

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física



Tese de Doutorado

Teorias de campos com dinâmica Generalizada

Altemar Lobão de Sousa Júnior

João Pessoa, julho de 2014

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física



Tese de Doutorado

Teorias de campos com dinâmica Generalizada

Altemar Lobão de Sousa Júnior

Tese submetida ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, sob orientação do professor Dr. Dionísio Bazeia Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

João Pessoa, julho de 2014

Comissão Julgadora:

Examinador Interno
Prof. Dr. Jorge Gabriel G. de S.
Ramos
Universidade Federal da Paraíba

Examinador Interno
Prof. Dr. José Roberto S. do
Nascimento
Universidade Federal da Paraíba

Examinador Externo
Prof. Dr. Bruno Carneiro da Cunha
Universidade Federal de Pernambuco

Examinador Externo
Prof. Dr. Francisco de Assis Brito
Universidade Federal de Campina
Grande

Co-orientador
Prof. Dr. Roberto Menezes da Silva
Universidade Federal da Paraíba

Orientador
Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho
Universidade Federal da Paraíba

*A meus pais
Aos meus irmãos e
irmãs
À minha mulher
À minha filha*

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, professor Dionísio Bazeia, e ao professor Roberto Menezes com quem tive ótimos ensinamentos. Agradeço também ao grupo de Teoria de Campos e aos meus amigos da UFPB, onde as discussões sobre física foram sempre calorosas.

Acima de tudo, agradeço à minha família, em especial à minha mulher Jéssica e minha filha Lethycia que me dão força para continuar nos momentos difíceis. Agradeço também a meu pai Altemar e minha mãe Luiza pelos ensinamentos da vida, e às minhas irmãs Gabriella, Daniela e Emannelly e meu irmão Guilherme pelo carinho e companheirismo que sempre demonstraram comigo.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro as minhas pesquisas.

Resumo

Esta tese discute o formalismo matemático para se obter soluções de defeitos topológicos em teorias de campo com dinâmica modificada. Verificaremos que soluções de defeito, em teorias generalizadas, podem ser obtidas tanto no espaço tempo quadridimensional de Minkowski como em um espaço tempo de dimensão extra com geometria deformada. Será mostrado, tanto no espaço tempo quadridimensional, quanto no espaço tempo de dimensão extra, que as características da solução, como densidade de energia e espectro perturbativo, que surge nas teorias com dinâmica modificada, podem ser profundamente distintas das que surgem nas teorias com dinâmica padrão. Encontraremos também quais as condições necessárias para que a densidade de energia e espectro perturbativo permaneçam inalterados em relação ao obtido em uma teoria com dinâmica padrão. Em se tratando de defeito em um espaço tempo de dimensão extra com geometria deformada, utilizaremos modelos com dinâmica generalizada para descrever os chamados cenários de mundo brana. O estudo de brana será dividido em duas partes: na primeira será realizada uma modificação na dinâmica da densidade de lagrangiana e na segunda será feita uma analogia às chamadas gravidade $F(R)$, sendo adicionado novos termos dependentes do escalar de curvatura à ação Einstein-Hilbert.

Palavras chave: defeitos topológicos; mundo brana; brana $F(R)$.

Abstract

This thesis discusses the mathematical formalism to obtain solutions of topological defects in theories of field with modified dynamics. We will check that defect solutions, in generalized theories, can be obtained so much in 4-dimensional spacetime of Minkowski as in a spacetime with extra dimension of the deformed geometry. Will be shown both in four-dimensional spacetime as in spacetime as an extra dimension, that the solution characteristics, such as energy density and perturbative spectrum, which appears in the theories with modified dynamic may be profoundly different from those that arise in the theories with dynamics standard. We also find the necessary conditions for that the energy density and the perturbative spectrum remain unchanged compared to that obtained in a theory with dynamics standard. In the case of a defect in a spacetime of extra dimension with warped geometry, we use models with generalized dynamic to describe the so-called braneworld scenarios. The study of brane will be divided into two parts: in the first the modification will be performed in the dynamics of the Lagrangian density and the second will be an analogy to called gravity $F(R)$, being added new terms dependent of scalar curvature in the action of Einstein-Hilbert.

Keywords: topological defects; braneworld; $F(R)$ -brane.

Sumário

INTRODUÇÃO	1
1 CAMPOS ESCALARES E SOLUÇÕES DE DEFEITO	5
1.1 Dinâmica Generalizada com n-campos	6
1.1.1 Formalismo de primeira ordem e soluções BPS	8
1.1.2 Estabilidade linear	10
1.2 Aplicação 1: Dinâmica padrão em modelos de um campo	13
1.2.1 Defeitos tipo <i>lump</i>	15
1.2.2 Defeitos tipo <i>kink</i> para o potencial ϕ^4	17
1.2.3 Defeitos tipo <i>kink</i> para o potencial seno-Gordon	20
1.3 Aplicação 2: Dinâmica padrão em modelos de dois campos	22
2 K-DEFEITOS E MODELOS GÊMEOS	26
2.1 Método Perturbativo	26
2.1.1 Primeiro Caso: $F = F(\phi)$	30
2.1.2 Segundo Caso: $F = F(X)$	34
2.2 Método Exato	40
2.2.1 <i>Kink</i> em teorias com dinâmica modificada	40
2.2.2 <i>Kink</i> compacto	43
2.2.3 <i>k</i> -defeitos em modelos de dois campos	45
2.3 Modelos Gêmeos	50
2.3.1 Estabilidade Linear	53

3	MUNDO BRANA I: modelos com dinâmica generalizada	55
3.1	Cenário de mundo brana	55
3.1.1	Estabilidade da brana	59
3.2	Aplicação 1: Modelos de um campo com dinâmica padrão	67
3.3	Aplicação 2: Modelos de um campo para soluções <i>kink</i> e <i>compacton</i> com dinâmica generalizada	71
3.4	Aplicação 3: Modelos de dois campos	77
3.5	Modelos de brana Gêmeos	80
3.5.1	Estabilidade	82
4	MUNDO BRANA II: teorias $F(R)$	85
4.1	Formalismo	85
4.1.1	Estabilidade	87
4.2	Dinâmica padrão com curvatura constante	90
4.3	Dinâmica padrão com curvatura não constante	91
4.3.1	Procedimento exato	92
4.3.2	Procedimento perturbativo	97
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	106
	APÊNDICES	108
A		109
A.1	Formulas da Gravitação	109
A.2	Potencial de Pöschl-Teller	110
A.3	Função Hipergeométrica	110
A.4	Equação de Einstein em teorias $F(R)$	111

CONVENÇÕES

Ao longo da tese iremos adotar a seguinte convenção para os índices:

- Índices latinos $i, j, k, l = 1, 2, \dots, n$;
- Índices latinos $a, b, c, d = 0, 1, 2, 3, 4$.
- Índices gregos $\mu, \nu, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$;

LISTA DE PUBLICAÇÕES

- D. Bazeia, A. S. Lobao, Jr. and R. Menezes, “*Twinlike models for kinks and compactons in flat and warped spacetime*”, Phys. Rev. D **86**, 125021 (2012);
- D. Bazeia, A. S. Lobao, L. Losano and R. Menezes, “*First-order formalism for flat branes in generalized N -field models*”, Phys. Rev. D **88**, 045001 (2013);
- D. Bazeia, A. S. Lobão, Jr., R. Menezes, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, “*Braneworld solutions for $F(R)$ models with non-constant curvature*”, Phys. Lett. B **729**, 127 (2014);
- D. Bazeia, A. S. Lobão, L. Losano and R. Menezes, “*First-order formalism for twinlike models with several real scalar fields*”, Eur. Phys. J. C **74**, 2755 (2014).

INTRODUÇÃO

Em 1998 foi constatado, através de observações astronômicas [1, 2], que o universo está se expandindo aceleradamente. Esta descoberta contradiz o esperado já que a gravitação exerce apenas forças de atração entre os corpos. Logo, esperava-se que, mesmo o universo passando por uma fase de expansão, esta expansão deveria ser retardada pelas forças existentes.

Um das explicações aceitas hoje, para o fenômeno da expansão acelerada do universo, pode ser obtida através da teoria da relatividade geral de Einstein, pela existência da chamada energia escura. A energia escura é uma forma desconhecida de energia que estaria distribuída por todo o espaço e tende a acelerar a expansão do universo através de uma forte pressão negativa. De acordo com a teoria da relatividade geral, o efeito de tal pressão negativa seria semelhante ao de uma força que age em larga escala em oposição à gravidade.

Entre as principais propostas para a descrição da energia escura podemos destacar: a **constante cosmológica**, que pode ser interpretada tanto como uma modificação de natureza geométrica nas equações de campo da relatividade geral, quanto como um efeito da energia do vácuo, a qual preenche o universo de maneira homogênea; e a **quintessência** que é usualmente modelado como um campo escalar cuja densidade de energia pode variar no tempo e no espaço [3, 4].

As previsões teóricas para a constante cosmológica através da energia do vácuo mostram um valor 10^{120} vezes maior que o observado. Essa incrível discrepância entre teoria e observação indica que existe algo de errado em nossa explicação sobre a gravitação universal. Uma das ideias viáveis é alterar a teoria da gravitação de Einstein¹. Neste sentido podemos destacar: k-inflação e gravitação $F(R)$ como maneiras de explicar a expansão acelerada sem a necessidade da constante cosmológica. Porém, sem dados experimentais que possam sugerir o que é realmente a energia escura, nada podemos afirmar sobre qual

¹C. Armendariz-Picon, V. F. Mukhanov and P. J. Steinhardt, “A Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late time cosmic acceleration,” Phys. Rev. Lett. **85**, 4438 (2000) [astro-ph/0004134].

teoria deve ser o caminho a ser seguido.

Diante dessa aparente escuridão sobre a física da gravitação universal, alguns desenvolvimentos matemáticos surgem em outras áreas da física, utilizando-se de algumas ideias apresentadas na explicação de expansão acelerada do universo. Nesta tese iremos destacar os trabalhos de Babichev e outros, no começo dos anos 2000, que baseado em teorias como a k -inflação, buscam por soluções tipo defeitos topológicos em teorias de campos com dinâmica não padrão.

Diante do exposto é proposto nesta tese uma descrição matemática que permite estudar modelos de campos escalares com dinâmica não padrão. A escolha de campos escalares se dá, pois são os mais simples dentre os diversos tipos de campos, no entanto, podem ser utilizados para modelar uma grande variedade de problemas físicos [5,6]. Um interessante exemplo é a formação de estruturas do tipo Defeitos Topológicos (DT), que podem ser descritos como soluções de equações diferenciais parciais que conectam dois valores de mínima energia [7,8]. É teorizado que tais estruturas deram origem a configurações estáveis de matéria durante as transições de fase do universo primordial através do mecanismo de quebra espontânea de simetria [9].

A busca por soluções do tipo DT começou há vários anos. Em especial Hobart [10] e Derrick [11] mostraram que somente soluções em 1+1 dimensão do espaço-tempo geram estruturas de defeito estáveis em modelos de campos escalares reais, tais defeitos são chamados de paredes de domínio. No entanto, se assumirmos a existência de outros campos que não sejam os escalares reais, tais como campos vetoriais ou mesmo os campos escalares complexos, poderemos obter uma série de possíveis soluções de defeitos com dimensão superior à imposta pelo teorema de Derrick/Hobart. Entre eles, podemos citar os vórtices, cordas cósmicas, monopolos e texturas [12]. O tipo de defeito formado é determinado pelas propriedades de simetria do modelo.

Nesta tese, estudaremos essencialmente as propriedades de DT do tipo paredes de domínio. Para tal, utilizaremos teorias com dinâmica não-canônica, isto é, que podem ser escritas na forma geral $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, X)$ e faremos a comparação com os modelos que têm dinâmica padrão, com densidade lagrangiana escrita na forma $\mathcal{L} = X - V$. Teorias que engendram defeitos topológicos com dinâmica não padrão são chamadas de k -defeitos [13]. Verificaremos que, em muitas situações, os k -defeitos possuem o comportamento distinto do modelo com dinâmica padrão. No entanto, nos casos chamados de modelos gêmeos [14], as propriedades do modelo generalizado e do modelo com dinâmica padrão, tais como densidade de energia e estabilidade permanecem inalteradas.

Além disso, também estudaremos soluções de DT do tipo paredes de domínio imersas em um espaço-tempo de dimensões extras com geometria deformada. Para tal utilizaremos um espaço-tempo de cinco dimensões e analisaremos os chamados cenários de mundo

brana [15]. Tais teorias são importantes pois possibilitam resolver o problema da hierarquia² [16, 17]. Assim como apresentado anteriormente, nos focaremos em modelos com lagrangiana generalizada. Tais generalizações serão feitas de duas formas. Primeiro assumiremos generalizações na dinâmica da teoria e em seguida iremos proceder acrescentando novos termos proporcionais ao escalar de curvatura na ação de Einstein- Hilbert. Este ultimo procedimento é claramente inspirado nas chamadas terias $F(R)$ da gravitação. Em ambas as situações teremos como base de comparação um modelo com lagrangiana padrão a fim de verificar o que surge de diferente nas teorias generalizadas. Apesar de ambas as formas de generalização, ditas acima, buscarem os mesmos objetivos, veremos que em cada caso atingiremos resultados bastante distintos.

A tese esta organizada da seguinte maneira: No primeiro capítulo, apresentaremos uma formulação matemática geral que permite a descrição de uma teoria de muitos campos, com dinâmica generalizada, em 1+1 dimensões do espaço-tempo. Implementaremos o formalismo de primeira ordem que permite encontrar soluções analíticas para alguns modelos e também permite obter a energia de uma maneira simples. Para concluir o capítulo, analisaremos alguns exemplos específicos com dinâmica padrão que possibilitam soluções de DT.

O segundo capítulo será dedicado aos modelos com dinâmica generalizada e será dividido em três etapas. Na primeira parte, apresentaremos um formalismo geral para obter soluções perturbativas em teorias com dinâmica generalizada. Na segunda parte, obtaremos soluções exatas partindo de modelos com dinâmica generalizada. Veremos que, em ambas as situações, o comportamento será distinto do caso com dinâmica padrão. A parte final do capítulo será dedicada ao estudo dos modelos gêmeos, onde veremos que algumas teorias com dinâmica generaliza podem ser indistinguíveis dos modelos com dinâmica padrão.

Os capítulos três e quatro são dedicados ao estudo dos cenários de mundo brana generalizados. No terceiro capítulo, introduziremos uma formulação geral para estudar uma teoria de mundo brana com vários campos e com dinâmica generalizada. Assim como no primeiro capítulo, também implementaremos o formalismo de primeira ordem e estudaremos alguns exemplos com dinâmica padrão e não padrão. Utilizaremos o conceito de modelos gêmeos, apresentado no segundo capítulo, de forma a obter não só modelos gêmeos em relação a uma teoria com dinâmica padrão, mas também modelos gêmeos entre duas teorias com dinâmica generalizada.

No quarto capítulo, abordaremos novas generalizações em modelos de mundo brana, mas agora com as chamadas teorias $F(R)$. Mais uma vez começaremos introduzindo o formalismo e concluiremos estudando modelos onde o escalar de curvatura é constante

²O problema da hierarquia se refere à grande discrepância entre os valores das forças fraca e gravitacional. Em média a força fraca é 10^{32} vezes mais forte do que a gravidade.

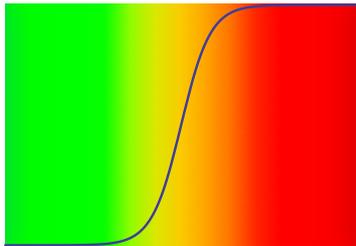
ou não constante. Veremos que, se o escalar de curvatura é constante, a teoria torna-se inconsistente fisicamente. No entanto, se o escalar de curvatura não for constante torna-se possível obter soluções analíticas exatas para alguns casos específicos. Faremos também uma análise aproximada das teorias $F(R)$, considerando agora que o termo de correção é pequeno em comparação com o termo usual. Veremos que, tanto na análise exata, como na perturbativa, surge uma nova característica ao modelo que é o *split* da densidade de energia.

Finalizaremos a tese apresentando as conclusões e as perspectivas para novos trabalhos. Embora tenhamos obtido resultados interessantes ao longo desses quatro anos de doutorado, ainda é preciso tempo para que os resultados sejam melhor compreendidos.

Capítulo 1

CAMPOS ESCALARES E SOLUÇÕES DE DEFEITO

Para melhor compreender o que chamamos aqui de defeito topológico, suponha que na figura 1.1a pudéssemos associar as cores verde e vermelho com dois estados de um sistema físico que tenham o mesmo valor de mínimo da energia. Neste caso, a região de transição entre esses dois estados (amarelado) será uma região de conflito. É a esta região de conflito que damos o nome de defeito topológico. Em geral a transição entre esses dois estados exige um gasto de energia (energia do defeito) e é feita de maneira suave como está caracterizado na figura 1.1a pela linha contínua.



(a)



(b)

Figura 1.1: (a) Representação em um gráfico de cores de uma região de transição entre dois valores de mínima energia. (b) Imagem de uma flor real que possui uma região de conflito.

Defeitos topológicos surgem naturalmente em diversas situações na natureza, veja, por exemplo, a imagem da flor mostrada na figura 1.1b. Nela podemos ver a região de conflito entre o amarelo e o vermelho que é o defeito. Certamente a planta que produziu esta flor gastou mais energia para produzir o defeito do que outra planta que não produza tais regiões de transição. Em troca ela é melhor vista pelos pássaros e outros animais que a polinizam.

Do ponto de vista matemático, esse tipo de comportamento pode ser mapeado por soluções não perturbativas em teorias de campos clássicas. Antes de nos aprofundarmos em algum modelo específico, iremos apresentar o formalismo matemático que permite obter, a partir de uma teoria de campos, estruturas de defeito. Para isso, iremos seguir o procedimento introduzido nas referências [18–21] que é descrito como segue.

1.1 Dinâmica Generalizada com n-campos

Para descrever uma teoria de campos generalizada vamos partir de uma ação que descreve n campos escalares reais $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$, em um espaço-tempo plano quadridimensional, isto é,

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i, X_{jk}). \quad (1.1)$$

A dinâmica da teoria é descrita pelo invariante X_{jk} , definido como:

$$X_{jk} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \phi_j \partial^\nu \phi_k, \quad (1.2)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ representa a métrica do espaço-tempo de Minkowski com assinatura $(+, -, -, -)$. Nesta tese assumiremos o sistema natural de unidades ($c = \hbar = 1$), que faz com que os campos e as coordenadas sejam adimensionais.

Através do princípio de mínima ação podemos escrever a equação de movimento como:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0.$$

Com isso, usando a densidade lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, X_{jk})$ obtemos que:

$$\partial_\mu (\mathcal{L}_{X_{ij}} \partial^\mu \phi_j) - \mathcal{L}_{\phi_i} = 0, \quad (1.3)$$

onde $\mathcal{L}_{X_{ij}} = \partial \mathcal{L} / \partial X_{ij}$ e $\mathcal{L}_{\phi_i} = \partial \mathcal{L} / \partial \phi_i$. Com mais algumas manipulações algébricas, podemos escrever a equação de movimento (1.3) na seguinte forma geral:

$$G_{ik}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi_k + 2X_{kj} \mathcal{L}_{X_{ij} \phi_k} - \mathcal{L}_{\phi_i} = 0, \quad (1.4)$$

onde o tensor $G_{ik}^{\mu\nu}$ foi definido como:

$$G_{ik}^{\mu\nu} \equiv \mathcal{L}_{X_{ij} X_{kl}} \partial^\mu \phi_j \partial^\nu \phi_l + \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{X_{ik}}.$$

Se queremos descrever defeitos do tipo paredes de domínio, devemos assumir apenas soluções estáticas e unidimensionais na equação (1.4), ou seja, $\phi_i = \phi_i(x)$. Isso faz com que

o defeito esteja na direção perpendicular à parede, sendo constante nas demais direções. Com isso, o invariante X_{ij} é expresso na forma $X_{ij} = -\phi_i\phi_j/2$, e podemos escrever a equação de movimento (1.4) como:

$$\left(\mathcal{L}_{X_{ik}} + 2X_{jl}\mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}}\right)\phi_k'' + \mathcal{L}_{\phi_i} - 2X_{jk}\mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k} = 0, \quad (1.5)$$

onde estamos usando que $\phi' = d\phi/dx$, $\phi'' = d^2\phi/dx^2$, etc.

A equação (1.5) é, na verdade, um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem para cada um dos n campos ϕ_i . Em uma grande variedade de situações, dependendo da densidade lagrangiana utilizada, essa equação diferencial pode ser de difícil resolução, impossibilitando, em alguns dos casos, a obtenção de soluções analíticas. No entanto, podemos mostrar, sem perda de generalidade, que (1.5) pode ser reduzida a uma equação diferencial de primeira ordem que, em geral, é mais simples de ser resolvida. É fácil mostrar que a equação diferencial de primeira ordem que obedece (1.5) pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} - 2X_{ij}\mathcal{L}_{X_{ij}} = C, \quad (1.6)$$

onde C é uma constante real. Veremos na próxima seção o quanto a equação (1.6) pode ser importante. É importante lembrar que as duas últimas equações são calculadas na solução estática, isto é, quando colocamos a expressão $\mathcal{L}_{X_{ij}}$, devemos ter em mente $\mathcal{L}_{X_{ij}}|_{\phi=\phi(x)}$, porém, por questão de comodidade, omitiremos a simbologia $|_{\phi=\phi(x)}$ para dizer que a função está sendo calculada na solução estática.

Outro resultado que será útil é o tensor energia momento. Esta quantidade física nos dá um indício de como é a distribuição de energia e matéria do sistema em que estamos trabalhando. Se temos uma ação específica, de uma teoria de campos, que representa um sistema físico de interesse, então o tensor energia momento do sistema é definido como a variação da respectiva ação com respeito à métrica. Em [22] o tensor energia momento é escrito como:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\eta}} \frac{\partial(\sqrt{-\eta}\mathcal{L})}{\partial\eta^{\mu\nu}},$$

onde η é o determinante da métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$. Se usarmos a relação (A.6) do apêndice A.1, obtemos o tensor energia momento como:

$$T_{\mu\nu} = -\eta_{\mu\nu}\mathcal{L} + \mathcal{L}_{X_{ij}}\partial_\mu\phi_i\partial_\nu\phi_j. \quad (1.7)$$

Neste tese, sempre que propormos uma teoria de campos nova, teremos como guia a condição de energia nula $T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu \geq 0$, onde n^μ é um vetor tipo luz tal que $\eta_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 0$. Esta relação nos conduz à seguinte restrição,

$$\mathcal{L}_{X_{ij}} \geq 0. \quad (1.8)$$

Além disso, como estamos lidando apenas com soluções estáticas e unidimensionais, as componentes do tensor energia momento tornam-se:

$$T_{00} = -\mathcal{L}, \quad (1.9a)$$

$$T_{11} = \mathcal{L} + \phi'_i \phi'_j \mathcal{L}_{X_{ij}}, \quad (1.9b)$$

$$T_{10} = T_{01} = 0, \quad (1.9c)$$

onde a componente T_{00} é definida como a densidade de energia (ρ), e a componente T_{11} é a componente de *stress* (τ) do tensor energia momento. Das equações (1.6) e (1.9b) obtemos que $T_{11} = C$, ou seja, a componente de stress do tensor energia momento é constante. Logo, substituindo (1.6) em (1.9a) encontramos a densidade de energia como:

$$\rho(x) = \phi'_i \phi'_j \mathcal{L}_{X_{ij}} + C, \quad (1.10)$$

e a energia torna-se:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi'_i \phi'_j \mathcal{L}_{X_{ij}} dx + C \int_{-\infty}^{\infty} dx. \quad (1.11)$$

Nota-se com esse resultado que, se a constante C na equação acima for diferente de zero, a energia irá divergir. Assim, se estamos buscando por soluções localizadas com energia finita, devemos assumir que a componente de *stress* do tensor energia momento seja nula, isto é, $T_{11} = C = 0$. Essa mesma restrição pode ser obtida pelo teorema de Derrick/Hobard [10, 11].

1.1.1 Formalismo de primeira ordem e soluções BPS

Para teorias estáticas, como a que estamos estudando, podemos usar o método de *Bogomol'nyi, Prasad e Sommerfield* [23, 26], para encontrar a energia de uma maneira simples. As soluções do problema obtidas são chamados **Estados BPS**. Para entender como se dá este procedimento vamos considerar a densidade de energia (1.10), com $C = 0$, ou seja,

$$\rho(x) = \phi'_i \phi'_j \mathcal{L}_{X_{ij}}.$$

Vamos agora obter o formalismo de primeira ordem introduzindo uma função dos n campos $W(\phi_i)$ tal que,

$$W_{\phi_i} = \phi'_j \mathcal{L}_{X_{ij}}. \quad (1.12)$$

Essa nova função W é chamada de superpotencial e deve ser uma função de classe C^1 dos campos ϕ_i , além disso, devemos assumir que W seja positivo definido. Essa definição será

de grande utilidade quando investigarmos a estabilidade linear das soluções¹.

Com a definição (1.12) podemos escrever a densidade de energia como:

$$\rho(x) = \phi'_i W_{\phi_i} = \frac{dW}{dx}. \quad (1.13)$$

Com isso, a energia será agora dada por:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{dW}{dx} = \Delta W, \quad (1.14)$$

ou seja,

$$E = W[\phi_1(\infty), \phi_2(\infty), \dots, \phi_n(\infty)] - W[\phi_1(-\infty), \phi_2(-\infty), \dots, \phi_n(-\infty)]. \quad (1.15)$$

Assim, obtemos que a energia não depende da forma explícita da solução, mas é dada em termos de W , calculado com os valores assintóticos do campo. A energia obtida em (1.15) é a energia da solução BPS.

A estabilidade da solução estática pode ser inferida pela presença de uma corrente definida em termos da função W como:

$$j_T^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W,$$

que é chamada de corrente topológica. Podemos notar que esta corrente é conservada por construção. Esta definição é inspirada em [24], e é construída de modo que a carga topológica seja numericamente igual à energia da solução estática, ou seja,

$$Q_T = \int_{-\infty}^{\infty} dx j_T^0 = \Delta W. \quad (1.16)$$

Neste ponto é importante enumerar duas situações. A primeira ocorre quando $Q_T = 0$, neste caso dizemos que a solução tem uma natureza não topológica. A segunda ocorre quando $Q_T \neq 0$, neste caso as soluções serão topológicas. Veremos no estudo de modelos de dois campos que, em geral, a presença de uma carga topológica não garante a estabilidade da solução, ou seja, soluções do tipo topológicas não são necessariamente estáveis. Para que tenhamos exatidão da natureza estável (ou não) de tais soluções devemos fazer o teste da estabilidade linear, o que será realizado na próxima seção. Por outro lado, soluções

¹Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui as n derivadas parciais em todos os pontos do aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Ficam então definidas n funções

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : U \rightarrow \mathbb{R}, \text{ onde } \frac{\partial f}{\partial x_i} : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Se estas funções forem contínuas em U , diremos que f é uma função de classe C^1 e escreveremos $f \in C^1$.

não topológicas neste presente contexto, isto é, soluções de teorias de campos escalares reais em 1+1 dimensões, serão sempre instáveis.

1.1.2 Estabilidade linear

Nesta tese, sempre buscaremos por soluções que sejam estáveis. Em geral, na física, é desejável que o sistema em estudo seja estável ao menos durante o intervalo de tempo que está sendo analisado. No presente estudo isso é obtido analisando a estabilidade linear das soluções. Uma solução terá estabilidade linear sempre que, ao ser perturbada, tende a se comportar de maneira semelhante ao que era antes da perturbação.

Para investigar se uma determinada teoria é estável, por estabilidade linear, iremos introduzir uma pequena flutuação $\xi(x, t)$ em torno da solução estática. Para fazer isso, vamos considerar que a solução é perturbada na forma:

$$\bar{\phi}_i(x, t) = \phi_i(x) + \xi_i(x, t). \quad (1.17)$$

A estabilidade linear consiste em fazer uma expansão até primeira ordem em ξ_i na equação de movimento. Primeiro podemos notar que o invariante X_{ij} pode ser escrito como:

$$X_{ij} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_j + \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \xi_j, \quad (1.18)$$

com isso, substituindo (1.17) em (1.3) podemos expressar a expansão, até primeira ordem em ξ_i , da equação de movimento na forma:

$$\partial_\mu (\mathcal{L}_{X_{ij}} \partial^\mu \xi_j + \mathcal{L}_{X_{ij} X_{kl}} \partial_\nu \phi_k \partial^\nu \xi_l \partial^\mu \phi_j + \mathcal{L}_{X_{ij} \phi_k} \xi_k \partial^\mu \phi_j) - \mathcal{L}_{\phi_i X_{kl}} \partial_\nu \phi_k \partial^\nu \xi_l - \mathcal{L}_{\phi_i \phi_j} \xi_j = 0,$$

ou melhor,

$$\begin{aligned} & \partial_\mu (\mathcal{L}_{X_{ij}} \partial^\mu \xi_j + \mathcal{L}_{X_{ij} X_{kl}} \partial_\nu \phi_k \partial^\nu \xi_l \partial^\mu \phi_j) + \partial_\mu (\mathcal{L}_{X_{ij} \phi_k} \partial^\mu \phi_j) \xi_k - \\ & - \mathcal{L}_{\phi_i \phi_j} \xi_j + (\mathcal{L}_{X_{ij} \phi_k} - \mathcal{L}_{X_{kj} \phi_i}) \partial^\mu \phi_j \partial_\mu \xi_k = 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Para facilitar a análise, vamos assumir que a perturbação ξ_i possa ser decomposta na seguinte forma:

$$\xi_i(x, t) = \xi_i(x) \cos(\omega t), \quad (1.20)$$

onde ω deve ser uma constante positiva para garantir que estamos lidando com pequenas perturbações. Usando (1.20) em (1.19), obtemos que:

$$-\left[(\mathcal{L}_{X_{il}} + 2X_{kj} \mathcal{L}_{X_{ij} X_{kl}}) \xi_l' \right]' - (\mathcal{L}_{X_{ij} \phi_k} - \mathcal{L}_{X_{kj} \phi_i}) \phi_j' \xi_k' = \left[\omega^2 \mathcal{L}_{X_{ij}} + (\mathcal{L}_{X_{il} \phi_j} \phi_l')' + \mathcal{L}_{\phi_i \phi_j} \right] \xi_j.$$

Note que esta equação pode ser escrita na seguinte forma geral,

$$-(a_{ij}\xi_j')' - b_{ij}\xi_j' - c_{ij}\xi_j = \omega^2 \mathcal{L}_{X_{ij}}\xi_j,$$

ou ainda,

$$-a_{ij}\xi_j'' - (a'_{ij} + b_{ij})\xi_j' - c_{ij}\xi_j = \omega^2 \mathcal{L}_{X_{ij}}\xi_j, \quad (1.21)$$

onde,

$$a_{ij} = \mathcal{L}_{X_{ij}} + 2X_{kl}\mathcal{L}_{X_{il}X_{kj}}, \quad (1.22a)$$

$$b_{ij} = (\mathcal{L}_{X_{il}\phi_j} - \mathcal{L}_{X_{jl}\phi_i})\phi_l', \quad (1.22b)$$

$$c_{ij} = (\mathcal{L}_{X_{il}\phi_j}\phi_l')' + \mathcal{L}_{\phi_i\phi_j}. \quad (1.22c)$$

A princípio, a equação (1.21), não apresenta nenhum significado físico evidente. Este fato pode ser contornado se for possível escreve-la na forma de alguma equação conhecida. Por sorte, a equação (1.21) pode ser escrita na forma de uma equação de tipo-Schrödinger. Embora aqui não tenhamos o mesmo significado encontrado na mecânica quântica, o conhecimento matemático da equação de Schrödinger é bem desenvolvido e pode nos ajudar a obter mais informações sobre a estabilidade dos sistemas apresentados. Para obter a equação tipo-Schrödinger, precisamos assumir a seguinte mudança de variável,

$$\xi_j(x) = S_{jk}u_k(z) \quad \text{e} \quad dx = \frac{dz}{R}.$$

Com isso, obtemos que:

$$\xi_j' = R \frac{dS_{jk}}{dz} u_k + RS_{jk} \frac{du_k}{dz},$$

$$\xi_j'' = R^2 S_{jk} \frac{d^2 u_k}{dz^2} + R \frac{d}{dz} \left(R \frac{dS_{jk}}{dz} \right) u_k + R \left(\frac{dR}{dz} S_{jk} + 2R \frac{dS_{jk}}{dz} \right) \frac{du_k}{dz}.$$

Logo, a equação (1.21) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & - a_{ij} S_{jk} \frac{d^2 u_k}{dz^2} - R^{-2} \left[R \frac{d}{dz} \left(a_{ij} R \frac{dS_{jk}}{dz} \right) + c_{ij} S_{jk} + b_{ij} R \frac{dS_{jk}}{dz} \right] u_k - \\ & - R^{-1} \left[2a_{ij} R \frac{dS_{jk}}{dz} + \frac{d(a_{ij} R)}{dz} S_{jk} + b_{ij} S_{jk} \right] \frac{du_k}{dz} = \omega^2 R^{-2} \mathcal{L}_{X_{ij}} S_{jk} u_k. \end{aligned}$$

Após algumas manipulações algébricas, obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 & -\delta_{mk} \frac{d^2 u_k}{dz^2} - R^{-2} S_{lm}^{-1} a_{li}^{-1} \left[R \frac{d}{dz} \left(a_{ij} R \frac{dS_{jk}}{dz} \right) + c_{ij} S_{jk} + b_{ij} R \frac{dS_{jk}}{dz} \right] u_k - \\
 & - R^{-1} S_{lm}^{-1} a_{li}^{-1} \left[2a_{ij} R \frac{dS_{jk}}{dz} + \frac{d(a_{ij} R)}{dz} S_{jk} + b_{ij} S_{jk} \right] \frac{du_k}{dz} \\
 & = \omega^2 R^{-2} S_{lm}^{-1} a_{li}^{-1} \mathcal{L}_{X_{ij}} S_{jk} u_k.
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

Logo, para que esta equação seja uma equação tipo-Schrödinger, devemos impor as seguintes restrições:

$$2a_{ij} R \frac{dS_{jk}}{dz} + \frac{d(a_{ij} R)}{dz} S_{jk} + b_{ij} S_{jk} = 0, \tag{1.24a}$$

$$R^{-2} S_{lm}^{-1} a_{li}^{-1} \mathcal{L}_{X_{ij}} S_{jk} = \delta_{mk}. \tag{1.24b}$$

Portanto, se as restrições (1.24) forem satisfeitas, podemos escrever a equação (1.23) na forma:

$$\left[-\delta_{ij} \frac{d^2}{dz^2} + U_{ij}(z) \right] u_j(z) = \omega^2 u_i(z), \tag{1.25}$$

onde o potencial, $U_{ij}(z)$, é dado por:

$$U_{ij}(z) = -R^{-2} S_{li}^{-1} a_{lm}^{-1} \left[R \frac{d}{dz} \left(a_{mk} R \frac{dS_{kj}}{dz} \right) + c_{mk} S_{kj} + b_{mk} R \frac{dS_{kj}}{dz} \right]. \tag{1.26}$$

A relação (1.26) faz uma papel análogo ao potencial da mecânica quântica de Schrödinger, onde, para cada potencial, podemos obter um conjunto de correspondentes autovalores e autoestados. Apesar de haver uma analogia a um resultado da mecânica quântica, os cálculos e discussões apresentadas nesta tese não envolvem fenômenos quânticos. A analogia está apenas no fato da equação ser semelhante à equação de Schrödinger.

Se estamos lidando com apenas um campo escalar os resultados anteriores podem ser simplificados. Como, por exemplo, as equações (1.22) que podem agora ser escritas como:

$$a = \mathcal{L}_X + 2X\mathcal{L}_{XX},$$

$$b = 0,$$

$$c = (\mathcal{L}_{X\phi}\phi')' + \mathcal{L}_{\phi\phi}.$$

Além disso, as relações (1.24) são expressadas, simplesmente, por:

$$S = (A\mathcal{L}_X)^{-1/2} \quad \text{e} \quad R = 1/A, \tag{1.27}$$

onde,

$$A^2 = \frac{\mathcal{L}_X + 2X\mathcal{L}_{XX}}{\mathcal{L}_X}. \quad (1.28)$$

Por fim, a equação tipo-Schrödinger (1.25) e o potencial (1.26) podem ser escritos, respectivamente, como:

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2} + U(z)\right)u(z) = \omega^2 u(z), \quad (1.29)$$

e

$$U(z) = \frac{(\sqrt{A\mathcal{L}_X})_{zz}}{\sqrt{A\mathcal{L}_X}} - \frac{1}{\mathcal{L}_X} \left[\mathcal{L}_{\phi\phi} + \frac{1}{A} \left(\mathcal{L}_{X\phi} \frac{\phi_z}{A} \right)_z \right]. \quad (1.30)$$

A estabilidade das soluções é garantida se os autovalores da equação tipo-Schrödinger são todos positivos. Caso contrario as soluções serão instáveis. Além disso, devido à invariância translacional da teoria podemos escrever o modo zero² como:

$$u_0(z) = N_0 \left(\frac{\mathcal{L}_X^3}{\mathcal{L}_X + 2X\mathcal{L}_{XX}} \right)^{1/4} \phi_z(z), \quad (1.31)$$

onde N_0 é uma constante de ajuste.

Nas próximas seções iremos apresentar alguns modelos de teorias de campos escalares (estáticas e unidimensionais) que possuem relativo interesse em física na formação de estruturas de defeito. Por fins didáticos, consideraremos apenas teorias com a lagrangiana padrão e deixaremos o estudo de k -defeitos para o próximo capítulo.

1.2 Aplicação 1: Dinâmica padrão em modelos de um campo

É importante verificar qual o comportamento do formalismo generalizado, apresentado neste capítulo, para a situação mais simples, isto é, para a teoria com dinâmica padrão. Esta teoria será descrita por uma lagrangiana, de um único campo, com termo cinético trivial, ou seja,

$$\mathcal{L} = X - V(\phi), \quad (1.32)$$

onde X é agora dado por $X = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi / 2$ e $V(\phi)$ é o potencial que especifica a teoria. Usando (1.32) a equação de movimento (1.3) torna-se:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + V_\phi = 0.$$

Como de costume, se estamos considerando apenas campos estáticos unidimensionais,

²Modo que não contribuem para a energia da perturbação ($E = 0$).

a equação de movimento anterior pode ser escrita como:

$$\phi'' = V_\phi, \quad (1.33)$$

o que nos leva à seguinte equação de primeira ordem,

$$\phi'^2 = 2V(\phi). \quad (1.34)$$

Nesta equação, assumimos que a constante de integração seja igual a zero para que a energia seja finita³. Pela definição (1.12), podemos também escrever o superpotencial na forma:

$$\phi' = W_\phi. \quad (1.35)$$

Logo, comparando as equações (1.34) e (1.35) obtemos o potencial $V(\phi)$, em termos do superpotencial, como:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2. \quad (1.36)$$

Podemos também encontrar as componentes do tensor energia momento (1.8). Para isso, utilizando (1.32) obtemos que:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\phi'^2\eta_{\mu\nu} + V(\phi)\eta_{\mu\nu} + \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi,$$

cujas componentes, não nulas, são:

$$T_{00} = \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi), \quad (1.37a)$$

$$T_{11} = \frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi). \quad (1.37b)$$

Usando as equações (1.35) e (1.36), podemos escrever a densidade de energia (1.37a), como:

$$\rho(x) = \phi'W_\phi = \frac{dW}{dx}, \quad (1.38)$$

e a energia associada com essa configuração é dada por:

$$E = |W[\phi(\infty)] - W[\phi(-\infty)]|. \quad (1.39)$$

Por fim, a equação de estabilidade (1.21), se resume a:

$$-\frac{d^2\xi}{dx^2} + U(x)\xi = \omega^2\xi, \quad (1.40)$$

³veja o final da seção 1.1.

onde $U(x) = V_{\phi\phi}$. Usando (1.36) podemos também escrever o potencial $U(x)$ como:

$$U(x) = W_{\phi\phi}^2 + W_{\phi}W_{\phi\phi\phi}. \quad (1.41)$$

Com o modo zero sendo obtido de (1.31) na forma:

$$\xi_0(x) = N_0 \phi'(x). \quad (1.42)$$

Após esta rápida revisão podemos, a partir de agora, analisar alguns modelos específicos que possuem relativo interesse na física. Tais modelos serão estudados pela especificação do potencial $V(\phi)$ ou do superpotencial $W(\phi)$.

1.2.1 Defeitos tipo *lump*

Optamos por começar nossa abordagem por um modelo com pouca aplicação prática, mas de interesse em física por possuir um desenvolvimento matemática já muito bem desenvolvido. As soluções de defeito que abordaremos nesta subseção não apresenta uma estrutura estável e funcionarão aqui como um modelo de exibição, ou seja, um modelo onde podemos apresentar um desenvolvimento matemático completo. Tais defeitos são chamados de *lump* e podem, por exemplo, ser encontrados se considerarmos um potencial na forma:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(1 - \phi^2). \quad (1.43)$$

Este potencial é mostrado na figura 1.2. Notamos a existência de um ponto de mínimo do potencial em $\phi=0$ e dois pontos de máximo em $\phi=\pm 1/\sqrt{2}$. É verificado também que o potencial tem regiões onde $V(\phi) < 0$, o que impede que possamos construir uma função superpotencial da forma definida em (1.35). Usando (1.43) na equação de movimento

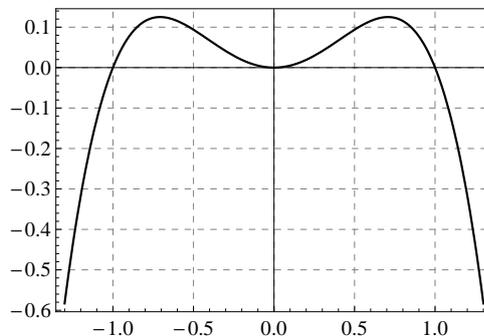


Figura 1.2: Potencial que suporta estruturas tipo *lump*.

(1.33) obtemos que:

$$\phi'' = \phi - 2\phi^3. \quad (1.44)$$

Esta equação diferencial pode ser resolvida analiticamente e têm solução dada por:

$$\phi(x) = \pm \operatorname{sech}(x). \quad (1.45)$$

A figura 1.3a mostra o comportamento da $\operatorname{sech}(x)$. A solução positiva (*lump*) está representada pela linha sólida e a negativa (*anti-lump*) pela linha tracejada. Vemos que a solução é concentrada $x=0$ e que $\phi(x)$ tende a zero quando $x \rightarrow \pm\infty$, logo da equação (1.16) a carga topológica desta solução é nula, ou seja, o *lump* é um defeito não topológico.

É importante notar como se comporta a densidade de energia. Para isso podemos usar a equação (1.10) e escrever que:

$$\rho(x) = \phi'^2. \quad (1.46)$$

Além disso, usando a solução (1.45) obtemos a densidade de energia como:

$$\rho(x) = \operatorname{sech}^2(x) \tanh^2(x), \quad (1.47)$$

que é representada na figura 1.3b. Notamos que a densidade de energia é nula em $x=0$ e vai a zero quando $x \rightarrow \pm\infty$.

