determina que o espinor sem massa tem quiralidade. No entanto, essa condição não implica em nenhuma restrição física, uma vez que as partículas de massa nula apresentam quiralidade bem definida. Logo, poderíamos ter escolhido outra condição (quiralidade).

Portanto, para satisfazer a equação acima devemos ter que

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) = m\psi(x) \quad (2.27)$$

e

$$\frac{df(z)}{dz} = (m - h\phi_0)f(z) \quad (2.28)$$

onde a constante m é interpretada como a massa do espinor em 4-D [13, 44].

Para o modo zero ($m = 0$), podemos resolver (2.28) e encontramos

$$f(z) = \exp\left(-h\int_0^z\phi_0(z)dz\right) \quad (2.29)$$

Considerando que $\phi_0(z)$ descreve uma parede de domínio, verificamos que $f(z)$ cai exponencialmente para z grande. É este comportamento de $f(z)$ que garante a localização do modo zero fermiônico na brana.

Sendo assim, a função de onda do férmion de modo zero será:

$$\psi_0 = \exp\left(-\int_0^zh\phi_0(z)dz\right)\psi_L \quad (2.30)$$

ψ_L indica um espinor de quiralidade esquerda. Concluímos que o modo zero fermiônico, ou seja, os férmions quadrimensionais estão localizados próximo de $z = 0$.

A equação (2.28) determina que os modos fermiônicos possuem um espectro de massa. De acordo com Rubakov [73], esse espectro tem a seguinte característica: o primeiro modo com massa é o modo $m_5 = h\nu$ e a partir desde modo o espectro de

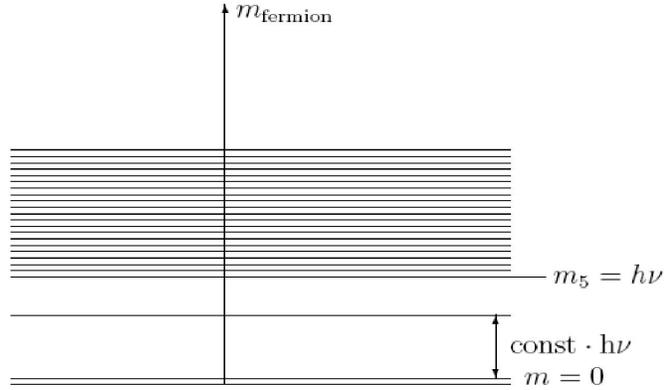


Figura 2.4: Espectro de massa dos férmions presos na brana. O hiato entre o modo zero ($m = 0$) e os modos contínuos é proporcional a $h\nu$. A parte contínua tem início em $m_5 = h\nu$.

massa se torna contínuo. Se admitimos que ν é muito grande, então, os modos massivos seriam experimentalmente inacessíveis para um observador na brana.

2.2.3 Potencial Gravitacional em Dimensões Extras

Vamos discutir, agora, como a dimensão extra afeta a gravidade, considerando que o campo gravitacional é o único campo capaz de se propagar ao longo da dimensão extra. Para tanto, devemos obter o potencial gravitacional Newtoniano gerado por um corpo de massa m em um espaço-tempo com η dimensões espaciais. Se admitimos que o campo gravitacional \vec{g} em n dimensões é conservativo e a equação de campo tem a mesma forma que a sua correspondente quadridimensional [84], ou seja

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G^{(n)} \rho \quad (2.31)$$

onde $G^{(n)}$ é a constante gravitacional em n dimensões do espaço-tempo e ρ é a densidade de massa da matéria, então, podemos mostrar que o campo gravitacional de um corpo com simetria esférica e massa m é:

$$\phi(r) = \frac{2\Gamma(\eta/2)}{\pi^{\eta/2-1}(2-\eta)} \frac{G^{(\eta+1)}m}{r^{\eta-2}} \quad (2.32)$$

onde o número de dimensões espaciais (η) e o número de dimensões do espaço-tempo (n) estão relacionados por $n = \eta + 1$.

Para $\eta = 3$, o potencial Newtoniano é recuperado. Note ainda que, para o caso $\eta = 4$, com uma dimensão extra, ϕ depende de r^{-2} , ou seja, se desvia claramente do comportamento observado para longas distâncias. Devemos ressaltar que as dimensões aqui têm a topologia de \mathbb{R} . Portanto, a dimensão extra no modelo ADD, por causa do campo gravitacional, não pode ser não-compacta, sem incorrer em conflitos fenomenológicos.

2.2.4 Potencial Gravitacional em um Espaço com uma Dimensão Extra compacta.

Para determinar o potencial gravitacional gerado por uma massa em um espaço-tempo multidimensional no qual a dimensão extra é compacta, vamos considerar um observador localizado em um ponto O do espaço. Uma vez que a dimensão extra do universo é compacta e possui a topologia de um círculo, fazendo com que o universo tenha uma forma cilíndrica, as linhas de força que se originam na massa m darão voltas em torno do espaço até atingirem o observador em O , que por sua vez sentirá o efeito de várias corpos de massa m em diferentes pontos do universo.

Se pudéssemos desenrolar o cilindro (universo), obteríamos um plano onde as diversas massas (m_1, m_2, \dots) estariam espalhadas ao longo de uma linha de forma que duas imagens consecutivas estariam separadas por uma distância igual a $2\pi l$, onde l é o raio da dimensão extra. A essas massas damos o nome de imagens topológicas. Se o observador se encontra a uma distância R muito maior que l , ele "verá" uma linha de massa distribuída ao longo da dimensão extra, como ilustrado na figura (2.5).

Para calcular o campo gravitacional produzido por essa linha de massa podemos utilizar a lei de Gauss, onde a superfície gaussiana será um cilindro. Contudo, como estamos num espaço com quatro dimensões espaciais, a base do cilindro é uma esfera em vez de ser um círculo [62]. Portanto, a linha lateral do cilindro de comprimento L

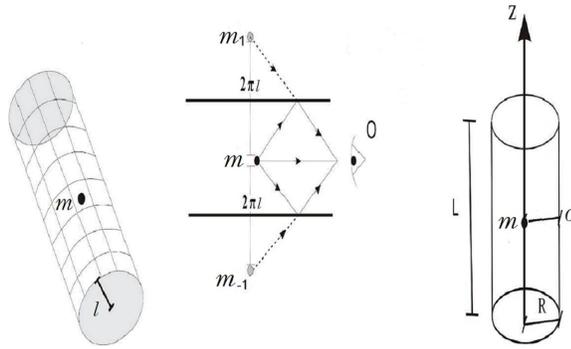


Figura 2.5: Na primeira figura, temos a massa localizada em um determinado ponto do nosso universo. Já na figura seguinte, o cilindro é representado por um espaço "aberto" com as identificações topológicas (o observador sente a influência de várias imagens topológicas). Na última figura, temos uma situação onde o observador está muito distante da massa e observa uma distribuição praticamente contínua destas massas.

será $4\pi R^2 L$. Assim, temos

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi G_5 M_{int} \quad (2.33)$$

onde M_{int} é a quantidade de massa topológica dentro da superfície gaussiana. Como as massas estão separadas por uma distância $2\pi l$, assim, o número de cargas contidas numa linha de comprimento L será igual a $L/2\pi l$. Deste modo

$$M_{int} = \frac{L}{2\pi l} m \quad (2.34)$$

Logo, em notação vetorial, obtemos que

$$\vec{g}(R) = -\frac{G_5 m}{2\pi R^2 l} \hat{e}_R \quad (2.35)$$

e potencial gravitacional, por sua vez será

$$\phi(R) = -\left(\frac{G_5 m}{2\pi l}\right) \frac{1}{R} \quad (2.36)$$

Se escrevemos $G_4 = G_5/2\pi l$, recuperamos o potencial gravitacional quadrimen-

sional para $R \gg l$, ou seja

$$\phi(R) = -\frac{G_4 m}{R} \quad (2.37)$$

2.2.5 Escala fundamental de comprimento da dimensão extra e o problema da hierarquia

No estudo da gravitação, algumas vezes é conveniente utilizarmos o sistema de unidades de Planck, onde temos três unidades básicas, *comprimento de Planck* l_p , *massa de Planck* m_p e *tempo de Planck* t_p . definidas em termos das três constantes fundamentais c , \hbar e G , da seguinte forma:

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}, \quad t_p = \frac{l_p}{c} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} \quad \text{e} \quad m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \quad (2.38)$$

Podemos por meio de uma combinação entre as três constantes fundamentais c , \hbar e $G^{(n)}$ obter uma relação entre o comprimento de Planck para um espaço-tempo de n dimensões e o comprimento de Planck do espaço quadrimensional, através da seguinte expressão.

$$(l_p^{(n)})^{n-2} = \frac{G^{(n)}\hbar}{c^3} = l_p^2 \frac{G^{(n)}}{G} \quad (2.39)$$

Desta relação vemos que o comprimento de Planck, para um espaço-tempo de quatro dimensões, é na verdade um valor efetivo, enquanto que o comprimento de Planck fundamental está estabelecido no espaço ambiente [5, 84, 75]. Em um cenário onde consideramos a existência de uma única dimensão extra compacta com a topologia de um pequeno círculo de raio l , onde o comprimento da dimensão é igual a $2\pi l$, vimos que as constantes gravitacionais em quatro e cinco dimensões se relacionam da seguinte forma:

$$\frac{G^{(5)}}{G^4} = 2\pi l = l_c \quad (2.40)$$

onde l_c é o comprimento da dimensão extra. Vemos, então, que as constantes gravita-

cionais em diferentes dimensões diferem por um fator da ordem do comprimento da dimensão extra compacta. Assim, para o caso geral onde temos n dimensões, devemos ter

$$\frac{G^{(n)}}{G^4} = (l_c)^{n-4} \quad (2.41)$$

se admitimos que o comprimento de todas as dimensões extras é o mesmo. Combinando (2.39) com (2.41), podemos escrever l_c em função do comprimento de Planck em 4 dimensões (l_p) e o comprimento de Planck em n -dimensões ($l_p^{(n)}$).

$$l_c = l_p^{(n)} \left(\frac{l_p^{(n)}}{l_p} \right)^{\frac{2}{n-4}} \quad (2.42)$$

O comprimento de Planck em 4-D é $l_p = 10^{-33}cm$, agora, se admitimos que o comprimento de Planck em n dimensões tem a mesma ordem da escala eletro-fraca, ou seja $l_p^{(n)} \approx 10^{-18}cm$, o que resolveria o problema da hierarquia, obtemos uma relação entre o tamanho da dimensão extra l_c e o número de dimensões extras do espaço:

$$l_c = 10^{-18} (10^{15})^{2/n-4} \quad (2.43)$$

Escolhendo $n = 5$ (uma única dimensão extra), obtemos que $l_c \sim 10^{12}cm$, um comprimento vinte vezes maior que a distância entre a Terra e a Lua, o que torna esse resultado fenomenologicamente inaceitável, uma vez que uma dimensão extra com um comprimento tão grande já teria sido observada [5]. Assim, a ideia de um universo com uma única dimensão extra deve ser descartada neste modelo, se quisermos resolver o problema da hierarquia [78]. Para $n = 6$, ou seja um espaço-tempo com duas dimensões extras, o comprimento da dimensão extra seria da ordem de $l_c \sim 0,01mm$. Esta é a escala de distância até onde a lei Newtoniana da gravitação foi testada [5, 52]. Portanto, um modelo com duas dimensões extras é aceitável. Assim, desvios das leis do inverso do quadrado da gravitação, nesta escala, seriam um forte indício da existência de dimensões extras [5].

2.3 Cenário de branas: modelos de Randall-Sundrum

Os modelos de Randall-Sundrum (RS), assim como o modelo ADD, são modelos de brana. Mas, eles se distinguem do ADD, por mostrar que um modelo de cinco dimensões não é incompatível com os dados experimentais. Isso é possível admitindo-se que o espaço ambiente possui uma constante cosmológica negativa ajustada a tensão da brana. Há dois modelos: RSI e RSII. O modelo RSI propõem a existência de duas branas. Neste modelo cada brana é caracterizada por uma tensão (densidade de energia por unidade de 3-volume). Chamamos essa densidade de tensão da brana. Neste modelo a dimensão extra está compactada devido à existência dessas duas branas. No modelo RSII uma das branas é retirada, de maneira que a dimensão extra terá um comprimento infinito, ou seja, a dimensão extra não é compacta.

2.3.1 O Modelo RSI

Neste modelo, o espaço-tempo tem uma única dimensão extra compactada por meio da existência de duas branas que estão localizadas em dois pontos fixos do espaço ambiente [66]. Uma brana com tensão positiva ($+\sigma$) está localizada em $z = 0$ e uma de tensão negativa ($-\sigma$) está localizada em $z = z_c$. Dizemos que z_c é, então, o comprimento da dimensão extra. Admitimos que a dimensão extra possua a topologia do espaço S^1/Z_2 . que pode ser descrita da seguinte forma: se $\theta \in [-\pi, \pi]$ é a coordenada angular que localiza os pontos em um círculo, então, o espaço S^1/Z_2 é obtido indentificando-se os pontos θ e $-\theta$. Nessas coordenadas as branas de tensão positiva e negativa estão localizadas nos dois pontos fixos, $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Podemos ainda relacionar as coordenadas θ com a coordenada z através de $z \equiv \theta l$, onde l é o raio da dimensão extra [2].

A métrica do modelo RSI possui a seguinte forma:

$$ds^2 = a^2(z)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dz^2, \quad (2.44)$$

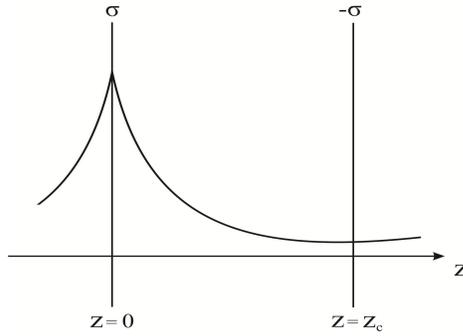


Figura 2.6: Comportamento do fator de deformação (warp factor).

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski em quatro dimensões e $a(z)$ é chamado de fator de deformação "warping factor" que tem a forma:

$$a(z) = e^{-\kappa|z|}. \quad (2.45)$$

O comportamento da função $a(z)$ em S^1/Z_2 está ilustrado na figura (2.6).

Determinaremos κ por meio das soluções das equações de Einstein em cinco dimensões, dadas por

$$\hat{R}_{AB} - \frac{1}{2}\hat{g}_{AB}\hat{R} = T_{AB}. \quad (2.46)$$

onde o tensor energia momento T_{AB} pode ser escrito como [66, 75]

$$T_{AB} = \Lambda\hat{g}_{AB} + 8\pi G_{(5)}\tau_{AB}, \quad (2.47)$$

onde Λ e $G_{(5)}$ são as constantes cosmológica e gravitacional em cinco dimensões. O termo τ_{AB} descreve a energia das branas e é dado por

$$\tau_{AB} = \begin{cases} \tau_{\mu\nu} = \sigma g_{\mu\nu}^{(5)}\delta(z) - \sigma g_{\mu\nu}^{(5)}\delta(z - z_c) \\ \tau_{Az} = 0 \end{cases}. \quad (2.48)$$

Utilizando a métrica (2.44), as equações de Einstein juntamente com o tensor energia-momento (2.48), levam ao seguinte sistema de equações [66, 75]

$$\left[-3 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 - 3 \left(\frac{a''}{a} \right) \right] = 8\pi G_{(5)} [\sigma g_{\mu\nu}^{(5)} \delta(z) - \sigma g_{\mu\nu}^{(5)} \delta(z - z_c)] + \Lambda g_{\mu\nu}^{(5)}, \quad (2.49a)$$

$$G_{\mu z} = 0 \quad (2.49b)$$

$$\left[-6 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right] = \Lambda, \quad (2.49c)$$

onde a equação (2.49b) é automaticamente satisfeita.

A equação (2.49c) é satisfeita se

$$\kappa^2 = -\frac{1}{6}\Lambda. \quad (2.50)$$

Segue, então, que a constante cosmológica deve ser negativa para que a métrica (2.44) seja solução das equações de Einstein.

Integrando a equação (2.49a) em torno de $z = 0$ (brana com tensão positiva), no intervalo $-\varepsilon < z < \varepsilon$, no limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$, verificamos que a tensão na brana está ajustada a constante cosmológica do espaço ambiente do seguinte modo:

$$\sigma^2 = -\frac{3}{32\pi^2 G_{(5)}^2} \Lambda. \quad (2.51)$$

De maneira análoga, a solução em torno da outra brana $z = z_c$ conduz ao mesmo resultado.

Linearização da gravidade e espectro de massa dos grávitons

Desejamos encontrar as correções causadas pela dimensão extra na solução das equações de campo. Essas correções serão tratadas como perturbações na métrica quadrimensional. Portanto, podemos obter tais correções por meio da linearização das equações de Einstein. A métrica perturbada em cinco dimensões é dada por [66]

$$ds^2 = [a^2(z)\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x, z)] dx^\mu dx^\nu - dz^z, \quad (2.52)$$

onde $h_{\mu\nu}$ é o termo de perturbação e satisfaz à condição $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Escolhendo um sistema de coordenadas no qual $h_{\mu z} = 0$, vamos resolver a equação de Einstein para a métrica dada em (2.52). Se introduzirmos matéria na brana, as equações de Einstein serão

$$\hat{G}_{AB} = 8\pi G_{(5)} T_{AB}^{mat} + 8\pi G_{(5)} \tau_{AB}^{brana} + \Lambda \tilde{g}_{AB} \quad (2.53)$$

onde T_{AB}^{mat} e τ_{AB}^{brana} são os tensores energia-momento da matéria e da brana respectivamente, e Λ a constante cosmológica do espaço ambiente.

Escrevendo as equações de Einstein para a métrica perturbada (2.52), obtemos:

$$\frac{1}{2}a^{-2}(z)[h_{\nu,\sigma,\mu}^{\mu} + h_{\sigma,\rho,\nu}^{\rho} + \eta^{\mu\rho}h_{\sigma\nu,\rho,\mu} - h_{\mu,\sigma,\nu}^{\mu}] + \frac{1}{2}h''_{\sigma\nu} + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a'}{a} \right) h'_{\mu}{}^{\mu} - \left(\frac{a'}{a} \right)^2 h_{\mu}{}^{\mu} \right] \eta_{\sigma\nu} \quad (2.54)$$

$$+ 2\kappa[\delta(z) - \delta(z - z_c)]h_{\sigma\nu} - 2\kappa^2 h_{\sigma\nu} = 8\pi G_{(5)}\delta(z) \left(T_{\sigma\nu}^{(mat)} - \frac{1}{3}T_{\alpha}^{\alpha(mat)}\eta_{\sigma\nu} \right),$$

$$-\frac{1}{2}a^{-2}(h'_{\nu,\mu}{}^{\nu} - h'_{\mu,\rho}{}^{\rho}) + \left(\frac{a'}{a^3} \right) (h_{\nu,\mu}{}^{\nu} - h_{\mu,\nu}{}^{\nu}) = 0 \quad (2.55)$$

$$-\frac{1}{2}a^{-2}h''_{\mu}{}^{\mu} + \frac{a'}{a^3}h'_{\mu}{}^{\mu} + \left[\frac{a''}{a^3} - \left(\frac{a'^2}{a^4} \right) \right] h_{\mu}{}^{\mu} = \frac{8\pi G_{(5)}a^2}{3}\delta(z)T^{(mat)} \quad (2.56)$$

É possível escolher um gauge (sistema de coordenadas) no qual $h_{\mu\nu}$ é transverso e possui traço nulo [66], isto é :

$$\partial_{\mu}h_{\nu}{}^{\mu} = h_{\mu}{}^{\mu} = 0 \quad (2.57)$$

Para esse gauge as equações (2.55) e (2.56) são automaticamente satisfeitas na região externa. Enquanto que a equação (2.54) assume a seguinte forma:

$$h''_{\sigma\nu} - 2[2\kappa^2 - 2\kappa\delta(z) + 2\kappa\delta(z - z_c)]h_{\sigma\nu} - a^{-2}\partial^\mu\partial_\mu h_{\sigma\nu} = 0. \quad (2.58)$$

No intervalo $0 < z < z_c$ esta equação se reduz a

$$h''_{\sigma\nu} - 4\kappa^2 h_{\sigma\nu} - a^{-2}\partial^\mu\partial_\mu h_{\sigma\nu} = 0 \quad (2.59)$$

E integrando (2.58) em torno dos pontos $z = 0$ e $z = z_c$, obtemos respectivamente as seguintes equações:

$$(h'_{\sigma\nu} + 2\kappa h_{\sigma\nu})|_{z=0} = 0 \quad (2.60a)$$

$$(h'_{\sigma\nu} + 2\kappa h_{\sigma\nu})|_{z=z_c} = 0. \quad (2.60b)$$

As equações (2.60a) e (2.60b) podem ser entendidas como condições de contorno para a equação (2.58). Portanto, uma solução que satisfaça à equação (2.58) deve satisfazer simultaneamente as equações (2.59), (2.60a) e (2.60b). Essas duas últimas, como veremos a seguir, vão resultar na quantização do espectro de massa dos grávitons vistos pelos observadores quadrimensionais [2].

Para resolver a equação (2.59) vamos utilizar o método de separação de variáveis, escrevendo $h_{\sigma\nu}(x, z) = \Psi(z)\Phi_{\sigma\nu}(x)$. Podemos verificar que (2.59) possui solução se existir uma constante C tal que

$$\Psi''(z) - 4\kappa^2\Psi(z) + Ca^{-2}\Psi(z) = 0 \quad (2.61)$$

$$\square\Phi_{\sigma\nu}(x) + C\Phi_{\sigma\nu}(x) = 0, \quad (2.62)$$

onde \square é operador D'Lambertiano

É possível mostrar que os valores que a constante de separação C pode assumir são positivos de modo que podemos escrever $C = m^2$. Logo a equação (2.62) fica

$$\square\Phi_{\sigma\nu}(x) + m^2\Phi_{\sigma\nu}(x) = 0. \quad (2.63)$$

Essa equação é uma equação de Klein-Gordon para o campo $\Phi_{\sigma\nu}(x)$ com massa m . Como o campo $\Phi_{\sigma\nu}(x)$ depende das coordenadas da brana podemos interpretá-lo como um gráviton (uma perturbação linear da métrica) de massa m , que pode ser visto pelos observadores confinados na brana. O conjunto de valores de m constituem o espectro dos modos KK [75].

A equação (2.61) fica escrita como

$$\Psi''(z) - 4\kappa^2\Psi(z) + \frac{m^2}{a^2}\Psi(z) = 0 \quad (2.64)$$

Tomando $m = 0$, obtemos uma solução particular importante da equação (2.64). Temos então:

$$\Psi(z) = C_0 e^{-2\kappa|z|}, \quad (2.65)$$

onde C_0 é uma constante de normalização. Essa solução é chamada de modo zero ($m = 0$). Através dela podemos recuperar o comportamento quadridimensional do campo gravitacional, para grandes distâncias, na brana.

Para $m \neq 0$, fazendo a seguinte mudança de coordenadas $x = \frac{m}{\kappa}e^{\kappa z}$, podemos escrever (2.64) da seguinte forma:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\Psi(x)}{dx} + \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)\Psi(x) = 0 \quad (2.66)$$

Esta equação apresenta a forma de uma equação diferencial de Bessel com índice $n = 2$, cuja solução mais geral é dada por [4]:

$$\Psi_{(m)}(z) = AJ_2\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z}\right) + BN_2\left(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z}\right), \quad (2.67)$$

onde $J_2(z)$ e $N_2(z)$ são as funções de Bessel de ordem 2 de primeira e segunda espécies,

respectivamente. As constantes A e B , podem ser determinadas impondo as condições de contorno (2.60a) e (2.60b) em $z = 0$ e $z = z_c$.

Para a primeira condição em $z = 0$, a solução pode ser escrita como

$$\Psi(z) = C_m \left[J_1 \left(\frac{m}{\kappa} \right) N_2 \left(\frac{m}{\kappa} e^{\kappa z} \right) - N_1 \left(\frac{m}{\kappa} \right) J_2 \left(\frac{m}{\kappa} e^{\kappa z} \right) \right], \quad (2.68)$$

onde C_m é uma constante de normalização.

Impondo a segunda condição de contorno em $z = z_c$, obtemos:

$$\frac{J_1 \left(\frac{m}{\kappa} e^{\kappa z_c} \right)}{N_1 \left(\frac{m}{\kappa} e^{\kappa z_c} \right)} = \frac{J_1 \left(\frac{m}{\kappa} \right)}{N_1 \left(\frac{m}{\kappa} \right)}. \quad (2.69)$$

Os valores permitidos de m são as raízes de (2.69), sendo assim o espectro de massa dos grávitons será dado pelo conjunto de soluções desta equação.

Podemos mostrar que, para as primeiras raízes temos:

$$m_1 \simeq \kappa e^{-\kappa z_c} \quad (2.70)$$

Assim, percebemos que a massa dos grávitons depende de comprimento da dimensão extra. Portanto, se escolhermos z_c suficientemente pequeno, e κ suficientemente grande, a massa do primeiro modo KK seria muito grande de tal maneira que a energia necessária para excitá-lo estaria fora do alcance dos nossos instrumentos. Isso implicaria que apenas grávitons sem massa poderiam ser vistos por um observador quadridimensional que habita na brana. Então, um espaço-tempo com apenas uma dimensão extra é compatível com os dados observacionais na escala de energia dos aceleradores de partículas atuais.

2.3.2 Modelo RSII

No modelo RSII, a brana de tensão negativa localizada em z_c é afastada a uma distância infinita da brana de tensão positiva e desta maneira a dimensão extra deixa de ser compacta e passa assim a ser uma dimensão extra de comprimento infinito

[67]. Uma vez que fazemos $z_c \rightarrow \infty$, neste modelo, verificamos que ao contrário do que ocorre no modelo RSI , onde o espectro de massa dos grávitons (modos KK) é discreto e a massa do 1º modo KK a massa era dada por $m \sim \kappa e^{-\kappa z_c}$. Aqui não existem mais saltos entre as massas dos modos KK , ou seja, o espectro de massa torna-se contínuo. Nesse caso, a primeira vista, poderíamos pensar que os grávitons de massa pequena seriam acessíveis a baixas energias e isso colocaria a teoria em conflito com os testes experimentais. No entanto, como veremos, devido a existência de um modo zero normalizável, o campo gravitacional recupera o comportamento quadrimensional para longas distâncias. Então, com o intuito de verificar isso, podemos calcular o potencial gravitacional newtoniano produzido por um objeto massivo sobre a brana e verificaremos os efeitos da dimensão extra sobre este potencial.

