

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

INVARIANTES DINÂMICOS, ESTADOS
COERENTES E FASES GEOMÉTRICAS EM
MECÂNICA QUÂNTICA

DIBARTOLOMEI ANTONIO PEREIRA DE LIMA

JOÃO PESSOA

2014

DIBARTOLOMEI ANTONIO PEREIRA DE LIMA

INVARIANTES DINÂMICOS, ESTADOS
COERENTES E FASES GEOMÉTRICAS EM
MECÂNICA QUÂNTICA

Tese realizada sob a orientação do Prof.
Dr. Inácio de Almeida Pedrosa Filho, ap-
resentado ao Programa de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal da
Paraíba, como parte dos requisitos para
obtenção do Título de Doutor em Física.

João Pessoa
Julho 2014

Lima, Dibartolomei Antonio Pereira de.

L732i Invariantes dinâmicos, estados coerentes e fases geométricas em
mecânica quântica / Dibartolomei Antonio Pereira de Lima - João
Pessoa : [s.n.], 2014.

85f. : il.

Orientador: Inácio de Almeida Pedrosa Filho.

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN

1 - Física. 2 - Teoria quântica 3 - Sistemas quânticos dependentes do tempo.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Agradecimentos

A Deus que me concedeu o dom da vida e a oportunidade de concluir mais esta etapa.

Agradeço à minha esposa, Luciana, pelo prazer e privilégio que tive em contar sempre com seu amor e dedicação para alcançar êxito neste projeto. Aos meus familiares e amigos que sempre me incentivaram e apoiaram.

Ao meu orientador Inácio de Almeida Pedrosa Filho, pela disposição de me orientar e por sempre tirar minhas dúvidas até as mais simples.

Ao professor Dr. Edvaldo Nogueira e aos amigos Alberes de Lima e Marcone Senna pelas correções valiosas e pela compilação final deste trabalho.

Ao secretário da pós-graduação Danilo Menezes pela prestatividade.

Aos amigos que fiz no Departamento de Física da UFPB. Especialmente Farinaldo, Cláudio, Breno, Bertúlio com quem tive a honra de não apenas dividir a mesma sala, mas idéias sobre a física e sobre a vida.

À Capes pelo suporte financeiro e ao departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba pela oportunidade que me foi dada.

Resumo

Na presente tese, estudamos o oscilador harmônico generalizado com massa e frequência dependentes do tempo e submetido a uma força de fricção linear na velocidade cujo coeficiente de fricção depende do tempo, do ponto de vista clássico e quântico. Obtivemos as soluções da equação de movimento clássica deste sistema para alguns casos particulares e derivamos uma equação de movimento que descreve simultaneamente três sistemas diferentes. Em seguida, com a ajuda dos operadores invariantes quadráticos e à luz do método de invariantes dinâmicos encontramos as soluções exatas da equação de Schrödinger para este sistema. Também derivamos as fases geométrica, dinâmica e de Berry para este sistema não-estacionário e as avaliamos para três casos especiais. Ainda construímos estados coerentes para este sistema quantizado e os empregamos para investigar algumas propriedades quânticas tais como flutuações quânticas da coordenada e momento bem como do produto das incertezas. Em seguida, utilizamos um operador invariante linear e usamos o método de invariantes dinâmicos para encontrar soluções exatas da equação de Schrödinger para um oscilador harmônico amortecido e forçado dependente do tempo. Com as soluções desta equação, construímos soluções na forma de pacotes de onda Gaussianos assim como calculamos as flutuações quânticas das coordenadas e momentos, bem como as correlações entre ambos. Finalmente, mostramos que a largura das flutuações e correlações do pacote Gaussiano não dependem da força externa.

Palavras-chave: Física. Teoria quântica. Sistemas quânticos dependentes do tempo.

Abstract

In this thesis, we study the generalized harmonic oscillator with frequency dependent mass and time and subjected to a friction force whose speed depends on the time, of classical and quantum points of view. Obtained the solutions of the classical equation of motion of this system for some special cases, we derive an equation of motion that describes three systems. Then, with the help of quadratic invariant operators the light of the method of dynamical invariants we find the exact solutions of the Schrödinger equation for this system. We derive the geometric, dynamic and Berry for this system non-stationary phases and we evaluate this phases for three special cases. After this, we construct coherent states for this quantized system and employ them to investigate some properties quantum properties such as quantum fluctuations of the coordinate and momentum as well as the product of the uncertainties. We then use a linear invariant operator light of the method of dynamical invariants in the intention of finding exact Schrödinger equation for the damped harmonic oscillator for forced time-dependent solutions. As described in our contribution we built solutions in the form of Gaussian wave packets as well as calculate the quantum fluctuations of the coordinates and time, as well as the correlations between them. Finally, we show that the width of the fluctuations and correlations of the Gaussian packet does not depend on the external force.

Key-words: Physics. Quantum theory. Quantum systems time-dependent.

Sumário

1	Introdução	9
2	Método dos invariantes quânticos de Lewis e Riesenfeld	13
2.1	Relação entre os autoestados de $I(t)$ e os autoestados do operador $H(t)$. . .	15
2.2	Aplicação do método de invariantes dinâmicos	16
2.3	Autoestados e autovalores de $I(t)$	20
2.4	Determinação das fases de $I(t)$	21
2.5	Comentários finais	23
3	Fase geométrica e fase de Berry	24
3.1	Efeito Aharanov-Bohm	24
3.2	Teorema adiabático	27
3.3	Fase de Berry	28
3.4	O efeito Aharanov-Bohm e a fase de Berry	29
3.5	Fases de Berry e teoria de Lewis e Riesenfeld	30
3.6	Discussão	32
4	Estados coerentes	34
4.1	Estados coerentes para o oscilador harmônico simples	34
4.2	Estados coerentes e teoria de Lewis e Riesenfeld	37
4.3	Discussão	41
5	Oscilador harmônico generalizado com massa e frequência dependente do tempo	42
5.1	Oscilador clássico e quântico não-estacionário	43
5.1.1	Dinâmica clássica	43

5.1.2	Descrição quântica	45
5.2	Autoestados e autovalores de $I(t)$	48
5.3	Fases geométrica, dinâmica e de Berry	50
5.4	Estados coerentes	54
5.5	Relação de incerteza	56
5.6	Discussão	57
6	Oscilador harmônico amortecido e forçado dependente do tempo	58
6.1	Soluções da equação de Schrödinger para o oscilador harmônico amortecido e forçado dependente do tempo	59
6.2	Pacotes de onda Gaussianos	63
6.3	Flutuações	64
6.4	Discussão	68
7	Conclusões	69
A	Tranformação Unitária	72
B	Relações de incerteza	75
B.1	Incerteza do operador q	75
B.2	Incerteza do operador momento	77
C	Fase de Lewis para o invariante linear	79
	Referências Bibliográficas	81

Capítulo 1

Introdução

Sistemas quânticos dependentes do tempo, especialmente o oscilador harmônico quântico dependente do tempo, tem sido alvo de grande interesse na literatura científica. Pois a introdução de uma dependência temporal em um ou mais de seus parâmetros, como na massa e/ou frequência, pode fazer conexão com problemas de outras áreas da física. Por exemplo, os autores na Ref. [1] mapearam a quantização do campo eletromagnético num meio linear no problema de um oscilador harmônico quântico amortecido, ou seja, eles perceberam uma correspondência direta entre a Hamiltoniana dependente do tempo para estes dois sistemas e assim puderam resolver o problema encontrando a solução da equação de Schrödinger.

A dependência com tempo de tais sistemas está intimamente relacionada a dissipação que, em mecânica clássica, é tratada fenomenologicamente sem maiores dificuldades, pelo menos no formalismo Newtoniano. A extensão do formalismo Lagrangiano a sistemas dissipativos foi realizada pela primeira vez por Bateman, dentro de um contexto puramente clássico. Bateman discutiu duas Lagrangianas diferentes: uma independente do tempo e outra com dependência temporal explícita, ambas para o oscilador harmônico clássico amortecido.

Só mais tarde, com Caldirola [2] e Kanai [3] a discussão de sistemas quânticos dependentes do tempo foi feita. Eles construíram um Hamiltoniano dependente do tempo a partir da Lagrangiana de Bateman para descrever um oscilador harmônico amortecido. Este Hamiltoniano passou a ser conhecido na literatura como Hamiltoniano de Caldirola-Kanai. Desde então, muitos trabalhos tem surgido a partir dos trabalhos pioneiros de Caldirola e Kanai. Por exemplo, na Ref. [4] os autores obtiveram a solução da equação

de Schrödinger para um oscilador de Caldirola-Kanai com e sem a presença de um potencial singular, enquanto que os osciladores forçados e invertidos foram investigados por [5] respectivamente. Já em [6], os autores apresentaram uma descrição quântica de um circuito RLC mesoscópico.

Há uma classe de osciladores harmônicos dependentes do tempo que são uma extensão do oscilador de Caldirola-Kanai e são conhecidos como osciladores harmônicos generalizados. Este sistema generalizado possui uma propriedade de grande interesse em sistemas quânticos dependentes do tempo que é a fase de Berry [7]. Em 1984, Berry encontrou que após uma evolução cíclica adiabática num sistema quântico dependente do tempo, uma fase surgia nas funções de onda do operador Hamiltoniano. A descoberta de Berry abriu novas oportunidades para investigar as propriedades globais e topológicas de evolução quântica [8, 9]. Já na Ref. [10] é possível ver que esses autores encontraram uma expressão exata para a fase geométrica e usaram uma expansão adiabática na solução da equação de Milne-Pinney para encontrar a fase de Berry. No entanto, eles não apresentaram casos particulares desta fase e também não encontraram a solução da equação de Schrödinger. Estes dois pontos que os autores não desenvolveram são apresentados nesta tese sendo uma contribuição original [11].

Via de regra, a solução exata da equação de Schrödinger para Hamiltonianos explicitamente dependentes do tempo não são triviais e durante muito tempo, recorreu-se a métodos perturbativos para obtenção de soluções aproximadas [12, 13]. Porém, ao longo dos anos alguns métodos foram descobertos para obter-se a solução exata da equação de Schrödinger para o oscilador harmônico dependente do tempo como o método das funções tentativas [14, 15], integrais de trajetória de Feynmann [16, 17, 18], transformações canônicas ou unitárias [19, 20, 21] e o método dos invariantes quânticos [22]. H. R. Lewis Jr em 1967 [23] demonstrou que para o oscilador harmônico quântico dependente do tempo existe um invariante (constante de movimento), que tinha sido encontrado por Ermakov em 1880 [24], e por isso, ficou conhecido como invariante de Ermakov-Lewis. Um ano depois, H. R. Lewis e W. D. Riesenfeld [22] desenvolveram uma teoria geral de invariantes dependentes do tempo. Eles encontraram uma relação simples entre os autoestados do invariante e as soluções da equação de Schrödinger. Eles ainda usaram o invariante de Ermakov-Lewis e aplicaram o método ao estudo do OH com frequência dependente do tempo ao movimento de uma partícula carregada em um campo magnético dependente

do tempo.

Entretanto, para encontrar a função de onda pelo método de Lewis e Riesenfeld [22] é preciso resolver a equação de autovalor para o operador invariante e essa tarefa às vezes não é trivial. Porém, Hartley e Ray [25] contornaram este problema, aplicando uma transformação unitária na equação de autovalor para o operador invariante e a reduziram a uma equação de Schrödinger independente do tempo cuja solução pode ser encontrada facilmente. O sistema que Hartley e Ray estudaram foi o oscilador harmônico simples com frequência dependente do tempo e massa unitária. Em seguida, Pedrosa [26] usando o método de Lewis-Riesenfeld e uma generalização da transformação unitária de Hartley e Ray encontrou a função de onda exata para o oscilador harmônico simples com massa e frequência dependente do tempo.

Em virtude do exposto acima, o método de Lewis-Riesenfeld juntamente com a transformação unitária de Hartley e Ray tem proporcionado uma ferramenta poderosa para a solução da equação de Schrödinger para Hamiltonianos quadráticos dependentes do tempo. O único problema é que o invariante, e consequentemente a função de onda, depende de uma solução particular da equação de Milne-Pinney [27, 28], que é uma equação diferencial não-linear e nem sempre possui solução trivial.

No capítulo 2 da presente tese, apresentaremos o método idealizado por H. R. Lewis Jr. e W. B. Riesenfeld. Nesta apresentação, o formalismo descrito terá como base a referência [22]. No sentido de dar consistência à teoria, iremos, ainda no capítulo 2, aplicar o método de operadores invariantes a um sistema físico de interesse: um oscilador harmônico unidimensional com frequência dependente do tempo.

No capítulo 3, apresentaremos a fase geométrica e veremos como estas fases aparecem na mecânica clássica e na mecânica quântica. Mostraremos também uma conexão entre a fase geométrica e a teoria de Lewis e Riesenfeld.

No capítulo 4, mostraremos como construir os estados coerentes para um sistema quântico. Primeiro com um oscilador harmônico simples e em seguida para um oscilador dependente do tempo.

No capítulo 5, estudaremos um oscilador harmônico generalizado com massa e frequência dependentes do tempo e sujeito a uma força de fricção linear na velocidade e cujo coeficiente de fricção depende do tempo, do ponto de vista clássico e quântico. Obteremos a solução da equação de movimento clássica desse sistema para alguns casos particulares e

a solução da equação de Schrödinger com a ajuda do método de Lewis-Riesenfeld. Construiremos os estados coerentes e os empregaremos em algumas propriedades quânticas. Derivaremos as fases geométrica, dinâmica e de Berry para alguns casos especiais.

No capítulo 6, usaremos operadores invariantes lineares à luz do método dos invariantes dinâmicos para encontrar soluções exatas da equação de Schrödinger para um oscilador harmônico forçado dependente do tempo em termos de uma equação diferencial de segunda ordem que descreve a amplitude de um oscilador harmônico amortecido não-forçado. Também construiremos soluções do tipo pacotes de onda Gaussianos e terminaremos nossa análise com o cálculo das flutuações quânticas das coordenadas e momentos, bem como da correlação entre ambos. Como destaque, mostraremos que a largura das flutuações e correlações do pacote Gaussiano não dependem da força externa.

Finalmente, no capítulo 7, apresentaremos nossas considerações finais. Devemos salientar que a literatura científica acerca de sistemas quânticos dependentes do tempo é muito extensa. Por mais que tenhamos nos esforçado para citá-las na bibliografia desta tese, certamente algumas foram omitidas.

Capítulo 2

Método dos invariantes quânticos de Lewis e Riesenfeld

Neste capítulo, faremos uma descrição do método idealizado por H. R. Lewis Jr. e W. B. Riesenfeld. Para isto, tomaremos como base as referências [23] e [22]. Mas antes de entrar no método propriamente dito, lembremos que em mecânica clássica uma quantidade $I(q, p; t)$ é dita conservada quando [29]

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + [I, H]_{q,p} = 0, \quad (2.1)$$

onde $[I, H]_{q,p} = \frac{\partial I}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial I}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q}$ é o parênteses de Poisson, q e p são variáveis canonicamente conjugadas e H a Hamiltoniana do sistema. Como estamos interessados em sistemas quânticos, devemos fazer a quantização da Eq. (2.1)

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{[I, H]}{i\hbar} = 0. \quad (2.2)$$

Agora, I e H são operadores Hermitianos que atuam no espaço de Hilbert do sistema e $\hbar$ é a constante de Planck.

O fato do operador invariante $I(t)$ ser Hermitiano nos garante que: (1). o mesmo possui autovalores puramente reais (2). suas autofunções são ortogonais (3). suas autofunções formam um conjunto completo.

O estado de um sistema físico na mecânica quântica é completamente determinado pela função de onda $\Psi(q, t)$ [12]. No formalismo de Dirac, podemos representar um estado de um sistema físico, num instante t por $|\psi(t)\rangle$. A evolução temporal de um vetor de estado como esse é governada pela equação de Schrödinger. Assim, sendo $H(t)$ o

operador Hamiltoniano, a evolução é dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle. \quad (2.3)$$

Note que, aplicando $|\psi\rangle$ na Eq. (2.2) e usando a Eq. 2.3, obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t} |\psi\rangle &= -\frac{IH|\psi\rangle - HI|\psi\rangle}{i\hbar} \\ i\hbar \frac{\partial(I|\psi\rangle)}{\partial t} &= H(I|\psi\rangle). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Portanto, a ação de um operador invariante num vetor de estado de Schrödinger produz uma outra solução da equação de Schrödinger.

De acordo com o método dos invariantes quânticos, o operador Hermitiano $I(t)$, possui um conjunto completo de autoestados $|\lambda, \kappa; t\rangle$ que satisfazem a equação de autovalor

$$I(t) |\lambda, \kappa; t\rangle = \lambda |\lambda, \kappa; t\rangle \quad (2.5)$$

$$\langle \lambda', \kappa'; t | \lambda, \kappa; t \rangle = \delta_{\lambda' \lambda} \delta_{\kappa' \kappa}, \quad (2.6)$$

onde $\delta_{\lambda' \lambda}$ e $\delta_{\kappa' \kappa}$ são os símbolos de Kronecker. Os autovalores λ são reais em virtude de $I = I^\dagger$. Eles também são independentes do tempo como veremos a seguir. Diferenciando a Eq. (2.5) em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle + I \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle. \quad (2.7)$$

Vamos também atuar com o lado esquerdo da Eq. (2.8) em $|\lambda, \kappa; t\rangle$, para obter

$$i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle + IH|\lambda, \kappa\rangle - \lambda H|\lambda, \kappa\rangle = 0. \quad (2.8)$$

O produto escalar da Eq. (2.8) com o estado $|\lambda', \kappa'; t\rangle$ é

$$i\hbar \langle \lambda', \kappa'; t | \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle + (\lambda - \lambda') \langle \lambda', \kappa'; t | H |\lambda, \kappa; t\rangle = 0. \quad (2.9)$$

Para $\lambda = \lambda'$, a Eq. (2.9) torna-se

$$\langle \lambda, \kappa'; t | \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle = 0. \quad (2.10)$$

Agora tomando o produto interno da Eq. (2.56) com $|\lambda, \kappa; t\rangle$ e usando a Eq. (2.10) obtemos

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \langle \lambda, \kappa; t | \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle = 0. \quad (2.11)$$

O resultado acima demonstra claramente que os autovalores λ são independentes do tempo. No entanto, o mesmo não é verdade para os autoestados como veremos adiante.