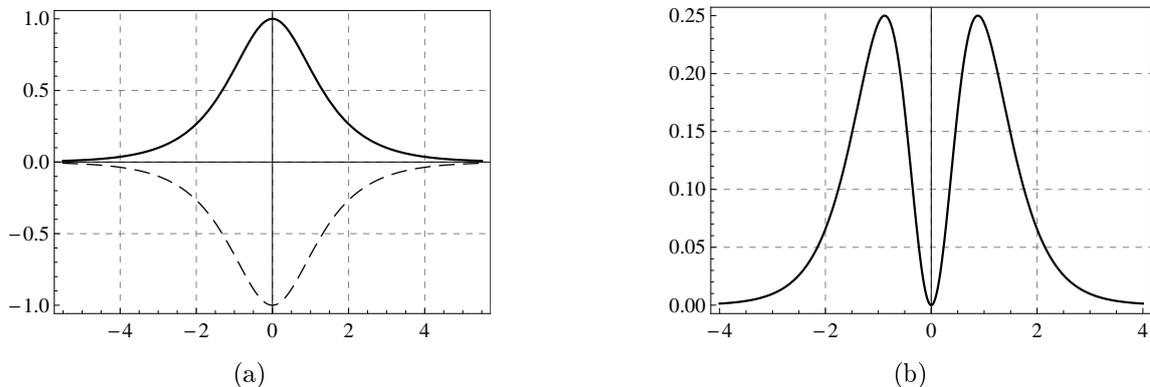


Figura 1.3: (a) Comportamento da solução tipo *lump* representada pela equação (1.45). (b) Densidade de energia (1.47) .

Para concluir a análise deste modelo investigaremos a estabilidade linear da solução *lump*. Como foi visto no final da seção 1.1.1 soluções não topológicas são instáveis por um argumento não geral de natureza topológica. Este fato deve ser verificado quando analisarmos sua estabilidade linear.

Usando a equação (1.40) podemos escrever a equação tipo-Schrödinger como:

$$-\xi''(x) + U(x)\xi(x) = \omega^2 \xi(x), \quad (1.48)$$

onde o potencial $U(x)$ é dado por:

$$U(x) = 1 - 6 \operatorname{sech}^2(x), \quad (1.49)$$

que é o conhecido potencial de Pöschl-Teller modificado (Veja anexo A.2 e referências [27, 28]). É possível encontrar o modo zero da equação (1.48) como:

$$\xi_0(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \tanh(x) \operatorname{sech}(x). \quad (1.50)$$

A figura 1.4 mostra qual é o comportamento do potencial (1.49) e do modo zero (1.50). Vemos que o modo zero possui um nó em $x=0$, o que assegura a presença de ao menos um

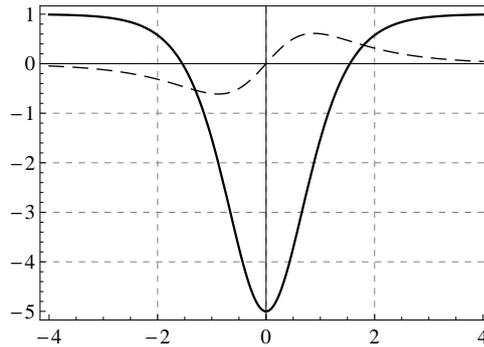


Figura 1.4: Potencial de Pöschl-Teller modificado (1.49) representado pela linha sólida e modo zero (1.50) representado pela linha tracejada.

estado ligado com autovalor negativo (Veja [29]). No entanto, como foi dito no final da seção 1.1.2 para que a solução *lump* seja estável, todos os estados ligados em (1.48) devem ter autovalor positivo, logo, podemos assim concluir que a solução tipo *lump* é instável.

1.2.2 Defeitos tipo *kink* para o potencial ϕ^4

Um modelo simples que envolve campos escalares e que apresenta a formação e estruturas estáveis é discutida a seguir. A teoria abordada têm como implicação a formação de estruturas do tipo defeitos topológicos que são de grande interesse em diversas áreas da física como em matéria condensada [30] e cosmologia [31]. Uma teoria que suporta este tipo de estrutura é descrita pelo seguinte potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2, \quad (1.51)$$

que está representado na figura 1.5. Este potencial possui um ponto de máximo em $\phi=0$ e dois mínimos degenerados em $\phi^\pm = \pm 1$. Vemos também que o potencial não possui nenhuma região com $V < 0$, este fato nos permitirá obter um superpotencial.

Usando (1.33) a equação de movimento para campos estáticos e unidimensionais torna-se:

$$\phi'' + 2\phi(1 - \phi^2) = 0,$$

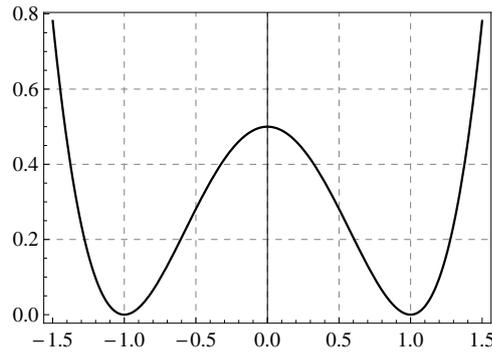


Figura 1.5: Potencial que suporta soluções tipo *kink* plotado a partir da equação (1.51).

e a equação de primeiro ordem é:

$$\phi' = 1 - \phi^2. \quad (1.52)$$

A equação (1.52) pode ser facilmente resolvida nos levando às soluções:

$$\phi(x) = \pm \tanh(x), \quad (1.53)$$

que estão representadas na figura 1.6a, onde a solução positiva é representada pela linha sólida e a negativa pela linha tracejada. É possível notar algumas características importantes desse tipo de solução. A primeira é que $\phi(x \rightarrow \infty) \neq \phi(x \rightarrow -\infty)$. Soluções com esse comportamento, isto é, que vão para valores diferentes do campo assintoticamente, são chamadas de soluções *kink*. A solução negativa é o *antikink* (reflexão do *kink* em relação ao eixo x). A segunda característica está no fato de que $\phi(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \phi^\pm$, ou seja, as soluções conectam os mínimos $\phi^\pm = \pm 1$ do potencial da figura 1.5. Dizemos que a solução *kink* conecta os mínimos $\phi^+ \rightarrow \phi^-$, enquanto que a *antikink* faz o percurso de volta $\phi^- \rightarrow \phi^+$.

Soluções tipo *kink* possuem carga topológica não nula já que $\phi^+ \neq \phi^-$. Podemos mostrar que a carga topológica do *kink* é $Q_T = +1$, enquanto que o *antikink* tem carga topológica $Q_T = -1$. Por isso, soluções de defeito com esse comportamento são ditas topológicas. Além disso, a densidade de energia da solução *kink* pode ser escrita como:

$$\rho(x) = \text{sech}^4(x), \quad (1.54)$$

que é mostrada em 1.6b. Notamos que a densidade de energia é concentrada no ponto $x = 0$ e vai a zero quando $x \rightarrow \pm\infty$.

É interessante neste ponto introduzir a função superpotencial. Para tal utilizaremos a equação (1.36) juntamente com (1.51) para escrever o superpotencial na forma:

$$W(\phi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3. \quad (1.55)$$

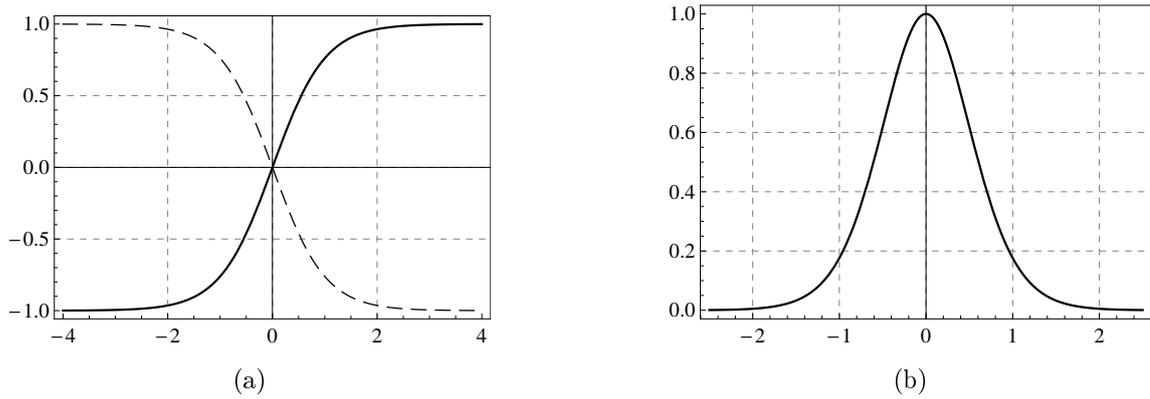


Figura 1.6: (a) Gráfico da solução *kink* (linha sólida) e *anti-kink* (linha tracejada) e (b) densidade de energia (1.54).

Com isso, a energia da solução *kink* pode ser facilmente obtida pela equação (1.39). Mais precisamente temos que,

$$E = |W(\phi^+) - W(\phi^-)| = \frac{4}{3}.$$

Vemos que a energia da solução foi obtida com o auxílio do superpotencial apenas conhecendo o comportamento da solução nos extremos. Este fato é de grande valia em muitos problemas onde não conhecemos precisamente a solução mas apenas seus valores assintóticos.

Por fim, iremos investigar a estabilidade do modelo. Já vimos que, diferente das soluções tipo *lump* da seção anterior, soluções *kink* devem ser estáveis pelo argumento da topologia, visto que sua carga topológica é diferente de zero.

Como de costume podemos também obter a equação tipo-Schrödinger (1.40) com o potencial quântico $U(x)$ sendo agora dado por:

$$U(x) = 4 - 6 \operatorname{sech}^2(x). \quad (1.56)$$

No entanto, diferente do potencial (1.49) para a solução *lump*, neste caso o potencial de Pöschl-Teller modificado permite apenas a existência de estados ligados com autovalor positivo. Além disso, o modo zero deste modelo é escrito como:

$$\xi_0(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sech}^2(x). \quad (1.57)$$

A figura 1.7 mostra o comportamento do potencial (1.56) e também do modo zero (1.57). Vemos que o modo zero não possui nós, logo, qualquer outro estado ligado que exista dever ter obrigatoriamente energia positiva, e isso garante que essas soluções sejam estáveis.

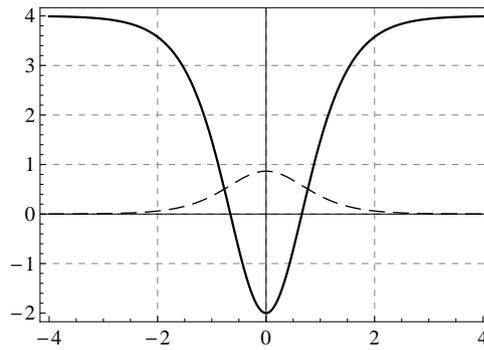


Figura 1.7: Potencial de Posh-Teller modificado (1.56) (linha sólida) e modo zero (1.57) (tracejado).

1.2.3 Defeitos tipo *kink* para o potencial seno-Gordon

Outro modelo de interesse físico que possibilita estruturas tipo *kink* e obtido pelo potencial seno-Gordon [32], que pode ser escrito como:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \cos^2(\phi), \quad (1.58)$$

e que é mostrado na figura 1.8. Vemos que diferente do modelo anterior o potencial

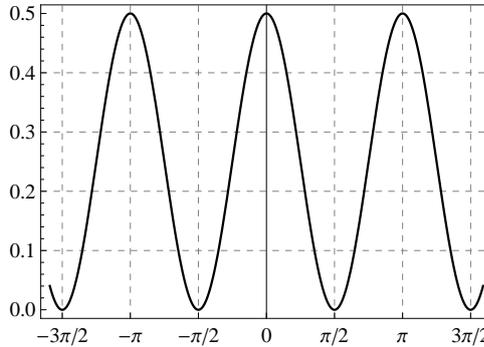


Figura 1.8: Potencial seno-Gordon (1.58).

seno-Gordon apresenta vários mínimos degenerados em $\phi = \pm(2n - 1)\pi/2$, com n sendo um número inteiro. Este fato permite a existência de várias regiões que possibilitam a formação de defeitos topológicos, sendo cada região entre dois mínimos do potencial conectado por um defeito.

A equação de movimento para solução estática é:

$$\phi'' + \cos(\phi) \sin(\phi) = 0.$$

Podemos também obter a equação de primeira ordem como:

$$\phi'^2 = \cos^2(\phi), \quad (1.59)$$

que tem solução dada por:

$$\phi(x) = \pm \arcsin [\tanh(x)] . \quad (1.60)$$

O gráfico 1.9a mostra o perfil da solução (1.60). Vemos que a solução se comporta assintoticamente como $\phi(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \pm\pi/2$. Novamente temos soluções topológicas já que $Q_T \neq 0$.

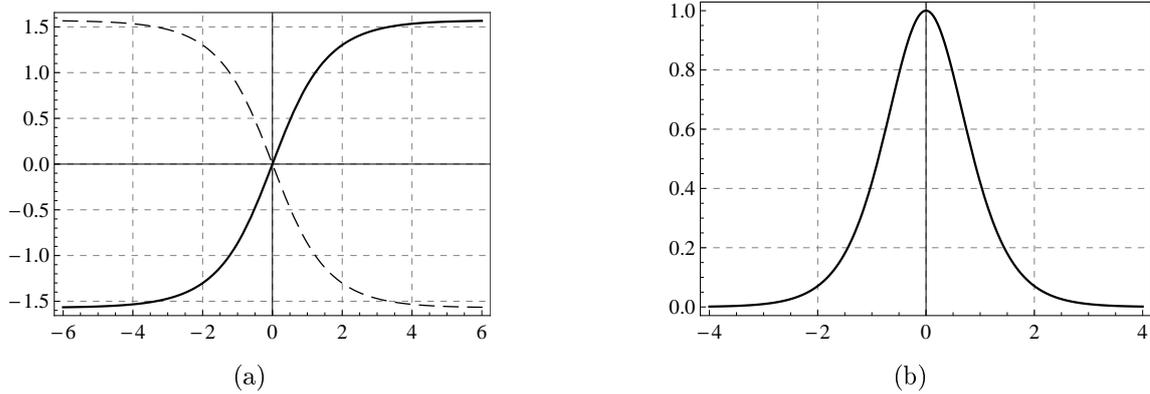


Figura 1.9: (a) Solução tipo *kink* (1.60) e (b) densidade de energia (1.62) do modelo seno-Gordon.

Como o potencial (1.58) é positivo podemos também escrever o superpotencial. Usando a equação (1.35) temos que:

$$W(\phi) = \sin(\phi) . \quad (1.61)$$

Desta equação podemos encontrar a energia como:

$$E = |W(\pi/2) - W(-\pi/2)| = 2 .$$

Por outro lado, a densidade de energia torna-se:

$$\rho(x) = \text{sech}^2(x) . \quad (1.62)$$

O gráfico 1.9b mostrada o comportamento da densidade de energia, como era de se esperar a densidade de energia têm um comportamento semelhante à obtida na seção anterior.

Para concluir, podemos também escrever uma equação tipo-Schrödinger que governa a estabilidade idêntica à equação (1.40), mas com potencial dado por:

$$U(x) = 1 - 2 \text{sech}^2(x) . \quad (1.63)$$

Onde modo zero é agora,

$$\xi_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{sech}(x) . \quad (1.64)$$

No gráfico 1.10 mostramos o comportamento do potencial (1.63) junto com o modo

zero (1.64). Vemos que o modo zero não possui nós, logo o modo zero é o estado de menor energia, o que nos diz que a teoria é estável.

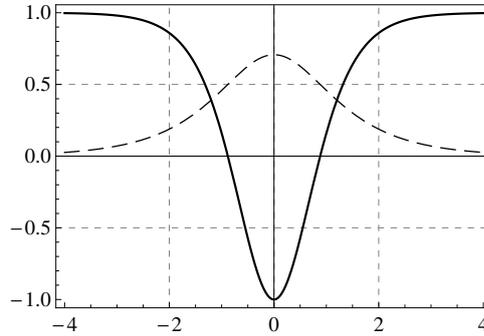


Figura 1.10: Potencial (1.63) que governa a estabilidade no modelo seno-Gordon (linha sólida) e modo zero (1.64) (linha tracejada).

Percebemos com isso que, tanto o modelo definido pelo potencial (1.51) quanto o seno-Gordon dado pelo potencial (1.58), são modelos possíveis que permitem a construção de soluções de defeitos topológicos estáveis.

1.3 Aplicação 2: Dinâmica padrão em modelos de dois campos

Como último exemplo deste capítulo iremos considerar um modelo com dinâmica padrão envolvendo dois campos escalares reais ϕ e χ . Uma descrição mais detalhada do que será abordado nesta seção pode ser obtida nas referências [33–35].

É conveniente quando lidamos com modelos de mais de um campo definir as quantidades físicas relevantes em termos do superpotencial W em vez do potencial. Seguindo essa linha iremos considerar a seguinte teoria:

$$\mathcal{L} = X_{11} + X_{22} - V(\phi, \chi), \quad (1.65)$$

que é a teoria com dinâmica padrão para modelos de dois campos. Note que esta teoria não possui termos cruzados na derivada dos campos, tais como $\phi'\chi'$, já que os invariantes X_{11} e X_{22} são definidos como:

$$X_{11} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \quad \text{e} \quad X_{22} = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi.$$

Além disso, iremos assumir que o potencial seja escrito na forma

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}W_\phi^2 + \frac{1}{2}W_\chi^2, \quad (1.66)$$

com W sendo o já conhecido superpotencial. Com isso, podemos escrever as equações de movimento para os campos ϕ e χ como:

$$\phi'' = W_\phi W_{\phi\phi} + W_\chi W_{\chi\phi}, \quad (1.67a)$$

$$\chi'' = W_\phi W_{\phi\chi} + W_\chi W_{\chi\chi}. \quad (1.67b)$$

Por outro lado, da definição (1.12) podemos também escrever a derivada dos campos como:

$$\phi' = W_\phi(\phi, \chi) \quad \text{e} \quad \chi' = W_\chi(\phi, \chi).$$

Neste ponto iremos fazer uma importante escolha. Iremos assumir que os campos possuem uma dependência funcional entre si, ou seja, vamos supor que o campo ϕ é uma função do campo χ na forma $\phi = f(\chi)$. Isso nos permite escrever as duas relações anteriores como uma única equação na forma

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi}{W_\chi}. \quad (1.68)$$

Se pudermos resolver a relação (1.68) de modo a encontrar qual é a função f que relaciona o campo ϕ com o campo χ obteremos uma espécie de orbita no espaço dos campos (ϕ, χ) , ou seja, saberemos como o sistema evolui entre os mínimos de energia. Para demonstrar este procedimento vamos assumir o específico superpotencial:

$$W(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^2, \quad (1.69)$$

onde r é uma constante real. Este é o conhecido modelo BNRT estudado em vários artigos como por exemplo em [36–40]. Este modelo permite expressar o potencial como:

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^2 - r\chi^2)^2 + 2r^2\phi^2\chi^2. \quad (1.70)$$

Note que se $r=0$ reobtemos o potencial (1.51), neste sentido o BNRT é uma extensão do potencial ϕ^4 . Usando (1.69) nas equações (1.67) podemos obter as equações de primeira ordem como:

$$\phi' = 1 - \phi^2 - r\chi^2, \quad (1.71a)$$

$$\chi' = -2r\phi\chi. \quad (1.71b)$$

Com isso, a equação (1.68) torna-se:

$$\frac{d\phi}{d\chi} = -\frac{1 - \phi^2 - r\chi^2}{2r\phi\chi}. \quad (1.72)$$

A equação (1.72) pode ser resolvida de modo a obtermos a seguinte solução geral

$$\phi^2 = 1 + \frac{r}{2r-1}\chi^2 + c\chi^{1/r}, \quad (1.73)$$

onde c é uma constante de integração. A equação (1.73) nos dá uma família de orbitas no plano (ϕ, χ) para cada escolha da constante c . Para concluir esta análise vamos escolher duas orbitas particulares.

Orbita Linha Reta:

A orbita reta é obtida se assumirmos que $\chi=0$, com isso obtemos de (1.73) que $\phi = \pm 1$. Isso permite escrever um valor de vácuo no espaço dos campos como, $v^\pm = (\pm 1, 0)$, neste ponto o potencial assume o valor $V(v^\pm) = 0$. Além disso, a equação (1.71a) torna-se:

$$\phi' = 1 - \phi^2, \quad (1.74)$$

cuja solução geral é:

$$\phi(x) = \tanh(x). \quad (1.75)$$

A orbita linha reta possibilita a formação de estruturas de defeito tipo *kink* que conecta os valores de vácuo $v^+ \rightarrow v^-$ com energia BPS dada por $|E|=4/3$.

Orbita Elíptica:

O segundo exemplo é uma orbita elíptica obtida pela condição $c = 0$ em (1.73). Desse modo obtemos que

$$\phi^2 = 1 + \frac{r}{2r-1}\chi^2. \quad (1.76)$$

O estado de vácuo do potencial corresponde aos pontos $\phi = 0$ e $\chi = \pm\sqrt{-2+r^{-1}}$. Chamaremos esse novo conjunto de mínimos do potencial de $u^\pm = (0, \pm\sqrt{-2+r^{-1}})$. Neste caso obtemos que: $V(u^\pm) = 2r^2$. Por outro lado, substituindo (1.76) em (1.71a) obtemos,

$$\phi' = 2r(1 - \phi^2),$$

cuja solução geral é:

$$\phi(x) = \tanh(2rx). \quad (1.77)$$

Outra vez obtemos uma solução *kink* mas com espessura $2rx$, diferente da encontrada em (1.75). Usando novamente a equação (1.76) encontramos a solução para χ como:

$$\chi(x) = \pm\sqrt{\frac{1-2r}{r}}\operatorname{sech}(2rx), \quad (1.78)$$

onde devemos impor que r esteja no intervalo aberto $0 < r < 1/2$ para que $\chi(x)$ seja um campo real. A figura 1.11a mostra todos os pontos de vácuo do potencial dado pela equação (1.70). Verificamos a presença de seis possíveis setores topológicos, ou seja, setores que conectam dois mínimos do potencial. No entanto, nem todos os setores são BPS. O quadro 1.11b mostra a energia de cada um dos setores. Vemos que o setor $u^+ \leftrightarrow u^-$ tem energia nula sendo assim não físico (instáveis). Além disso, a orbita linha reta pode conectar apenas os setores $v^+ \leftrightarrow v^-$, enquanto que a orbita elíptica pode conectar qualquer dos setores.

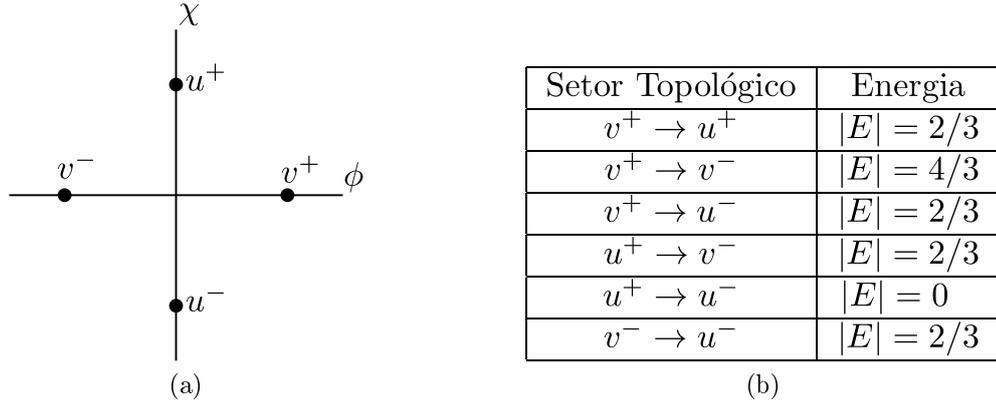


Figura 1.11: (a) Setores topológicos no espaço dos campos e (b) Energia correspondente a cada setor.

A equação para a estabilidade linear torna-se bem mais complexa, pois envolve uma mistura dos campos ϕ e χ para cada autovalor ξ_i . A equação tipo-Schrödinger pode agora ser escrita como:

$$-\begin{pmatrix} \xi_1'' \\ \xi_2'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{\phi\phi} & V_{\phi\chi} \\ V_{\phi\chi} & V_{\chi\chi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad (1.79)$$

onde,

$$V_{\phi\phi} = -2 + 6\phi^2 + 2r(1+2r)\chi^2, \quad (1.80a)$$

$$V_{\phi\chi} = 4r(1+2r)\phi\chi, \quad (1.80b)$$

$$V_{\chi\chi} = -2r + 6r^2 + 2r(1+2r)\phi^2. \quad (1.80c)$$

Neste caso, o potencial tipo-Schrödinger é uma matriz 2×2 , o que torna a análise da estabilidade bem mais difícil de ser realizada.

Em particular, para a orbita elíptica, obtemos que,

$$U(x) = \begin{pmatrix} 4 - 4(1+2r^2)S^2 & 4\sqrt{1-2r}(1+2r)\tanh(2rx)S \\ 4\sqrt{1-2r}(1+2r)\tanh(2rx)S & 10r^2 - 2r(1+2r)S^2 \end{pmatrix}, \quad (1.81)$$

onde $S = \text{sech}(2rx)$.

Capítulo 2

K -DEFEITOS E MODELOS GÊMEOS

Modelos com dinâmica não padrão têm recebido uma apreciável atenção nos últimos anos, pois fornecem um mecanismo viável para explicar a expansão acelerada do universo. Os chamados k -campos foram primeiro introduzidos no contexto de inflação do universo [41], onde a letra k deriva da palavra “cinética” em inglês (*kinetics*). Em geral, o termo “dinâmica não padrão” é empregado a qualquer teoria que apresenta ordens superiores em potência no invariante X , tais como, X^2 , $\sqrt{1-X}$, ou termos de mistura entre o campo e sua derivada como, ϕX . Além disso, quando estas teorias apresentam formação de estruturas de defeito são também chamadas de k -defeitos [42].

A seguir iremos utilizar o formalismo desenvolvido no capítulo anterior para estudar alguns modelos com dinâmica modificada. Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na primeira seção introduziremos as mudanças na dinâmica da teoria por uma maneira perturbativa, isto é, acrescentaremos pequenas correções à teoria com dinâmica padrão (1.32) e em seguida abordaremos alguns modelos específicos. Na segunda seção faremos um estudo exato de k -defeitos tendo como modelo de partida uma teoria que já apresenta altas ordens nas derivadas dos campos. Por fim, finalizaremos o capítulo estudando uma característica importante verificada em alguns modelos com dinâmica modificada que é a característica *twin* (gêmeo). Esta característica é empregada a quaisquer dois modelos distintos, mas que apresentem as mesmas soluções e a mesma densidade de energia.

2.1 Método Perturbativo

Uma interessante maneira de se estudar k -defeitos é apresentado em [43]. Lá os autores propõem que a modificação na dinâmica é feita de uma maneira perturbativa, ou seja,

assumi-se que a densidade lagrangiana é escrita na forma:

$$\mathcal{L} = X - V + \alpha F(X, \phi), \quad (2.1)$$

onde α é um parâmetro real pequeno e $F(X, \phi)$ é uma função do campo ϕ e de sua derivada. Vemos que se $\alpha=0$ reobtemos a teoria com dinâmica padrão estudada na seção 1.2.

É importante ressaltar que se F depende apenas do campo ϕ não temos a formação de k -defeitos, pois a letra “ k ”, como dissemos, indica uma mudança na dinâmica da teoria. No entanto, por completeza, também iremos analisar este caso.

Para a teoria (2.1) a equação de movimento (1.3) pode ser escrita como:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + V_\phi = \alpha \left[F_\phi - \partial_\mu (F_X \partial^\mu \phi) \right], \quad (2.2)$$

onde, como de costume, definimos as derivadas na forma: $F_\phi = \partial F / \partial \phi$, $F_X = \partial F / \partial X$, etc.

De maneira usual se estamos considerando apenas soluções estáticas unidimensionais $\phi = \phi(x)$, a equação de movimento torna-se:

$$-\phi'' + V_\phi = \alpha \left[F_\phi + (F_X \phi')' \right], \quad (2.3)$$

onde o “ $'$ ” denota a derivada com relação a x . Além disso, podemos escrever a equação de primeira ordem (1.6) como:

$$\frac{1}{2} \phi'^2 - V + \alpha (F_X \phi'^2 + F) = 0, \quad (2.4)$$

onde usamos a constante C igual a zero para que a teoria tenha energia finita.

O tensor energia momento (1.7) para soluções estáticas pode ser escrito como:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \eta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + V \right) + \alpha \left(F_X \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} F \right), \quad (2.5)$$

com componentes não nulas sendo dadas por:

$$T_{00} = \frac{1}{2} \phi'^2 + V - \alpha F, \quad (2.6a)$$

$$T_{11} = \frac{1}{2} \phi'^2 - V + \alpha (F_X \phi'^2 + F). \quad (2.6b)$$

A ideia chave deste formalismo é considerar que a solução $\phi(x)$ possa ser escrita na

forma:

$$\phi(x) = \tilde{\phi}(x) + \alpha \phi_\alpha(x), \quad (2.7)$$

onde ϕ_α é uma função a ser determinada e $\tilde{\phi}(x)$ é a solução da teoria com dinâmica padrão ($\alpha=0$) que já foi estudada na seção 1.2 e que obedece às seguintes equações,

$$\tilde{\phi}'' = V_\phi|_{\phi=\tilde{\phi}} \quad \text{e} \quad \tilde{\phi}'^2 = 2V|_{\phi=\tilde{\phi}}. \quad (2.8)$$

Se α é pequeno podemos usar (2.7) para obter a expansão do potencial como:

$$V(\tilde{\phi} + \alpha\phi_\alpha) = V(\tilde{\phi}) + \alpha\phi_\alpha V_\phi|_{\phi=\tilde{\phi}} + \frac{\alpha^2}{2}\phi_\alpha^2 V_{\phi\phi}|_{\phi=\tilde{\phi}} + \frac{\alpha^3}{6}\phi_\alpha^3 V_{\phi\phi\phi}|_{\phi=\tilde{\phi}} + \dots \quad (2.9)$$

Com isso, a equação de movimento (2.3) torna-se:

$$-\tilde{\phi}'' - \alpha\phi_\alpha'' + V_\phi|_{\phi=\tilde{\phi}} + \alpha\phi_\alpha V_{\phi\phi}|_{\phi=\tilde{\phi}} + \dots = \alpha[F_\phi + (F_X\phi)']|_{\phi=\tilde{\phi}} + \dots$$

onde desconsideramos neste expansão termos de ordem superior em α . Além disso, se usarmos as equações (2.8), podemos escrever a equação de movimento como:

$$-\phi_\alpha'' + \phi_\alpha V_{\phi\phi} = F_\phi + (F_X\tilde{\phi}')', \quad (2.10)$$

onde omitimos a notação “ $|_{\phi=\tilde{\phi}}$ ” para indicar que a solução está sendo calculada em $\tilde{\phi}$. Fazendo o mesmo procedimento para a equação de primeira ordem (2.4), encontramos que:

$$\phi_\alpha' = \frac{V_{\tilde{\phi}}}{\sqrt{2V}}\phi_\alpha - \frac{F - 2\tilde{X}F_{\tilde{X}}}{\sqrt{2V}}. \quad (2.11)$$

Esta equação pode ser integrada permitindo escrever a seguinte solução geral,

$$\phi_\alpha(x) = \tilde{\phi}'(x) \left(c + \frac{1}{2} \int \frac{F - 2\tilde{X}F_{\tilde{X}}}{\tilde{X}} dx \right),$$

onde c é uma constante de integração que pode ser eliminada pela constante que vem da integral no ultimo termo (isso pode ser feito, pois a constante fornece apenas uma translação na solução). Com isso, podemos escrever a solução completa (2.7) como:

$$\phi(x) = \tilde{\phi}(x) + \frac{\alpha}{2} \tilde{\phi}'(x) \int_0^x \left(\frac{F}{\tilde{X}} - 2F_{\tilde{X}} \right) dx. \quad (2.12)$$

A densidade de energia também pode ser expandida em série usando (2.7). Para isso

usaremos a equação (2.6a) para obter que

$$\rho(x) = \frac{1}{2}\tilde{\phi}'^2 + V(\tilde{\phi}) + \alpha\left(\tilde{\phi}'\phi'_\alpha + V_{\tilde{\phi}}(\tilde{\phi})\phi_\alpha - F\right) + \dots$$

Portanto, usando as equações (2.8) para a solução não perturbada obtemos a densidade de energia como:

$$\rho(x) = \tilde{\phi}'^2 - \alpha F + \alpha(\tilde{\phi}'\phi_\alpha)' . \quad (2.13)$$

Além disso, a energia também pode ser encontrada na forma:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{\phi}'^2 - \alpha \int_{-\infty}^{\infty} dx F + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d(\tilde{\phi}'\phi_\alpha)}{dx} + \dots ,$$

no entanto, é requerida que a solução $\tilde{\phi}(x)$ obedeça às características de uma solução de defeito, isto é, $\tilde{\phi}(x \rightarrow -\infty) \neq \tilde{\phi}(x \rightarrow \infty)$ e $\tilde{\phi}' \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$. Com isso, o ultimo termo da expressão anterior não contribui para a energia. Logo, obtemos simplesmente

$$E = E_0 - \alpha \int_{-\infty}^{\infty} dx F(\tilde{\phi}, \tilde{X}) , \quad (2.14)$$

onde E_0 é a energia da solução não perturbada (1.39). Vemos que a correção em primeira ordem para a energia só depende da solução não perturbada $\tilde{\phi}$.

Para concluir é necessário estudar o comportamento da estabilidade linear dessa teoria. Para isso usaremos o procedimento desenvolvido na seção 1.1.2. Mas precisamente da equação (1.29) obtemos a equação de autovalor como:

$$-\frac{d^2 u}{dz^2} + U(z)u = \omega^2 u ,$$

onde devemos assumir a seguinte mudança de variável,

$$u(z) = \left[1 + \frac{\alpha}{2}\left(F_{\tilde{X}} + \tilde{X}F_{\tilde{X}\tilde{X}}\right)\right] \xi(x) \quad \text{e} \quad dz = \left(1 - \alpha\tilde{X}F_{\tilde{X}\tilde{X}}\right) dx .$$

Para encontrar o potencial quântico (1.30) devemos notar que:

$$\sqrt{A\mathcal{L}_X} = 1 + \frac{1}{2}\alpha\left(F_{\tilde{X}} + \tilde{X}F_{\tilde{X}\tilde{X}}\right) + \dots \quad (2.15a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{A\mathcal{L}_X}} = 1 - \frac{1}{2}\alpha\left(F_{\tilde{X}} + \tilde{X}F_{\tilde{X}\tilde{X}}\right) + \dots \quad (2.15b)$$

$$-\frac{\mathcal{L}_{\phi\phi}}{\mathcal{L}_X} = V_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} + \alpha V_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}\tilde{\phi}}\phi_\alpha - \alpha\left(V_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}F_{\tilde{X}} + F_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}\right) + \dots \quad (2.15c)$$

$$-\frac{1}{A\mathcal{L}_X} = -1 + \alpha\left(F_{\tilde{X}} + \tilde{X}F_{\tilde{X}\tilde{X}}\right) + \dots \quad (2.15d)$$

$$\frac{\mathcal{L}_{X\phi}}{A} = \alpha F_{\tilde{X}\tilde{\phi}} + \dots \quad (2.15e)$$

Assim, usando as equações (2.15) e a relação para a mudança de coordenada de x para z , o potencial quântico U obtido de (1.30) pode ser escrito como:

$$U(z) = V_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} + \alpha U_\alpha(z), \quad (2.16)$$

onde,

$$U_\alpha(z) = \frac{1}{2} \left(F_{\tilde{X}} + \tilde{X} F_{\tilde{X}\tilde{X}} \right)_{zz} - \left(F_{\tilde{X}\tilde{\phi}} \sqrt{2V} \right)_z - F_{\tilde{X}} V_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} - F_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} + \frac{1}{2} V_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}\tilde{\phi}} \frac{d\tilde{\phi}}{dz} \int \left(\frac{F}{\tilde{X}} - 2F_{\tilde{X}} + 2\tilde{X} F_{\tilde{X}\tilde{X}} \right) dz.$$

Nesta equação temos que $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(z)$.

Para ilustrar este formalismo o restante desta seção será dedicada ao estudo de alguns exemplos específicos para a função $F(X, \phi)$ e para o potencial $V(\phi)$. Iremos considerar duas situações. A primeira quando F depende apenas do campo $\tilde{\phi}$ e a segunda quando F depende apenas da derivada do campo $\tilde{\phi}'$. Em ambos os casos iremos buscar por soluções para potenciais da forma ϕ^4 introduzido em (1.51) e sino-Gordon introduzidos (1.58). O caso geral onde a função F depende tanto do campo $\tilde{\phi}$ como de sua derivada $\tilde{\phi}'$ não será abordado nesta tese, mas pode ser encontrado na referencia [43]. Para essa teria o modo zero pode ser escrito como:

$$u_0(z) = \tilde{u}_0 + \frac{\alpha}{2} \tilde{u}_0 \left(F_{\tilde{X}} + \tilde{X} F_{\tilde{X}\tilde{X}} \right) + \alpha \frac{d\tilde{u}_0}{dz} \int dz \tilde{X} F_{\tilde{X}\tilde{X}} \quad (2.17)$$

onde \tilde{u}_0 é o modo zero do modelo com dinâmica padrão.

Na teoria com dinâmica padrão, o potencial quântico análogo tem o modo zero proporcional à derivada da solução estática e como este é também o estado fundamental temos assegurada a estabilidade da estrutura de defeitos. No entanto, para o modelo generalizado devemos calcular as correções na energia do modo zero, isto é,

$$\omega_0 = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} dz U_\alpha(z) \tilde{u}_0^2(z). \quad (2.18)$$

Concluimos que quando $\omega_0 \geq 0$ as soluções estáticas do modelo com dinâmica generalizada são estáveis, o que sempre pode ser feito pela escolha adequada do sinal de α .

2.1.1 Primeiro Caso: $F = F(\phi)$

Como dissemos, a primeira situação que iremos abordar é o caso onde a função F depende apenas do campo ϕ . Por simplicidade iremos considerar uma dependência na

forma:

$$F(\phi) = 2\sqrt{8}V^{3/2}, \quad (2.19)$$

isso faz com que a teoria (2.1) seja uma teoria efetiva, com potencial efetivo dado por:

$$\bar{V}(\phi) = V - 2\alpha\sqrt{8}V^{3/2}. \quad (2.20)$$

O motivo da escolha da relação (2.19) é simples. Com esta escolha a integral na equação (2.12) pode ser facilmente calculada de modo que obtemos a solução como:

$$\phi(x) = \tilde{\phi}(x) - 2\alpha \tilde{\phi}'(x). \quad (2.21)$$

Além disso, a densidade de energia (2.13) e a energia (2.14) podem ser escritas respectivamente como:

$$\rho(x) = \tilde{\phi}'^2(x) - 4\alpha \tilde{\phi}'(x) \left[\tilde{\phi}'^2(x) + \tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}''(x) \right], \quad (2.22)$$

e

$$E = E_0 - 2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}'^3(x) dx. \quad (2.23)$$

Por fim, o potencial quântico que governa a estabilidade pode ser escrito como:

$$U(z) = V_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} - 2\alpha \left[3 \frac{V_{\tilde{\phi}}^2 + 2VV_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}}{\sqrt{2V}} - \tilde{\phi}V_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}\tilde{\phi}} \frac{d\tilde{\phi}}{dz} \right]. \quad (2.24)$$

O modelo (2.9) não provoca alterações na energia do modo zero. Portanto se a teoria de defeito inicial para $\alpha = 0$ for estável a teoria generalizada com $\alpha \neq 0$ também será. Temos assim todas as características importantes na descrição do nosso modelo faltando apenas especificar o potencial $V(\phi)$ que será feito nos exemplos a seguir.

Exemplo 1:

Como primeiro exemplo específico vamos assumir que V seja o potencial polinomial abordado na seção 1.2.2, ou seja:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2.$$

Se $\alpha = 0$ este potencial nos leva a soluções estáticas na forma: $\tilde{\phi}(x) = \tanh(x)$.

Com isso, podemos escrever o potencial efetivo (2.18) e a solução geral (2.19), respectivamente, como:

$$\bar{V}(\phi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2 - 2\alpha (1 - \phi^2)^3, \quad (2.25)$$

e

$$\phi(x) = \tanh(x) [1 - 2\alpha \operatorname{sech}^2(x)] . \quad (2.26)$$

Vemos pela equação (2.25) que se $\alpha < 0$ o potencial efetivo vai assintoticamente para $-\infty$. Por outro lado, de $\alpha > 0$ o potencial efetivo é positivo sempre. O gráfico 2.1a mostra o comportamento do potencial (2.25) e o gráfico 2.1b mostra o comportamento da solução (2.26), ambos plotados para os mesmo valores do parâmetro α . O valor de $\alpha=0$

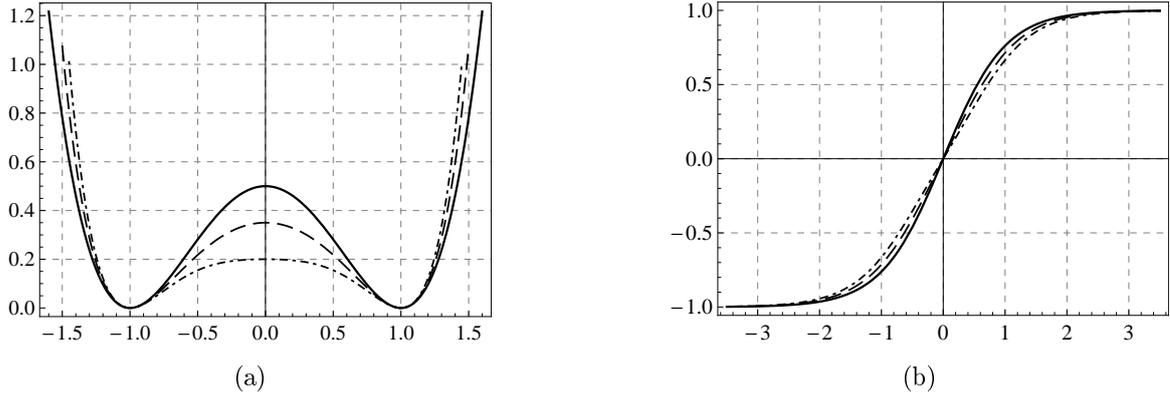


Figura 2.1: (a) Potencial (2.25) e (b) solução tipo *kink* (2.26) obtidas por método perturbativo e plotados para $\alpha=0$ (linha sólida), $\alpha=0.075$ (linha tracejada), $\alpha=0.15$ (linha traço-ponto).

está representado pela linha contínua, $\alpha=0.075$ pela linha tracejada, $\alpha=0.15$ pela linha traço-ponto. Vemos que a solução obtido em (2.26) possui os mesmos valores assintóticos da solução não perturbada, ou seja, $\phi(x \rightarrow \pm\infty) = \tilde{\phi}(x \rightarrow \pm\infty)$. Isso faz com que os mínimos do potencial também não se alterem, no entanto, o ponto de máximo em $\phi=0$ é deslocado de $\Delta V_{\max} = -2\alpha$.