Modos KK Contínuos

Vamos iniciar nossa discussão considerando a normalização das funções de onda que descrevem os modos KK que são dados pelas soluções da equação (2.61). Esta equação pode ser vista como uma equação de autovalores de um operador de Sturm-Liouville. De acordo com a teoria de Sturm-Liouville, as autofunções associadas a autovalores discretos são normalizáveis e aquelas associadas a autovalores contínuos podem ser normalizadas no sentido distribucional, ou seja, segundo a delta de Dirac [67].

Se supomos que não há informação vindo do infinito em direção a brana, ou seja, as autofunções devem ser finitas no limite $z \rightarrow \infty$, é possível mostrar que todos os autovalores devem ser não-negativos [35].

Outra característica fundamental é a existência do modo zero normalizável. De fato, para $m = 0$, encontramos a seguinte solução

$$\Psi_0(z) = \sqrt{2\kappa} e^{-2\kappa z} \tag{2.71}$$

tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_0(z)|^2 dz = 1 \quad (2.72)$$

onde $\sqrt{2\kappa}$ é a constante de normalização.

Para os modos KK com massa, as autofunções normalizáveis são dadas por [67, 75]:

$$\Psi_m(z) = \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \frac{[J_1(\frac{m}{\kappa})N_2(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z}) - N_1(\frac{m}{\kappa})J_2(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z})]}{\sqrt{J_1(\frac{\kappa}{m})^2 + N_1(\frac{\kappa}{m})^2}} \quad (2.73)$$

Função de Green

Para determinar o comportamento do campo gravitacional produzido por um corpo confinado na brana devemos estudar, usando o método da função de Green, a solução da equação não homogênea

$$[\partial_z^2 - 2(2\kappa^2 - 2\kappa\delta(z)) + a^{-2}\square^{(4)}] h_{\mu\nu} = \Sigma_{\mu\nu} \quad (2.74)$$

o termo $\Sigma_{\mu\nu}$ faz o papel de fonte para $h_{\mu\nu}$ mas não deve ser confundido com o tensor energia-momento da matéria.

Segundo o formalismo da função de Green, a solução da equação (2.74) é dada por:

$$h_{\mu\nu} = \int dz' d^4x' G(x, z; x', z') \Sigma_{\mu\nu} \quad (2.75)$$

onde $G(x, z; x', z')$ é a função de Green que é solução da seguinte equação

$$[\partial_z^2 - 2[2\kappa^2 - 2\kappa\delta(z)] + a^{-2}\square^{(4)}] G(x, z; x', z') = \delta^4(x - x')\delta(z - z') \quad (2.76)$$

A função de Green pode ser construída, segundo a teoria de Sturm-Liouville, a partir das soluções da equação homogênea, que são obtidas a partir da equação (2.76) pelo método da separação de variáveis

$$\square\Phi_{\sigma\nu}(x) - m^2\Phi_{\sigma\nu}(x) = 0 \quad (2.77a)$$

$$\Psi''(z) - 2[2\kappa^2 - 2\kappa\delta(z)]\Psi(z) + \frac{m^2}{a^2}\Psi(z) = 0 \quad (2.77b)$$

Um resultado extremamente importante dessa teoria é o de que o conjunto completo das autofunções forma uma base completa para o espaço de funções normalizáveis e que satisfazem as mesmas condições de contorno das autofunções [63, 64].

As autofunções associadas à equação (2.77a) são dadas pelas ondas planas $\frac{1}{(2\pi)^4} \exp(iK_\mu x^\mu)$ com $k_\mu k^\mu = m^2$. Para a equação (2.77b), vimos que as autofunções associadas, já normalizadas são dadas por:

$$u_0(z) = \sqrt{2\kappa} e^{-\kappa z} \quad (2.78a)$$

$$u_m(z) = \sqrt{\frac{m}{\kappa}} \frac{[J_1(\frac{m}{\kappa})N_2(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z}) - N_1(\frac{m}{\kappa})J_2(\frac{m}{\kappa}e^{\kappa z})]}{\sqrt{J_1(\frac{\kappa}{m})^2 + N_1(\frac{\kappa}{m})^2}} \quad (2.78b)$$

Então, as funções $\frac{1}{(2\pi)^4} \exp(ik_\mu x^\mu) u_m(z)$ constituem uma base para as funções em cinco dimensões. E nesta base a função de Green pode ser escrita como [63, 64]

$$G(x, z; x', z') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} b_{(0k)} u_0(z) e^{ik_\mu x^\mu} + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} dm b_{(mk)} u_m(z) e^{ik_\mu x^\mu} \quad (2.79)$$

Os coeficientes $b_{(0k)}$ e $b_{(mk)}$, podem ser determinados por meio da equação (2.76) e isso nos permite obter a função de Green independente do tempo [67, 75]

$$G(x, z; x', z') = \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{R}\right) \kappa e^{-2\kappa(z+z')} + \int_0^\infty dm u_m(z) u_m(z') \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mR}}{R}\right) \quad (2.80)$$

onde $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$. Veja que por causa do modo zero ($m = 0$), recuperamos o potencial Newtoniano que cai com o inverso da distância. Já para os modos massivos, a função de Green cai exponencialmente com a distância.

Consideremos, agora, uma partícula com massa localizada na brana em $z = 0$ [67]. O potencial estático gerado pela partícula, devido aos grávitons de modo zero e de modo contínuo do espectro KK , num ponto sobre a brana ($z' = 0$), será obtido por meio de (2.80), ou seja,

$$G(x, 0; x', 0) = -\frac{\kappa}{4\pi R} - \frac{1}{4\pi R} \int_0^\infty dm [u_m(0)]^2 e^{-mR} \quad (2.81)$$

onde $u_m(0)$ são os autos-estados dos modos KK avaliados na brana, dados por (2.78b).

Para calcular o potencial num ponto sobre a brana distante da fonte devemos admitir que $R \gg \kappa^{-1}$. Uma vez que a exponencial em (2.81) é decrescente, a integral é significativa apenas para $m < m^*$ onde m^* é da ordem de $1/R$. Assim, temos,

$$\kappa R \gg 1 \quad (2.82a)$$

$$mR < m^* R \sim 1 \quad (2.82b)$$

Essa condição implica que na integral (2.81) podemos admitir que $m/\kappa \ll 1$. Sendo assim, podemos expandir as funções de Bessel para pequenos argumentos. Logo em primeira aproximação em ordem de m/κ , temos

$$[u_m(0)]^2 = \frac{m}{\kappa} \quad (2.83)$$

Assim, integrando (2.81), obtemos finalmente, a função de Green:

$$G(x, z; x', z') = -\frac{\kappa}{4\pi R} \left[1 - \frac{1}{\kappa^2 R^2} \right] \quad (2.84)$$

Interpretamos a função de Green (2.84) como sendo o potencial gerado por um objeto massivo localizada na brana. Verificamos que a função de Green devido o modo zero, recupera o caráter quadrimensional mais um termo de correção para o potencial gravitacional para longas distâncias [67]. Essa correção se deve a contribuição dos

modo KK com massa e surge como um efeito da dimensão extra.

2.4 O modelo DGP

O modelo DGP foi proposto por Dvali, Gabadadze e Porrati [32] e é também um modelo de branas, onde o nosso universo é imaginado como uma 3-brana imersa em um espaço de Minkowski com 5 dimensões. Nesse modelo, a dimensão extra possui comprimento infinito, como no modelo RSII, mas a dimensão extra é plana. O campo gravitacional se propaga livremente no espaço ambiente de cinco dimensões, no entanto, a Lagrangeana do campo gravitacional é modificada. Como veremos, esta modificação que é induzida pela presença da brana, recupera o comportamento quadridimensional da gravidade dentro de um certo domínio. Curiosamente, ao contrário do que ocorre com os outros modelos de dimensões extras, no modelo DGP, as correções da lei do inverso do quadrado se tornam significativas para grandes escalas.

2.4.1 Gravidade induzida sobre a brana.

Por motivo de simplicidade, vamos omitir os campos de matéria confinados na brana. Desta forma no modelo DGP a gravidade é descrita pela seguinte ação:

$$S = M^3 \int d^5 X \sqrt{\tilde{g}} \tilde{R} + \mu^2 \int d^4 x \sqrt{|g|} R, \quad (2.85)$$

onde M e μ são a massa de Planck em cinco e em quatro dimensões respectivamente.

Se fazemos $M \rightarrow 0$ mantendo μ fixo, a ação descreve a ação da gravidade quadridimensional sobre a brana. Por outro lado, no limite em que $\mu \rightarrow 0$ com M fixo, obtemos a gravidade em cinco dimensões do espaço ambiente. Neste modelo, vamos considerar M e μ finitos.

A parte quadridimensional da gravidade na ação (2.85) pode ter duas origens distintas [32]. A primeira possibilidade é de que existe matéria confinada na brana. Assim, em um sistema de coordenadas apropriado, o tensor energia-momento da matéria assume

a forma,

$$T_{AB} = \begin{pmatrix} T_{\mu\nu}(x)\delta(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

Isto poderia, em certas circunstâncias, induzir correções da ação de Einstein-Hilbert em cinco dimensões, através do cálculo de um loop, que seria equivalente a introdução do termo cinético quadrimensional para a gravitação, ou seja, da ação quadrimensional em (2.85) [32].

A outra possibilidade para explicar a parte quadrimensional da ação (2.85), é supor que ela surge naturalmente a partir do acoplamento entre a gravidade em cinco dimensões com um campo escalar também em cinco dimensões que chamamos de $\chi(z)$, o qual é uma solução do tipo parede de domínio [2].

Uma maneira simples de ilustrar isso, é admitir uma interação entre dois campos escalares 5-D $\phi(z)$ e $\chi(z)$, onde o campo $\phi(z)$ fará o papel da gravidade em cinco dimensões. Portanto, iniciamos com a seguinte densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = M^3(\partial_A\phi)^2 + \mu^2 [(\partial_A\chi)^2(\partial_B\phi)^2 - (\partial_A\phi\partial^A\chi)^2] \quad (2.87)$$

Note que o segundo termo da Lagrangeana acima, nos fornece um termo de interação entre os campos χ e ϕ . Então, (2.87) pode assumir a seguinte forma

$$\mathcal{L} = M^3(\partial_A\phi)^2 + \mu^2\chi'^2(\partial_\mu\phi)^2 \quad (2.88)$$

aqui a linha denota a derivada com respeito à z [32].

Se o campo escalar $\chi(z)$ é uma solução do tipo parede de domínio, ou seja

$$\chi(z) = \nu \tanh(\nu z), \quad (2.89)$$

então, a partir de sua derivada primeira com relação a z , obtemos que

$(\chi')^2 = \nu \sec h^4(\nu z)$. Esta função pode ser vista, de modo idealizado, como uma função delta de Dirac. E assim, (2.88), pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = M^3(\partial_A\phi)^2 + \mu^2\delta(z)(\partial_\mu\phi)^2. \quad (2.90)$$

A partir dessa Lagrangeana podemos escrever a ação

$$S = M^3 \int d^4x dz \partial_A\phi(x, z)\partial^A\phi(x, z) + \mu^2 \int d^4x \partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x). \quad (2.91)$$

Portanto, verificamos que a parte quadridimensional da ação do modelo DGP, surge a partir de uma interação com o campos escalares $\phi(z)$ e $\chi(z)$. De maneira semelhante, a ação (2.85) pode ser obtida a partir da interação entre o campo gravitacional 5-D e o campo $\chi(z)$.

2.4.2 Função potencial do campo escalar

Desejamos, agora, determinar a dependência com a distância das interações que são mediadas por um campo escalar numa teoria descrita pela ação (2.91). Isso será feito através do cálculo da função de Green. A função de Green deve ser solução da seguinte equação

$$[M^3\partial_A\partial^A + \mu^2\delta(z)\partial_\mu\partial^\mu] G(x, z; 0, 0) = \delta^{(4)}(x)\delta(z) \quad (2.92)$$

onde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

A equação (2.92), pode ser resolvida se utilizarmos o método da transformada de Fourier. Desta forma a função de Green fica escrita como

$$G(x, z; 0, 0) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip_\mu x^\mu} \tilde{G}(p, z), \quad (2.93)$$

onde $p \equiv \sqrt{p^2} = \sqrt{p_4^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$, é o quadri-momento associado ao campo.

Desta maneira, substituindo (2.93) em (2.92), ficamos com a seguinte equação

[32, 38]

$$(M^3(p^2 - \partial_z^2) + \mu^2 p^2 \delta(z)) \tilde{G}_R(p, z) = \delta(z). \quad (2.94)$$

e que tem como solução

$$\tilde{G}_R(p, z) = \frac{1}{\mu^2 p^2 + 2M^3 p} \exp(-p|z|). \quad (2.95)$$

Assim, para um caso estático, o potencial em um ponto sobre a brana é dado por

$$V(r) = \int G(t, \vec{x}, z = 0; 0, 0, 0) dt, \quad (2.96)$$

Então, por meio da (2.93) encontramos que o potencial medido pelo campo ϕ sobre a brana é dado por

$$V(r) = -\frac{1}{8\pi^2 \mu^2} \frac{1}{r} \left\{ \sin\left(\frac{r}{r_c}\right) \text{Ci}\left(\frac{r}{r_c}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{r}{r_c}\right) \left[\pi - \text{Si}\left(\frac{r}{r_c}\right) \right] \right\}, \quad (2.97)$$

onde $\text{Si}(z)$ e $\text{Ci}(z)$ são as funções seno integral e cosseno integral, dadas por

$$\text{Ci}(z) \equiv \gamma + \ln(z) + \int_0^z (\cos(t) - 1) dt/t, \quad (2.98)$$

$$\text{Si}(z) \equiv \int_0^z \sin(t) dt/t, \quad (2.99)$$

e $\gamma \simeq 0,577$ é a constante de Euler-Masceroni.

Naturalmente, surge um comprimento r_c que estabelece a distância a partir da qual as correções nas leis de Newton são perceptíveis. É possível demonstrar que r_c é dado por:

$$r_c = \frac{\mu^2}{2M^3} \quad (2.100)$$

Desta forma, é possível estimar o valor de r_c . Sabendo que $\mu \simeq 10^{19} GeV$, podemos

escolher, motivados pelo problema da hierarquia, a massa de Planck em cinco dimensões como sendo $M \sim 1 \text{ TeV}$, isso nos fornece que r_c é da ordem do tamanho do sistema solar. Nessa escala de distância, as leis de Newton são bem estabelecidas. Assim, para que não haja contradição com os dados observados, devemos escolher r_c suficientemente grande. Vamos, então, investigar isso.

Para curtas distâncias $r \ll r_c$, a equação (2.97) assume a seguinte forma

$$V(r) \simeq -\frac{1}{8\pi^2\mu^2} \frac{1}{r} \left\{ \frac{\pi}{2} + \left[-1 + \gamma + \ln\left(\frac{r}{r_c}\right) \right] \left(\frac{r}{r_c}\right) + \mathcal{O}(r^2) \right\}. \quad (2.101)$$

Podemos verificar que neste domínio recobramos o potencial Newtoniano quadridimensional mais um termo de correção logarítmico repulsivo.

Para grandes distâncias $r \gg r_c$, o potencial será

$$V(r) \simeq -\frac{1}{8\pi^2\mu^2} \frac{1}{r} \left\{ \frac{r_c}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \right\}, \quad (2.102)$$

Logo, para grandes distâncias o potencial cai com $1/r^2$, apresentando, portanto, o comportamento de um campo em cinco dimensões. Se admitimos que r_c é suficientemente grande (escala cosmológica), então, esse modelo não entra em contradição com a teoria Newtoniana [32].

2.4.3 Campo Gravitacional no modelo DGP

Com base nesta analogia, podemos agora estudar o comportamento do campo gravitacional no modelo DGP. Vamos inicialmente introduzir flutuações na métrica de Minkowski 5D [32]

$$g_{AB} = \eta_{AB} + h_{AB}. \quad (2.103)$$

Podemos escolher um gauge no bulk tal que:

$$\partial^A h_{AB} = \frac{1}{2} \partial_B h^C_C \quad (2.104)$$

e

$$h_{\mu z} = 0. \quad (2.105)$$

Neste Gauge é possível mostrar que as equações de Einstein se reduzem a [32]

$$\partial_A \partial^A h_\nu^\nu = \partial_B \partial^B h_z^z \quad (2.106)$$

e

$$(M^3 \partial_A \partial^A + \mu^2 \delta(z) \partial_\alpha \partial^\alpha) h_{\mu\nu}(x, z) = \left\{ T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T_\alpha^\alpha \right\} \delta(z) + \mu^2 \delta(z) \partial_\mu \partial_\nu h_z^z. \quad (2.107)$$

De modo semelhante ao que foi feito na seção anterior, podemos utilizar a transformada de Fourier para encontrar a solução de (2.107)

$$\bar{h}_{\mu\nu}(p, z=0) = \frac{\bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \bar{T} \eta_{\mu\nu}}{\mu^2 p^2 + 2M^3 p}, \quad (2.108)$$

onde $\bar{T}_{\mu\nu}$ é a transformada de Fourier de $T_{\mu\nu}$.

Assim, usando um argumento semelhante ao descrito anteriormente, verifica-se que o potencial Newtoniano é recuperado para pequenas distâncias comparadas com r_c .

Em resumo podemos dizer que a proposta do modelo DGP consiste em adicionar à ação 5D um termo quadrimensional, que corresponde a ação do campo em quatro dimensões. E vimos que, para o caso da gravitação, o potencial Newtoniano é recuperado no domínio $r_c < r$ [2].

2.5 Branhas com Espessura

Nos modelos Randall-Sundrum, o nosso universo é visto como uma brana infinitesimalmente fina (sem espessura) imersa em um espaço ambiente maior (bulk), na qual os campos estão confinados e apenas a gravidade é capaz de se propagar ao longo

do espaço ambiente.

Num contexto onde as branas possuem uma espessura ε , as branas nos modelos RS, podem ser vistas como um caso limite de uma brana cuja espessura ε vai a zero ($\varepsilon \rightarrow 0$).

Apresentaremos aqui um modelo proposto por Hamed *et.al.*[3], no qual a brana possui uma pequena espessura ao longo da dimensão extra. Aqui os campos de gauge e matéria ainda estão confinados na brana. Esse modelo se distingue dos demais pela seguinte característica: os bárions e os léptons do modelo padrão estão presos em diferentes fatias da brana. Nas seções anteriores, apresentamos um modelo de localização de férmions em paredes de domínios em um espaço tempo de 5 dimensões. Apresentaremos a seguir uma generalização desse modelo, para o caso de vários férmions localizados em diferentes fatias da brana. Uma aplicação para esse modelo é o problema do decaimento do próton em uma teoria com 5 dimensões.

2.5.1 Localização de vários férmions

Já vimos nas seções anteriores deste capítulo que por meio da interação entre o campo escalar e o campo de Dirac, podemos confinar os férmions numa parede de domínio. A ação para esse tipo de interação é dada por (2.23) para o caso de um férmion sem massa. Se desejamos generalizar este modelo para uma situação onde existem vários férmions com diferentes massas, a eq. (2.23) assume a seguinte forma

$$S = \int d^4x dz \sum_{ij} (i\bar{\Psi}_i \Gamma^A \partial_A \Psi_j - h_{ij} \phi \bar{\Psi}_i \Psi_j + m_{ij} \bar{\Psi}_i \Psi_j) \quad (2.109)$$

onde m_{ij} são as massas dos campos de férmions enquanto que h_{ij} a constante de acoplamento com o campo escalar. Por simplicidade, admite-se que h_{ij} e m_{ij} são matrizes diagonais, ou seja, $h_{ij} = h\delta_{ij}$, enquanto que m_{ij} é diagonalizável e possui autovalores m_i [3].

Para obter o comportamento dos campos de férmions ao longo da dimensão extra,

devemos realizar o mesmo procedimento para o caso de uma parede de domínio (ver a seção 2 deste capítulo). A equação do movimento será

$$\sum_{ij} (i\bar{\Psi}_i \Gamma^A \partial_A \Psi_j - h\varphi(z) \bar{\Psi}_i \Psi_j) = 0 \quad (2.110)$$

onde escrevemos $\varphi(z) \equiv (\phi - \tilde{m}_i)$, tal que $\tilde{m}_i = m_i/h$. Por razão de simplicidade, a partir de agora vamos suprimir os índices latinos.

Podemos então, resolver a equação acima pelo método de separação de variáveis, de modo que $\Psi(x, z) = \psi(x) f(z)$. Encontramos facilmente que

$$f(z) = \exp \left[-h \int \varphi(z) dz \right] \quad (2.111)$$

Se o campo escalar tem a forma apresentada em (2.15), podemos expandir em torno de $z = 0$ até primeira ordem,

$$\phi(z) \simeq 2v^2 z + \mathcal{O}(z^2) \quad (2.112)$$

onde $v^2 = \frac{\lambda v^2}{4}$. Então, podemos escrever

$$f(z) = \exp \left[-2hv^2 \int (z - r) dz \right] \quad (2.113)$$

temos que $r_i = m_i/2hv^2$.

Integrando a equação acima encontramos que

$$f(z) = c \exp [-hv^2 (z - r)^2] \quad (2.114)$$

onde c é uma constante de normalização.

Vemos então, que as funções de ondas dos férmions ainda são gaussianas, mas agora elas estão localizadas em torno de $z = r$, onde r_i nos fornece as posições dos férmions na brana. Note também que as posições dos diferentes férmions na brana, são fixadas

por meio da massa m_i de cada férmion. Sendo assim, a ação (2.109) descreve um conjunto de férmions 4-D não interagentes localizados em diferentes fatias da brana ao longo da dimensão extra [3].

2.5.2 Decaimento do próton

O próton é uma partícula bastante estável, ou seja, o seu decaimento espontâneo nunca foi observado. No modelo padrão, a estabilidade do próton é imposta estabelecendo-se a lei de conservação do número bariônico.

No presente modelo, em que os léptons estão separados dos bárions ao longo da dimensão extra, a estabilidade do próton é explicada naturalmente, isto é, sem a necessidade de se postular uma lei de conservação.

Como visto anteriormente, os diferentes férmions estão presos em diferentes pontos da brana ao longo da dimensão extra. Vamos considerar aqui o caso onde um próton está preso em uma fatia da brana localizada em $z = 0$, enquanto que um elétron está preso na fatia $z = r$. Para ilustrar a estabilidade do próton nesse modelo, vamos considerar uma interação que poderia violar a conservação do número bariônico. A Lagrangeana que descreve a interação em 5 dimensões tem a seguinte forma [18]

$$\mathcal{L}_B = \frac{(Q^T C_5 L)^\dagger (U^c T C_5 D^c)}{\Lambda^3} \quad (2.115)$$

onde $C_5 = \gamma^0 \gamma^2 \gamma^5$ e os índices T e c representam, respectivamente, o espinor transposto conjugado e o espinor conjugado de carga. Os espinores Q, U, D representam os campos de quarks, enquanto que L representa os campos dos léptons. O espinor $Q^T = \begin{pmatrix} u & d \end{pmatrix}$ é um duplete de quarks, já os espinores $U = u$ e $D = d$, são os singletos de quarks up e down respectivamente. O espinor $L = \begin{pmatrix} \nu_{e^-} \\ e^- \end{pmatrix}$ é um duplete de léptons, onde e^- representa o elétron e ν_{e^-} o neutrino do elétron. A constante Λ possui dimensão de massa e é introduzida com o intuito de manter a ordem da dimensão [18]. Um dos processos que a Lagrangeana (2.115) pode descrever é o decaimento do próton

em um lépton e um méson, mais precisamente em um pion zero e um pósitron, i.e., $p \rightarrow \pi^0 + e^+$.

A ação fica escrita como [3]

$$S \sim \int d^4x dz \frac{(Q^T C_5 L)^\dagger (U^{cT} C_5 D^c)}{\Lambda^3} \quad (2.116)$$

Esta ação viola a conservação do número bariônico em cinco dimensões. Descrevendo assim o decaimento do próton em uma teoria 5-D.

Podemos novamente realizar o procedimento de separação de variáveis, isto é, escrever os campos na forma $\psi(x, z) = \varphi(x) f(z)$, utilizado anteriormente e assim, temos [3]

$$Q = q \cdot f_q \quad (2.117a)$$

$$U^c = u^c \cdot f_u \quad (2.117b)$$

$$D^c = d^c \cdot f_d \quad (2.117c)$$

$$L = l \cdot f_l \quad (2.117d)$$

onde q, u, d e l , são espinores de Dirac em 4-D. As funções da coordenada extra são dadas pela equação (2.114). Assim, para o próton (*quarks*) em $z = 0$ e o elétron em $z = r$, podemos escrever [3]

$$S \sim \int d^4x dz \frac{(ql)^\dagger (u^c d^c)}{\Lambda^2} \left[e^{-v^2 z^2} \right]^3 e^{-v^2(z-r)^2} \quad (2.118)$$

A integral ao longo da dimensão extra nos fornece

$$\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-v^2 h(z-r)^2} \left[e^{-v^2 z^2} \right]^3 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{hv^2}} e^{-\frac{3}{4}v^2 r^2} \quad (2.119)$$

se hv^2 é real e maior que zero.