2.1 Relação entre os autoestados de $I(t)$ e os autoestados do operador $H(t)$

Vimos anteriormente que ação de um operador invariante num vetor de estado de Schrödinger produz uma outra solução da equação de Schrödinger. Isso faz com que os autoestados desses dois operadores tenham uma relação como veremos nesta seção. Começando da Eq. (2.56) e usando a Eq. (2.11) teremos que

$$(\lambda - I) \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle = \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle, \quad (2.12)$$

tomando o produto escalar com $\langle \lambda', \kappa'; t |$ e usando a Eq. (2.9) para eliminar $\langle \lambda', \kappa'; t | \frac{\partial I}{\partial t} | \lambda, \kappa; t \rangle$, obtemos

$$i\hbar(\lambda - \lambda') \langle \lambda', \kappa' | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle = (\lambda - \lambda') \langle \lambda', \kappa' | H | \lambda, \kappa \rangle. \quad (2.13)$$

Para $\lambda \neq \lambda'$, concluímos que

$$i\hbar \langle \lambda', \kappa'; t | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa; t\rangle = \langle \lambda', \kappa'; t | H | \lambda, \kappa; t \rangle. \quad (2.14)$$

A Eq. (2.14) não necessariamente é válida para $\lambda = \lambda'$, mas caso fosse, poderíamos imediatamente deduzir que $|\lambda, \kappa; t\rangle$ seria solução da equação de Schrödinger. Notemos que a fase de $|\lambda, \kappa; t\rangle$ não foi fixada pelas nossas definições e assim temos liberdade para multiplicar $|\lambda, \kappa; t\rangle$ por algum fator de fase dependente do tempo já que a amplitude de probabilidade não será modificada. Isto é, podemos definir um novo conjunto de autovetores de $I(t)$ relacionados com nosso conjunto inicial dado por

$$|\lambda, \kappa; t\rangle_s = e^{i\alpha_{\lambda\kappa}(t)} |\lambda, \kappa; t\rangle, \quad (2.15)$$

onde os $\alpha_{\lambda\kappa}(t)$ são funções reais arbitrárias do tempo. Sendo assim, estes estados obedecem à equação de autovalores

$$I |\lambda, \kappa\rangle_s = \lambda |\lambda, \kappa\rangle_s. \quad (2.16)$$

Como vimos, a Eq. (2.14) é válida para $\lambda \neq \lambda'$ e este fato continua para o novo conjunto de autovetores. Agora resta encontrarmos as fases desses autoestados de forma que os mesmos satisfaçam a equação de Schrödinger, ou seja, de forma que a Eq. (2.14) permanecerá válida para $\lambda = \lambda'$. Assim, usando os novos autoestados na Eq. (2.12), obtemos

$$(\lambda - I) \left[i \frac{d\alpha_{\lambda\kappa}}{dt} |\lambda, \kappa\rangle + \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle \right] = \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, \kappa\rangle. \quad (2.17)$$

Agora aplicando $\langle \lambda', \kappa' |$ na equação acima e utilizando a Eq. (2.56), obtemos

$$(\lambda' - \lambda) \delta_{\lambda'\lambda} \delta_{\kappa'\kappa} \hbar \frac{d\alpha_{\lambda\kappa}}{dt} = (\lambda' - \lambda) \left[\langle \lambda', \kappa' | \left(i\hbar \frac{\partial \alpha_{\lambda\kappa}}{\partial t} - H \right) | \lambda, \kappa \rangle \right]. \quad (2.18)$$

A equação acima, para $\lambda' = \lambda$, reduz-se a

$$\hbar \delta_{\kappa\kappa'} \frac{d\alpha_{\lambda\kappa}(t)}{dt} = \langle \lambda, \kappa' | \hbar i \frac{\partial}{\partial t} - H | \lambda, \kappa \rangle. \quad (2.19)$$

Para que esta equação seja satisfeita, os estados $|\lambda, \kappa; t\rangle$ devem ser escolhidos de tal forma que o lado direito desapareça para $\kappa' \neq \kappa$. Esta diagonalização é sempre possível uma vez que o operador $\langle \lambda, \kappa' | \hbar i \frac{\partial}{\partial t} - H | \lambda, \kappa \rangle$ é Hermitiano. Assim, as fases $\alpha_{\kappa}(t)$ são escolhidas para satisfazer a equação:

$$\hbar \frac{d\alpha}{dt} = \langle \lambda, \kappa | \hbar i \frac{\partial}{\partial t} - H | \lambda, \kappa \rangle. \quad (2.20)$$

Quando integramos esta equação obtemos duas contribuições

$$\alpha_{\lambda}^1(t) = i \int_0^t d\tau \langle \lambda, \kappa | \frac{\partial}{\partial \tau} | \lambda, \kappa \rangle, \quad (2.21)$$

e

$$\alpha_{\lambda}^2(t) = \int_0^t d\tau \langle \lambda, \kappa | H | \lambda, \kappa \rangle. \quad (2.22)$$

Desde que esse novo conjunto de autoestados de $I(t)$, $|\lambda, \kappa\rangle$ satisfaça a equação de Schrödinger, a solução geral é

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{\lambda, \kappa} c_{\lambda\kappa} e^{i\alpha_{\lambda\kappa}(t)} |\lambda, \kappa; t\rangle, \quad (2.23)$$

onde $|\psi(t)\rangle$ representa o vetor de estado que é solução da equação de Schrödinger e onde $c_{\lambda\kappa}$ são coeficientes independentes do tempo. No intuito de ilustrar o método dos invariantes de Lewis e Riesenfeld, aplicaremos na seção seguinte a teoria aqui formulada a um sistema físico de interesse: um oscilador harmônico unidimensional com frequência dependente do tempo.

2.2 Aplicação do método de invariantes dinâmicos

Nosso interesse nesta seção é exemplificar o método dos operadores invariantes idealizado por Lewis e Riesenfeld [22] e o sistema utilizado será um oscilador harmônico

unidimensional dependente do tempo. Neste caso, a Hamiltoniana correspondente é dada por

$$H(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega(t)^2 q^2}{2}. \quad (2.24)$$

Na expressão acima, q é a coordenada canônica, p o momento canonicamente conjugado a q , m é a massa e $\omega(t)$ é a frequência característica das oscilações. As variáveis p e q satisfazem a relação de comutação canônica $[q, p] = i\hbar$.

As equações canônicas de movimento associado a Hamiltoniana 2.24 podem ser escritas como

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (2.25)$$

e

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega(t)^2 q \quad (2.26)$$

Com isto, a equação de movimento deste sistema pode ser obtida simplesmente derivando novamente a Eq. (2.25) em relação ao tempo,

$$\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\omega^2(t)q \quad (2.27)$$

na qual substituímos a Eq. (2.26). Assim, chegamos ao seguinte resultado

$$\ddot{q} + \omega(t)^2 q = 0. \quad (2.28)$$

Esta é a equação de movimento para o oscilador harmônico em estudo e será de grande utilidade mais adiante.

Nosso próximo passo na busca pelos autoestados inerentes ao nosso problema, será supor a existência de um operador invariante $I(t)$ que tenha a forma quadrática

$$I(t) = \frac{1}{2} (\alpha(t)q^2 + \beta(t)p^2 + \gamma(t)\{q, p\}), \quad (2.29)$$

na qual $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $\gamma(t)$ são funções reais dependentes do tempo a serem determinadas e $\{q, p\}$ representa a notação usual para o anticomutador. O fato de exigirmos que tais funções sejam reais é simplesmente para garantir que nosso operador $I(t)$ seja Hermitiano. Dessa forma, substituindo a Eq.(2.29) e a Eq. (2.24) na Eq. (2.1) encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} = & \frac{1}{2} (\dot{\alpha}q^2 + \dot{\beta}p^2 + \dot{\gamma}\{q, p\}) + \\ & \frac{1}{2i\hbar} [\alpha q^2 + \beta p^2 + \gamma\{q, p\}, \frac{p^2}{2m_0} + \frac{m_0\omega^2 q^2}{2}]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Precisamos obter os comutadores que não serão nulos na equação acima. Para isto, usaremos que

$$[p^2, q^2] = -2i\hbar \{q, p\} \quad , \quad [q^2, p^2] = 2i\hbar \{q, p\}$$

$$[p^2, p^2] = [q^2, q^2] = 0. \quad (2.31)$$

Substituindo a Eq. (2.31) na Eq. (2.30), encontramos que os termos não nulos serão os seguintes comutadores

$$\frac{\alpha}{2m}[q^2, p^2] = \frac{\alpha}{m}i\hbar \{q, p\}, \quad (2.32)$$

$$\frac{\beta}{m\omega^2}2[q^2, p^2] = -\beta m\omega^2 i\hbar \{q, p\}, \quad (2.33)$$

$$[\{q, p\}, p^2] = 4i\hbar p^2, \quad (2.34)$$

$$[\{q, p\}, q^2] = -4i\hbar q^2. \quad (2.35)$$

Substituindo as Eqs. (2.32), (2.33) e (2.34) na Eq. (2.30) temos

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{2}(\dot{\alpha}q^2 + \dot{\beta}p^2 + \dot{\gamma} \{q, p\}) + \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{m} \{q, p\} - \beta m\omega^2 \{q, p\} \right. \\ & \left. + \frac{\gamma}{m}p^2 - \gamma m\omega^2 q^2\right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ainda podemos organizar melhor esta equação agrupando os coeficientes de p^2 , q^2 e $\{q, p\}$ de modo a obter

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} = & \frac{1}{2}[(\dot{\alpha} - 2\gamma m\omega^2)q^2 + (\dot{\beta} + \frac{2\gamma}{m})p^2 \\ & + (\dot{\gamma} + \frac{\alpha}{m} - \beta m\omega^2)\{q, p\}] = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

De acordo com o método que estamos usando, devemos fazer $\frac{dI}{dt} = 0$ e para que esta equação seja satisfeita os coeficientes de p^2 , q^2 e $\{q, p\}$ devem ser nulos. Assim, obtemos as seguintes equações

$$\dot{\alpha} = 2\gamma m\omega^2, \quad (2.39)$$

$$\dot{\beta} = -\frac{2\gamma}{m}, \quad (2.40)$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{\alpha}{m} + \beta m\omega^2. \quad (2.41)$$

O que faremos adiante será no intuito de determinar a forma das funções $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $\gamma(t)$, afim de conhecermos o operador $I(t)$. A exemplo do que fizemos no capítulo anterior,

vamos introduzir, por conveniência, uma outra função, $\sigma(t)$, tal que seu quadrado seja uma função real dependente do tempo. Definiremos então $\beta(t) = \sigma^2(t)$, o que implica em

$$\dot{\beta} = 2\sigma\dot{\sigma}. \quad (2.42)$$

Desta maneira, a Eq. (2.40) ficará na forma $\gamma(t) = -m\sigma\dot{\sigma}$. Da mesma forma, poderemos expressar a Eq. (2.41) como segue

$$-m^2[\dot{\sigma}^2 + \sigma\ddot{\sigma}] = -\alpha + \sigma^2 m^2 \omega^2$$

e assim a função $\alpha(t)$ será escrita na forma

$$\alpha(t) = m^2[\dot{\sigma}^2 + \sigma\ddot{\sigma} + \sigma^2 \omega^2]. \quad (2.43)$$

Derivaremos agora esta equação com respeito ao tempo, afim de a igualarmos à Eq. (2.39) e encontraremos uma equação diferencial para a função σ , o que nos ajudará a obter a forma definitiva das funções $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $\gamma(t)$. Desta forma

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= m^2 \frac{d}{dt} [\dot{\sigma}^2 + \sigma\ddot{\sigma} + \sigma^2 \omega^2] \\ &= m^2 [2\dot{\sigma}\ddot{\sigma} + \dot{\sigma}\ddot{\sigma} + \sigma \frac{d}{dt}(\ddot{\sigma}) + 2\dot{\sigma}\sigma\omega^2 + \sigma^2 \frac{d}{dt}(\omega^2)] \\ &= m^2 [3\dot{\sigma}\ddot{\sigma} + \sigma \frac{d}{dt}(\ddot{\sigma}) + \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\sigma\dot{\sigma}\omega^2 + \sigma\dot{\sigma}\omega^2 + \sigma^2 \frac{d}{dt}(\omega^2)]. \quad (2.45)$$

Agora, igualamos este resultado com a Eq. (2.39), e obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \sigma \frac{d}{dt} (m^2\ddot{\sigma} + m^2\sigma\omega^2) + \\ &3\dot{\sigma}(m^2\ddot{\sigma} + m^2\sigma\omega^2) = 0. \end{aligned}$$

Definindo o termo comum como $\eta = (m^2\ddot{\sigma} + m^2\sigma\omega^2)$ e organizando esta equação, obtemos que

$$\sigma \frac{d\eta}{dt} = -3\dot{\sigma}\eta. \quad (2.46)$$

Resolvendo esta equação, encontramos que a forma da função η é dada por

$$\eta = \frac{c^2}{\sigma^3}, \quad (2.47)$$

onde c^2 é uma constante de integração. Devemos agora igualar a expressão usada para η com a solução anteriormente encontrada para esta função, que resulta em

$$m^2\ddot{\sigma} + m^2\sigma\omega^2 = \frac{c^2}{\sigma^3}.$$

Podemos agora isolar o termo $\ddot{\sigma}$ na equação anterior e igualar a Eq. (2.43). Assim, teremos que

$$\alpha(t) = m^2 \dot{\sigma}^2 + \frac{c^2}{\sigma^2}. \quad (2.48)$$

Finalmente, aplicando as expressões encontradas para as funções $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $\gamma(t)$ e usando que $\sigma(t) = c^{1/2} \rho(t)$ na Eq. (2.29) encontramos a forma explícita de $I(t)$ dada por

$$I = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{q}{\rho} \right)^2 + (\rho p - m \dot{\rho} q)^2 \right), \quad (2.49)$$

sujeito ao vínculo

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t) \rho = \frac{1}{m \rho^3}. \quad (2.50)$$

Assim, o operador invariante quadrático fica completamente determinado a menos da forma de $\omega(t)$, a frequência do sistema. Nosso próximo passo, será encontrar os autovalores e autoestados deste operador.

2.3 Autoestados e autovalores de $I(t)$

Os autoestados e autovalores do operador invariante $I(t)$ serão encontrados de forma semelhante a de Paul Dirac para diagonalizar o Hamiltoniano de um oscilador harmônico com frequência constante. Definiremos operadores de criação e destruição, ambos dependentes do tempo, pelas seguintes relações

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{1}{2\hbar} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{q}{\rho} \right) + i(\rho p - m \dot{\rho} q) \right] \\ a^\dagger &= \left(\frac{1}{2\hbar} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{q}{\rho} \right) - i(\rho p - m \dot{\rho} q) \right]. \end{aligned} \quad (2.51)$$

A escolha foi feita desta forma para que os operadores a e $a^\dagger$ satisfaçam a relação de comutação canônica $[a, a^\dagger] = 1$. É fácil verificar que

$$a^\dagger a = \left(\frac{1}{2\hbar} \right) \left[\left(\frac{q}{\rho} \right)^2 + i(\rho p - m \dot{\rho} q)^2 + i[q, p] \right] = \left(\frac{1}{2\hbar} \right) (2I - \hbar) \quad (2.52)$$

de modo que obtemos $I(t)$ na seguinte forma

$$I(t) = \hbar(a^\dagger a + 1/2). \quad (2.53)$$

Assim, o problema de autovalores de $I(t)$ fica reduzido ao problema de autovalores do operador Hermitiano $N = a^\dagger a$, isto é, encontrar números n e vetores $|n, t\rangle$ normalizados

de forma que $\langle n, t | n, t \rangle = 1$ e que satisficam

$$N|n, t\rangle = aa^\dagger|n, t\rangle = n|n, t\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.54)$$

Da relação entre os operadores $I(t)$ e $N(t)$,

$$I(t) = \hbar(N(t) + 1/2), \quad (2.55)$$

vemos que os autoestados normalizados $|\lambda, t\rangle$ de $I(t)$ serão os mesmos autoestados normalizados $|n, t\rangle$ de $N(t)$. Logo, podemos escrever que

$$I|n, t\rangle = \lambda|n, t\rangle, \quad (2.56)$$

de sorte que o espectro de autovalores de $I(t)$ será dado por

$$\lambda_n = (n + 1/2)\hbar, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.57)$$

2.4 Determinação das fases de $I(t)$

Para completar a nossa aplicação do método do invariante dinâmico, precisamos determinar as fases de $I(t)$. Para isto, temos que calcular os elementos diagonais da matriz dos operadores $H(t)$ e $\frac{\partial}{\partial t}$ e substituir na Eq. (2.20). Nosso primeiro passo será escrever o nosso Hamiltoniano em termos dos operadores de criação e destruição, ou seja, precisamos escrever q^2 e p^2 em termos de a e $a^\dagger$ definidos pelas Eqs. (2.51), respectivamente. Desta forma, teremos que

$$\begin{aligned} p^2 = \frac{-\hbar}{2\rho^2}(-aa^\dagger - a^\dagger a) - \frac{\hbar}{2}\dot{\rho}m(aa^\dagger + a^\dagger a) \\ - \frac{i\hbar}{\rho}\dot{\rho}m(aa^\dagger - a^\dagger a) \end{aligned} \quad (2.58)$$

e

$$q^2 = (aa^\dagger + a^\dagger a) \frac{\rho^2 \hbar}{2}. \quad (2.59)$$

Substituindo as expressões anteriores na Eq. (2.24) e usando que $\langle n | aa^\dagger | n \rangle = n + 1$ e $\langle n | a^\dagger a | n \rangle = n$ chegamos a

$$\langle n | H | n \rangle = \frac{1}{2m} \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \left[\frac{1}{\rho^2} + m^2 \omega^2(t) \rho^2 + m^2 \dot{\rho}^2 \right]. \quad (2.60)$$