Obtemos também a densidade de energia (2.22) como:

$$\rho(x) = \operatorname{sech}^4(x) + 4\alpha [2 \operatorname{sech}^4(x) - 3 \operatorname{sech}^6(x)] . \quad (2.27)$$

A figura 2.2a mostra o comportamento da densidade de energia para alguns valores de α . A linha contínua correspondo ao caso onde $\alpha=0$. Vemos que a densidade de energia tem um ponto de inflexão em $\alpha = 1/10$. Este é um novo resultado chamado de *split* e será melhor abordado quando estudarmos modelos de Mundo brana.

A energia da solução estática é agora dada por:

$$E = \frac{4}{3} - \frac{32\alpha}{15} , \quad (2.28)$$

logo, se $\alpha > 0$ e energia do defeito é menor que no caso $\alpha=0$. Para concluir este exemplo podemos escrever o potencial quântico (2.24) como:

$$U(z) = 4 - 6 \operatorname{sech}^2(z) - 12\alpha [2 \operatorname{sech}^2(z) - 3 \operatorname{sech}^4(z)] . \quad (2.29)$$

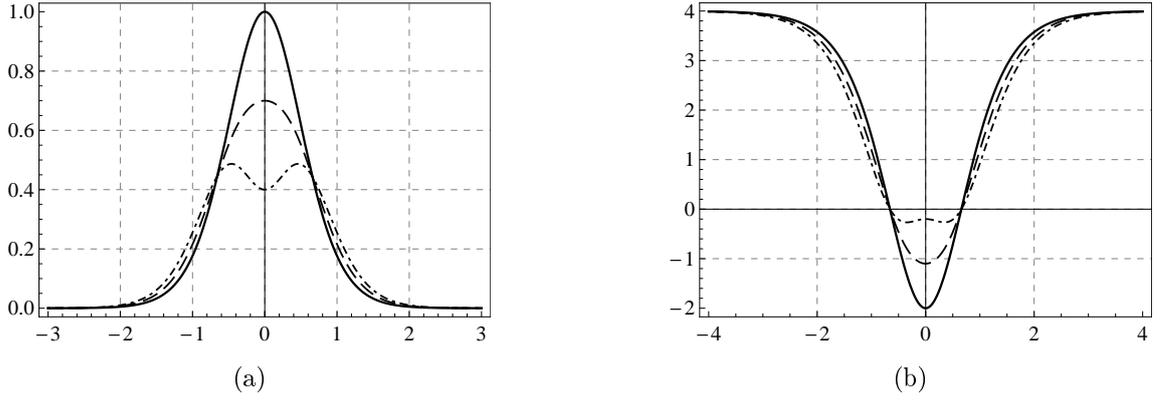


Figura 2.2: Densidade de energia (a) e potencial quântico (b) obtidas por método perturbativo e plotados $\alpha=0$ (linha solidia), $\alpha=0.075$ (linha tracejada), $\alpha=0.15$ (linha traço-ponto).

Na figura 2.2b mostramos o comportamento do potencial quântico para alguns valores de α . Notamos que o mínimo do potencial quântico é deslocado de um valor $\Delta U_{\min} = 12\alpha$ em relação ao mínimo com $\alpha=0$.

Exemplo 2:

Para o segundo exemplo vamos considerar o potencial sino-Gordon (1.58), ou seja,

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \cos^2(\phi),$$

que permite solução estática não perturbada na forma: $\tilde{\phi}(x) = \arcsin[\tanh(x)]$. Com isso, o potencial efetivo (2.20) e a solução geral (2.21) tornam-se:

$$\bar{V}(\phi) = \frac{1}{2} \cos^2(\phi) - 2\alpha \cos^3(\phi), \quad (2.30)$$

e

$$\phi(x) = \arcsin[\tanh(x)] [1 - 2\alpha \operatorname{sech}(x)]. \quad (2.31)$$

Os gráficos 2.3a e 2.3b mostram respectivamente o comportamento do potencial efetivo (2.30) e da solução *kink* (2.31). Note que o potencial seno-Gordon se transforma em um duplo seno-Gordon, pois os máximos em $\phi = n\pi$ são deslocados por um valor $V_{\max} = -2\alpha(-1)^n$.

Neste caso, a densidade de energia pode ser escrita como:

$$\rho(x) = \operatorname{sech}^2(x) - 4\alpha \operatorname{sech}^2(x) \left[\operatorname{sech}(x) - \tanh(x) \arcsin[\tanh(x)] \right], \quad (2.32)$$

que têm comportamento mostrado na figura 2.4a. Note que novamente a densidade de

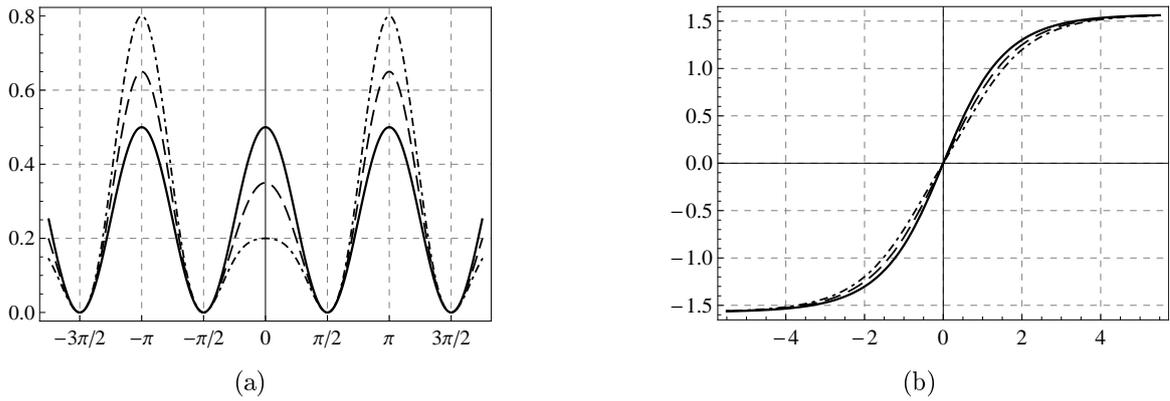


Figura 2.3: Potencial (a) e solução tipo *kink* (b) para o modelo Sino-Gordon obtidas por método perturbativo e plotados para $\alpha = 0$ (linha sólida), $\alpha = 0.075$ (linha tracejada), $\alpha = 0.15$ (linha traço-ponto).

energia possui um ponto de inflexão para $\alpha = 1/10$. Além disso, a energia é dada por

$$E = 2 - \alpha\pi, \quad (2.33)$$

que novamente diminui em relação ao caso standard se assumirmos que $\alpha > 0$.

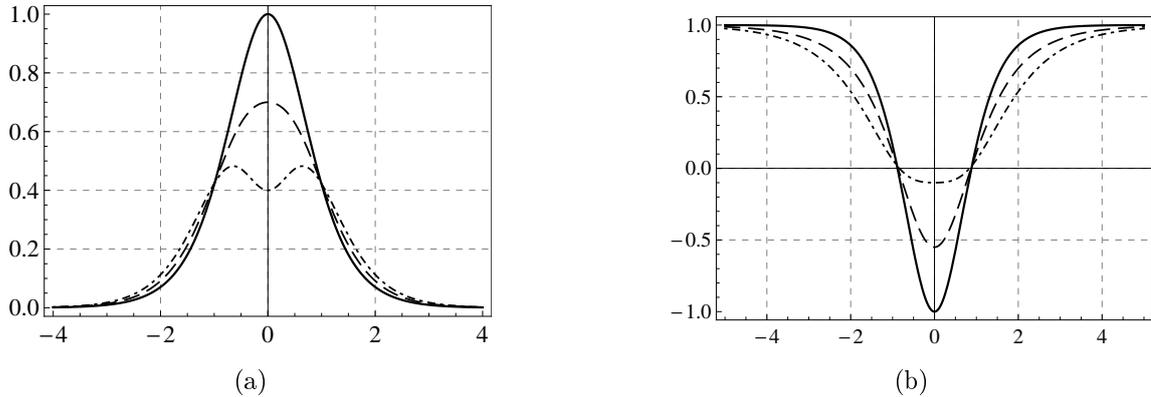


Figura 2.4: Densidade de energia (a) e potencial quântico (b) obtidas por método perturbativo e plotados para $\alpha = 0$ (linha sólida), $\alpha = 0.075$ (linha tracejada), $\alpha = 0.15$ (linha traço-ponto).

O potencial quântico que governa a estabilidade pode ser escrito como:

$$U(z) = 1 - 2\text{sech}^2(z) - 2\alpha\text{sech}(z) \left[6 - 9\text{sech}^2(z) - 4 \tanh(z)\text{sech}(z) \arcsin[\tanh(z)] \right], \quad (2.34)$$

e é mostrado no gráfico 2.4b. Neste caso o mínimo do potencial quântico é deslocado de um valor $\Delta U_{\min} = 6\alpha$.

2.1.2 Segundo Caso: $F = F(X)$

Vamos abordar agora uma situação mais interessante com F sendo uma função apenas da derivada do campo escalar, ou seja, $F = F(X)$. Para isso escolheremos a seguinte forma

funcional:

$$F(X) = \frac{X}{n} |2X|^{n-1}, \quad (2.35)$$

onde n é um número inteiro positivo. Esta é a maneira mais geral de se escrever a função F . Além disso, vemos que para $n=1$ reobtemos a teoria com dinâmica padrão a menos de uma constante multiplicativa. O módulo se justifica pois no caso de campos estáticos $X < 0$ e isso garantirá que a densidade energia seja positiva definida.

Para encontrar a solução completa (2.12) devemos notar a seguinte identidade

$$\frac{F}{X} - 2F_X = -\frac{2n-1}{n} |2X|^{n-1}.$$

Por conseguinte para solução estática temos que $|2X| = \tilde{\phi}'^2$, logo, a equação anterior torna-se:

$$\frac{F}{X} - 2F_X = -\frac{2n-1}{n} \tilde{\phi}'^{2n-2}. \quad (2.36)$$

Com isso, a equação (2.12) pode ser escrita como:

$$\phi(x) = \tilde{\phi}(x) - \alpha \frac{2n-1}{2n} \tilde{\phi}' \int \tilde{\phi}'^{2n-2} dx. \quad (2.37)$$

Além disso, a densidade de energia (2.13) e a energia (2.14) tornam-se, respectivamente,

$$\rho(x) = \tilde{\phi}'^2 + \frac{\alpha}{2n} \tilde{\phi}'^{2n} + \alpha(\tilde{\phi}' \phi_\alpha)', \quad (2.38a)$$

e

$$E = E_0 + \frac{\alpha}{2n} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}'^{2n} dx. \quad (2.38b)$$

Para obter o potencial quântico devemos notar que

$$\frac{F}{X} - 2F_X + 2XF_{XX} = \frac{2n^2 - 4n + 1}{n} |2X|^{n-1},$$

o que permite escrever o potencial quântico que governa a estabilidade na seguinte forma,

$$U(z) = V_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} + \alpha \left\{ \frac{n}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left[\left(\frac{d\tilde{\phi}}{dz} \right)^{2n-2} \right] - \tilde{U} \left(\frac{d\tilde{\phi}}{dz} \right)^{2n-2} + \frac{2n^2 - 4n + 1}{2n} \frac{d\tilde{U}}{dz} \int \left(\frac{d\tilde{\phi}}{dz} \right)^{2n-2} dz \right\}, \quad (2.39)$$

onde $\tilde{U} = V_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}$ e nesta equação $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(z)$.

Percebemos também que este exemplo deve contribuir para a energia do modo zero. Portanto devemos observar se esta contribuição pode desestabilizar as soluções. Para isso

escreveremos o modo zero como:

$$u_0(z) = \tilde{u}_0(z) + \frac{\alpha n}{2} \left(\frac{d\tilde{\phi}}{dz} \right)^{2n-2} \tilde{u}_0(z) + \alpha(n-1) \frac{d\tilde{u}_0}{dz} \int \left(\frac{d\tilde{\phi}}{dz} \right)^{2n-2} dz. \quad (2.40)$$

Exemplo 1:

Vamos agora usar a forma específica para os dois potenciais já estudados: ϕ^4 e sine-Gordon. Para o potencial ϕ^4 com solução $\tilde{\phi} = \tanh(x)$, a solução geral (2.37) torna-se:

$$\phi(x) = \tanh(x) - \alpha \frac{2n-1}{2n} \operatorname{sech}^2(x) \tanh(x) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 3-2n; \frac{3}{2}; \tanh^2(x)\right), \quad (2.41)$$

onde ${}_2F_1$ é a função hipergeométrica (Veja anexo A.3) que representa uma série polinomial de grau $4n-5$ em $\tanh(x)$. Para $n=1$ e $n=2$ temos, respectivamente, que

$$\phi(x) = \tanh(x) - \frac{\alpha}{2} x \operatorname{sech}^2(x), \quad (2.42a)$$

$$\phi(x) = \tanh(x) - \frac{3\alpha}{4} \operatorname{sech}^2(x) \tanh(x) \left(1 - \frac{1}{3} \tanh^2(x)\right). \quad (2.42b)$$

As figuras 2.5a e 2.5b mostram o comportamento da solução (2.41). Em 2.5a a solução foi plotada para $\alpha = 0.2$ e $n = 1, 2, 3, 4$. Notamos que a mudança do parâmetro n não altera significativamente o comportamento da solução. Já na figura 2.5b mantemos n fixo e variamos o parâmetro α . Neste caso observamos que a solução é deslocada da solução padrão ($\alpha = 0$).

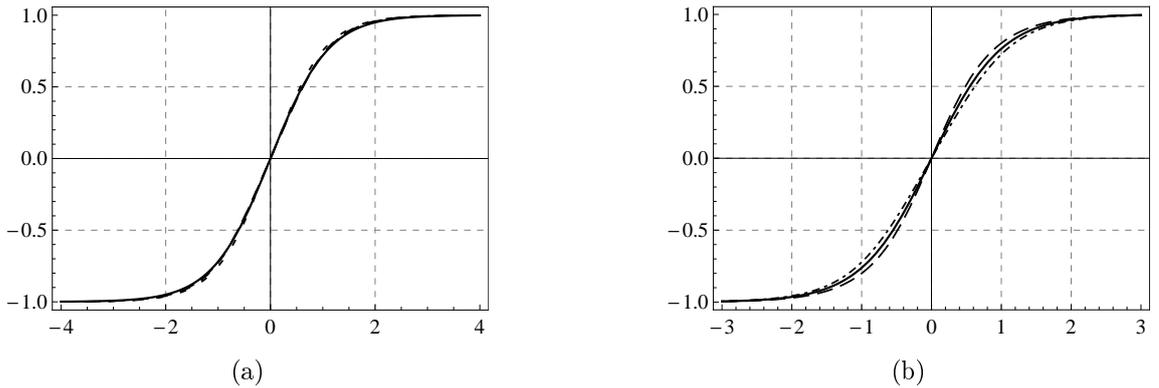


Figura 2.5: (a) Gráfico da solução (2.41) plotado com $\alpha = 0.2$ e $n = 1, 2, 3, 4$. (b) Gráfico da solução (2.41), mas para $n = 2$ com $\alpha = -0.2$ (linha tracejada), $\alpha = 0$ (linha solida) e $\alpha = 0.2$ (linha-traço-ponto).

A densidade de energia (2.38a) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \rho_n(x) = & \operatorname{sech}^4(x) - \frac{(n-1)\alpha}{n} \operatorname{sech}^{4n}(x) + \frac{2(2n-1)\alpha}{n} \operatorname{sech}^4(x) \times \\ & \times \tanh^2(x) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 3-2n; \frac{3}{2}; \tanh^2(x)\right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Para $n = 1$ e $n = 2$ obtemos respectivamente

$$\rho_1(x) = \operatorname{sech}^4(x) \left(1 + 2\alpha x \tanh(x) \right), \quad (2.44a)$$

$$\rho_2(x) = \operatorname{sech}^4(x) + \alpha \operatorname{sech}^4(x) \left(2 - \operatorname{sech}^2(x) - \frac{3}{2} \operatorname{sech}^4(x) \right). \quad (2.44b)$$

Além disso, a energia (2.38b) é obtida como:

$$E_n = \frac{4}{3} + \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2n} \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(2n + 1/2)}, \quad (2.45)$$

que nos permite escrever para $n = 1$ e $n = 2$, respectivamente, $E_1 = 4/3 + 2\alpha/3$ e $E_2 = 4/3 + 8\alpha/35$.

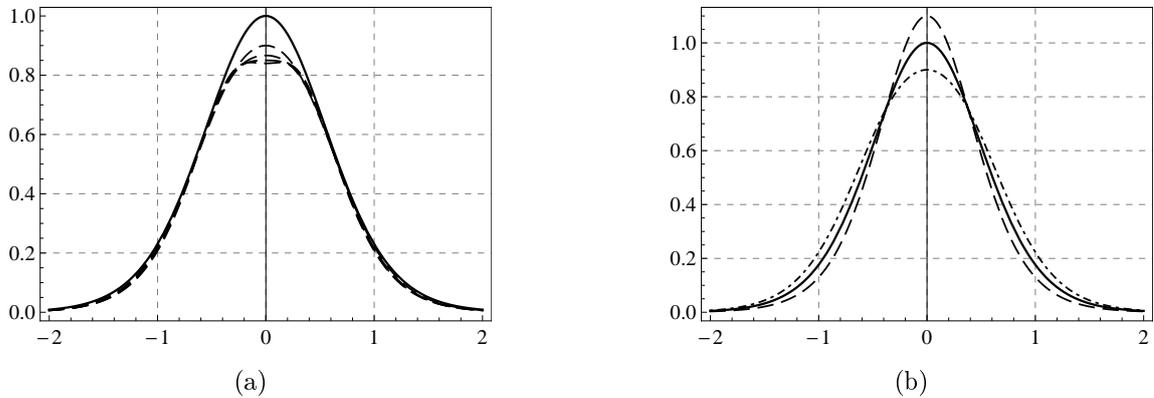


Figura 2.6: (a) Gráfico da densidade de energia para $\alpha=0.2$ e $n=1, 2, 3, 4, 5$. (b) Densidade de energia $n=2$, $\alpha=-0.2$ (linha tracejada), $\alpha=0$ (linha solida) e $\alpha=0.2$ (linha-traço-ponto).

As figuras 2.6a e 2.6b mostram o comportamento da densidade de energia (2.43). Na figura 2.6a a densidade de energia foi plotada para $\alpha=0.2$ e $n=1, 2, 3, 4, 5$. Note que para $n > n_s$, onde

$$n_s \equiv \frac{1 - \alpha + \sqrt{1 - 2\alpha + 5\alpha^2}}{2\alpha},$$

o centro da densidade de energia deixa de ser um ponto de máximo e passa a ser um ponto de mínimo. Para $\alpha=0.2$ isso ocorre quando $n_s = 4.2$. Na figura 2.6b a densidade de energia foi plotada para alguns valores de α , com $n=2$, em contraste com a densidade de energia padrão ($\alpha=0$) que é sempre mostrada pela linha solida.

O potencial quântico (2.39) torna-se:

$$U_n(z) = 4 - 6\operatorname{sech}^2(z) + 2\alpha \left[4n(n-1)^2 - 2 + (3 - 3n + 7n^2 - 4n^3) \operatorname{sech}^2(z) \right] \operatorname{sech}^{4n-4}(z) + 6\alpha \frac{2n^2 - 4n + 1}{n} \operatorname{sech}^2(z) \tanh^2(z) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 3 - 2n; \frac{3}{2}; \tanh^2(z)\right). \quad (2.46)$$

Para $n = 1$ e $n = 2$ temos respectivamente que

$$U_1(z) = 4 - 6\operatorname{sech}^2(z) - 2\alpha \left[2 - 3\operatorname{sech}^2(z) (1 - z \tanh(z)) \right], \quad (2.47a)$$

$$U_2(z) = 4 - 6\operatorname{sech}^2(z) + \alpha \operatorname{sech}^2(z) \left[2 + 11\operatorname{sech}^2(z) - 15\operatorname{sech}^4(z) \right]. \quad (2.47b)$$

Além disso, o modo zero pode ser escrito como:

$$u_0(z) = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sech}^2(z) + \frac{\alpha n \sqrt{3}}{4} \operatorname{sech}^{4n-2}(z) - \sqrt{3} \alpha (n-1) \operatorname{sech}^2(z) \times \\ \times \tanh^2(z) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 3-2n; \frac{3}{2}; 1 - \operatorname{sech}^2(z)\right). \quad (2.48)$$

Para qualquer n e α teremos que $\omega_0 = 0$, ou seja, as soluções são sempre estáveis. A figura 2.5a mostra o comportamento do potencial quântico (2.46) para $\alpha = 0.2$ e $n = 1, 2, 3, 4$. Notamos que o mínimo do potencial quântico é deslocado de $\Delta U_{\min} = -\alpha(n^2 - n - 1)$. A figura 2.5b mostra o potencial quântico para $n = 3$ e $\alpha = -0.2$ (linha tracejada), $\alpha = 0$ (linha solida) e $\alpha = 0.2$ (linha-traço-ponto).

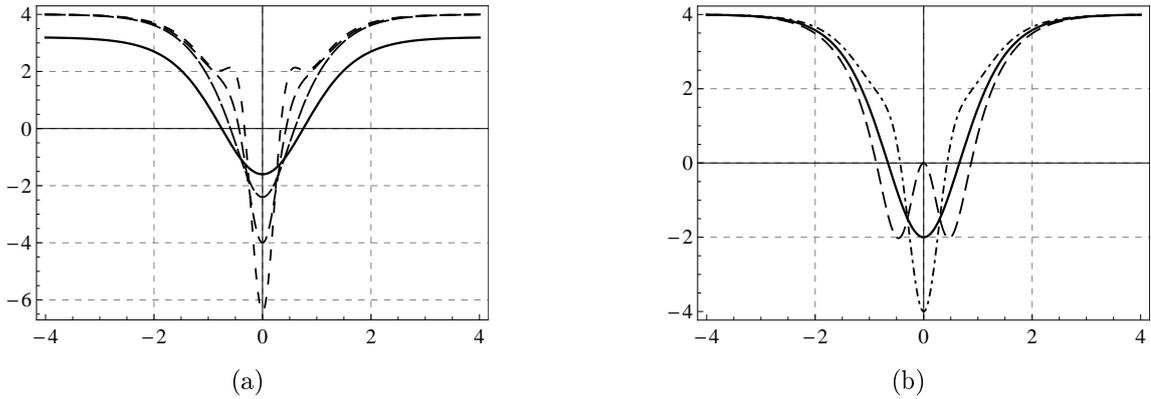


Figura 2.7: Gráfico do potencial quântico (2.46) para $\alpha = 0.2$ e $n = 1, 2, 3, 4$. (b) Potencial quântico para $n = 3$ e $\alpha = -0.2$ (linha tracejada), $\alpha = 0$ (linha solida) e $\alpha = 0.2$ (linha-traço-ponto).

Exemplo 2:

Vamos agora refazer toda a análise anterior para o potencial seno-Gordon, cuja solução não perturbada é dada por $\tilde{\phi}(x) = \arcsin[\tanh(x)]$. O primeiro resultado que podemos verificar é que a solução referente à equação (2.37) torna-se:

$$\phi(x) = \arcsin[\tanh(x)] - \alpha \frac{2n-1}{2n} \operatorname{sech}(x) \tanh(x) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 2-n; \frac{3}{2}; \tanh^2(x)\right). \quad (2.49)$$

Especificamente para $n = 1$ e $n = 2$ temos, respectivamente, que:

$$\phi(x) = \arcsin[\tanh(x)] - \frac{\alpha}{2} x \operatorname{sech}(x), \quad (2.50a)$$

$$\phi(x) = \arcsin[\tanh(x)] - \frac{3\alpha}{4} \operatorname{sech}(x) \tanh(x). \quad (2.50b)$$

Além disso, a densidade de energia e a energia são obtidas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \rho_n(x) = & \operatorname{sech}^2(x) - \frac{(n-1)\alpha}{n} \operatorname{sech}^{2n}(x) + \frac{(2n-1)\alpha}{n} \operatorname{sech}^2(x) \times \\ & \times \tanh^2(x) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 2-n; \frac{3}{2}; \tanh^2(x)\right), \end{aligned} \quad (2.51)$$

e

$$E_n = 2 + \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2n} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+1/2)}. \quad (2.52)$$

Especificando a energia para $n = 1$ e $n = 2$ obtemos $E_1 = 2 + \alpha$ e $E_2 = 2 + \alpha/3$. O gráfico 2.8 mostra o comportamento da densidade de energia (2.51) para alguns valores dos parâmetros α e n . Vemos novamente que existe uma região de parâmetros onde a densidade de energia começa a sofrer um *split*. Pode-se mostrar que a relação entre α e n onde a densidade de energia (2.51) sofre *split* são os mesmos obtidos para a equação (2.43).

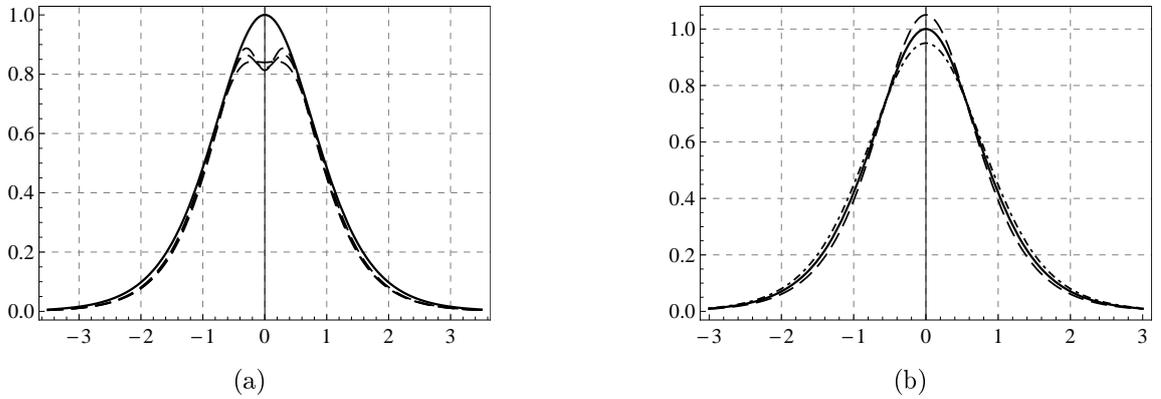


Figura 2.8: (a) Gráfico da densidade de energia para $\alpha = 0.1$ e $n = 1, 5, 10, 15$. (b) Densidade de energia para $n = 2$ e $\alpha = -0.1$ (linha tracejada), $\alpha = 0$ (linha sólida) e $\alpha = 0.1$ (linha-traço-ponto).

Para concluir esta seção, escrevemos o potencial quântico como:

$$\begin{aligned} U_n(z) = & 1 - 2\operatorname{sech}^2(z) + \alpha \operatorname{sech}^{2n-2}(z) \left[2n^3 - 4n^2 + 2n - 1 - 2(2n^3 - 3n^2 + n - 1) \operatorname{sech}^2(z) \right] + \\ & + \alpha \frac{4n^2 - 8n + 2}{n} \operatorname{sech}^2(z) \tanh^2(z) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 2-n; \frac{3}{2}; \tanh^2(z)\right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Para $n = 1$ e $n = 2$ temos, respectivamente, que:

$$U_1(z) = 1 - 2 \operatorname{sech}^2(z) - \alpha \left(1 - 2 \operatorname{sech}^2(z) (1 - z \tanh(z)) \right), \quad (2.54a)$$

$$U_2(z) = 1 - 2 \operatorname{sech}^2(z) + \alpha \operatorname{sech}^2(z) \left(4 - 11 \operatorname{sech}^2(z) \right), \quad (2.54b)$$

onde novamente obtemos que $\omega_0 = 0$, ou seja, o termo relativo à equação (2.35) não

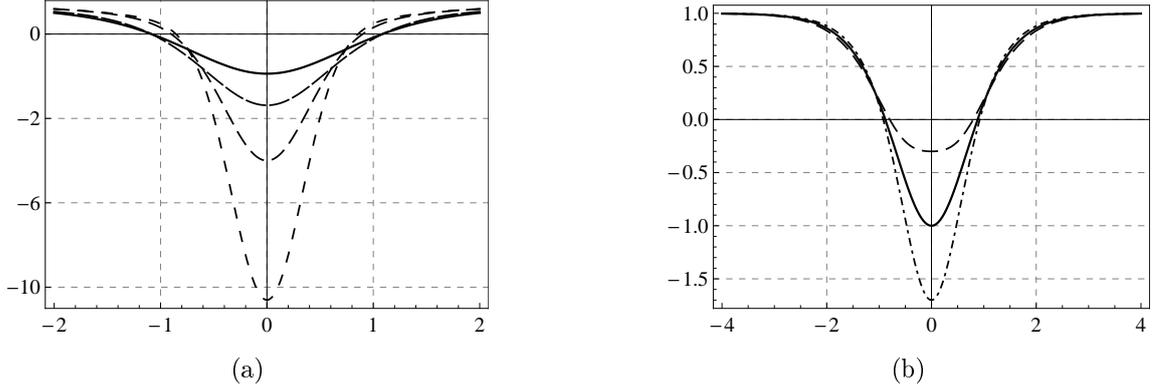


Figura 2.9: (a) Gráfico do potencial quântico (2.53) para $\alpha = 0.1$ e $n = 1, 2, 3, 4$. (b) Potencial quântico para $n = 2$ e $\alpha = -0.1$ (linha tracejada), $\alpha = 0$ (linha sólida) e $\alpha = 0.1$ (linha-traço-ponto).

contribui para a energia do modo zero, portanto o conjunto de solução (2.49) é sempre estável. O gráfico 2.9 mostra o comportamento do potencial quântico (2.53) para alguns valores de α e n . Em 2.7a mantemos α constante e variamos n e em 2.7b mantemos n constante e variamos α .

2.2 Método Exato

Tendo em mente a ideia de teorias com dinâmica modificada apresentada anteriormente iremos introduzir nesta seção novas teorias de campos escalares que apresenta estruturas tipo *kink*, mas diferente do que foi feito na seção anterior, iremos partir de uma teoria com dinâmica não padrão. Ou seja, iremos obter defeitos topológicos de forma analítica e exata.

2.2.1 *Kink* em teorias com dinâmica modificada

Como primeiro modelo vamos considerar a seguinte lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{X}{n} |2X|^{n-1} - V(\phi), \quad (2.55)$$

onde n é um número real. Vemos que se $n = 1$ reobtemos a teoria com dinâmica padrão (1.32). Por simplicidade iremos assumir que esta teoria tenha as mesmas soluções do

modelo específico (1.51), ou seja queremos obter soluções na forma $\phi(x) = \tanh(x)$, para isso devemos assumir que o potencial $V(\phi)$ seja escrito como:

$$V(\phi) = \frac{2n-1}{2n} (1 - \phi^2)^{2n}. \quad (2.56)$$

A figura 2.8a mostra o comportamento do potencial (2.56) para $n=1$ (linha sólida), $n=2$ (tracejado) e $n=3$ (traço-ponto). Note que os mínimos do potencial não são modificados e permanecem em $\phi^\pm = \pm 1$.

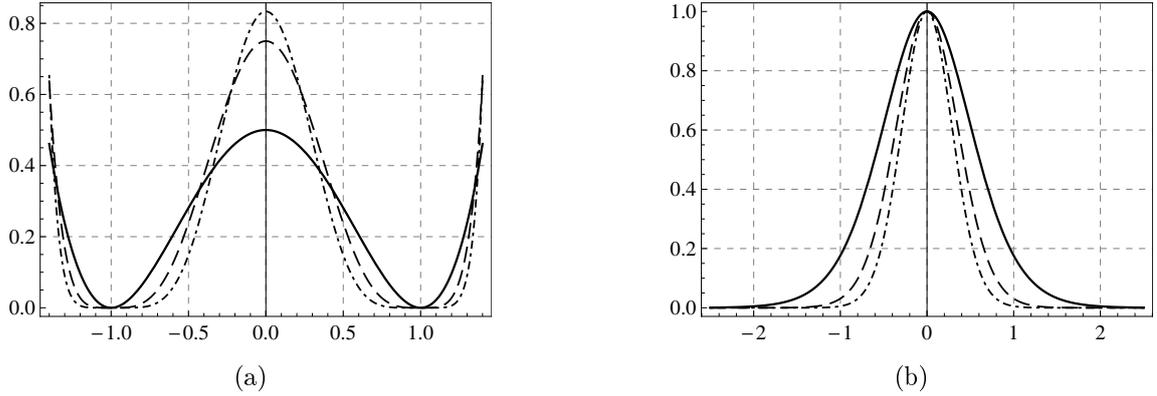


Figura 2.10: Potencial (a) e densidade de energia (b) plotados para $n=1$ (linha sólida), $n=2$ (linha tracejada) e $n=3$ (linha traço-ponto).

Usando (1.3) a equação de movimento pode ser escrita como:

$$2^{n-1} \partial_\mu (|X|^{n-1} \partial^\mu \phi) - 2(2n-1) \phi (1 - \phi^2)^{2n-1} = 0,$$

e para soluções estáticas unidimensionais temos que,

$$\phi'^{2n-2} \phi'' + 2\phi (1 - \phi^2)^{2n-1} = 0. \quad (2.57)$$

A equação (2.57) pode ser integrada uma vez permitindo obter a mesma equação de primeira ordem (1.52), isto é:

$$\phi' = 1 - \phi^2, \quad (2.58)$$

que tem, como esperado, a solução estática (1.53). No entanto, a densidade de energia é modificada para

$$\rho(x) = \text{sech}^{4n}(x), \quad (2.59)$$

ou seja, é elevada a um fator n em relação a (1.54). A figura 2.7b mostra o comportamento da densidade de energia (2.59) para $n=1$ (linha sólida), $n=2$ (linha tracejada) e $n=3$ (linha traço-ponto). A medida que n cresce a densidade de energia se concentra em torno da origem ($x=0$). Para este modelo o superpotencial deve ser escrito na seguinte forma

geral:

$$W_n(\phi) = \phi {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -2n+1; \frac{3}{2}; \phi^2\right), \quad (2.60)$$

ou seja, em termos da função hipergeométrica. Como exemplo podemos escrever:

$$W_2(\phi) = \phi - \phi^3 + \frac{3}{5}\phi^5 - \frac{1}{7}\phi^7, \quad (2.61a)$$

$$W_3(\phi) = \phi - \frac{5}{3}\phi^3 + 2\phi^5 - \frac{10}{7}\phi^7 + \frac{5}{9}\phi^9 - \frac{1}{11}\phi^{11}, \quad (2.61b)$$

para $n=2$ e $n=3$ respectivamente. Com a definição do superpotencial (2.60), podemos obtemos a energia (1.15) como:

$$E_n = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2n)}{\Gamma(2n + \frac{1}{2})}, \quad (2.62)$$

que nos dá $E_2=32/35$ e $E_3=512/693$ para $n=2$ e $n=3$, respectivamente.

Vamos agora analisar a estabilidade linear. E novamente seguiremos o procedimento apresentado na seção 1.1.2. A equação de autovalor (1.29) continua sendo válida, isto é,

$$-u_{zz}(z) + U(z)u(z) = \omega^2 u(z).$$

Neste caso o potencial quântico torna-se:

$$U(z) = 2n(2n-1)\bar{U}_n(z), \quad (2.63)$$

onde $\bar{U}_n(z) \equiv 2n-(2n+1)\operatorname{sech}^2(\sqrt{2n-1}z)$. Que novamente é o potencial de Pöschl-Teller

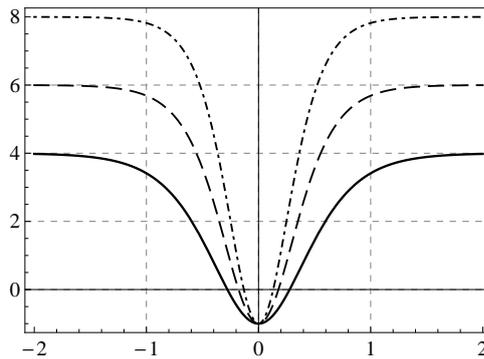


Figura 2.11: Potencial de Pöschl-Teller modificado (2.63) para $n=2$ (linha sólida), $n=3$ (linha tracejada) e $n=4$ (linha traço-ponto).

modificado assim como em (1.56). Porém, neste caso o potencial suporta o modo zero e outros $2n-1$ estados ligados com energia $E_k = (2n-1)k(4n-k)$, para $k = 0, 1, \dots, 2n-1$. Todos os outros autoestados com energia $E_k \geq 4n^2$ são estados espalhados. A figura 2.11 mostra o comportamento do potencial $U_n(z)$ para $n=2$ (linha sólida), $n=3$ (linha tracejada) e $n=4$ (linha traço-ponto).

2.2.2 *Kink* compacto

Uma característica das soluções tipo *kink* ou *lump* estudadas até aqui é que elas (as soluções) se estendem da região em torno do defeito até o infinito, ou seja, o defeito, apesar de ter uma largura característica, deve existir em todo o espaço. No entanto, nem sempre isso acontece. Existem soluções de defeitos topológicos que só existem em uma determinada região do espaço, tais soluções são chamadas de *Kink* compacto ou simplesmente “compactons” [44–46]. Estas soluções surgem naturalmente em vários modelos com dinâmica não padrão como por exemplo na densidade lagrangiana apresentada em (2.55) com o potencial dado por

$$V(\phi) = \frac{2n-1}{2n} |1 - \phi^2|^n. \quad (2.64)$$

Este potencial é mostrado na figura 2.12 para $n = 1$ (linha sólida) e $n = 2, 3, 4, 5$ (linha tracejada). Note que para $n = 1$ o potencial apresenta pontos com descontinuidade na derivada primeira.

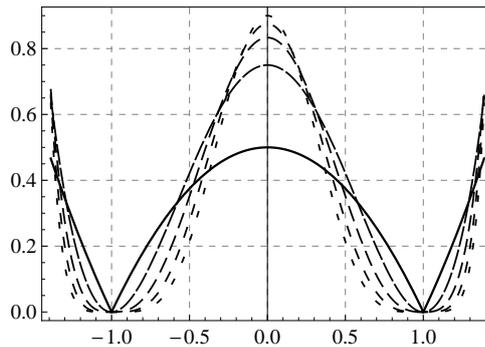


Figura 2.12: Potencial (2.64) plotado para $n=1$ (linha sólida) e $n=2, 3, 4, 5$ (linha tracejada).

A equação de movimento estática pode ser escrita como:

$$\phi^{2n-2} \phi'' + \phi (1 - \phi^2) |1 - \phi^2|^{n-2} = 0.$$

Podemos assim obter a seguinte equação de primeira ordem,

$$\phi' = \sqrt{|1 - \phi^2|}, \quad (2.65)$$

que tem solução dada por:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x < -\frac{\pi}{2}, \\ \sin(x) & \text{para } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -1 & \text{para } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (2.66)$$

Vemos que a solução muda seu comportamento apenas na região $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, sendo constante fora deste intervalo. O gráfico 2.13a mostra o comportamento da solução (2.66).

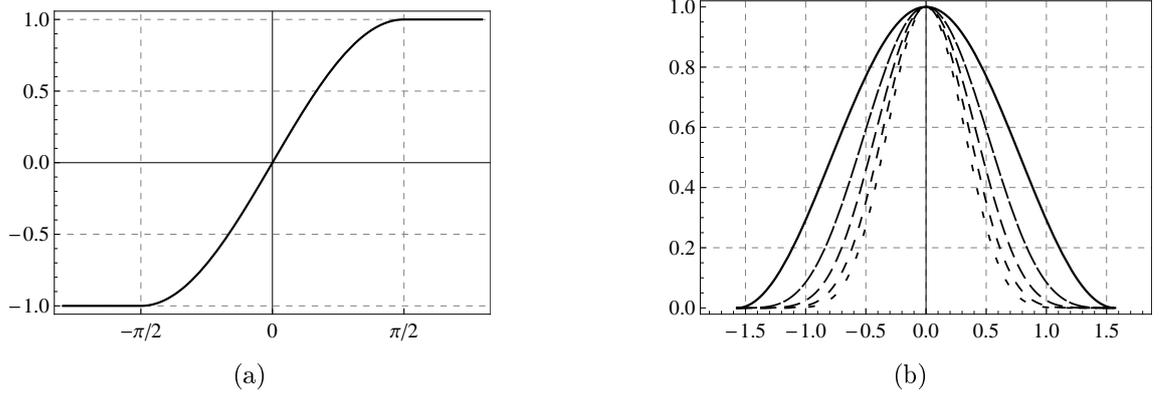


Figura 2.13: (a) Comportamento da solução *compact* (2.66). (b) Densidade de energia (2.67) plotado para $n = 1$ (linha sólida) e $n = 2, 3, 4, 5$ (linha tracejada)

Vemos que a solução assume um valor assintótico constante $\phi = \pm 1$ quando $|x| > \pi/2$. Além disso, a densidade de energia pode ser escrita como:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < -\frac{\pi}{2}, \\ \cos^{2n}(x) & \text{para } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{para } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (2.67)$$

É possível construir estruturas compactas para todos os valores de n . A densidade de energia (2.67) é mostrada no gráfico 2.13b e assume valor diferente de zero apenas no intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$. Isso nos diz que os aspectos físicos são relevantes apenas nesta região do espaço.

Neste caso o superpotencial deve ser escrito na forma,

$$W_n(\phi) = \phi \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -n + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \phi^2\right), \quad (2.68)$$

o que permite escrever,

$$W_1(\phi) = \frac{\phi}{2} \sqrt{|1 - \phi^2|} + \frac{1}{2} \arcsin(\phi), \quad (2.69a)$$

$$W_2(\phi) = \phi \sqrt{|1 - \phi^2|} \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{4}\phi^2\right) + \frac{3}{8} \arcsin(\phi), \quad (2.69b)$$

para $n=1$ e $n=2$, respectivamente. Além disso, a energia é agora dada por

$$E_n = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n + 1)}. \quad (2.70)$$

Vemos que para $n=1$ e $n=2$, a energia torna-se: $E_1 = \pi/2$ e $E_2 = 3\pi/4$, respectivamente.

Para concluir, a estabilidade das soluções pode ser obtida de forma idêntica ao que foi

feito nas seções anteriores. Isto é, podemos encontrar uma equação de Schrödinger como:

$$-u_{zz}(z) + U(z)u(z) = \omega^2 u(z),$$

onde o potencial quântico pode ser escrito na forma:

$$U(z) = n\lambda^2 \begin{cases} \infty & \text{para } z < -\frac{\pi}{2\lambda}, \\ U_n(z) & \text{para } -\frac{\pi}{2\lambda} \leq z \leq \frac{\pi}{2\lambda}, \\ \infty & \text{para } z > \frac{\pi}{2\lambda}. \end{cases} \quad (2.71)$$

onde $U_n(z) = -n + (n-1)\sec^2(\lambda z)$ e $\lambda = \sqrt{2n-1}$. Este é o potencial de Pöschl-Teller [27, 28]. O fato interessante deste potencial é que ele apenas suporta estados ligados para $k=0, 1, 2, \dots$ e os correspondentes autovalores são $E_k = 4(2n-1)k(n+k)$. O potencial

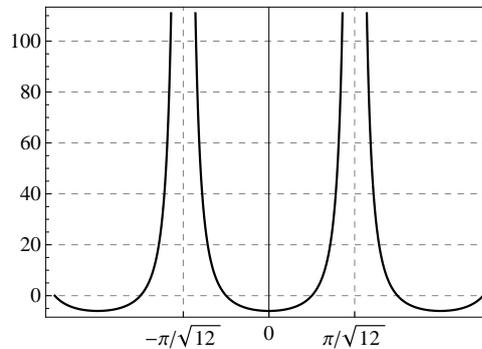


Figura 2.14: Potencial de Pöschl-Teller (2.71) para $n = 2$.