Logo, a ação 4D que descreve a interação que poderia levar a violação da conser-

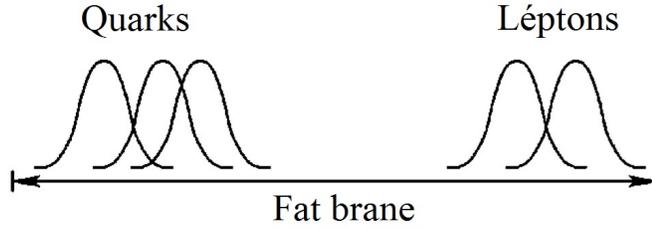


Figura 2.7: Perfil das funções de onda dos férmions do modelo padrão (eixo vertical), na dimensão extra (eixo horizontal). Os férmions se propagam livremente em 3+1 dimensões e estão presos em diferentes posições ao longo da dimensão extra [3].

vação do número bariônico, ficará multiplicada pelo fator δ :

$$\delta = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\hbar v^2}} e^{-\frac{3}{4} v^2 r^2} \quad (2.120)$$

Uma vez que $v^2 = \frac{\lambda v^2}{4}$ e $\lambda = \frac{1}{\varepsilon}$. Para os campos confinados na brana, essa espessura passaria a ser efetivamente o tamanho da dimensão extra. A eq. (2.120) representa um pacote de onda gaussiano ao longo da dimensão extra. Perceba que o desvio padrão desta distribuição é dado por

$$\langle \Delta z^2 \rangle = \frac{1}{v^2} \quad (2.121)$$

Podemos interpretar o desvio padrão da distribuição como sendo a largura do pacote de ondas gaussiano. Sendo assim, se fazemos com que o próton e o elétron estejam separados ao longo da dimensão extra por uma distância 10 vezes maior que a largura do pacote de ondas, ou seja $vr = 10$, encontramos que $\delta \sim 10^{-33}$. Este termo torna irrelevante a interação de violação do número bariônico quadrimensional, mesmo para Λ da ordem de $1TeV$ [3]. Assegurando desta forma, a estabilidade do próton.

Capítulo 3

Buracos Negros em Branas

O cenário das branas, tem sido objeto de estudos nos últimos anos, uma vez que ele levanta a possibilidade de que o universo no qual vivemos pode ser visto como uma brana inserida em um espaço ambiente maior. É neste cenário que desejamos investigar soluções de buracos negros em branas. Apesar do grande número de trabalhos a esse respeito terem surgido nos últimos anos, uma solução exata que descreva um buraco negro em uma brana no modelo Randall-Sundrum ainda não foi encontrada.

Uma motivação para se estudar buracos negros no cenário de branas está no fato de que esses objetos podem produzir efeitos que, em princípio, poderiam revelar a existência de dimensões extras. Isso pode ser realizado, por exemplo, por meio dos testes clássicos da Relatividade Geral, os quais serão tratados no próximo capítulo.

Neste capítulo, iremos discutir dois tipos de soluções para buracos negros em branas do tipo RSII. A primeira delas, obtida em [39] por Garriga e Tanaka, fornece uma solução aproximada do campo gravitacional criado por um objeto massivo (fonte do campo) na brana. A outra solução, trata-se de uma solução exata e foi obtida por Dadhich *et al.* [27], conhecida como buraco negro DMPR. Esta solução tem uma característica interessante, ela possui a forma matemática da solução de Reissner-Nördstrom da RG, mas no lugar da carga elétrica aparece uma carga de maré que surge devido aos efeitos da dimensão extra. Apesar de ser exata, a solução DMPR é incompleta, por que não descreve a geometria do espaço ambiente, mas apenas da

brana. Por fim apresentaremos brevemente algumas soluções existentes na literatura, que buscam descrever buracos negros em branas tipo RSII, entre as quais podemos citar a solução numérica para pequenos buracos negros na brana, obtida por Kudoh *et al.* [61]. Mais recentemente Figueiras e Wiseman [36] e posteriormente de forma independente, Abdolrahimi *et al.* [1], encontraram soluções numéricas para buracos negros na brana onde o raio do horizonte é grande quando comparado com o raio do espaço ambiente.

3.1 Solução de Garriga e Tanaka

Nesta seção pretendemos discutir uma solução aproximada do campo gravitacional gerado por um corpo massivo localizado em uma brana. Esta é uma solução conhecida na literatura e foi obtida por Garriga e Tanaka [39]. Neste contexto, podemos esperar que, no limite de campo fraco, a solução obtida na brana será diferente da solução de Schwarzschild da Relatividade Geral, devido à influência da dimensão extra.

No capítulo anterior, vimos que a perturbação do campo gravitacional $h_{\mu\nu}$ (eq. (2.74)) nas coordenadas RS , tem como fonte o tensor $\Sigma_{\mu\nu}$. Desejamos agora estabelecer uma relação entre a fonte da perturbação do campo gravitacional no gauge RS , com $T_{\mu\nu}$, o tensor energia-momento da matéria dado nas coordenadas Gaussianas. Consideremos a equação de campo para $h_{\mu\nu}$, nas coordenadas Gaussianas (\bar{x}^μ, \bar{z}) . Nas coordenadas Gaussianas adaptadas à brana, a localização da brana é descrita pela equação $\bar{z} = 0$, mesmo com a perturbação, pois admitimos que $h_{Az} = 0$. Nestas coordenadas, os campos são simétricos com relação a \bar{z} , uma vez que \bar{z} mede a distância transversal de um ponto com respeito a brana [39, 75].

Utilizando a condição de junção de Israel, obtemos uma relação de descontinuidade entre a curvatura extrínseca $[K_{\mu\nu}]$ da brana e o conteúdo energético distribuído na brana (descrito por $S_{\mu\nu}$), onde $[K_{\mu\nu}] = \lim_{\bar{z} \rightarrow +0} K_{\mu\nu} - \lim_{\bar{z} \rightarrow -0} K_{\mu\nu} = K_{\mu\nu}^+ - K_{\mu\nu}^-$. Como estamos preocupados apenas com o conteúdo energético distribuído sobre a brana, então, devido a simetria Z_2 , podemos avaliar as quantidades em ambos os lados da

brana, ou seja, podemos fazer $K_{\mu\nu}^+ = -K_{\mu\nu}^-$ [79]. Logo, para o lado positivo da brana, podemos escrever $[K_{\mu\nu}] = 2K_{\mu\nu}^+$. Assim, temos

$$2K_{\mu\nu}^+ = -8\pi G_5 \left(S_{\mu\nu} - \frac{1}{3}g_{\mu\nu}S \right) \quad (3.1)$$

Uma vez que $\kappa = 1/\ell$, ou seja, κ é o inverso do raio de curvatura do espaço AdS, o fator warping dado por (2.45) fica escrito da seguinte forma: $a(z) = e^{-2z/\ell}$. Assim, a métrica induzida na hipersuperfície $z = cte$ será $g_{\mu\nu} = e^{-2z/\ell}\eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}$.

Uma vez que a curvatura extrínseca da brana nas coordenadas gaussianas é dada por

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_z g_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

em $\bar{z} = 0$ temos que

$$K_{\mu\nu} = -\frac{2}{\ell}\eta_{\mu\nu} + \partial_z \bar{h}_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

Por sua vez, o conteúdo energético distribuído na brana, pode ser dividido em duas partes, a primeira parte será a tensão da brana σ e a outra parte será o tensor energia-momento de um corpo massivo na brana [81]:

$$S_{\mu\nu} = -\sigma g_{\mu\nu}^0 + T_{\mu\nu} \quad (3.4)$$

onde $g_{\mu\nu}^0$ é a métrica induzida na brana ($\bar{z} = 0$).

Desprezando os termos de segunda ordem, o traço do tensor energia-momento da brana é então calculado

$$S = -\sigma\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} + T_{\mu}^{\mu} \quad (3.5)$$

onde baixamos e subimos os índices com $g_{\mu\nu}^0 = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}$.

Portanto, a partir da condição de junção, obtemos a seguinte equação

$$\left(\frac{2}{\ell} + \partial_z\right) \bar{h}_{\mu\nu} = -8\pi G_5 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T\right) \quad (3.6)$$

Esta equação nos dá então uma relação do campo $\bar{h}_{\mu\nu}$ com o tensor energia-momento confinado na brana, nas coordenadas Gaussianas [39, 75].

Devemos lembrar que o gauge RS, tem $h_{\mu}^{\mu} = 0$. Sendo assim, a partir de (3.6), podemos verificar que esta condição não é necessariamente satisfeita. Logo, podemos concluir que os gauge Gaussiano e RS não coincidem. No entanto, podemos encontrar a transformação de coordenadas entre eles explicitamente e obter a relação entre $\bar{h}_{\mu\nu}$ e $h_{\mu\nu}$ (ver apêndice).

3.1.1 O Campo Gravitacional

Sabemos que $h_{\mu\nu}$ é a perturbação do campo gravitacional no gauge *RS*, sendo assim, podemos dividi-lo em duas partes, uma contribuição referente ao corpo massivo e a outra devido ao desvio da brana. Então

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(mat)} + \frac{2}{\ell} e^{-2|z|/\ell} \eta_{\mu\nu} \xi^z + h_{\mu\nu}^{(\xi)} + \ell \partial_{\mu} \partial_{\nu} \xi^z - 2e^{-2z/\ell} \partial_{(\mu} \eta_{\nu)\alpha} F^{\alpha} \quad (3.7)$$

como vimos na seção (2.3.2), $h_{\mu\nu}$ é uma solução de (2.74), esta solução pode ser obtida por meio do método da função de Green. De fato, temos

$$h_{\mu\nu} = -2 \int d^4x' dz' G(x, z; x', z') \Sigma_{\mu\nu}(x') \delta(z') \quad (3.8)$$

de forma que podemos escrever:

$$h_{\mu\nu}^{(mat)} = -16\pi G_5 \int d^4x' dz' G(x, z; x', z') \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T\right) \quad (3.9a)$$

$$h_{\mu\nu}^{(\xi)} = -4 \int d^4x' dz' G(x, z; x', z') \partial_{\mu} \partial_{\nu} \xi^z \quad (3.9b)$$

onde fizemos uso do fato de que

$$\Sigma_{\mu\nu} = 8\pi G_5 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T \right) + 2\partial_\mu \partial_\nu \xi^z \quad (3.10)$$

Podemos escolhemos $F^\alpha(x^\alpha)$ de forma que os 3 últimos termos em (3.7) se anulem em $z = 0$ [81]. Assim, em $z = 0$ a perturbação adquire a seguinte expressão

$$\bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G_5 \int d^4 x' G(x, 0; x', 0) \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T \right) + \frac{2}{\ell} \eta_{\mu\nu} \xi^z \quad (3.11)$$

3.1.2 Métrica estática e com simetria esférica na brana

Como aplicação, podemos considerar agora a existência de um objeto massivo e sem rotação na brana. O espaço-tempo em torno desse objeto será deformado, o que irá provocar uma perturbação na métrica do espaço-tempo. Vamos portanto calcular essa perturbação [39, 75]. O tensor energia momento de um corpo com uma massa M localizado na brana é dado por

$$T_{\mu\nu} = M \delta^{(3)}(\vec{x}) \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \quad (3.12)$$

É facilmente visto que o traço de $T_{\mu\nu}$ é

$$T = -M \delta^{(3)}(\vec{x}) \quad (3.13)$$

Desta forma, em 3 dimensões, a equação (A13) assume a seguinte forma

$$\nabla^2 \xi^z = -\frac{4\pi G_5}{3} M \delta^{(3)}(\vec{x}) \quad (3.14)$$

Sabemos que

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi \delta(\vec{x}) \quad (3.15)$$

Portanto

$$\xi^z = \frac{G_5 M}{3r} \quad (3.16)$$

onde definimos $r = |\vec{x}|$

Como vimos, a perturbação da métrica no gauge RS é dividida em duas partes, uma referente à matéria na brana e a outra devido ao desvio da brana [75, 81]. A parte da perturbação que diz respeito à matéria é dada por (3.9a). Utilizando a função de Green estacionária (2.84), temos:

$$h_{\mu\nu}^{(mat)} = -16\pi G_5 \int d^3 x' G(x, 0; x', 0) \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T \right) \quad (3.17)$$

Para o tensor energia-momento dado em (3.12), temos

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T \right) = \left(\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 + \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} \right) M \delta^{(3)}(\vec{x}) \quad (3.18)$$

Portanto, (3.17) fica escrito como

$$h_{\mu\nu}^{(mat)} = \frac{4G_5 M}{\ell r} \left(1 + \frac{\ell^2}{2r^2} \right) \left(\delta_\mu^0 \delta_\nu^0 + \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} \right) \quad (3.19)$$

Substituindo (3.16) e (3.19) em (3.11). Encontramos então, a perturbação do campo gravitacional gerada por um objeto de massa M nas coordenadas Gaussianas adaptadas à brana.

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{2G_5 M}{\ell r} \left[\left(1 + \frac{\ell^2}{3r^2} \right) \eta_{\mu\nu} + \left(2 + \frac{\ell^2}{r^2} \right) \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \right] \quad (3.20)$$

Se consideramos que $G_4 = G_5/\ell$, temos portanto

$$\bar{h}_{00} = \frac{2G_4 M}{r} \left[\left(1 + \frac{2\ell^2}{3r^2} \right) \right] \quad (3.21)$$

e

$$\bar{h}_{ij} = \frac{2G_4M}{r} \left[\left(1 + \frac{\ell^2}{3r^2} \right) \delta_{ij} \right] \quad (3.22)$$

Assim, o elemento de linha no gauge de área será:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G_4M}{r} - \frac{4G_4M\ell^2}{3r^3} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{2G_4M}{r} + \frac{2G_4M\ell^2}{r^3} \right)} - r^2 d\Omega^2 \quad (3.23)$$

Observamos que temos o potencial com a dependência de $1/r$ mais o termo de correção de ordem $1/r^2$ [39]. Recuperamos assim, o resultado da Relatividade Geral no limite de campo fraco, para longas distâncias. Observe que na expressão (3.23), o termo adicional é o termo de correção para o potencial devido a dimensão extra.

3.2 Solução DMPR

Já vimos no capítulo anterior que as equações de Einstein em um espaço-tempo de 5 dimensões são dadas por (2.46)

$$\hat{R}_{AB} - \frac{1}{2}\hat{g}_{AB}\hat{R} = T_{AB}.$$

A métrica induzida na brana é dada por $g_{AB} = \hat{g}_{AB} - n_A n_B$, onde n_A é um vetor unitário normal à brana. O tensor energia-momento T_{AB} assume a seguinte forma:

$$T_{AB} = \Lambda \hat{g}_{AB} + 8\pi G_5 \tau_{AB}, \quad (3.24)$$

onde Λ e G_5 são as constantes cosmológica e gravitacional do espaço 5-D e τ_{AB} o termo que descreve a matéria e energia localizada nas branas.

Por meio das equações de Gauss-Codazzi, que estabelecem condições de compatibilidade entre a geometria da hipersuperfície e do espaço ambiente, é possível escrever o tensor de Einstein definido na brana (${}^{(4)}G_{\mu\nu}$) em termos do tensor penta-dimensional ${}^{(5)}G_{\mu\nu}$. Desta forma, Shiromizu *et al.* [79], encontraram, a partir de (2.46), uma equação de campo induzida na brana. Levando em conta a simetria Z_2 , eles ve-

rificaram que, em relação as equações de Einstein usuais, as equações induzidas apresentam modificações devido os efeitos do bulk sobre a brana. As equações de campo na brana ficam escritas como [79]:

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 g_{\mu\nu} + 8\pi G_5 T_{\mu\nu} + k_5^4 \mathcal{S}_{\mu\nu} - E_{\mu\nu} \quad (3.25)$$

onde as constantes cosmológicas em 4 e 5 dimensões estão relacionadas por

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2} k_5^2 \left(\Lambda - \frac{1}{3} k_5^2 \lambda \right) \quad (3.26)$$

enquanto que as constantes $k_4^2 = 8\pi G$ e $k_5^2 = 8\pi G_5$ são dadas

$$k_4^2 = \sigma \frac{k_5^2}{6} \quad (3.27)$$

Observamos dois tipos de correções nas equações de Einstein. As contribuições devido aos campos de matéria existentes na brana, surgem nas equações de campo via o tensor $S_{\mu\nu}$ e são correções quadráticas do tensor energia-momento da matéria.

$$\mathcal{S}_{\mu\nu} = \frac{1}{12} T T_{\mu\nu} - \frac{1}{4} T_{\mu\alpha} T_{\nu}^{\alpha} + \frac{1}{8} g_{\mu\nu} T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} - \frac{1}{24} g_{\mu\nu} T^2 \quad (3.28)$$

O outro tipo de contribuição vem dos efeitos do campo gravitacional livre no bulk. Esses efeitos surgem como uma projeção do tensor de Weyl do bulk sobre a brana que é identificado pelo tensor $E_{\mu\nu}$, o qual carrega informações sobre o campo gravitacional fora da brana. A projeção do tensor de Weyl do bulk é construída da seguinte forma:

$$E_{AB} = C_{ACBD} n^C n^D \quad (3.29)$$

Esse tensor é simétrico, possui traço nulo e não possui componentes ortogonais à brana, ou seja, $E_{AB} n^A = 0$.

Considerando que $E_{\mu\nu}$, faz um papel de fonte para a gravitação, podemos tratá-lo

como um tensor energia momento de um fluido e, desta forma, decompô-lo irreduzivelmente, com respeito a um campo de 4-velocidades u^μ , de maneira usual, ou seja, podemos escrever

$$E_{\mu\nu} = - \left(\frac{k_5}{k_4} \right)^4 \left[\mathcal{U} u_\mu u_\nu + \frac{P}{3} E_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu} + 2\Phi_{(\mu} u_{\nu)} \right] \quad (3.30)$$

onde $h_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}$, projeta ortogonalmente a u_μ , Φ_μ é um quadri-vetor ortogonal a u^μ ($\Phi_\mu u^\mu = 0$), o tensor $\Pi_{\mu\nu}$ é ortogonal a u^μ ($\Pi_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0$) e tem traço nulo.

Podemos, então, dar uma interpretação física ao conteúdo do tensor $E_{\mu\nu}$, oriundos dos efeitos do bulk sobre a brana, temos que

$$\mathcal{U} = - \left(\frac{k_4}{k_5} \right)^4 E_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \quad (3.31)$$

É um escalar e pode ser interpretado como uma densidade de energia efetiva na brana, medida por observadores com 4-velocidade u^μ . Como ela é um efeito da geometria do bulk, então, essa densidade de energia não precisa ser necessariamente positiva.

$$P = - \left(\frac{k_4}{k_5} \right)^4 E_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \quad (3.32)$$

É a pressão do fluido.

O tensor $\Pi_{\mu\nu}$ pode ser interpretado como um tensor de pressão de anisotropia, na brana e, por último,

$$\Phi_\mu = - \left(\frac{k_4}{k_5} \right)^4 h_\mu^\nu E_{\nu\alpha} u^\alpha \quad (3.33)$$

é um campo vetorial que pode ser interpretado como um fluxo de energia. Como veremos, no vazio e no caso estático, podemos fazer $\Phi_\mu = 0$.

3.2.1 Tensor Energia-Momento

A equação de Einstein modificada pode ainda ser escrita da seguinte forma

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 g_{\mu\nu} + k_4^2 T_{\mu\nu}^{tot} \quad (3.34)$$

onde

$$T_{\mu\nu}^{tot} = T_{\mu\nu} + \frac{k_5^4}{k_4^2} S_{\mu\nu} - \frac{1}{k_4^2} E_{\mu\nu} \quad (3.35)$$

é o tensor energia-momento efetivo na brana, que contém as contribuições do campo de matéria local na brana e os efeitos devido à gravidade livre no espaço ambiente.

É bem conhecido na literatura que para um campo de matéria livre de forças externas, a derivada covariante do tensor energia-momento desse campo de matéria é igual à zero, sendo assim, na brana, temos que $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ (onde ∇^μ representa a derivada covariante na brana). Essa equação nos fornece uma lei de conservação para o tensor energia momento. Portanto, a contração da identidade de Bianchi na brana ($\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$), nos garante que o tensor energia-momento efetivo também será conservado, ou seja

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{tot} = 0 \quad (3.36)$$

Isso implica que a projeção do tensor de Weyl, deve obedecer a seguinte equação

$$\nabla^\mu E_{\mu\nu} = k_5^4 S_{\mu\nu} \quad (3.37)$$

Esta equação nos diz que as correções de segunda ordem dos campos de matéria na brana geram efeitos gravitacionais no bulk, que por sua vez voltam a interagir com a brana [42]. Mais adiante veremos que estes efeitos aparecem na brana como um tipo de carga de maré.

No vazio, temos que $T_{\mu\nu} \equiv 0$ e consequentemente $S_{\mu\nu} = 0$, assim o tensor energia-momento total se reduz a

$$T_{\mu\nu}^{tot} = -\frac{1}{k_4^2} E_{\mu\nu} \quad (3.38)$$

e a equação de conservação para $T_{\mu\nu}^{tot}$, nos fornece que

$$\nabla^\mu E_{\mu\nu} = 0 \quad (3.39)$$

Logo, a equação de Einstein, toma a forma

$$G_{\mu\nu} = -E_{\mu\nu} \quad (3.40)$$

Desejamos uma solução estática e esfericamente simétrica para a equação acima. Então, escolhemos a métrica escrita da seguinte forma

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.41)$$

Inspirados pela solução de Reissner-Nördstrom no contexto da Relatividade Geral, Dadhich *et al.* [27], propuseram uma fonte com a seguinte forma

$$E_{\nu}^{\mu} = -k^4 \begin{pmatrix} -\mathcal{U} & & & \\ & (\mathcal{U} + 2\Pi)/3 & & \\ & & (\mathcal{U} - \Pi)/3 & \\ & & & (\mathcal{U} - \Pi)/3 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

onde $k = k_5/k_4$.

Portanto, um fluido que satisfaz a uma equação de estado por meio da relação $P = \mathcal{U}$ e possui uma anisotropia regulada por Π . Para que possamos obter uma solução do tipo RN, devemos escolher \mathcal{U} e o traço da anisotropia adequadamente. Impondo a relação

$$\mathcal{U} = \left(\frac{k_4}{k_5}\right)^4 \frac{\beta}{r^4} = -\frac{1}{2}\Pi \quad (3.43)$$

onde β é uma constante, obtemos as seguintes componentes para o tensor projeção de

Weyl

$$E_0^0 = E_1^1 = -E_2^2 = -E_3^3 = \frac{\beta}{r^4} \quad (3.44)$$

que tem a forma do tensor energia momento do campo eletromagnético na solução RN.

3.2.2 Equações de Campo

Vamos agora resolver as equações de campo. Utilizando a métrica (3.41), as equações de Einstein podem ser escritas da seguinte forma [48, 49]

$$G_0^0 = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{B} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{B'}{B} \right) = \frac{48\pi G}{\sigma k^4} E_0^0 \quad (3.45a)$$

$$G_1^1 = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{B} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{A'}{A} \right) = \frac{48\pi G}{\sigma k^4} E_1^1 \quad (3.45b)$$

$$G_2^2 = \frac{1}{2B} \left[\frac{A''}{A} - \frac{1}{2} \left(\frac{A'}{A} - \frac{2}{r} \right) \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) \right] = G_3^3 = \frac{48\pi G}{\sigma k^4} E_2^2 \quad (3.45c)$$

Resolvendo a equação (3.45a), encontramos

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{q}{r^2} \right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{q}{r^2} \right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.46)$$

Esta solução é parecida com a solução de Reissner-Nördstrom para um buraco negro carregado. Contudo, vale salientar que, obtivemos esta solução a partir de um corpo estático e esfericamente simétrico sem carga elétrica. O parâmetro q (chamado de carga de maré) surge devido os efeitos da gravidade ao longo da dimensão extra.

A partir da métrica acima, vemos que o potencial de interação na brana fica dado por

$$V(r) = -\frac{2GM}{r} + \frac{q}{r^2} \quad (3.47)$$

Ao contrário do que ocorre na solução de RN da Relatividade Geral, onde o termo relativo a carga do buraco negro admite apenas valores positivos, pois depende de e^2 , a carga de maré pode admitir valores positivos ou negativos. Para o caso onde

$q > 0$, verificamos que, assim como na solução RN da relatividade geral, o efeito da dimensão extra enfraquece o campo gravitacional. Mas para o caso onde $q < 0$, ocorre justamente o contrário, os efeitos da dimensão extra tendem a fortalecer o campo gravitacional [27].

É importante enfatizar que as soluções apresentadas neste capítulo, não são as únicas soluções de buracos negros existentes na literatura [56, 50, 70]. Chamblin *et al.* [20], obtiveram uma solução de buraco negro estático e sem carga conhecida como Black String. Esta solução se caracteriza pelo fato de que o horizonte de eventos se estende infinitamente ao longo da dimensão extra, e por isso, não deve representar a geometria de um buraco negro que se forma pelo colapso da matéria confinada na brana

Podemos também mencionar aqui, dois tipos de soluções obtidos por R. Casadio, A. Fabbri e L. Mazzacurati, conhecidas como soluções CFM. Em [23], Casadio *et al.* propõe soluções analíticas na brana em $z = 0$. Parametrizadas pela massa ADM e por parâmetros PPN. Eles admitem que as soluções em quatro dimensões tenha a forma, $ds^2 = -B(r) dt^2 + A(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$ em $z = 0$, mas com $B \neq A^{-1}$. As soluções são obtidas por fixar de maneira alternada $B(r)$ ou $A(r)$ como em Schwarzschild e então por meio das equações de campo se obtém a solução [23].

Apesar da inúmeras tentativas de se obter uma solução exata realística de um buraco negro no cenário de Randall-Sundrum, nenhuma solução foi encontrada até o presente momento. Contudo, soluções numéricas têm surgido na literatura. Em [61], é apresentado uma solução numérica para pequenos buracos negros, cujo raio do horizonte (R_4) é pequeno quando comparado com o raio de curvatura do espaço ambiente (ℓ). Só recentemente, resultados com buracos negros com raio compatível ou superior a ℓ tem sido obtidos. Uma solução deste tipo, para grandes buracos negros na brana, foi obtida por Figueiras e Wiseman em [36, 82, 83]. Assim, buracos negros massivos, tal que $R_4/\ell \in [0.07, 20]$, podem ser construídos. Os resultados mostram que estes buracos negros de tamanho grande ($R_4 \geq 0.05\ell$) se comportam como buracos negros

de Schwarzschild assintoticamente planos em quatro dimensões. Mais recentemente, Abdolrahimi *et al* [1], obtiveram um resultado de maneira independente de [36] por um método número distinto e cujos resultados estão de acordo com os obtido em [36].