A matriz que representa o operador Hamiltoniano $H(t)$ possui elementos fora da diagonal, uma vez que a representação definida pelas Eqs. (2.54) a (2.57) e as equações de autovalor para a e a^2 não diagonalizam este operador. Temos agora que obter os elementos diagonais da matriz do operador $\frac{\partial}{\partial t}$. Para tal, vamos derivar a equação $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ em relação ao tempo. O resultado é o seguinte

$$\langle n|\frac{\partial}{\partial t}|n\rangle = \langle n-1|\frac{\partial}{\partial t}|n-1\rangle + \langle n|\frac{\partial a^\dagger}{\partial t}|n-1\rangle n^{-1/2}. \quad (2.61)$$

Agora usaremos q e p escritos em termos dos operadores a e $a^\dagger$, derivaremos em relação ao tempo a expressão para $a^\dagger$ dada pela Eq. (2.51). Então obtemos que

$$\frac{\partial a^\dagger}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{2\dot{\rho}}{\rho^2} + im(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2) \right) a + im(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2) a^\dagger \right] \quad (2.62)$$

Assim, substituindo esta equação na Eq. (2.61), teremos que

$$\langle n|\frac{\partial}{\partial t}|n\rangle = \langle n-1, t|\frac{\partial}{\partial t}|n-1, t\rangle + \frac{im}{2} \left[(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2) \right]. \quad (2.63)$$

Vamos observar que

$$n=1: \langle 1|\frac{\partial}{\partial t}|1\rangle = \langle 0|\frac{\partial}{\partial t}|0\rangle + \frac{im}{2} \left[(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2) \right]$$

$$n=2: \langle 2|\frac{\partial}{\partial t}|2\rangle = \langle 1|\frac{\partial}{\partial t}|1\rangle + im \left[(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2) \right] = \langle 0|\frac{\partial}{\partial t}|0\rangle + m \left[(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2) \right] + m \left[(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2) \right]$$

Logo,

$$\langle n|\frac{\partial}{\partial t}|n\rangle = \langle 0, t|\frac{\partial}{\partial t}|0, t\rangle + \frac{im}{2} \left[(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2) \right]. \quad (2.64)$$

Na equação anterior podemos notar que os elementos de matriz do operador $\frac{\partial}{\partial t}$ devem ser imaginários puros. Isto porque este operador é não Hermitiano. Como nenhuma informação adicional sobre o termo $\langle 0, t|\frac{\partial}{\partial t}|0, t\rangle$ pode ser determinada da equação acima, faremos a seguinte escolha

$$\langle 0, t|\frac{\partial}{\partial t}|0, t\rangle = \frac{im}{4} \left[(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2) \right] \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.65)$$

de maneira que, ao tomarmos o limite em que ρ se torna constante, encontraremos $\langle 0, t|\frac{\partial}{\partial t}|0, t\rangle$ tendendo a zero. Afinal, os elementos diagonais de matriz do operador $\frac{\partial}{\partial t}$ serão dados por

$$\langle n, t|\frac{\partial}{\partial t}|n, t\rangle = \frac{im}{2} \left[(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2) \right] \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.66)$$

Calculados os elementos diagonais de matriz dos operadores $H(t)$ e $\frac{\partial}{\partial t}$, podemos substituí-los na Eq. (2.20). Então, encontraremos a seguinte equação para as funções de fase

$$\frac{d\alpha_n}{dt} = \frac{1}{2m} \left[m^2 \rho \ddot{\rho} + \frac{1}{\rho^2} + m^2 \omega^2(t) \rho^2 \right] \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.67)$$

Quando usamos a condição de vínculo dada pela Eq. (2.50) na equação anterior, ela ficará reduzida a

$$\frac{d\alpha_n}{dt} = \frac{-1}{m\rho^2} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.68)$$

Integrando esta equação, temos as funções de fase na forma

$$\alpha_n(t) = \frac{-1}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{d\tau}{\rho^2(\tau)}. \quad (2.69)$$

Este resultado nos permite escrever que os autoestados de $I(t)$ que satisfazem a equação de Schrödinger para o oscilador harmônico dependente do tempo serão dados por

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\alpha_n(t)} |n, t\rangle, \quad (2.70)$$

na qual as fases $\alpha_n(t)$ são dadas pela Eq. (2.69). Assim, poderemos escrever a solução geral da equação de Schrödinger para o Hamiltoniano (2.24) como segue

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{i\alpha_n(t)} |n, t\rangle, \quad (2.71)$$

onde os coeficientes c_n são constantes.

2.5 Comentários finais

Frequentemente se recorre a algum método perturbativo para o tratamento de problemas quânticos explicitamente dependente do tempo. Os métodos mais utilizados são a teoria de perturbação dependente do tempo, a aproximação adiabática e a perturbação súbita [12]. Cada uma dessas técnicas tem seus alcances e suas limitações. A teoria de Lewis e Riesenfeld além de fornecer a solução exata do problema, pode ser utilizada para o estudo de outras propriedades que aparecem em sistemas quânticos dependentes do tempo como os estados coerentes e as fases geométricas. No próximo capítulo, apresentaremos esta fase bem como sua relação com a teoria de Lewis e Riesenfeld.

Capítulo 3

Fase geométrica e fase de Berry

Iniciando uma descrição sobre fases geométricas podemos dizer que qualquer vetor que é transportado paralelamente ao longo de um caminho curvo adquire um ângulo com relação a sua direção inicial, como mostrado na Fig. 3.1. Este ângulo ou essa fase é uma propriedade geométrica, ou seja, ela depende do espaço em que é escrito esse caminho. Esta fase foi apresentada num contexto puramente clássico, mas veremos a seguir, através do efeito Aharanov-Bohm, ela existe também em mecânica quântica.

3.1 Efeito Aharanov-Bohm

Em mecânica quântica, de uma maneira geral, as fases não são observadas pois os observáveis dependem do módulo quadrático da função de onda. Veremos que o efeito Aharanov-Bohm é um bom exemplo para ilustrar que uma fase pode ser observada e que esta fase possui um caráter geométrico.

Na eletrodinâmica clássica, os potenciais ϕ e $\vec{A}$ não são diretamente mensuráveis, as quantidades físicas são os campos elétricos e magnéticos (art.sadoque)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3.1)$$

Como é bem conhecido os potenciais não são únicos. Seja $(\phi, \vec{A})$ um par de potenciais. Então o novo par

$$\phi' = \phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \quad (3.2)$$

conduz aos mesmos campos. Esta invariância é conhecida como invariância de Gauge ou Padrão.

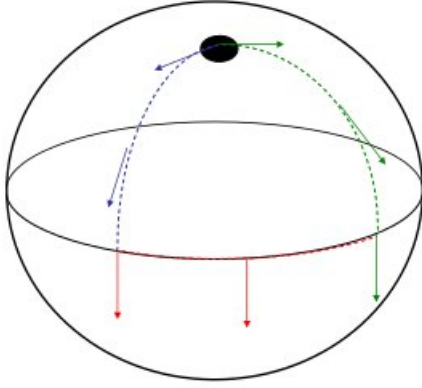


Figura 3.1: Vetor transportado paralelamente ao longo de um caminho fechado em uma esfera.

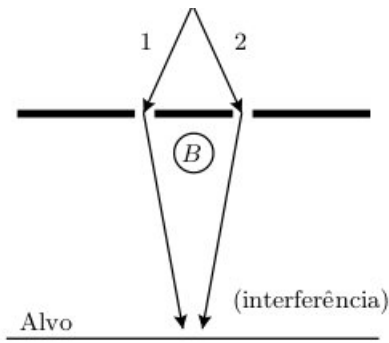
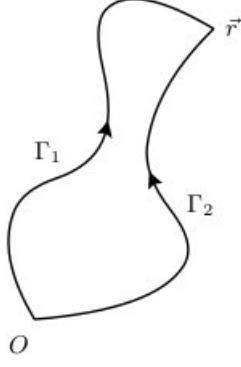


Figura 3.2: Elétrons seguem dois caminhos percorrendo regiões do espaço onde $\vec{B} = 0$

Em mecânica quântica os potenciais desempenham um papel muito mais importante. Consideremos o Hamiltoniano de uma partícula com carga q na presença de um campo eletromagnético

$$H = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 + q\phi. \quad (3.3)$$

Pode-se mostrar que a teoria é invariante de gauge e nunca ninguém prestou muita atenção até que em 1959, Aharonov-Bohm mostraram que os potenciais podem ter efeitos reais [30]. Eles imaginaram a seguinte experiência descrita na Fig. 3.2. Um feixe de elétrons é dividido em 2 que são feitos passar à volta dum solenóide muito longo de tal forma que o campo $\vec{B}$ no seu trajeto é nulo. No final o feixe é reconstruído podendo assim os elétrons, que seguiam caminhos diferentes, interferir entre si. Se eles adquiriram fases diferentes vai haver um efeito detectável no alvo. Para compreendermos melhor esta idéia, vamos escrever o potencial $\vec{A}$ e o campo $\vec{B}$ dentro e fora do solenóide. O primeiro é dado por



$$A_\varphi = \frac{B}{2}r, \quad r < R$$

$$A_\varphi = \frac{BR^2}{2r} = \frac{\Phi}{2\pi r}, \quad r > R \quad (3.4)$$

onde na segunda forma se usou a definição de fluxo magnético $\Phi = \pi R^2 B$. A componente de $\vec{B}$ será dada por

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{(\partial_r A_\varphi)}{\partial r} = B, \quad r < R$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{(\partial_r A_\varphi)}{\partial r} = 0, \quad r > R. \quad (3.5)$$

Portanto o campo $\vec{B}$ é nulo nas trajetórias dos elétrons, mas o potencial vetor é diferente de zero. A equação de Schrödinger é escrita como

$$\left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 + q\phi + V \right] \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3.6)$$

onde V pode incluir a contribuição de qualquer potencial escalar. Se $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ podemos escrever

$$g(\vec{r}) = \frac{q}{\hbar} \int_0^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad (3.7)$$

onde o caminho é arbitrário (desde que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$). De fato, consideremos dois caminhos como indicado na Fig. 3.4. Calculemos a diferença entre os caminhos, isto é,

$$g_{\Gamma_1} - g_{\Gamma_2} = \frac{q}{\hbar} \int_{0, \Gamma_1}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' - \frac{q}{\hbar} \int_{0, \Gamma_2}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = \oint_{\Gamma} \text{vec} A(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = 0 \quad (3.8)$$

onde $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$. A última igualdade da Eq. (3.8) resulta de $\vec{A}$ ser um gradiente pois $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$. Definimos agora

$$\psi(\vec{r}) = e^{ig(\vec{r})} \psi'(\vec{r}) \quad (3.9)$$

e obtemos

$$\vec{\nabla} \psi = e^{ig} (i\vec{\nabla} g) \psi' + e^{ig} (\vec{\nabla} \psi') \quad (3.10)$$

mas $\vec{\nabla}g = \frac{q}{\hbar}\vec{A}$, de forma que

$$(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A})\psi = -i\hbar e^{ig}\vec{\nabla}\psi' \quad (3.11)$$

e

$$\begin{aligned} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2 \psi &= \left(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}\right) (-i\hbar e^{ig}\vec{\nabla}\psi') \\ &= -\hbar^2 \nabla^2 \psi' - \hbar^2 i e^{ig} \vec{\nabla}g \cdot \vec{\nabla}\psi' + i q e^{ig} \vec{A} \cdot \vec{\nabla}\psi' \\ &= -\hbar^2 e^{ig} \nabla^2 \psi'. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Substituindo na Eq. (3.6) obtemos

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right] \psi' = i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t}. \quad (3.13)$$

Isto é, ψ' satisfaz a equação de Schrödinger sem o potencial $\vec{A}$. Isto quer dizer que se conseguirmos resolver a Eq. (3.13) para ψ' , então a solução na presença de um potencial vetor com $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ fica determinada a menos de uma fase. Voltemos agora a experiência de Aharanov-Bohm. Os elétrons seguindo os caminhos 1 e 2 vão adquirir fases diferentes,

$$g = \frac{q}{\hbar} \int \vec{A} \cdot d\vec{r} = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \int \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \cdot (r d\varphi \vec{e}_\varphi) = \pm \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \quad (3.14)$$

com o sinal $\pm$ correspondendo ao elétron que se desloca no mesmo sentido de $\vec{A}$ ou no sentido oposto, respectivamente. A diferença de fase é

$$\Delta = \frac{q\Phi}{\hbar} = \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (3.15)$$

e será detectável, como foi demonstrado experimentalmente por Chambers [31].

3.2 Teorema adiabático

Desde muito tempo os físicos tem despertado seu interesse para o entendimento de problemas com dependência temporal em mecânica quântica. Talvez a primeira vez tenha sido num diálogo quando G. Lorentz questionou A. Einstein se a regra de quantização de M. Planck mudaria para um pêndulo que tivesse seu comprimento variado. A. Einstein resolveu parcialmente a questão respondendo que se o comprimento do pêndulo fosse variado continuamente e de maneira infinitamente lenta, a sua energia de oscilação permaneceria $h\nu$, se inicialmente esta fosse $h\nu$. Pode-se dizer que eles encontraram uma

primeira versão de um processo adiabático, ou seja, um processo onde o número quântico não é alterado durante toda evolução do sistema.

Passados alguns anos, P. Ehrenfest formulou a hipótese adiabática, a qual afirma que *qualquer estado que se transforma adiabaticamente nos parâmetros do sistema, retorna novamente a um estado definido com os mesmos números quânticos*. Por algum tempo essa questão ficou de lado, pois já se pensava estar bem resolvida. Mas quando se pensava que o problema sobre evoluções adiabáticas estivesse solucionado, M. V. Berry, em 1984, mostrou que um estado evoluindo adiabaticamente adquire uma fase de caráter geométrico durante sua evolução no espaço de Hilbert [7]. Aqui vamos apenas dar o resultado final, uma vez que a demonstração pode ser vista no livro do Griffiths [12] e no artigo original de M. Berry [7] e este resultado é

$$\Psi_n = e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} \psi_n \quad (3.16)$$

onde

$$\theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \quad (3.17)$$

é uma fase dinâmica, que está associada com a evolução dos estados com o tempo, e

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \langle \psi_n(t') | \frac{\partial}{\partial t'} | \psi_n(t') \rangle dt' \quad (3.18)$$

é uma fase adicional de origem geométrica que discutiremos a seguir. Um ponto a ser destacado é que os estados $|\psi_n(t')\rangle$ são autoestados do operador Hermitiano. Isto será importante quando analisarmos a conexão entre a fase encontrada no método de Lewis e Riesenfeld e a fase de Berry.

3.3 Fase de Berry

Vimos na seção anterior que quando um estado evolui adiabaticamente, o estado final do Hamiltoniano final, obtém-se multiplicando o estado inicial por uma fase dinâmica e outra geométrica. A variação em t deve-se a algum parâmetro de H que depende do tempo. Seja esse parâmetro $R(t)$, então

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial t} \quad (3.19)$$

e portanto

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \langle \psi_n(t') | \frac{\partial \psi_n(t')}{\partial R} \frac{dR}{dt'} dt' = i \int_{R_i}^{R_f} \langle \psi_n(t') | \frac{\partial \psi_n(t')}{\partial R} dR. \quad (3.20)$$

Em particular se o Hamiltoniano volta ao estado inicial após um período T , devemos ter $\gamma_n(t) = 0$ e portanto o resultado é trivial. Contudo se em vez de apenas um parâmetro, tivermos N parâmetros $R_1, R_2, \dots, R_n$, obtemos

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R_1} \frac{\partial R_1}{\partial t'} + \dots + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_m} \frac{\partial R_m}{\partial t'} = \nabla_R \psi_n \cdot \frac{\partial R}{\partial t'}$$

em equação e obtemos

$$\gamma_m = i \int_{R(i)}^{R(f)} \langle \psi_n(t') | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot d\vec{R}. \quad (3.22)$$

Se o Hamiltoniano volta ao estado inicial ao fim de um tempo T , obtemos

$$\gamma_n = i \oint \langle \psi_n(t') | \nabla_R \psi_n \rangle \cdot d\vec{R}. \quad (3.23)$$

Esta equação foi primeiramente deduzida por M. Berry [7] e é conhecida como fase de Berry. Pode-se mostrar que para que esta fase seja diferente de zero, é condição necessária que o número de parâmetros seja no mínimo dois e que a função de onda seja complexa. Estas condições não são no entanto suficientes e na maior parte dos casos γ_n é nula. Esta fase teve sua importância para a física desde sua origem, mostrando, por exemplo, que a fase de Aharonov-Bohm tem natureza puramente geométrica.

3.4 O efeito Aharonov-Bohm e a fase de Berry

As fases de Berry aparecem em muitas situações na física. Aqui, vamos mostrar que o efeito de Aharonov-Bohm pode ser interpretado como uma fase geométrica. Para isto, vamos seguir as referências [12, 7].