$U_n(z)$ é mostrado no gráfico 2.14 para $n=2$. Vemos que ele se comporta semelhante ao poço de potencial estudado nos cursos de mecânica quântica.

2.2.3 *k*-defeitos em modelos de dois campos

Nesta seção iremos estudar uma teoria com dinâmica generalizada que envolva dois campos escalares reais ϕ e χ semelhante ao que foi feito para a teoria com dinâmica padrão na seção 1.3. Para isso vamos considerar a seguinte densidade lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \frac{X}{n} |2X|^{n-1} - V(\phi, \chi), \quad (2.72)$$

onde agora

$$X = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi. \quad (2.73)$$

Porém, iremos assumir que o potencial $V(\phi, \chi)$ possa ser escrito como:

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} W_\phi^2 + \frac{1}{2} W_\chi^2. \quad (2.74)$$

Como foi feito na seção 1.3 é possível encontrar uma equação para a orbita dos campos no plano (ϕ, χ) para isso iremos assumir que o campos ϕ é função do campo χ na forma $\phi = \phi(\chi)$. O primeiro passo é escrever a equação (1.12) para campos estáticos e unidimensionais, isto é,

$$\phi' (\phi'^2 + \chi'^2)^{n-1} = W_\phi, \quad (2.75a)$$

$$\chi' (\phi'^2 + \chi'^2)^{n-1} = W_\chi. \quad (2.75b)$$

Essas equações podem ser manipuladas de tal modo que obtemos uma simples equação na forma:

$$(\phi'^2 + \chi'^2)^{2n-1} = W_\phi^2 + W_\chi^2. \quad (2.76)$$

Usando (2.76) nas equações (2.75) obtemos que

$$\phi' = \frac{W_\phi}{(W_\phi^2 + W_\chi^2)^{\frac{n-1}{2n-1}}}, \quad (2.77a)$$

$$\chi' = \frac{W_\chi}{(W_\phi^2 + W_\chi^2)^{\frac{n-1}{2n-1}}}. \quad (2.77b)$$

Por outro lado, se dividirmos (2.75a) por (2.75b) obtemos

$$\frac{\phi'}{\chi'} = \frac{W_\phi}{W_\chi} \Rightarrow \frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi}{W_\chi}, \quad (2.78)$$

que é a equação das orbitas dos campos no plano (ϕ, χ) . Vemos que, apesar da teoria ter dinâmica não padrão, a equação da orbita é a mesma obtida na seção 1.3 no caso da teoria com dinâmica padrão (Veja Eq. (1.68)), ou seja, as teorias são distintas mas as orbitas são as mesmas. Para ilustrar este procedimento vamos novamente assumir o superpotencial do modelo BNRT já estudado no capítulo 1, isto é,

$$W(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^2. \quad (2.79)$$

Com alguns cálculos podemos escrever as equações de primeira ordem (2.77) como:

$$\phi' = \frac{1 - \phi^2 - r\chi^2}{[4r^2\phi^2\chi^2 + (\phi^2 + r\chi^2 - 1)^2]^{\frac{n-1}{2n-1}}}, \quad (2.80a)$$

$$\chi' = -\frac{2r\phi\chi}{[4r^2\phi^2\chi^2 + (\phi^2 + r\chi^2 - 1)^2]^{\frac{n-1}{2n-1}}}. \quad (2.80b)$$

E também a equação de orbita (2.78) torna-se:

$$\frac{d\phi}{d\chi} = -\frac{1-\phi^2-r\chi^2}{2r\phi\chi}, \quad (2.81)$$

com solução geral dada por:

$$\phi^2 = 1 + \frac{r}{2r-1}\chi^2 + c\chi^{1/r}, \quad (2.82)$$

onde c é uma constante de integração. A equação (2.82) nos dá uma família de orbitas no plano (ϕ, χ) para cada escolha da constante c . Para concluir esta análise vamos escolher duas orbitas particulares.

Orbita Linha Reta:

A orbita linha reta é obtida se assumirmos que $\chi=0$ em (2.82). Com isso, a equação (2.80a) torna-se:

$$\phi' = (1-\phi^2)^{\frac{1}{2n-1}}, \quad (2.83)$$

cuja solução é dada em termos da função hipergeométrica na forma,

$$\phi(x) \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2n-1}; \frac{3}{2}; \phi(x)^2\right) = x. \quad (2.84)$$

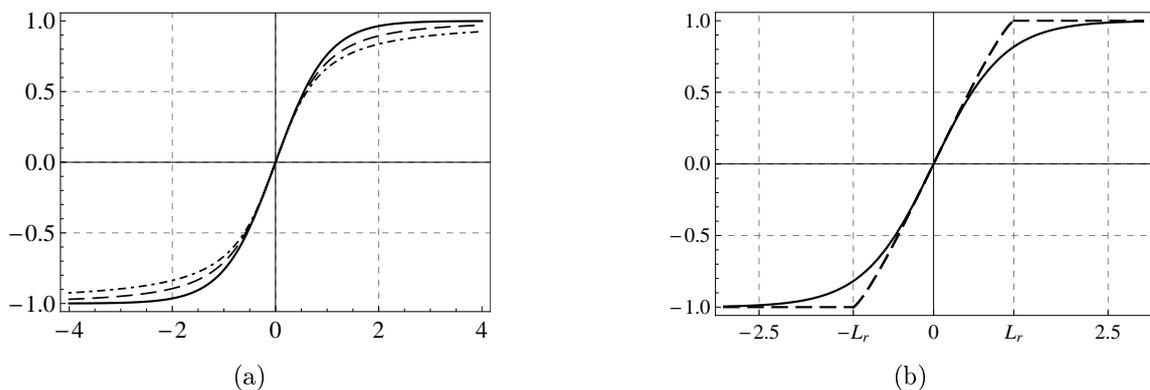


Figura 2.15: (a) Solução *kink* obtida pela equação (2.84) invertida numericamente para $n = 1$ (linha contínua), $n = 5/6$ (linha tracejada) e $n = 3/4$ (linha traço-ponto). (b) Solução compacta para $n = 3$ (linha tracejada) em contraste com a solução *kink* para $n = 1$ (linha contínua).

Notamos neste ponto a primeira distinção do que foi feito na seção 1.3, pois apesar de obtermos a mesma orbita, nos dois casos as soluções são drasticamente distintas. A equação (2.84) é uma equação transcendental que nem sempre pode ser invertida analiticamente. No entanto, a inversão numérica sempre pode ser feita e permite tanto soluções tipo *kink* quanto soluções compactas. As soluções *kink* são obtidas sempre que o argumento $1/(2n-1)$ da função hipergeométrica for um número inteiro ou semi-inteiro. Em

alguns casos isso garante até que (2.84) seja uma função polinomial simples. Por exemplo, para $1/(2n-1) = 3/2$, ou seja, $n = 5/6$. Neste caso a função (2.84) torna-se:

$$\phi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

que tem o comportamento de uma solução *kink* [47], como mostrado pela linha tracejada no gráfico 2.15a. Plotamos também o caso onde $1/(2n-1) = 2$.

As soluções compactas podem ser escritas na forma:

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_r(x) & \text{para } |x| \leq L_r, \\ \text{sign}(x) & \text{para } |x| > L_r. \end{cases} \quad (2.85)$$

Onde,

$$L_r = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{6n-5}{4n-2}\right)},$$

e $\phi_r(x)$ é a solução da equação transcendental (2.84) para qualquer n tal que $1/(2n-1)$ não é um inteiro ou semi inteiro. Na figura 2.15a invertamos numericamente a solução (2.84) para $n=3$ com $L_r \simeq 1.15$.

Orbita Elíptica:

O segundo exemplo que podemos destacar é o de uma orbita elíptica obtida pela condição $c=0$ em (2.82). Neste caso obtemos que

$$\chi(x) = \pm \sqrt{\frac{1-2r}{r} (1-\phi^2)}. \quad (2.86)$$

Com isso, a equação (2.80a) torna-se:

$$\phi' = \frac{[2r(1-\phi^2)]^{\frac{n}{2n-1}}}{[2r+2(1-3r)\phi^2]^{\frac{n-1}{2n-1}}}, \quad (2.87)$$

cujas solução geral é:

$$\phi(x) \text{ appellF1}\left(\frac{1}{2}; \frac{1-n}{2n-1}; \frac{n}{2n-1}; \frac{3}{2}; \frac{3r-1}{r} \phi(x)^2; \phi(x)^2\right) = (2r)^{\frac{1}{2n-1}} x. \quad (2.88)$$

A função “appellF1” é uma função polinomial que recai na hipergeométrica para $r=1/3$. A figura 2.16 mostra o comportamento das soluções ϕ e χ obtidas numericamente invertendo a equação (2.88) para $r=1/3$ e $n=1, 5/6, 3/4$.

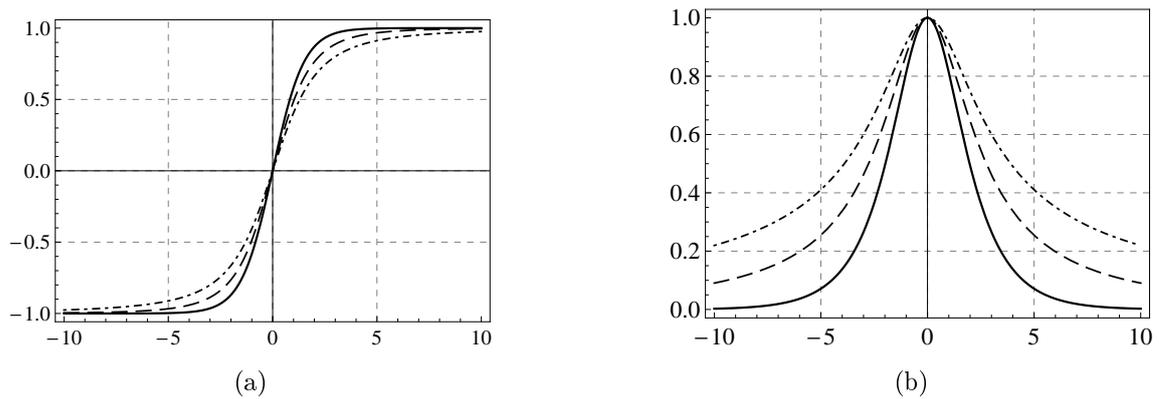


Figura 2.16: (a) Solução do campo ϕ obtida numericamente pela equação (2.88) para $r=1/3$ e $n=1$ (linha contínua), $n=5/6$ (linha tracejada) e $n=3/4$ (linha traço-ponto). (b) Solução do campo χ obtida usando a solução ϕ em (2.86) com os mesmos valores dos parâmetros r e n .

Podemos também obter soluções compactas na forma:

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_e(x) & \text{para } |x| \leq L_e, \\ \text{sign}(x) & \text{para } |x| > L_e, \end{cases} \quad (2.89)$$

onde usamos $r=1/3$ e definimos

$$L_e = \frac{3^{\frac{1}{2n-1}}}{4^{\frac{n}{2n-1}}} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2n-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{4n-3}{4n-2}\right)}.$$

Com $\phi_e(x)$ sendo a solução da equação transcendental (2.88) com $r=1/3$. A figura 2.17 mostra a solução (2.89) para $n=3$ com $L_e \simeq 2$.

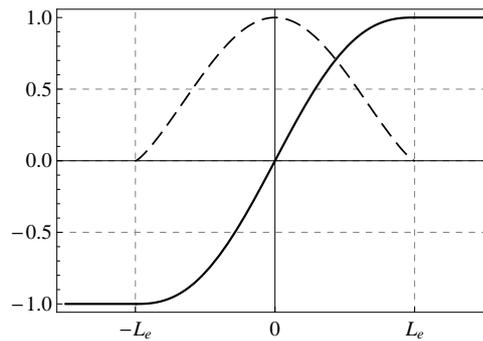


Figura 2.17: Solução compacta para o campo ϕ (linha contínua) e para o campo χ (linha tracejada) obtidas numericamente pela equação (2.88) para $r=1/3$ e $n=3$.

2.3 Modelos Gêmeos

Teorias com dinâmica generalizada fornecem uma interessante maneira de se estudar soluções do tipo defeitos topológicos. Essa nova abordagem faz com que este tipo de estrutura tenha mais interesse físico e envolva cada vez mais uma riqueza de detalhes.

Nas seções anteriores vimos que algumas k -teorias, como por exemplo, o modelo estudado na seção 2.2.1 possui as mesmas soluções *kink* da teoria com dinâmica padrão estudada na seção 1.2.2. No entanto, os modelos se distinguem quando olhamos para a densidade de energia. Além disso, foi verificado que, exceto para o caso trivial com $n=1$, o comportamento das duas teorias sobre estabilidade linear também é distinto. No entanto, podemos construir algumas k -teorias que são indistinguíveis nos aspectos apresentados, ou seja, que tenha a mesma densidade de energia e a mesma estabilidade. Isso foi feito pela primeira vez na referência [14], lá os autores Andrews, Lewandowski, Trodden and Wesley, introduziram o conceito de “modelos gêmeos” que são modelos distintos mas que apresentam as mesmas soluções com a mesma densidade de energia. Pouco depois na referência [48] os autores D. Bazeia e R. Meneses generalizaram o formalismo e englobaram a condição de mesma estabilidade para as teorias. Teorias gêmeas também foram estudadas em [49–51], sendo também aplicadas em teorias com campo de Higgs generalizadas [52] e em cosmologia [53]. Em especial na referência [54] fizemos uma aplicação a teorias de brana e em [55] encontramos teorias gêmeas para modelos de vários campos.

Nesta seção apresentaremos o formalismo para construção de modelos gêmeos, no entanto, por simplicidade utilizaremos a formulação para o modelo de um campo. Como dissemos, a generalização para modelos de mais campos pode ser obtida em [55]. Começaremos considerando uma densidade lagrangiana escrita na forma:

$$\mathcal{L} = -V(\phi)F(Y), \quad (2.90)$$

onde $V(\phi)$ continua sendo o potencial que especifica a teoria e o invariante Y é função do campo ϕ e de sua derivada primeira e é definido como:

$$Y \equiv -\frac{X}{V}. \quad (2.91)$$

Note que para $F(Y)=1+Y$ reobtemos a teoria com dinâmica padrão introduzida em (1.32). Utilizando (1.3) obtemos a equação de movimento como:

$$\partial_\mu (F_Y \partial^\mu \phi) + (F - Y F_Y) V_\phi = 0, \quad (2.92)$$

onde $F_Y = dF/dY$. Além disso, da equação (1.8) o tensor energia momento pode ser

expresso por:

$$T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}V(\phi)F(Y) + F_Y\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi. \quad (2.93)$$

Se estamos interessados em campo estáticos e unidimensionais a equação de movimento (2.93) torna-se:

$$-(F_Y\phi')' + (F - YF_Y)V_\phi = 0, \quad (2.94)$$

e as componentes não nulas do tensor energia (2.93) momento são:

$$T_{00} = VF, \quad (2.95a)$$

$$T_{11} = -V(F - 2YF_Y). \quad (2.95b)$$

A equação (2.94) pode ser integrada uma vez e obtemos que,

$$2YF_Y - F = \frac{C}{V}, \quad (2.96)$$

onde, C é uma constante de integração que pode ser identificada com o tensor de stress, isto é, $T_{11} = C$. Esta equação nos mostra um importante resultado. Podemos ver que como F é uma função de Y então $2YF_Y - F$ também deve ser uma função de Y que assumiremos ser uma função inversa $G^{-1}(Y)$, ou seja,

$$2YF_Y - F = G^{-1}(Y) \Rightarrow Y = G(2YF_Y - F) = G\left(\frac{C}{V}\right).$$

Essa relação nos permite escrever a definição (2.91) como:

$$\phi'^2 = 2GV(\phi). \quad (2.97)$$

Para teorias onde o tensor de stress é nulo ($C=0$) nos assumiremos que $G(0)=c$, com c sendo uma constante real. Neste caso temos que $Y=c$ e a equação (2.97) pode ser escrita na forma:

$$\phi'^2(x) = 2cV(\phi). \quad (2.98)$$

Podemos notar com isso que a solução $\phi(x)$ da equação (2.98) é a mesma solução $\phi_s(x)$ da equação (1.34) obtida para um modelo geral com dinâmica padrão, mas com a posição sendo alterada de $x \rightarrow \sqrt{c}x$. Isto significa que podemos escrever

$$\phi(x) = \phi_s(\sqrt{c}x), \quad (2.99)$$

e agora a espessura na solução é dada por $\delta = \delta_s/\sqrt{c}$. Assim, a solução é mais fina ou mais grossa dependendo se o valor da constante “ c ” é maior ou menor que a unidade. Notamos também que c não pode ser negativa para que os campos sejam reais. Além disso, apenas

teorias onde o tensor de stress é nulo tem a forma especificada da equação (2.99).

Da definição (1.12) podemos escrever que

$$F_Y \phi' = W_\phi, \quad (2.100)$$

o que permite obter a densidade de energia como:

$$\rho(x) = \frac{F(Y)}{2Y F_Y} \phi' W_\phi.$$

Por outro lado, usando agora as equações (2.96) (com $C=0$) e (2.99), podemos escrever a densidade de energia como:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{c}} \phi'_s(\sqrt{c}x) W_{\phi_s} = \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{dW}{dx}. \quad (2.101)$$

e a energia torna-se:

$$E = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_{-\infty}^{\infty} dW = \frac{E_s}{\sqrt{c}}, \quad (2.102)$$

onde E_s é a energia (1.39).

Com isso, para que a teoria (2.90) seja considerada gêmea da teoria (1.32) devemos impor algumas condições sobre a função F . A primeira faz com que as soluções sejam idêntica e é obtida pela condição:

$$Y = 1. \quad (2.103a)$$

A segunda restrição que a função F deve obedecer é

$$F_Y(1) = 1. \quad (2.103b)$$

Essa restrição faz com que a densidade de energia de ambos os modelos sejam iguais. Como consequência das imposições anteriores também devemos impor que,

$$F(1) = 2, \quad (2.103c)$$

para que a equação (2.96) seja verdadeira. As equações (2.103) são as restrições gerais sobre $F(Y)$, para fazer o modelo (2.90) gêmeo do modelo (1.32).

2.3.1 Estabilidade Linear

Vamos agora investigar a estabilidade linear de maneira usual como feito na seção 1.1.2, ou seja, introduzindo pequenas flutuações $\eta(x, t) = \xi(x) \cos(\omega t)$ na solução estática $\phi(x)$. Da equação (1.21) obtemos

$$-\left[(F_Y + 2Y F_{YY}) \xi'(x)\right]' + (F - Y F_Y + 2Y^2 F_{YY}) V_{\phi\phi} \xi(x) = \omega^2 F_Y \xi(x).$$

Como foi visto, para teorias onde o tensor de stress é nulo podemos fazer Y constante logo, a equação anterior torna-se:

$$-\xi''(x) + c U(x) \xi(x) = \frac{\omega^2}{A^2} \xi(x), \quad (2.104)$$

onde

$$U(x) = V_{\phi\phi}|_{\phi=\phi_s(\sqrt{c}x)} \quad \text{e} \quad A^2 = \frac{F_Y + 2Y F_{YY}}{F_Y},$$

assim se $A^2 > 0$, os dois modelos terão o mesmo comportamento sobre estabilidade linear. Devemos, com isso, impor uma condição nova para que o espectro perturbativo dos modelos sejam iguais. Essa nova condição é:

$$F_{YY} = 0. \quad (2.105)$$

Essa relação foi chamada no artigo [48] de condição forte (*strong condition*). Assim as relações (2.103) juntamente com (2.105) são todas as condições que a função $F(Y)$ deve obedecer para que a teoria (2.88) seja gêmea da teoria (1.32) com a mesmo espectro perturbativo. A seguir explicitaremos alguns exemplos de funções F que obedecem as condições citadas.

Exemplo 1:

Como primeiro exemplo vamos considerar uma função F como:

$$F(Y) = a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k Y^k}{k}, \quad n \geq 3, \quad (2.106)$$

onde todos os a_k são constantes reais não nulas, e $a_0 \neq 1$ para $n=3$. A família de modelos definida por esse $F(Y)$ deve satisfazer as seguintes restrições,

$$a_1 = 4 - 3a_0 - \frac{1}{2} \sum_{k=4}^n \frac{(k-3)(k-2)a_k}{k}, \quad (2.107a)$$

$$a_2 = -6(1 - a_0) + 2 \sum_{k=4}^n \frac{(k-3)(k-1)a_k}{k}, \quad (2.107b)$$

$$a_3 = 3(1 - a_0) + \frac{3}{2} \sum_{k=4}^n \frac{(k-2)(k-1)a_k}{k}, \quad (2.107c)$$

que vem das condições (2.103) e da condição (2.105).

Como exemplo específico vamos considerar o caso com $n=3$, que nos permite obter,

$$F(Y) = a_0 + (4 - 3a_0)Y - 3(1 - a_0)Y^2 + (1 - a_0)Y^3, \quad (2.108)$$

Podemos verificar assim que

$$F(1) = 2, \quad (2.109a)$$

$$F_Y(1) = 1, \quad (2.109b)$$

$$F_{YY}(1) = 0. \quad (2.109c)$$

Com isso, a densidade lagrangiana (2.90) torna-se:

$$\mathcal{L} = -a_0V + (4 - 3a_0)X + 3(1 - a_0)\frac{X^2}{V} + (1 - a_0)\frac{X^3}{V^2}. \quad (2.110)$$

Exemplo 2:

Outro exemplo é obtido se considerarmos

$$F(Y) = 2 + \frac{a}{\alpha} \sin(\alpha Y) - \frac{b}{\alpha} \cos(\alpha Y), \quad (2.111)$$

onde a, b, α são constantes reais. O modelo definido por esse F , satisfaz as condições $F(1) = 2$, $F_Y(1) = 1$ e $F_{YY}(1) = 0$, para $\alpha = \arctan(b/a)$ e $a^2 + b^2 = 1$. Particularmente para $b = 0$ nos temos $\alpha = (2m+1)\pi/2$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), no entanto para $a = 0$ obtemos $\alpha = m\pi$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$). Neste caso a densidade lagrangiana torna-se:

$$\mathcal{L} = -2V - \frac{a}{\alpha}V \sin(\alpha Y) + \frac{b}{\alpha}V \cos(\alpha Y). \quad (2.112)$$

Capítulo 3

MUNDO BRANA I: modelos com dinâmica generalizada

Foi teorizado que o universo observável poderia ser uma hipersuperfície de $(1+3)$ dimensões imersa em um espaço-tempo $(1+3+d)$ dimensional [56–60]. Por analogia, a hipersuperfície foi chamada de brana, do inglês “*brane*”, enquanto que o espaço tempo como um todo foi chamado de “*bulk*”. Neste modelo de universo as partículas do Modelo Padrão e os campos estão presos na brana, enquanto que a gravidade é livre para acessar não só a brana como também o *bulk*.

O modelo de mundo brana mais estudado consiste em uma única brana imersa em um 5-dimensional espaço-tempo anti-de-Sitter [15, 61, 62].

Neste capítulo, iremos modelar tais teorias de mundo a partir de campos escalares reais.

3.1 Cenário de mundo brana

A estrutura de defeito que aparece em teoria de campos escalares pode ser usado para descrever uma brana no chamado cenário de mundo brana com geometria deformada. A investigação desta questão pode ser feita considerando uma ação em $(1+3+1)$ dimensões que descrever a gravidade acoplada a n campos escalares $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ na forma:

$$S = \int d^4x dy \sqrt{|g|} \left[-\frac{1}{4}R + \mathcal{L}(\phi_i, X_{ij}) \right], \quad (3.1)$$

onde g é o determinante da métrica 5-dimensional e R é o escalar de curvatura definido em (A.5). Além disso, assumimos a adimensionalidade dos campos e fizemos $4\pi G = 1$.

O invariante X_{ij} é agora definido em termos da derivada covariante como:

$$X_{ij} = \frac{1}{2}g^{ab}\nabla_a\phi_i\nabla_b\phi_j, \quad (3.2)$$

onde devemos lembrar que os índices latinos são $\{a, b\} = 0, 1, 2, 3, 4$.

Iremos agora delimitar qual a geometria do espaço-tempo que estamos trabalhando e isso é obtido definindo a métrica. Para o presente estudo devemos utilizar a métrica 5-dimensional definida em [63] como:

$$ds_5^2 = g_{ab}dx^a dx^b = e^{2\mathcal{A}}ds_4^2 - dy^2, \quad (3.3)$$

onde $e^{2\mathcal{A}}$ é chamado de “*warp factor*”. Este fator nos mostra como o espaço-tempo é deformado, e \mathcal{A} é uma função de deformação (*warp function*). Além disso, o elemento de linha 4-dimensional ds_4^2 será assumido como sendo a métrica de *Minkowski*, isto é:

$$ds_4^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \quad (3.4)$$

A equação de movimento, obtida pela minimização da ação (3.1), pode ser escrita como:

$$\nabla_a(\mathcal{L}_{X_{ij}}\nabla^a\phi_j) - \mathcal{L}_{\phi_i} = 0, \quad (3.5)$$

ou de uma forma mais explícita,

$$\mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}}\nabla^a\phi_l\nabla^b\phi_j(\nabla_a\nabla_b\phi_k) + 2X_{kj}\mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k} + g^{ab}\mathcal{L}_{X_{ik}}(\nabla_a\nabla_b\phi_k) - \mathcal{L}_{\phi_i} = 0. \quad (3.6)$$

Com isso, a equação de movimento pode ser escrita na forma:

$$G_{ik}^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi_k + 2X_{kj}\mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k} - \mathcal{L}_{\phi_i} = 0, \quad (3.7)$$

onde definimos que

$$G_{ik}^{ab} \equiv \mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}}\nabla^a\phi_l\nabla^b\phi_j + g^{ab}\mathcal{L}_{X_{ik}}. \quad (3.8)$$

Iremos assumir que os campos ϕ_i e o *warp function* são estáticos e só dependem da dimensão extra y , ou seja, $\phi = \phi(y)$ e $\mathcal{A} = \mathcal{A}(y)$. Com isso, a equação de movimento (3.6) pode ser escrita como:

$$-2X_{jl}\mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}}(\nabla_4\nabla_4\phi_k) + 2X_{jk}\mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k} + \mathcal{L}_{X_{ij}}\nabla_4\nabla_4\phi_j - \mathcal{L}_{\phi_i} = 0, \quad (3.9)$$

onde usamos que $X_{ij} = -\phi'_i\phi'_j/2$.

Usando as relações para a derivada covariante (Ver apêndice A.1) podemos verificar

que $\nabla_4 \nabla_4 \phi_i = \phi_i''$ e que $\nabla_4 \nabla^4 \phi_i = -4\mathcal{A}'\phi_i' - \phi_i''$. Assim, a equação (3.9) torna-se:

$$-2X_{jl}\mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}}\phi_k'' + 2X_{jk}\mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k} - \mathcal{L}_{X_{ik}}(4\mathcal{A}'\phi_k' + \phi_k'') - \mathcal{L}_{\phi_i} = 0.$$

Com algumas manipulações algébricas podemos escrever a seguinte equação,

$$(2X_{jl}\mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}} + \mathcal{L}_{X_{ik}})\phi_k'' - (2X_{jk}\mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k} - \mathcal{L}_{\phi_i}) = -4\mathcal{A}'\phi_j'\mathcal{L}_{X_{ij}}, \quad (3.10)$$

que formam um conjunto de n equações de movimento, uma para cada campo ϕ_i . Podemos também obter um novo conjunto de equações fazendo a variação da ação com respeito à métrica. Essas equações são chamadas Equações de Einstein. Para o presente caso podemos escrever que:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 2T_{ab}, \quad (3.11)$$

onde T_{ab} é o tensor energia momento. A demonstração da equação (3.11) é feita no apêndice A.4 para o caso mais geral onde a teoria depende não apenas de R , mas também de uma função geral do escalar de curvatura, $F(R)$.

Para a teoria (3.1) o tensor energia momento pode ser expresso como:

$$T_{ab} = -g_{ab}\mathcal{L} + \mathcal{L}_{X_{ij}}\nabla_a\phi_i\nabla_b\phi_j. \quad (3.12)$$

Esta expressão pode também ser escrita na forma de componentes, ou seja:

$$T_{00} = -e^{2\mathcal{A}}\mathcal{L}, \quad (3.13a)$$

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = e^{2\mathcal{A}}\mathcal{L}, \quad (3.13b)$$

$$T_{44} = \phi_i'\phi_j'\mathcal{L}_{X_{ij}} + \mathcal{L}. \quad (3.13c)$$

Um resultado útil é saber como as equações de Einstein (3.11) são expressas se utilizarmos a métrica (3.3). Para este fim iremos utilizar a seguinte definição:

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R, \quad (3.14)$$

onde G_{ab} é chamado tensor de Einstein. O tensor de Ricci, R_{ab} , é definido no Anexo A (Eq. A.4), em termos da conexão, como:

$$R_{ab} = \partial_c\Gamma_{ab}^c - \partial_b\Gamma_{ac}^c + \Gamma_{cd}^c\Gamma_{ab}^d - \Gamma_{bc}^d\Gamma_{da}^c. \quad (3.15)$$

Usando a métrica (3.3) encontramos as componentes do tensor de Ricci como:

$$R_{00} = e^{2A} (4\mathcal{A}'^2 + \mathcal{A}'') , \quad (3.16a)$$

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = -e^{2A} (4\mathcal{A}'^2 + \mathcal{A}'') , \quad (3.16b)$$

$$R_{44} = -4 (\mathcal{A}'^2 + \mathcal{A}'') . \quad (3.16c)$$

Com isso, o escalar de curvatura torna-se:

$$R = 20\mathcal{A}'^2 + 8\mathcal{A}'' . \quad (3.17)$$

Usando as relações (3.13), (3.16) e a relação (3.17) obtemos as componentes da equação de Einstein (3.11) como:

$$2\mathcal{L} = 3 (2\mathcal{A}'^2 + \mathcal{A}'') , \quad (3.18a)$$

$$-2X_{ij}\mathcal{L}_{X_{ij}} + \mathcal{L} = 3\mathcal{A}'^2 . \quad (3.18b)$$

Com algumas manipulações algébricas podemos escrever as equações (3.18) como:

$$\mathcal{A}'^2 = \frac{1}{3} (\mathcal{L} - 2X_{ij}\mathcal{L}_{X_{ij}}) , \quad (3.19a)$$

$$\mathcal{A}'' = \frac{4}{3} X_{ij}\mathcal{L}_{X_{ij}} , \quad (3.19b)$$

que reproduz o resultado obtido em [20] para um único campo. É importante notar que as equações (3.10) e (3.19) não são independentes. Na verdade podemos mostrar com algumas manipulações algébricas que a equação (3.10) reproduz (3.19).

Utilizando as equações (3.19) podemos escrever a densidade de energia (3.13a) como:

$$\rho(y) = -\frac{3}{2} \frac{d}{dy} (e^{2A} \mathcal{A}') . \quad (3.20)$$

Que permite obter a energia na forma:

$$E = -\frac{3}{2} \int dy \frac{d}{dy} (e^{2A} \mathcal{A}') = -\frac{3}{2} e^{2A(y)} \mathcal{A}'(y) \Big|_{y=-\infty}^{y=\infty} . \quad (3.21)$$

Para a geometria apresentada neste capítulo, o *warp function* é uma função simétrica na coordenada (veja [62]). Portanto, a energia da brana é nula já que $\mathcal{A}(-\infty) = \mathcal{A}(\infty)$.

As equações de Einstein (3.19) nem sempre são simples de serem resolvidas analiticamente. No entanto, assim como foi feito nos capítulos anteriores, em algumas situações podemos obter equações de primeira ordem que, em geral, possuem resolução analítica bem mais factível. O formalismo de primeira ordem para branas foi primeiro estudado

em [64–71]. Podemos obter este formalismo assumindo a seguinte relação para os campos:

$$\mathcal{A}' = -\frac{1}{3}W(\phi_i). \quad (3.22)$$

Isso faz com que as equações de Einstein (3.19) possam ser escritas na forma:

$$W^2 = 3(\mathcal{L} - 2X_{ij}\mathcal{L}_{X_{ij}}), \quad (3.23a)$$

$$\phi'_j\mathcal{L}_{X_{ij}} = \frac{1}{2}W_{\phi_i}, \quad (3.23b)$$

onde podemos ver que a equação (3.23b) reproduz a equação (1.12).

3.1.1 Estabilidade da brana

Um importante ponto é saber se pequenas flutuações podem desestabilizar a brana. Para verificar esse fato devemos estudar o espectro das flutuações gravitacionais linearizadas, ou seja, devemos obter as equações de Einstein quando submetidas a pequenas perturbações. Para este fim, assumiremos que a métrica em cinco dimensões g_{ab} seja perturbada na forma:

$$\bar{g}_{ab}(y, x) = g_{ab} + \pi_{ab}(y, x), \quad (3.24)$$

onde π_{ab} é simétrico nos índices a, b e $x = x_\mu x^\mu$ é o quadrivetor posição.

Da relação de completudeza $\bar{g}_{ac}\bar{g}^{cb} = \delta_a^b$ obtemos a seguinte condição:

$$\pi^{ab} = -g^{ac}\pi_{cd}g^{bd}. \quad (3.25a)$$

Além disso, iremos também assumir que π_{ab} obedeça à seguinte restrição,

$$\pi_{a4} = 0, \quad (3.25b)$$

com a parcela quadridimensional $\pi_{\mu\nu}$ sendo escrita na forma:

$$\pi_{\mu\nu}(y, x) = e^{2\mathcal{A}(y)}h_{\mu\nu}(y, x), \quad (3.25c)$$

onde $h_{\mu\nu}$ obedecerá às restrições de gauge transverso de traço nulo, ou seja,

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = 0. \quad (3.25d)$$

Veremos que essas restrições irão fazer com que o problema tenha uma analogia Mecânico-Quântica, permitindo assim obter uma equação tipo-Schrödinger para a perturbação $h_{\mu\nu}$. O caso mais geral onde a restrição (3.25d) não é válida pode ser encontrado em [72].

Com as equações (3.25b) e (3.25c), podemos escrever a métrica em cinco dimensões (3.3) como:

$$ds_5^2 = e^{2\mathcal{A}(y)} [\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(y, x)] dx^\mu dx^\nu - dy^2. \quad (3.26)$$

Vamos também assumir que os campos ϕ_i sejam perturbados da maneira usual, isto é,

$$\bar{\phi}_i(y, x) = \phi_i(y) + \xi_i(y, x). \quad (3.27)$$

Com isso, podemos usar as equações (3.24) e (3.27) para expressar o invariante X_{ij} na forma:

$$\begin{aligned} X_{ij} = & \frac{1}{2}g_{ab}\nabla^a\phi_i\nabla^b\phi_j + \frac{1}{2}g_{ab}\nabla^a\phi_i\nabla^b\xi_j + \frac{1}{2}g_{ab}\nabla^a\xi_i\nabla^b\phi_j + \frac{1}{2}g_{ab}\nabla^a\xi_i\nabla^b\xi_j + \\ & + \frac{1}{2}\pi_{ab}\nabla^a\phi_i\nabla^b\phi_j + \frac{1}{2}\pi_{ab}\nabla^a\phi_i\nabla^b\xi_j + \frac{1}{2}\pi_{ab}\nabla^a\xi_i\nabla^b\phi_j + \frac{1}{2}\pi_{ab}\nabla^a\xi_i\nabla^b\xi_j. \end{aligned}$$

Assim, as contribuições de ordem zero e de primeira ordem para X_{ij} serão, respectivamente,

$$X_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2}g_{ab}\nabla^a\phi_i\nabla^b\phi_j, \quad (3.28a)$$

$$X_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2}g_{ab}(\nabla^a\phi_i\nabla^b\xi_j + \nabla^a\xi_i\nabla^b\phi_j) + \frac{1}{2}\pi_{ab}\nabla^a\phi_i\nabla^b\phi_j. \quad (3.28b)$$

Podemos agora efetuar a expansão até primeira ordem em ξ_i e em π_{ab} da equação de movimento (3.5). Primeiro vamos expandir em ξ_i , isto é,

$$\nabla_a(\mathcal{L}_{X_{ij}}\nabla^a\phi_j + \mathcal{L}_{X_{ij}}\nabla^a\xi_j + \mathcal{L}_{\phi_k X_{ij}}\xi_k\nabla^a\phi_j + \mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}}X_{kl}^{(1)}\nabla^a\phi_j) = \mathcal{L}_{\phi_i} + \mathcal{L}_{\phi_i\phi_j}\xi_j + \mathcal{L}_{\phi_i X_{jk}}X_{jk}^{(1)}.$$

Por conseguinte, se usarmos a expressão (3.28b) poderemos escrever a equação anterior como:

$$\begin{aligned} & \nabla_a(\mathcal{L}_{X_{ij}}\nabla^a\phi_j) + (\nabla_a\mathcal{L}_{X_{ij}})\nabla^a\xi_j + \mathcal{L}_{X_{ij}}\nabla_a\nabla^a\xi_j + [\nabla_a(\mathcal{L}_{\phi_k X_{ij}}\nabla^a\phi_j)]\xi_k + \\ & + \mathcal{L}_{\phi_k X_{ij}}\nabla^a\phi_j\nabla_a\xi_k + \nabla_a(g_{bc}\mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}}\nabla^b\phi_k\nabla^a\phi_j\nabla^c\xi_l) - \frac{1}{2}\pi_{bc}\mathcal{L}_{\phi_i X_{jk}}\nabla^b\phi_j\nabla^c\phi_k + \\ & + \frac{1}{2}\nabla_a(\pi_{bc}\mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}}\nabla^a\phi_j\nabla^b\phi_k\nabla^c\phi_l) - \mathcal{L}_{\phi_i} - \mathcal{L}_{\phi_i\phi_j}\xi_j - g_{ab}\mathcal{L}_{\phi_i X_{jk}}\nabla^a\phi_j\nabla^b\xi_k = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Vemos com isso que a expansão em π_{ab} será relevante apenas no primeiro termo, pois todos os outros termos envolve o campo ξ . Para obter a expansão do primeiro termo iremos assumir a definição da derivada covariante (A.1b), ou seja,

$$\nabla_a V^b = \partial_a V^b + \Gamma_{ac}^b V^c. \quad (3.30)$$

Primeiramente devemos expandir a conexão Γ_{ab}^c na forma:

$$\Gamma_{ab}^c = \Gamma_{ab}^{c(0)} + \Gamma_{ab}^{c(1)} + \Gamma_{ab}^{c(2)} + \dots, \quad (3.31)$$

onde,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^{c(0)} &= \frac{g^{cd}}{2} \left(\partial_a g_{db} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab} \right), \\ \Gamma_{ab}^{c(1)} &= \frac{g^{cd}}{2} \left(\partial_a \pi_{db} + \partial_b \pi_{ad} - \partial_d \pi_{ab} \right) + \frac{\pi^{cd}}{2} \left(\partial_a g_{db} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab} \right). \end{aligned}$$

Portanto, se assumirmos que a métrica em cinco dimensões g_{ab} seja dada pela equação (3.3), as duas equações anteriores podem ser escritas como:

$$\Gamma_{ab}^{c(0)} = \mathcal{A}' \left(\delta_a^4 \delta_b^c + \delta_b^4 \delta_a^c - \delta_a^4 \delta_b^4 \delta_4^c + \delta_4^c g_{ab} \right), \quad (3.32a)$$

$$\Gamma_{ab}^{c(1)} = \mathcal{A}' e^{2\mathcal{A}} \delta_4^c h_{ab} + \frac{1}{2} e^{2\mathcal{A}} g^{cd} \left(\partial_a h_{bd} + \partial_b h_{ad} - \partial_d h_{ab} \right). \quad (3.32b)$$

Usando a expansão (3.31) podemos escrever a equação (3.29) como:

$$\begin{aligned} \nabla_a (\mathcal{L}_{X_{ij}} \partial^a \phi_j) - \mathcal{L}_{\phi_i} + \Gamma_{ab}^{a(1)} (\mathcal{L}_{X_{ij}} \partial^b \phi_j) + (\nabla_a \mathcal{L}_{X_{ij}}) \nabla^a \xi_j + \mathcal{L}_{X_{ij}} \nabla_a \nabla^a \xi_j - \mathcal{L}_{\phi_i \phi_j} \xi_j + \\ + [\nabla_a (\mathcal{L}_{\phi_k X_{ij}} \nabla^a \phi_j)] \xi_k + \mathcal{L}_{\phi_k X_{ij}} \nabla^a \phi_j \nabla_a \xi_k + \nabla_a (g_{bc} \mathcal{L}_{X_{ij} X_{kl}} \nabla^b \phi_k \nabla^a \phi_j \nabla^c \xi_l) - \\ - \frac{\pi_{bc}}{2} \mathcal{L}_{\phi_i X_{jk}} \nabla^b \phi_j \nabla^c \phi_k + \frac{1}{2} \nabla_a (\pi_{bc} \mathcal{L}_{X_{ij} X_{kl}} \nabla^a \phi_j \nabla^b \phi_k \nabla^c \phi_l) - g_{ab} \mathcal{L}_{\phi_i X_{jk}} \nabla^a \phi_j \nabla^b \xi_k = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Em consequência podemos usar a equação de movimento (3.5), a relação para a derivada covariante de um campo escalar, $\nabla_a \phi_i = \partial_a \phi_i$, e também a expressão para o laplaciano e 5 dimensões (A.3), isto é,

$$\nabla_a \nabla^a \xi_j = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a (\sqrt{g} g^{ab} \partial_b \xi_j),$$

para escrever a equação (3.33) como:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^{a(1)} (\mathcal{L}_{X_{ij}} \partial^b \phi_j) + (\partial_a \mathcal{L}_{X_{ij}}) \partial^a \xi_j + \frac{\mathcal{L}_{X_{ij}}}{\sqrt{g}} \partial_a (\sqrt{g} g^{ab} \partial_b \xi_j) + \\ + \Gamma_{ab}^{a(0)} (\mathcal{L}_{\phi_k X_{ij}} \partial^b \phi_j) \xi_k + \mathcal{L}_{\phi_k X_{ij}} \partial^a \phi_j \partial_a \xi_k + \partial_a (g_{bc} \mathcal{L}_{X_{ij} X_{kl}} \partial^b \phi_k \partial^a \phi_j \partial^c \xi_l) + \\ + [\partial_a (\mathcal{L}_{\phi_k X_{ij}} \partial^a \phi_j)] \xi_k + \Gamma_{ad}^{a(0)} (g_{bc} \mathcal{L}_{X_{ij} X_{kl}} \partial^b \phi_k \partial^d \phi_j \partial^c \xi_l) + \\ + \frac{1}{2} \pi_{ab} \mathcal{L}_{\phi_i X_{jk}} \partial^a \phi_j \partial^b \phi_k + \frac{1}{2} \partial_a (\pi_{bc} \mathcal{L}_{X_{ij} X_{kl}} \partial^a \phi_j \partial^b \phi_k \partial^c \phi_l) + \\ + \frac{1}{2} \Gamma_{ad}^{a(0)} (\pi_{bc} \mathcal{L}_{X_{ij} X_{kl}} \partial^d \phi_j \partial^b \phi_k \partial^c \phi_l) - \mathcal{L}_{\phi_i \phi_j} \xi_j - g_{ab} \mathcal{L}_{\phi_i X_{jk}} \partial^a \phi_j \partial^b \xi_k = 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Para campos estáticos podemos usar as relações (3.32) juntamente com a restrição

(3.25b) para escrever a equação anterior como:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\mathcal{L}_{X_{ij}}\phi'_j h'_{\mu\nu} - (\mathcal{L}_{X_{ij}})'\xi'_j + \mathcal{L}_{X_{ij}}(-4\mathcal{A}'\xi'_j - \xi''_j + e^{-2\mathcal{A}}\square^{(4)}\xi_j) - \\
 & -4\mathcal{A}'\mathcal{L}_{\phi_k X_{ij}}\phi'_j \xi_k - \mathcal{L}_{\phi_k X_{ij}}\phi'_j \xi'_k + (\mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}}\phi'_k \phi'_j \xi'_l)' - (\mathcal{L}_{\phi_k X_{ij}}\phi'_j)'\xi_k + \\
 & +4\mathcal{A}'(\mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}}\phi'_k \phi'_j \xi'_l) - \mathcal{L}_{\phi_i \phi_j} \xi_j + \mathcal{L}_{\phi_i X_{jk}}\phi'_j \xi'_k = 0, \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

onde usamos que: $\Gamma_{a4}^{a(1)} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h'_{\mu\nu}$, $\Gamma_{ab}^{a(0)} = 4\mathcal{A}'\delta_b^a$ e $g = e^{8\mathcal{A}}$ para a métrica (3.3). Além disso, definimos o operador D'Alambertiano em 4 dimensões como $\square^{(4)} = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$. Com alguns cálculos podemos escrever a equação (3.35) na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & e^{-2\mathcal{A}}\mathcal{L}_{X_{ij}}\square^{(4)}\xi_j - \left[(\mathcal{L}_{X_{ij}} + 2X_{kl}\mathcal{L}_{X_{il}X_{kj}})\xi'_j \right]' + \\
 & + \left[(\mathcal{L}_{\phi_i X_{kj}} - \mathcal{L}_{\phi_j X_{ik}})\phi'_k - 4\mathcal{A}'(\mathcal{L}_{X_{ij}} + 2X_{kl}\mathcal{L}_{X_{il}X_{kj}}) \right]\xi'_j - \\
 & - \left[(\mathcal{L}_{\phi_j X_{ik}}\phi'_k)' + 4\mathcal{A}'\mathcal{L}_{\phi_j X_{ik}}\phi'_k + \mathcal{L}_{\phi_i \phi_j} \right]\xi_j = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\mathcal{L}_{X_{ij}}\phi'_j h'_{\mu\nu}. \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

Note que esta não é uma equação de autovalor do tipo-Schrödinger.