Capítulo 4

Testes Experimentais da Relatividade em Branas Finas

Para ser aceita, toda teoria deve passar pela experimentação, comprovando desta maneira sua validade. Assim como acontece com outras teorias, a Relatividade Geral só foi bem aceita no meio científico após passar por testes observacionais que a validaram como uma verdadeira teoria da gravitação. É pequeno o número de testes experimentais para a Teoria da Relatividade Geral e a principal razão para isso é que, no nível do sistema solar, o campo gravitacional "experimentado" por nós não é muito forte. Einstein propôs inicialmente três testes para provar a validade de sua teoria, são eles: o red-shift gravitacional, a precessão do periélio de um planeta e o desvio da luz pelo Sol. Posteriormente surgiu um quarto teste denominado atraso temporal. Esses testes são conhecidos como testes clássicos da Relatividade Geral. Além destes, existem outros testes, como por exemplo, a precessão de um giroscópio em órbita em torno da Terra, contudo, neste capítulo iremos nos ater apenas a três dos testes clássicos citados acima.

De acordo com a primeira lei de Kepler, um planeta em órbita em torno do Sol descreve uma elipse com o Sol em um de seus focos. Contudo, essa órbita elíptica não é perfeitamente fechada e em uma boa aproximação elas são elipses que precessam [22], a este fenômeno denominamos de precessão do periélio. Todos os planetas do

sistema solar apresentam uma precessão do seus respectivos periélios, no entanto, a mais discutida delas é a do planeta Mercúrio, que possui a maior precessão observada. A teoria Newtoniana já previa uma precessão no periélio dos planetas, uma vez que o sistema solar é composto de muitos corpos, e é natural esperar que os outros planetas produzam um efeito perturbativo na órbita de um planeta em particular. Entretanto, a teoria newtoniana não era capaz de justificar uma discrepância de 43" de arco por século na precessão do periélio de Mercúrio (entre a teoria e os dados observacionais [31]). Somente com a publicação da Teoria da Relatividade Geral de Einstein em 1915, é que essa discrepância é explicada. A Relatividade Geral prevê um valor de 42,94 segundo de arco por século para a precessão de Mercúrio, estando assim, de acordo com os dados observacionais.

O segundo teste da relatividade proposto por Einstein é conhecido como desvio da luz. Como o próprio nome diz, a teoria prevê que um feixe de luz ao passar nas proximidades de uma corpo massivo, sofrerá uma deflexão na sua trajetória devido ação do campo gravitacional desse corpo. A primeira tentativa de medir este desvio foi realizada por Sir Arthur Eddington em 1919. O experimento sugerido por Einstein e que foi realizado por Eddington, consistia em fotografar as posições das estrelas no céu noturno e depois compará-las com as posições das mesmas estrelas fotografadas no momento de um eclipse solar total. Este foi a primeira evidência experimental comprovada da Teoria Geral da Relatividade.

Um outro teste da Teoria da Geral da Relatividade é o atraso temporal ou "Radar echo delay". Este teste foi proposto por I. I. Shapiro em 1964. O experimento proposto por Shapiro consiste em enviar um sinal de luz a partir da Terra, de modo que ele passe muito próximo do Sol e alcance outro planeta (ou satélite) e seja refletido de volta para Terra. O atraso temporal nada mais é que a medida do tempo necessário para que a luz percorra todo esse percurso. Uma vez que, na presença da estrela, o espaço-tempo é curvo, é esperado que o tempo de viagem da luz seja maior do que o tempo medido na ausência do campo gravitacional.

Assim como a solução de Schwarzschild é a base para os testes da Relatividade Geral, utilizaremos as soluções encontradas no capítulo anterior como base para calcular os testes clássicos da relatividade no contexto das branas a fim de verificar as correções devidas a dimensão extra.

4.1 Testes da relatividade no espaço-tempo de Garriga e Tanaka

Nesta seção utilizaremos a solução obtida por Garriga e Tanaka em (3.23). Esta é uma solução aproximada que descreve o espaço-tempo no regime de campo fraco de um buraco negro na brana. Nas seções que seguem derivamos dois dos testes clássicos da Relatividade Geral neste espaço-tempo, o desvio da luz e o atraso temporal. É importante enfatizar que nenhum cálculo para a precessão do periélio no espaço-tempo de Garriga e Tanaka foi encontrada na literatura.

4.1.1 Desvio da Luz

Desejamos estudar o movimento da luz no espaço-tempo descrito pela métrica (3.23), i.e., precisamos estudar a deflexão da trajetória de uma partícula sem massa sob a ação do campo gravitacional gerado por um corpo massivo. Assim, para uma partícula sem massa, sabemos que

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0 \tag{4.1}$$

Calculando as equações de movimento para as coordenadas t e ϕ respectivamente por meio das equações de Euler-Lagrange, obtemos as seguintes constantes do movi-

mento

$$E = -g_{tt} \frac{dt}{d\lambda} \quad (4.2a)$$

$$L = g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} \quad (4.2b)$$

onde λ é um parâmetro afim.

Estas são constantes do movimento da partícula no espaço-tempo. Podemos interpretar E como a energia total da partícula, enquanto que L é o seu momento, medido por observadores assintoticamente planos. Utilizando a métrica (3.23) e admitindo, por motivo de simplicidade, que o movimento ocorre no plano equatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$, a equação (4.1) assume a seguinte forma:

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{4GM\ell^2}{3r^3}\right) \dot{t}^2 + \left(1 + \frac{2GM}{r} + \frac{2GM\ell^2}{r^3}\right) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = 0 \quad (4.3)$$

Por meio desta equação, podemos encontrar a equação para o movimento radial da partícula. Então, substituindo as constantes do movimento (4.2a) e (4.2b) na equação acima, temos

$$\dot{r}^2 = E^2 - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2GM}{r^3} L^2 - \frac{2GM\ell^2}{3r^3} \left(E^2 - 3\frac{L^2}{r^2}\right) \quad (4.4)$$

Contudo, como estamos interessados na deflexão da trajetória da luz, devemos escrever r como uma função da coordenada angular ϕ . Então, utilizando a equação da conservação do momento angular (4.2b), podemos escrever

$$\dot{r}^2 = \frac{L^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 \quad (4.5)$$

E portanto, a equação radial (4.4) fica escrita da seguinte maneira:

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{E^2}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GM}{r^3} - \frac{2GM\ell^2}{3r^3} \frac{E^2}{L^2} + \frac{2GM\ell^2}{r^5} \quad (4.6)$$

Podemos ainda introduzir uma nova variável $r = 1/u$, que pode ser escrita $u = u(\phi)$

[31]. Desta maneira, temos que $\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2$. Logo, a equação (4.6), será:

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = \frac{E^2}{L^2} - u^2 + 2GMu^3 - \frac{2}{3}GM\ell^2 u^3 \frac{E^2}{L^2} + 2GM\ell^2 u^5 \quad (4.7)$$

Com o objetivo de resolver a eq. (4.7), podemos escrevê-la na seguinte forma

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = F(u) \quad (4.8)$$

onde

$$F(u) = \frac{E^2}{L^2} - u^2 + 2GMu^3 - \frac{2}{3}GM\ell^2 u^3 \frac{E^2}{L^2} + 2GM\ell^2 u^5 \quad (4.9)$$

Estamos interessados em calcular o desvio da luz causado por um corpo esfericamente simétrico, descrito pela métrica (3.23). Desta forma devemos integrar a eq. (4.8). Assim, vamos considerar um raio de luz que vem do infinito $r \rightarrow \infty$, ou seja, ($u \rightarrow 0$), passa próximo a fonte do campo gravitacional (r_o) e depois segue novamente para o infinito.

Integrando a eq. (4.8), temos a expressão

$$\phi(u) - \phi(0) = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{F(x)}} dx \quad (4.10)$$

A variação total no ângulo de deflexão da luz é duas vezes a variação encontrada no trecho de $r \rightarrow \infty$ até r_o [80], ou seja,

$$\Delta\phi = 2 |\phi(u_0) - \phi(0)| - \pi \quad (4.11)$$

Notamos que se não existe fonte ($M = 0$), a trajetória da partícula será uma reta ($u = \frac{1}{b} \sin \phi$), onde o parâmetro de impacto b será dado por $b = \frac{L^2}{E^2}$. Acontece que o integrando diverge quando levamos em conta as raízes de F . Então, não podemos usar um método perturbativo para calcular a integral. No entanto, para avançar neste problema podemos seguir o seguinte procedimento. Primeiro vamos encontrar as raízes

de $F(u)$. Em ordem zero, temos como solução

$$u_o = \pm \frac{1}{b} \quad (4.12)$$

onde $u_o = 1/r_o$. Podemos interpretar r_o como sendo a distância mais próxima entre o feixe de luz e o corpo gerador do campo gravitacional. Em ordem zero de GM , a distância mais próxima é igual ao parâmetro de impacto, i.e., $r_o \simeq b$.

No regime de campo fraco, onde $GMu \ll 1$, a fonte fará com que o movimento da partícula sofra um pequeno desvio de sua órbita original. Logo, para qualquer perturbação na trajetória da partícula, em primeira aproximação, esperamos que

$$u_o = \frac{1}{b} (\pm 1 + \delta) \quad (4.13)$$

onde δ é da ordem de $\frac{GM}{b}$. Se (4.13) é solução de $F(u)$, então, devemos ter:

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b^2} (\pm 1 + \delta)^2 + \frac{2GM}{b^3} (\pm 1 + \delta)^3 - \frac{2GM}{3b^5} \ell^2 (\pm 1 + \delta)^3 + \frac{2GM\ell^2}{b^5} (\pm 1 + \delta)^5 = 0 \quad (4.14)$$

Em primeira ordem em GM, encontramos

$$\delta = \frac{GM}{b} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{\ell^2}{b^2} \right] \quad (4.15)$$

Considerando as duas raízes encontradas, dadas por (4.12) e (4.15), podemos fatorar a função $F(u)$ da seguinte maneira

$$F(u) = (u - u_0)(u - u_-) G(u) \quad (4.16)$$

onde a função $G(u)$ é definida como segue:

$$G(u) = (a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0) \quad (4.17)$$

E as duas raízes, u_o e u_- são dadas por:

$$u_o = \frac{1}{b} (1 + \delta) \quad (4.18a)$$

$$u_- = \frac{1}{b} (-1 + \delta) = -u_o + 2\frac{\delta}{b} \quad (4.18b)$$

onde δ é dado por (4.15).

Logo, (4.16) assume a seguinte forma

$$F(u) = a_3 u^5 + a_2 u^4 + \left(a_1 - \frac{a_3}{b^2}\right) u^3 + \left(a_0 - \frac{a_2}{b^2}\right) u^2 - \left(\frac{a_1}{b^2} + \frac{2\delta a_0}{b}\right) u - \frac{a_0}{b^2} \quad (4.19)$$

Podemos agora comparar (4.9) com (4.19), com o objetivo de encontrar os coeficientes da função $G(u)$. Assim, encontramos que

$$\begin{aligned} a_3 &= 2GM\ell^2 \\ a_2 &= 0 \\ a_1 &= 2GM \left[1 + \frac{2\ell^2}{3b^2} \right] \\ a_0 &= -1 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Finalmente, podemos reescrever $F(u)$ da seguinte maneira:

$$F(u) = (u^2 - u_o^2) \left(1 - \frac{2\delta}{b(u + u_o)} \right) (a_3 u^3 + a_1 u - 1) \quad (4.21)$$

Com esta expressão de $F(u)$, podemos reconsiderar a equação (4.10). Expandindo a função $G(u)$ perturbativamente, encontramos

$$\phi(u) - \phi(0) = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{(u_o^2 - u^2)}} \left(1 + \frac{a_1}{2} u + \frac{a_3}{2} u^3 + \frac{1}{(u + u_o)b} \delta \right) du \quad (4.22)$$

Substituindo $u_o = \frac{1}{b} (1 + \delta)$ e desprezando os termos de ordem superiores em GM , a integral nos fornece

$$\phi(u) - \phi(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{2GM}{b} + \frac{2GM\ell^2}{b^3} \quad (4.23)$$

Substituindo (4.23) em (4.11), então, o ângulo de deflexão total é dado por

$$\Delta\phi = \frac{4GM}{b} + \frac{4GM\ell^2}{b^3} \quad (4.24)$$

podemos ainda reescrever este resultado em termos de r_o , i.e., a distância de maior proximidade

$$\Delta\phi = \frac{4GM}{r_o} + \frac{4GM\ell^2}{r_o^3} \quad (4.25)$$

O primeiro termo na expressão acima é o termo de previsto pela relatividade geral, enquanto que o segundo termo nos fornece a correção devido à dimensão extra [57]. Se escolhermos $\ell^2 = 0$, recuperamos o resultado obtido pela Relatividade Geral.

Se utilizarmos os dados observacionais da deflexão da luz no sistema solar, podemos então, impor um vínculo aos valores permitidos para ℓ . Desta maneira, iremos fazer uso dos seguintes valores para as constantes astrofísicas, $G = 6,67 \times 10^{-11} m^3 Kg^{-1} s^{-2}$, $M = M_\odot = 1,989 \times 10^{30} kg$, $r_o = R_\odot = 6,955 \times 10^8 m$, $c = 2,998 \times 10^8 m/s$.

A Relatividade prediz um valor de 1,75 segundos de arco para a deflexão de uma raio de luz que se origina no infinito, passa próximo ao Sol e termina no infinito. De acordo com [69] nos fornecem uma correção dada pela seguinte expressão [41, 15]

$$\Delta\phi = \Delta\phi_{RG} (1 + \delta) \quad (4.26)$$

onde $\Delta\phi_{RG}$ é o desvio previsto pela Relatividade Geral e δ é o correção medida pelos experimentos, com $\delta \leq 0,0002 \pm 0,0008$.

Se admitimos que $\delta \equiv \delta_\ell$ é totalmente proveniente dos efeitos da dimensão extra,

o teste da deflexão da luz nos fornece o seguinte vínculo para ℓ :

$$\ell \leq 9,84 \cdot 10^6 m \quad (4.27)$$

Os vínculos encontrados aqui, são mais fracos do que os encontrados nos testes da lei do inverso do quadrado realizado em laboratórios ($\ell < 50 \mu m$) [52]. No entanto, sua relevância está no fato de que são obtidos em sistemas físicos diferentes, e portanto, devem ser considerados como testes independentes.

4.1.2 Atraso Temporal

Pretendemos agora, encontrar os efeitos da dimensão extra sobre o atraso temporal no tempo de viagem de um sinal luminoso causado pela presença da fonte do campo gravitacional. Novamente vamos considerar que o movimento da partícula é restrito ao plano equatorial, i.e., $\theta = \pi/2$. Podemos reescrever a equação radial (4.4) da seguinte maneira

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = B(r) \quad (4.28)$$

onde $B(r) = E^2 - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2GM}{r^3}L^2 - \frac{2GM\ell^2}{3r^3} \left(E^2 - 3\frac{L^2}{r^2}\right)$.

Reparametrizando a eq. (4.28) em termos das coordenadas t e ϕ , temos que

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\dot{t}^2} B(r) \quad (4.29)$$

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{\dot{\phi}^2} B(r) \quad (4.30)$$

onde o ponto representa derivada com relação ao parâmetro afim λ . Se dividimos (4.29) por (4.30), encontramos a seguinte relação:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{\dot{\phi}^2}{\dot{t}^2} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 \quad (4.31)$$

onde escrevemos $r = 1/u$. Fazendo uso eq.(4.8), a relação (4.31) assume a seguinte

forma:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{\dot{\phi}^2}{t^2} F(u) \quad (4.32)$$

Podemos, então, fazer uso do formalismo apresentado na seção anterior. Assim substituindo as constantes de movimento (4.2a) e (4.2b) na equação acima e escrevendo a função $F(u)$ como um produto de fatores. O tempo de viagem de um sinal luminoso que, emitido de um planeta A (a Terra, por exemplo), localizado em u_o , passa próximo ao Sol e chega até um planeta B (digamos, Mercúrio) localizado em u , no espaço tempo de Garriga e Tanaka, é dado por:

$$\begin{aligned} t(r, r_o) = & \sqrt{r^2 - r_o^2} + 2GM \ln \left(\frac{r + \sqrt{r^2 - r_o^2}}{r_o} \right) + GM \sqrt{\frac{r - r_o}{r + r_o}} \\ & + \frac{(9r + 7r_o) GM \ell^2}{3rr_o^2} \sqrt{\frac{r - r_o}{r + r_o}} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Podemos agora calcular o atraso no tempo de viagem do feixe de luz. De acordo com [80] o atraso no tempo entre o transmissão de um sinal luminoso e a sua subsequente recepção é calculado como:

$$\Delta t = 2 \left[t(r_1, r_o) + t(r_2, r_o) - \sqrt{r_1^2 - r_o^2} - \sqrt{r_2^2 - r_o^2} \right] \quad (4.34)$$

admitindo $r \gg r_o$, nossa solução se reduz a

$$\Delta t = 4GM + 4GM \ln \left(\frac{4r_1 r_2}{r_o^2} \right) + \frac{6GM \ell^2}{r_o^2} + \frac{14GM \ell^2}{3r_o} \left(\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \right) \quad (4.35)$$

Este resultado está de acordo com aquele obtido em [58]. Vemos que os dois últimos termos nos fornecem as correções ao atraso no tempo de viagem de um fóton devido os efeitos da dimensão extra. Novamente, fazendo $\ell^2 = 0$, recuperamos o resultado já bem conhecido da Relatividade Geral, obtido a partir da métrica de Schwarzschild.

Assim como fizemos para o desvio da luz, podemos impor aqui, um vínculo ao valor de ℓ . Diversas medidas do atraso temporal já foram realizadas nas últimas décadas

[12, 68]. Contudo, as medidas mais recentes são aquelas realizadas com o uso ondas de radio que ao serem enviadas a partir da Terra, passam próximos do sol e alcançam satélites artificiais. Para os sinais que foram emitidos da Terra e cruzando o Sol até alcançar o satélite artificial Cassini [12], foi obtido a seguinte correção para o atraso temporal, $\delta T \simeq (1, 1 \pm 1, 2) \cdot 10^{-5}$. Assim, podemos verificar que:

$$\ell \leq 7,1 \cdot 10^6 m \tag{4.36}$$

onde utilizamos r_o aproximadamente igual ao raio do sol e $r_1 = 1,525 \times 10^{11}m$ e $r_2 = 1,26 \times 10^{12}m$, são as distância da Terra e do satélite até o Sol respectivamente [12].

4.2 Testes para a solução DMPR

Vamos agora considerar a solução das equações de campo no vácuo no cenário de branas, obtida por Dadhich, Maartens, Papadopoulos e Rezanias vista no capítulo anterior. Esta é uma generalização da solução de Schwarzschild e este tipo de solução é conhecida por solução DMPR. Os testes da Relatividade para este tipo de solução já são bem conhecidos na literatura, ver [14, 15] e [41]. Utilizando o formalismo apresentado na seção anterior, iremos verificar qual a influência da dimensão extra sobre o movimento das partículas neste espaço-tempo.

4.2.1 Precessão do Periélio

Para encontrar a precessão do periélio para uma partícula que orbita um buraco negro descrito pela solução DMPR, faremos uso de um formalismo proposto na seção anterior para os espaço-tempo de Garriga e Tanaka. Mais uma vez, consideramos que a trajetória da órbita da partícula está contida no plano equatorial ($\theta = \pi/2$) e as constantes do movimento são dadas por (4.2a) e (4.2b). A coordenada radial r varia ao longo de um intervalo (r_{\min}, r_{\max}) , tal que $-\infty \leq r_{\min} \leq r_{\max} \leq +\infty$.

Iniciamos com a métrica (3.46), dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{q}{r^2} \right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{q}{r^2} \right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (4.37)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$.

Com base nas seções anteriores, podemos escrever a equação do movimento da seguinte forma

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = P(u) \quad (4.38)$$

onde derivamos (4.8) com respeito a coordenada angular ϕ . A função $P(u)$ é obtida a partir primeira derivada da função $F(u)$ dada em (4.9), para a métrica (4.37). Assim, temos

$$P(u) = 3GMu^2 - 2qu^3 + \frac{GM}{\mathfrak{L}^2} - \frac{q}{\mathfrak{L}^2} u \quad (4.39)$$

onde definimos \mathfrak{L} como sendo o momento angular por unidade de massa de repouso da partícula.

Estamos tratando de um movimento sob ação de uma força central, desta forma a órbita da partícula está confinada em uma plano. Já escolhemos o plano $\theta = \pi/2$. Assim, assumindo que a órbita da partícula é aproximadamente um círculo, podemos escolher $u = u_o = cte$, como solução da equação (4.38). Desta maneira, teremos

$$u_o = P(u_o) \quad (4.40)$$

Assumindo que $q/\mathfrak{L}^2 \ll 1$, então, a solução de primeira ordem é aproximadamente $u_o = GM/\mathfrak{L}^2$.

Para qualquer desvio na órbita circular da partícula, a solução da equação (4.38) sofre uma pequena perturbação que em primeira ordem de aproximação é dada por $u = u_o + \delta$ e que é solução da equação (4.38), sendo assim

$$\frac{d^2 (u_o + \delta)}{d\phi^2} + u_o + \delta = P(u_o + \delta) \quad (4.41)$$

onde $\delta \simeq \mathcal{O}(GM)$.

Expandindo $P(u)$ em torno de u_o , em primeira ordem de δ obtemos que

$$\delta \frac{d^2(u_o)}{d\phi^2} + \frac{d^2(\delta)}{d\phi^2} + u_o + \delta = P(u_o) + \left(\frac{dP}{du} \right)_{u=u_o} \delta + O(\delta^2) \quad (4.42)$$

utilizando (4.40), encontramos a seguinte equação

$$\frac{d^2\delta}{d\phi^2} + \left[1 + \left(\frac{dP}{du} \right)_{u=u_o} \right] \delta = O(\delta^2) \quad (4.43)$$

Esta equação tem uma solução já bem conhecida na literatura, dada por

$$\delta = \delta_o \cos \left[\left(\sqrt{1 + \left(\frac{dP}{du} \right)_{u=u_o}} \right) \phi + \vartheta \right] \quad (4.44)$$

onde δ_o e ϑ são constantes de integração. Como estamos estudando o periélio, desejamos encontrar os valores de ângulo para os quais r seja mínimo. Se r é mínimo, logo u é máximo e conseqüentemente δ também será máximo. Portanto, considerando a variação de δ com relação a ϕ , verificamos que δ volta a ser máximo para o ângulo ϕ dado por

$$\phi = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \left(\frac{dP}{du} \right)_{u=u_o}}} \quad (4.45)$$

Se não existisse precessão do periélio, ao realizar uma volta completa em torno da fonte do campo, uma partícula voltaria para o mesmo ponto de partida e seu periélio ocuparia o mesmo lugar no plano do movimento. Assim, o avanço do periélio por revolução seria

$$\Delta\phi = \phi - 2\pi \quad (4.46)$$

Vamos escrever a equação (4.45) como

$$\phi = \frac{2\pi}{1 - \sigma} \quad (4.47)$$

onde

$$\sigma = 1 - \sqrt{1 + \left(\frac{dP}{du}\right)_{u=u_o}} \quad (4.48)$$

Para $\left(\frac{dP}{du}\right)_{u=u_o}$ pequeno, podemos expandir a expressão acima e teremos

$$\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{dP}{du}\right)_{u=u_o} \quad (4.49)$$

Em termos de σ , o avanço do periélio por revolução é dado por

$$\Delta\phi = 2\pi\sigma \quad (4.50)$$

Considere agora a solução DMPR dado pela métrica (3.46), então, ângulo de precessão será

$$\Delta\phi = 6\pi GMu_o - \frac{\pi q}{\mathfrak{L}^2} \quad (4.51)$$

onde desprezamos os termos de segunda ordem em u_o .

No intuito de obter o cálculo efetivo da precessão do periélio, precisamos conhecer uma expressão da constante \mathfrak{L} em função dos parâmetros das órbitas [15]. Desta forma podemos escrever, $\mathfrak{L}^2 = GMa(1-e^2)$, onde a é o semi-eixo maior e "e" a excentricidade da órbita. Substituindo $u_o = GM/\mathfrak{L}^2$, temos

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{a(1-e^2)} - \frac{\pi q}{GMa(1-e^2)} \quad (4.52)$$

Assim como em [14], verificamos que se fazemos $q = 0$, na equação acima, recobramos a correção prevista pela Relatividade Geral para a precessão do periélio. O segundo termo surge como uma correção devido aos efeitos da dimensão extra. De maneira semelhante ao que foi feito na seção anterior, podemos também impor um vínculo experimental ao valor de q . Portanto, se tomamos o planeta Mercúrio como um exemplo, a precessão do periélio observada atualmente para este planeta é de $43,11 \pm 0,21$ segundos de arco por século [14, 77]. Onde utilizamos os valores de

$a = 57,91 \times 10^9 m$ e $e = 0,205615$, para a órbita de Mercúrio [14]. O valor da precessão do periélio de Mercúrio prevista pela Teoria da Relatividade Geral é de $42,94''/século$. Portanto, a diferença entre os dados observacionais e o valor previsto pela Relatividade Geral nos fornece $(0,17 \pm 0,21)''/século$, que podem ser explicados devido a outros fatores. Se admitimos que esta diferença seja devido unicamente ao efeitos da dimensão extra [14], encontramos que:

$$|q| \leq 2,59.10^4 m^2 \quad (4.53)$$

4.2.2 Desvio da Luz

Baseados no formalismo apresentado nas seções anteriores deste capítulo podemos calcular os outros dois testes da relatividade para o espaço-tempo de um buraco negro na brana descrito pela solução DMPR.

Um raio de luz que passa nas vizinhanças de um objeto massivo descrito pela métrica (3.46) terá uma deflexão medida da seguinte forma:

$$\delta\phi = \frac{4GM}{r_o} - \frac{3\pi}{4} \frac{q}{r_o^2} \quad (4.54)$$

Esta expressão está de acordo com o resultado obtido em [14, 57]. Por meio da eq. (4.26), podemos obter a seguinte relação

$$q \leq \frac{16GM r_o}{3\pi} \delta \quad (4.55)$$

onde $\delta \leq 0,0002 \pm 0,0008$, portanto o teste da deflexão da luz neste espaço tempo, nos fornece o seguinte valor para a carga de maré:

$$|q| \leq 3,49.10^8 m^2 \quad (4.56)$$

4.2.3 Atraso temporal

Com base em [14], obtemos que o atraso temporal da situação descrita acima é dado por

$$\delta T \approx 2GM \ln \left(\frac{4r_1 r_2}{r_o^2} \right) - \frac{\pi q}{r_o} \quad (4.57)$$

Podemos novamente impor um limite ao valor de q . E neste caso encontramos que:

$$|q| \leq 1,03 \cdot 10^8 m^2 \quad (4.58)$$

Capítulo 5

Buracos negros em branas com espessura

No contexto da teoria de campos, a brana pode ser escrita como uma parede de domínio gerada por um campo escalar, como vimos no capítulo 2. A princípio essa parede pode possuir uma espessura, e no limite em que essa espessura vai a zero, recaímos numa solução conhecida por brana fina ou brana sem espessura. No modelo RSII, o nosso universo é visto como uma brana fina inserida no espaço-tempo que possui uma dimensão extra que se estende até o infinito, como vimos no capítulo 2.