Vamos considerar que a partícula está confinada numa caixa centrada no ponto $\vec{R}$ por um potencial $V(\vec{r} - \vec{R})$. Então a equação de Schrödinger para este problema é dada por

$$\left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 + q\phi + V(\vec{r} - \vec{R}) \right] \psi = E_n \psi_n, \quad (3.24)$$

mas já aprendemos a resolver esta equação. Seja

$$\psi_n = e^{ig} \psi_n(t') \quad (3.25)$$

com

$$g = \frac{q}{\hbar} \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'. \quad (3.26)$$

E a função ψ' satisfaz a equação

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r} - \vec{R}) \right] \psi'_n = E_n \psi' \quad (3.27)$$

Agora transportamos a caixa em torno do solenóide e calculemos a fase de Berry. Notando que

$$\vec{\nabla}_R \psi_n = \vec{\nabla}_R [e^{ig} \psi'_n(\vec{r} - \vec{R})] = -i \frac{q}{\hbar} A(\vec{R}) e^{ig} \psi'_n(\vec{r} - \vec{R}) + e^{ig} \vec{\nabla}_R \psi'_n(\vec{r} - \vec{R}) \quad (3.28)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | \vec{\nabla}_R \psi \rangle &= \int [e^{-ig} \psi'_n(\vec{r} - \vec{R})]^* e^{ig} [-i \frac{q}{\hbar} A(\vec{R}) \psi'_n(\vec{r} - \vec{R}) + \vec{\nabla}_R \psi'_n(\vec{r} - \vec{R})] d^3 \vec{r} \\ &= -i \frac{q}{\hbar} A(\vec{R}) - \int [\psi'_n(\vec{r} - \vec{R})]^* \vec{\nabla} \psi'_n(\vec{r} - \vec{R}) d^3 \vec{r} \\ &= -i \frac{q}{\hbar} \vec{A}(\vec{R}). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Onde usamos o fato do valor médio do momento ser nulo e que $\vec{\nabla}_R = -\vec{\nabla}$. Substituindo na fórmula de Berry obtemos que

$$\gamma_n(T) = \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A}(\vec{R}) \cdot d\vec{R} = \frac{q}{\hbar} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dS = \frac{q\Phi}{\hbar}. \quad (3.30)$$

o que confirma o resultado de Aharanov-Bohm.

3.5 Fases de Berry e teoria de Lewis e Riesenfeld

Nesta seção, veremos a ligação entre as fases de Berry e a teoria de Lewis e Riesenfeld. Faremos isto através de um exemplo de aplicação ao encontrar a fase de Berry para o problema de um oscilador harmônico generalizado dependente do tempo. Para isto, tomaremos como base a Ref. [10]. De acordo com esta referência o Hamiltoniano é dado por

$$H(t) = \frac{1}{2} [X(t)q^2 + Y(t)(pq + qp) + Z(t)p^2] \quad (3.31)$$

onde q e p são operadores de posição e momento satisfazendo a relação canônica de comutação $[q, p] = i\hbar$ e $R(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$ é um vetor cujos parâmetros são reais e dependentes do tempo. Quando R é fixado, H descreve um oscilador harmônico com frequência instantânea $\omega = (XZ - Y^2)^{1/2}$, onde $XZ - Y^2 > 0$. O sistema (3.31) tem um invariante dinâmico associado que dado por

$$I(t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{q^2}{r^2} + \left[r \left(p + \frac{Y}{Z} q \right) - \frac{\dot{r}}{Z} q \right]^2 \right\} \quad (3.32)$$

com $r = \sqrt{Z}\rho(t)$, onde a função auxiliar $\rho(t)$ é solução da equação de Milne

$$\rho''(t) + \Omega^2(t)\rho(t) = \frac{1}{\rho^3(t)} \quad (3.33)$$

com

$$\Omega^2(t) = \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{\ddot{Z}}{Z} - \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{Z}}{Z} \right)^2 - Z \frac{d}{dt} \frac{Y}{Z}. \quad (3.34)$$

A fase de geométrica é dada pela relação

$$\gamma_n(T) = i \int_0^T d\tau \langle \phi(t) | \frac{\partial}{\partial \tau} | \phi(t) \rangle = -\frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^T \left(\frac{r^2 \omega^2 - \dot{r}^2}{Z} - \frac{Z}{r^2} \right) dt \quad (3.35)$$

com $r = \sqrt{Z}\rho$ e $|\phi(t)\rangle$ são autoestados do operador invariante $I(t)$. A fim de obtermos a fase de Berry para este sistema, escreveremos $d/dt = \epsilon d/d\tau$ e faremos a expansão da solução da Eq. (3.33) em termos do parâmetro adiabático ϵ . Então, teremos a seguinte expansão para a Eq. (3.34)

$$\Omega^2 = \omega^2 + \frac{1}{2Z} \frac{\epsilon^2 d^2 Z}{d\tau^2} - \frac{3}{4} \left(\frac{\epsilon \frac{dZ}{d\tau}}{Z} \right)^2 - Z \epsilon \frac{d}{d\tau} \left(\frac{Y}{Z} \right). \quad (3.36)$$

Substituindo esta expressão na Eq. (3.33) e usando que $\rho(t) = \rho_0(t) + \epsilon \rho_1(t) + \epsilon^2 \rho_2(t) + \dots$ temos que

$$\left(\omega^2 - Z \epsilon \frac{d}{d\tau} \left(\frac{Y}{Z} \right) + O(\epsilon^2) \right) (\rho_0(t) + \epsilon \rho_1(t) + O(\epsilon^2)) = \frac{1}{(\rho_0(t) + \epsilon \rho_1(t) + O(\epsilon^2))^3}. \quad (3.37)$$

Podemos expandir o lado direito da equação acima na forma

$$\frac{1}{\rho_0^3(1 + \epsilon \rho_1/\rho_0 + O(\epsilon^2))^3} \simeq \frac{1}{\rho_0^3} (1 - 3\epsilon \rho_1/\rho_0 + O(\epsilon^2)) \quad (3.38)$$

Igualando as Eq. (3.37) e (3.38) encontramos que

$$\rho_0^4 = \frac{1}{\omega^2} \quad (3.39)$$

e

$$\rho_1 = \frac{\rho_0^4}{4} Z \frac{d}{d\tau} \left(\frac{Y}{Z} \right). \quad (3.40)$$

Lembrando que queremos obter a expansão do integrando da Eq. (3.35). Primeiro, vamos chamá-lo de I e reescrevê-lo usando que $r = \sqrt{Z}\rho$ de forma a obtermos

$$I = \rho^2 \omega^2 - \frac{\epsilon^2}{Z} \left[\frac{d}{d\tau} (\sqrt{Z}\rho) \right]^2 - \frac{1}{\rho^2}. \quad (3.41)$$

Agora usando a expansão para a função $\rho(t)$ e olhando apenas para os termos de primeira ordem em ϵ temos

$$\begin{aligned}
I &= \omega^2 (\rho_0 + \epsilon \rho_1 + \dots)^2 - \frac{1}{(\rho_0 + \epsilon \rho_1 + \dots)^2} \\
&= \omega^2 \rho_0^2 \left(1 + 2\epsilon \frac{\rho_1}{\rho_0} + \dots \right) - \frac{1}{\rho_0^2} \left(1 - 2\epsilon \frac{\rho_1}{\rho_0} + \dots \right) \\
&= 4\epsilon \frac{\rho_1}{\rho_0^2} + \dots
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Finalmente usando as Eqs. (3.39) e (3.40) na expressão anterior, encontramos a fase de Berry que será dada pela relação

$$\gamma_n(T) = -\frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^{\epsilon t} \left(\frac{r^2 \omega^2 - \dot{r}^2}{Z} - \frac{Z}{r^2} \right) dt \simeq Z \rho_0^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{Y}{Z} \right) \tag{3.43}$$

Fazendo as correspondências $\rho_0^2 = 1/\omega$ e $Z = 1/m$, encontramos que

$$\gamma_n(T) \simeq -\frac{1}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^T \frac{1}{\omega} \left(\frac{m\dot{y} + \dot{m}y}{m} \right) dt. \tag{3.44}$$

Constate-se que as fases geométrica de Berry e de Lewis Riesenfeld coincidem no limite adiabático. Pode-se entender este resultado fazendo uma expansão também no operador Hermitiano invariante, da forma

$$I = I_0 + I(\epsilon^1). \tag{3.45}$$

Inserindo a solução ρ_0 de primeira ordem dada em (3.39) no invariante exato dado em (3.32), vem

$$I_0 = \frac{\rho_0^2}{2} H. \tag{3.46}$$

Em outras palavras, no limite adiabático o Hamiltoniano do oscilador harmônico generalizado dependente do tempo e o operador Hermitiano invariante I são proporcionais, fazendo com que estes dois operadores comutem. Isto faz com que seus autovetores coincidam e assim não há distinção entre as fases geométrica de Berry e de Lewis Riesenfeld.

3.6 Discussão

Neste capítulo fizemos uma apresentação das fases geométricas e de Berry. Com o intuito de ilustrar a fase geométrica, apresentamos o efeito Aharonov-Bohm. Na parte mais importante deste capítulo, mostramos que no limite adiabático as fases geométrica, encontrada pela teoria de Lewis e Riesenfeld, e a fase de Berry coincidem. Resultado este

que abre um caminho alternativo para a obtenção desta tão importante propriedade em alguns sistemas quânticos dependentes do tempo.

Capítulo 4

Estados coerentes

Sabemos da mecânica quântica que podemos obter um conjunto de estados $|n\rangle$, autoestados de H , capazes de descrever um oscilador harmônico quântico. Porém Schrödinger em 1926, interessou-se em encontrar uma determinada classe de estados da mecânica quântica que mostrasse, de alguma maneira, o comportamento clássico de um oscilador harmônico. Em seus estudos, Schrödinger percebeu que a distribuição gaussiana de uma função de onda pode ser obtida de uma determinada superposição das funções de onda correspondentes aos autovalores discretos do oscilador harmônico, onde esses novos estados seguiam o movimento clássico. Nessa época, não se conhecia a natureza da amplitude de probabilidade da função de onda, e por isso a natureza complexa da função de onda chamava a atenção de Schrödinger. Para ele, uma motivação bastante relevante era da possibilidade de descobrir estados quânticos que comportavam-se como no movimento de uma partícula clássica em um dado potencial.

4.1 Estados coerentes para o oscilador harmônico simples

Os estados coerentes do oscilador harmônico simples possuem diversas propriedades, entre as quais: a) minimizam a incerteza; b) seu pacote de ondas não se alarga; c) são autoestados do operador aniquilação associados ao oscilador. Estas propriedades tem estimulado a busca dos estados coerentes de sistemas mais gerais que o oscilador harmônico simples [32]. Em particular, Hartley e Ray [33] encontraram estados coerentes para o oscilador harmônico dependente do tempo utilizando a solução exata de Lewis e Riesenfeld na busca

de estados coerentes. Analisa-se em detalhe este caso, mas primeiro vejamos a construção dos estados coerentes para o oscilador harmônico simples cuja Hamiltoniana é dada por

$$H = p^2/2 + \omega_0^2 q^2/2, \quad (4.1)$$

onde ω_0^2 é uma frequência independente do tempo e p e q são operadores de momento e posição. A forma geral dos estados coerentes para um oscilador harmônico simples é dada por

$$|\alpha, t\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} e^{-i\omega_0(n+1/2)t} |\Phi_n\rangle, \quad (4.2)$$

onde $\alpha = u + iv$ é um número complexo arbitrário e $|\Phi_n\rangle$ é um autoestado de H ,

$$H|\Phi_n\rangle = \hbar\omega_0(n + 1/2)|\Phi_n\rangle. \quad (4.3)$$

Na última fórmula, já consta a expressão usual para as auto-energias E_n do oscilador harmônico simples,

$$E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (4.4)$$

Os autoestados $|\Phi_n\rangle$ podem ser obtidos por meios puramente algébricos, através dos operadores de criação e aniquilação definidos respectivamente por

$$a_0^\dagger = (2\hbar\omega_0)^{-1/2}(\omega_0 q - ip) \quad (4.5)$$

$$a_0 = (2\hbar\omega_0)^{-1/2}(\omega_0 q + ip). \quad (4.6)$$

Vale a relação de comutação

$$[a_0, a_0^\dagger] = 1. \quad (4.7)$$

Para se construir os autoestados do Hamiltoniano, lança-se mão da fatorização

$$H = \hbar\omega_0(a_0^\dagger a_0 + 1/2), \quad (4.8)$$

bem como das relações fundamentais

$$a_0|\Phi_n\rangle = n^{1/2}|\Phi_{n-1}\rangle, \quad (4.9)$$

$$a_0^\dagger|\Phi_n\rangle = n^{1/2}|\Phi_{n+1}\rangle. \quad (4.10)$$

Estas duas últimas relações mostram como os operadores criação e destruição atuam nos autoestados de energia bem definida. Para obter uma representação explícita dos autovetores de H , basta obter o estado fundamental $|\Phi_0\rangle$, o qual satisfaz

$$a_0|\Phi_0\rangle = 0. \quad (4.11)$$

Os demais autoestados podem ser obtidos fazendo atuar o operador criação sobre o estado fundamental um número suficiente de vezes,

$$|\Phi_n\rangle = (n!)^{-1/2} a_0^\dagger |\Phi_0\rangle. \quad (4.12)$$

Até agora, apenas se viu o tratamento usual [12] para o oscilador harmônico simples através de operadores de criação e destruição. Voltando a dar atenção aos estados coerentes definidos em (4.2), verifica-se que

$$a_0 a_0 |\alpha, t\rangle = \alpha e^{-i\omega_0 t} |\alpha, t\rangle. \quad (4.13)$$

Ou seja, os estados coerentes são autoestados do operador aniquilação, confirmando a propriedade c) citada no início deste capítulo.

As propriedades a) e b) decorrem das definições usuais

$$\langle O \rangle = \langle \psi | O | \psi \rangle \quad (4.14)$$

do valor esperado e

$$\Delta O = (\langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2)^{1/2} \quad (4.15)$$

da incerteza de um observável O qualquer, num estado arbitrário $|\psi\rangle$. Obtém-se, quando $|\psi\rangle = |\alpha, t\rangle$,

$$\Delta q = (\hbar/2\omega_0)^{1/2}, \quad (4.16)$$

$$\Delta p = (\hbar\omega_0/2)^{1/2}. \quad (4.17)$$

Consequentemente, as incertezas de posição e momento são constantes no tempo (não há alargamento do pacote do ondas, que é a propriedade b) mencionada). Além disso,

$$\Delta q \Delta p = \hbar/2, \quad (4.18)$$

que é o valor mínimo permitido pelas relações de incerteza de Hiesenberg, tal como afirma a propriedade a) mencionada.

Para finalizar esta breve revisão, considera-se o limite clássico dos estados coerentes do oscilador harmônico simples. O valor esperado do operador de posição num estado coerente definido por (4.2) é

$$\langle q \rangle = (2|\alpha|^2/\omega_0)^{1/2} \sin(\omega_0 t + \delta), \quad (4.19)$$

onde

$$\delta = \arctan(u/v), \quad (4.20)$$

sendo que, $\alpha = u + iv$. A trajetória clássica é dada por

$$q_{cl} = (2E/\omega_0^2)^{1/2} \sin(\omega_0 t + \delta). \quad (4.21)$$

Verifica-se que a solução clássica recai no valor esperado fazendo as transposições

$$E \rightarrow \hbar\omega_0|\alpha|^2, \quad \delta_{cl} \rightarrow \delta. \quad (4.22)$$

Calculando o valor esperado do operador Hamiltoniano num estado coerente, mostra-se que

$$\hbar\omega_0^2|\alpha|^2 = \langle H \rangle - \hbar\omega_0/2. \quad (4.23)$$

Ou seja, a relação (4.22) equivale a

$$E \rightarrow \langle H \rangle - \hbar\omega_0/2, \quad \delta_{cl} \rightarrow \delta. \quad (4.24)$$

Com isto, mostra-se que a energia associada a trajetória clássica corresponde ao valor esperado de H menos a energia de ponto zero. Desta maneira, verifica-se que os estados coerentes correspondem, de fato, às trajetórias clássicas.

4.2 Estados coerentes e teoria de Lewis e Riesenfeld

Até agora analisou-se apenas o caso do oscilador harmônico simples. Considerando também uma dependência temporal explícita na frequência, é de interesse saber se, de alguma forma, é possível obter os estados coerentes. Mais propriamente, é de interesse buscar estados coerentes generalizados para o oscilador harmônico quântico dependente do tempo. Não se deve esperar que todas as propriedades dos estados coerentes para o oscilador harmônico simples sejam preservadas, pois a dependência temporal inclui mudanças qualitativas em qualquer sistema físico. No entanto, pode-se esperar que os estados coerentes generalizados possuam os estados coerentes usuais como caso particular.

Vejamos um exemplo de estados coerentes num oscilador harmônico com dependência temporal explícita na frequência. O operador invariante para este caso terá a forma

$$I = \frac{1}{2}[\rho^2 p^2 - \rho \dot{\rho}(qp + pq) + \rho^2 \dot{q}^2] + \frac{1}{2}q^2/\rho^2 \quad (4.25)$$

onde $\rho(t)$ satisfaz a equação de Pinney

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{1}{\rho^3(t)}. \quad (4.26)$$

Uma das propriedades básicas dos estados coerentes do oscilador harmônico simples é o fato de serem autoestado do operador aniquilação. É razoável suspeitar que os estados coerentes do oscilador quântico dependente do tempo, se existirem, sejam autoestados de algum operador que cumpra o papel de operador de aniquilação para o oscilador harmônico quântico dependente do tempo. Portanto, é de interesse introduzir operadores de criação e aniquilação para o oscilador dependente do tempo e analisar as propriedades dos autoestados do operador aniquilação. Já no trabalho de Lewis e Riesenfeld [22] foram introduzidos estes operadores dados por

$$a^\dagger = (2\hbar)^{-1/2}[q/\rho - i(\rho p - \dot{\rho}q)] \quad (4.27)$$

$$a = (2\hbar)^{-1/2}[q/\rho + i(\rho p - \dot{\rho}q)]. \quad (4.28)$$

Estes operadores satisfazem a

$$[a^\dagger, a] = 1 \quad (4.29)$$

e colocam o invariante exato (4.25) na forma fatorada

$$I = \hbar(a^\dagger a + 1/2). \quad (4.30)$$

Esta é a expressão análoga a (4.8) para o oscilador harmônico simples. Entretanto, no caso do oscilador dependente do tempo o papel central não é desempenhado pelo Hamiltoniano, mas pelo invariante exato.