O próximo passo é verificar qual as contribuições em primeira ordem para as equações de Einstein. Para isso utilizaremos a forma de Ricci:

$$R_{ab} = 2\bar{T}_{ab}, \tag{3.37a}$$

onde,

$$\bar{T}_{ab} \equiv T_{ab} - \frac{1}{3}g_{ab}T^c{}_c, \tag{3.37b}$$

com T_{ab} sendo o tensor energia momento definido em (3.12) e R_{ab} e o tensor de Ricci (3.15).

Vamos primeiro encontrar as contribuições em primeira ordem para o tensor energia momento. Para isso usaremos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}_{X_{ij}}^{(0)}X_{ij}^{(1)} + \mathcal{L}_{\phi_i}^{(0)}\xi_i + \dots \\
 \mathcal{L}_{X_{ij}} &= \mathcal{L}_{X_{ij}}^{(0)} + \mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}}^{(0)}X_{kl}^{(1)} + \mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k}^{(0)}\xi_k + \dots
 \end{aligned}$$

onde o índice (0) indica um termo não perturbado, ou seja, que não depende do campo ξ_i e nem de π_{ab} . Podemos escrever o tensor energia momento perturbado como:

$$\begin{aligned}
 T_{ab} &= -g_{ab}\mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}_{X_{ij}}^{(0)}\nabla_a\phi_i\nabla_b\phi_j - \mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}}^{(0)}\phi'_k\xi'_l\nabla_a\phi_i\nabla_b\phi_j + \mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k}^{(0)}\xi_k\nabla_a\phi_i\nabla_b\phi_j + \\
 & + \mathcal{L}_{X_{ij}}^{(0)}(\nabla_a\phi_i\nabla_b\xi_j + \nabla_a\xi_i\nabla_b\phi_j) + g_{ab}\mathcal{L}_{X_{ij}}^{(0)}\phi'_i\xi'_j - g_{ab}\mathcal{L}_{\phi_k}^{(0)}\xi_k - \pi_{ab}\mathcal{L}^{(0)} + \dots
 \end{aligned}$$

com isso, vemos que as contribuições em ordem zero e primeira ordem para o tensor

energia momento são, respectivamente:

$$T_{ab}^{(0)} = \mathcal{L}_{X_{ij}}^{(0)} \nabla_a \phi_i \nabla_b \phi_j - g_{ab} \mathcal{L}^{(0)}, \quad (3.38a)$$

$$\begin{aligned} T_{ab}^{(1)} = & -\mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}}^{(0)} \phi'_k \xi'_l \nabla_a \phi_i \nabla_b \phi_j + \mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k}^{(0)} \xi_k \nabla_a \phi_i \nabla_b \phi_j - g_{ab} \mathcal{L}_{\phi_k}^{(0)} \xi_k + \\ & + \mathcal{L}_{X_{ij}}^{(0)} (\nabla_a \phi_i \nabla_b \xi_j + \nabla_a \xi_i \nabla_b \phi_j) + g_{ab} \mathcal{L}_{X_{ij}}^{(0)} \phi'_i \xi'_j - \pi_{ab} \mathcal{L}^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.38b)$$

Podemos também encontrar a expansão até primeira ordem para \bar{T}_{ab} como:

$$\bar{T}_{ab}^{(1)} = T_{ab}^{(1)} - \frac{1}{3} g_{ab} g^{cd} T_{cd}^{(1)} - \frac{1}{3} g_{ab} \pi^{cd} T_{cd}^{(0)} - \frac{1}{3} \pi_{ab} g^{cd} T_{cd}^{(0)}. \quad (3.39)$$

Assim, usando as equações (3.38) em (3.39) obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ab}^{(1)} = & -\mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}}^{(0)} \xi'_k \phi'_l \nabla_a \phi_i \nabla_b \phi_j + \mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k}^{(0)} \xi_k \nabla_a \phi_i \nabla_b \phi_j + \frac{2}{3} g_{ab} \mathcal{L}_{\phi_k}^{(0)} \xi_k + \\ & + \mathcal{L}_{X_{ij}}^{(0)} (\nabla_a \phi_i \nabla_b \xi_j + \nabla_a \xi_i \nabla_b \phi_j) + \frac{2}{3} g_{ab} X_{ij} \mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}}^{(0)} \phi'_k \xi'_l - \\ & - \frac{2}{3} g_{ab} X_{ij} \mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k}^{(0)} \xi_k - \frac{2}{3} \pi_{ab} (X_{ij} \mathcal{L}_{X_{ij}} - \mathcal{L}), \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde usamos a restrição (3.25b) e ainda que $g_{cd}g^{cd} = 5$. Deste ponto em diante não mais explicitaremos o índice (0) para indicar que estamos usando a solução não perturbada. Disso, podemos escrever as componentes de $\bar{T}_{ab}^{(1)}$ como:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{\mu\nu}^{(1)} = & \frac{2}{3} e^{2\mathcal{A}} \eta_{\mu\nu} [-X_{ij} (\mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k} \xi_k - \mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}} \phi'_k \xi'_l) + \mathcal{L}_{\phi_k} \xi_k] - \\ & - \frac{2}{3} e^{2\mathcal{A}} h_{\mu\nu} (X_{ij} \mathcal{L}_{X_{ij}} - \mathcal{L}), \end{aligned} \quad (3.41a)$$

$$\bar{T}_{\mu 4}^{(1)} = \phi'_j \mathcal{L}_{X_{ij}} \nabla_\mu \xi_i, \quad (3.41b)$$

$$\bar{T}_{44}^{(1)} = -\frac{2}{3} (2X_{ij} \mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k} + \mathcal{L}_{\phi_k}) \xi_k + \frac{2}{3} (2X_{ij} \mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}} + 3\mathcal{L}_{X_{kl}}) \phi'_k \xi'_l, \quad (3.41c)$$

que é o resultado obtido em [20].

O próximo passo é encontrar as contribuições em primeira ordem para o tensor de Ricci. Usando (3.31) em (3.15) obtemos:

$$\begin{aligned} R_{ab} = & \partial_c (\Gamma_{ab}^c{}^{(0)} + \Gamma_{ab}^c{}^{(1)}) - \partial_b (\Gamma_{ca}^c{}^{(0)} + \Gamma_{ca}^c{}^{(1)}) + (\Gamma_{cd}^c{}^{(0)} + \Gamma_{cd}^c{}^{(1)}) \times (\Gamma_{ab}^d{}^{(0)} + \Gamma_{ab}^d{}^{(1)}) - \\ & - (\Gamma_{bd}^c{}^{(0)} + \Gamma_{bd}^c{}^{(1)}) \times (\Gamma_{ca}^d{}^{(0)} + \Gamma_{ca}^d{}^{(1)}) + \dots \end{aligned}$$

Logo, se fizermos que $R_{ab} = R_{ab}^{(0)} + R_{ab}^{(1)} + \dots$, encontraremos

$$R_{ab}^{(0)} = \partial_c \Gamma_{ab}^c{}^{(0)} - \partial_b \Gamma_{ac}^c{}^{(0)} + \Gamma_{cd}^c{}^{(0)} \Gamma_{ab}^d{}^{(0)} - \Gamma_{bd}^c{}^{(0)} \Gamma_{ac}^d{}^{(0)}, \quad (3.42a)$$

$$R_{ab}^{(1)} = \partial_c \Gamma_{ab}^c{}^{(1)} - \partial_b \Gamma_{ac}^c{}^{(1)} + \Gamma_{cd}^c{}^{(0)} \Gamma_{ab}^d{}^{(1)} + \Gamma_{cd}^c{}^{(1)} \Gamma_{ab}^d{}^{(0)} - \Gamma_{bd}^c{}^{(0)} \Gamma_{ac}^d{}^{(1)} - \Gamma_{bd}^c{}^{(1)} \Gamma_{ac}^d{}^{(0)}. \quad (3.42b)$$

Por conseguinte, pelas relações (3.32) podemos escrever que:

$$\partial_c \Gamma_{ab}^{c(1)} = (\mathcal{A}' e^{2\mathcal{A}} h_{ab})' + \mathcal{A}' e^{2\mathcal{A}} h'_{ab} + \frac{1}{2} e^{2\mathcal{A}} g^{cd} \partial_c (\partial_a h_{bd} + \partial_b h_{ad} - \partial_d h_{ab}) , \quad (3.43a)$$

$$\partial_b \Gamma_{ac}^{c(1)} = \frac{1}{2} \partial_b (g^{cd} e^{2\mathcal{A}} \partial_a h_{cd}) , \quad (3.43b)$$

$$\Gamma_{cd}^{c(0)} \Gamma_{ab}^{d(1)} = 4\mathcal{A}'^2 e^{2\mathcal{A}} h_{ab} + 2\mathcal{A}' e^{2\mathcal{A}} h'_{ab} , \quad (3.43c)$$

$$\Gamma_{cd}^{c(1)} \Gamma_{ab}^{d(0)} = \frac{1}{2} \mathcal{A}' e^{2\mathcal{A}} g^{cd} (\delta_a^4 \partial_b h_{cd} + \delta_b^4 \partial_a h_{cd} - \delta_a^4 \delta_b^4 h'_{cd} + g_{ab} h'_{cd}) , \quad (3.43d)$$

$$\Gamma_{bd}^{c(0)} \Gamma_{ac}^{d(1)} = \mathcal{A}'^2 e^{2\mathcal{A}} h_{ab} + \frac{1}{2} \mathcal{A}' e^{2\mathcal{A}} (\delta_b^4 g^{ce} \partial_a h_{ce} + 2h'_{ab}) , \quad (3.43e)$$

$$\Gamma_{bd}^{c(1)} \Gamma_{ac}^{d(0)} = \mathcal{A}'^2 e^{2\mathcal{A}} h_{ab} + \frac{1}{2} e^{2\mathcal{A}} \mathcal{A}' (\delta_a^4 g^{cd} \partial_b h_{cd} + 2h'_{ab}) . \quad (3.43f)$$

Com isso, obtemos (3.42b) de uma maneira mais explicita

$$\begin{aligned} R_{ab}^{(1)} &= (\mathcal{A}' e^{2\mathcal{A}} h_{ab})' + \mathcal{A}' e^{2\mathcal{A}} h'_{ab} + \frac{1}{2} e^{2\mathcal{A}} g^{cd} \partial_c (\partial_a h_{bd} + \partial_b h_{ad} - \partial_d h_{ab}) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \partial_b (g^{cd} e^{2\mathcal{A}} \partial_a h_{cd}) + 2\mathcal{A}'^2 e^{2\mathcal{A}} h_{ab} + \frac{1}{2} \mathcal{A}' e^{2\mathcal{A}} g^{cd} (g_{ab} - \delta_a^4 \delta_b^4) h'_{cd} , \end{aligned} \quad (3.44)$$

ou como componentes,

$$R_{44}^{(1)} = -\frac{1}{2} (h'' + 2\mathcal{A}' h') , \quad (3.45a)$$

$$R_{\mu 4}^{(1)} = \frac{1}{2} (\partial^\alpha h'_{\alpha\mu} - \partial_\mu h') , \quad (3.45b)$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(1)} &= e^{2\mathcal{A}} \left[\frac{1}{2} h''_{\mu\nu} + 2\mathcal{A}' h'_{\mu\nu} + (\mathcal{A}'' + 4\mathcal{A}'^2) h_{\mu\nu} \right] + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \mathcal{A}' e^{2\mathcal{A}} h' + \\ &\quad + \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha h_{\alpha\mu} - \partial_\mu \partial_\nu h) - \frac{1}{2} \square^{(4)} h_{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (3.45c)$$

$$R^{(1)} = h'' + 5\mathcal{A}' h' + e^{-2\mathcal{A}} (\partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} - \square^{(4)} h) . \quad (3.45d)$$

onde $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$.

Portanto, usando as equações (3.44) e (3.40) podemos escrever a contribuição de primeira ordem para a equação (3.37a) como:

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A}' e^{2\mathcal{A}} h_{ab})' + \mathcal{A}' e^{2\mathcal{A}} h'_{ab} + \frac{1}{2} e^{2\mathcal{A}} g^{cd} \partial_c (\partial_a h_{bd} + \partial_b h_{ad} - \partial_d h_{ab}) - \frac{1}{2} \partial_b (g^{cd} e^{2\mathcal{A}} \partial_a h_{cd}) + \\ &+ 2\mathcal{A}'^2 e^{2\mathcal{A}} h_{ab} + \frac{1}{2} \mathcal{A}' e^{2\mathcal{A}} g^{cd} (g_{ab} - \delta_a^4 \delta_b^4) h'_{cd} = -2\mathcal{L}_{X_{ij} X_{kl}} \xi'_k \phi'_l \nabla_a \phi_i \nabla_b \phi_j + \\ &+ 2\mathcal{L}_{X_{ij} \phi_k} \xi_k \nabla_a \phi_i \nabla_b \phi_j + \frac{4}{3} g_{ab} \mathcal{L}_{\phi_k} \xi_k + 2\mathcal{L}_{X_{ij}} (\nabla_a \phi_i \nabla_b \xi_j + \nabla_a \xi_i \nabla_b \phi_j) + \\ &+ \frac{4}{3} g_{ab} X_{ij} \mathcal{L}_{X_{ij} X_{kl}} \phi'_k \xi'_l - \frac{4}{3} g_{ab} X_{ij} \mathcal{L}_{X_{ij} \phi_k} \xi_k - \frac{4}{3} \pi_{ab} (X_{ij} \mathcal{L}_{X_{ij}} - \mathcal{L}) . \end{aligned} \quad (3.46)$$

Na forma de componente podemos escrever as três seguintes equações:

$$\begin{aligned} \{\mu, \nu\} : \quad & e^{2A} \left[\frac{1}{2} h''_{\mu\nu} + 2\mathcal{A}' h'_{\mu\nu} + (\mathcal{A}'' + 4\mathcal{A}'^2) h_{\mu\nu} \right] + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \mathcal{A}' e^{2A} h' + \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha h_{\alpha\mu} - \partial_\mu \partial_\nu h) - \frac{1}{2} \square^{(4)} h_{\mu\nu} = -\frac{4}{3} e^{2A} h_{\mu\nu} (X_{ij} \mathcal{L}_{X_{ij}} - \mathcal{L}) + \\ & + \frac{4}{3} e^{2A} \eta_{\mu\nu} \left[\mathcal{L}_{\phi_k} \xi_k - X_{ij} (\mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k} \xi_k - \mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}} \phi'_k \xi'_l) \right], \end{aligned} \quad (3.47a)$$

$$\{\mu, 4\} : \quad \frac{1}{2} (\partial^\alpha h'_{\alpha\mu} - \partial_\mu h') = 2\phi'_j \mathcal{L}_{X_{ij}} \nabla_\mu \xi_i, \quad (3.47b)$$

$$\begin{aligned} \{4, 4\} : \quad & -\frac{1}{2} (h'' + 2\mathcal{A}' h') = -\frac{4}{3} (2X_{ij} \mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k} + \mathcal{L}_{\phi_k}) \xi_k + \\ & + \frac{4}{3} (2X_{ij} \mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}} + 3\mathcal{L}_{X_{kl}}) \phi'_k \xi'_l, \end{aligned} \quad (3.47c)$$

Além disso, usando as equações (3.23a) e (3.23b), a equação (3.47a) torna-se:

$$\begin{aligned} & h''_{\mu\nu} + 4\mathcal{A}' h'_{\mu\nu} - e^{-2A} \square^{(4)} h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \mathcal{A}' h' + e^{-2A} (\partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\nu} + \partial_\nu \partial^\alpha h_{\alpha\mu} - \partial_\mu \partial_\nu h) \\ & = \frac{8}{3} \eta_{\mu\nu} \left[\mathcal{L}_{\phi_k} \xi_k - X_{ij} (\mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k} \xi_k - \mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}} \phi'_k \xi'_l) \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Vamos agora considerar que $h_{\mu\nu}$ obedeça as condições de gauge transverso de traço nulo dada pelas equações (3.25d). Dessa forma podemos escrever a equação (3.48) como:

$$h''_{\mu\nu} + 4\mathcal{A}' h'_{\mu\nu} - e^{-2A} \square^{(4)} h_{\mu\nu} = \frac{8}{3} \eta_{\mu\nu} \left[\mathcal{L}_{\phi_k} \xi_k - X_{ij} (\mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k} \xi_k - \mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}} \phi'_k \xi'_l) \right]. \quad (3.49)$$

Contraindo esta equação com $\eta^{\mu\nu}$ e novamente usando as relações (3.25d), obtemos que

$$\mathcal{L}_{\phi_k} \xi_k - X_{ij} (\mathcal{L}_{X_{ij}\phi_k} \xi_k - \mathcal{L}_{X_{ij}X_{kl}} \phi'_k \xi'_l) = 0.$$

Com isso, a equação (3.49) torna-se:

$$\left(\partial_y^2 + 4\mathcal{A}' \partial_y - e^{-2A} \square \right) h_{\mu\nu} = 0. \quad (3.50)$$

É esperado que essa equação represente a gravitação em quatro dimensões. Para isso deve existir o modo zero ($m^2 = p^2 = 0$) para a equação de Klein-Gordon, ou seja, $\square h_{\mu\nu} = 0$. Com isso, vemos que as soluções devem ser ondas planas na forma:

$$h_{\mu\nu}(y, x) = C_{\mu\nu} e^{-ipx}, \quad (3.51)$$

onde $C_{\mu\nu}$ é um tensor constante.

Para entender melhor a equação (3.50) vamos propor uma mudança de variável a fim

de que a métrica seja conformalmente plana. Vamos assumir que:

$$dz = e^{-\mathcal{A}(y)} dy, \quad (3.52)$$

com isso, a métrica perturbada (3.26) torna-se:

$$ds_5^2 = e^{2\mathcal{A}(z)} \left[(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(z, x)) dx^\mu dx^\nu - dz^2 \right]. \quad (3.53)$$

Desse modo, (3.50) pode ser escrita como:

$$\left[-\mathcal{A}'(y) e^{-\mathcal{A}(y)} \partial_z + e^{-2\mathcal{A}(y)} \partial_z^2 + 4\mathcal{A}'(y) e^{-\mathcal{A}(y)} \partial_z - e^{-2\mathcal{A}(y)} \square \right] h_{\mu\nu} = 0,$$

e obtemos uma equação tipo-Schrödinger na forma:

$$(-\partial_z^2 - 3\mathcal{A}_z \partial_z + \square) h_{\mu\nu} = 0. \quad (3.54)$$

Por conveniência iremos redefinir o campo gravitacional $h_{\mu\nu}$ e escrever-lo como:

$$h_{\mu\nu}(x, z) \equiv e^{-3\mathcal{A}(z)/2} G(x) H_{\mu\nu}(z), \quad (3.55)$$

onde $G(x)$ obedece o equação de Klein-Gordon na forma $\square G(x) = -p^2 G(x)$. Isso faz com que a equação (3.54) obtenha a forma:

$$\left[-\partial_z^2 + U(z) \right] H_{\mu\nu} = p^2 H_{\mu\nu}, \quad (3.56)$$

onde

$$U(z) = \frac{9}{4} \mathcal{A}_z^2 + \frac{3}{2} \mathcal{A}_{zz}. \quad (3.57)$$

A equação (3.56) é a equação tipo-Schrödinger que governa a estabilidade do sistema. Ainda podemos escrever essa equação em uma forma supersimétrica, ou seja:

$$\mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger H_{\mu\nu} = \left[\left(\partial_z + \frac{3}{2} \mathcal{A}_z \right) \left(-\partial_z + \frac{3}{2} \mathcal{A}_z \right) \right] H_{\mu\nu} = p^2 H_{\mu\nu}. \quad (3.58)$$

Vemos que o modo zero corresponde à gravitação em uma teoria efetiva em 4D e pode ser escrito como:

$$H_{\mu\nu}(z) = B \times \exp\left(\frac{3}{2} \mathcal{A}(z)\right), \quad (3.59)$$

onde B é uma constante real. Por fim, a estabilidade é garantida pela positividade do operador $\mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger$ na versão supersimétrica da teoria. Por outro lado, esta fatoração mostra diretamente que não há estados ligados de gráviton com massa negativa. Com isso, o modo zero (3.59) será o estado fundamental do problema mecânico quântico associado.

Isso leva à conclusão importante que a modificação na dinâmica dos n campos escalares, não contribui para desestabilizar os graus de liberdade geométricos, que aparecem no cenário mundo brana padrão.

3.2 Aplicação 1: Modelos de um campo com dinâmica padrão

Nesta seção vamos analisar alguns modelos específicos para a teoria de um campo com dinâmica padrão, isto é,

$$\mathcal{L} = X - V(\phi). \quad (3.60)$$

Deixaremos os casos com dinâmica não padrão e também com mais que um campo, para serem estudados na próxima seção.

Para começar iremos obter algumas equações para o caso simples dado pela lagrangiana (3.60). A primeira equação importante é a equação de movimento (3.10). Ela pode ser escrita como:

$$\phi'' + 4\mathcal{A}'\phi' = V_\phi. \quad (3.61)$$

Além disso, as equações de Einstein (3.19) tornam-se:

$$\mathcal{A}'^2 = \frac{1}{6}\phi'^2 - \frac{1}{3}V, \quad (3.62a)$$

$$\mathcal{A}'' = -\frac{2}{3}\phi'^2. \quad (3.62b)$$

Vemos com isso que o problema se resume a resolver as equações diferenciais acopladas (3.62) para algum potencial específico. Apesar de sempre ser possível resolver essas equações numericamente, o caso analítico é quase sempre irrealizável. Porém, alguns resultados analíticos podem ser obtidos pelo formalismo de primeira ordem.

Como foi descrito neste capítulo, o formalismo de primeira ordem pode ser obtido considerando que o *warp function*, $\mathcal{A}(y)$, possa ser escrito em termo do superpotencial W na forma:

$$\mathcal{A}' = -\frac{1}{3}W. \quad (3.63a)$$

Usando essa relação em (3.62b) obtemos também que

$$\phi' = \frac{1}{2}W_\phi. \quad (3.63b)$$

Por outro lado, se usarmos (3.63a) e (3.63b) em (3.62a), obtemos o potencial V em

termos do superpotencial como:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2 - \frac{1}{3}W^2. \quad (3.64)$$

Notamos com isso que, para um dado superpotencial específico, podemos encontrar todas as características do modelo de mundo brana. Vamos, por exemplo, escolher que $W(\phi)$ represente o potencial sino-Gordon. Para isso, devemos escolher o superpotencial como:

$$W(\phi) = 3bc \sin \left(\sqrt{\frac{2}{3b}} \phi \right), \quad (3.65)$$

onde b e c são constantes reais. Com isso, a equação de primeira ordem para o campo ϕ torna-se:

$$\phi' = c\sqrt{6b} \cos \left(\sqrt{\frac{2}{3b}} \phi \right).$$

Essa equação possui solução geral dada por:

$$\phi(y) = \sqrt{6b} \arctan \left[\tanh(cy) \right], \quad (3.66)$$

que é uma solução tipo *kink* com largura característica c e amplitude dada por $\sqrt{6b}$.

O *warp function*, $A(y)$, é obtido integrando a equação (3.63a) com o superpotencial (3.65) e com a solução (3.66), ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(y) &= -3bc \int dy \sin \left[2 \arctan \left(\tanh(cy) \right) \right] \\ &= \frac{b}{2} \ln \left[\operatorname{sech}(2cy) \right]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Com isso, o *warp factor* pode ser escrito como:

$$e^{2\mathcal{A}(y)} = \operatorname{sech}^b(2cy). \quad (3.68)$$

Vemos que se $|cy| \gg 0$, o *warp function* assume o comportamento assintótico linear, $\mathcal{A}(y) \rightarrow -bc|y|$ e o *warp factor* torna-se:

$$e^{2\mathcal{A}(y)} = 2^b e^{-2bc|y|} + \dots$$

O gráfico 3.1a mostra algumas características da brana. A linha contínua é a solução *kink* (3.66) e a linha tracejada mostra o comportamento do *warp function* (3.67). O gráfico 3.1b mostra o comportamento do *warp factor* (3.68) para $b = 2/3$ e $c = 1, 2, 3, 4, 5$. Vemos que a medida que o valor de c cresce o *warp factor* se aproxima do comportamento assintótico.

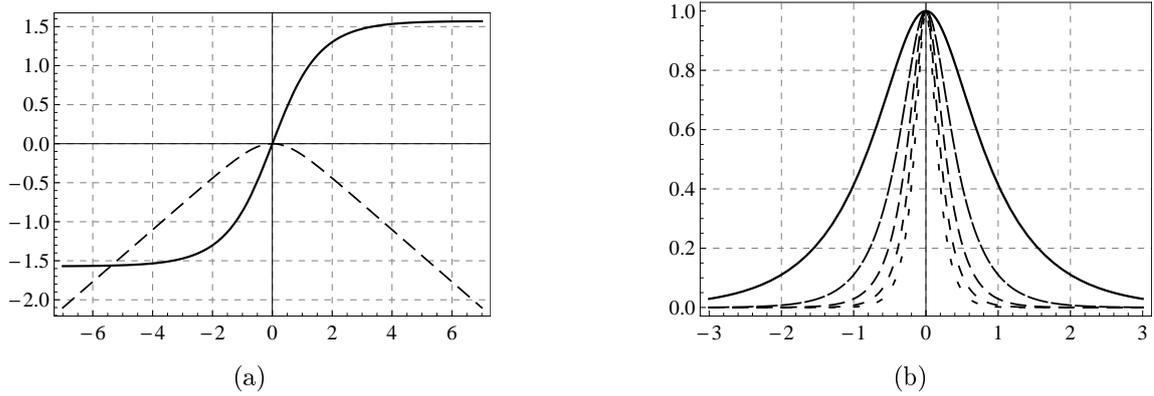


Figura 3.1: (a) A linha contínua representa a solução *kink* (3.66) e a linha tracejada o *warp function* (3.67) plotados para $c=1/2$ e $b=2/3$. (b) Comportamento do *warp factor* (3.68) para $b=2/3$, $c=1$ (linha contínua) e $c=2, 3, 4, 5$ (linha tracejada).

O potencial é obtido da equação (3.64) como:

$$V(\phi) = \frac{3bc^2}{2} \left[(1-b) - (1+b) \cos \left(\sqrt{\frac{8}{3b}} \phi \right) \right]. \quad (3.69)$$

Vemos que os mínimos do potencial estão localizados em $\bar{\phi} = \pm n\pi \sqrt{3b/32}$, onde n é um número inteiro. Além disso, temos que $V(\bar{\phi}) = -3(1-b)bc^2/2$. O gráfico 3.2a mostra o comportamento do potencial (3.69) para $c=1/2$ e $b=2/3$.

A densidade de energia (3.20) pode ser escrita como:

$$\rho(y) = -3bc^2 \left[b - (1+b) \operatorname{sech}^2(2cy) \right] \operatorname{sech}^b(2cy), \quad (3.70)$$

onde podemos mostrar que a integral em todo o espaço é nula. Para $|cy| \gg 0$ a densidade de energia torna-se:

$$\rho(y) = -3bc^2 2^b \left[b - 4(1+b)e^{-4c|y|} \right] e^{-2bc|y|} + \dots$$

O gráfico 3.2b mostra o comportamento da densidade de energia (3.70) para $b=2/3$ e $c=1, 3/2, 2, 5/2$.

Por fim, podemos construir o potencial quântico (3.57). Para isso devemos notar que a mudança de variável (3.52) torna-se:

$$\begin{aligned} z &= \int \operatorname{sech}^{-b/2}(2cy) dy \\ &= \frac{\sinh(2cy)}{2c} \times {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{2-b}{4}; \frac{3}{2}; -\sinh^2(2cy) \right). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Para poucos casos a equação (3.71) pode ser invertida analiticamente. Um exemplo onde isso é possível é quando $b=2$. Neste caso temos que $y = \operatorname{arcsinh}(2cz)/(2c)$, e o

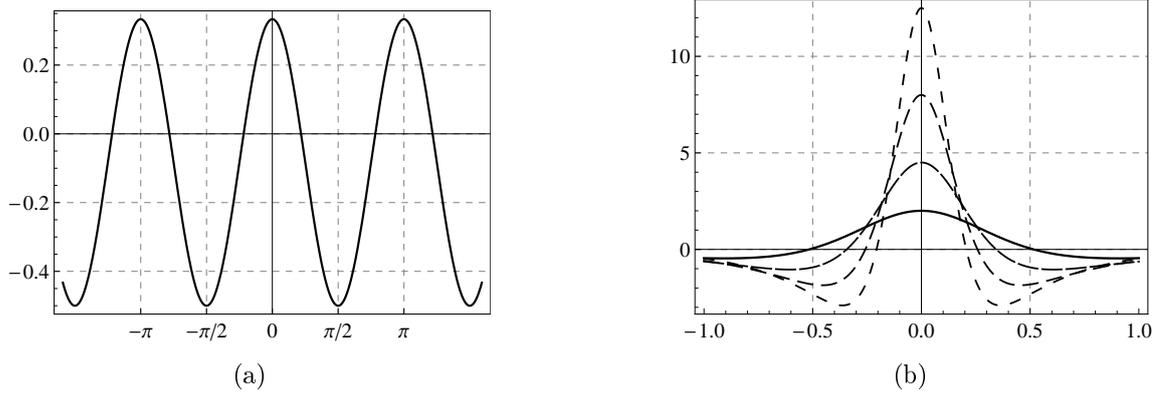


Figura 3.2: O gráfico (a) mostra o potencial tipo seno-Gordon (3.69) plotado para $c = 1/2$ e $b = 2/3$. O gráficos (b) mostram a densidade de energia (3.70) plotada para $b = 2/3$ e $c = 1, 3/2, 2, 5/2$.

potencial quântico (3.57) torna-se:

$$U(z) = 6c^2 \frac{10c^2 z^2 - 1}{(1 + 4c^2 z^2)^2}. \quad (3.72)$$

Com o modo zero gravitacional sendo dado por:

$$H_{\mu\nu}(z) = \frac{\sqrt{c}}{(1 - 4c^2 z^2)^{3/4}} \quad (3.73)$$

A figura 3.2 mostra o comportamento do potencial quântico (3.72) para $c = 1$ (linha contínua), $c = 2$ e $c = 3$ (linhas pontilhadas).

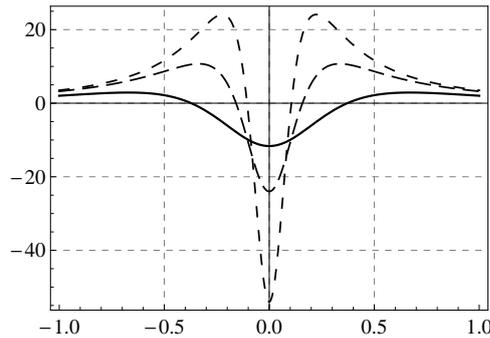


Figura 3.3: Potencial quântico (3.71) plotado para $c = 1$ (linha contínua), $c = 2$ e $c = 3$ (linhas pontilhadas).

Nas próximas seções iremos apresentar algumas teorias de Mundo brana, com dinâmica não padrão, para um e dois campos escalares e concluiremos analisando as características de modelos gêmeos. Nos basearemos em dois artigos que foram produzidos durante a vigência do doutorado. Em [73] descrevemos modelos de Mundo brana, com dinâmica não padrão, através do formalismo de primeira ordem, já em [54] estudamos as características gêmeas de uma classe de modelos.

3.3 Aplicação 2: Modelos de um campo para soluções *kink* e *compacton* com dinâmica generalizada

Para estudar modelos de brana com dinâmica generalizada usaremos a densidade lagrangiana escrita numa forma polinomial definida como segue,

$$\mathcal{L} = \frac{X}{n} |2X|^{n-1} - V(\phi), \quad (3.74)$$

onde para $n = 1$ reobtemos a teoria com dinâmica padrão (3.60).

Utilizando o formalismo de primeira ordem, na forma das equações (3.23), obtemos que:

$$\phi' = \left(\frac{1}{2} W_\phi \right)^{\frac{1}{2n-1}}, \quad (3.75a)$$

$$V(\phi) = \frac{2n-1}{2n} \left(\frac{1}{2} W_\phi \right)^{\frac{2n}{2n-1}} - \frac{1}{3} W^2. \quad (3.75b)$$

Para exemplificar este modelo escolheremos soluções *kink* na forma:

$$\phi(y) = \tanh(y), \quad (3.76)$$

que, na ausência de gravidade, é a bem conhecida solução do modelo ϕ^4 apresentado na seção 1.2.2 e generalizada para uma teoria com dinâmica não padrão na seção 2.2.1. Neste caso devemos usar o superpotencial (2.60), isto é:

$$W_n(\phi) = 2\phi \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -2n+1; \frac{3}{2}; \phi^2\right), \quad (3.77)$$

para obter o potencial (3.75b) na forma

$$V(\phi) = \frac{2n-1}{2n} (1-\phi^2)^{2n} - \frac{4}{3} \phi^2 \left[{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -2n+1; \frac{3}{2}; \phi^2\right) \right]^2. \quad (3.78)$$

Especificadamente para $n = 1$ e $n = 2$ obtemos, respectivamente

$$V(\phi) = \frac{1}{2} (1-\phi^2)^2 - \frac{4}{3} \left(\phi - \frac{1}{3} \phi^3 \right)^2, \quad (3.79a)$$

$$V(\phi) = \frac{3}{4} (1-\phi^2)^4 - \frac{4}{3} \left(\phi - \phi^3 + \frac{3}{5} \phi^5 - \frac{1}{7} \phi^7 \right)^2. \quad (3.79b)$$

Em geral o potencial (3.78) é um polinômio de grau $8n-2$, além disso, podemos verificar a presença de cinco pontos de extremo da função $V(\phi)$. Um deles está localizado em $\phi_0 = 0$ e outros dois em $\phi_{\pm} = \pm 1$. O extremo central é um ponto de máximo da função potencial, pois $V(\phi_0) = (2n-1)/(2n)$ é sempre uma constante positiva. Os extremos em

$\phi_{\pm} = \pm 1$ são mínimos locais com

$$V(\phi_{\pm}) = -\frac{\pi}{3} \left(\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(2n + \frac{1}{2})} \right)^2, \quad (3.80)$$

sendo uma constante sempre negativa. Há também outros dois máximos locais. O comportamento do potencial (3.78) em torno do máximo central é mostrado na figura 3.4a para $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Além disso, podemos observar que $V(\phi \rightarrow \pm\infty) \rightarrow -\infty$. Assim, embora não seja mostrado nas respectivas figuras, os potenciais vão assintoticamente para $-\infty$.

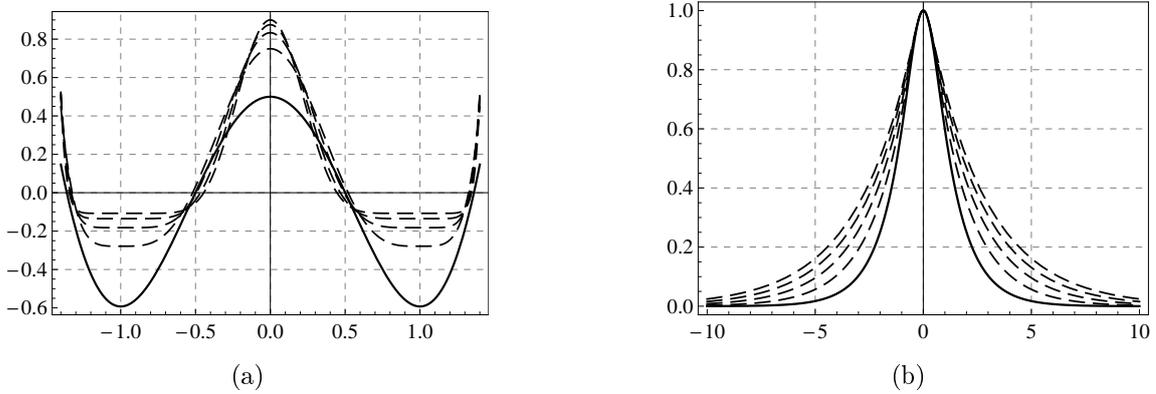


Figura 3.4: (a) Perfil do potencial $V(\phi)$ dado pela equação (3.78) para $n = 1$ (linha sólida) e $n = 2, 3, 4, 5$ (linhas tracejadas). (b) perfil de *warp factor* $e^{2\mathcal{A}(y)}$, para $n = 1$ (linha sólida) e para $n = 2, 3, 4, 5$ (linhas tracejadas).

Apesar de ter a mesma solução, estes modelos têm outras características distintas, como o *warp function* que é obtido pela equação (3.22) como:

$$\mathcal{A}(y) = -\frac{2}{3} \int dy {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -2n + 1; \frac{3}{2}; \tanh^2(y)\right) \tanh(y), \quad (3.81)$$

A integral na equação (3.81) não possui uma forma analítica. No entanto, pode ser facilmente efetuada para um dado n . Temos, por exemplo,

$$\mathcal{A}(y) = \frac{4}{9} \ln S + \frac{S^2}{9} - \frac{1}{9}, \quad (3.82a)$$

$$\mathcal{A}(y) = \frac{32}{105} \ln S + \frac{8S^2}{105} + \frac{S^4}{35} + \frac{S^6}{63} - \frac{38}{315}, \quad (3.82b)$$

para $n = 1$ e $n = 2$, respectivamente, onde $S = \text{sech}(y)$. Onde fixamos $\mathcal{A}(0) = 0$ para obter a constante de integração em (3.81). A figura 3.4b mostra o comportamento do *warp factor*, $e^{2\mathcal{A}}$, para alguns valores de n . Notamos que a função decai mais lentamente a medida que o valor de n cresce. Isso pode ser verificado a partir do comportamento do

warp function agora fora da brana, isto é,

$$\mathcal{A}_\infty(y) \rightarrow -\frac{W(\phi_+)}{3}|y| = -\frac{\sqrt{\pi}}{3} \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(2n + \frac{1}{2})}|y|. \quad (3.83)$$

Onde a relação entre as funções Gamma vai a zero para n crescente.

A densidade de energia (3.20) pode ser escrita como:

$$\rho(y) = \left[\operatorname{sech}^{2n}(y) - \frac{4}{3} \tanh^2(x) \left[{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -2n + 1; \frac{3}{2}; \tanh^2(x)\right) \right]^2 \right] e^{2A(y)}. \quad (3.84)$$

Para $n = 1$ e 2 , as expressões são:

$$\rho(y) = \frac{S^{8/9}}{27} (4S^6 + 12S^4 + 27S^2 - 16) \times \exp \left[-\frac{2}{9} (1 - S^2) \right], \quad (3.85a)$$

$$\begin{aligned} \rho(y) &= \frac{S^{64/105}}{3675} (100S^{14} + 140S^{12} + 224S^{10} + 560S^8 + 3675S^4 - 1024) \times \\ &\times \exp \left[-\frac{2}{315} (38 - 24S^2 - 9S^4 - 5S^6) \right]. \end{aligned} \quad (3.85b)$$

A figura 3.5 retrata o perfil da densidade de energia (3.84) para alguns valores de n .

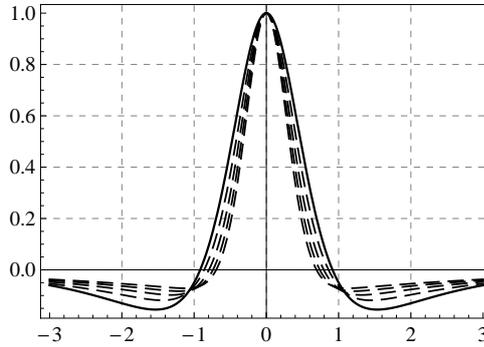


Figura 3.5: Perfil da densidade de energia $\rho(y)$, para $n=1$ (linha contínua) e $n=2, 3, 4, 5$ (linha tracejada).

O próximo passo é analisar se a modificação da dinâmica pode desestabilizar o modelo. Para isso iremos utilizar o formalismo apresentado na seção 3.1.1, em especial devemos efetuar a mudança de variável (3.52), ou seja,

$$z = \int e^{-A(y)} dy, \quad (3.86)$$

de tal modo que possamos obter o potencial da equação tipo-Schrödinger (3.56) como:

$$U(z) = \frac{9}{4} A_z^2 + \frac{3}{2} A_{zz}. \quad (3.87)$$

A figura 3.3 representa o potencial tipo-Schrödinger (3.87) para vários valores de n .

Podemos notar que os potenciais são tipo vulcano, com sua altura máxima diminuindo à medida que n cresce.