Modelos de Branas com espessura têm se tornado objetos de estudo ultimamente, uma vez que se abre a possibilidade de que a espessura da parede de domínio produza novos efeitos no espaço-tempo. Existe uma gama enorme de trabalhos na literatura que tratam desse tema. Em [33], Dzhunushaliev *et al.* apresentam uma revisão bastante ampla sobre os modelos existentes.

As soluções de Branas com espessuras podem ser divididas em duas classes, são elas: soluções estáticas e soluções dependentes do tempo. Por sua vez as soluções estáticas se dividem em dois tipos; classificadas como: Soluções topologicamente não-triviais (são paredes de domínios formadas pela ação de um ou mais campos escalares não interagentes) e soluções topologicamente triviais (que surgem devido a ação de campos escalares interagentes). As soluções dependentes do tempo nos fornecem modelos

cosmológicos que descrevem a evolução temporal da parede de domínio. Se em cinco dimensões, a solução para brana espessa não possa ser obtida, uma aproximação para brana fina pode ser realizada [33].

A busca por soluções de buracos negros neste tipo de brana também tem sido intensa nos últimos anos. Um exemplo disto é a solução quadrimensional encontrada em [34] denominada de WBH (wall-black hole). Para se obter esta solução, se toma como base a solução de uma brana bidimensional infinitesimalmente fina que divide um buraco negro ao meio e que é obtida através de uma métrica bem conhecida na literatura, denominada por métrica C. Esta métrica descreve um buraco acelerado. A solução obtida apresenta a mesma forma que a seção equatorial da solução quadrimensional de Reissner-Nordström-de Sitter [34].

No entanto, a solução exata de um buraco negro em brana com espessura em 5D não é conhecida.

Neste capítulo, apresentamos uma solução que pode ser pensada como uma versão regularizada do modelo RSII. Discutiremos dois tipos de soluções, a primeira solução é uma solução baseada na métrica de Garriga e Tanaka e a outra será inspirada na solução do tipo DMPR.

5.1 Equações de Campo

Um buraco negro sem rotação ou uma estrela localizada em uma brana deve dar origem a um espaço tempo estático e axialmente simétrico em cinco dimensões. Em tais espaços, como é bem conhecido, existem coordenadas em que a métrica assume a forma canônica de Weyl [21]. Partindo da métrica na forma canônica de Weyl, podemos, por meio de uma conveniente transformação de coordenadas, colocá-la na forma Gaussiana adaptada à brana. Nestas coordenadas, o elemento de linha do espaço 5D terá a forma:

$$ds^2 = -e^{2A(\xi,z)} dt^2 + e^{2B(\xi,z)} d\xi^2 + e^{2C(\xi,z)} d\Omega^2 + dz^2 \quad (5.1)$$

onde $z = 0$ nos fornece a localização da brana e $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$

Nos cenários das branas, uma brana com espessura é usualmente descrita como uma parede de domínio gerada por um certo campo escalar ϕ [17, 19, 24, 30, 45, 46, 71, 10, 11]. É razoável esperar que o buraco negro (ou a estrela) irá afetar a solução da parede de domínio. Contudo, considerando a simetria do problema, podemos assumir que a nova solução dependerá somente das coordenadas ξ e z , isto é., $\phi = \phi(\xi, z)$.

Fora da fonte, as equações de Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}^{(\phi)}$, são equivalente ao seguinte sistema de equação:

$$\begin{aligned} A_{zz} + A_z^2 + (A_{\xi\xi} + A_\xi^2) e^{-2B} + A_z(2C_z + B_z) + \\ A_\xi(2C_\xi - B_\xi) e^{-2B} = -\kappa \frac{2}{3} V(\phi) \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} B_{zz} + B_z^2 + B_z(A_z + 2C_z) - B_\xi(A_\xi + 2C_\xi) e^{-2B} + \\ (A_{\xi\xi} + A_\xi^2 + 2C_{\xi\xi} + 2C_\xi^2) e^{-2B} = -\kappa e^{-2B} \left(\phi_\xi^2 + \frac{2}{3} e^{2B} V(\phi) \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} C_{zz} + 2C_z^2 + (C_{\xi\xi} + 2C_\xi^2) e^{-2B} + C_z(A_z + B_z) + \\ C_\xi(A_\xi - B_\xi) e^{-2B} - e^{-2C} = -\kappa \frac{2}{3} V(\phi) \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$A_{z\xi} + 2C_{z\xi} + A_\xi(A_z - B_z) + 2C_\xi(C_z - B_z) = -\kappa \phi_\xi \phi_z \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} [A_{\xi\xi} + 2C_{\xi\xi} + A_\xi^2 + 3C_\xi^2 + 2A_\xi C_\xi - B_\xi(A_\xi + 2C_\xi)] e^{-2B} + \\ A_z B_z + C_z(2A_z + 2B_z + C_z) - e^{-2C} = \kappa \left(\frac{1}{2} \phi_z^2 - \frac{1}{2} \phi_\xi^2 e^{-2B} - V(\phi) \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial do campo escalar. A dinâmica do campo escalar é governada

pela equação $\square\phi - V'(\phi) = 0$, que assume aqui a seguinte forma

$$\phi_{zz} + (A_z + B_z + 2C_z)\phi_z + e^{-2B} [\phi_{\xi\xi} + (A_\xi - B_\xi + 2C_\xi)\phi_\xi] - V'(\phi) = 0 \quad (5.7)$$

Quando o potencial é convenientemente escolhido, uma solução exata de uma parede de domínio pode ser obtida a partir das equações acima. Por exemplo, tomando [59]

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \eta^2)^2 - \frac{\beta\lambda}{3\eta^2}\phi^2(\phi^2 - 3\eta^2)^2 \quad (5.8)$$

a solução é [59]

$$ds^2 = e^{2a(z)}(-dt^2 + d\xi^2 + \xi^2 d\Omega^2) + dz^2 \quad (5.9)$$

$$2a(z) = -2\beta \ln\left(\cosh^2\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)\right) - \beta \tanh^2\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \quad (5.10)$$

$$\phi = \eta \tanh\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \quad (5.11)$$

onde $\frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{\lambda\eta^2}{2}$, $\beta = \frac{\kappa\eta^2}{9}$ e κ é a constante gravitacional em cinco dimensões.

Esta solução pode ser interpretada como uma versão regularizada do modelo de branas RSII. De fato, tomando o parâmetro ε (a espessura da parede de domínio) indo a zero e mantendo a condição $\frac{2\beta}{\varepsilon} = \frac{1}{\ell} = const$, onde ℓ é o raio de curvatura do espaço AdS_5 , a solução do modelo RSII é recuperada. É importante notar que essas coordenadas são adaptadas às superfícies de níveis do campo escalar. Em particular, o centro da parede de domínio, onde $\phi = 0$, coincide com a hipersuperfície $z = 0$.

Note que a métrica induzida em $z = 0$ é a métrica de Minkowski. Portanto, esta solução não descreve o campo gravitacional de um buraco negro confinado na brana.

5.2 Solução aproximada de um buraco negro em uma brana com espessura

Vamos agora considerar uma distribuição de energia adicional, estática e axialmente simétrica (possivelmente descrevendo uma estrela no interior da parede de domínio ou uma singularidade descrevendo um buraco negro). A presença da fonte certamente irá modificar tanto a métrica original (5.9) como o campo escalar (5.11). Para grandes distâncias, onde o regime de campo fraco é válido, essa modificação pode ser tratada como uma pequena perturbação da métrica original [43]. E neste caso, podemos escrever:

$$ds^2 = e^{2a(z)} \left[-(1 + f(\xi, z)) dt^2 + (1 + m(\xi, z)) d\xi^2 + \xi^2 (1 + h(\xi, z)) d\Omega^2 \right] + dz^2 \quad (5.12)$$

$$\phi = \eta \left[\tanh\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) + k(\xi, z) \right] \quad (5.13)$$

onde $|f| \ll 1$, $|m| \ll 1$ e $|h| \ll 1$ e $|k| \ll 1$.

Ocorre que, devido a perturbação, a coordenada z não estará necessariamente adaptada à superfície de nível do campo escalar. Por exemplo, o centro da parede de domínio ($\phi = 0$) que originalmente coincide com $z = 0$, é agora dado pela equação:

$$z = -\varepsilon k(\xi, 0) = -\psi(\xi) \quad (5.14)$$

Por motivo de simplicidade, é conveniente usar o sistema de coordenadas adaptado ao centro da parede de domínio. E nós podemos retornar às coordenadas Gaussianas por meio da transformação abaixo:

$$\bar{z} = z + \psi(\xi) \Rightarrow z = \bar{z} - \psi(\bar{r}) \quad (5.15a)$$

$$\bar{r} = \xi - \left(\int^z e^{-2a(y)} dy \right) \psi'(\xi) \quad (5.15b)$$

Está claro que, no novo sistema de coordenadas, o centro da parede de domínio está localizado na hipersuperfície $\bar{z} = 0$. Nestas coordenadas, podemos escrever

$$ds^2 = e^{2a(\bar{z})} \left[- (1 + \bar{f}) dt^2 + (1 + \bar{m}) d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (1 + \bar{h}) d\Omega^2 \right] + d\bar{z}^2 \quad (5.16)$$

$$\phi = \eta \left[\tanh \left(\frac{\bar{z}}{\varepsilon} \right) + \bar{k} \right] \quad (5.17)$$

onde \bar{f} , \bar{m} , \bar{h} e \bar{k} , que são funções de \bar{r} e \bar{z} , fornecem as correções da métrica e do campo escalar nas novas coordenada.

A grande vantagem de trabalhar nestas coordenadas é o fato de que as condições iniciais, isto é, os valores que as funções assumem no centro da parede, podem ser facilmente estabelecidas. Por exemplo, como o centro corresponde a $\bar{z} = 0$, então, teremos

$$\bar{k}(\bar{r}, 0) = 0 \quad (5.18)$$

Outra condição importante pode ser imediatamente deduzida baseada no fato de que esperamos que a métrica seja simétrica com respeito ao centro da brana. Como $\partial_{\bar{z}}$ é o vetor normal da hipersuperfície em $\bar{z} = 0$, Então, no centro da brana teremos:

$$\left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=0} = \left. \frac{\partial \bar{m}}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=0} = \left. \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=0} = 0 \quad (5.19)$$

Estas funções devem satisfazer outras condições que iremos discutir posteriormente. Contudo, agora, vamos concentrar nossas atenção nas equações de campo. Em primeira ordem de aproximação, as equações (5.2) – (5.7) se reduzem ao seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} {}^{(1)}R_t^t &\equiv \frac{1}{4} \left[2f_{zz}^{(1)} + 2 \left(f_{rr}^{(1)} + \frac{2}{r} f_r^{(1)} \right) e^{-2a} + 2a' (5f_z^{(1)} + m_z^{(1)} + 2h_z^{(1)}) \right] \\ &= -\frac{2}{3} \kappa V_0' k^{(1)} \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}R_r^r &\equiv \frac{1}{4} \left[2m_{zz}^{(1)} + \left(2f_{rr}^{(1)} - \frac{4}{r}m_r^{(1)} + 4h_{rr}^{(1)} + \frac{8}{r}h_r^{(1)} \right) e^{-2a} \right. \\
&\quad \left. + a' (2f_z^{(1)} + 10m_z^{(1)} + 4h_z^{(1)}) \right] = -\frac{2}{3}\kappa V_0' k^{(1)}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}R_\theta^\theta &= \frac{1}{4} \left[2h_{zz}^{(1)} + \left(2h_{rr}^{(1)} + \frac{4}{r}h_r^{(1)} + \frac{2}{r} (f_r^{(1)} - m_r^{(1)} + 2h_r^{(1)}) \right) e^{-2a} \right. \\
&\quad \left. + 2a' (f_z^{(1)} + m_z^{(1)} + 6h_z^{(1)}) - \frac{4}{r^2} e^{-2a} (m^{(1)} - h^{(1)}) \right] = -\frac{2}{3}\kappa V_0' k^{(1)}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$${}^{(1)}R_{rz} \equiv \frac{1}{4} \left[2f_{zr}^{(1)} + 4h_{zr}^{(1)} + \frac{4}{r} (h_z^{(1)} - m_z^{(1)}) \right] = -\kappa k_r^{(1)} \phi_z^{(0)} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}G_{zz} &\equiv -\frac{1}{4} \left[6a' (f_z^{(1)} + m_z^{(1)} + 2h_z^{(1)}) + \left(2f_{rr}^{(1)} + 4h_{rr}^{(1)} + \frac{4}{r} (f_r^{(1)} - m_r^{(1)} + 3h_r^{(1)}) \right) e^{-2a} \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{r^2} e^{-2a} (m^{(1)} - h^{(1)}) \right] = -\kappa \left(\phi_z^{(0)} k_z^{(1)} - V_0' k^{(1)} \right)
\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}
{}^{(1)}\square\phi - V_0'' k^{(1)} &\equiv k_{zz}^{(1)} + 4a' k_z^{(1)} + \frac{1}{2} \phi_0' (f_z^{(1)} + m_z^{(1)} + 2h_z^{(1)}) + \\
&\quad e^{-2a} \left[k_{rr}^{(1)} + \frac{2}{r} k_r^{(1)} \right] - V_0'' k^{(1)} = 0
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Este sistema pode ser dividido em duas classes de equações: equações dinâmicas (5.20), (5.21), (5.22) e (5.25) - que envolvem derivadas segundas da métrica com respeito a coordenada z - e equações de vínculos (5.23) e (5.24). É bem conhecido que, devido às identidades de Bianchi, as equações de vínculos são propagadas por meio das equações dinâmicas. Isto significa que se as equações de vínculos são satisfeitas em uma certa hipersuperfície, as equações dinâmicas asseguram que as equações de vínculos serão satisfeitas em um conjunto aberto da variedade na vizinhança daquela hipersuperfície. Por isso, baseados nesta propriedade, podemos dizer que, com respeito as equações (5.23) e (5.24), podemos nos concentrar no problema de encontrar

uma solução da hipersuperfície $\bar{z} = 0$. Esta solução pode ser interpretada como uma condição inicial possível pra a solução da equação dinâmica.

As equações dinâmicas podem ser resolvidas por um método iterativo. Isolando a segunda derivada da métrica ou do campo escalar no lado esquerdo das equações, podemos calculá-las na hipersuperfície $\bar{z} = 0$ a partir da condição inicial. Derivando as equações com respeito a \bar{z} e repetindo o mesmo procedimento sucessivamente, podemos calcular as derivadas de qualquer ordem das funções desconhecidas f, m, h e k em $\bar{z} = 0$. Todos esses coeficientes constituirão uma série que converge em algum conjunto aberto, de acordo com o teorema de Cauchy-Kowalewsky. Esta série representa a solução das equações.

Podemos utilizar esse procedimento para encontrar uma solução aproximada do nosso problema. Primeiro, de acordo com essa abordagem, temos de escolher uma conjunto apropriado de condições iniciais. Como já mencionado, as condições iniciais consistem das funções $f(r, 0), m(r, 0), h(r, 0)$ e $k(r, 0)$ e suas derivadas primeiras $\left. \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=0}, \left. \frac{\partial m}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=0}, \left. \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=0}$ e $\left. \frac{\partial k}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=0}$, todas elas definidas na hipersuperfície $\bar{z} = 0$, satisfazendo às equações de vínculos (5.23) e (5.24).

Parte das condições iniciais foram determinadas nas equações (5.18) e (5.19). É interessante notar que com estas escolhas, a equação de vínculo (5.23) é automaticamente satisfeita.

O conjunto restante das condições iniciais, isto é, $f(r, 0), m(r, 0), h(r, 0)$ e $\left. \frac{\partial k}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=0}$, podem ser determinados por meio do uso da solução da brana sem espessura (thin brane) como inspiração. De acordo com Garriga e Tanaka, no limite da brana fina, a métrica de uma distribuição de matéria com massa M localizada na brana é dada, como vimos no capítulo 3, em primeira ordem de aproximação, por:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{4GM\ell^2}{3r^3} \right) dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{r} + \frac{2GM\ell^2}{r^3} \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (5.26)$$

Devemos enfatizar que essa métrica é válida na brana, i.e, em $\bar{z} = 0$, em uma região distante da fonte ($r \gg GM$).

Com o objetivo de obter uma conexão entre nossa solução (brana com espessura) e a solução na brana fina, vamos admitir a seguinte condição:

$$\bar{f}^{(1)}(r, 0) = - \left(\frac{2GM}{r} + \frac{4GM\ell^2}{3r^3} \right) \quad (5.27a)$$

$$\bar{m}^{(1)}(r, 0) = \frac{2GM}{r} + \frac{2GM\ell^2}{r^3} \quad (5.27b)$$

$$\bar{h}^{(1)}(r, 0) = 0 \quad (5.27c)$$

De um ponto de vista físico, estas condições significam que a métrica induzida no centro da brana é isométrica à geometria da brana fina. Portanto, um observador estritamente confinado no centro da parede de domínio, sentiria o campo gravitacional de uma brana fina.

Agora, impondo a equação de vínculo (5.24) sendo válida em $z = 0$, devemos ter

$$k_z^{(1)}|_{z=0} = 0, \quad (5.28)$$

Agora, considerando este conjunto de condições iniciais, podemos investigar a solução da equação dinâmica pelo método iterativo mencionado acima. E assim encontramos, a derivada segunda das funções desconhecidas:

$$f_{zz}^{(1)}|_{z=0} = \frac{8GM\ell^2}{r^5}, \quad (5.29a)$$

$$m_{zz}^{(1)}|_{z=0} = \frac{4GM\ell^2}{r^5} \quad (5.29b)$$

$$h_{zz}^{(1)}|_{z=0} = -\frac{6GM\ell^2}{r^5} \quad (5.29c)$$

$$k_{zz}^{(1)}|_{z=0} = 0 \quad (5.29d)$$

Considerando a expansão em série de potências, podemos, então, escrever a métrica,

até 2ª ordem da seguinte forma

$$ds^2 = e^{2a} \left[- \left(1 - \frac{2GM}{r} \left(1 + \frac{2\ell^2}{3r^2} - \frac{2\ell^2}{r^4} z^2 \right) \right) dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{r} \left(1 + \frac{\ell^2}{r^2} + \frac{\ell^2}{r^4} z^2 \right) \right) dr^2 + \left(r^2 - \frac{3GM\ell^2}{r^3} z^2 \right) d\Omega^2 \right] + dz^2 \quad (5.30)$$

O campo escalar é simplesmente dado por $\phi = \eta \tanh\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$ em primeira ordem de aproximação. Entretanto, é interessante enfatizar que, admitindo estas condições iniciais, o campo escalar não sofre nenhuma modificação em qualquer ordem da expansão. Podemos verificar isso notando que a perturbação do campo escalar (a função k) está diretamente acoplada a métrica por meio da função $\gamma \equiv f + m + h$ (que é um tipo de traço da perturbação da métrica). Podemos determinar uma equação para γ por meio da seguinte combinação $R_t^t + R_r^r + 2R_\theta^\theta - G_{zz}$ das equações de campo. Isto produz

$$\gamma_{zz} + 2a'\gamma_z = 4\kappa \left(-\frac{1}{3}V_0'k^{(1)} - \phi_z^{(0)}k_z^{(1)} \right) \quad (5.31)$$

Por outro lado, a equação do campo escalar nos fornece

$$k_{zz} + 4a'k_z + \frac{1}{2}\phi_0'\gamma_z + e^{-2a}\nabla^2k - V_0''k = 0 \quad (5.32)$$

Usando as condições iniciais, $\gamma_z(0, r) = 0$, $k(0, r) = 0$ e $k_z(0, r) = 0$ nas equações acima, podemos concluir que as derivadas de γ_z e k em qualquer ordem, calculadas em $z = 0$, são nulas. Assim, não existe correção para o campo escalar $\phi = \eta \tanh\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$ em ordem de GM .

5.3 Solução do tipo DMPR

No capítulo 3, apresentamos uma solução exata para uma distribuição de matéria com massa M localizada na brana obtida por Dadchi *et al*, conhecida como solução DMPR [27], cuja métrica é dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{q}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{q}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (5.33)$$

Devemos lembrar que esta é uma solução para brana sem espessura, e é válida na brana em $z = 0$. Acredita-se que esta solução descreve o comportamento de um buraco negro real para pequenas distâncias. Isso por que neste domínio a dimensão extra estaria "aberta" para o campo gravitacional e o comportamento do potencial seria do tipo $1/r^2$. No entanto, para longas distâncias o buraco negro deve ser aproximadamente descrito pela solução de Garriga e Tanaka.

Novamente, desejamos obter uma versão dessa solução em uma brana com espessura. O procedimento será análogo ao da seção anterior, mas agora devemos considerar as equações de campo exatas. Além disso, temos que modificar as condições iniciais da solução. De fato, em $z = 0$, para reproduzir a solução DMPR, devemos impor que as funções desconhecidas $A(\xi, z)$, $B(\xi, z)$ e $C(\xi, z)$ satisfaçam as seguintes condições

$$-e^{2A(r,0)} = - \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{q}{r^2} \right) \quad (5.34a)$$

$$e^{2B(r,0)} = \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{q}{r^2} \right)^{-1} \quad (5.34b)$$

$$e^{2C(r,0)} = r^2 \quad (5.34c)$$

Devido à simetria de reflexão, devemos impor as seguintes condições iniciais:

$$\left. \frac{\partial A}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=0} = \left. \frac{\partial B}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=0} = \left. \frac{\partial C}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=0} = 0 \quad (5.35)$$

Considerando as equações de campo (5.20)–(5.22) podemos, a partir das condições iniciais, determinar a derivada segunda da métrica com relação a dimensão extra

avaliada em $z = 0$.

$$A_{zz}|_{z=0} = -\frac{q}{r^4} - \frac{2\kappa}{3}V_0 \quad (5.36a)$$

$$B_{zz}|_{z=0} = -\frac{q}{r^4} - \frac{2\kappa}{3}V_0 \quad (5.36b)$$

$$C_{zz}|_{z=0} = \frac{q}{r^4} - \frac{2\kappa}{3}V_0 \quad (5.36c)$$

onde V_0 é o potencial $V(\phi)$ avaliado em $z = 0$.

Usando mais uma vez as condições iniciais, segue das equações (5.24) e (5.25), as seguintes condições

$$\phi_\xi \phi_z = 0 \quad (5.37)$$

$$\left(\frac{1}{2} \phi_z^2 - \frac{1}{2} \phi_\xi^2 e^{-2B} - V(\phi) \right) \Big|_{\bar{z}=0} = 0 \quad (5.38)$$

É evidente que essas equações podem ser resolvidas se admitimos

$$\phi_\xi = 0 \quad (5.39a)$$

$$\frac{1}{2} \phi_z^2 \Big|_{z=0} = V_0 \quad (5.39b)$$

Considerando a forma do potencial dado em (5.8), avaliado em $z = 0$, onde $\phi = 0$.

Neste caso, teremos

$$V_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\eta^2}{\varepsilon^2} \right) \quad (5.40)$$

Logo:

$$\phi_z^2 \Big|_{z=0} = \frac{\eta^2}{\varepsilon^2} \quad (5.41)$$

Usando o valor de V_0 em (5.36a) - (5.36c), obtemos

$$A_{zz}|_{z=0} = B_{zz}|_{z=0} = -\frac{q}{r^4} - \frac{3}{2} \frac{1}{\varepsilon \ell} \quad (5.42a)$$

$$C_{zz}|_{z=0} = \frac{q}{r^4} - \frac{3}{2} \frac{1}{\varepsilon \ell} \quad (5.42b)$$

onde utilizamos o fato de que $\beta = \frac{\kappa \eta^2}{9}$ e $\frac{2\beta}{\varepsilon} = \frac{1}{\ell}$ para escrever o potencial em $\bar{z} = 0$ em

termos da espessura da brana (ε) e do comprimento da dimensão extra (ℓ).

Podemos agora encontrar as componentes da métrica. Expandindo as funções $A(r, z)$, $B(r, z)$ e $C(r, z)$ em torno de $z = 0$, temos que

$$A(r, z) = A(r, 0) + \frac{1}{2}A_{zz}(r, 0)z^2 + \dots \quad (5.43a)$$

$$B(r, z) = B(r, 0) + \frac{1}{2}B_{zz}(r, 0)z^2 + \dots \quad (5.43b)$$

$$C(r, z) = C(r, 0) + \frac{1}{2}C_{zz}(r, 0)z^2 + \dots \quad (5.43c)$$

onde utilizamos (5.35). Logo:

$$g_{tt} = -e^{2A(r,z)} = -e^{2A_0} \cdot e^{A_{zz}^{(0)}z^2} \quad (5.44)$$

Usando os valores de A_0 e $A_{zz}^{(0)}$ encontrados, podemos escrever:

$$g_{tt} = -e^{2a(z)} \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{q}{r^2} \right) e^{-\frac{q}{r^4}z^2} \quad (5.45)$$

onde definimos $a(z) = \frac{3}{4} \frac{1}{\varepsilon \ell} z^2$.