A atuação dos operadores a e $a^\dagger$ nas autofunções de I são dadas por

$$a\psi(q, t) = \sqrt{n}\psi_{n-1}(q, t) \quad (4.31)$$

$$a^\dagger\psi(q, t) = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}(q, t). \quad (4.32)$$

Ou seja, a e $a^\dagger$ cumprem o papel de operadores de criação e aniquilação, pois transformam um autoestado do nível n num autoestado de um nível superior ou anterior, respectivamente. Pode-se ver também que fazendo $\rho \rightarrow \omega^{-1/2}$ nas fórmulas (4.31) e (4.32) recupera-se a_0 e $a_0^\dagger$.

A exemplo do que fizemos para o oscilador harmônico simples, a próxima etapa é buscar autoestados do operador aniquilação, tais que

$$a|\alpha, t\rangle_T = \alpha(t)|\alpha, t\rangle_T, \quad (4.33)$$

onde $\alpha(t)$ são os autovalores. Como o operador aniquilação depende do tempo através da solução $\rho(t)$ da equação de Pinney, os seus autovalores devem depender do tempo, em princípio. O mesmo vale para as autofunções $|\alpha, t\rangle_T$.

Como proposta para os autoestados do operador aniquilação, será assumida a forma

$$|\alpha, t\rangle_T = \sum_n^{\infty} d_n \exp(i\alpha_n(t)) |\psi_n\rangle \quad (4.34)$$

onde d_n são coeficientes a ser determinados, $\alpha_n(t)$ são as fases de Lewis e Riesenfeld para o oscilador dependente do tempo e $|\psi_n\rangle$ são as autofunções de $I(t)$ dados na representação de coordenada.

Expansões do tipo (4.34) são sempre possíveis, para qualquer vetor de estado no espaço de Hilbert, pois o conjunto dos vetores

$$\exp(i\alpha_n(t)) |\psi_n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (4.35)$$

é completo. Em particular, é possível expressar os autoestados do operador a em termos de uma combinação linear do tipo (4.34). A determinação dos números d_n será feita a seguir a partir da Eq. (4.33), assim

$$\sum_n^{\infty} d_n \sqrt{n} \exp(i\alpha_n(t)) |\psi_{n-1}\rangle = \alpha(t) \sum_n^{\infty} d_n \exp(i\alpha_n(t)) |\psi_n\rangle. \quad (4.36)$$

Rearranjando o somatório no lado esquerdo da última equação e usando a relação de ortonormalidade dos autoestados do operador invariante $I(t)$, segue que

$$d_{n+1} \sqrt{n+1} \exp(i\alpha_{n+1}(t)) = \alpha(t) d_n \exp(i\alpha_n(t)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (4.37)$$

Utilizando a fórmula para as fases de Lewis para o oscilador dependente do tempo, conclui-se que

$$d_{n+1} = \frac{d_n}{\sqrt{n+1}} \exp\left(i \int_0^t \frac{dt'}{\rho^2(t')}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (4.38)$$

Com esta relação, demonstra-se que é possível tornar os números d_n constantes no tempo, bastando para isto escolher

$$\alpha(t) = \alpha \exp\left(-i \int_0^t \frac{dt'}{\rho^2(t')}\right), \quad (4.39)$$

onde α (sem indicação de dependência temporal) é uma constante, possivelmente complexa. Com esta escolha, que é adequada para os nossos propósitos, converte-se a relação (4.38) na fórmula de recorrência

$$d_{n+1} = \frac{\alpha d_n}{\sqrt{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (4.40)$$

Por indução, temos a expressão geral

$$d_n = \frac{\alpha^n d_0}{\sqrt{n!}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (4.41)$$

Restam ainda constantes arbitrárias em excesso a eliminar. Usando a forma das constantes d_n , decorre que

$$|\alpha, t\rangle_T = d_0 \sum_0^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp(i\alpha_n(t)) |\psi_n\rangle. \quad (4.42)$$

Impondo a normalização, verifica-se que

$$d_0 = e^{-|\alpha|^2/2}. \quad (4.43)$$

De forma que, os estados coerentes generalizados seguinte forma

$$|\alpha, t\rangle_T = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_0^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp(i\alpha_n(t)) |\psi_n\rangle. \quad (4.44)$$

Tendo construído os autovetores do operador de aniquilação, resta analisar suas propriedades para verificar se é possível encará-los como estados coerentes generalizados. Em primeiro lugar, os estados $|\alpha, t\rangle_T$ recaem nos estados coerentes $|\alpha, t\rangle$ do oscilador harmônico simples quando não há dependência temporal explícita. Para obter este caso limite, basta fazer as transposições

$$\omega \rightarrow \omega_0 \quad , \quad \rho \rightarrow \omega_0^{-1/2}. \quad (4.45)$$

Neste caso, as fases de Lewis são

$$\alpha_n(t) = -(n + 1/2)\omega_0 t, \quad (4.46)$$

o invariante exato I torna-se múltiplo do operador Hamiltoniano

$$I = \frac{H}{\omega_0} \quad (4.47)$$

e os autovetores $|\psi_n(t)\rangle$ de I recaem nos autovetores $|\Phi_n(t)\rangle$ para o oscilador harmônico simples.

Outra das propriedades fundamentais dos estados coerentes do oscilador harmônico simples é a de corresponderem ao valor mínimo do produto das incertezas de posição e momento. Além disso, não há alargamento do pacote de onda nos estados coerentes usuais. Calculando as incertezas num estado $|\alpha, t\rangle_T$, conclui-se que

$$(\Delta q)^2 = \frac{\hbar}{2} \rho^2 \quad , \quad (\Delta p)^2 = \frac{\hbar}{2} (\dot{\rho}^2 + \frac{1}{\rho^2}). \quad (4.48)$$

De maneira que o produto das incertezas resulta ser

$$\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2} (1 + \rho^2 \dot{\rho}^2)^{1/2}. \quad (4.49)$$

Ou seja, o valor mínimo permitido pela relação de Hiesenberg é excedido.

O caráter da evolução temporal depende somente da solução $\rho(t)$ da equação de Pinney. São concebíveis situações em que a incerteza da posição diminui com o tempo enquanto a incerteza do momento aumenta, ou vice-versa. Este tipo de fenômeno é chamado de colimação ("squeezing") do pacote de ondas e estes estados são conhecidos como estados comprimidos [34].

4.3 Discussão

Em resumo, os estados coerentes generalizados do oscilador harmônico dependente do tempo preservam algumas das propriedades do oscilador harmônico simples, mas não todas. Os estados coerentes generalizados são autoestados do operador aniquilação para o oscilador dependente do tempo e correspondem à trajetória clássica. Entretanto, não são estados em que o produto das incertezas da posição e momento atinge o valor mínimo, e a largura do pacote de ondas não é constante. Finalmente, como dito antes, os estados coerentes generalizados reduzem-se aos usuais no caso estacionário. Isto completa a revisão do trabalho de Hartley e Ray sobre estados coerentes para o oscilador harmônico dependente do tempo.

Desde o trabalho de Hartley e Ray, estados coerentes generalizados foram introduzidos para diversos sistemas. Por exemplo, Ceverró e Villaroel [35] consideraram estados coerentes para sistemas quânticos com dissipação.

No próximo capítulo, construiremos os estados coerentes generalizados para um oscilador generalizado com massa, frequência dependentes do tempo e submetido a uma força de fricção linear também dependente do tempo com a forma $\vec{F} = -\gamma(t)v$. Isto sendo contribuição original nossa [11].

Capítulo 5

Oscilador harmônico generalizado com massa e frequência dependente do tempo

Sistemas quânticos dependentes do tempo têm sido tema de estudos extensivos por muitos anos e ainda continuam sendo um tópico central em física quântica [3, 1]. Em particular, o estudo de osciladores harmônicos dependentes do tempo tem atraído um grande interesse dos físicos teóricos nas últimas décadas.

Na literatura existem muitos artigos discutindo sistemas deste tipo. Eles têm considerado os seguintes osciladores [26, 36, 2]: (1) Oscilador amortecido; (2) Oscilador com massa e/ou frequência dependente do tempo; (3) Oscilador generalizado com parâmetros dependentes do tempo; (4) Oscilador generalizado forçado não-estacionário; (5) Oscilador harmônico amortecido com massa e frequência dependente do tempo e (6) Oscilador amortecido com um potencial quadrático inverso. Contudo, oscilador harmônico generalizado com massa e frequência dependente do tempo sujeito a uma força de fricção proporcional a velocidade é raramente mencionado. E mais, a derivação explícita da fase dinâmica e de Berry para casos específicos deste oscilador generalizado amortecido não-estacionário, para melhorar nosso conhecimento, ainda não foi considerado na literatura.

Neste capítulo, estudaremos, de maneira original, o oscilador harmônico generalizado unidimensional com massa e frequência dependente do tempo, movendo-se sob a influência de uma força de fricção linear na velocidade, de um ponto de vista quântico e clássico. Resolveremos a equação clássica de movimento deste sistema para alguns casos espe-

ciais e mostraremos que a dependência no tempo da massa causa uma atenuação adicional ao sistema. Combinaremos o método de Lewis-Riesenfeld e o invariante quadrático para resolvermos analiticamente e exatamente a equação de Schrödinger dependente do tempo para este sistema. Depois, construiremos estados coerentes para o sistema quantizado e os empregaremos para investigar algumas propriedades quânticas do sistema tais como flutuações quânticas da coordenada e momento bem como do produto da incerteza. Derivaremos as fases geométrica, dinâmica e de Berry para este sistema não-estacionário e finalmente as avaliaremos para três casos especiais.

5.1 Oscilador clássico e quântico não-estacionário

5.1.1 Dinâmica clássica

Consideremos uma breve descrição clássica para o oscilador harmônico amortecido com massa e frequência dependente do tempo. A Hamiltoniana clássica é dada por

$$H(t) = e^{-\Lambda(t)} \frac{p^2}{2m_0} + e^{\Lambda(t)} \frac{m_0 \omega^2(t) q^2}{2} + \frac{y(t)(pq + qp)}{2}, \quad (5.1)$$

onde m_0 é a massa independente do tempo, $\omega^2(t) = k/m$ representa a frequência do sistema, sendo $k(t)$ a "constante" de Hooke dependente do tempo e $m(t)$ a massa dependente do tempo, $y(t)$ é uma função real dependente do tempo e com dimensão de frequência, $p(t)$ e $q(t)$ representam, respectivamente, a coordenada e o momento canonicamente conjugados e $\Lambda(t)$ é dado por

$$\Lambda(t) = \int_0^t \left(\frac{\dot{m} + \gamma}{m} \right) d\tau, \quad (5.2)$$

onde γ representa o coeficiente de fricção dependente do tempo e o ponto significa derivada em relação ao tempo. Agora, usando a Eq. (5.1) e as equações de Hamilton, podemos obter as equações de movimento

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = e^{-\Lambda(t)} \frac{p}{m_0} + yq \quad (5.3)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -e^{\Lambda(t)} m_0 \omega^2 q - yp. \quad (5.4)$$

Derivando a Eq. (5.3) com relação ao tempo, encontramos que

$$\ddot{q} = e^{-\Lambda(t)} \frac{\dot{p}}{m_0} + \frac{p}{m_0} \frac{de^{-\Lambda(t)}}{dt} + \dot{y}q + y\dot{q}. \quad (5.5)$$

Podemos simplificar esta equação de modo que a equação clássica de movimento para a coordenada $q(t)$ ficará na forma

$$\ddot{q} + \left(\frac{\dot{m} + \gamma}{m} \right) \dot{q} + \Omega^2(t)q = 0, \quad (5.6)$$

onde $\Omega(t)$ é a frequência modificada dada por

$$\Omega^2(t) = \omega^2 - y^2 - \dot{\Lambda}y - \dot{y}. \quad (5.7)$$

Na Eq. (5.6), notamos a presença do termo $\dot{m}$. Consequentemente, a dependência no tempo da massa causa uma atenuação adicional ao sistema (para $\dot{m} > 0$). Assim, $\dot{m}$ comporta-se como uma fricção efetiva, isto é, causa um efeito equivalente a uma força de amortecimento proporcional a velocidade.

No que segue, vamos considerar o caso especial onde $y(t) = 0$, $m(t) = m_0 e^{\eta t}$, $k(t) = k_0 e^{\eta t}$ e $\gamma(t) = \gamma_0 m(t)$ com m_0 , k_0 e γ_0 constantes e η sendo uma constante real e positiva. Para este caso, a Eq. (5.6) torna-se

$$\ddot{q} + (\eta + \gamma_0)\dot{q} + \omega_0^2(t)q = 0, \quad (5.8)$$

onde $\omega_0^2 = (k_0/m_0)$. A solução da Eq. (5.8) é conhecida como

$$q(t) = A e^{-(\eta + \gamma_0)t/2} \sin(\Omega_0 t + \delta), \quad (5.9)$$

onde A e δ são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais e $\Omega_0^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\eta + \gamma_0}{2}\right)^2$ com $\Omega_0^2 > 0$. Da Eq. (5.9) notamos claramente que a dependência no tempo da massa dá origem a um amortecimento adicional η na amplitude do sistema. Neste ponto, será importante observar que, como vimos acima, um aumento exponencial na massa causa um efeito equivalente a uma força de fricção proporcional à velocidade. Como consequência, um oscilador cuja massa varia com o tempo tem uma equação de movimento idêntica a de um oscilador com massa constante e submetido a uma força de amortecimento. Aqui temos dois sistemas completamente diferentes, um oscilador com massa crescendo exponencialmente e outro oscilador com massa constante sujeito a uma força de amortecimento, ambos descritos pela mesma equação clássica de movimento [37]. De fato, podemos dizer, em princípio que a Eq. (5.8) descreve três sistemas físicos diferentes que são: um oscilador com massa variando no tempo, um oscilador amortecido com massa constante e um oscilador com massa dependente do tempo e sob uma força de amortecimento linear na velocidade. Este fato é impressionante e não-usual na física e, como veremos mais a

frente, encontraremos resultados similares para a contrapartida quântica deste sistema. E mais, a Hamiltoniana independente do tempo descrevendo este sistema pode ser obtida diretamente da Eq. (5.1) como

$$H(t) = e^{-(\eta+\gamma_0)t} \frac{p^2}{m_0} + e^{(\eta+\gamma_0)t} \frac{m_0 \omega(t)_0 q^2}{2}. \quad (5.10)$$

Este Hamiltoniano para $\eta = 0$ ou $\gamma_0 = 0$ é conhecido na literatura como Hamiltoniano de Caldirola-Kanai [3] e é frequentemente usado para estudos de sistemas quânticos dependentes do tempo em várias áreas da física.

Como outro exemplo, consideremos o caso no qual $m(t) = m_0 e^{\eta t}$, $k(t) = k_0$, $\gamma(t) = 0$ e $y(t) = 0$. Assim, a Eq. (5.6) torna-se

$$\ddot{q} + \eta \dot{q} + \omega_0^2(t) e^{-\eta t} q = 0, \quad (5.11)$$

cujas solução é dada por

$$q(t) = e^{-\eta t/2} \left[A J_1 \left(\frac{2\omega_0}{\eta} e^{-\eta t/2} \right) + B Y_1 \left(\frac{2\omega_0}{\eta} e^{-\eta t/2} \right) \right], \quad (5.12)$$

onde J_1 e Y_1 são as funções de Bessel de primeiro e segundo tipo, respectivamente, e A e B são constantes.

Finalmente, consideremos o caso onde $m(t) = m_0 e^{\eta t}$, $k(t) = k_0 e^{-\eta t}$, $\gamma(t) = 0$ e $y(t) = 0$. Neste caso, podemos escrever a Eq. (5.6) como

$$\ddot{q} + \eta \dot{q} + \omega_0^2(t) e^{-2\eta t} q = 0, \quad (5.13)$$

cujas solução é conhecida como

$$q(t) = C \cos \left(\frac{e^{-\eta t} \omega_0}{\eta} \right) + D \sin \left(\frac{e^{-\eta t} \omega_0}{\eta} \right), \quad (5.14)$$

onde C e D são constantes.

5.1.2 Descrição quântica

Para obtermos a descrição quântica do oscilador generalizado não-estacionário, devemos resolver a equação de Schrödinger associada com a Hamiltoniana (5.1)

$$H(t) \Psi(q, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(q, t)}{\partial t}, \quad (5.15)$$

onde p é definido como $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$ com p e q satisfazendo a relação de comutação $[q, p] = i\hbar$. As soluções da Eq. (5.15) podem ser obtidas com a ajuda do método dos invariante

dinâmico elaborado por Lewis e Riesenfeld [22]. Seguindo este método, procuraremos por um operador Hermitiano não-trivial $I(t)$ que satisfaz a equação

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[I, H] + \frac{\partial I}{\partial t} = 0. \quad (5.16)$$

Se o invariante exato $I(t)$ (constante de movimento) não contém nenhum termo com derivadas no tempo, as soluções da equação de Schrödinger são simplesmente escritas em termos do conjunto ortonormalizado de autofunções $\phi_n(q, t)$ de $I(t)$,

$$I(t)|n, t\rangle = \lambda_n|n, t\rangle, \quad (5.17)$$

e uma função de fase $\beta_n(t)$ como

$$|n, t\rangle = e^{i\beta_n(t)}|n, t\rangle. \quad (5.18)$$

Aqui, os autovalores λ_n são independentes do tempo e as funções de fase $\beta_n(t)$ são determinadas a partir da equação

$$\hbar \frac{d\beta_n(t)}{dt} = \langle n, t | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H | n, t \rangle, \quad (5.19)$$

com a condição de ortonormalidade $\langle n', t | n, t \rangle = \delta_{n'n}$. Deste modo, vamos considerar a existência de um operador invariante quadrático escrito na seguinte forma

$$I(t) = \alpha(t)q^2 + \beta(t)p^2 + \gamma(t)\{q, p\}, \quad (5.20)$$

onde $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $\gamma(t)$ são funções reais dependentes do tempo a serem determinadas. O fato de exigirmos que sejam funções reais é para garantir que $I(t)$ seja Hermitiano.