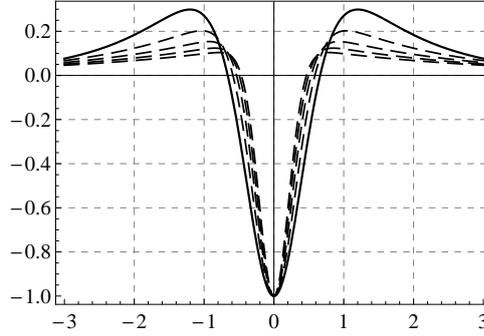


Figura 3.6: Perfil do potencial tipo-Schrödinger (3.87) para o superpotencial (3.77). A linha contínua representa $n = 1$ e as linhas tracejadas se referem a $n = 2, 3, 4, 5$.

Outra possibilidade é assumir um modelo que suporta soluções tipo *Kink* compactos. Para isso escolheremos a forma específica (2.66), isto é,

$$\phi(y) = \begin{cases} \sin(y) & \text{para } |y| \leq \frac{\pi}{2}, \\ \text{sgn}(y) & \text{para } |y| > \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (3.88)$$

onde “sgn(y)” é a função sinal. Esta solução obedece a equação de primeira ordem $\phi' = \sqrt{|1 - \phi^2|}$. Assim, usando a equação (3.75a), podemos reconstruir o superpotencial $W(\phi)$ como:

$$\begin{aligned} W(\phi) &= 2 \int d\phi \left(\sqrt{|1 - \phi^2|} \right)^{2n-1} \\ &= 2\phi \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -n + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \phi^2\right) A(\phi) + B(\phi), \end{aligned} \quad (3.89)$$

onde as funções $A(\phi)$ e $B(\phi)$ são tais que

$$\begin{aligned} A(\phi) &= \begin{cases} (-1)^n i & \text{para } \phi^2 > 1, \\ 1 & \text{para } \phi^2 \leq 1, \end{cases} \\ B(\phi) &= \begin{cases} \text{sgn}(\phi) \left(1 - i(-1)^n\right) \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)} & \text{para } \phi^2 > 1, \\ 0 & \text{para } \phi^2 \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Por exemplo, podemos escrever explicitamente

$$W(\phi) = \begin{cases} \phi\sqrt{|1-\phi^2|} + \arcsin(\phi) & \text{para } \phi^2 \leq 1, \\ \phi\sqrt{|1-\phi^2|} + \operatorname{sgn}(\phi)\left(\operatorname{arccosh}(|\phi|) - \frac{\pi}{2}\right) & \text{para } \phi^2 > 1, \end{cases} \quad (3.90a)$$

$$W(\phi) = \begin{cases} \frac{\phi}{2}\sqrt{|1-\phi^2|}\left(\frac{5}{2}-\phi^2\right) + \frac{3}{4}\arcsin(\phi) & \text{para } \phi^2 \leq 1, \\ -\frac{\phi}{2}\sqrt{|1-\phi^2|}\left(\frac{5}{2}-\phi^2\right) + \frac{3}{8}\operatorname{sgn}(\phi)\left(\operatorname{arccosh}(|\phi|)+2\pi\right) & \text{para } \phi^2 > 1, \end{cases} \quad (3.90b)$$

para $n=1$ e $n=2$, respectivamente. O potencial tem três extremos locais: um máximo em $\phi_0=0$, onde, $V(\phi_0) = (2n-1)/(2n)$ é uma constante sempre positiva, e dois mínimos em $\phi_{\pm} = \pm 1$, com

$$V(\phi_{\pm}) = -\frac{\pi}{3} \left(\frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n + 1)} \right)^2, \quad (3.91)$$

tendo sempre um valor negativo. O comportamento do potencial $V(\phi)$ como uma função de n é mostrada na Fig. 3.7a. É possível mostrar que $V(\phi \rightarrow \pm\infty) \rightarrow -\infty$.

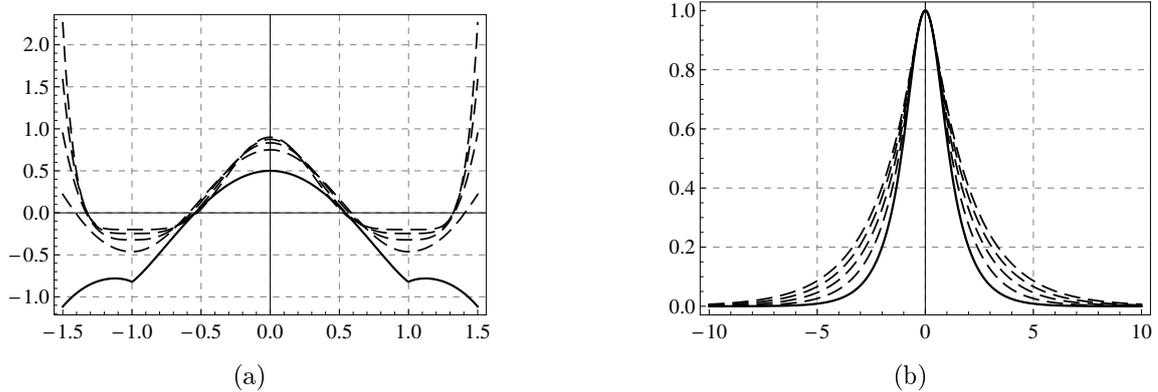


Figura 3.7: (a) Perfil do potencial $V(\phi)$ (3.75b) para $W(\phi)$ dado pela equação (3.87), para $n=1$ (linha contínua) a para $n=2,3,4,5$ (linhas tracejadas). (b) Perfil de *warp factor* $e^{2\mathcal{A}(y)}$, para $n=1$ (linha contínua) e para $n=2,3,4,5$ (linhas tracejadas).

O *warp function* pode ser obtido para $n=1$ e $n=2$, respectivamente, como:

$$\mathcal{A}(y) = \begin{cases} -\frac{y^2}{6} - \frac{\sin^2(y)}{6} & \text{para } |y| \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{6}|y| + \frac{\pi^2-4}{24} & \text{para } |y| > \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (3.92a)$$

$$\mathcal{A}(y) = \begin{cases} -\frac{y^2}{8} - \frac{5}{24}\sin^2(y) + \frac{1}{24}\sin^4(y) & \text{para } |y| \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{8}|y| + \frac{3\pi^2-16}{96} & \text{para } |y| > \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (3.92b)$$

onde novamente usamos $\mathcal{A}(0) = 0$ para obter a constante de integração. Note que para

$|y| > \pi/2$, o comportamento do *warp factor* é semelhante ao caso de uma brana fina, ou seja, proporcional a $\exp(-|y|)$ como em [15] (Veja também [74, 75]). Isto acontece porque o campo escalar esta em um mínimo local do potencial. Na Fig. 3.7b, plotamos o perfil do *warp factor* para alguns valores de n .

Comportamento semelhante também é encontrado para as densidades de energia correspondentes,

$$\rho(y) = \begin{cases} f_1(y) \times \exp\left(-\frac{y^2}{3} - \frac{\sin^2(y)}{3}\right) & \text{para } |y| \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi^2}{12} \times \exp\left(-\frac{\pi}{3}|y| - \frac{1}{3} + \frac{\pi^2}{12}\right) & \text{para } |y| > \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (3.93a)$$

$$\rho(y) = \begin{cases} f_2(y) \times \exp\left(-\frac{y^2}{4} - \frac{5}{12} \sin^2(y) + \frac{1}{12} \sin^4(y)\right) & \text{para } |y| \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{3\pi^2}{64} \times \exp\left(-\frac{\pi}{4}|y| - \frac{1}{3} + \frac{\pi^2}{16}\right) & \text{para } |y| > \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (3.93b)$$

onde,

$$f_1(y) = 1 - \frac{y^2}{3} - \frac{y}{3} \sin(2y) - \frac{4}{3} \sin^2(y) + \frac{1}{3} \sin^4(y),$$

$$f_2(y) = 1 - \frac{3y^2}{16} - \frac{y}{16} [5 - 2 \sin^2(y)] \sin(2y) - \frac{121}{48} \sin^2(y) + \frac{31 \sin^4(y)}{16} - \frac{\sin^6(y)}{2} + \frac{\sin^8(y)}{12},$$

para $n = 1$ e $n = 2$, respectivamente. A figura 3.3 mostra o comportamento da densidade

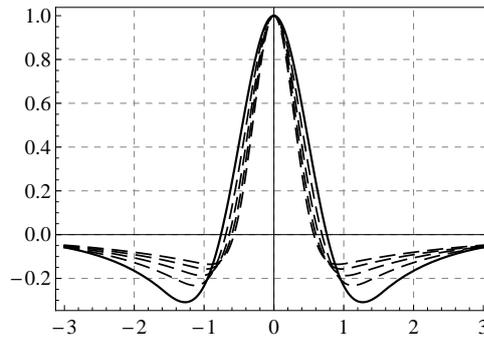


Figura 3.8: Perfil da densidade de energia para $n=1$ (linha contínua) e para $n=2, 3, 4, 5$ (linha tracejada).

de energia para alguns valores de n . Mais uma vez podemos mostrar que para qualquer n teremos $E = 0$.

Efetuando a mudança de variável (3.86) podemos novamente reconstruir o potencial tipo-Schrödinger (3.87), mas agora utilizando o superpotencial (3.89). A figura 3.3 mostra este comportamento para alguns valores de n .

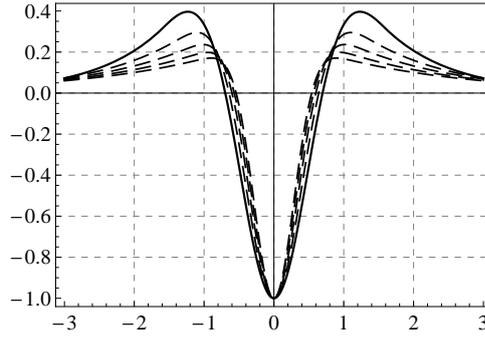


Figura 3.9: Perfil do potencial quântico (3.87) para o modelo dado pelo superpotencial (3.89). A linha contínua foi traçada para $n = 1$ enquanto as linhas tracejadas foram traçadas com $n = 2, 3, 4, 5$.

3.4 Aplicação 3: Modelos de dois campos

Vamos agora considerar novamente o modelo descrito pela lagrangiana (3.74), mas para dois campos escalares reais. Assim como foi feito para o caso em quatro dimensões, sem gravidade, na seção 2.2.3, iremos requerer, por simplicidade, que o invariante X não tenha termos cruzados nas derivadas dos campos, tais como, $\phi'_1 \phi'_2$. Desconsiderando qualquer produto das derivadas dos campos, podemos escrever o invariante X estático na forma:

$$X = -\frac{1}{2}\phi'^2 - \frac{1}{2}\chi'^2, \quad (3.94)$$

onde assumimos que $\phi_1 = \phi$ e $\phi_2 = \chi$. Usando a equação (3.25b) obtemos, da mesma forma que na seção 2.2.3 (Equações (2.75)), as seguintes relações entre os campos e o superpotencial,

$$\begin{cases} \phi'(\phi'^2 + \chi'^2)^{n-1} = \frac{1}{2}W_\phi(\phi, \chi) \\ \chi'(\phi'^2 + \chi'^2)^{n-1} = \frac{1}{2}W_\chi(\phi, \chi) \end{cases} \Rightarrow \phi'^2 + \chi'^2 = \left(\frac{1}{4}W_\phi^2 + \frac{1}{4}W_\chi^2 \right)^{\frac{1}{2n-1}}. \quad (3.95)$$

Com isso, podemos desacoplar as equações para a derivada dos campos ϕ' e χ' , e obter que

$$\phi' = \frac{1}{2}W_\phi \left(\frac{1}{4}W_\phi^2 + \frac{1}{4}W_\chi^2 \right)^{-\frac{n-1}{2n-1}}, \quad (3.96a)$$

$$\chi' = \frac{1}{2}W_\chi \left(\frac{1}{4}W_\phi^2 + \frac{1}{4}W_\chi^2 \right)^{-\frac{n-1}{2n-1}}. \quad (3.96b)$$

Além disso, a relação (3.95) permite escrever o potencial como:

$$V(\phi, \chi) = \frac{2n-1}{2n} \left(\frac{1}{4}W_\phi^2 + \frac{1}{4}W_\chi^2 \right)^{\frac{n}{2n-1}} - \frac{1}{3}W^2. \quad (3.97)$$

Neste modelo iremos assumir que o *warp function* $\mathcal{A}(y)$ possa ser escrito como uma função dos campos na forma $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\phi, \chi)$. Para isso devemos usar a equação (3.24) juntamente com as equações (3.96) para obter que:

$$\mathcal{A}_\phi W_\phi + \mathcal{A}_\chi W_\chi = -\frac{2}{3}W \left(\frac{1}{4}W_\phi^2 + \frac{1}{4}W_\chi^2 \right)^{\frac{n-1}{2n-1}}. \quad (3.98)$$

Além disso, podemos usar as equações (3.96) para obter a equação das orbitas na forma:

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{W_\phi}{W_\chi}. \quad (3.99)$$

Para resolver este problema, vamos novamente considerar o superpotencial BNRT (2.79), isto é:

$$W(\phi, \chi) = 2\phi - \frac{2}{3}\phi^3 - 2r\phi\chi^2. \quad (3.100)$$

Isso faz com que o potencial (3.97) tenha a forma:

$$V(\phi, \chi) = \frac{2n-1}{2n} \left[(1-\phi^2-r\chi^2)^2 + 4r^2\phi^2\chi^2 \right]^{\frac{n}{2n-1}} - \frac{4}{3}\phi^2 \left(1 - \frac{1}{3}\phi^2 - r\chi^2 \right)^2. \quad (3.101)$$

Este potencial permite quatro estados de mínimo para $r > 0$, são eles: $v^\pm = (\pm 1, 0)$ e $u^\pm = (0, \pm 1/\sqrt{r})$, onde $V(v^\pm) = -16/27$ e $V(u^\pm) = 0$.

Além disso, as equações (3.96) podem ser escritas como:

$$\phi' = \frac{1-\phi^2-r\chi^2}{\left[(1-\phi^2-r\chi^2)^2 + 4r^2\phi^2\chi^2 \right]^{\frac{n-1}{2n-1}}}, \quad (3.102a)$$

$$\chi' = -\frac{2r\phi\chi}{\left[(1-\phi^2-r\chi^2)^2 + 4r^2\phi^2\chi^2 \right]^{\frac{n-1}{2n-1}}}. \quad (3.102b)$$

Com isso, podemos obter a equação da orbita (3.99) na seguinte forma:

$$\frac{d\phi}{d\chi} = -\frac{1-\phi^2-r\chi^2}{2r\phi\chi},$$

cuja solução geral foi encontrada nos capítulos anteriores como:

$$\phi^2 = 1 + \frac{r}{2r-1}\chi^2 + c\chi^{1/r}. \quad (3.103)$$

Cada órbita leva a um par de soluções $\phi(y)$ e $\chi(y)$ e, conseqüentemente, um diferente $A(y)$ é obtido caso a caso.

Para ilustrar, vamos novamente considerar as orbitas linha reta e elíptica. Ambas as

órbitas conectam dois mínimos v_1 a v_3 do potencial. Para a órbita linha reta, a equação (3.102a) é escrita como:

$$\phi' = (1 - \phi^2)^{\frac{1}{2n-1}}, \quad (3.104)$$

que tem solução dada por

$$\phi_r(y) \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2n-1}; \frac{3}{2}; \phi_r(y)^2\right) = y. \quad (3.105)$$

Com esta solução podemos obter o *warp factor* como:

$$\mathcal{A}(\phi_r) = \frac{(2n-1)(1-\phi_r^2)^{\frac{2n-2}{2n-1}}}{9(n-1)(4n-3)} \left[5n-4 - (n-1)\phi_r^2 \right] - \frac{(2n-1)(5n-4)}{9(3-7n+4n^2)}, \quad (3.106)$$

onde ϕ_r é a solução da equação transcendental (3.105).

Um interessante caso ocorre quando $n = 3/2$, onde obtemos uma solução *kink* compacta na forma:

$$\phi(y) = \begin{cases} \sin(y) & \text{para } |y| \leq \pi/2, \\ \text{sgn}(y) & \text{para } |y| > \pi/2, \end{cases}$$

que já foi estudado anteriormente, mas agora com *warp factor* dado por:

$$\mathcal{A}(y) = \begin{cases} -\frac{2}{27} \left[7 - (7 - \sin^2(y)) |\cos(y)| \right] & \text{para } |y| \leq \pi/2, \\ -\frac{14}{27}|y| - \frac{7}{27}(2 - \pi) & \text{para } |y| > \pi/2. \end{cases}$$

A segunda órbita é elíptica e pode ser obtido se fizermos $c=0$ em (3.103). Neste caso obtemos

$$\phi^2 = 1 + \frac{r}{2r-1} \chi^2, \quad (3.107)$$

para $0 < r < 1/2$. Substituindo o campo χ obtido em (3.107) na equação (3.102a), obtemos

$$\phi' = \frac{[2r(1-\phi^2)]^{\frac{n}{2n-1}}}{[2r-2(3r-1)\phi^2]^{\frac{n-1}{2n-1}}}.$$

Vemos que a solução depende de r . Para simplificar, nós escolhemos o caso $r = 1/3$, com isso, a equação acima torna-se:

$$\phi' = (2/3)^{\frac{1}{2n-1}} (1 - \phi^2)^{\frac{n}{2n-1}}. \quad (3.108)$$

A solução desta equação pode ser dada por:

$$\phi_e(y) \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2n-1}; \frac{3}{2}; \phi_e(y)^2\right) = (2/3)^{\frac{1}{2n-1}} y, \quad (3.109)$$

Com isso, podemos obter o *warp factor* como uma função do campo ϕ na forma:

$$A(\phi_e) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4n-3}{2n-1}} \phi_e \left(\frac{\phi_e^2 - \phi_e - 1}{1 + \phi_e - 2\phi_e^2}\right) \left(1 + 2\phi_e - 2\phi_e^2 - 6\phi_e^3 + 5\phi_e^4\right)^{\frac{n-1}{2n-1}}, \quad (3.110)$$

com $\phi_e(y)$ sendo a solução da equação (3.109).

O perfil das soluções $\phi(y)$ e $\chi(y)$ para as orbitas linha reta e elíptica são mostradas na figura 3.10a para $n = 2$. A orbita linha reta está representada pela linha contínua, enquanto que a orbita elíptica pela linha tracejada. No gráfico usamos que $L_r \approx 1.293$ e $L_e \approx 2.408$. Na figura 3.10b, mostramos o perfil do *warp factor* para as duas soluções, obedecendo as órbitas elípticas e retas.

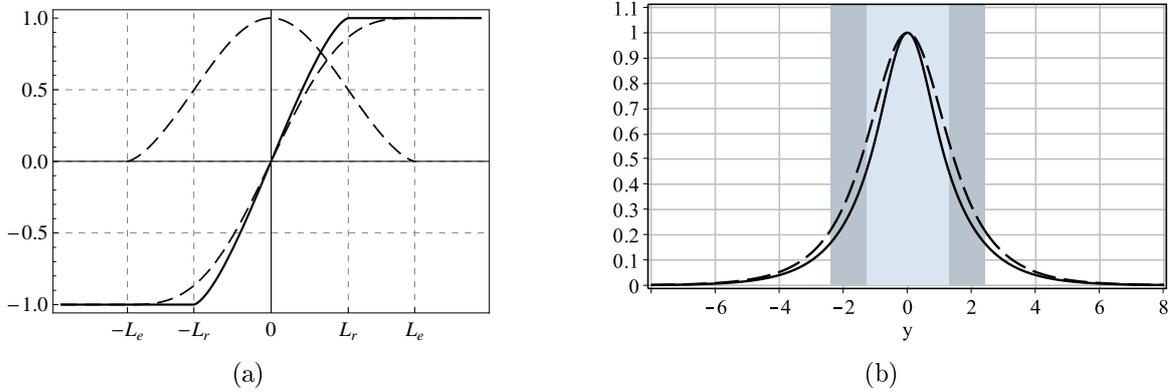


Figura 3.10: (a) Perfil das soluções $\phi(y)$ e $\chi(y)$ que obedecem às equações (3.109) e (3.107) para $n = 2$. A orbita linha reta está representada pela linha contínua e a órbita elíptica pelas linhas tracejadas. (b) Perfil do *warp factor*, no caso da órbita linha reta (linhas contínua) e da órbita elíptica (linhas tracejadas). Na figura da direita a região sombreada indica que os campos escalares não são constantes.

3.5 Modelos de brana Gêmeos

Para concluir este capítulo vamos seguir o que foi feito na seção 2.3 para estudar modelos gêmeos em teorias de mundo brana. No entanto, diferente do que foi feito lá, a teoria de partida será a teoria com dinâmica generalizada representada pela densidade lagrangiana (3.74). Para começar vamos usar as equações (3.75a) e (3.75b) para escrever a densidade de energia na forma:

$$\rho(y) = e^{2A} \left[\left(\frac{1}{2}W_\phi\right)^{\frac{2n}{2n-1}} - \frac{1}{3}W^2(\phi) \right]. \quad (3.111)$$

Vamos agora considerar uma nova teoria de um único campo governada pela seguinte densidade lagrangiana,

$$\mathcal{L} = -\hat{V}(\phi)F(Y) + g(\phi), \quad (3.112)$$

onde $g(\phi)$ é uma função a ser determinada e $\hat{V}(\phi)$ é o potencial da nova teoria que está relacionado ao potencial da teoria de partida $V(\phi)$ na forma:

$$\hat{V}(\phi) = V(\phi) + W^2/3. \quad (3.113)$$

Além disso, F é uma função geral do invariante Y definido como:

$$Y = -\frac{1}{n} \frac{X|2X|^{n-1}}{\hat{V}(\phi)},$$

que para campos estáticos, torna-se:

$$Y = \frac{1}{2n} \frac{\phi'^{2n}}{\hat{V}(\phi)}. \quad (3.114)$$

Vamos agora obter as equações de Einstein para a densidade lagrangiana (3.112). Das equações (3.23a) e (3.23b), obtemos, respectivamente, que:

$$\phi' = \left(\frac{W_\phi}{2F_Y} \right)^{\frac{1}{2n-1}}, \quad (3.115a)$$

$$F_Y \phi'^{2n} = \frac{1}{3} W^2 - g(\phi) + \hat{V} F. \quad (3.115b)$$

Além disso, a densidade de energia pode ser escrita como:

$$\rho(y) = e^{2\mathcal{A}} \left[\left(\frac{W_\phi}{2F_Y} \right)^{\frac{2n}{2n-1}} - \frac{1}{3} W^2(\phi) \right], \quad (3.116)$$

Por outro lado, podemos usar a relação (3.114) para escrever a equação (3.115b) como:

$$2nY F_Y - F = \frac{W^2/3 - g(\phi)}{\hat{V}}. \quad (3.117)$$

Note que o lado esquerdo desta equação depende apenas do invariante Y , enquanto que o lado direito é uma função do campo ϕ . Isso nos permite executar um procedimento semelhante ao que foi feito no capítulo anterior quando estudamos modelos gêmeos (veja equação (2.96)), isto é, iremos definir uma função $G^{-1}(Y) = 2nY F_Y - F$, tal que,

$$Y = G\left(2nY F_Y - F\right) = G\left(\frac{W^2/3 - g(\phi)}{\hat{V}}\right). \quad (3.118)$$

Assim, impondo que $g(\phi) = W^2/3$, obteremos que $Y = G(0)$. Com isso, sem perda de generalidade, podemos assumir que $G(0) = c$, onde c é uma constante real, logo, da relação (3.118), Y também será uma constante.

Comparando a equação (3.115a) com (3.75a) vemos que a primeira restrição que a

função $F(Y)$ deve obedecer para obtermos teorias gêmeas é:

$$F_Y = 1. \quad (3.119)$$

Essa restrição, juntamente com a escolha da função $g(\phi)$, permite escrever a equação (3.117) como:

$$F(Y) = 2nY. \quad (3.120)$$

Além disso, o potencial $\hat{V}(\phi)$ pode ser obtido da equação (3.115b) na forma:

$$\hat{V}(\phi) = \frac{1}{F} \left(\frac{W_\phi}{2} \right)^{\frac{2n}{2n-1}},$$

onde usamos novamente que $F_Y = 1$. Por outro lado, assumirmos a equação (3.113), encontramos que,

$$V(\phi) = \frac{1}{F} \left(\frac{W_\phi}{2} \right)^{\frac{2n}{2n-1}} - \frac{1}{3} W^2. \quad (3.121)$$

Comparando a equação (3.75b) com (3.121) obtemos uma nova condição sobre a função F . Para que a teoria (3.112) seja gêmea da teoria (3.74) devemos assumirmos que

$$F = \frac{2n}{2n-1}. \quad (3.122a)$$

Além disso, pela equação (3.120) devemos também assumir que

$$Y = \frac{1}{2n-1}. \quad (3.122b)$$

Logo, a densidade lagrangiana do modelo da brana gêmeo tem a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = -V(\phi)F(Y) - \frac{1}{3}W^2(\phi)(F(Y) - 1). \quad (3.123)$$

Assim, se as condições (3.122) e (3.119) forem satisfeitas os dois modelos, (3.74) e (3.123), terão a mesma solução, com a mesma densidade de energia sendo assim chamados de modelos gêmeos.

3.5.1 Estabilidade

Para finalizar esta seção vamos investigar a estabilidade linear dos modelos de mundo brana gêmeos. Para isso, iremos escrever a perturbação na métrica (3.26) e no campo

escalar, respectivamente, como:

$$ds_5^2 = e^{2\mathcal{A}(y)} [\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(y, x)] dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (3.124)$$

$$\bar{\phi}(y, x) = \phi(y) + \xi(y, x). \quad (3.125)$$

Com isso, para a teoria de partida, (3.74), podemos escrever a equação de movimento (3.36) para a perturbação ξ na forma:

$$\begin{aligned} & e^{-2\mathcal{A}} \left(\frac{1}{2} W_\phi \right)^{\frac{2n-2}{2n-1}} \square^{(4)} \xi - (2n-1) \left[\left(\frac{1}{2} W_\phi \right)^{\frac{2n-2}{2n-1}} \xi' \right]' + \frac{4(2n-1)}{3} W \left(\frac{1}{2} W_\phi \right)^{\frac{2n-2}{2n-1}} \xi' + \\ & + \left[\frac{1}{2} W_{\phi\phi\phi} \left(\frac{1}{2} W_\phi \right)^{\frac{1}{2n-1}} + \frac{1}{4} \frac{W_{\phi\phi}^2}{2n-1} \left(\frac{1}{2} W_\phi \right)^{-\frac{2n-2}{2n-1}} - \frac{2}{3} W_\phi^2 - \frac{2}{3} W W_{\phi\phi} \right] \xi = \frac{1}{4} W_\phi h'. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Além disso, as contribuições de primeira ordem para as componentes da equação de Einstein, são:

$$\begin{aligned} & \left(h''_{\mu\nu} - \frac{4}{3} W h'_{\mu\nu} - e^{-2\mathcal{A}} \square^{(4)} h_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{3} W \eta_{\mu\nu} h' + e^{-2\mathcal{A}} \left(\partial_\mu \partial^\alpha h_{\nu\alpha} + \partial_\nu \partial^\alpha h_{\mu\alpha} - \partial_\mu \partial_\nu h \right) \\ & = \frac{8}{3} \eta_{\mu\nu} W_\phi \left[\frac{(n-1)}{2} \xi' - \frac{1}{4} W_{\phi\phi} \left(\frac{1}{2} W_\phi \right)^{-\frac{2n-2}{2n-1}} \xi + \frac{2}{3} W \xi \right], \end{aligned} \quad (3.127a)$$

$$\frac{1}{2} \left(\partial^\alpha h'_{\mu\alpha} - \partial_\mu h' \right) = W_\phi \partial_\mu \xi, \quad (3.127b)$$

$$-\frac{1}{2} \left(h'' - \frac{2}{3} W h' \right) = \frac{2}{3} W_{\phi\phi} \left(\frac{1}{2} W_\phi \right)^{\frac{1}{2n-1}} \xi - \frac{8}{9} W W_\phi \xi + \frac{(4n+2)}{3} W_\phi \xi'. \quad (3.127c)$$

Por outro lado, para o modelo gêmeo (3.123), a equação de movimento para a perturbação e as contribuições em primeira ordem para as componentes da equação de Einstein podem ser escritas, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} & e^{-2\mathcal{A}} \left(\frac{W_\phi}{2} \right)^{\frac{2n-2}{2n-1}} \square^{(4)} \xi - \left(2n-1 + \frac{2n}{2n-1} F_{YY} \right) \left[\left(\frac{W_\phi}{2} \right)^{\frac{2n-2}{2n-1}} \xi' \right]' + \\ & + \frac{4}{3} W \left(2n-1 + \frac{2n}{2n-1} F_{YY} \right) \left(\frac{W_\phi}{2} \right)^{\frac{2n-2}{2n-1}} \xi' + \frac{F_{YY}}{2n-1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{V}_\phi}{\hat{V}} W_\phi \right)' + \frac{2}{3} \frac{\hat{V}_\phi}{\hat{V}} W W_\phi \right] \xi + \\ & + \left[\frac{1}{2} W_{\phi\phi\phi} \left(\frac{1}{2} W_\phi \right)^{\frac{1}{2n-1}} + \frac{1}{4} \frac{W_{\phi\phi}^2}{2n-1} \left(\frac{1}{2} W_\phi \right)^{-\frac{2n-2}{2n-1}} + Y^2 F_{YY} \frac{\hat{V}_\phi}{\hat{V}} - \right. \\ & \left. \frac{2}{3} W_\phi^2 - \frac{2}{3} W W_{\phi\phi} \right] \xi = \frac{1}{4} W_\phi h'. \end{aligned} \quad (3.128)$$

e

$$\begin{aligned} & \left(h''_{\mu\nu} - \frac{4}{3} W h'_{\mu\nu} - e^{-2A} \square^{(4)} h_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{3} W \eta_{\mu\nu} h' + e^{-2A} \left(\partial_\mu \partial^\alpha h_{\nu\alpha} + \partial_\nu \partial^\alpha h_{\mu\alpha} - \partial_\mu \partial_\nu h \right) \\ & = \frac{8}{3} \eta_{\mu\nu} W_\phi \left[\frac{1}{2} \left(n - 1 + \frac{n F_{YY}}{2n - 1} \right) \xi' - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2n F_{YY}}{(2n - 1)^2} \right) W_{\phi\phi} \left(\frac{1}{2} W_\phi \right)^{-\frac{2n-2}{2n-1}} \xi + \frac{2}{3} W \xi \right], \end{aligned} \quad (3.129a)$$

$$\frac{1}{2} \left(\partial^\alpha h'_{\mu\alpha} - \partial_\mu h' \right) = W_\phi \partial_\mu \xi, \quad (3.129b)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left(h'' - \frac{2}{3} W h' \right) & = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2n F_{YY}}{(2n - 1)^2} \right) W_{\phi\phi} \left(\frac{1}{2} W_\phi \right)^{\frac{1}{2n-1}} \xi - \frac{8}{9} W W_\phi \xi + \\ & + \frac{1}{3} \left(4n + 2 + \frac{2n F_{YY}}{2n - 1} \right) W_\phi \xi'. \end{aligned} \quad (3.129c)$$

Onde usamos as restrições (3.119) e (3.122). Podemos assim notar que os modelos gêmeos terão o mesmo espectro perturbativo apenas se,

$$F_{YY} = 0. \quad (3.130)$$

Se esta restrição for satisfeita o conjunto de equações que governam a estabilidade do setor gravitacional do modelo gêmeo são equivalente às do modelo de partida.

Como sabemos, o estudo de estabilidade não é uma tarefa trivial, no entanto, podemos assegurar aqui que, utilizando-se das três condições (3.119), (3.122a) e (3.122b), juntamente com a condição forte (3.130), a estabilidade linear dos dois modelos serão idênticas. Portanto, se conhecermos o comportamento da estabilidade do setor gravitacional da teoria de partida conheceremos com exatidão qual o comportamento da estabilidade do modelo gêmeo generalizado.

No próximo capítulo faremos outra generalização a teorias de mundo brana. Seguiremos a linha das chamadas teorias $F(R)$ e generalizaremos a densidade lagrangiana através de uma função geral do escalar de curvatura R .

Capítulo 4

MUNDO BRANA II: teorias $F(R)$

É de nosso conhecimento que o universo passa por uma fase de expansão acelerada [1, 2]. No entanto, até o momento, nenhuma explicação satisfatória para este fenômeno foi encontrada. Muitas propostas estão sendo apresentadas como possíveis fontes para esta aceleração, entre elas podemos destacar a energia escura e as teorias alternativas da gravitação, como as teorias $F(R)$. As teorias $F(R)$ são teorias alternativas à Relatividade Geral de Einstein que não fazem menção à fontes de energia desconhecidas e tentam explicar o presente cenário de expansão acelerada do Universo. Essas teorias surgem de uma substituição do escalar de curvatura na ação de Einstein-Hilbert por uma função arbitrária do mesmo, isto é, $F(R)$.

Neste capítulo iremos apresentar um formalismo geral para se estudar teorias $F(R)$ em modelos de mundo brana. No entanto, diferente do que temos visto nos artigos sobre este tema, iremos partir de uma teoria, não só com a generalização no escalar de curvatura, mas também, com dinâmica generalizada. Além disso, estudaremos a estabilidade como feito em [76] e finalizaremos apresentando alguns modelos com curvatura constante e não constante.

4.1 Formalismo

Começamos com uma ação em $5D$ que descreve um $F(R)$ brana em que a gravidade é acoplado ao campo escalar na forma:

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} F(R) + \mathcal{L}(\phi, X) \right), \quad (4.1)$$

onde \mathcal{L} é a densidade lagrangiana de matéria que depende do campo ϕ e do invariante X . Para o caso onde a brana é plana o elemento de linha é dado por

$$ds^2 = e^{2A}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (4.2)$$

onde como sabemos, e^{2A} é o *warp factor* e $\eta_{\mu\nu}$ representa a métrica 4-dimensional de Minkowski. Além disso, o escalar de curvatura pode ser obtido em termos do *warp function* pela equação (3.17), ou seja,

$$R = 8A'' + 20A'^2. \quad (4.3)$$

A equação de Einstein que surge desta nova conjectura é obtida impondo que a variação da ação (4.1) com respeito à métrica inversa seja nula. Isto é,

$$\frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = 0.$$

No anexo A.4 (Eq. A.23), obtemos a equação de Einstein na forma:

$$F_R R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}F + (g_{ab}\square^{(5)} - \nabla_a \nabla_b) F_R = 2T_{ab}, \quad (4.4)$$

onde T_{ab} é o tensor energia momento,

$$T_{ab} = -g_{ab}\mathcal{L} + \mathcal{L}_X \nabla_a \phi \nabla_b \phi. \quad (4.5)$$

Além disso, obtemos a equação de movimento para o campo escalar como:

$$G^{ab}\nabla_a \nabla_b \phi + 2X\mathcal{L}_{X\phi} - \mathcal{L}_\phi = 0, \quad (4.6)$$

onde

$$G^{ab} = \mathcal{L}_{XX}\nabla^a \phi \nabla^b \phi + g^{ab}\mathcal{L}_X.$$

Como de costume vamos supor que tanto o *warp function*, $\mathcal{A}(y)$, quanto a campo escalar $\phi(y)$ são estáticos, e depende apenas da dimensão extra y . Neste caso, a equação de movimento para o campo escalar assume a forma

$$\left(2X\mathcal{L}_{XX} + \mathcal{L}_X\right)\phi'' - \left(2X\mathcal{L}_{X\phi} + \mathcal{L}_\phi\right) = -4A'\phi'\mathcal{L}_X. \quad (4.7)$$

E as componentes da equação de Einstein (4.4) tornam-se:

$$(\mathcal{A}'' + 4\mathcal{A}'^2)F_R - \frac{1}{2}F - 3\mathcal{A}'F'_R - F''_R = -2\mathcal{L}, \quad (4.8a)$$

$$-4(\mathcal{A}'^2 + \mathcal{A}'')F_R + \frac{1}{2}F + 4\mathcal{A}'F'_R = 2\mathcal{L} - 4X\mathcal{L}_X. \quad (4.8b)$$

Além disso, com algumas manipulações algébricas, podemos escrever as equações (4.8) como:

$$\mathcal{A}''F_R + \frac{1}{3}F''_R - \frac{1}{3}\mathcal{A}'F'_R = \frac{4}{3}X\mathcal{L}_X. \quad (4.8c)$$

que reproduz o caso padrão se $F(R) = R$ e $\mathcal{L} = X - V$.

Podemos também obter a densidade de energia na forma,

$$\rho(y) = -e^{2\mathcal{A}(y)}\mathcal{L}. \quad (4.9)$$

Note que a densidade de energia não depende da função $F(R)$.

4.1.1 Estabilidade

Para analisar a estabilidade vamos seguir o que foi feito em [76] e decompor a perturbações métricas de maneira usual, ou seja,

$$g_{ab} \rightarrow \bar{g}_{ab} = g_{ab} + \pi_{ab}, \quad (4.10)$$

com a métrica em 5 dimensões sendo escrita como:

$$ds_5^2 = e^{2\mathcal{A}(y)}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu - dy^2. \quad (4.11)$$

Além disso, iremos considerar as restrições de gauge transverso e traço nulo sobre a perturbação $h_{\mu\nu}$, bem como as demais restrições dadas pelas equações (3.25).

Fazendo a variação diretamente na equação de Einstein (4.4) obtemos que:

$$\begin{aligned} & (\delta R_{ab})F_R + R_{ab}F_{RR}\delta R - \frac{1}{2}(\delta g_{ab})F - \frac{1}{2}g_{ab}F_R\delta R + \\ & + (\delta g_{ab})\square^{(5)}F_R + g_{ab}\delta(\square^{(5)}F_R) - \delta(\nabla_a\nabla_b F_R) = 2\delta T_{ab}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Porém, usaremos a relação: $\nabla_a\nabla_b F_R = \partial_a\partial_b F_R - \Gamma_{ab}^c(\partial_c F_R)$, para escrever que,

$$\delta(\nabla_a\nabla_b F_R) = \partial_a\partial_b(F_{RR}\delta R) - (\delta\Gamma_{ab}^c)(\partial_c F_R) - \Gamma_{ab}^c\partial_c(F_{RR}\delta R).$$

Além disso, podemos usar a equação (3.32b) para obter a seguinte relação:

$$\delta(\nabla_a \nabla_b F_R) = -e^{2A} \left[\mathcal{A}' h_{ab} + \frac{1}{2} h'_{ab} \right] F'_R + \partial_a \partial_b (F_{RR} \delta R) - \Gamma_{ab}^c \partial_c (F_{RR} \delta R). \quad (4.13)$$

O termo $\delta(\square^{(5)} F_R)$ da equação (4.12) é obtido reescrevendo o laplaciano em quatro dimensões, isto é, $\square^{(5)} F_R = g^{cd} \nabla_c \nabla_d F_R$, de modo que encontramos,

$$\delta(\square^{(5)} F_R) = (\delta g^{cd}) \nabla_c \nabla_d F_R + g^{cd} \delta(\nabla_c \nabla_d F_R).$$

Assim, utilizando a relação (4.13) obtemos que,

$$\delta(\square^{(5)} F_R) = - \left[\mathcal{A}' h + \frac{1}{2} h' \right] F'_R + e^{-2A} \square^{(4)} (F_{RR} \delta R) - (F_{RR} \delta R)'' - 4\mathcal{A}' (F_{RR} \delta R)' \quad (4.14)$$

Com isso, a equação (4.12) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & (\delta R_{ab}) F_R + R_{ab} F_{RR} \delta R - \frac{1}{2} \pi_{ab} F - \frac{1}{2} g_{ab} F_R \delta R - \pi_{ab} (4\mathcal{A}' F'_R + F''_R) + \\ & - g_{ab} \left[\mathcal{A}' h + \frac{1}{2} h' \right] F'_R + e^{-2A} g_{ab} \square^{(4)} (F_{RR} \delta R) - (F_{RR} \delta R)'' - 4g_{ab} \mathcal{A}' (F_{RR} \delta R)' + \\ & + e^{2A} \left[\mathcal{A}' h_{ab} + \frac{1}{2} h'_{ab} \right] F'_R - \partial_a \partial_b (F_{RR} \delta R) + \Gamma_{ab}^c \partial_c (F_{RR} \delta R) = 2\delta T_{ab}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde os termos δR_{ab} e δR são obtidos pelas equações (3.44) e (3.45d), respectivamente.