De maneira semelhante, encontramos que

$$g_{rr} = e^{2a(z)} \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{q}{r^2} \right)^{-1} e^{-\frac{q}{r^4}z^2} \quad (5.46a)$$

$$g_{\theta\theta} = e^{2a(z)} r^2 e^{\frac{q}{r^4}z^2} \quad (5.46b)$$

$$g_{\phi\phi} = e^{2a(z)} r^2 e^{\frac{q}{r^4}z^2} \sin^2 \theta \quad (5.46c)$$

Assim, a métrica de um corpo de massa M em um brana com espessura em torno de $z = 0$ fica em escrita como

$$ds^2 = e^{2a} \left\{ - \left[\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{q}{r^2} \right) e^{-\frac{q}{r^4}z^2} \right] dt^2 + \left[\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{q}{r^2} \right)^{-1} e^{-\frac{q}{r^4}z^2} \right] dr^2 + r^2 e^{\frac{q}{r^4}z^2} d\Omega^2 \right\} + dz^2 \quad (5.47)$$

Capítulo 6

Testes da relatividade em branas com espessura

O surgimento de teorias de dimensões extras ocorreu há quase um século, com o intuito de unificar a gravidade com o eletromagnetismo. Desde então, teorias com dimensões extras têm sido utilizadas com a finalidade de responder aos novos questionamentos da física, como por exemplo, por quê o universo está se expandindo de forma acelerada? Essa e outras questões talvez possam encontrar respostas à luz das dimensões extras. Contudo, se de fato tais dimensões extras existirem, elas estão escondidas. No entanto, é natural esperar que maneiras de se comprovar a existência dessas dimensões extras surjam com o passar dos anos. Uma maneira de se observar as dimensões extras é por meio do estudo do campo gravitacional. Nos modelos Randall-Sundrum, todos os campos com exceção da gravidade, estão confinados na brana, somente a gravidade é capaz de se propagar ao longo da dimensão extra. Sendo assim, podemos utilizar os testes clássicos da relatividade geral, como ferramentas no intuito de realizar tais medidas.

Vamos, portanto, apresentar aqui os testes da relatividade geral para as soluções de buracos negros em uma brana com espessura, tais soluções foram apresentadas no capítulo anterior. Iniciamos com uma discussão sobre o movimento de partículas de teste nestes espaços-tempo, com o intuito de calcular estes testes.

6.1 Movimento de uma partícula de teste em uma brana com espessura

Vamos considerar uma partícula de teste que se move no espaço tempo descrito pela métrica (5.30). É bem conhecido que, numa brana com espessura do tipo RSII, as geodésicas não são estáveis [25], isto é, qualquer perturbação transversal do movimento pode fazer com que a partícula escape da brana para o espaço ambiente. Então, se faz necessário formular um mecanismo de confinamento da partícula de teste na brana. Baseado na interação de Yukawa entre férmions e a parede de domínio, vista no capítulo 2, Dahia e Romero [25], propuseram uma Lagrangeana particular para descrever o movimento da partícula neste contexto. Esta Lagrangeana tem o efeito de aumentar a massa efetiva da partícula, devido à interação com o campo escalar, e esta modificação é suficiente para assegurar a localização da partícula.

A nova Lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L} = \sqrt{m^2 + h^2\varphi^2} \sqrt{-\tilde{g}_{AB}\dot{x}^A\dot{x}^B} \quad (6.1)$$

onde m é a massa de repouso da partícula e h é uma constante de acoplamento da interação.

Calculando o 5D-momento P_A da partícula, que é obtido por tomar $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}^A$, encontramos:

$$P_A = -\sqrt{m^2 + h^2\varphi^2} \tilde{g}_{AB}\dot{x}^B \quad (6.2)$$

para partículas de teste massivas ($\tilde{g}_{AB}\dot{x}^A\dot{x}^B = -1$). Então, encontramos diretamente que a massa efetiva é agora influenciada pelo campo escalar

$$P^A P_A = -(m^2 + h^2\varphi^2) \quad (6.3)$$

observe que a relação usual é recobrada desligando a interação, isto é, tomando $h = 0$.

Utilizando as equações de Euler-Lagrange, a equação do movimento para partículas com massa ($\tilde{g}_{AB}\dot{x}^A\dot{x}^B = -1$) é então, dada por

$$\frac{d}{d\tau} \left(-\sqrt{m^2 + h^2\varphi^2} \tilde{g}_{AB}\dot{x}^B \right) - \left(\frac{h^2\varphi\varphi_A}{\sqrt{m^2 + h^2\varphi^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + h^2\varphi^2} \tilde{g}_{BC,A}\dot{x}^B\dot{x}^C \right) = 0 \quad (6.4)$$

Derivando o primeiro termo da equação anterior e multiplicando pela métrica inversa (\tilde{g}^{AM}), a equação assume a seguinte forma

$$\ddot{x}^A + \frac{1}{2}\tilde{g}^{AM} (2\tilde{g}_{MB,C} - \tilde{g}_{BC,M}) \dot{x}^B\dot{x}^C = -\frac{h^2\varphi\varphi_C}{m^2 + h^2\varphi^2} (\tilde{g}^{AC} + \dot{x}^A\dot{x}^C) \quad (6.5)$$

Que pode ser escrita como:

$$\ddot{x}^A + \left\{ \begin{array}{c} A \\ B \ C \end{array} \right\} \dot{x}^B\dot{x}^C = K^A \quad (6.6)$$

onde a força K^A é dada por

$$K^A = -\frac{h^2\varphi\varphi_C}{m^2 + h^2\varphi^2} (\tilde{g}^{AC} + \dot{x}^A\dot{x}^C) \quad (6.7)$$

Podemos também reescrever K^A como o gradiente da massa efetiva da partícula:

$$K^A = -\Pi^{AC} \tilde{\nabla}_C \ln(m^2 + h^2\varphi^2) \quad (6.8)$$

onde $\Pi^{AC} = \tilde{g}^{AC} + \dot{x}^A\dot{x}^C$ é o tensor de projeção no espaço quadridimensional ortogonal à velocidade própria das partícula \dot{x}^A .

Vamos investigar a equação explicitamente:

i) para $x^A = t$, temos:

$$-\sqrt{m^2 + h^2\varphi^2} \tilde{g}_{tt}\dot{t} = E \quad (6.9)$$

ii) para $x^A = \phi$, temos:

$$\sqrt{m^2 + h^2\varphi^2} \tilde{g}_{\phi\phi}\dot{\phi} = L \quad (6.10)$$

iii) para $x^A = \theta$, temos:

$$\frac{d}{d\tau} \left(-\sqrt{m^2 + h^2\varphi^2} \tilde{g}_{\theta\theta} \dot{\theta} \right) = -\frac{1}{2} \sqrt{m^2 + h^2\varphi^2} \tilde{g}_{\phi\phi, \theta} \dot{\phi}^2 \quad (6.11)$$

Como $\tilde{g}_{\phi\phi, \theta}$ é proporcional a $\sin \theta$, então, segue que $\theta = \frac{\pi}{2}$ é uma solução da equação. Assim, por motivo de simplicidade vamos admitir que o movimento é tomado na hipersuperfície $\theta = \frac{\pi}{2}$.

iv) Para $x^A = z$, temos:

$$\frac{d}{d\tau} \left(-\sqrt{m^2 + h^2\varphi^2} \dot{z} \right) - \left(\frac{h^2\varphi\varphi_z}{\sqrt{m^2 + h^2\varphi^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + h^2\varphi^2} \tilde{g}_{\beta\gamma, z} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \right) = 0 \quad (6.12)$$

Para prosseguirmos, é útil analisarmos o termo $\tilde{g}_{\beta\gamma, z}$ separadamente. Considerando a forma da métrica (5.30), podemos escrever:

$$\tilde{g}_{\beta\gamma, z} = 2a' \tilde{g}_{\beta\gamma} + q_{\beta\gamma} \quad (6.13)$$

onde

$$q_{\beta\gamma} dx^\beta dx^\gamma = e^{2a} \left[- \left(\frac{8GM\ell^2}{r^5} z \right) dt^2 + \left(\frac{4GM\ell^2}{r^5} z \right) dr^2 - \left(\frac{6GM\ell^2}{r^3} z \right) d\Omega^2 \right] \quad (6.14)$$

Sendo assim, o último termo da eq. (6.12), pode ser reescrito na forma:

$$\tilde{g}_{\beta\gamma, z} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 2a' \tilde{g}_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma + q_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \quad (6.15)$$

Agora, lembrando que uma vez que $\tilde{g}_{AB} \dot{x}^A \dot{x}^B = -1$, para uma partícula com massa, podemos escrever:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = -1 - \dot{z}^2 \quad (6.16)$$

Logo:

$$\tilde{g}_{\beta\gamma, z} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = -2a' (1 + \dot{z}^2) + q_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \quad (6.17)$$

Substituindo essa relação em (6.12), obtemos a seguinte equação

$$\frac{d}{d\tau} \left(-\sqrt{m^2 + h^2 \varphi^2} \dot{z} \right) - \frac{h^2 \varphi \dot{\varphi}_z}{\sqrt{m^2 + h^2 \varphi^2}} - a' \sqrt{m^2 + h^2 \varphi^2} (1 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + h^2 \varphi^2} q_{\beta\gamma} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0 \quad (6.18)$$

Se multiplicarmos a equação acima pelo fator $\sqrt{m^2 + h^2 \varphi^2} e^{2a} \dot{z}^2$, então poderemos reunir os três primeiros termos em uma derivada com respeito a τ . Neste caso, a equação (6.12), assume a seguinte forma.

$$\frac{d}{d\tau} [(m^2 + h^2 \varphi^2) e^{2a} (1 + \dot{z}^2)] = (m^2 + h^2 \varphi^2) e^{2a} \dot{z} \left(q_{tt} \dot{t}^2 + q_{\phi\phi} \dot{\phi}^2 + q_{rr} \dot{r}^2 \right) \quad (6.19)$$

Podemos agora usar as constantes de movimento (6.9) e (6.10), e reescrever a equação na forma abaixo

$$\frac{d}{d\tau} [(m^2 + h^2 \varphi^2) e^{2a} (1 + \dot{z}^2)] = e^{2a} \dot{z} \left(q_{tt} \frac{E^2}{\tilde{g}_{tt}^2} + q_{\phi\phi} \frac{L^2}{\tilde{g}_{\phi\phi}^2} + (m^2 + h^2 \varphi^2) q_{rr} \dot{r}^2 \right) \quad (6.20)$$

O termo \dot{r}^2 pode ser eliminado da equação se empregarmos mais uma vez a condição $\tilde{g}_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \dot{z}^2 = -1$. De fato, considerando a forma da métrica (5.30) e as constantes de movimento, obtemos:

$$\dot{r}^2 = -\frac{1}{\hat{g}_{rr}} \left(1 + \dot{z}^2 + \frac{E^2}{(m^2 + h^2 \varphi^2) \tilde{g}_{tt}} + \frac{L^2}{(m^2 + h^2 \varphi^2) \tilde{g}_{\phi\phi}} \right) \quad (6.21)$$

Assim, se substituirmos esta relação na última equação, obtemos a equação de evolução da coordenada z da partícula, que nos dá o seu movimento na dimensão extra:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} [(m^2 + h^2 \varphi^2) e^{2a} (1 + \dot{z}^2)] \\ &= e^{2a} \dot{z} \left[\left(\frac{q_{tt}}{\tilde{g}_{tt}} - \frac{q_{rr}}{\hat{g}_{rr}} \right) \frac{E^2}{\tilde{g}_{tt}} + \left(\frac{q_{\phi\phi}}{\tilde{g}_{\phi\phi}} - \frac{q_{rr}}{\hat{g}_{rr}} \right) \frac{L^2}{\tilde{g}_{\phi\phi}} - \frac{q_{rr}}{\hat{g}_{rr}} (m^2 + h^2 \varphi^2) (1 + \dot{z}^2) \right] \end{aligned} \quad (6.22)$$

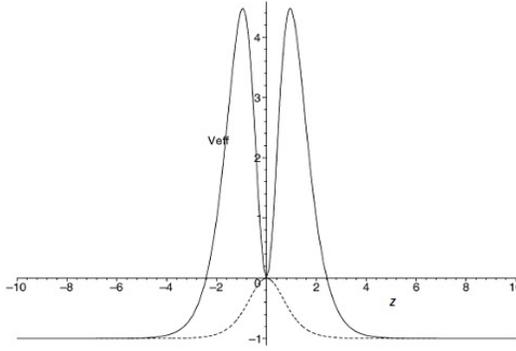


Figura 6.1: Comportamento confinante do potencial efetivo quando a interação com o campo escalar é levada em conta (linha contínua), comparado com o caso quando não existe interação, i.e. para $h = 0$ (linha pontilhada).

Do ponto de vista físico, esperamos que o movimento transversal da partícula (ao longo da dimensão extra) seja um movimento oscilatório. Além disso, para justificar a ausência de traços fenomenológicos da dimensão extra, esperamos que a amplitude do movimento (A) seja muito pequena e a frequência (ω) muito alta. Vamos agora verificar que essas hipóteses são compatíveis com a eq. (6.22).

Primeiro vamos considerar o caso sem fonte, i.e, $M = 0$. Nessas condições, o movimento transversal é determinado pela equação:

$$\left(1 + \frac{h^2}{m^2}\varphi^2\right) e^{2a} (1 + \dot{z}^2) = 1 + \dot{z}_0^2 \quad (6.23)$$

onde \dot{z}_0 é uma constante de integração, relacionada a velocidade inicial da partícula.

A eq. (6.23) pode ser reescrita na forma:

$$\left(1 + \frac{h^2}{m^2}\varphi^2\right) e^{2a} \dot{z}^2 = \dot{z}_0^2 - V_0 \quad (6.24)$$

onde V_0 faz um papel de potencial efetivo [25], e é definido por

$$V_0 = \left(1 + \frac{h^2}{m^2}\varphi^2\right) e^{2a} - 1 \quad (6.25)$$

Esse potencial tem um caráter confinante como podemos ver na figura(6.1).

Agora, vamos considerar a fonte M mais uma vez. Pela análise dimensional dos termos do lado direito da eq. (6.22) e baseado na solução (6.23) esperamos que a nova solução tome a forma

$$e^{2a} \left(1 + \frac{h^2}{m^2} \varphi^2 \right) (1 + \dot{z}^2) = \left[1 + \dot{z}_0^2 + \mathcal{O} \left(\frac{GM\ell^2}{D^5} A^2 \right) \right] \quad (6.26)$$

onde D é a nova distância radial entre a partícula e a fonte.

Portanto, se nós queremos uma solução aproximada de ordem $\mathcal{O} \left(\frac{GM\ell^2}{D^5} A^2 \right)$, então, podemos simplificar o último termo no lado direito da eq. (6.22) usando a ordem zero da eq. (6.26) para escrever

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau} \left[\left(1 + \frac{h^2}{m^2} \varphi^2 \right) e^{2a} (1 + \dot{z}^2) \right] \\ &= e^{2a} \dot{z} \left[\left(\frac{q_{tt}}{g_{tt}} - \frac{q_{rr}}{\hat{g}_{rr}} \right) \frac{E^2}{m^2 \tilde{g}_{tt}} + \left(\frac{q_{\phi\phi}}{g_{\phi\phi}} - \frac{q_{rr}}{\hat{g}_{rr}} \right) \frac{L^2}{m^2 \tilde{g}_{\phi\phi}} - \frac{q_{rr}}{\hat{g}_{rr}} e^{-2a} (1 + \dot{z}_0^2) \right] \end{aligned} \quad (6.27)$$

Para prosseguir vamos fazer algumas considerações sobre o movimento da partícula. É razoável admitir que o movimento oscilatório na direção transversal possua uma alta frequência ω , a fim de explicar a ausência de qualquer traço fenomenológico da existência de dimensões extras medidos até o presente momento, como já mencionamos anteriormente. Como consequência, podemos assumir que durante um período completo da oscilação a coordenada r permanece praticamente constante. Sob esta hipótese, a equação anterior pode ser diretamente integrada, fornecendo

$$\left[\left(1 + \frac{h^2}{m^2} \varphi^2 \right) e^{2a} (1 + \dot{z}^2) \right] = (1 + \dot{z}_0^2) - V_M(r, z) \quad (6.28)$$

onde

$$\begin{aligned} V_M(r, z) = - \int_0^z e^{2a} \left[\left(\frac{q_{tt}}{g_{tt}} - \frac{q_{rr}}{\hat{g}_{rr}} \right) \frac{E^2}{m^2 \tilde{g}_{tt}} + \left(\frac{q_{\phi\phi}}{g_{\phi\phi}} - \frac{q_{rr}}{\hat{g}_{rr}} \right) \frac{L^2}{m^2 \tilde{g}_{\phi\phi}} \right. \\ \left. - \frac{q_{rr}}{\hat{g}_{rr}} e^{-2a} (1 + \dot{z}_0^2) \right] dz' \end{aligned} \quad (6.29)$$

Para oscilações de pequenas amplitudes e em primeira ordem com respeito a GM podemos integrar explicitamente a expressão citada. O potencial $V(r, z)$ é dado por

$$V_M(r, z) = \left(\frac{2GM\ell^2 z^2}{r^5} \right) \left[\frac{E^2}{m^2} + \frac{5}{2} \frac{L^2}{m^2 r^2} + (1 + \dot{z}_0^2) \right] \quad (6.30)$$

É evidente que no fim das contas, a solução deverá satisfazer à condição de consistência

$$\left| \frac{\partial V}{\partial r} \dot{r} \right| \ll \left| \frac{\partial V}{\partial z} \dot{z} \right| \quad (6.31)$$

Note que a equação (6.28) pode ser reescrita em termos de um potencial V_{eff} :

$$\left(1 + \frac{h^2}{m^2} \varphi^2 \right) e^{2a} \dot{z}^2 = \dot{z}_0^2 - V_{eff} \quad (6.32)$$

onde agora o potencial efetivo é

$$V_{eff} = V_0 + V_M \quad (6.33)$$

O potencial continua sendo confinante, logo, a partícula executará um movimento oscilatório na direção da dimensão extra, mas agora a amplitude de frequência pode depender da posição r .

Após analisarmos a equação de evolução para as coordenadas t, ϕ, θ e z , que seguem da equação de movimento (6.6), vamos agora considerar o movimento radial.

v) A equação para a coordenada r pode ser obtida a partir da condição $\tilde{g}_{AB} \dot{x}^A \dot{x}^B = -1$. Usando as equações (6.9) e (6.10), encontramos

$$-\frac{E^2}{(m^2 + h^2 \varphi^2)} \left(1 - \frac{2GM}{r} \left(1 + \frac{2\ell^2}{3r^2} - \frac{2\ell^2}{r^4} z^2 \right) \right)^{-1} + \frac{L^2}{(m^2 + h^2 \varphi^2) r^2} \left(1 - \frac{3GM\ell^2}{r^5} z^2 \right)^{-1} + e^{2a} \left(1 + \frac{2GM}{r} \left(1 + \frac{\ell^2}{r^2} + \frac{\ell^2}{r^4} z^2 \right) \right) \dot{r}^2 = - (1 + \dot{z}_0^2) \quad (6.34)$$

Se multiplicarmos pelo fator $e^{2a} \left(1 + \frac{h^2}{m^2} \varphi^2 \right)$, então, podemos usar (6.28) no lado

direito da equação. Desta forma, teremos

$$\begin{aligned}
& -\frac{E^2}{m^2} \left(1 - \frac{2GM}{r} \left(1 + \frac{2\ell^2}{3r^2} - \frac{2\ell^2}{r^4} z^2\right)\right)^{-1} + \frac{L^2}{m^2 r^2} \left(1 - \frac{3GM\ell^2}{r^5} z^2\right)^{-1} \\
& + e^{4a} \left(1 + \frac{h^2}{m^2} \varphi^2\right) \left(1 + \frac{2GM}{r} \left(1 + \frac{\ell^2}{r^2} + \frac{\ell^2}{r^4} z^2\right)\right) \dot{r}^2 = -((1 + \dot{z}_0^2) + V_M(r, z))
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Dividindo a equação (6.35) por $(1 + \dot{z}_0^2)$ e definindo uma massa efetiva $\mu^2 = m^2(1 + \dot{z}_0^2)$, então, obtemos:

$$\begin{aligned}
& -\frac{E^2}{\mu^2} \left(1 - \frac{2GM}{r} \left(1 + \frac{2\ell^2}{3r^2} - \frac{2\ell^2}{r^4} z^2\right)\right)^{-1} + \frac{L^2}{\mu^2 r^2} \left(1 - \frac{3GM\ell^2}{r^5} z^2\right)^{-1} \\
& + \frac{e^{4a} \left(1 + \frac{h^2}{m^2} \varphi^2\right)}{(1 + \dot{z}_0^2)} \left(1 + \frac{2GM}{r} \left(1 + \frac{\ell^2}{r^2} + \frac{\ell^2}{r^4} z^2\right)\right) \dot{r}^2 = -1 + \tilde{V}_M(r, z)
\end{aligned} \tag{6.36}$$

onde

$$\tilde{V}_M(r, z) = \left(\frac{2GM\ell^2 z^2}{r^5}\right) \left[\frac{E^2}{\mu^2} + \frac{5}{2} \frac{L^2}{\mu^2 r^2} + 1\right]$$

De acordo com a equação (6.36), o movimento radial está acoplado ao movimento transversal. No entanto, como a amplitude A do movimento oscilatório na direção da dimensão extra é muito pequena, podemos fazer uma expansão das funções dependentes da coordenada z em série de potências. Além disso, considerando que z oscila com frequência muito alta, então, de acordo com o chamado "método da média"(averaging method [8]), podemos, numa primeira aproximação, substituir z^2 pelo seu valor médio ($A^2/2$).

Procedendo desta forma, podemos mostrar que, até a ordem A^2 , o movimento radial será ditado pela seguinte equação:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1 + \Omega^2 A^2}{1 + \dot{z}_0^2}\right) \dot{r}^2 = -1 + \frac{E^2}{\mu^2} + \left[\frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} + \frac{2GML^2}{\mu^2 r^3}\right] \\
& + \left[\frac{2GM}{r} \left(1 - \frac{E^2}{3\mu^2}\right) + \frac{2GML^2}{\mu^2 r^3}\right] \frac{\ell^2}{r^2} + \left[\frac{2GM}{r} \left(1 - \frac{E^2}{\mu^2}\right) + \frac{2GML^2}{\mu^2 r^3}\right] \frac{\ell^2}{r^4} A^2
\end{aligned} \tag{6.37}$$

onde $\Omega^2 = \left(\frac{3}{2} \frac{h^2}{\kappa m^2} - 1\right) \frac{3}{2\epsilon\ell}$ e ΩA é da ordem de \dot{z}_0 .

6.2 Movimento de partículas sem massa

Já apresentados nos capítulos anteriores os seguintes testes para as soluções obtidas em uma brana sem espessura: o desvio da luz e o atraso temporal de um sinal luminoso. Estamos interessados agora em discutir estes testes em uma brana com espessura. Para tanto, devemos obter a equação do movimento para uma partícula sem massa, ou seja, pretendemos estudar as linhas de universo do tipo luz.

A eq. (6.6), que descreve o movimento de uma partícula com massa, não pode ser aplicada no limite $m \rightarrow 0$ para descrever o movimento da partícula sem massa, por que nesse limite, K^A não estará bem definida na brana. Assim, precisamos seguir um outro caminho para obter uma equação de movimento para a luz nesse contexto.

Podemos partir da relação (6.3). Tomando $m = 0$, temos

$$P_A P^A = -h^2 \varphi^2 \quad (6.38)$$

Nesse caso, a interação gera massa para a partícula que se move na dimensão extra, e é por meio desse mecanismo que ela permanece presa à brana. No centro da brana, onde $\varphi = 0$, recuperamos a expressão usual $P_A P^A = 0$. Baseados na ideia proveniente da mecânica ondulatória, que estabelece uma relação entre o momento linear (P^A) de uma partícula livre e o vetor de onda (K^A) da onda plana que a representa, somos levados a propor

$$K_A K^A = -h^2 \varphi^2 \quad (6.39)$$

A equação de movimento pode ser obtida tomando-se a derivada covariante da equação (6.39). Isto nos leva a seguinte equação

$$K^A \nabla_B K_A = -\frac{1}{2} \nabla_B (h^2 \varphi^2) \quad (6.40)$$

Se consideramos que o vetor de onda K_A é o gradiente da fase da onda S (que é

um campo escalar), i.e. $K_A = \nabla_A S$, então,

$$\nabla_B K_A = \nabla_A K_B \quad (6.41)$$

Usando esta condição em (6.39), obtemos

$$K^A \nabla_A K_B = -\frac{1}{2} h^2 \partial_B \varphi^2 \quad (6.42)$$

e a eq. (6.6) assume a seguinte forma

$$\frac{dK^A}{d\lambda} + \Gamma_{BC}^A K^B K^C = -\frac{1}{2} h^2 g^{AB} \partial_B \varphi^2 \quad (6.43)$$

Vamos admitir que essa é a equação de movimento do sinal luminoso que está ligado à brana. Vamos inicialmente estudar o comportamento da componente z do vetor de onda, i.e. K^z . A partir da equação (6.43), temos:

$$\frac{dK^z}{d\lambda} + \Gamma_{BC}^z K^B K^C = -\frac{1}{2} h^2 \partial_z \varphi^2 \quad (6.44)$$

Considerando a métrica (5.30), que descreve a geometria da brana com espessura na presença do corpo M , podemos verificar que os símbolos de Christoffel não-nulos são:

$$\Gamma_{\mu\nu}^z = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu,z} \quad (6.45)$$

e que $\Gamma_{zz}^z = 0$. Então (6.44), fica

$$\frac{dK^z}{d\lambda} - \frac{1}{2} (g_{\mu\nu,z}) K^\mu K^\nu = -\frac{1}{2} h^2 \varphi \varphi_z \quad (6.46)$$

Utilizando (6.13) e o fato de que $K_\mu K^\mu = -(h^2 \varphi^2 + K_z^2)$, a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{d}{d\lambda}[e^{2a}(h^2\varphi^2 + K_z^2)] = e^{2a}K_z q_{\mu\nu}K^\mu K^\nu \quad (6.47)$$

onde $q_{\mu\nu}$ está definido em (6.14).

A equação para as outras componentes $A = t$ e $A = \phi$ nos fornecem $g_{tt}K^t = E$ e $g_{\phi\phi}K^\phi = L$, respectivamente. Podemos verificar também que $K^\theta = 0$ é solução em $\theta = \pi/2$.

A equação para K^r pode ser extraída da condição (6.39). Vamos agora adotar a notação usual que identifica \dot{x}^A com K^A .