Com o operador escrito desta forma e usando o Hamiltoniano (5.1), a Eq. (5.16) ficará na forma

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} = & \frac{1}{2}(\dot{\alpha}q^2 + \dot{\beta}p^2 + \dot{\gamma}\{q, p\}) + \\ & \frac{1}{4i\hbar}[\alpha q^2 + \beta p^2 + \gamma\{q, p\}, e^{-\Lambda(t)}\frac{p^2}{2m_0} + e^{\Lambda(t)}\frac{m_0\omega(t)^2 q^2}{2} + \frac{y(t)(pq + qp)}{2}]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Para dar continuidade, precisamos obter os comutadores não nulos na equação acima.

Para isto, usaremos que

$$\begin{aligned} [p^2, q^2] &= -2i\hbar\{q, p\} \quad , \quad [q^2, p^2] = 2i\hbar\{q, p\} \\ [p^2, p^2] &= [q^2, q^2] = 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Substituindo a Eq. (5.22) na Eq. (5.21), usando que $N(t) = m_0 e^{\Lambda(t)}$ e fazendo uma pequena álgebra, encontramos que os termos não nulos serão os seguintes comutadores

$$\frac{\alpha}{N(t)}[q^2, p^2] = \frac{2\alpha i\hbar}{N(t)}\{q, p\}, \quad (5.23)$$

$$\beta N(t)\omega^2[p^2, q^2] = -2\beta N(t)\omega^2 i\hbar\{q, p\}, \quad (5.24)$$

$$\gamma N(t)\omega^2\{q, p\}, q^2] = -4i\hbar\gamma N(t)\omega^2 q^2, \quad (5.25)$$

$$\frac{\gamma}{N(t)}\{q, p\}, p^2] = \frac{4i\hbar\gamma p^2}{N(t)}, \quad (5.26)$$

$$\alpha y[q^2, \{q, p\}] = 4\alpha y i\hbar q^2, \quad (5.27)$$

$$\beta y[p^2, \{q, p\}] = -4\beta y i\hbar p^2. \quad (5.28)$$

Substituindo as Eqs. (5.23), (5.24), (5.25), (5.26), (5.27), (5.28) na Eq. (5.21) temos

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{2}(\dot{\alpha}q^2 + \dot{\beta}p^2 + \dot{\gamma}\{q, p\}) + \quad (5.29)$$

$$\frac{1}{4i\hbar}[2i\hbar(\frac{\alpha}{N(t)} - \beta N(t)\omega^2)\{q, p\} + \quad (5.30)$$

$$4i\hbar(\frac{\gamma}{N(t)} - \beta y)p^2 - 4i\hbar(\alpha y - \gamma N(t)\omega^2)q^2]. \quad (5.31)$$

Ainda podemos organizar melhor esta equação agrupando os coeficientes de p^2 , q^2 e $\{q, p\}$ de modo a obter

$$\frac{dI}{dt} = (\frac{\dot{\alpha}}{2} + \alpha y - \gamma N(t)\omega^2)q^2 + (\frac{\dot{\beta}}{2} + \frac{\gamma}{N(t)} - \beta y)p^2 + \quad (5.32)$$

$$(\frac{\dot{\gamma}}{2} + \frac{\alpha}{2N(t)} - \frac{\beta N(t)\omega^2}{2})\{q, p\} = 0. \quad (5.33)$$

De acordo com o método que estamos usando, devemos fazer $\dot{I} = 0$ e para que esta equação seja satisfeita os coeficientes de p^2 , q^2 e $\{q, p\}$ devem ser nulos. Assim, obtemos as seguintes equações

$$\dot{\alpha} = 2(-\alpha y + \gamma N(t)\omega^2), \quad (5.34)$$

$$\dot{\beta} = 2(-\frac{\gamma}{N(t)} + \beta y), \quad (5.35)$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{\alpha}{N(t)} + \beta N(t)\omega^2. \quad (5.36)$$

Seguindo nosso roteiro, o que faremos adiante será no intuito de determinar a forma da funções $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $\gamma(t)$, a fim de conhecermos o operador $I(t)$. A exemplo do que fizemos no segundo capítulo, vamos introduzir, por conveniência, uma outra função, $\sigma(t)$, tal que

seu quadrado seja uma função real dependente do tempo. Definiremos então $\beta(t) = \rho^2(t)$, o que implica em

$$\dot{\beta} = 2\sigma\dot{\sigma}. \quad (5.37)$$

Desta maneira, a Eq. (5.35) ficará na forma $\gamma(t) = yN(t)\rho^2 - \rho\dot{\rho}$. Derivaremos agora esta equação com respeito ao tempo, a fim de a igualarmos à Eq. (5.36) e encontraremos uma relação para a função $\alpha(t)$ como segue

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt}(yN(t)\rho^2 - \rho\dot{\rho}N(t)) = -\frac{\alpha}{N(t)} + \beta N(t)\omega^2. \quad (5.38)$$

Agora igualando as Eqs. (5.1.2) e (5.36) obtemos que a função $\alpha(t)$

$$\alpha(t) = \rho^2 N^2(t)\omega^2 - \frac{d}{dt}(yN(t)\rho^2 - \rho\dot{\rho}N(t)). \quad (5.39)$$

Finalmente, aplicando as expressões encontradas para as funções $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $\gamma(t)$ na Eq. (2.29) encontramos a forma explícita de $I(t)$ dada por

$$I = \frac{1}{2} \left[(\rho^2 m \omega^2 - \frac{d}{dt}(y\rho^2 N(t) - \rho\dot{\rho}N(t)))N(t)q^2 + \rho^2 p^2 + (yN(t)\rho^2 - \rho\dot{\rho}) \{q, p\} \right], \quad (5.40)$$

onde $\rho(t)$ é uma função real dependente do tempo e satisfaz a equação de Milne-Pinney

$$\ddot{\rho} + \left(\frac{\dot{m} + \gamma}{m} \right) \dot{\rho} + \Omega^2(t)\rho = \frac{1}{N^2(t)\rho^3}. \quad (5.41)$$

Com o uso da equação anterior e uma pequena álgebra, encontramos a forma mais simplificada para este operador dada por

$$I = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{q}{\rho} \right)^2 + [\rho p - N(t)(\dot{\rho} - yp)q]^2 \right). \quad (5.42)$$

Com $N(t) = m_0 e^{\Lambda(t)}$. Assim, o operador invariante quadrático e que fica completamente determinado a menos da forma de $N(t)$ e de $\omega(t)$.

5.2 Autoestados e autovalores de $I(t)$

A priori, não é trivial saber o resultado da atuação do operador $I(t)$ num dado estado quântico ϕ . Portanto, para encontrar as autofunções e autovalores deste operador será conveniente considerarmos uma transformação unitária sobre o autoestado ϕ . Assim, definimos o seguinte operador unitário

$$U = \exp \left(\frac{-im(\dot{\rho} - yp)q^2}{2\hbar\rho} \right), \quad (5.43)$$

cuja atuação em ϕ produz o estado

$$\phi'_n(q, t) = U\phi(q, t), \quad (5.44)$$

com U dado pela Eq. (5.43). Esta transformação unitária nos permite escrever a equação de autovalores para $I(t)$ como

$$I'\phi'_n(q, t) = \lambda\phi'_n(q, t), \quad (5.45)$$

e como mostrado no apêndice A, o operador $I(t)$ transformado terá a seguinte forma

$$I' = UIU^\dagger = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{\rho} \right)^2 - \frac{\hbar^2 \rho^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2}. \quad (5.46)$$

Notemos a grande semelhança desta forma de $I'(t)$ com um operador Hamiltoniano usual para um oscilador harmônico unidimensional. Se definirmos a variável $\sigma = q/\rho$ e aplicarmos I' na autofunção $\phi'_n(t)$, com

$$\phi'_n(t) = \frac{\varphi_n(\sigma)}{\rho^{1/2}}, \quad (5.47)$$

onde o fator $\rho^{1/2}$ foi introduzido na relação entre $\varphi_n(t)$ e $\phi_n(t)$, tal que a condição de normalização seja satisfeita, a equação de autovalores para $I'(t)$ ficará escrita na forma

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2} \right) \varphi_n(\sigma, t) = \lambda_n \varphi_n(\sigma, t). \quad (5.48)$$

Portanto a transformação unitária sobre a equação de autovalores para $I(t)$ nos leva a um problema cuja solução é bem estabelecida. De maneira que podemos mapear a equação de autovalores para o operador invariante transformado na já conhecida solução da equação de Schrödinger para um oscilador harmônico unidimensional. Assim, podemos escrever que $\varphi_n(t)$ será dada por

$$\varphi_n(\sigma, t) = \left[\frac{1}{\pi^{1/2} \hbar^{1/2} 2^n n!} \right]^{1/2} \exp(-\sigma^2/2\hbar) H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{1/2} \sigma \right]. \quad (5.49)$$

Usando as Eq. (5.47) e lembrando que $\phi'_n(q, t) = U\phi(q, t)$, obtemos finalmente que a autofunção do operador $I(t)$ é escrita na forma

$$\phi_n(q, t) = \left[\frac{1}{\pi^{1/2} \hbar^{1/2} 2^n n!} \right]^{1/2} \exp \left(\frac{iN(t)}{2\hbar\rho} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{N(t)\rho^2} - y\rho \right) q^2 \right) H_n \left[\left(\frac{1}{\hbar} \right)^{1/2} \frac{q}{\rho} \right], \quad (5.50)$$

com os respectivos autovalores

$$\lambda_n = \hbar (n + 1/2), \quad (5.51)$$

e H_n são os usuais polinômios de Hermite de ordem n . Com isto resolvemos uma parte do problema, que consistia de encontrarmos as soluções para o Hamiltoniano dado na Eq. (5.1). De posse desta solução e da fase total encontrada na seção anterior, a solução da equação de Schrödinger é dada por

$$\Psi_n(q, t) = \exp i\beta_n(t) \left[\frac{1}{\pi^{1/2} \hbar^{1/2} 2^n n! \rho} \right]^{1/2} \exp \left[\frac{im}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{i}{m\rho^2} - y(t) \right) q^2 \right] H_n \left(\frac{1}{\hbar} \right)^{1/2} \left(\frac{q}{\rho} \right). \quad (5.52)$$

A evolução de um estado geral de Schrödinger pode ser escrita como $\Psi(q, t) = \sum_n c_n \psi_n(q, t)$, onde c_n são coeficientes independentes do tempo e a função de fase de Lewis dada pela Eq. (5.19) é dada por [26, 22]

$$\beta_n(t) = - \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^t \frac{d\tau}{\rho^2(t)}. \quad (5.53)$$

Aqui, é interessante notar que, em analogia com o oscilador harmônico, podemos obter a densidade de probabilidade do estado fundamental ($n = 0$) para este sistema não-estacionário que volta a ser Gaussiana

$$|\psi_0(q, t)|^2 = \left[\frac{1}{\pi^{1/2} \hbar^{1/2} \rho} \right] \exp \left[-\frac{q^2}{\hbar \rho^2} \right]. \quad (5.54)$$

Em contraste ao oscilador harmônico padrão, a densidade de probabilidade do estado de vácuo tem uma dependência com o tempo em termos de $\rho(t)$ [38]. Contudo, o valor de $\rho(t)$ está associado com a largura desta densidade de probabilidade.

5.3 Fases geométrica, dinâmica e de Berry

Nesta seção, estamos interessados em derivar as fases geométrica, dinâmica e de Berry para o oscilador harmônico amortecido generalizado e dependente do tempo. Vamos primeiro considerar a fase geométrica. Da Eq. (5.19) temos que a fase geométrica é dada por

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \langle n, t | \frac{\partial}{\partial t} | n, t \rangle d\tau. \quad (5.55)$$

Lembrando que o último termo do lado direito da Eq. (5.19) corresponde a usual fase dinâmica, isto é, $\gamma_n(t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t \langle n | -H | n \rangle d\tau$. Agora, assumindo que o invariante é T-periódico temos que os autoestados de $I(t)$ satisfazem a relação $|n(T)\rangle = |n(0)\rangle$. Isso significa que podemos reescrever a Eq. (5.55) como [10]

$$\gamma_n(T) = i \int_0^T \langle n, t | \frac{\partial}{\partial t} | n, t \rangle d\tau. \quad (5.56)$$

Para encontrar a fase dada pela equação anterior, primeiro vamos definir os operadores de criação e aniquilação canônicos e dependentes do tempo da seguinte forma

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{q}{\rho}\right) + i[\rho p - N(t)(\dot{\rho} - \rho y)q] \right] \\ a^\dagger &= \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{q}{\rho}\right) - i[\rho p - N(t)(\dot{\rho} - \rho y)q] \right]. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Esses operadores satisfazem a relação canônica de comutação $[a, a^\dagger] = 1$ e quando atuam num estado $|n\rangle$ produzem os seguintes resultados $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ e $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$. Derivando esta relação com respeito ao tempo e fazendo uma pequena álgebra, chegamos a

$$\langle n | \frac{\partial}{\partial t} | n \rangle = \langle n-1 | \frac{\partial}{\partial t} | n-1 \rangle + \langle n | \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} | n-1 \rangle n^{-1/2}. \quad (5.58)$$

Neste momento, será muito útil escrevermos os operadores q e p em termos dos operadores a e $a^\dagger$. Isto pode ser feito a partir da Eq. (5.57), de modo que temos

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \rho (a + a^\dagger) \quad (5.59)$$

e

$$p = \frac{-i}{\rho} \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \rho (a - a^\dagger) - \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\rho y - \dot{\rho}) N(t) (a + a^\dagger). \quad (5.60)$$

Agora, derivando a relação $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ com respeito ao tempo substituindo as Eqs. (5.59) e (5.60) neste resultado, encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial a^\dagger}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{-2\dot{\rho}}{\rho} + i\dot{N}(\rho\dot{\rho} - \rho^2 y) + iN(t)(\rho\ddot{\rho} - \rho^2\dot{y} + \rho\dot{\rho}y - (\dot{\rho}^2 - \dot{\rho}\rho y)a \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i[\dot{N}\rho\dot{\rho} - \dot{N}\rho^2 y + N(t)\rho\ddot{\rho} - N(t)\rho^2\dot{y} - N(t)\dot{\rho}^2]a^\dagger \right] \right). \end{aligned} \quad (5.61)$$

Assim, substituindo a Eq. (5.61) na Eq. (5.58), teremos que

$$\langle n | \frac{\partial}{\partial t} | n \rangle = \langle n-1 | \frac{\partial}{\partial t} | n-1 \rangle + \frac{i}{2} \left[N(t) (\ddot{\rho}\rho - \dot{\rho}^2 - \rho^2\dot{y}) + \dot{N} (\rho\dot{\rho} - \rho^2 y) \right]. \quad (5.62)$$

Este resultado pode ainda ser escrito como

$$\langle n | \frac{\partial}{\partial t} | n \rangle = \langle 0 | \frac{\partial}{\partial t} | 0 \rangle + \frac{in}{2} \left[N(t) (\ddot{\rho}\rho - \dot{\rho}^2 - \rho^2\dot{y}) + \dot{N} (\rho\dot{\rho} - \rho^2 y) \right]. \quad (5.63)$$

Agora, convenientemente escolhemos o gauge de Lewis para avaliar o primeiro termo da equação acima. Neste caso, é dado por

$$\langle 0 | \frac{\partial}{\partial t} | 0 \rangle = \frac{i}{4} \left[N (\ddot{\rho}\rho - \dot{\rho}^2 - \rho^2\dot{y}) + \dot{N} (\rho\dot{\rho} - \rho^2 y) \right]. \quad (5.64)$$

Finalmente, substituindo na Eq. (5.64) junto com a Eq. (5.41) na Eq. (5.63) anterior, encontramos que

$$\langle n | i \frac{\partial}{\partial t} | n \rangle = -\frac{(n+1/2)}{2} \left[-\frac{1}{N(t)\rho^2} + \rho^2 N(t)\omega_d^2 - N(t)\dot{\rho}^2 \right]. \quad (5.65)$$

Da expressão anterior, podemos escrever que a fase geométrica é dada pela expressão

$$\gamma_n(T) = -\frac{(n+1/2)}{2} \int_0^T \left[-\frac{1}{N(t)\rho^2} + \rho^2 N(t)\omega_d^2 - N(t)\dot{\rho}^2 \right] d\tau. \quad (5.66)$$

Para encontrarmos a fase de Berry, faremos uso do limite adiabático assintótico. Para este propósito, vamos voltar nossa atenção para a de Milne-Pinney, Eq. (5.41). No limite adiabático $\dot{\rho}$ é tão pequeno que pode ser negligenciado. Então, a solução desta equação será escrita como

$$\frac{1}{N(t)\rho^2} = \omega_d \left[1 - \frac{1}{\omega_d^2} \left(\frac{\dot{N}y + N\dot{y}}{N} \right) \right]^2. \quad (5.67)$$

Expandindo esta solução com respeito a

$$\frac{1}{\omega_d^2} \left(\frac{\dot{N}y + m\dot{y}}{N} \right) \ll 1, \quad (5.68)$$

podemos escrever a Eq. (5.67) como

$$\frac{1}{N\rho^2} = \omega_d - \frac{1}{2\omega_d} \left(\frac{\dot{N}y + m\dot{y}}{N} \right). \quad (5.69)$$

Assim, substituindo a Eq.(5.69) na Eq. (5.53), obtemos a fase de Lewis na evolução de um ciclo adiabático é dada por

$$\beta_n(t) = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \int \omega_d dt - \left(n + \frac{1}{2}\right) \int \left(\frac{\dot{N}y + N\dot{y}}{2\omega_d N} \right) dt, \quad (5.70)$$

onde

$$\gamma_n^d(T) = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \int \omega_d dt \quad (5.71)$$

é a fase dinâmica e

$$\gamma_n^b(T) = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \int \left(\frac{\dot{N}y + m\dot{y}}{2\omega_d N} \right) dt \quad (5.72)$$

é a fase de Berry. Esta última pode ser reescrita como

$$\gamma_n^b(T) = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \int \left(\frac{m\dot{y} + y(\dot{m} + \gamma)}{2m\omega_d} \right) dt, \quad (5.73)$$

Onde usamos que $N(t) = m_0 \exp\left(\int_0^t \frac{\dot{m} + \gamma}{m}\right)$. Neste ponto, vale notar que para $y(t) = 0$ temos que $\gamma_n^b(T) = 0$ como deveria ser. Por outro lado, para $\gamma(t) = 0$ a Eq. (5.73)

torna-se a fase de Berry para este oscilador generalizado com massa e constante elástica dependente do tempo.