As flutuações no tensor energia momento já foram obtidas no capítulo anterior pela equação (3.40). Para soluções estáticas temos que

$$\begin{aligned} \delta T_{ab} = & -\pi_{ab} \mathcal{L} - g_{ab} \mathcal{L}_\phi \xi + g_{ab} \mathcal{L}_X \phi' \xi' + (\mathcal{L}_{X\phi} \nabla_a \phi \nabla_b \phi) \xi - \\ & - (\phi' \mathcal{L}_{XX} \nabla_a \phi \nabla_b \phi) \xi' + \mathcal{L}_X \nabla_a \xi \nabla_b \phi + \mathcal{L}_X \nabla_a \phi \nabla_b \xi. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Se $h_{\mu\nu}$ obedece ao gauge (3.25d), verificamos que $\delta R = 0$. Além disso, a componente μ, ν do tensor de Ricci torna-se:

$$\delta R_{\mu\nu} = e^{2A} \left[\frac{1}{2} h''_{\mu\nu} + 2\mathcal{A}' h'_{\mu\nu} + (\mathcal{A}'' + 4\mathcal{A}'^2) h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} e^{-2A} \square^{(4)} h_{\mu\nu} \right]. \quad (4.17)$$

Com isso, podemos escrever a componente $\{\mu, \nu\}$ da equação de Einstein (4.15) como:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} h''_{\mu\nu} + 2\mathcal{A}' h'_{\mu\nu} + (\mathcal{A}'' + 4\mathcal{A}'^2) h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} e^{-2A} \square^{(4)} h_{\mu\nu} \right] F_R - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} F' - \\ & - h_{\mu\nu} F''_R + \left[\frac{1}{2} h'_{\mu\nu} - 3\mathcal{A}' h_{\mu\nu} \right] F'_R = -2h_{\mu\nu} \mathcal{L} - 2\eta_{\mu\nu} (\mathcal{L}_\phi \xi - \mathcal{L}_X \phi' \xi'). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Por outro lado, usando (4.8a) podemos escrever a equação anterior como:

$$\left[\frac{1}{2} h''_{\mu\nu} + 2\mathcal{A}' h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} e^{-2\mathcal{A}} \square^{(4)} h_{\mu\nu} \right] F_R + \frac{1}{2} h'_{\mu\nu} F'_R = -2\eta_{\mu\nu} \left(\mathcal{L}_\phi \xi - \mathcal{L}_X \phi' \xi' \right), \quad (4.19)$$

que contraindo $\eta^{\mu\nu}$ nos permite obter que,

$$\mathcal{L}_\phi \xi - \mathcal{L}_X \phi' \xi' = 0,$$

logo, a equação (4.19) obtêm a seguinte forma:

$$\left[-\partial_y^2 - 4\mathcal{A}' \partial_y + e^{-2\mathcal{A}} \square^{(4)} - \frac{F'_R}{F_R} \partial_y \right] h_{\mu\nu} = 0. \quad (4.20)$$

Percebemos que quando assumimos o gauge transversal de traço nulo podemos desacoplar a perturbação do campo escalar da perturbação métrica na equação (4.18). A equação (4.20) pode ser reescrita se assumirmos a seguinte mudança de variável,

$$dz = e^{-\mathcal{A}} dy. \quad (4.21)$$

Isso faz com que a métrica seja conformalmente plana. Com isso, a equação (4.20) torna-se:

$$\left[-\partial_z^2 - \left(3\mathcal{A}_z + (\ln F_R)_z \right) \partial_z + \square^{(4)} \right] h_{\mu\nu} = 0. \quad (4.22)$$

Por outro lado, podemos considerar, por simplicidade, que $h_{\mu\nu}$ seja escrito na forma:

$$h_{\mu\nu}(x, z) = e^{-3\mathcal{A}/2} F_R^{-1/2} \tilde{G}_{\mu\nu}(x) H(z), \quad (4.23)$$

onde $G_{\mu\nu}(x)$ satisfaz a equação de Klein-Gordon e quatro dimensões $\square^{(4)} G_{\mu\nu}(x) = -m^2 G_{\mu\nu}(x)$. Disso podemos escrever (4.22) como uma equação tipo-Schrödinger,

$$\left[-\partial_z^2 + U(z) \right] H(z) = m^2 H(z), \quad (4.24)$$

onde o potencial quântico análogo é,

$$U(z) = \frac{9}{4} \mathcal{A}_z^2 + \frac{3}{2} \mathcal{A}_{zz} + \frac{3}{2} \mathcal{A}_z \frac{d(\ln F_R)}{dz} - \frac{1}{4} \left[\frac{d(\ln F_R)}{dz} \right]^2 + \frac{1}{2F_R} \frac{d^2 F_R}{dz^2}. \quad (4.25)$$

Para ser mais explícito, também se pode fatorar a equação tipo-Schrödinger (4.23) da forma:

$$\mathcal{Q}\mathcal{Q}^\dagger = \left[\left(-\partial_z + \frac{3}{2} \mathcal{A}_z + \frac{1}{2} \frac{d(\ln F_R)}{dz} \right) \left(\partial_z + \frac{3}{2} \mathcal{A}_z + \frac{1}{2} \frac{d(\ln F_R)}{dz} \right) \right] H(z) = m^2 H(z), \quad (4.26)$$

o que indica que não há nenhum modo gravitacional com $m^2 < 0$. Assim, qualquer solução do sistema de equações (4.8a) e (4.8b) é estável sob as perturbações tensoriais. O modo zero (se existir) toma a forma,

$$H_0(z) = N_0 e^{3\mathcal{A}/2} F_R^{1/2}, \quad (4.27)$$

onde N_0 é uma constante de normalização. Todos os resultados obtidos aqui são reduzidos aos resultados obtidos no capítulo anterior para $F(R) = R$. Vemos que para uma forma arbitrária de $F(R)$, se o escalar de curvatura não é constante, a equação para $h_{\mu\nu}$ é largamente diferente do caso com $F(R)$ padrão.

4.2 Dinâmica padrão com curvatura constante

O modelo mais simples que podemos discutir ocorre quando assumimos a lagrangiana com dinâmica padrão dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ab} \nabla^a \phi \nabla^b \phi - V(\phi). \quad (4.28)$$

Com isso, podemos escrever a equação de movimento (4.7) e as componentes da equação de Einstein, (4.8), respectivamente, como:

$$\phi'' + 4\mathcal{A}'\phi' = V_\phi. \quad (4.29)$$

e

$$\phi'^2 = -\frac{3}{2}\mathcal{A}''F_R - \frac{1}{2}F_R'' + \frac{1}{2}\mathcal{A}'F_R', \quad (4.30a)$$

$$V(\phi(y)) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\mathcal{A}'' + 4\mathcal{A}'^2\right)F_R - \frac{1}{4}F - \frac{7}{4}\mathcal{A}'F_R' - \frac{1}{4}F_R'', \quad (4.30b)$$

Em [77, 79] foi demonstrado que se a curvatura escalar é constante é possível obter soluções analíticas para as equações de campo (4.30). Especialmente em [77] os autores mostraram que se $R' = 0$ podemos resolver diretamente a equação (4.3) para obtemos que

$$e^{2\mathcal{A}} = \begin{cases} \left(\frac{5}{2}ky\right)^{4/5} & \text{para } R = 0, \\ \cos^{4/5}\left(\frac{5}{2}ky\right) & \text{para } R = -20k^2 < 0, \\ \cosh^{4/5}\left(\frac{5}{2}ky\right) & \text{para } R = 20k^2 > 0. \end{cases} \quad (4.31)$$

O caso especial onde a curvatura é constante não têm mostrado grande relevância, pois, apesar de obtermos soluções tipo defeitos topológicos, o *warp factor* é uma função di-

vergente para qualquer uma das três escolhas do escalar de curvatura na equação (4.31). Portanto, iremos discutir mais a fundo apenas o caso onde a curvatura é não constante, o que será feito na próxima seção.

4.3 Dinâmica padrão com curvatura não constante

Nesta seção assumimos que a curvatura escalar é uma função geral da dimensão extra y , na forma $R=R(y)$. Com isso, a equação (4.30a) pode ser reescrita como:

$$\phi'^2 = -\frac{3}{2}\mathcal{A}''F_R + \frac{1}{2}(\mathcal{A}'R' - R'')F_{RR} - \frac{1}{2}R'^2F_{RRR}, \quad (4.32a)$$

e o potencial (4.30b) como:

$$V(\phi(y)) = -\frac{1}{4}F + \left(\frac{5}{4}\mathcal{A}'' + 2\mathcal{A}'^2\right)F_R - \left(\frac{7}{4}\mathcal{A}'R' + \frac{1}{4}R''\right)F_{RR} - \frac{1}{4}R'^2F_{RRR}. \quad (4.32b)$$

Por outro lado, usando o escalar de curvatura em termos do *warp factor* (4.3), podemos reescrever as equações (4.32), respectivamente, como:

$$\phi'^2 = -\frac{3}{2}\mathcal{A}''F_R + 20\left(\mathcal{A}'^2\mathcal{A}'' - \mathcal{A}''^2 - \frac{4}{5}\mathcal{A}'\mathcal{A}''' - \frac{1}{5}\mathcal{A}''''\right)F_{RR} - 32\left(5\mathcal{A}'\mathcal{A}'' + \mathcal{A}'''\right)^2F_{RRR}, \quad (4.33a)$$

e

$$V(\phi(y)) = -\frac{1}{4}F(R) + \left(\frac{5}{4}\mathcal{A}'' + 2\mathcal{A}'^2\right)F_R - 2\left(35\mathcal{A}'^2\mathcal{A}'' + 12\mathcal{A}'\mathcal{A}''' + 5\mathcal{A}''^2 + \mathcal{A}''''\right)F_{RR} - 16\left(5\mathcal{A}'\mathcal{A}'' + \mathcal{A}'''\right)^2F_{RRR}. \quad (4.33b)$$

Para estudar a estabilidade iremos usar a transformação conforme (4.21) para escrever o escalar de curvatura na forma:

$$R = 4e^{-2A}\left(2\mathcal{A}_{zz} + 3\mathcal{A}_z^2\right). \quad (4.34)$$

Com isso, o potencial quântico (4.25) torna-se:

$$U(z) = \frac{9}{4}\mathcal{A}_z^2 + \frac{3}{2}\mathcal{A}_{zz} - 16e^{-4A}\left(3\mathcal{A}_z^3 - \mathcal{A}_z\mathcal{A}_{zz} - \mathcal{A}_{zzz}\right)^2\left[\left(\frac{F_{RR}}{F_R}\right)^2 - 2\frac{F_{RRR}}{F_R}\right] - 4e^{-2A}\left(3\mathcal{A}_z^4 + 8\mathcal{A}_z^2\mathcal{A}_{zz} - \mathcal{A}_{zz}^2 - 2\mathcal{A}_z\mathcal{A}_{zzz} - \mathcal{A}_{zzzz}\right)\frac{F_{RR}}{F_R}. \quad (4.35)$$

Para prosseguir seguiremos [79], e escolheremos uma função polinomial para F na

forma:

$$F(R) = R + \alpha R^2, \quad (4.36)$$

onde α é um número real. Iremos investigar dois casos: o primeiro para α sendo um número real qualquer, e o segundo para α pequeno, onde faremos uma análise perturbativa. Para o caso geral, podemos escrever as equações (4.33) como:

$$\phi'^2 = -\frac{3}{2}\mathcal{A}'' - 4\alpha\left(5\mathcal{A}'^2\mathcal{A}'' + 16\mathcal{A}''^2 + 8\mathcal{A}'\mathcal{A}''' + 2\mathcal{A}''''\right), \quad (4.37a)$$

$$V(\phi(y)) = -3\mathcal{A}'^2 - \frac{3}{4}\mathcal{A}'' - 2\alpha\left(10\mathcal{A}'^4 + 69\mathcal{A}'^2\mathcal{A}'' + 24\mathcal{A}'\mathcal{A}''' + 8\mathcal{A}''^2 + 2\mathcal{A}''''\right). \quad (4.37b)$$

Podemos também obter a densidade de energia em termos do *warp factor* na forma:

$$\rho(y) = \rho_0(y) - 4\alpha \frac{d}{dy} \left[e^{2\mathcal{A}} \left(\frac{13}{3}\mathcal{A}'^3 + 12\mathcal{A}'\mathcal{A}'' + 2\mathcal{A}''' \right) \right] + \frac{44\alpha}{3} e^{2\mathcal{A}} \mathcal{A}'^4, \quad (4.38)$$

onde $\rho_0(y)$ é dado por (3.20). A energia da brana é calculado fazendo $E = \int \rho(y) dy$. Para o caso $\alpha \neq 0$ os dois primeiros termos da equação (4.38) são termos de superfície e não contribuem para a energia, então obtemos a energia da simplesmente por

$$E = \frac{44\alpha}{3} \int dy e^{2\mathcal{A}} \mathcal{A}'^4. \quad (4.39)$$

Vemos que a brana tem energia negativa para $\alpha < 0$ e energia positiva para $\alpha > 0$.

Por fim, podemos expressar o potencial quântico (4.35) como:

$$U(z) = \frac{9}{4}\mathcal{A}_z^2 + \frac{3}{2}\mathcal{A}_{zz} - 64\alpha^2 \left[\frac{3\mathcal{A}_z^3 - \mathcal{A}_z\mathcal{A}_{zz} - \mathcal{A}_{zzz}}{e^{2\mathcal{A}} + 8\alpha(2\mathcal{A}_{zz} + 3\mathcal{A}_z^2)} \right]^2 - 8\alpha \left[\frac{3\mathcal{A}_z^4 + 8\mathcal{A}_z^2\mathcal{A}_{zz} - \mathcal{A}_{zz}^2 - 2\mathcal{A}_z\mathcal{A}_{zzz} - \mathcal{A}_{zzzz}}{e^{2\mathcal{A}} + 8\alpha(2\mathcal{A}_{zz} + 3\mathcal{A}_z^2)} \right]. \quad (4.40)$$

Vamos agora abordar alguns modelos específicos. Começando com um modelo que permite resultados exatos.

4.3.1 Procedimento exato

Resultados analíticos podem ser obtidos se escolhermos um *warp factor*, $\mathcal{A}(y)$, definir na forma:

$$\mathcal{A}(y) = B \ln \left(\operatorname{sech}(ky) \right), \quad (4.41)$$

onde B e k são parâmetros positivos. Isto permite escrever o escalar de curvatura (4.3) como:

$$R(y) = 20B^2k^2 \left(1 - \frac{5B+2}{5B} \operatorname{sech}^2(ky) \right). \quad (4.42)$$

O escalar de curvatura é mostrado na figura 4.1. Vemos que o escalar de curvatura torna-se constante no limite onde $x \rightarrow \pm\infty$ ($R \rightarrow 20B^2k^2$), o que representa o caso com R positivo em (4.31), no entanto, na região em torno da origem o escalar de curvatura muda bruscamente, tendo, em $x=0$, um valor de mínimo igual a $R(0) = -8Bk^2$.

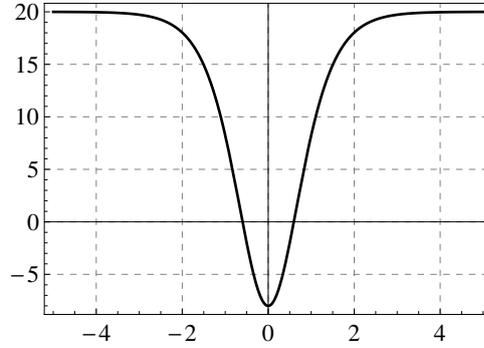


Figura 4.1: Escalar de curvatura (4.42) plotado para $k=1$ e $B=1$.

Com o *warp factor* (4.41) podemos escrever as relações (4.37), como:

$$\frac{\phi'^2}{Bk^2} = \frac{3}{2}S^2 + 4\alpha k^2 S^2 \left[5B^2 + 16B + 8 - (5B^2 + 32B + 12)S^2 \right], \quad (4.43a)$$

$$\begin{aligned} \frac{V(\phi(y))}{Bk^2} = & -3B - 20\alpha k^2 B^3 + \frac{3}{4}(1 + 4B)S^2 + 2\alpha k^2 S^2 \left[20B^3 + 69B^2 + 48B + 8 - \right. \\ & \left. - (10B^3 + 69B^2 + 56B + 12) S^2 \right], \end{aligned} \quad (4.43b)$$

onde $S = \text{sech}(ky)$. No caso geral, os valores assintóticos do potencial e de sua derivada tornam-se, respectivamente,

$$V(\phi(y \rightarrow \pm\infty)) \rightarrow -3B^2k^2 \left(1 + \frac{20}{3}\alpha B^2k^2 \right) \quad \text{e} \quad V_\phi(\phi(y \rightarrow \pm\infty)) \rightarrow 0. \quad (4.44)$$

A equação (4.43a) nos possibilita encontrar uma faixa de valores permitidos para a constante α , se queremos que $\phi'^2 > 0$, devemos assumir que,

$$\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_3, \quad (4.45)$$

onde $\alpha_1 = -3 [8k^2(8 + 16B + 5B^2)]^{-1}$ e $\alpha_3 = 3 [32k^2(1 + 4B)]^{-1}$.

A densidade de energia é obtida da equação (4.38) e pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{Bk^2} = & \frac{\rho_0(y)}{Bk^2} - 20\alpha k^2 B^3 S^{2B} + 4\alpha k^2 S^{2B+2} \left[10B^3 + 37B^2 + 32B + 8 - \right. \\ & \left. - (5B^3 + 37B^2 + 44B + 12) S^2 \right], \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde $\rho_0(y)$ é definida como:

$$\rho_0(y) = -3B^2k^2S^{2B} + \frac{3}{2}Bk^2(1+2B)S^{2B+2}.$$

Uma característica da densidade de energia (4.46) é a presença de um ponto de inflexão em

$$\alpha_2 = \frac{3+9B}{8k^2(16+60B+49B^2)}, \quad (4.47)$$

neste ponto verifica-se que as soluções da equação (4.43a) começam a sofrer um *split* como será mostrado adiante. Além disso, a densidade de energia se comporta assintoticamente como:

$$\rho(y) = -2^{2B}B^2k^2\left(3+20\alpha k^2B^2\right)e^{-2kBy} + \dots \quad (4.48)$$

A figura 4.2a mostra as regiões permitidas para o parâmetro α com diferentes valores de B e $k=1$. A região cinza claro representa os valores de α no intervalo $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, por outro lado, a região cinza escuro representa os valores de α no intervalo $\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_3$. Nesta figura fizemos a linha contínua para $\alpha=\alpha_1$, a linha tracejada para $\alpha=\alpha_2$ e a linha traço-pontilhada para $\alpha=\alpha_3$. A região cinza escuro representa os valores de α onde a densidade de energia sofre um *split* em $y=0$.

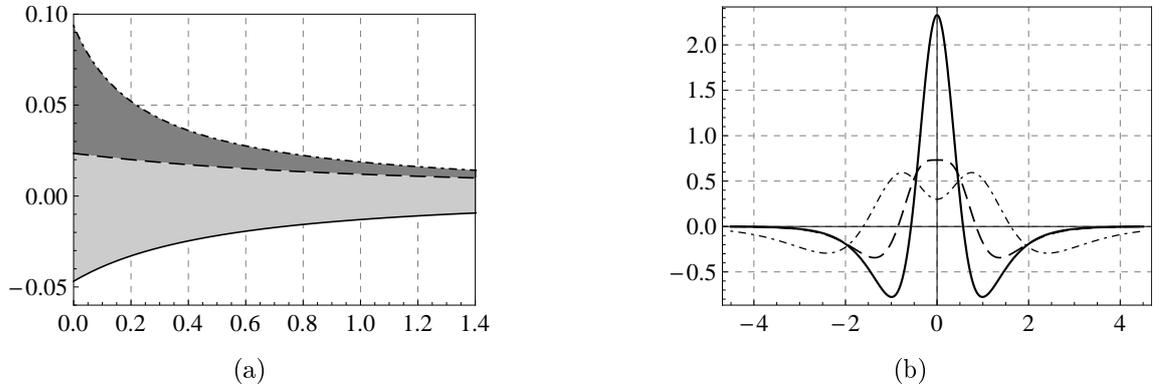


Figura 4.2: (a) Região permitida para α com $k=1$ e $\alpha=\alpha_1$ (linha contínua), $\alpha=\alpha_2$ (linha tracejada) e $\alpha=\alpha_3$ (linha traço-pontilhada). (b) Densidade de energia para $k=1$, $B=1$ e $\alpha=\alpha_1$ (linha contínua), $\alpha=\alpha_2$ (linha tracejada) e $\alpha=\alpha_3$ (linha traço-pontilhada).

A Energia da brana é obtida como:

$$E = 11\alpha k^3 \sqrt{\pi} \frac{B^4 \Gamma(B)}{\Gamma(5/2+B)}. \quad (4.49)$$

Resolvendo a equação (4.43a) podemos encontrar uma função $\phi = f(y)$ que pode ser invertida na forma $y = f^{-1}(\phi)$. Com isso, podemos escrever o potencial na forma usual,

isto é, $V = V(\phi)$. A solução geral da equação (4.43a) é

$$\phi(y) = \frac{\sqrt{6B}}{2} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\alpha_1}} F(ky, P) + \frac{\sqrt{3B}}{2} \left| 1 - \frac{2\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_3} \alpha + \frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1} \cosh(2ky) \right|^{1/2} \tanh(ky), \quad (4.50)$$

onde

$$F(y, P) = - \int_0^y \frac{\sinh^2(x) dx}{\sqrt{P + \sinh^2(x)}} \quad \text{e} \quad P = \frac{\alpha \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_3}{\alpha \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_3}. \quad (4.51)$$

O resultado geral conduz a alguns casos particulares interessantes. O primeiro é o caso limite para $\alpha = \alpha_1$ na equação (4.45), onde obtemos que $P \gg 1$, e assim podemos escrever a solução $\phi(y)$ e o potencial, respectivamente, como:

$$\phi(y) = \sqrt{\frac{3B(6+B)(2+5B)}{16+2B(16+5B)}} \tanh(ky), \quad (4.52a)$$

$$V(\phi) = \frac{3Bk^2}{4} \left[\frac{12+24B+5B^2}{8+16B+5B^2} \right] - k^2(1+2B)\phi^2 + k^2 \frac{(1+2B)(8+16B+5B^2)}{3B(6+B)(2+5B)} \phi^4. \quad (4.52b)$$

Para $\alpha=0$ obtemos o caso padrão com $P=1$. Com isso, podemos escrever que

$$\phi(y) = \sqrt{6B} \arctan \left[\tanh \left(\frac{ky}{2} \right) \right], \quad (4.53a)$$

$$V(\phi) = -3B^2k^2 + \frac{3}{4}Bk^2(1+4B) \cos^2 \left(\sqrt{\frac{2}{3B}} \phi \right), \quad (4.53b)$$

que é o resultado encontrado em [66]. Na sequencia deveríamos obter o caso limite onde $\alpha = \alpha_2$, no entanto, este não permite que a integral em (4.51) seja escrita em termos de funções elementares e por isso não sera analisado. O terceiro caso é quando $\alpha = \alpha_3$. Aqui nos temos que

$$\phi(y) = \sqrt{\frac{3B(6+B)(2+5B)}{8+32B}} \left(1 - \operatorname{sech}(ky) \right) \operatorname{sign}(y), \quad (4.54a)$$

$$V(\phi) = -\frac{3B^2k^2}{8} \left[\frac{8+32B+5B^2}{1+4B} \right] + \frac{3Bk^2}{16} (6+B)(2+5B) \left[1 - \sqrt{\frac{8+32B}{3B(6+B)(2+5B)}} |\phi| \right]^2 - \frac{3Bk^2}{16} \frac{(6+B)(1+2B)(2+5B)}{1+4B} \left[1 - \sqrt{\frac{8+32B}{3B(6+B)(2+5B)}} |\phi| \right]^4. \quad (4.54b)$$

Podemos notar que cada uma das soluções particulares acima obedece à seguinte

condição: $\phi(y \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \pm\bar{\phi}$, onde

$$\bar{\phi}_1 = \sqrt{\frac{3B(6+B)(2+5B)}{16+2B(16+5B)}}, \quad (4.55a)$$

$$\bar{\phi}_0 = \frac{\pi}{4}\sqrt{6B}, \quad (4.55b)$$

$$\bar{\phi}_3 = \sqrt{\frac{3B(6+B)(2+5B)}{8+32B}}, \quad (4.55c)$$

com $\bar{\phi}_1 < \bar{\phi}_0 < \bar{\phi}_3$, para $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = 0$ e $\alpha = \alpha_3$, respectivamente. Além disso, para cada um dos três casos temos que $V(\bar{\phi}) = v$ e $V_\phi(\bar{\phi}) = 0$, onde

$$v_1 = -3B^2k^2 \left(\frac{16+32B+10B^2}{16+32B+5B^2} \right), \quad (4.56a)$$

$$v_0 = -3B^2k^2, \quad (4.56b)$$

$$v_3 = -3B^2k^2 \left(\frac{8+32B+5B^2}{8+32B} \right), \quad (4.56c)$$

com $v_1 < v_0 < v_3$. Este resultado concorda com o obtido na equação (4.44). Na figura

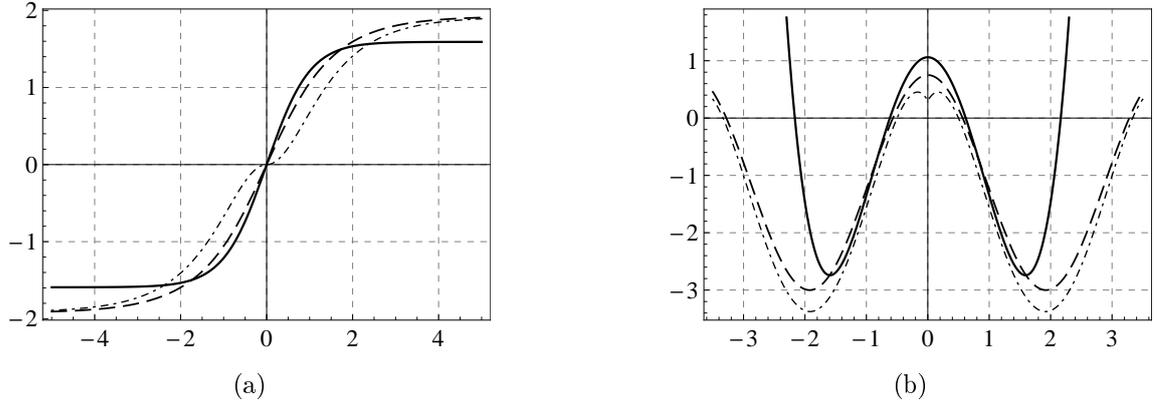


Figura 4.3: (a) Solução *kink* para os três modelos que permitem soluções analíticas plotadas com $k=1$, $B=1$ e $\alpha = \alpha_1$ (linha contínua), $\alpha = 0$ (linha tracejada), $\alpha = \alpha_3$ (linha traço-pontilhada). (b) Potencial para os mesmos valores dos parâmetros k e B .

4.3a mostramos os três casos onde a solução é obtida analiticamente. Os gráficos foram plotados para $k=1$ e $B=1$. Podemos perceber que o centro do defeito começa a sofrer um *split* tipo um duplo-*kink* quando $\alpha > \alpha_2$. A figura 4.3b mostra o potencial para os mesmos valores dos parâmetros k e B .

O próximo passo é encontrar o potencial quântico. Para isso devemos efetuar a mudança de variável (4.21) para o *warp factor* dado em (4.41). Isto é,

$$z = \int dy \operatorname{sech}^{-B}(ky) = \frac{1}{k} \sinh(ky) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1-B}{2}; \frac{3}{2}; -\sinh^2(ky)\right). \quad (4.57)$$

A função hipergeométrica pode ser simplificada se B é um número ímpar. Em particular

para $B=1$ obtemos que

$$y = \frac{1}{k} \operatorname{arcsinh}(kz) \Rightarrow \mathcal{A}(z) = -\frac{1}{2} \ln \left(1 + k^2 z^2 \right). \quad (4.58)$$

Com isso, podemos obter o potencial quântico (4.40) como:

$$U(z) = -\frac{3k^2}{4} \frac{2 - 5k^2 z^2}{(1 + k^2 z^2)^2} + \frac{56 \alpha k^4 (1 - 6k^2 z^2)}{(1 + k^2 z^2)^2 [1 + k^2 z^2 - 8k^2 \alpha (2 - 5k^2 z^2)]} - \frac{3136 \alpha^2 k^8 z^2}{(1 + k^2 z^2)^2 [1 + k^2 z^2 - 8k^2 \alpha (2 - 5k^2 z^2)]^2}. \quad (4.59)$$

que é o resultado obtido em [80].

Além disso, o modo zero pode ser obtido como:

$$H_0(z) = \frac{\sqrt{6k}}{2\sqrt{3 + 8\alpha k^2}} \frac{\sqrt{1 - 8\alpha k^2 \left(\frac{2 - 5k^2 z^2}{1 + k^2 z^2} \right)}}{(1 + k^2 z^2)^{3/4}}. \quad (4.60)$$

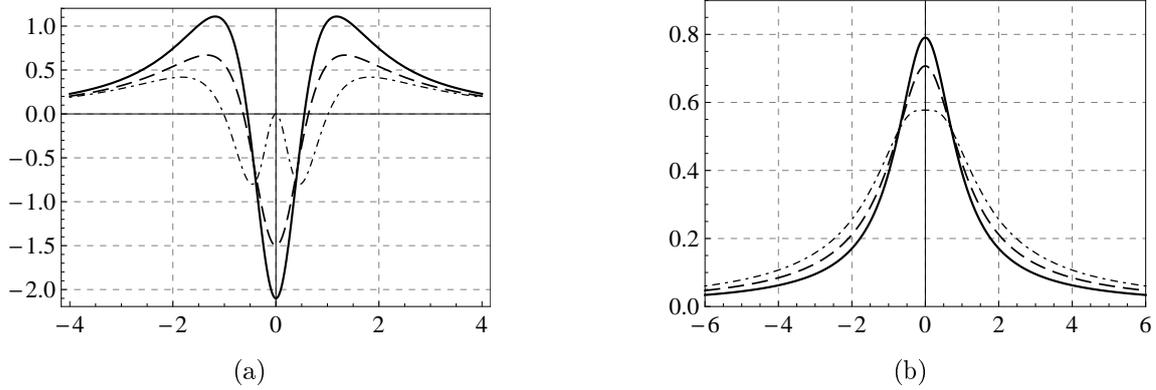


Figura 4.4: (a) Potencial quântico (4.59) plotado com $k=1$ e $\alpha = \alpha_1$ (linha contínua), $\alpha = 0$ (linha tracejada), $\alpha = \alpha_3$ (linha traço-pontilhada). (b) Modo zero para os mesmos valores dos parâmetros k e B .

Vamos mais uma vez que as mudanças sugeridas não contribuem para desestabilizar o modelo, já que o modo zero não possui nós.

4.3.2 Procedimento perturbativo

Nesta seção, vamos utilizar o procedimento perturbativo introduzida na seção 2.1 para estudar modelos de mundo brana. Como foi feito lá, iremos assumir que o campo escalar é escrito na forma:

$$\phi(y) = \tilde{\phi}(y) + \alpha \phi_\alpha(y), \quad (4.61a)$$

onde α é um parâmetro real pequeno. Além disso, o potencial e o *warp function* serão escritos, respectivamente, como:

$$V(\phi) = \tilde{V}(\phi) + \alpha V_\alpha(\phi), \quad (4.61b)$$

$$\mathcal{A}(y) = \tilde{\mathcal{A}}(y) + \alpha \mathcal{A}_\alpha(y), \quad (4.61c)$$

nessas equações $\tilde{\phi}$, \tilde{V} e $\tilde{\mathcal{A}}$ são a solução, o potencial e o *warp function* da teoria não perturbada com $\alpha=0$. Onde, pelo formalismo de primeira ordem, podemos escrever que,

$$\tilde{\phi}' = \frac{1}{2}W_{\tilde{\phi}} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathcal{A}}' = -\frac{1}{3}W(\tilde{\phi}), \quad (4.62)$$

onde usaremos a notação que $W_{\tilde{\phi}} = W_\phi|_{\phi=\tilde{\phi}}$.

Usando as equações (4.61) e (4.62) podemos escrever a equação (4.37a) até primeira ordem em α como:

$$\phi'_\alpha = -\frac{3}{2}\frac{\mathcal{A}''_\alpha}{W_{\tilde{\phi}}} + \frac{2}{27}W_{\tilde{\phi}} \left[5W^2 - 24W_{\tilde{\phi}}^2 - 24WW_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} + 18W_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}^2 + 9W_{\tilde{\phi}}W_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}\tilde{\phi}} \right], \quad (4.63a)$$

e da equação para o potencial (4.37b) podemos escrever que

$$\begin{aligned} V_\alpha(\tilde{\phi}) = & -W_{\tilde{\phi}} \left[\frac{1}{4}W_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} - \frac{2}{3}W \right] \phi_\alpha + 2W\mathcal{A}'_\alpha - \frac{3}{4}\mathcal{A}''_\alpha - \frac{20}{81}W^4 + \frac{23}{9}W^2W_{\tilde{\phi}}^2 - \\ & - \frac{8}{3}WW_{\tilde{\phi}}^2W_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} - \frac{4}{9}W_{\tilde{\phi}}^4 + \frac{2}{3}W_{\tilde{\phi}}^2W_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}^2 + \frac{1}{3}W_{\tilde{\phi}}^3W_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}\tilde{\phi}}. \end{aligned} \quad (4.63b)$$

Para resolver a equação (4.63a) devemos impor alguma condição adicional sobre o *warp function*, \mathcal{A}'_α . Para isso, iremos assumir que este pode ser escrito em termos do campo não perturbado na forma:

$$\mathcal{A}'_\alpha(\tilde{\phi}) = \beta_1 W(\tilde{\phi}) + \beta_2 W^3(\tilde{\phi}), \quad (4.64)$$

onde β_1 e β_2 são parâmetros reais de ajuste. Com esta escolha podemos obter o *warp function* (4.61c) como:

$$\mathcal{A}(y) = -\frac{1}{3}(1-3\alpha\beta_1) \int W(\tilde{\phi}(y))dy + \alpha\beta_2 \int W^3(\tilde{\phi}(y))dy, \quad (4.65)$$

onde a constante de integração é obtida pela condição $\mathcal{A}(0) = 0$. Além disso, podemos também escrever as equações (4.63), respectivamente, como:

$$\phi'_\alpha = -\frac{3}{4}W_{\tilde{\phi}}(\beta_1 + 3\beta_2 W^2) + \frac{2}{27}W_{\tilde{\phi}} \left[5W^2 - 24W_{\tilde{\phi}}^2 - 24WW_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} + 18W_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}^2 + 9W_{\tilde{\phi}}W_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}\tilde{\phi}} \right], \quad (4.66a)$$

e

$$V_\alpha(\tilde{\phi}) = -W_{\tilde{\phi}} \left(\frac{1}{4} W_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} - \frac{2}{3} W \right) \phi_\alpha + 2\beta_1 W^2 - \frac{3\beta_1}{8} W_{\tilde{\phi}}^2 + 2 \left(\beta_2 - \frac{10}{81} \right) W^4 + \\ + \left(\frac{23}{9} - \frac{9\beta_2}{8} \right) W^2 W_{\tilde{\phi}}^2 - \frac{8}{3} W W_{\tilde{\phi}}^2 W_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}} - \frac{4}{9} W_{\tilde{\phi}}^4 + \frac{2}{3} W_{\tilde{\phi}}^2 W_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}}^2 + \frac{1}{3} W_{\tilde{\phi}}^3 W_{\tilde{\phi}\tilde{\phi}\tilde{\phi}}. \quad (4.66b)$$

Vemos assim que podemos resolver a equação (4.66a) para obter ϕ_α e com isso, encontrar o potencial $V_\alpha(\tilde{\phi})$ em (4.66b). Além disso, se obtivermos o *warp factor* na equação (4.65) podemos utilizar as equações (4.38) e (4.40) para encontrar, respectivamente, a densidade de energia e o potencial que governa a estabilidade.

$$U(z) = \frac{9}{4} \mathcal{A}_z^2 + \frac{3}{2} \mathcal{A}_{zz} - 8\alpha e^{-2\mathcal{A}} \left[3\mathcal{A}_z^4 + 8\mathcal{A}_z^2 \mathcal{A}_{zz} - \mathcal{A}_{zz}^2 - 2\mathcal{A}_z \mathcal{A}_{zzz} - \mathcal{A}_{zzzz} \right]. \quad (4.67)$$

Example 1

Vamos agora ilustrar este formalismo com duas escolhas para o superpotencial W . No primeiro escolheremos a seguinte função

$$W(\phi) = 2\phi - \frac{2}{3}\phi^3, \quad (4.68)$$

que é o superpotencial que suporta estruturas tipo defeitos topológicos. A solução exata para este modelo é escrita como:

$$\tilde{\phi}(y) = \tanh(y), \quad (4.69)$$

Com isso, obtemos o *warp function* (4.65) como:

$$\mathcal{A}(y) = \frac{1}{9} \left(1 - 3\alpha\beta_1 - \frac{16}{3}\alpha\beta_2 \right) \left[4 \ln(S) + S^2 \right] + \frac{4}{9} \alpha\beta_2 S^4 + \\ + \frac{20}{81} \alpha\beta_2 S^6 + \frac{\alpha\beta_2}{27} S^8 + \frac{\alpha}{81} (27\beta_1 - 11\beta_2) - \frac{1}{9}, \quad (4.70)$$

onde $S = \text{sech}(y)$. Aqui nos usamos $\mathcal{A}(0) = 0$ para obter a constante de integração. Podemos notar que o *warp factor* $e^{2\mathcal{A}}$, possui o seguinte comportamento assintótico

$$e^{2\mathcal{A}(y)} \approx e^{-4\varepsilon_1|y|/27} + \dots \quad (4.71)$$

onde $\varepsilon_1 = 3 - \alpha(9\beta_1 + 16\beta_2)$. Logo, para que o *warp factor* vá assintoticamente a zero quando $y \rightarrow \pm\infty$ devemos assumir que ε_1 seja positivo, ou seja, que $\alpha \leq 3(9\beta_1 + 16\beta_2)^{-1}$ se $\beta_2 \geq -9\beta_1/16$. Essa condição é também chamada de limite de brana fina. A figura 4.5 mostra o comportamento do *warp factor* para alguns valores dos parâmetros α , β_1 e β_2 .

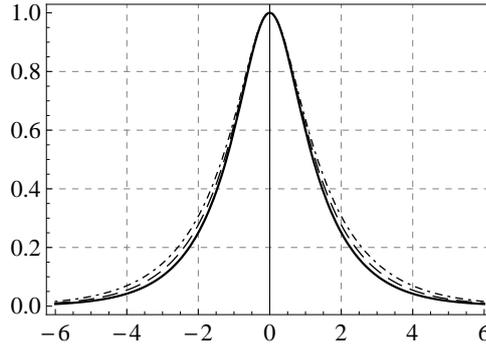


Figura 4.5: *Warp factor* plotado para $\beta_1 = \beta_2 = 1$, com $\alpha = 0$ (linha contínua) $\alpha = 0.01$ (linha tracejada) e $\alpha = 0.02$ (linha traço-pontilhada).

Usando (4.70) em (4.3) podemos escrever o escalar de curvatura como:

$$R(y) = \frac{16}{81} \left(20 - 42S^4 - 5S^6 \right) - \frac{16}{243} \alpha \left[360\beta_1 + 640\beta_2 - 3(171\beta_1 + 752\beta_2)S^4 - 10(9\beta_1 + 32\beta_2)S^6 + 1332\beta_2S^8 + 564\beta_2S^{10} + 40\beta_2S^{12} \right]. \quad (4.72)$$

Na origem o escalar de curvatura tem um valor mínimo $R(0) = -16/3 + 16\alpha\beta_1$. Além disso, é possível mostrar que o escalar de curvatura assume o mesmo valor assintótico constante \bar{R} quando $y \rightarrow \pm\infty$, onde

$$\bar{R} = \frac{320}{81} - \frac{640}{243} \alpha (9\beta_1 + 16\beta_2).$$

O próximo passo é assumir que a correção de primeira ordem no campo é uma função da solução não perturbada $\tilde{\phi}$. Com isso, podemos utilizar a equação (4.66a) com o superpotencial (4.68) para obter que

$$\phi_\alpha(\tilde{\phi}) = - \left(\frac{224}{9} + \frac{3\beta_1}{2} \right) \tilde{\phi} + \left(\frac{3056}{81} - 6\beta_2 \right) \tilde{\phi}^3 - \left(\frac{416}{81} - \frac{12\beta_2}{5} \right) \tilde{\phi}^5 + \left(\frac{80}{1701} - \frac{2\beta_2}{7} \right) \tilde{\phi}^7. \quad (4.73)$$

Além disso, usando a solução (4.69) podemos escrever a solução completa como:

$$\phi(y) = \tanh(y) - \alpha \left[\left(\frac{224}{9} + \frac{3\beta_1}{2} \right) \tanh(y) - \left(\frac{3056}{81} - 6\beta_2 \right) \tanh^3(y) + \left(\frac{416}{81} - \frac{12\beta_2}{5} \right) \tanh^5(y) - \left(\frac{80}{1701} - \frac{2\beta_2}{7} \right) \tanh^7(y) \right]. \quad (4.74)$$

Quando $y \rightarrow \pm\infty$ obtemos que $\phi \rightarrow \bar{\phi} = \pm \left[1 + \alpha \left(\frac{13184}{1701} - \frac{3\beta_1}{2} - \frac{136\beta_2}{35} \right) \right]$. Isso mostra que o valor assintótico de ϕ depende essencialmente do parâmetro α . No entanto, se $\beta_2 = 8240/4131 - (105/272)\beta_1$ a solução geral possuirá o mesmo valor assintótico da solução não perturbada, isto é, $\bar{\phi} = \pm 1$. Na figura 4.6a mostramos o comportamento da solução geral (4.74) para alguns valores dos parâmetros α, β_1 . Note que usamos o valor de β_2 de

tal modo que a solução geral tenha o mesmo valor assintótico da solução não perturbada.

Usando a equação (4.73) podemos escrever a correção de primeira ordem no potencial (4.66b) como:

$$\begin{aligned} V_\alpha(\tilde{\phi}) = & -\frac{160}{9} - \frac{3\beta_1}{2} + \left(\frac{3056}{27} + 4\beta_1 - 18\beta_2\right)\tilde{\phi}^2 + \left(\frac{3\beta_1}{2} + 52\beta_2 - \frac{38336}{243}\right)\tilde{\phi}^4 + \\ & + \left(\frac{53600}{729} - \frac{4\beta_1}{9} - \frac{632\beta_2}{15}\right)\tilde{\phi}^6 + \left(\frac{52\beta_2}{3} - \frac{992}{81}\right)\tilde{\phi}^8 + \left(\frac{4624}{15309} - \frac{2854\beta_2}{945}\right)\tilde{\phi}^{10} + \\ & + \left(\frac{80\beta_2}{567} - \frac{320}{45927}\right)\tilde{\phi}^{12}. \end{aligned}$$

Com isso, podemos reconstruir o potencial dado pela relação (4.61b), onde

$$\tilde{V}(\phi) = \frac{1}{2} - \frac{7}{3}\phi^2 + \frac{25}{18}\phi^4 - \frac{4}{27}\phi^6.$$

Precisamente temos que

$$\begin{aligned} V(\phi) = & \frac{1}{2} - \frac{7}{3}\phi^2 + \frac{25}{18}\phi^4 - \frac{4}{27}\phi^6 - \alpha \left[\frac{160}{9} + \frac{3\beta_1}{2} - \left(\frac{3056}{27} + 4\beta_1 - 18\beta_2\right)\phi^2 - \right. \\ & - \left(\frac{3\beta_1}{2} + 52\beta_2 - \frac{38336}{243}\right)\phi^4 - \left(\frac{53600}{729} - \frac{4\beta_1}{9} - \frac{632\beta_2}{15}\right)\phi^6 - \left(\frac{52\beta_2}{3} - \frac{992}{81}\right)\phi^8 - \\ & \left. - \left(\frac{4624}{15309} - \frac{2854\beta_2}{945}\right)\phi^{10} - \left(\frac{80\beta_2}{567} - \frac{320}{45927}\right)\phi^{12} \right]. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Este potencial é plotado na figura (4.6b) para alguns valores do parâmetro α com $\beta_1 = 1$ e $\beta_2 = 1.609$. Podemos ver que o ponto de máximo do potencial em $\phi = 0$ é deslocado de um valor que depende de α e é dado por $V(0) = 1/2 - \alpha(160/9 + 3\beta_1/2)$. Além disso, quando o campo ϕ vai para um valor assintótico $\bar{\phi}$ os pontos de mínimo do potencial, ou seja, onde, $V_\phi(\bar{\phi}) = 0$, são alterados na forma

$$V(\bar{\phi}) = -\frac{16}{27} + \frac{32\alpha}{6561} \left(729\beta_1 + 1296\beta_2 - 160 \right).$$

Usando o *warp factor* (4.70) podemos escrever a densidade de energia (4.38) como:

$$\rho(y) = \rho_0(y) + \alpha \frac{S^{8/9}}{e^{\frac{2}{9}(1-S^2)}} \left[\left(\sum_{i=0}^7 a_{2i} S^{2i} \right) + \left(b_1 + b_2 S^4 + b_3 S^6 \right) \ln(S) \right], \quad (4.76)$$

onde

$$\rho_0(y) = -\frac{e^{\frac{2}{9}S^2}}{27e^{\frac{2}{9}}} S^{8/9} \left(16 - 39S^4 - 4S^6 \right).$$

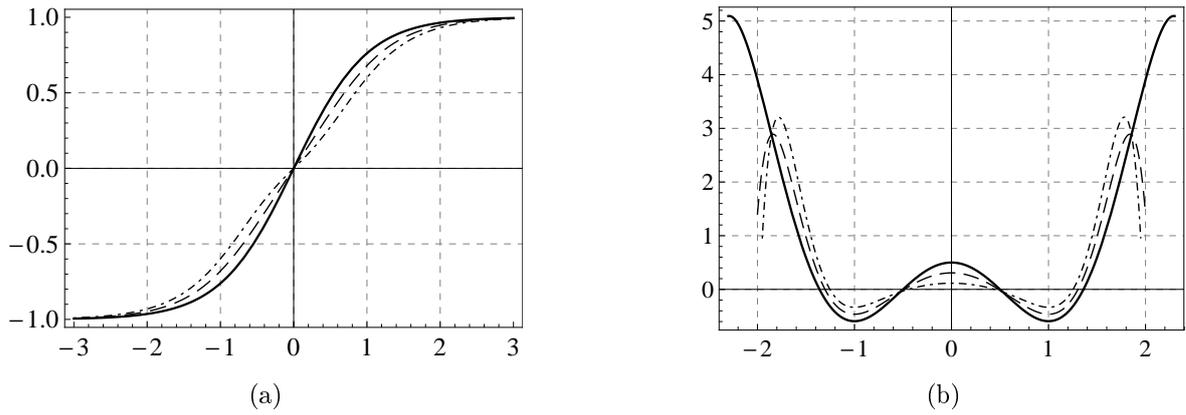


Figura 4.6: (a) Perfil da solução *kink* (4.74) para $\beta_1=1$, $\beta_2=1.609$, com $\alpha=0$ (linha contínua), $\alpha=0.01$ (linha tracejada), e $\alpha=0.02$ (linha traço-ponto). (b) Perfil do potencial (4.75) para os mesmos valores dos parâmetros traçados na solução.