Usando esses resultados e seguindo o mesmo procedimento aplicado na seção anterior, obtemos:

$$\frac{d}{d\lambda}[e^{2a}(h^2\varphi^2 + \dot{z}^2)] = e^{2a}\dot{z} \left[\frac{4GM\ell^2 z E^2}{r^5} - \frac{10GM\ell^2 z L^2}{r^5 g_{\phi\phi}} - \frac{4GM\ell^2 z}{r^5} e^{-2a} \dot{z}_0^2 \right] \quad (6.48)$$

que sob as hipóteses de pequena amplitude e alta frequência, relativo ao movimento transversal, nos dá, após integração direta, a seguinte solução:

$$e^{2a}(h^2\varphi^2 + \dot{z}^2) = \dot{z}_0^2 - V_M(r, z) \quad (6.49)$$

onde

$$V_M(r, z) = \left(\frac{2GM\ell^2 z^2}{r^5} \right) \left[E^2 + \frac{5L^2}{2r^2} + \dot{z}_0^2 \right] \quad (6.50)$$

Em relação ao movimento radial do sinal luminoso, podemos seguir o mesmo caminho trilhado anteriormente. O resultado em ordem de A^2 é o seguinte:

$$\begin{aligned} (1 - \alpha A^2) \dot{r}^2 = & -\dot{z}_0^2 + E^2 - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2GM}{r} \left[\frac{L^2}{r^2} + \dot{z}_0^2 \right] \\ & - \frac{2GM\ell^2}{r^3} \left[\frac{E^2}{3} + \frac{L^2}{r^2} - \dot{z}_0^2 \right] - \frac{2GM\ell^2 A^2}{r^5} \left[E^2 - \frac{L^2}{r^2} - \dot{z}_0^2 \right] \end{aligned} \quad (6.51)$$

onde $\alpha = \frac{3}{2} \frac{A^2}{\varepsilon\ell}$.

6.2.1 Desvio da Luz

Como já discutido anteriormente, o desvio da luz é um dos testes clássicos da relatividade geral. Verificaremos que o movimento oscilatório da partícula na direção da dimensão extra influencia o resultado para o desvio da luz já conhecido na literatura. Utilizando o mesmo formalismo apresentado no capítulo 4 para obter o desvio da luz em uma brana fina, obtemos, a partir da eq. (6.51), que o ângulo de deflexão sofrido por um feixe de luz neste espaço-tempo, será dada por

$$\Delta\phi = \frac{2GM}{b} \left[1 + \frac{1}{\left(1 - \frac{\dot{z}_0^2}{E^2}\right)} + \frac{2}{3} \left(1 + \frac{2}{\left(1 - \frac{\dot{z}_0^2}{E^2}\right)} \right) \frac{\ell^2}{b^2} + \frac{4}{3} \frac{\ell^2 A^2}{b^4} \right] \quad (6.52)$$

onde b é o parâmetro de impacto.

Se não houver movimento da partícula ao longo da dimensão extra, teremos que $A = 0$ e $\dot{z}_0 = 0$, e recobramos o resultado já obtido no capítulo 4, para o desvio da luz causado pelo campo gravitacional de uma corpo de massa M , no limite de campo fraco em uma brana do tipo RSII. Além disso, se fazemos $\ell^2 = 0$, recuperamos o resultado já bem conhecido da Relatividade Geral.

É interessante observar que a deflexão neste cenário, dada em (6.52), depende da energia do feixe luminoso. Se admitirmos que a energia é proporcional a frequência de radiação, então a equação (6.52) mostra que a deflexão dependerá da frequência de radiação. Quanto menor a frequência (fixando \dot{z}_0) maior a deflexão. Portanto, a luz vermelha sofrerá a maior deflexão. Assim, a luz branca de uma estrela será espalhada pelo campo gravitacional produzido pela massa M em feixes de luzes com diferentes cores, produzindo assim o que chamamos de arco-íris gravitacional. Até onde sabemos não há nenhum relato da observação deste fenômeno. Isso, portanto, pode ser usado para estabelecer um vínculo experimental para \dot{z}_0^2 .

6.2.2 Atraso temporal

Um outro teste da Teoria Geral da Relatividade é o atraso temporal (time delay) ou Radar echo delay. Novamente vamos considerar que a partícula se move no plano $\theta = \pi/2$. O movimento radial é governado pela equação (6.51). Desta forma, utilizando o formalismo do capítulo 4, onde podemos escrever a eq. (6.51) na forma de (4.28), o tempo necessário para que a luz vá de r até r_0 e volte para r , onde r_0 é o ponto de maior proximidade entre a fonte e o raio de luz, é dada por

$$\begin{aligned}
t(r, r_0) = & \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{(1 - \dot{z}_0^2/E^2)} + \frac{3GM}{(1 - \dot{z}_0^2/E^2)} \left(1 - \frac{1}{3(1 - \dot{z}_0^2/E^2)^{1/2}} \right) \ln \left(\frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0} \right) \\
& + \frac{GM}{r_0} \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{(1 - \dot{z}_0^2/E^2)} \left(1 - \frac{1}{(1 - \dot{z}_0^2/E^2)} \right) + \frac{GM}{(1 - \dot{z}_0^2/E^2)^{3/2}} \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} \\
& + \frac{7GM\ell^2}{3r_0^2} \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r} + \frac{2GM\ell^2}{3r_0^3} \sqrt{r^2 - r_0^2} \left(1 - \frac{1}{(1 - \dot{z}_0^2/E^2)} \right) \\
& + \frac{2GM\ell^2}{3r_0^2} \frac{1}{(1 - \dot{z}_0^2/E^2)^{1/2}} \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} + \frac{GM\ell^2 A^2}{3r_0^4} \left(\frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r} - \frac{(r^2 - r_0^2)^{3/2}}{r^3} \right)
\end{aligned} \tag{6.53}$$

onde a distância de maior proximidade r_0 , está relacionada com o parâmetro de impacto b , da seguinte forma

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{r_0} (1 + \delta) \tag{6.54}$$

e δ é dado por

$$\delta = \frac{GM}{b} \frac{1}{\left(1 - \frac{\mu^2}{E^2}\right)} \left[1 + \frac{2\ell^2}{3b^2} - 2\frac{A^2\ell^2}{b^4} \right] \tag{6.55}$$

O termo $\sqrt{r^2 - r_0^2}$ em (6.53), é tempo de viagem esperado, caso a luz viajasse em uma linha reta com velocidade unitária c [80]. Evidentemente, as correções devido o campo gravitacional e a existência da dimensão extra produzem um atraso no tempo

de viagem da luz. Esse atraso é então dado por:

$$\begin{aligned}
\Delta t = & \frac{4GM}{(1 - \dot{z}_0^2/E^2)} + \frac{6GM}{(1 - \dot{z}_0^2/E^2)} \left(1 - \frac{1}{3(1 - \dot{z}_0^2/E^2)^{1/2}} \right) \ln \left(\frac{4r_1 r_2}{r_o^2} \right) \\
& + \frac{28GM\ell^2}{3r_o^2} + \frac{8GM\ell^2}{3r_o^2} \frac{1}{(1 - \dot{z}_0^2/E^2)^{1/2}} + \frac{8GM\ell^2 A^2}{3r_o^4} \\
& + 2(r_1 + r_2) \left(\frac{1}{(1 - \dot{z}_0^2/E^2)} - 1 \right) + \frac{2GM}{r_o} \frac{(r_1 + r_2)}{(1 - \dot{z}_0^2/E^2)} \left(1 - \frac{1}{(1 - \dot{z}_0^2/E^2)} \right) \\
& + \frac{4GM\ell^2}{3r_o^2} (r_1 + r_2) \left(1 - \frac{1}{(1 - \dot{z}_0^2/E^2)} \right)
\end{aligned} \tag{6.56}$$

Verificamos que se fazemos $A = 0$ e $\dot{z}_0 = 0$, recuperamos a eq. (4.35), resultado que foi obtido no capítulo 4 e na referência [58], calculado a partir da métrica de Garriga e Tanaka (3.23). Se $\ell^2 = 0$, então recuperamos o resultado já conhecido da Relatividade Geral. Verificamos que, assim como no caso do desvio da luz, o atraso temporal também irá depender da frequência de radiação do sinal luminoso (onda eletromagnética).

Capítulo 7

Polarização elétrica induzida pela gravidade em branas com espessura.

No cenário das branas, nosso espaço-tempo quadrimensional é visto com uma subvariedade isometricamente imersa em uma espaço ambiente com dimensões extras. O ingrediente básico destes modelos é o confinamento da matéria e dos campos na brana, enquanto a gravidade tem acesso a todas as dimensões [3, 5, 51, 66, 67, 71]. Neste cenário, as dimensões extras podem ser muito maior que a escala de Planck. Na realidade, no modelo RSII, foi mostrado que a dimensão extra pode ainda ter uma escala de comprimento infinita sem qualquer conflito fenomenológico [67].

Uma versão modificada do modelo RSII, conhecida como fat brane (brana com espessura), assume que a brana possui uma espessura e que os léptons e os bárions vivem em diferentes fatias da brana [7]. A motivação original deste modelo é tentar explicar a estabilidade dos prótons sem a necessidade de postular uma simetria específica para este fim. A conservação do número bariônico, que protege o próton do decaimento, é apenas uma consequência da separação dos férmions em uma brana com espessura, uma vez que esta separação produz uma forte supressão no acoplamento entre quarks e léptons. Por outro lado, campos de gauge tem acesso a toda a

brana. Assim, se a espessura da brana é da ordem do TeV, então, podemos esperar que as evidências das dimensões extras possam ser detectadas em experimentos no LHC [6, 7, 9, 16, 29, 40, 47, 53].

Em virtude do confinamento, as partículas não "vêm" a geometria completa do espaço ambiente, mas elas sentem a métrica induzida na hipersuperfície onde elas vivem. Se não existem fontes do campo gravitacional, então todos os férmions vêm o mesmo espaço-tempo de Minkowski. Contudo, sob a influência da gravidade de uma massa M na brana, a métrica induzida será diferente para distintas fatias da brana. Isto significa que léptons e bárions irão sentir diferentes geometrias. Do ponto de vista de um observador quadrimensional (que não tem conhecimento das dimensões extras), isto será visto como uma violação do princípio da equivalência, uma vez que partículas com as mesmas coordenadas quadrimensional na brana irão sentir diferentes acelerações. Esta aceleração de maré \vec{A} , devida à separação dos férmions na dimensão extra, produz uma força interna em um átomo de hidrogênio, por exemplo, induzindo, desta maneira, um dipolo elétrico na direção paralela à brana. Como veremos, a Hamiltoniana associada a interação entre o átomo e o campo gravitacional de M contém um termo de dipolo que tem exatamente a mesma forma da hamiltoniana do efeito Stark, $H_d = -\mu\vec{A} \cdot \delta\vec{r}$.

7.1 Equação do movimento

É bem conhecido que o confinamento da matéria em uma brana com espessura pode ser obtida por meio de uma interação do tipo Yukawa entre o campo de Dirac e o campo escalar [71]. Sob essa interação, um pacote de onda sem massa do campo de Dirac possui um pico no centro da parede de domínio e decai exponencialmente na direção da dimensão extra. Quando uma massa não nula é levada em conta, este pico sofre um desvio, na direção da coordenada extra, proporcional a massa da partícula [7]. Desta forma, elétrons e quarks estão localizados em diferentes fatias da brana.

Neste cenário, as partículas estão em um estado ligado com respeito à direção

transversal, mas elas podem se propagar livremente na direção paralela. Se nós queremos estudar o movimento de uma partícula ao longo da brana, é conveniente considerar uma abordagem clássica para esse problema. No intuito de alcançar esse objetivo, primeiro, é necessário fornecer um mecanismo de confinamento das partículas de teste na brana, que pode simular classicamente o confinamento dos campos de matéria. Como já discutido, na referência [25], Dahia e Romero propuseram, baseados na interação do tipo Yukawa entre os férmions e a parede de domínio, uma Lagrangeana particular que descreve o movimento das partículas neste cenário. Esta Lagrangeana tem o efeito de aumentar a massa efetiva da partícula devido a sua interação com o campo escalar. Esta modificação é suficiente para garantir a localização da partícula. Esta nova Lagrangeana já foi definida no capítulo anterior e é escrita como $\mathcal{L} = \sqrt{m^2 + h^2\varphi^2} \sqrt{-\tilde{g}_{AB}\dot{x}^A\dot{x}^B}$, onde m é a massa de repouso da partícula livre e h é a constante de acoplamento da interação.

Contudo, com o intuito de introduzir a separação dos férmions neste modelo, devemos encontrar um novo acoplamento entre a massa e o campo escalar. A característica essencial desse novo acoplamento é que o aumento da massa da partícula dependerá de m , assegurando desta maneira, que a massa efetiva seja modificada por uma quantidade que depende da massa original da partícula. Provavelmente, existem muitas maneiras diferentes de se fazer isso, contudo, baseados em [7], uma maneira simples de conseguir esse objetivo, é substituindo φ por $\varphi + \alpha m$, onde α é um novo parâmetro do modelo. Assim, a nova Lagrangeana será dada por

$$\mathcal{L} = - \left[- (m^2 + h^2 (\varphi + \alpha m)^2) \tilde{g}_{AB} \dot{x}^A \dot{x}^B \right]^{1/2} \quad (7.1)$$

Calculando o $5D$ -momento P_A da partícula, que é obtido por tomar $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}^A$, encontramos

$$P^A P_A = - (m^2 + h^2 (\varphi + \alpha m)^2) \equiv -m_{ef}^2 \quad (7.2)$$

para partículas de teste massivas ($\tilde{g}_{AB}\dot{x}^A\dot{x}^B = -1$). É evidente que a relação usual é

recobrada quando desligamos a interação, isto é, tomando $h = 0$.

As equações do movimento associadas com a Lagrangeana (7.1) podem ser escritas como em (6.6), assim temos

$$\ddot{x}^A + \left\{ \begin{array}{c} A \\ B C \end{array} \right\} \dot{x}^B \dot{x}^C = K^A \quad (7.3)$$

onde a força $K^A = -\Pi^{AC} \left(\tilde{\nabla}_C \ln \mathcal{M} \right)$ é o gradiente de um potencial de massa $\mathcal{M} \equiv e^{2a} m_{ef}^2$, projetado pelo tensor $\Pi^{AC} \equiv \tilde{g}^{AC} + \dot{x}^A \dot{x}^C$ no 4-espaço ortogonal a velocidade própria da partícula \dot{x}^A .

Como vimos no capítulo 5, quando não existe nenhuma fonte adicional de gravidade ($M = 0$), a métrica no espaço ambiente é dada por (5.9) e o movimento transversal está desacoplado do movimento na direção paralela. Neste caso, a primeira integral da eq. (7.3) na direção z pode ser obtida diretamente, mostrando que o movimento transversal é limitado pelo potencial de massa \mathcal{M} de acordo com:

$$\mathcal{M} \dot{z}^2 = \mathcal{E} - \mathcal{M} \quad (7.4)$$

onde \mathcal{E} é alguma constante relacionada com as condições iniciais do movimento. A função \mathcal{M} faz o papel de um potencial confinante e possui um ponto de equilíbrio estável quando os parâmetros h e α satisfazem as condições apropriadas. Além disso, a posição de equilíbrio z_0 de cada partícula irá depender de sua massa. Se admitimos que z_0 é pequeno em comparação com a espessura da brana ε , então, podemos mostrar que a partícula com massa m estará confinada em uma fatia da brana aproximadamente especificada por:

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \alpha m \sqrt{\varepsilon \ell \kappa} \quad (7.5)$$

Como podemos ver, os elétrons estão localizados mais próximos do centro do que os quarks. É claro que podemos manipular a Lagrangeana com o intuito de obter o resultado inverso, ou seja, os quarks presos no centro da brana e o elétron em uma

fatia superior [26]. Para nosso propósito, o que é importante, é que podemos formular um modelo clássico simples que tenha a característica essencial do modelo de brana com separação de léptons e bárions em diferentes fatias da brana. Por outro lado, para $M = 0$, tanto os léptons como os bárions se movem livremente na direção tangente do mesmo espaço-tempo de Minkowski 4-D induzido .

Esta situação muda quando consideramos a presença de uma massa M na brana. Por motivos de simplicidade, daqui por diante vamos admitir que os quarks estão confinados no centro da parede de domínio enquanto que os elétrons estão presos em alguma fatia z_0 . Com esta escolha, podemos admitir que quase toda a massa M está localizada no centro da brana, uma vez que os bárions estão presos nesta hipersuperfície. Segue, então, que a métrica será dada por (5.30) e por isso léptons e bárions sentirão diferentes geometrias quadridimensionais, uma vez que a métrica induzida na brana depende do valor de z . Como consequência, de um ponto de vista quadrimensional o princípio da equivalência será violado e este fato pode produzir um interessante fenômeno na brana, como por exemplo, a indução de dipolo elétrico em um átomo de Hidrogênio pelos efeitos gravitacionais.

Com o intuito de investigar isto, vamos considerar o movimento de uma partícula no espaço-tempo descrito pela métrica (5.30). Devido a simetria deste espaço-tempo, a energia E e o momento angular axial L serão conservados e o movimento da partícula irá obedecer às seguintes equações

$$-m_{ef}\tilde{g}_{tt}\dot{t} = E \tag{7.6}$$

$$m_{ef}\tilde{g}_{\phi\phi}\dot{\phi} = L \tag{7.7}$$

Como vimos, por motivo de simplicidade, podemos escolher $\theta = \frac{\pi}{2}$. Por outro lado, o movimento na direção z não está desacoplado do movimento radial. Contudo, se a partícula está em um movimento circular ou estático ($r_0 = const$), então o único

efeito da massa M será o de modificar a posição de equilíbrio da partícula por uma quantidade da ordem de GM .

Por sua vez, analisando o movimento radial, podemos ver que existem órbitas circulares estáveis para valores apropriados da energia e do momento angular.

De fato, o movimento radial é governado pela seguinte equação

$$-\frac{E^2}{\mu^2} \left(1 - \frac{2GM}{r} \left(1 + \frac{2\ell^2}{3r^2} - \frac{2\ell^2}{r^4} z^2\right)\right)^{-1} + \frac{L^2}{\mu^2 r^2} \left(1 - \frac{3GM\ell^2}{r^5} z^2\right)^{-1} + e^{2a} \left(1 + \frac{2GM}{r} \left(1 + \frac{\ell^2}{r^2} + \frac{\ell^2}{r^4} z^2\right)\right) \dot{r}^2 = -(1 + \dot{z}^2) \quad (7.8)$$

Assim, se tomarmos a derivada da equação (7.8) em um movimento circular estável, $r = const.$, e impusermos $\dot{r} = 0$ e $\ddot{r} = 0$, obtemos uma relação entre a energia e o momento angular dada por

$$\frac{E^2}{L^2} = \frac{1}{GM r_0} \left(1 + \frac{21GM\ell^2}{2r_0^5} z_0^2 - \frac{2\ell^2}{r_0^2} + \frac{10\ell^2}{r_0^4} z_0^2\right) \quad (7.9)$$

Considerando isto, podemos ver que a partir das equações (7.6) e (7.7) a frequência angular da partícula em um movimento circular de raio r_0 é dada por

$$\omega^2 = \left(\frac{\dot{\phi}}{\dot{t}}\right)^2 = \frac{L^2}{E^2} \left(-\frac{\tilde{g}_{tt}}{\tilde{g}_{\phi\phi}}\right)^2. \quad (7.10)$$

Assim, utilizando a métrica (5.30) e (7.9), encontramos

$$\omega^2 = \left(\frac{\dot{\phi}}{\dot{t}}\right)^2 = \frac{GM}{r_0^3} \left(1 + \frac{2\ell^2}{r_0^2} - \frac{10\ell^2}{r_0^4} z_0^2\right) \quad (7.11)$$

Isto mostra claramente que a frequência angular depende da massa da partícula por meio de z_0 dado por (7.5). Da perspectiva de observadores quadrimensionais, esta dependência da massa será interpretada como uma violação do princípio da equivalência. De fato, em uma órbita circular com o mesmo raio r_0 , o próton (preso no centro da brana) irá se mover mais rapidamente que o elétron.

7.2 Dipolo elétrico induzido pela gravidade

Se considerarmos um átomo de hidrogênio orbitando a massa M com uma certa frequência angular, então, baseados no raciocínio anterior, somos levados a esperar que o raio da órbita do elétron (\vec{r}_e) e o raio da órbita do próton (\vec{r}_p) devem ser diferentes. O centro da carga negativa tende a circular em uma órbita mais externa em comparação com a órbita do próton. Poderemos ver isso diretamente da Lagrangeana (7.1). De fato no regime de campo fraco, segue de (7.1) que, neste modelo, a Lagrangeana das baixas velocidades da partícula confinada em alguma fatia z_0 , após termos excluído o termo referente à energia de repouso, é aproximadamente dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_s v^2 - m_s \psi, \quad (7.12)$$

onde $m_s \equiv \sqrt{m^2 + h^2 (\varphi(z_0) + \alpha m)^2 e^{a(z_0)}}$ pode ser interpretado como a massa mensurável da partícula, v é sua velocidade ao longo da brana e ψ é o potencial gravitacional da massa M sentido pela partícula localizada na fatia z da brana, dado por

$$\psi = -\frac{GM}{r} \left(1 + \frac{2\ell^2}{3r^2} - \frac{2\ell^2}{r^4} z^2 \right) \quad (7.13)$$

Então, para o elétron localizado na fatia z_0 e o próton localizado no centro da brana ($z = 0$), respectivamente temos

$$\psi_e = -\frac{GM}{r} \left(1 + \frac{2\ell^2}{3r^2} - \frac{2\ell^2}{r^4} z_0^2 \right) \quad (7.14)$$

e

$$\psi_p = -\frac{GM}{r} \left(1 + \frac{2\ell^2}{3r^2} \right) \quad (7.15)$$

Segue diretamente de (7.12) que a Hamiltoniana não-relativística do átomo de

Hidrogênio neste cenário é dada por

$$H = \frac{P_p^2}{2m_p} + \frac{P_e^2}{2m_e} + m_p\psi_p + m_e\psi_e + U \quad (7.16)$$

onde os índices e e p indicam o elétron e o próton respectivamente, P é o momento linear da partícula ao longo da direção paralela à brana e U é a energia potencial das interações elétrica e gravitacional entre o próton e o elétron.

Podemos expressar a Hamiltoniana em termos das coordenadas do centro de massa (\vec{R}):

$$\vec{R} = \frac{m_p\vec{r}_p + m_e\vec{r}_e}{m_p + m_e} \quad (7.17)$$

e da coordenada relativa:

$$\delta\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_e \quad (7.18)$$

Considerando a parte da Hamiltoniana devido à energia potencial gravitacional, ou seja, $H_g = m_p\varphi_p + m_e\varphi_e$, podemos verificar que em uma expansão até primeira ordem em $|\delta\vec{r}|$, obtemos:

$$H_g = -\frac{GMm}{R} \left(1 + \frac{2\ell^2}{3R^2} - \frac{2\ell^2}{R^4} \left(\frac{m_e}{m} \right) z^2 \right) - \mu \left(\frac{10GM\ell^2 z^2}{R^7} \vec{R} \right) \cdot \delta\vec{r} \quad (7.19)$$

onde $\mu = \frac{m_p m_e}{m}$, é a massa reduzida do átomo e $m = m_p + m_e$ é a massa total.

O primeiro termo que não contém a coordenada $\delta\vec{r}$, descreve o campo gravitacional no centro de massa do sistema. Ele se diferencia do valor Newtoniano por contribuições decorrentes da existência da dimensão extra.

Já o segundo termo de H_g é bastante incomum para o campo gravitacional, pois é um termo de dipolo. Este novo termo que surge devido à separação dos elétrons e prótons em diferentes fatias da brana, tem a forma da Hamiltoniana de Stark, ou seja:

$$H_d = -\mu\vec{A} \cdot \delta\vec{r} \quad (7.20)$$

onde, no lugar do campo elétrico aparece a aceleração de maré \vec{A} entre o elétron e

o próton e μ é a massa reduzida do átomo. Devemos enfatizar que \vec{A} é a aceleração gravitacional relativa entre o elétron e o próton quando eles têm as mesmas coordenadas quadrimensionais [26]. É evidente que a origem desta aceleração é a separação dos férmions ao longo da dimensão extra e é dada por

$$\vec{A} = -GM \left(\frac{10\ell^2}{R^7} z_0^2 \right) \vec{R} \quad (7.21)$$

A hamiltoniana H_d irá induzir um dipolo elétrico \vec{p} no átomo de hidrogênio cuja direção tende a se alinhar com o campo de maré. Com o intuito de fazer uma estimativa da magnitude do dipolo, nós vamos descrever o átomo segundo uma abordagem semi-clássica. Primeiro, admitimos que a carga elétrica está uniformemente distribuída em uma nuvem em torno do próton. A aceleração de maré dentro do átomo de Hidrogênio irá produzir uma separação radial entre o próton e o centro da carga negativa, dando origem a uma força elétrica \mathbf{F} entre eles.

Para calcular \mathbf{F} , nós vamos fazer algumas considerações. Como vimos no capítulo 2, de acordo com o modelo de brana espessa, o estado da partícula é descrita por um pacote de onda muito estreito ao longo da dimensão extra e assim a função de onda pode ser considerada como um distribuição delta na direção z . Então, podemos pensar que a nuvem eletrônica está espalhada em um 3-volume esfericamente simétrico da fatia z_0 . Uma esfera em uma hipersuperfície constitui uma espécie de disco tridimensional da perspectiva do espaço ambiente. Estamos admitindo que o raio do disco é igual ao raio de Bohr a . Esta situação pode ser ilustrada pela figura (7.1).

Sabemos que o elétron e o próton estão separados em diferentes fatias da brana na direção da dimensão extra. No entanto, devido à ação do campo gravitacional da massa M , o próton não estará localizado ao longo do eixo de simetria da nuvem eletrônica, mas irá sofrer um pequeno deslocamento $\delta\vec{r}$ na direção radial. É razoável esperar que essa separação radial δr não seja maior que z_0 . Podemos calcular a força \mathbf{F} por meio do potencial eletrostático gerado pela nuvem eletrônica em um ponto situado na vizinhança do seu eixo de simetria a uma distância z_0 do seu centro.