Agora, vamos calcular as fases dinâmica e de Berry para o caso especial discutido na seção anterior, mas agora pondo $y(t) = y_0$ e $\gamma(t) = 0$. Então,

$$\gamma_n^d(T) = - \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega_D^0 T, \quad (5.74)$$

e

$$\gamma_n^b(T) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\eta y_0}{2\omega_D^0} T, \quad (5.75)$$

onde $\omega_D^0 = (\omega_0^2 - y_0^2)$ com $\omega_0^2 = k_0/m_0$. As expressões acima representam as fases dinâmicas e de Berry para o oscilador com $m = m_0 \exp(\eta t)$, $k = k_0 \exp(\eta t)$, $\gamma(t) = 0$ e $y = cte$.

Como um outro exemplo, consideremos o caso quando todos os parâmetros relevantes do sistema são independentes do tempo, isto é, $m = m_0$, $k = k_0$, $\gamma(t)/m = \gamma_0$ e $y = y_0$. Então mais uma vez encontramos que a fase dinâmica é dada pela Eq. (5.74) e a fase de Berry será

$$\gamma_n^b(T) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{y_0 \gamma_0}{2\omega_D^0} T. \quad (5.76)$$

Aqui, observemos que a realização de um oscilador harmônico amortecido generalizado com parâmetros independentes do tempo é mais fácil que um com parâmetros dependentes do tempo. Então, pode-se naturalmente esperar que resultados experimentais da fase de Berry deste sistema seja mais fácil. Também observamos que a respeito da dependência temporal dos parâmetros relevantes do sistema como a massa, constante elástica e coeficiente de fricção, a Hamiltoniana que descreve o sistema Eq. (5.1) continua dependente do tempo e conseqüentemente os autoestados do operador invariante associado $I(t)$ são não-estacionários tal que a existência da fase de Berry é preservada. Neste ponto, vale lembrar que a fase de Berry ocorre quando os parâmetros dependentes do tempo de um sistema executam uma evolução de um ciclo adiabático completo no espaço dos parâmetros [39, 40].

Como último exemplo, consideremos mais um caso particular discutido na seção anterior, mas agora fazendo $y(t) = y_0$ é fácil verificar que a fase dinâmica é mais uma vez dada por (5.74) e a expressão para a fase de Berry é a seguinte

$$\gamma_n^b(T) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{(y_0 + \eta) y_0}{2\omega_D^0} T. \quad (5.77)$$

Percebemos que esta equação contém simultaneamente ambos os parâmetros relacionados para a atenuação do sistema, isto é, γ_0 e η . Também observamos que a Eq. (5.77)

reproduz, respectivamente a Eqs. (5.75) e (5.75) fazendo $\gamma_0 = 0$ ou $\eta = 0$, como deveria ser. Finalmente, gostaríamos de assinalar que as Eqs. (5.75) e (5.76) são reduzidas uma a outra fazendo as trocas $\gamma_0 \rightarrow \eta$ ou $\eta \rightarrow \gamma_0$. Estes resultados dão origem a mesma situação fascinante discutida anteriormente para o caso clássico, isto é, aqui temos dois sistemas físicos completamente diferentes - um oscilador generalizado com massa variando no tempo e um oscilador generalizado amortecido com massa constante - ambos dão origem a resultados idênticos para fase dinâmica e a mesma expressão para a fase de Berry. Como mencionamos antes, estes resultados interessantes e intrigantes são raramente encontrados na física, principalmente na mecânica quântica, e estão intimamente relacionados com a dependência temporal da massa. Além disso, como no caso clássico da seção 1, aqui podemos dizer também, em princípio, que a Eq. (5.77) representa a fase de Berry para três sistemas completamente diferentes que são um oscilador generalizado com massa aumentando no tempo exponencialmente, um oscilador generalizado amortecido com massa constante e um oscilador com massa variando no tempo e sujeito a uma força de amortecimento.

5.4 Estados coerentes

Nesta seção estamos interessados na construção dos estados coerentes para este oscilador harmônico generalizado dependente do tempo. Para isto, consideremos os operadores de criação e destruição dependentes do tempo definidos como

$$\begin{aligned} a' &= \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{q}{\rho}\right) + i\rho p \right], \\ a'^{\dagger} &= \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{q}{\rho}\right) - i\rho p \right], \end{aligned} \quad (5.78)$$

com $[b', b'^{\dagger}] = 1$. Em termos destes operadores, I' pode ser reescrito como

$$I' = \hbar (a'^{\dagger} a' + 1/2). \quad (5.79)$$

Os estados coerentes associados com este invariante tem a forma [25, 33]

$$\phi_{\alpha}(\sigma, t) = \exp^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} \exp[i\beta_n(t)] \varphi_n(\sigma), \quad (5.80)$$

Na equação anterior, $\alpha = u + iv$, $\beta_n(t)$ é a fase de Lewis e $\varphi_n(\sigma)$ são os autoestados de I . Usando as Eqs. (5.43), (5.44), (5.47) e (5.80) encontramos que os estados coerentes

descritos pelo Hamiltoniano (5.1) são dados por

$$\phi_\alpha(q, t) = \exp \left[\frac{im(t)(\rho - yp)}{2\hbar\rho} q^2 \right] \frac{\phi_\alpha(\eta)}{\rho^{1/2}} \quad (5.81)$$

Agora, fazendo $a = U^\dagger a' U$ e tendo ϕ_α como função teste encontramos

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2\hbar} \left(\frac{q}{\rho} + i(\rho p - m(t)) \right) \\ a^\dagger &= \frac{1}{2\hbar} \left(\frac{q}{\rho} - i(\rho p - m(t)) \right). \end{aligned} \quad (5.82)$$

Podemos agora aplicar o operador a aos estados coerentes $\phi_\alpha(\eta, t)$ e obter

$$a|\alpha, t\rangle = \exp^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} \exp(i\alpha_n(t)) a|n, t\rangle. \quad (5.83)$$

Mas como,

$$a|n, t\rangle = n^{1/2}|n-1, t\rangle \quad (5.84)$$

a expressão (5.83) torna-se

$$a|\alpha, t\rangle = \exp^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} \exp(i\alpha_n(t)) n^{1/2} |n-1, t\rangle. \quad (5.85)$$

Fazendo a mudança de variáveis $n \rightarrow n+1$, nesta última equação

$$a|\alpha, t\rangle = \exp^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^{n+1}}{((n+1)!)^{1/2}} \exp(i\alpha_{n+1}(t)) n^{1/2} |n, t\rangle \quad (5.86)$$

Após alguma álgebra, chegamos ao seguinte resultado

$$a|\alpha, t\rangle = \exp^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha \alpha^n}{(n!)^{1/2}} \exp(i\alpha_{n+1}(t)) n^{1/2} |n, t\rangle. \quad (5.87)$$

Da fase de Lewis, temos que

$$\alpha_{n+1}(t) = -(n+1+1/2) \int_0^t \frac{d\tau}{m(t)\rho^2(\tau)} = \alpha_n(t) + 2\alpha_0(t), \quad (5.88)$$

Na qual definimos

$$\alpha_0(t) = 1/2 \int_0^t \frac{d\tau}{m(t)\rho^2(\tau)}. \quad (5.89)$$

Logo, usando a Eq. (5.89), a Eq. (5.87) será escrita na forma

$$a|\alpha, t\rangle = \alpha e^{2i\alpha_0} \exp^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} \exp(i\alpha_n(t)) n^{1/2} |n, t\rangle. \quad (5.90)$$

De acordo com a equação anterior, podemos concluir que os estados coerentes satisfazem a equação de autovalores (ref.)

$$a|\phi_\alpha(q, t)\rangle = \alpha(t)|\phi_\alpha(q, t)\rangle, \quad (5.91)$$

na qual o autovalor $\alpha(t)$ é definido como

$$\alpha(t) = \alpha e^{2i\alpha_0}, \quad (5.92)$$

com α_0 dado pela Eq. (5.89). Nosso próximo passo será calcular os valores esperados de q e p , nestes estados coerentes dados pela Eq. 5.80 e vermos o quanto sua forma se aproxima do caso clássico.

5.5 Relação de incerteza

Nesta seção encontraremos a relação de incerteza entre os operadores q e p nos estados coerentes. Para isto precisamos calcular a flutuação destes operadores que são dadas por $\Delta q(p) = \sqrt{\langle (p)q^2 \rangle - \langle (p)q \rangle^2}$. Primeiro vamos calcular o valor esperado do operador $q(t)$ no estado $\phi_\alpha(t)$. Para isto, usaremos a Eq. (5.59) que tem q escrito em termos de a e $a^\dagger$ e as Eqs.(5.91) e (5.92) para calcularmos este valor esperado. Fazendo um cálculo direto, encontramos o seguinte resultado

$$\langle \phi_\alpha | q | \phi_\alpha \rangle = (2\hbar |\alpha|^2 \rho^2)^{1/2} \cos(\epsilon(t) + \delta), \quad (5.93)$$

no qual δ representa o argumento do número complexo α e $\epsilon(t) = -2\alpha_0(t)$. Comparando este resultado com a Eq. (5.9) vemos que o centro do pacote de onda do estado coerente segue o movimento de uma partícula clássica. Este resultado concorda com a idéia de Schrödinger sobre estados quânticos que seguem o movimento de uma partícula clássica num dado potencial [41]. Para seguir no nosso objetivo, temos que $\langle \phi_\alpha(q, t) | q^2 | \phi_\alpha(q, t) \rangle$ é dado por

$$\langle \phi_\alpha | q^2 | \phi_\alpha \rangle = 2\rho^2 \hbar (u \cos(2\alpha_0) - v \sin(2\alpha_0))^2 \quad (5.94)$$

e das Eqs. (5.93) e (5.94), temos a incerteza em q dada pela seguinte equação

$$\Delta q = \rho \left(\frac{\hbar}{2} \right)^{1/2}. \quad (5.95)$$

Os valores esperados de p e p^2 são encontrados de forma semelhante. Primeiro escrevemos p em termos de a e $a^\dagger$ e de maneira análoga ao que foi feito com q e com uma consulta ao apêndice B, chegamos ao seguinte resultado

$$\langle \phi_\alpha | p | \phi_\alpha \rangle = \left(\frac{2\hbar}{\rho^2} \right)^2 (u \sin(2\alpha_0) + v \cos(2\alpha_0)) + (2\hbar)(m(t)\dot{\rho} - \rho y)(u \cos(2\alpha_0) - v \sin(2\alpha_0)) \quad (5.96)$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \phi_\alpha | p^2 | \phi_\alpha \rangle &= \frac{\hbar}{2} [(1 + 2|\alpha| - \alpha^2 - \alpha^{*2})/\rho^2 \\
&\quad + (m(t)\dot{\rho} - \rho y)^2 (1 + 2|\alpha| + \alpha^2 + \alpha^{*2}) \\
&\quad + \frac{2(m(t)\dot{\rho} - \rho y)}{i\rho} (\alpha^2 - \alpha^{*2})].
\end{aligned} \tag{5.97}$$

Após uma álgebra que está desenvolvida em detalhes no apêndice B, encontramos que

$$\Delta p = \left(\frac{\hbar}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\rho^2} + (N(t)(\dot{\rho} - \rho y)^2) \right)^{1/2}. \tag{5.98}$$

Com as relações de incerteza (B.12) e (B.19), podemos escrever o produto da incerteza como

$$\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2} [1 + (N(t)\rho(\dot{\rho} - \rho y))^2]^{1/2}. \tag{5.99}$$

O resultado acima mostra que os estados coerentes dados pela Eq. (5.80) não são, em geral, estados de incerteza mínima. Podemos ver em [34] que isto ocorre porque os estados $\phi_\alpha(q, t)$ correspondem aos bem conhecidos estados comprimidos [42, 43].

5.6 Discussão

Neste capítulo, estudamos do ponto de vista clássico e quântico o oscilador harmônico generalizado com massa e frequência dependente do tempo e submetido a uma força de fricção dependente do tempo. Vimos que a dependência no tempo da massa dá origem a uma atenuação adicional da amplitude do sistema clássico. Consideramos também alguns casos particulares e derivamos uma equação de movimento que descreve três sistemas físicos diferentes. Combinamos o invariante quadrático e o método do invariante dinâmico para resolver a equação de Schrödinger para o nosso sistema não-estacionário e escrevemos as correspondentes funções de onda em termos das soluções da equação de Milne-Pinney e dos polinômios de Hermite. Construímos estados coerentes para o sistema quantizado e calculamos a densidade de probabilidade do estado fundamental, valor esperado da coordenada, flutuações quânticas da coordenada e momento bem como o produto das incertezas, o qual não atinge o valor mínimo. Derivamos as fases geométrica, dinâmica e de Berry para o oscilador não-estacionário. Finalmente, avaliamos e discutimos a fase de Berry para três casos particulares deste sistema.

Capítulo 6

Oscilador harmônico amortecido e forçado dependente do tempo

Como já citamos na introdução desta tese, osciladores harmônicos dependentes do tempo tem despertado a atenção dos físicos, o que pode ser visto nas referências [17, 26]. Em particular, osciladores harmônicos forçados dependentes do tempo tem sido alvo de estudo de vários autores, os quais têm utilizado diversos métodos, dentre os estes, o método de invariantes quânticos com o uso do operador invariante na sua forma linear lineares e quadrática [44, 45, 46].

Neste capítulo utilizaremos um invariante linear para encontrar as soluções exatas da equação de Schrödinger para um oscilador harmônico amortecido e forçado com massa e frequência dependentes do tempo. Vamos considerar que ambas as forças também dependem do tempo.

Com este método obteremos as soluções para o nosso problema de maneira bem mais direta, quando comparada ao uso de um invariante quadrático, pelo fato de os invariantes lineares serem mais facilmente diagonalizados. Outra vantagem é que a obtenção das propriedades físicas do sistema, como flutuações e correlações, torna-se mais acessível. Em nosso estudo também construiremos soluções do tipo pacotes de ondas Gaussiano e terminaremos nossa análise com o cálculo das flutuações quânticas das coordenadas e momentos, bem como da correlação de ambos. Mostraremos que a largura das flutuações e correlações do pacote Gaussiano não dependem da força externa, também analisaremos a expressão para o princípio da incerteza para este caso.

6.1 Soluções da equação de Schrödinger para o oscilador harmônico amortecido e forçado dependente do tempo

Nesta seção, trataremos o problema de um oscilador harmonico unidimensional amortecido e forçado, sujeito a uma força de fricção dependente do tempo. Consideraremos um Hamiltoniano que apresenta dependência temporal. A descrição do problema em questão será dada através do seguinte Hamiltoniano

$$H(t) = e^{-\Lambda(t)} \frac{p^2}{2m_0} + e^{\Lambda(t)} \frac{m_0 \omega^2(t) q^2}{2} - e^{\Lambda(t)} q F(t), \quad (6.1)$$

no qual q e p representam, respectivamente, a coordenada e o momento canonicamente conjugados, satisfazendo a relação de comutação $[q, p] = i\hbar$, $\Lambda(t) = \int_0^t \left(\frac{\dot{m} + \gamma}{m} \right) d\tau$ e as funções reais dependentes do tempo, $\omega(t)$ e $F(t)$ representam, respectivamente, a massa (positiva), a frequência natural de oscilação, e a força externa aplicada ao oscilador. Aqui, destacamos que $F(t)$ é uma função real do tempo, requisito necessário para garantir que $H(t)$ seja hermitiano em qualquer instante de tempo t . A evolução do vetor de estado $\Psi(q, t)$ que representa o sistema descrito pelo Hamiltoniano (6.1), deve obedecer a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H(t) \Psi(q, t). \quad (6.2)$$

Fazendo a quantização canônica do Hamiltoniano (6.1), a equação de Schrödinger torna-se

$$\left(e^{-\Lambda(t)} \frac{-\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + e^{\Lambda(t)} \frac{m_0 \omega^2(t) q^2}{2} - e^{\Lambda(t)} q F(t) \right) \Psi(q, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t). \quad (6.3)$$

A fim de investigar a dinâmica quântica deste sistema, devemos resolver a equação acima. Para isto, usaremos o método do invariante dinâmico idealizado por Lewis e Riesenfeld que consiste em encontrarmos um operador hermitiano não-trivial que obedeça a condição (2.1). Assim poderemos construir soluções da forma

$$\Psi_\lambda(q, t) = e^{i\mu_\lambda(q, t)} \phi_\lambda(q, t), \quad (6.4)$$

onde $\phi_\lambda(q, t)$ são as auto funções de $I(t)$ cujos autovalores λ são independentes do tempo e as funções de fase podem ser calculadas através da relação

$$\hbar \frac{d\mu_\lambda(t)}{dt} = \langle \phi_\lambda | (i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t)) | \phi_\lambda \rangle, \quad (6.5)$$

como vimos.