Os coeficientes de (4.76) são dados por

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{256\beta_1}{81} + \frac{14176\beta_2}{2187} - \frac{5120}{6561} & a_6 &= -\frac{4144160}{45927} - \frac{34\beta_1}{81} - \frac{142804\beta_2}{76545} & a_{12} &= \frac{4918\beta_2}{15309} - \frac{320}{45927} \\
 a_2 &= \frac{448256}{15309} - \frac{427\beta_1}{81} - \frac{356624\beta_2}{25515} & a_8 &= -\frac{543968}{15309} - \frac{8\beta_1}{81} + \frac{58244\beta_2}{5103} & a_{14} &= \frac{8\beta_2}{729} \\
 a_4 &= \frac{10432}{189} - \frac{10\beta_1}{27} - \frac{188906\beta_2}{25515} & a_{10} &= \frac{128048\beta_2}{25515} - \frac{3008}{5103} & b_1 &= \frac{128}{729}(9\beta_1+16\beta_2)
 \end{aligned}$$

e também $b_1 = -16b_2/39 = -4b_3$. A figura 4.7a mostra a densidade de energia (4.76). Para

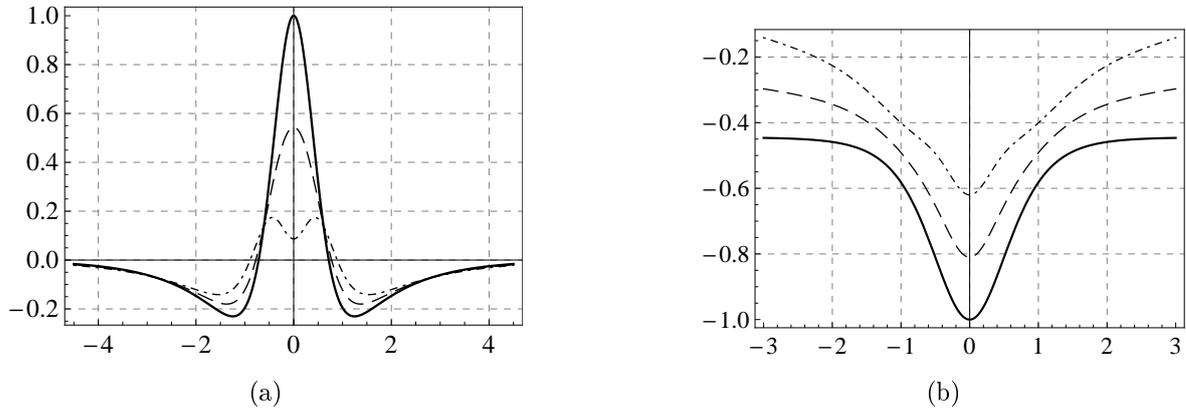


Figura 4.7: (a) Densidade de energia para $\beta_1=1$, $\beta_2=1.609$, com $\alpha=0$ (linha contínua), $\alpha=0.01$ (linha tracejada), e $\alpha=0.02$ (linha traço-ponto). Neste caso o *split* inicia em $\alpha = 0.0155$. (b) Perfil do potencial quântico para os mesmos valores dos parâmetros.

$\alpha \geq 108/(8224+297\beta_1-972\beta_2)$ a densidade de energia sofre um *split* em $x=0$, indicando a presença de possível estrutura interna na brana.

Para este caso o potencial quântico não pode ser obtido analiticamente. No entanto, seu comportamento é obtido numericamente na figura 4.7b.

Example 2

Como segundo exemplo vamos considerar o modelo seno-Gordon definido em [66] como:

$$W(\phi) = 2 \sin(\phi). \quad (4.77)$$

Com isso, podemos usar a equação (4.62) para obter a solução não perturbada na forma:

$$\tilde{\phi}(y) = \arcsin \left[\tanh(y) \right]. \quad (4.78)$$

Com a solução (4.78) podemos obter o *warp function* (4.65) simplesmente por

$$\mathcal{A}(y) = -4\alpha\beta_2(1 - S^2) + \frac{2}{3} \left[1 - 3\alpha(\beta_1 + 4\beta_2) \right] \ln(S), \quad (4.79)$$

onde usamos a condição $\mathcal{A}(0) = 0$ para obter a constante de integração. Podemos mostrar que o *warp factor* possui o seguinte comportamento assintótico:

$$e^{2\mathcal{A}(y)} \approx e^{-2\varepsilon_2|y|/3} + \dots \quad (4.80)$$

onde $\varepsilon_2 = 1 - 3\alpha(\beta_1 + 4\beta_2)$. Logo, para obter o limite de brana fina devemos assumir que $\varepsilon_2 > 0$, ou seja, que $\alpha \leq 1/(3\beta_1 + 12\beta_2)$ se $3\beta_1 \geq 12\beta_2$. Na figura 4.3.2 mostramos o comportamento do *warp factor* para alguns valores dos parâmetros α , β_1 e β_2 .

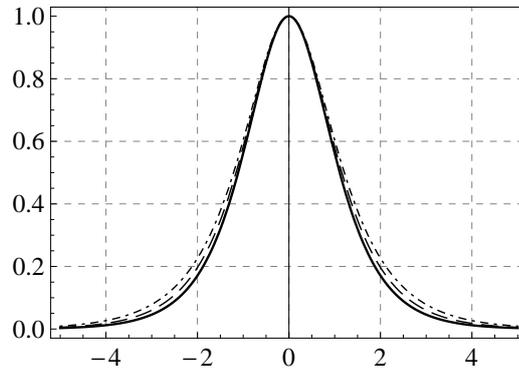


Figura 4.8: *Warp Factor* para $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0.294$, com $\alpha = 0$ (linha contínua), $\alpha = 0.015$ (linha tracejada), e $\alpha = 0.03$ (linha traço-ponto).

Podemos também obter o escalar de curvatura como:

$$R(y) = \frac{16}{9} (5 - 8S^2) - \frac{16\alpha}{3} \left[10(\beta_1 + 4\beta_2) - (13\beta_1 + 116\beta_2)S^2 + 76\beta_2S^4 \right]. \quad (4.81)$$

Na origem o escalar de curvatura tem um valor mínimo $R(0) = -16/3 + 16\alpha\beta_1$. Além disso, podemos mostrar que o escalar de curvatura vai para um valor constante \bar{R} quando

$y \rightarrow \pm\infty$, onde

$$\bar{R} = \frac{80}{9} \left[1 - 6\alpha(\beta_1 + 4\beta_2) \right].$$

Por outro lado, usando a equação (4.66a) podemos escrever a contribuição de primeira ordem para a solução como:

$$\phi_\alpha(\tilde{\phi}) = \left(\frac{112}{27} - \frac{3}{2}(\beta_1 + 6\beta_2) \right) \tilde{\phi} - \left(\frac{320}{27} - \frac{9}{2}\beta_2 \right) \sin(2\tilde{\phi}). \quad (4.82)$$

Com isso, a solução completa torna-se:

$$\phi(y) = \left[1 + \alpha \left(\frac{112}{27} - \frac{3}{2}(\beta_1 + 6\beta_2) \right) \right] \arcsin \left[\tanh(y) \right] - 2 \left(\frac{320}{27} - \frac{9}{2}\beta_2 \right) \operatorname{sech}(y) \tanh(y). \quad (4.83)$$

Podemos mostrar que quando $y \rightarrow \pm\infty$ a solução vai assintoticamente para $\pm\bar{\phi}$, onde

$$\bar{\phi} = \frac{\pi}{2} + \alpha\pi \left(\frac{56}{27} - \frac{3\beta_1}{4} - \frac{9\beta_2}{2} \right),$$

assim, se $\beta_2 = 112/243 - \beta_1/6$ a solução geral tem o mesmo valor assintótico da solução não perturbada. A figura 4.9a mostra o comportamento da solução (4.83) para $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 143/486$ com alguns valores de α .

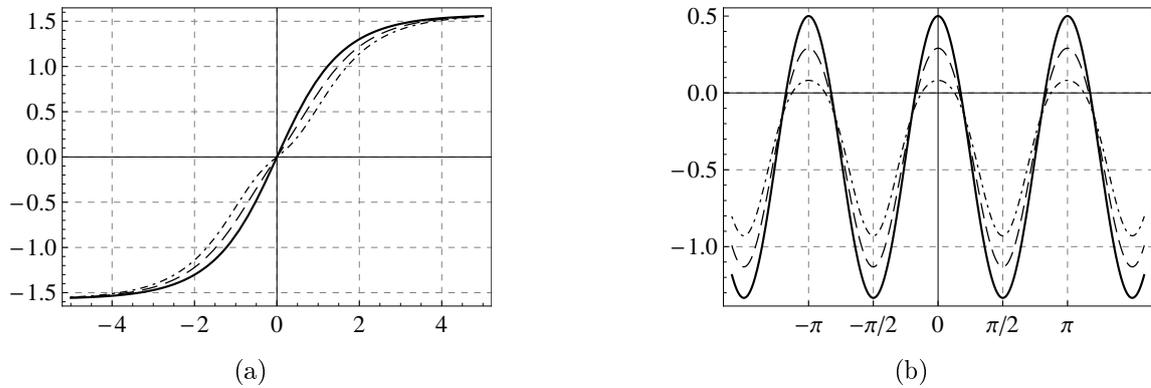


Figura 4.9: (a) Solução do modelo seno-Gordon para $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 143/486$ e $\alpha = 0$ (linha contínua), $\alpha = 0.015$ (linha tracejada) e $\alpha = 0.03$ (linha traço ponto). (b) Potencial (4.84) para os mesmos valores dos parâmetros α , β_1 e β_2 usados no gráfico da solução.

Com o superpotencial (4.77) podemos escrever a contribuição de primeira ordem para o potencial (4.66b) como:

$$V_\alpha(\tilde{\phi}) = - \left(\frac{112}{9} + \frac{3\beta_1}{2} \right) + \left(\frac{2608}{81} + \frac{19\beta_1}{2} + 15\beta_2 \right) \sin^2(\tilde{\phi}) - \left(\frac{640}{27} - 17\beta_2 \right) \sin^4(\tilde{\phi}) + \left(\frac{616}{81} - \frac{11\beta_1}{4} - \frac{33\beta_2}{2} \right) \tilde{\phi} \sin(2\tilde{\phi}),$$

Com isso, podemos reconstruir o potencial e obter que

$$V(\phi) = \frac{1}{2} - \frac{11}{6} \sin^2(\phi) - \alpha \left[\left(\frac{112}{9} + \frac{3\beta_1}{2} \right) - \left(\frac{2608}{81} + \frac{19\beta_1}{2} + 15\beta_2 \right) \sin^2(\phi) + \left(\frac{640}{27} - 17\beta_2 \right) \sin^4(\phi) - \left(\frac{616}{81} - \frac{11\beta_1}{4} - \frac{33\beta_2}{2} \right) \phi \sin(2\phi) \right], \quad (4.84)$$

que possui pontos de mínimo em $\phi = (2n+1)\pi/2$ e pontos de máximo em $\phi = n\pi$, onde n é um numero inteiro. A figura 4.9b mostra o comportamento do potencial (4.84) para alguns valores do parâmetro α com $\beta_1 = 1$ e $\beta_2 = 143/486$. Vemos que os pontos de máximo são deslocados do valor usual ($\alpha = 0$) na forma $\Delta V_{\max} = -\alpha(112/9 + 3\beta_1/2)$ e os pontos de mínimo são deslocados em $\Delta V_{\min} = -\alpha(320/81 - 8\beta_1 - 32\beta_2)$.

Podemos também obter a densidade de energia como:

$$\rho(y) = -\frac{1}{3} S^{4/3} (4 - 7S^2) - \frac{\alpha}{648} S^{4/3} \left[64 (40 - 81\beta_1 - 432\beta_2) - 8 (3488 - 891\beta_1 - 7803\beta_2) S^2 + 72 (640 - 483\beta_2) S^4 - 3456 (\beta_1 + 4\beta_2) \ln(S) + 6048 (\beta_1 + 4\beta_2) S^2 \ln(S) - 44 (224 - 81\beta_1 - 486\beta_2) S \times \tanh(y) \arcsin(\tanh(y)) \right]. \quad (4.85)$$

Novamente podemos mostrar que a densidade de energia sofre *split* para

$$\alpha = \frac{162}{7328 + 513\beta_1 - 1944\beta_2}. \quad (4.86)$$

Na figura 4.10 mostramos o comportamento da densidade de energia (4.86). Vemos que para os parâmetros dados o *split* começa em $\alpha = 0.022$.

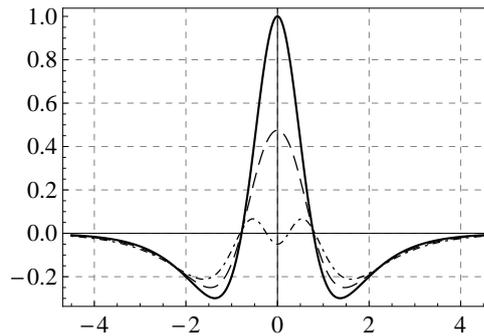


Figura 4.10: Densidade de energia (4.85) para $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 143/486$ e $\alpha = 0$ (linha contínua), $\alpha = 0.015$ (linha tracejada) e $\alpha = 0.03$ (linha traço ponto).

Podemos perceber que em ambos os casos (com escalar de curvatura constante e não constante) obtemos soluções físicas aceitáveis em teorias $F(R)$.

Capítulo 5

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Como foi apresentado neste tese, é possível construir um formalismo matemático que permite obter soluções, do tipo defeitos topológicos, para uma classe geral de teorias de campos com lagrangiana não padrão. Foi visto que, nestas teorias, a manipulação matemática se torna muito mais complicada do que o caso onde a lagrangiana é padrão, porém, ainda é possível obter resultados analíticos e fisicamente aceitáveis para uma grande classe de modelos.

Embora a maior parte das teorias com dinâmica modificada apresentam uma física completamente distinta da obtida, nas teorias correspondentes, com dinâmica padrão, foi mostrado que, é possível construir uma classe de novos modelos idênticos em vários aspectos, tais como, mesma solução, mesma densidade de energia e mesmo espectro de estabilidade linear, bastando, para isso, impor que a teoria generalizada obedeça certas condições. Essa classe de modelos são denominados de teorias gêmeas. Com essa nova característica, verifica-se que a mudança da dinâmica de uma teoria pode ou não ser percebida se comparada com a teorias de dinâmica padrão. Este fato reflete as inúmeras possibilidades em se construir uma teoria de campos que descreva um determinado fenômeno físico.

Foi também mostrado que modelos com dinâmica generalizada podem ser empregados no estudo de objetos estendidos com dimensões extras tais como um brana. Para isso, foi apresentado um formalismo geral para a construção de modelos, acoplando o campo escalar à gravitação em cinco dimensões do espaço tempo. Foi mostrado, em uma grande variedade de problemas, que podemos descrever novas características da brana dependendo da forma específica da lagrangiana escolhida. Além disso, também encontramos modelos gêmeos com os mesmos aspectos apresentados nas teorias em quatro dimensões, ou seja, com a mesma solução e mesma densidade de energia. Neste último caso, a estabilidade do setor gravitacional, torna-se rigorosamente idêntica ao caso com dinâmica

padrão, ou seja, é controlada unicamente pelo *warp factor*.

A tese é concluída considerando um outro caminho para se estudar branas generalizadas, onde, ao invés de alterar a densidade de lagrangiana, propomos acrescentar novos termos que dependem do escalar de curvatura na ação de Einstein-Hilbert. Este novo contexto é inspirado nas chamadas teorias de gravitação $F(R)$. Em geral, teorias desse tipo provocam profundas modificações nas equações de Einstein, tornando o problema matematicamente robusto. Assim como nos modelos anteriores, foi realizado um desenvolvimento matemático formal que possibilita estudar teorias de brana- $F(R)$.

Para exemplificar o formalismo de brana- $F(R)$, foi considerado a adição de um termos de segunda ordem, em potencia, no escalar de curvatura. Mostrando que, apesar das alterações impostas, ainda podemos encontrar soluções analíticas sob algumas condições. Em específico, isso foi obtido considerando o caso onde o escalar de curvatura depende da dimensão extra y . Neste caso, a brana sofre um *split* na densidade de energia, indicando uma possível existência de estrutura interna. Além disso, foi também mostrado que ainda podemos garantir a estabilidade do setor gravitacional pela positividade dos autovalores de um problema mecânico quântico análogo.

Apesar da grande variedade de resultados obtidos nesta tese, podemos destacar alguns pontos que precisam ser melhor entendidos. Como, por exemplo, qual o significado físico de se ter várias teorias que descrevem o mesmo fenômeno. Nesta linha de pensamento poderíamos nos indagar se os chamados modelos gêmeos possuem alguma utilidade prática ou se são apenas curiosidade matemática. Além disso, é importante ressaltar que, embora tenhamos oferecido, na introdução desta tese, uma breve motivação para se estudar teorias generalizadas como possível explicação para a expansão acelerado do universo, em nenhum momento nos permitimos verificar se algum modelo apresentado aqui chega a este resultado. Note que esse possível teste está fora do escopo desta tese, mas que, penso eu, poderia ser feito por algum especialista em gravitação.

Por fim, podemos enunciar alguns problemas não solucionados como possíveis perspectivas para trabalhos futuros. Entre eles poderíamos tentar acoplar férmions aos modelos de brana generalizados apresentados aqui. Além disso, no último capítulo sugerimos uma modificação nas teorias de brana que incluam mudança na dinâmica com inclusão de uma função $F(R)$, porém, nenhum resultado analítico foi obtido com termos de dinâmica não padrão. Por outro lado, pensando apenas em brana- $F(R)$, poderíamos tentar soluções analíticas incluindo termos com potencia superior no escalar de curvatura, tais como R^n .

Para finalizar, é importante destacar que, em paralelo ao que foi exposto nesta tese, mas dentro do contexto de teorias de campos generalizadas, está sendo estudada novas generalizações aos modelos de campos padrão. Em particular podemos destacar o trabalho sobre defeitos topológicos com dinâmica tipo *Galileons* [81] que descreve teorias que

possuem derivadas superiores na ação, mas que conservam a segunda ordem nas equações de movimento. Além disso, estamos estudando uma nova vertente em cosmologia com os chamados campos auxiliares. Que consiste em generalizar o a parte de matéria da equação de Einstein a partir de uma expansão perturbativa de uma função do tensor energia momento T_{ab} . Estes dois trabalhos estão concluídos e serão submetidos após a conclusão deste tese.

Apêndice A

Este anexo é dedicado à definição e dedução de equações que serão úteis ao longo desta tese. A maior parte delas foi extraído da referência [82]. Vamos a elas.

A.1 Formulas da Gravitação

- Derivada covariante de um tensor covariante:

$$\nabla_a V_b = \partial_a V_b - \Gamma_{ab}^c V_c \quad (\text{A.1a})$$

- Derivada covariante de um tensor contravariante:

$$\nabla_a V^b = \partial_a V^b + \Gamma_{ac}^b V^c \quad (\text{A.1b})$$

- Simbolo de Christoffel:

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{g^{cd}}{2} \left(\partial_b g_{ad} + \partial_a g_{bd} - \partial_d g_{ab} \right) \quad (\text{A.2})$$

- Operador d'Alembertiano:

$$\nabla_a \nabla^a \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a \left(\sqrt{g} g^{ab} \partial_b \phi \right) \quad (\text{A.3})$$

- Tensor de Ricci:

$$R_{ab} = \partial_c \Gamma_{ab}^c - \partial_b \Gamma_{ac}^c + \Gamma_{cd}^c \Gamma_{ab}^d - \Gamma_{bd}^c \Gamma_{ac}^d \quad (\text{A.4})$$

- Escalar de Curvatura: O escalar de curvatura é obtido pela contração do tensor de

Ricci na forma:

$$R = g^{ab}R_{ab} \quad (\text{A.5})$$

- Relação para a derivada da métrica

$$\frac{1}{\sqrt{-\eta}} \frac{\partial(\sqrt{-\eta})}{\partial\eta^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}, \quad (\text{A.6})$$

A.2 Potencial de Pöschl-Teller

O potencial da mecânica quântica de Pöschl-Teller modificado sem reflexão é dado por

$$U(x) = a - b\text{sech}^2(x), \quad (\text{A.7})$$

onde a e b são parâmetros reais positivos. O contínuo não contém estados de reflexão. Para $a < b$, há estados ligados. Os autovalores do espectro discreto são:

$$\varepsilon_n = a - c_n^2, \quad (\text{A.8})$$

com

$$c_n = \sqrt{b + \frac{1}{4} - n - \frac{1}{2}}, \quad (\text{A.9})$$

onde

$$0 \leq n < \sqrt{b + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}. \quad (\text{A.10})$$

Se $\sqrt{a} < \sqrt{b + 1/4} - 1/2$, existe autovalores de energia negativa. Mais detalhes podem ser visto nas referências [27, 83].

A.3 Função Hipergeométrica

A Função Hipergeométrica é uma classe de funções que podem ser representadas como séries de potência na qual os coeficientes são apropriadamente produtos definidos e quocientes de valores de função gamma e fatoriais. Quase todas as funções importantes da física matemática podem ser reformulações hipergeométricas. Estas surgem pelo método de Frobenius como soluções analíticas da equação diferencial hipergeométrica e geram séries hipergeométricas [84, 85].

A equação hipergeométrica é dada por:

$$z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}y(z) + [c - (a+b+1)z]\frac{d}{dz}y(z) - aby(z) = 0, \quad (\text{A.11})$$

onde a , b e c são parâmetros. Considerando agora o parâmetro $b \neq 0$ fazendo a seguinte mudança de variável independente,

$$z = \frac{x}{b} \quad (\text{A.12})$$

obtemos a seguinte equação diferencial

$$x\left(1 - \frac{x}{b}\right)\frac{d^2}{dx^2}y(x) + \left[c - \left(\frac{a-1}{b} + 1\right)x\right]\frac{d}{dx}y(x) - ay(x) = 0. \quad (\text{A.13})$$

Por outro lado, tomando o limnrite $b \rightarrow \infty$ obtemos, a equação diferencial,

$$x\frac{d^2}{dx^2}y(x) + (c-x)\frac{d}{dx}y(x) - ay(x) = 0 \quad (\text{A.14})$$

que é chamada equação da hipergeométrica confluyente. Esta equação têm somente dois pontos singulares: um regular na origem e um irregular no infinito. O ponto singular irregular no infinito é formado pela confluência de dois pontos singulares da equação hipergeométrica, isto é, pelos pontos 1 e ∞ .

Uma das soluções da equação hipergeométrica pode ser encontrada através do método de Frobenius na forma:

$$y(x) = {}_1F_2(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)n!} z^n \quad (\text{A.15})$$

isto é, uma solução em torno do ponto $z = 0$. Para mais detalhes veja as referências [86,87].

A.4 Equação de Einstein em teorias $F(R)$

Para obter as equações de Einstein para uma teoria $F(R)$ devemos variar a ação com respeito a métrica. Para isso vamos considerar a ação em cinco dimensões na forma:

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4}F(R) + \mathcal{L} \right). \quad (\text{A.16})$$

Com isso, a variação da ação nos permite escrever a seguinte equação,

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^5x \left[\delta(\sqrt{-g}) \left(-\frac{1}{4}F(R) + \mathcal{L} \right) + \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4}\delta F + \delta\mathcal{L} \right) \right] \\ &= \int d^5x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2}g_{ab}\delta g^{ab} \left(-\frac{1}{4}F(R) + \mathcal{L} \right) - \frac{1}{4}F_R\delta R + \delta\mathcal{L} \right],\end{aligned}\quad (\text{A.17})$$

onde usamos a relação (A.6). Logo, podemos escrever que:

$$\delta S = \int d^5x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{8}g_{ab}F(R) - \frac{1}{4}\frac{\delta R}{\delta g^{ab}}F_R - \frac{1}{2}g_{ab}\mathcal{L} + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{ab}} \right] \delta g^{ab}.\quad (\text{A.18})$$

Por outro lado, a definição do tensor energia momento nos diz que

$$-\frac{1}{2}g_{ab}\mathcal{L} + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{ab}} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{ab}} = \frac{1}{2}T_{ab},$$

portanto, podemos escrever a equação (A.18) como:

$$\delta S = \int d^5x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{8}g_{ab}F(R) - \frac{1}{4}\frac{\delta R}{\delta g^{ab}}F_R + \frac{1}{2}T_{ab} \right] \delta g^{ab}.\quad (\text{A.19})$$

Além disso, da definição do escalar de curvatura (A.5) podemos mostrar que,

$$\frac{\delta R}{\delta g^{rs}} = R_{rs} + (g_{rs}\square - \nabla_r\nabla_s),\quad (\text{A.20})$$

Com isso, a equação (A.20) torna-se:

$$\delta S = \int d^5x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{8}g_{ab}F(R) - \frac{1}{4}F_R R_{ab} - \frac{1}{4}(g_{ab}\square - \nabla_a\nabla_b)F_R + \frac{1}{2}T_{ab} \right] \delta g^{ab}.\quad (\text{A.21})$$

Logo, impondo que a variação da ação seja nula ($\delta S = 0$), obter que,

$$\frac{1}{8}g_{ab}F(R) - \frac{1}{4}(g_{ab}\square - \nabla_a\nabla_b)F_R - \frac{1}{4}F_R R_{ab} + \frac{1}{2}T_{ab} = 0,\quad (\text{A.22})$$

ou melhor,

$$F_R R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}F(R) + (g_{ab}\square - \nabla_a\nabla_b)F_R = 2T_{ab},\quad (\text{A.23})$$

que é a equação desejada. Para o caso trivial com $F(R) = R$, obtemos que:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 2T_{ab},\quad (\text{A.24})$$

Referências Bibliográficas

- [1] PERLMUTTER, S. et al Discovery of a supernova explosion at half the age of the Universe. **Letters to Nature**, v. 391, p. 51-54, Jan. 1998.
- [2] RIESS, A. G. et al Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. **The Astronomical Journal**, v. 116, n. 3, p. 1009, Sep. 1998.
- [3] GARCIA, Rafael. **Energia misteriosa faz dez anos sem ganhar explicação**. Disponível em: <<http://www1.folha.uol.com.br/ciencia/2008/06/412567-energia-misteriosa-faz-dez-anos-sem-ganhar-explicacao.shtml>>. Acesso em: 14 de agosto 2014.
- [4] GROSSMANN, Cesar. **O que é matéria escura e energia escura?**. Disponível em: <<https://hypescience.com/o-que-e-materia-escura-e-energia-escura/>>. Acesso em: 14 de agosto 2014.
- [5] BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D. **Relativistic Quantum Fields**. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [6] BAZEIA, D. **Campos escalares em Ação**. 2004. 121 f. Tese (Seleção para Professor Titular)- Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2004.
- [7] MENEZES, R. S. **Defeitos Globais em Teoria de Campos e Aplicações**. 2007. 161 f. Tese (Doutorado em Física)- Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2007.
- [8] BAZEIA, D. Defect Structures in Field Theory. Disponível em: <[arXiv:hep-th/0507188](https://arxiv.org/abs/hep-th/0507188)>. Acesso em: 02 junho 2014.
- [9] BUNKOV, Yuriy M.; GODFRIN, Henri. **Topological defects and the non-equilibrium dynamics of symmetry breaking phase transitions**. Les Houches: Kluwer Academic, 1999.
- [10] HOBART, R. On the instability of a class of unitary field models. **Proc. Phys. Soc.**, v. 82, n. 2, p. 201-203, Aug. 1963.

- [11] DERRICK, G.H. Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles. **J. Math. Phys.**, v. 5, n. 9, p. 1252-1254, Sept. 1964.
- [12] VILENKIN, A.; SHELLARD, E. P. S. **Cosmic Strings and Other Topological Defects**. Cambridge: Cambridge University. Press, 1994.
- [13] BABICHEV, E. Global topological k-defects. **Phys. Rev. D**, v. 74, n. 8, p. 085004, Oct. 2006.
- [14] ANDREWS, Melinda et al. Distinguishing k-defects from their canonical twins. **Phys. Rev. D**, v. 82, n. 10, p. 105006, Nov. 2010.
- [15] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. An alternative to compactification. **Phys. Rev. Lett.**, v. 83, n. 23, p. 4690-4693, Dec.1999.
- [16] ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. R. The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. **Phys. Lett. B**, v. 429, n. 3-4, p. 263-272, June.1998.
- [17] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. A Large mass hierarchy from a small extra dimension. **Phys. Rev. Lett.**, v. 83, n. 17, p. 3370-3373, Oct.1999.
- [18] BAZEIA, D. et al. Generalized Global Defect Solutions. **Eur. Phys. J. C**, v. 51, n. 4, p. 953-962, Aug. 2007.
- [19] BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MENEZES, R. First-order framework and generalized global defect solutions. **Phys. Lett. B**, v. 668, n. 3, p. 246-252, Oct. 2008.
- [20] BAZEIA, D. et al. Braneworld models of scalar fields with generalized dynamics. **Phys. Lett. B**, v. 671, n. 3, p. 402-410, Jan. 2009.
- [21] DANTAS, J. Dutra. **Modelos Gêmeos em Teorias de Campos Escalares**. 2012. 76 f. Tese (Doutorado em Física)- Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2012.
- [22] CARMELI, M. **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**. Danvers: World Scientific, 1982.
- [23] BOGOMOL'NYI, E. B. The stability of classical solutions. **Sov. J. Nucl. Phys.**, v. 24, p. 449, Nov. 1976.
- [24] BAZEIA, D. Topological solitons in a vacuumless system. **Phys. Rev. D**, v. 60, n. 6, p. 067705, Aug. 1999.
- [25] MANTON, N.; SUTCLIFFE, P. **Topological solitons**. Cambridge: Cambridge University. Press, 2004.

- [26] PRASAD, M. K.; SOMMERFIELD, C. M. Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon. **Phys. Rev. Lett.**, v. 35, n. 12, p. 760-762, Sep. 1975.
- [27] ROSEN, N.; MORSE, P. M. On the Vibrations of Polyatomic Molecules. **Phys. Rev.**, v. 42, n. 2, p. 210-217, Oct. 1932.
- [28] PÖSCHL, G.; TELLER, E. Bemerkungen zur Quantenmechanik des anharmonischen Oszillators. **Zeitschrift für Physik**, v. 83, n. 3-4, p. 143-151, Mar. 1933.
- [29] SAKURAI, J. J. **Modern Quantum Mechanics**. 1th ed. Revised Edition. New York: Addison-Wesley. 1994. 500 p.
- [30] BAZEIA, D.; MENEZES, J.; MENEZES, R. Global defects in field theory with applications to condensed matter. **Mod. Phys. Lett. B**, v. 19, n. 17, p. 801-819, July. 2005.
- [31] BAZEIA, D.; FURTADO, C.; GOMES, A. R. Gravitational field of a global defect. **Phys. Rev. D**, v. 63, n. 12, p. 124016, May. 2001.
- [32] RAJARAMAN, R. **Solitons e instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory**. 1th ed. [S.1.]: North Holland, 1989. 418 p.
- [33] GOMES, A. R.; BAZEIA, D. Extended solutions via the trial orbit method for two-field models. **Physica Scripta**, v. 79, n. 5, p. 055005, Apr. 2009.
- [34] BAZEIA, D. et al. New Models for Two Real Scalar Fields and Their Kink-Like Solutions. **Adv. High Energy Phys.**, v. 2013, p. 183295, Aug. 2013.
- [35] BAZEIA, D.; LOSANO, L.; SANTOS, J. R. L. Kinklike structures in scalar field theories: from one-field to two-field models. **Phys. Lett. A**, v. 377, n. 25-27, p. 1615-1620, Oct. 2013.
- [36] BAZEIA, D.; SANTOS, M. J.; RIBEIRO, R. F. Solitons in systems of coupled scalar fields. **Phys. Lett. A**, v. 208, n. 1-2, p. 84-88, Nov. 1995.
- [37] BAZEIA, D.; RIBEIRO, R. F.; SANTOS, M. M. Solitons in a class of systems of two coupled real scalar fields. **Phys. Rev. E**, v. 54, n. 3, p. 2943-2948, Sep. 1996.
- [38] CHIBISOV, B; SHIFMAN, M. BPS-saturated walls in supersymmetric theories. **Phys. Rev. D**, v. 56, n. 12, p. 7990-8013. Dec. 1997.
- [39] BAZEIA, D.; BRITO, F. A. Bags, junctions, and networks of BPS and non-BPS defects. **Phys. Rev. D**, v. 61, n. 10, p. 105019, Apr. 2000.

- [40] IZQUIERDO, A. Alonso; LEON, M. A. Gonzalez; GUILARTE, J. Mateos. Kink variety in systems of two coupled scalar fields in two space-time dimensions. **Phys. Rev. D**, v. 65, n. 8, p. 085012, Mar. 2002.
- [41] ARMENDARIZ-PICON, C.; DAMOUR, T.; MUKHANOV, V. F. k-inflation. **Phys. Lett. B**, v. 458, n. 2-3, p. 209-218, July. 1999.
- [42] SEN, A. Dirac-Born-Infeld action on the tachyon kink and vortex. **Phys. Rev. D**, v. 68, n. 6, p. 066008, Sep. 2003.
- [43] ALMEIDA, C. A. G. et al. Scalar fields and defect structures: perturbative procedure for generalized models. **Phys. Rev. D**, v. 88, n. 2, p. 025007, Jul. 2013.
- [44] ROSENAU, Philip; KASHDAN, Eugene. Emergence of Compact Structures in a Klein-Gordon Model. **Phys. Rev. Lett.**, v. 104, n. 3, p. 034101, Jan. 2010.
- [45] BAZEIA, D.; HORA, E.; RUBIERA-GARCIA, D. Compact vortex in a generalized Born-Infeld model. **Phys. Rev. D**, v. 84, n. 12, p. 125005, Dec. 2011.
- [46] BAZEIA, D. et al. Compact-like kinks and vortices in generalized models. **Phys. Rev. D**, v. 81, n. 12, p. 125016, Jun. 2010.
- [47] BAZEIA, D. et al. New scalar field models and their defect solutions. **Europhys. Lett.**, v. 93, n. 4, p. 41001, Feb. 2011.
- [48] BAZEIA, D.; MENEZES, R. New results on twinlike models. **Phys. Rev. D**, v. 84, n. 12, p. 125018, Dec. 2011.
- [49] BAZEIA, D. et al. Twinlike Models in Scalar Field Theories. **Phys. Rev. D**, v. 84, n. 4, p. 045010, Aug. 2011.
- [50] ADAM, C.; QUEIRUGA, J. M. An algebraic construction of twin-like models. **Phys. Rev. D**, v. 84, n. 10, p. 105028, Nov. 2011.
- [51] ADAM, C.; QUEIRUGA, J. M. Twinlike models with identical linear fluctuation spectra. **Phys. Rev. D**, v. 85, n. 2, p. 025019, Jan. 2012.
- [52] BAZEIA, D.; HORA, E.; MENEZES, R. Twinlike Models for Self-Dual Abelian-Higgs Theories. **Phys. Rev. D**, v. 85, n. 4, p. 045005, Feb. 2012.
- [53] BAZEIA, D.; DANTAS, J. D. On the presence of twinlike models in cosmology. **Phys. Rev. D**, v. 85, n. 6, p. 067303, Mar. 2012.
- [54] BAZEIA, D.; LOBÃO, A. S. Jr; MENEZES, R. Twinlike models for kinks and compactons in flat and warped spacetime. **Phys. Rev. D**, v. 86, n. 12, p. 125021, Dec. 2012.

- [55] BAZEIA, D. et al. First-order formalism for twinlike models with several real scalar fields. **Eur. Phys. J. C**, v. 74, n. 2, p. 2755, Feb. 2014.
- [56] AKAMA, K. An Early Proposal of “Brane World”. **Lect. Notes Phys.**, v. 176, p. 267-271, 1982.
- [57] RUBAKOV, V. A.; SHAPOSHNIKOV, M. E. Do We Live Inside a Domain Wall?. **Phys. Lett. B**, v. 125, n. 2-3, p. 136-138, May. 1983.
- [58] VISSER, M. An Exotic Class of Kaluza-Klein Models. **Phys. Lett. B**, v. 159, n. 1, p. 22-25, Sep. 1985.
- [59] SQUIRES, E. J. Dimensional Reduction Caused by a Cosmological Constant. **Phys. Lett. B**, v. 167, n. 3, p. 286-288, Feb. 1986.
- [60] GIBBONS, G.W.; WILTSHIRE, D.L. Spacetime as a membrane in higher dimensions. **Nuclear Physics B**, v. 287, p. 717-742, 1987.
- [61] GOLBERGER, W. D.; WISE, M. B. Modulus Stabilization with Bulk Fields. **Phys. Rev. Lett**, v. 83, n. 24, p. 4922-4925, Dec. 1999.
- [62] FRIEDMAM, D.Z. et al. Modeling the fifth dimension with scalars and gravity. **Phys. Rev. D**, v. 62, n. 4, p. 046008, Jul. 2000.
- [63] GUO, H. et al. Localization of bulk matter fields, the hierarchy problem and corrections to Coulomb’s law on a pure de Sitter thick braneworld. **Phys. Rev. D**, v. 87, n. 9, p. 095011, May. 2013.
- [64] CVETIC, M.; GRIFFIES, S.; REY, S. Static domain walls in N=1 supergravity. **Nucl. Phys. B**, v. 381, n. 1-2, p. 301-328, Aug. 1992.
- [65] SKENDERIS, K.; TOWNSEND, P.K. Gravitational stability and renormalization-group flow. **Phys. Lett. B**, v. 468, n. 1-2, p. 46-51, Nov. 1999.
- [66] GREMM, M. Thick domain walls and singular spaces. **Phys. Rev. D**, v. 62, n. 4, p. 044017, Jul. 2000.
- [67] CSÁKI, C. et al. Universal aspects of gravity localized on thick branes. **Nucl. Phys. B**, v. 581, n. 1-2, p. 309-338, Aug. 2000.
- [68] CSÁKI, C. et al. General properties of the self-tuning domain wall approach to the cosmological constant problem. **Nucl. Phys. B**, v. 584, n. 1-2, p. 359-386, Sep. 2000.
- [69] KALLOSH, R.; LINDE, A. Supersymmetry and the brane world. **Journal of High Energy Physics**, v. 2000, n. 2, p. 005, Feb. 2000.

- [70] FLANAGAN, E. E.; TYE, S.-H. Henry; WISSERMAN, I. Brane world models with bulk scalar fields. **Phys. Lett. B**, v. 522, n. 1-2, p. 155-165, Dec. 2001.
- [71] AFONSO, V. I.; BAZEIA, D.; LOZANO, L. First-order formalism for bent brane. **Physics Letters B**, v. 634, n. 5-6, p. 526-530, Mar. 2006.
- [72] KARCH, A.; RANDALL, L. Locally localized gravity. **Journal of High Energy Physics**, v. 2001, n. 05, p. 008, May. 2001.
- [73] BAZEIA, D. et al. First-Order Formalism for Flat Branes in Generalized N Fields Models. **Phys. Rev. D**, v. 88, n. 4, p. 045001, Aug. 2013.
- [74] AHMED, A.; GRZADKOWSKI, B. Brane modeling in warped extra-dimension. **Journal of High Energy Physics**, v. 2013, n. 01, p. 177, Jan. 2013.
- [75] DZHUNUSHALIEV, V.; FOLOMEEV, V.; MINAMITSUJI, M. Thick brane solutions. **Rept. Prog. Phys.**, v. 73, n. 6, p. 066901, May. 2010.
- [76] ZHONG, Y.; LIU, Y. X.; YANG, K. Tensor perturbations of $f(R)$ -branes. **Phys. Lett. B**, v. 699, n. 5, p. 398-402, May. 2011.
- [77] AFONSO, V. I. et al. $f(R)$ -Brane. **Phys. Lett. B**, v. 658, n. 1-3, p. 71-76, Dec. 2007.
- [78] BAZEIA, D. et al. On the many-field $f(R)$ brane. **Phys. Lett. B**, v. 726, n. 1-3, p. 523-526, Oct. 2013.
- [79] BAZEIA, D. et al. Braneworld solutions for $F(R)$ models with non-constant curvature. **Phys. Lett. B**, v. 729, n. 5, p. 127-135, Feb. 2014.
- [80] XU, Z.G.; LIU, Y. X.;ZHONG, Y. Metastable gravitons in $f(R)$ -brane models, disponível em <arXiv:1405.6277 [hep-th]>.
- [81] BAZEIA, D.; LOBÃO, A. S.; MENEZES, R. Stable static structures in models with galileon-like dynamics, disponível em <arXiv:1403.6991 [hep-th]>.
- [82] CARROLL, S. M. **SPACETIME AND GEOMETRY**: An Introduction to General Relativity. [S.1.]: Addison Wesley, 2004. 513 p.
- [83] FLÜGGE, S. **Practical Quantum Mechanics**. Berlin: Springer, 1974.
- [84] CAPELAS, Edmundo de Oliveira. **Funções Especiais com Aplicações**. São Paulo: Livraria da Física, 2005.
- [85] MORSE, P.; FESHBACH, H. **Methods of Mathematical Physics**. New York: McGraw-Hill, 1953.

- [86] BUTKOV, Eugene. **Mathematical Physics**. 1st ed. [S.1.]: Addison-Wesley, 1988. 735 p.
- [87] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. **Mathematical Methods for Physicists**. 7th ed. [S.1.]: Academic Press, 2005. 1220 p.
- [88] BAZEIA, D.; BRITO, F. A.; LOSANO, L. Scalar Fields, bent branes, and RG flow. **Journal of High Energy Physics**, v. 2006, n. 11, p. 065, Nov. 2006.
- [89] GHERGHETTA, T.; PELOSO, M. Stability analysis of 5D gravitational solutions with N bulk scalar fields. **Phys. Rev. D**, v. 84, n. 10, p. 104004, Nov. 2011.