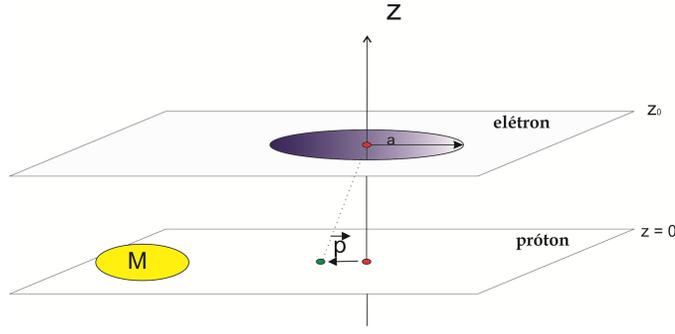


Figura 7.1: Elétron e próton em diferentes fatias da brana. Devido à ação do campo gravitacional um momento de dipolo induzido \vec{p} , surge como efeito da dimensão extra.

De modo semelhante ao cálculo do potencial gravitacional em um espaço-tempo com n dimensões, dado pela equação (2.32), podemos calcular o potencial eletrostático em 5 dimensões da seguinte forma

$$\Phi(\vec{R}) = k^{(5)} \int \frac{\rho dv'}{|\vec{R} - \vec{R}'|^2} \quad (7.22)$$

onde $k^{(5)}$ é a constante eletrostática em cinco dimensões e ρ a densidade volumétrica de carga elétrica. Como desejamos calcular o potencial em um ponto ao longo do eixo de simetria do disco, temos que $\vec{R} = z \cdot \hat{z}$ é o vetor que localiza esse ponto. Assim, a eq. (7.22) fica escrita como

$$\Phi(\vec{R}) = 4\pi k^{(5)} \rho \int_0^a \frac{R'^2}{(R'^2 - z^2)} dR' \quad (7.23)$$

Resolvendo a integral, obtemos

$$\Phi(z) = 4\pi k^{(5)} \rho [a - \arctan(a/z)] \quad (7.24)$$

A partir de (7.24), podemos facilmente calcular a componente do campo elétrico na direção da dimensão extra, temos portanto:

$$E_z = 4\pi k^{(5)} \rho \left[\arctan\left(\frac{a}{z}\right) - \frac{a}{z_0(1 + a^2/z^2)} \right] \quad (7.25)$$

Em torno ponto z_0 , a equação de Gauss da eletrostática se resume a $\nabla \cdot \vec{E} = 0$. Pela simetria o campo elétrico depende apenas da coordenada radial e da coordenada extra, logo, em coordenadas cilíndricas em 5D, a lei de Gauss pode ser escrita como:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (7.26)$$

Podemos, então, encontrar a componente radial do campo elétrico entre o elétron e o próton se integramos a equação acima. Substituindo (7.25) em (7.26), obtemos a componente radial do campo elétrico:

$$E_r = 4\pi k^{(5)} \rho \left[\frac{2}{3} \frac{a^3}{z^4 (1 + a^2/z^2)^2} r \right] \quad (7.27)$$

Avaliando esta componente em z_0 e considerando que $z_0 \ll a$, ficamos com:

$$E_r = \left(\frac{ke\varepsilon}{a^4} \right) r \quad (7.28)$$

onde substituímos $\rho = \frac{3e}{4\pi a^3}$ e k é a constante eletrostática em 4 dimensões, que se relaciona com $k^{(5)}$, conforme a equação (2.40). Como vimos, a separação radial é pequena em comparação com z_0 , e por isso, podemos fazer $r \sim \delta r$. Portanto, a força \mathbf{F} fica determinada da seguinte maneira

$$\vec{F} = \left(\frac{ke^2\varepsilon}{a^4} \right) \delta \vec{r} \quad (7.29)$$

No estado de equilíbrio a força elétrica interna e a força de maré são balanceadas, então, o dipolo elétrico induzido pela gravidade é proporcional à aceleração de maré, ou seja:

$$\vec{p} = \frac{a^4 \mu}{ke\varepsilon} \vec{A} \quad (7.30)$$

O fator de proporcionalidade, que define a polarizabilidade elétrica do átomo de hidrogênio induzido pela gravidade, pode ser escrito como $\alpha_G = \frac{a\mu}{\varepsilon e} \alpha_E$ - onde α_E é a

polarizabilidade eléctrica do átomo induzido pelo campo eléctrico. Com o objetivo de fazer uma comparação entre esses efeitos, vamos considerar o campo eléctrico equivalente $\vec{E}_{eqv} \equiv \left(\frac{\mu}{e}\right) \vec{A}$ que é capaz de produzir a mesma aceleração \vec{A} em uma partícula com carga e e massa μ . Em uma brana, cuja tensão é da ordem de Tev, o dipolo induzido pela gravidade será aproximadamente $10^9 \left(\simeq \frac{a}{\varepsilon}\right)$ maior que o dipolo induzido pelo campo eléctrico equivalente. Apesar desta impressionante amplificação de magnitude, como a aceleração de maré \vec{A} produzida por corpos celestes é muito pequena, então, a magnitude de um dipolo induzido é pequeno em comparação com a magnitude obtida em um laboratório com um campo eléctrico forte. De fato, se consideramos que ℓ é da ordem do milímetro [52], então, o dipolo gravitacional induzido em um átomo de Hidrogênio no estado fundamental na superfície da Terra é $p \sim 10^{-72}$ aC·Å. Contudo, devemos esperar uma amplificação deste dipolo gravitacional induzido se nós levarmos em conta não o átomo individualmente mas sim uma certa quantidade de gás de Hidrogênio em órbita. Também, esperamos um aumento significativo do efeito na presença de um buraco negro microscópico para o qual $R \ll \ell$.

Finalmente, também temos que enfatizar que em uma brana com espessura, como os elétrons e prótons estão presos em diferentes fatias da brana, então todo átomo deve ter um dipolo eléctrico na direção z . Contudo, nós mostramos aqui que o átomo em um campo gravitacional de uma massa M irá adquirir um dipolo na direção paralela à brana. Portanto, o átomo irá produzir um campo eléctrico na brana cuja forma pode ser reconhecida por observadores em quatro dimensões e servir como mais um teste observacional deste modelo de dimensão extra.

Capítulo 8

Conclusão

Neste trabalho investigamos soluções de buracos negros em branas do tipo RSII, mais precisamente consideramos um extensão deste modelo para um caso onde a brana apresenta uma espessura. Com este fim, após uma revisão sobre as teorias de dimensões extras de maior destaque, em especial o modelo RSII (onde o universo é tratado como uma brana imersa em um espaço ambiente com uma dimensão extra de comprimento infinito), estudamos soluções de buracos negros em branas finas, i.e; sem espessura, no modelos RSII. Existem duas soluções de maior destaque: A solução de Garriga e Tanaka que descreve uma solução aproximada de um buraco negro em uma brana do tipo RSII no limite de campo fraco, portanto, válida para longas distâncias; e a solução obtida por Dadhich *et al.* denominada de DMPR. Esta é uma solução exata de um buraco negro estático localizado no cenário RSII e que apresenta uma métrica com a mesma forma da métrica de Reissner-Nördstrom, porém sem carga elétrica. No lugar da carga elétrica, temos o termo de correção denominado de carga de maré que surge devido aos efeitos da gravidade do espaço ambiente. Acredita-se que a solução DMPR deve representar o comportamento da geometria na vizinhança de um buraco negro real. A partir dessas soluções estabelecidas na brana fina, determinamos soluções correspondentes em branas com espessura.

No contexto da teoria de campos, a brana pode ser descrita por meio de uma parede de domínio. A brana fina seria, então, uma idealização obtida tomando-se o limite em

que a espessura da parede vai a zero.

Dentro desse contexto, as versões "regularizadas" das soluções de Garriga e Tanaka e DMPR foram obtidas seguindo-se o seguinte procedimento: Admitimos que as soluções de branas finas são válidas no centro da parede e propagamos a geometria dessa hipersuperfície ao longo da dimensão extra usando as equações de Einstein em 5D acopladas ao campo escalar (que produz a parede).

Uma vez determinadas as soluções, passamos a investigar os possíveis efeitos da dimensão extra no movimento das partículas. Com esse propósito, aplicamos dois testes clássicos da Relatividade Geral: o desvio da luz e o atraso temporal.

Definindo um Lagrangeana apropriada para descrever o confinamento das partículas de teste na brana, podemos verificar que, neste cenário de branas, o desvio gravitacional da luz, depende da energia da luz, por conta do seu movimento oscilatório na dimensão extra. Por conta disso, a luz branca emitida por uma estrela, ao ser desviada por um corpo com massa confinado na brana, será decomposta em suas várias cores, produzindo dessa forma uma espécie de arco-íris gravitacional.

Vimos também que o atraso temporal depende da frequência do sinal emitido, neste cenário.

Em princípio, esses efeitos poderiam ser detectados e os dados observacionais poderiam ser usados para estabelecer vínculos aos parâmetros do modelo de dimensão extra.

Um outro efeito discutido, surge em um modelo de separação de férmions que corresponde a uma variação do modelo RSII. Neste modelo, os férmions estão confinados em diferentes hipersuperfícies da brana e sua posição ao longo da dimensão extra depende da sua massa. Sendo assim, prótons e elétrons se encontram em diferentes fatias da brana. A motivação original desse modelo, é explicar a estabilidade dos prótons sem que seja necessário recorrer a qualquer tipo de simetria.

Imaginamos, então, o caso de um átomo de hidrogênio orbitando um corpo massivo (ou estrela) cujo espaço-tempo é descrito pela solução do tipo Garriga e Tanaka na brana com espessura. Uma vez que o próton e o elétron orbitam a estrela em dife-

rentes posições ao longo da dimensão extra, eles irão perceber diferentes geometrias quadrimensionais, já que a métrica possui uma dependência da coordenada extra. De um ponto de vista quadrimensional isso seria uma violação do princípio da equivalência, uma vez que partículas com as mesmas coordenadas quadrimensional na brana irão sentir diferentes "acelerações". Esta aceleração de maré, por sua vez, irá produzir uma força interna no átomo de hidrogênio, induzindo assim um dipolo elétrico no átomo. Podemos, então falar em um efeito Stark gravitacional. Um fato interessante é que o termo da Hamiltoniana que descreve este efeito apresenta a mesma forma da Hamiltoniana do efeito Stark, onde no lugar do campo elétrico temos a aceleração de maré entre o elétron e o próton quando eles têm as mesmas coordenadas quadrimensionais.

O dipolo induzido, em princípio poderia ser detectado, o que reportaria a um indício de existência da dimensão extra e a confirmação do modelo de separação de férmions.

Como uma perspectiva de trabalho, pretendemos estudar versões regularizadas de soluções cosmológicas para extrair novos vínculos empíricos. Além disso, podemos considerar todo o problema do movimento das partículas por meio de um tratamento quântico.

APÊNDICE

Transformação de coordenadas

Desejamos obter uma equação que nos forneça a relação entre $h_{\mu\nu}$, a métrica perturbada no gauge RS , e o conteúdo energético na brana. Para tanto, devemos obter uma relação entre $\bar{h}_{\mu\nu}$ e $h_{\mu\nu}$. Isso pode ser feito por meio da seguinte transformação de coordenadas

$$\bar{x}^A = x^A + \xi^A(x) \quad (A1)$$

onde $\xi^A(x)$ é uma função de todas as coordenadas tal que $\xi^A(x) \ll 1$.

Segue de (A1) que os campos \bar{h}_{AB} e h_{AB} estão relacionados da seguinte forma:

$$\bar{h}_{MN} = h_{MN} - \gamma_{AN} \xi^A_{,M} - \gamma_{AM} \xi^A_{,N} - \xi^A(x) \gamma_{MN,A} \quad (A2)$$

onde γ_{AB} corresponde à métrica de fundo, tal que

$$\gamma_{\mu\nu} = a^2 \eta_{\mu\nu}$$

$$\gamma_{\mu z} = 0$$

$$\gamma_{zz} = -1$$

Como, $\bar{h}_{zz} = h_{zz} = 0$, segue da equação (A2), que

$$\xi^z_{,z} = 0 \quad (A3)$$

ou seja, a função ξ^z não possui dependência da coordenada extra [75], portanto

$$\xi^z \equiv \xi^z(x^\mu) \quad (A4)$$

Considerando que nos dois gauges temos

$$\bar{h}_{\mu z} = h_{\mu z} = 0 \quad (\text{A5})$$

podemos escrever a equação (A2), da seguinte forma

$$\bar{h}_{\mu z} = h_{\mu z} - (\gamma_{A\mu} \xi_{,z}^A + \gamma_{Az} \xi_{,\mu}^A) - \xi^A(x) \gamma_{\mu z, A} \quad (\text{A6})$$

De onde obtemos a seguinte equação diferencial para as funções $\xi^\mu(x)$

$$\xi_{,z}^\alpha = e^{-2z/\ell} \eta^{\mu\alpha} \xi_{,\mu}^z \quad (\text{A7})$$

para isso utilizamos a métrica de fundo inversa, dada por $\gamma^{\mu\alpha} = e^{-2z/\ell} \eta^{\mu\alpha}$. Integrando com respeito a variável z , temos

$$\xi^\alpha(x, z) = -\frac{\ell}{2} e^{-2z/\ell} \eta^{\mu\alpha} \xi_{,\mu}^z + F^\alpha(x^\alpha) \quad (\text{A8})$$

onde $F^\alpha(x^\alpha)$ é uma função oriunda da integração, a qual não possui dependência com a coordenada extra [75].

Uma vez obtida as condições necessárias para $\xi^\alpha(x)$ e $\xi^z(x^\mu)$ a fim de satisfazer às condições impostas, tanto nas coordenadas Gaussianas como no gauge RS , resta-nos agora obter a relação entre $\bar{h}_{\mu\nu}$ e $h_{\mu\nu}$. Levando em conta que a métrica de fundo não possui dependência com as coordenadas 4-dimensionais e utilizando (A8), a equação (A2) pode ser escrita como.

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa} \partial_\mu \partial_\nu \xi^z + 2\kappa e^{-2z/\ell} \eta_{\mu\nu} \xi^z - 2e^{-2z/\ell} \partial_{(\mu} \eta_{\nu)\alpha} F^\alpha \quad (\text{A9})$$

Podemos portanto escolher $F^\alpha(x^\alpha)$ de maneira apropriada de modo que os 3 últimos termos em (A9) se anulem em $z = 0$. Estabelecemos assim uma relação entre a perturbação do campo gravitacional nos dois sistemas de coordenadas. Podemos agora,

relacionar o campo gravitacional no gauge RS com o conteúdo energético na brana. Portanto, substituindo (A9) em (3.6) temos

$$\left(\frac{2}{\ell} + \partial_z\right) h_{\mu\nu} = -8\pi G_5 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T\right) - 2\partial_\mu\partial_\nu\xi^z \quad (\text{A10})$$

Sendo assim, podemos, interpretar os termos do lado direito da igualdade acima como termos de fonte do campo gravitacional $h_{\mu\nu}$ no novo gauge [75] (ver eq. (2.74)). Definimos, portanto,

$$\Sigma_{\mu\nu} = 8\pi G_5 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T\right) + 2\partial_\mu\partial_\nu\xi^z \quad (\text{A11})$$

e assim, temos a equação procurada:

$$\left(\frac{2}{\ell} + \partial_z\right) h_{\mu\nu} = -\Sigma_{\mu\nu} \quad (\text{A12})$$

Como veremos, no gauge RS , $h_\mu^\mu = 0$. Então, para que a equação acima seja satisfeita, devemos ter que $\Sigma_\mu^\mu = 0$ e para garantir essa condição, a função ξ^z deve obedecer a seguinte equação

$$\square\xi^z = \frac{4\pi G_5}{3}T \quad (\text{A13})$$

A função ξ^z nos dá a transformação entre as condições z e \bar{z} . Explicitamente;

$$\bar{z} = z + \xi^z(x) \quad (\text{A14})$$

Nas coordenadas Gaussianas, a posição da brana é dada pela equação $\bar{z} = 0$. Logo, no gauge RS , a posição da brana será dada pela equação $z = -\xi^z(x)$. Portanto, neste gauge, a brana é descrita como uma hipersuperfície "curva", quando há matéria confinada na brana [75].

Bibliografia

- [1] ABDOLRAHIMI,S.; CATTOËN, C.; PAGE, Don N.; YAGHOOBPOUR-TAR, S. , Phys. Lett. B **720**, 405, 2013.
- [2] ANDRADE, Nikson Ralf Farias de. Equações de Campos Efetivas em Branas Pela Imersão. Dissertação de Mestrado, Campina Grande, 2011.
- [3] ANTONIADIS, I.; ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S. ; DVALI, G. Phys. Lett. B **436**, 257, 1998.
- [4] ARFKEN, G.B.; WEBER, H.J. Mathematical Methods for Phycists 6a edição.
- [5] ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. Phys. Lett. B **429**, 263,1998.
- [6] ARKANI-HAMED, N. ; GROSSMAN, Y. ; SCHMALTZ, M. Phys. Rev. D 61, 115004, 2000.
- [7] ARKANI-HAMED, N.; SCHMALTZ, M. Phys. Rev. D **61**, 033005, 2000.
- [8] ARNOLD,Vladimir I.; KOZLOV, Valery V. e Neishtadt, Anatoly I. Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. Third Edition. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg, 2006.
- [9] BARENBOIM, G. ; BRANCO, G. C. ; GOUVEA, A. de ; REBELO, M. N. Phys.Rev. D **64**, 073005, 2001.
- [10] BAZEIA, D.; INACIO, A.S.; LOSANO, L., Int.J.Mod.Phys. A **19**, 575-592, 2004.

- [11] BAZEIA, D.; GOMES, A. R.; LOSANO, L. *Int. J. Mod. Phys. A* **24**, 1135, 2009.
- [12] BERTOTTI, B.; IESS, L.; TORTORA, P., *Nature* 425, 374, 2003.
- [13] BJORKEN, J.D.; DRELL, S. D. *Relativistic Quantum Mechanics* McGraw-Hill Book Company.
- [14] BÖHMER, C. G.; DE RISI, G.; HARKO, T. ; LOBO, F. S. N. *Class.Quant.Grav.* **27**, 185013, 2010.
- [15] BÖHMER, C. G.; HARKO, T.; LOBO, F. S. N. *Class. Quantum Grav.* **25**, 045015, 2008.
- [16] BRANCO, G. C. ; GOUVEA, A. de ; REBELO, M. N. *Phys.Lett. B* **506**, 115, 2001.
- [17] BRITO, F.; CVETIC, M.; YOON, S. , *Phys. Rev. D* **64**, 064021, 2001.
- [18] BURGESS, C. P.; MOORE, G. D. *The Standard Model: A primer*, Cambridge University Press, 2007.
- [19] CHAMBLIN, A.; GIBBONS, G.W. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1090, 2000.
- [20] CHAMBLIN, I.; HAWKING, S.; REALL, H. S. *Phys. Rev. D* **61**, 065007, 2000.
- [21] CHARMOUSIS, C.; GREGORY, R.. *Class.Quant.Grav.* **21**, 527, 2004.
- [22] CARROLL, S. M. - *Lectures Notes on General Relativity* (Institute for Theoretical Physics, California, 1997.
- [23] CASADIO, R.; FABBRI, A.; MAZZACURATI, L. *Phys. Rev. D* **65**, 084040, 2002.
- [24] CSÁKI, C.; ERLICH, J.; HOLLOWOOD, T. J.; SHIRMAN, Y. *Nucl. Phys. B* **581**, 309, 2000.
- [25] DAHIA, F.; ROMERO, C. , *Phys. Lett. B* **651**, 232, 2007.
- [26] DAHIA, F.; SILVA, A.A.; ROMERO, C., *Phys. Lett. B* **732**, 28, 2014.

- [27] DADHICH, N.; MAARTENS, R.; PAPADOPOULOS, P.; REZANIA, V. Phys. Lett. B **487**, 1, 2000.
- [28] DUFF, M.J., Kaluza-Klein Theory In Pespective. hep-th/9410046.
- [29] DE RUJULA, A. ; DONINI, A. ; GAVELA, M. B.; RIGOLIN, S. Phys. Lett. B **482**, 195, 2000.
- [30] DE WOLFE, O. ; Freedman, D.Z. ; S.S. Gubser, A. Karch Phys. Rev. D **62**, 046008, 2000.
- [31] D'INVERNO, R. Introducing Einstein's Relativity Oxford University Press.
- [32] DVALI, G. R.; GABADADZE, G.; PORRATI, M. "4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space". Phys.Lett.B485:208-214, 2000.
- [33] DZHUNUSHALIEV, V.; FOLOMEEV, V.; MINAMITSUJI, M. Rept. Prog. Phys. **73**, 066901, 2010.
- [34] EMPARAN, R. ; GREGORY, R. ; SANTOS, C. . Phys. Rev. D **63**, 104022, 2001.
- [35] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de, Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada. CNPq, 1977.
- [36] FIGUERAS, P.; WISEMAN, T. , Phys. Rev. Lett. **107**, 081101, 2011.
- [37] GABADADZE, G., ICTP Lectures on Large Aextra Dimensions, hep-ph/0308112 CERN-TH-2003-157.
- [38] GABADADZE, G., DVALI, G.; Phys.Rev. D **63** (2001) 065007.
- [39] GARRIGA, J.; TANAKA, T. Phys. Rev. Lett. **84**, 2778, 2000.
- [40] GEORGI, H. ; GRANT, A. K. ; HAILU, G. Phys. Rev. D **63**, 064027, 2001.
- [41] GERGELY, L. A.; KERESZTES, Z.; DWORNIK, M. Class. Quant. Grav. **26**, 145002, 2009.

- [42] GERMANI, C.; MAATENS, R. Phys. Rev. D **64**, 124010, 2001.
- [43] GIOVANNINI, M. , Phys. Rev. D **64**, 064023, 2001.
- [44] GREINER, W. Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations 3a edição Springer.
- [45] GREMM, M. Phys. Lett. B **478**, 434, 2000.
- [46] GUERRERO, R.;MELFO, A.; PANTOJA, N. , Phys. Rev. D **65**, 125010, 2002.
- [47] HAN, T. ; KRIBS,G. D.; MCEL RATH, B. , Phys. Rev. Lett. **90**, 031601, 2003.
- [48] HARKO, T.; MAK, M.K., Phys. Rev. D **69**, 064020, 2004.
- [49] HARKO, T.; MAK, M.K., Annals of Physics **319**, 471–492, 2005.
- [50] HOFF da SILVA, J.M. ; da ROCHA, R., Eur.Phys.J. C **72**, 2258, 2012.
- [51] HORAVA,P.; Witten,E. , Nucl. Phys. B 460, 506, 1996.
- [52] HOYLE, C.D.; SWANSON, H.E.,Phys.Rev.Lett.98(2007)021101.
- [53] HUNG, P. Q. ; TRAN, Ngoc-Khanh , Phys. Rev. D **69**, 064003, 2004.
- [54] KAKU, Michio Quantum Field Theory A modern introduction. Oxford University Press.
- [55] KALUZA, T. On The Problem Of Unity In Physics, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.), 966-972 (1921) 966.
- [56] KANTI, P., J.Mod. Phys. A **19**, 4899, 2004.
- [57] KAR, S.; SINHA, M. Gen. Relativ. Gravit. **35**, 1775, 2003.
- [58] KEETON, C. R.; PETTERS, A. O. Phys. Rev. D **73**, 104032, 2006.
- [59] KEHAGIAS, A.; TAMVAKIS, K. Phys.Lett. B, **504**, 38, 2001.

- [60] KLEIN, O., Quantum Theory and five-Dimensional Theory of Relativity, Zeits. Phys. **37**, 895 (1926)
- [61] KUDOH, H. ; TANAKA, T.; NAKAMURA, T. Phys. Rev. D **68**, 024035, 2003.
- [62] MARION, J.B.; THORNTON, S. Classical Dynamics of Particles e Systems.
- [63] MORSE, P. M.; FESHBACH, H. Methods of Theoretical Physics Volume 1, 1953.
- [64] MORSE, P. M.; FESHBACH, H. Methods of Theoretical Physics Volume 2,1953.
- [65] OVERDUIN, J.M., WESSON, P.S.; Phys. Rept. **283**, 303, 1997.
- [66] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. Phys. Rev. Lett. **83**, 3370, 1999.
- [67] RANDALL, L.; SUNDRUM,R. Phys. Rev. Lett. **83**, 4690, 1999.
- [68] REASENBERG, R. D.; SHAPIRO, I. I.; MACNEIL, P. E.; *et al.*, Astrophys. **J.** **234L**, 219, 1979.
- [69] ROBERTSON, D. S.; CARTER, W. E.; DILLINGER, W. H. , Nature **349**, 768, 1991.
- [70] ROCHA, R.; PILOYAN, A., Journal of Physics: Conference Series **496**, 012028, 2014.
- [71] RUBAKOV, V. ; SHAPOSHNIKOV, M. Phys. Lett. B **125**, 136,1983.
- [72] RUBAKOV, V.; SHAPOSHNIKOV, M. Phys. Lett. B **125**, 138,1983.
- [73] RUBAKOV, V. Phys. Ups. **44**, 871, 2001.
- [74] SAKURAI, J.J. Advanced Quantum Mechanics Addison-Wesley Publishing Company, Inc 1985.
- [75] SILVA, Alex de Albuquerque. Um estudo sobre dimensões extras. Dissertação de Mestrado, Campina Grande, 2009.

- [76] SIVARAM, C. "What is Special About the Planck Mass?," arXiv:0707.0058 [gr-qc].
- [77] SHAPIRO, I. I. ; SMITH, W. B. ; ASH, M. E.; HERRICK, S. *Astron. J.* **76**, 588 (1971); I. I. Shapiro, C. C. Counselman and R. W. King, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 555, 1976.
- [78] SHIFMAN, M. Large Extra Dimensions: Becoming acquainted with an alternative paradigm. Jul 2009. 33pp e-Print: arXiv:0907.3074.
- [79] SHIROMIZU, T.; MAEDA, K.; SASAKI, M. *Phys. Rev. D* **62**, 024012, 2000.
- [80] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity.* John Wiley & Sons, Inc. 1972
- [81] WHISKER, R. "Braneworld Black Holes" arXiv:0810.1534 [gr-qc].
- [82] WISEMAN, T.; *Phys. Rev. D* **65**, 124007, 2002.
- [83] WISEMAN, T. *Classical Quantum Gravity* **20**, 1137, 2003.
- [84] ZWIEBACH, B. *A First Course in String Theory* Cambridge University Press, 2004.