Suporemos a existência de um operador invariante linear $I(t)$ na seguinte forma

$$I(t) = \alpha(t)q + \beta(t)p + \gamma(t), \quad (6.6)$$

no qual $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $\gamma(t)$ são funções reais dependentes do tempo a serem determinadas. De acordo com a Eq. (2.1), precisamos calcular o comutador $[I, H]$

$$\begin{aligned} [I, H] &= [\alpha(t)q, e^{-\Lambda(t)} \frac{p^2}{2m_0}] + [\alpha(t)q, e^{\Lambda(t)} \frac{m_0 \omega^2(t) q^2}{2}] \\ &\quad - [\alpha(t)q, qF(t)] + [\beta(t)p, e^{-\Lambda(t)} \frac{p^2}{2m_0}] \\ &\quad + [\beta(t)p, e^{\Lambda(t)} \frac{m_0 \omega^2(t) q^2}{2}] - [\beta(t)p, qF(t)] \\ &\quad + [\gamma(t), e^{-\Lambda(t)} \frac{p^2}{2m_0} + e^{\Lambda(t)} \frac{m_0 \omega^2(t) q^2}{2} - e^{\Lambda(t)} F(t)q]. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Lembrando que $[q, q] = [p, p] = 0$ e da propriedade dos comutadores $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$, encontramos que

$$[I, H] = e^{-\Lambda(t)} \frac{\alpha(t)p}{m_0} - e^{\Lambda(t)} \beta(t) m_0 \omega^2(t) q + e^{\Lambda(t)} \beta(t) F(t). \quad (6.8)$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \dot{\alpha}q + \dot{\beta}p + \dot{\gamma}. \quad (6.9)$$

Substituindo as Eqs. (6.8) e (6.9) na Eq. (2.1) temos

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= [\dot{\alpha}(t) - e^{\Lambda(t)} \beta(t) m_0 \omega^2(t)] q + \\ &\quad \left[\dot{\beta}(t) + e^{-\Lambda(t)} \frac{\alpha(t)}{m_0} \right] p + [\dot{\gamma}(t) + e^{\Lambda(t)} \beta(t) F(t)] = 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Da equação anterior obtemos

$$\dot{\alpha}(t) = e^{\Lambda(t)} \beta(t) m_0 \omega^2(t), \quad (6.11)$$

$$\dot{\beta}(t) = -e^{-\Lambda(t)} \frac{\alpha(t)}{m_0}, \quad (6.12)$$

$$\dot{\gamma}(t) = -e^{\Lambda(t)} \beta(t) F(t). \quad (6.13)$$

Das Eqs. (6.11) e (6.1), é fácil ver que

$$\ddot{\beta}(t) + \frac{\dot{m} + \gamma}{m} \dot{\beta}(t) + \omega^2(t) \beta(t) = 0. \quad (6.14)$$

Da Eq. (6.1), encontramos para $\gamma(t)$

$$\gamma(t) = - \int_0^t \beta(\tau) e^{\Lambda(\tau)} F(\tau) d\tau. \quad (6.15)$$

Diante do que vimos, a função $\beta(t)$ pode ser obtida da Eq. (6.14) e as funções $\alpha(t)$ e $\gamma(t)$ poderão ser obtidas diretamente. A primeira delas, a partir da Eq. (6.1) e, a segunda, da Eq. (6.1). Portanto, conhecendo-se a expressão da função real $\beta(t)$, o operador invariante linear $I(t)$ será escrito na seguinte forma

$$I(t) = \beta(t)p - \dot{\beta}(t)m_0 e^{\Lambda(t)} q + \gamma(t), \quad (6.16)$$

e o mesmo ficará completamente determinado desde que se conheça a expressão para a força externa $F(t)$.

Nosso próximo passo será encontrar os autoestados $|\phi_\lambda(t)\rangle$ de $I(t)$. Estes autoestados formam um conjunto completo contínuo cujos autovalores independentes do tempo λ constituem soluções da equação

$$I(t)|\phi_\lambda\rangle = \lambda|\phi_\lambda\rangle, \quad (6.17)$$

com a relação de ortonormalização

$$\langle\phi_\lambda|\phi_{\lambda'}\rangle = \delta(\lambda - \lambda'). \quad (6.18)$$

Substituindo a expressão do operador invariante, dada pela Eq. (6.16) em (6.17), teremos a seguinte equação de autovalores

$$\left(-i\hbar\beta(t)\frac{\partial}{\partial q} - \dot{\beta}(t)m_0 e^{\Lambda(t)} q + \gamma(t) \right) |\phi_\lambda\rangle = \lambda|\phi_\lambda\rangle, \quad (6.19)$$

onde usamos a quantização canônica, $p \rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$. Desse modo, temos que

$$\frac{\partial}{\partial q} |\phi_\lambda\rangle = \frac{\left[i\dot{\beta}(t)m_0 e^{\Lambda(t)} q + i(\lambda - \gamma(t)) \right]}{\hbar\beta(t)} |\phi_\lambda\rangle. \quad (6.20)$$

As soluções da Eq. (6.20) são da forma

$$\phi_\lambda(q, t) = C_0 \exp \left(\frac{i\dot{\beta}(t)m_0 e^{\Lambda(t)} q}{2\hbar\beta(t)} q^2 + \frac{i[\lambda - \gamma(t)]}{\hbar\beta(t)} q \right), \quad (6.21)$$

na qual c_0 representa uma constante de integração a ser determinada pela Eq. (6.18).

Feito o cálculo, encontramos que

$$C_0 = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\beta(t)}}. \quad (6.22)$$

Com isto, as soluções da equação de autovalores (6.17) são finalmente dadas por

$$\phi_\lambda(q, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\beta(t)}} \exp\left(\frac{im_0 e^{\Lambda(t)} \dot{\beta}(t)}{2\hbar\beta(t)} q^2 + \frac{i[\lambda - \gamma(t)]}{\hbar\beta(t)} q\right). \quad (6.23)$$

Lembrando que a relação entre as soluções da equação de Schrödinger e as soluções da equação de autovalor para o operador $I(t)$ é dada por

$$\Psi_\lambda(q, t) = e^{\mu_n(t)} \Phi(q, t). \quad (6.24)$$

Então tereremos que

$$\Psi_\lambda(q, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\beta(t)}} \exp\left\{i\mu_\lambda(t) + \frac{im_0 e^{\Lambda(t)} \dot{\beta}(t)}{2\hbar\beta(t)} q^2 + i\frac{[\lambda - \gamma(t)]}{\hbar\beta(t)} q\right\}, \quad (6.25)$$

com as funções de fase $\mu_\lambda(t)$ calculadas no apêndice C. Neste ponto, devemos destacar que quando $\beta(t)$ for nula, as funções de fase μ_λ divergirão. Apesar desta divergência, podemos mostrar, como faremos a seguir, que as funções de onda (6.25) serão sempre finitas. Para um tempo qualquer, consideraremos a função $h_\lambda(t) = \mu_\lambda(t)\beta(t)$, onde μ_λ são as funções de fase e $\beta(t)$, a solução da Eq. (6.14). Substituindo h_λ na Eq. (C.6), teremos que

$$\frac{\dot{h}_\lambda(t)}{\beta(t)} - \frac{h_\lambda \dot{\beta}(t)}{\beta^2(t)} = -\frac{1}{2\hbar} \frac{e^{-\Lambda(t)} [\lambda - \gamma(t)]^2}{m_0 \beta^2(t)}. \quad (6.26)$$

Assim, notamos que, no caso da divergência de μ_λ , ocorrendo com $\beta(t)$ tendendo a zero, o primeiro termo a esquerda na equação acima vai a zero, resultando no seguinte

$$h_\lambda(t) = \frac{e^{\Lambda(t)} [\lambda - \gamma(t)]^2}{2\hbar m_0 \dot{\beta}(t)}. \quad (6.27)$$

Logo, no caso da divergência de μ_λ , as autofunções (6.25) poderão ser reescritas em termos das funções $h_\lambda(t)$ (que são finitas) ao invés de $\mu_\lambda(t)$. Um outro ponto a destacar em nossa análise é a evolução de um estado em geral de Schrödinger. Ela pode ser escrita na forma

$$\Psi(q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) \Psi_\lambda d\lambda, \quad (6.28)$$

onde $g(\lambda)$ representa uma função peso que determina o estado do sistema. Na próxima seção, utilizaremos esta expressão para a construção de soluções tipo pacotes de onda Gaussiano.

6.2 Pacotes de onda Gaussianos

Já vimos que as soluções para a equação de Schrödinger são determinadas pela Eq. (6.25). Uma forma de descrição do comportamento quântico do nosso sistema é apresentarmos nossa função de onda $\Psi_\lambda(q, t)$ determinada numa expressão capaz de descrever um pacote de ondas Gaussiano. Para tal, vamos inicialmente separar nossas funções de fase $\mu_\lambda(t)$ em três partes, desenvolvendo o binômio no numerador da integral da Eq. (C.7). Assim, teremos que

$$\mu_\lambda(t) = -\frac{1}{2\hbar} \left\{ \int_0^t \frac{e^{\Lambda(\tau)} \lambda^2}{m_0 \beta^2(\tau)} d\tau - 2 \int_0^t \frac{e^{\Lambda(\tau)} \gamma(\tau) \lambda}{m_0 \beta^2(\tau)} d\tau + \int_0^t \frac{e^{\Lambda(\tau)} \gamma^2(\tau)}{m_0 \beta^2(\tau)} d\tau \right\}. \quad (6.29)$$

Definiremos a seguir algumas funções que nos ajudarão a reescrever a expressão anterior. As funções citadas são as seguintes

$$f_1(t) = \int_0^t \frac{e^{\Lambda(\tau)} d\tau}{m_0 \beta^2(t)}, \quad (6.30)$$

$$f_2(t) = \int_0^t \frac{e^{\Lambda(\tau)} \gamma(\tau)}{m_0 \beta^2(t)} d\tau, \quad (6.31)$$

$$f_3(t) = \int_0^t \frac{e^{\Lambda(\tau)} \gamma^2(\tau)}{m_0 \beta^2(t)} d\tau. \quad (6.32)$$

Com estas definições, reescrevemos a Eq. (6.29) como segue

$$\mu_\lambda(t) = -\frac{f_1(t)}{2\hbar} \lambda^2 + \frac{f_2(t)}{\hbar} \lambda + f_3(t). \quad (6.33)$$

Deste modo, podemos reescrever a função de onda (6.25) na forma

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda(q, t) = & \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\beta(t)}} \exp \left\{ -i \frac{f_1(t)}{2\hbar} \lambda^2 + \frac{f_2(t)}{\hbar} \lambda + \right. \\ & \left. f_3(t) + \frac{im_0 e^{\Lambda(t)} \dot{\beta}(t)}{2\hbar\beta(t)} q^2 - i \frac{\gamma(t)}{\hbar\beta(t)} q \right\}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Como queremos construir soluções do tipo pacote de onda Gaussiano, iremos utilizar uma função peso Gaussiana conforme definida abaixo

$$g(\lambda) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} \exp \left(-\frac{a^2}{4} \lambda^2 \right), \quad (6.35)$$

na qual a é uma constante positiva. Assim, inserindo as Eqs. (6.34) e (6.35) na Eq. (6.28) teremos o seguinte

$$\Psi(q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} \exp \left(-\frac{a^2}{4} \lambda^2 \right) \right\}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar\beta(t)}} \exp\left\{-i\frac{f_1(t)}{2\hbar}\lambda^2 + \frac{i\lambda}{\beta(t)\hbar}[q + \beta(t)f_2(t)] + i\left[\frac{im_0e^{\Lambda(t)}\dot{\beta}(t)}{2\hbar\beta(t)}q^2 - i\frac{\gamma(t)}{\hbar\beta(t)}q + f_3\right]\right\}d\lambda. \quad (6.36)$$

Resolvendo a integral acima, podemos escrever a função de onda do pacote Gaussiano como segue

$$\Psi(q, t) = \left(\frac{2B}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{iC_3(t)} e^{(iC_1q+C_2)^2} e^{-B(q+\beta f_2)^2}, \quad (6.37)$$

com $C_1(t)$, $C_2(t)$ e $C_3(t)$ dadas pelas seguintes expressões

$$C_1(t) = \sqrt{\frac{m_0e^{\Lambda(t)}\dot{\beta}(t)}{2\hbar\beta(t)}} +$$

Podemos, além disso, calcular a densidade de probabilidade dependente do tempo associada a esse pacote Gaussiano. Ela é também Gaussiana para um tempo qualquer. Sua expressão é a seguinte

$$\rho(q, t) = |\Psi(q, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma(t)} \exp\left[-\frac{(q + \beta f_2)^2}{\sigma^2(t)}\right], \quad (6.39)$$

com largura dependente do tempo

$$\sigma(t) = \sqrt{\frac{\hbar^2 a^2 \beta^2(t)}{2}} \left(1 + \frac{2f_1^2(t)}{\hbar^2 a^4}\right). \quad (6.40)$$

Da Eq. (6.37), vemos que o centro do pacote permanece em $\langle q \rangle = -\beta(t)f_2(t)$ enquanto que a largura do mesmo atinge um mínimo em $t = 0$. Ademais, devemos notar, a partir da Eq. (6.40) que a largura do pacote Gaussiano não depende da força externa $F(t)$. Na verdade, a forma do pacote não se altera com a força externa. Isto significa que a força externa $F(t)$ age uniformemente no pacote de ondas, ou melhor, o pacote Gaussiano tem um *centro de massa* sobre o qual a força $F(t)$ atua de sorte que o pacote de desloca sem sofrer distorção. A força externa simplesmente desloca o pacote de ondas de uma quantidade $-\beta(t)f_2(t)$.

6.3 Flutuações

N a seção anterior, apresentamos soluções do tipo pacote de ondas Gaussiano da Eq. (6.3). A função de onda do pacote Gaussiano (6.37) nos permite obter mais informações acerca do sistema em estudo e dar consistência de nossos resultados. Nosso próximo

passo será calcular as flutuações quânticas da coordenada e do momento no estado $\Psi(q, t)$. Devemos primeiramente encontrar os valores esperados de q , p , q^2 e p^2 . Por definição, o valor esperado de q é determinado a partir da função de onda $\Psi(q, t)$ pela seguinte relação

$$\langle q \rangle = \int \Psi^*(q, t) q \Psi(q, t) dq. \quad (6.41)$$

Substituindo $\Psi(q, t)$ dada pela Eq. (6.37) na integral acima, teremos que

$$\langle q \rangle = \left(\frac{2B}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int q e^{-2B(q+\beta f_2)^2} dq. \quad (6.42)$$

Fazendo uma mudança de variáveis, $x = q + \beta f_2$, a expressão acima resulta numa integral do tipo $\int e^{c_0 x^2} dx$, na qual c_0 é uma constante. Assim, teremos que

$$\langle q \rangle = -\beta f_2. \quad (6.43)$$

Da mesma forma, podemos calcular $\langle q^2 \rangle$ por meio da expressão

$$\langle q^2 \rangle = \int \Psi^*(q, t) q^2 \Psi(q, t) dq, \quad (6.44)$$

que resulta na seguinte integral

$$\langle q^2 \rangle = \left(\frac{2B}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int q^2 e^{-2B(q+\beta f_2)^2} dq, \quad (6.45)$$

a qual pode ser resolvida fazendo-se a troca de variáveis $x = q + \beta f_2$. Resulta em

$$\langle q^2 \rangle = \left(\frac{2B}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int (x - \beta f_2)^2 e^{-2Bx^2} dx. \quad (6.46)$$

Desenvolvendo o binômio dentro da integral e resolvendo as respectivas integrais por partes, encontramos que

$$\langle q^2 \rangle = \frac{1}{4B} + (\beta f_2)^2. \quad (6.47)$$

Igualmente, calcularemos os valores esperados de p , p^2 . Lembrando que $p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$, teremos

$$\langle p \rangle = \left(\frac{2B}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int e^{-i(C_1 q + C_2)^2} e^{-B(q+\beta f_2)^2} \left(\frac{-i\hbar \partial}{\partial q} \right) e^{i(C_1 q + C_2)^2} e^{-B(q+\beta f_2)^2}. \quad (6.48)$$

Embora neste caso o cálculo seja mais longo, ele é direto e resulta em

$$\langle p \rangle = 2\hbar C_1 [C_2 - C_1 \beta f_2]. \quad (6.49)$$

Finalmente, podemos calcular

$$\langle p^2 \rangle = \left(\frac{2B}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int e^{-i(C_1 q + C_2)^2} e^{-B(q + \beta f_2)^2} \left(\frac{-\hbar^2 \partial^2}{\partial q^2} \right) e^{i(C_1 q + C_2)^2} e^{-B(q + \beta f_2)^2}. \quad (6.50)$$

O resultado da integral acima é dado pela equação a seguir

$$\langle p^2 \rangle = \hbar^2 C_1^2 \left[4(C_2 - C_1 \beta f_2)^2 + \frac{C_1^2}{B} + \frac{B}{C_1^2} \right]. \quad (6.51)$$

As flutuações quânticas são dadas por

$$\Delta q = \sqrt{\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2} = \frac{1}{2\sqrt{B}}, \quad (6.52)$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \hbar \sqrt{\frac{B^2 + C_1^2}{B}}. \quad (6.53)$$

Uma análise das Eqs. (6.52) e (6.53) nos permite observar que as flutuações de q e p no estado $\Psi(q, t)$ não dependem da força externa. Este resultado concorda com aquele obtido na referência [47]. Aqui, notamos que, em termos das flutuações em q , a largura $\sigma(t)$ do pacote Gaussiano é dada por $\sigma(t) = \sqrt{2}\Delta q$. É necessário porém não apenas chegar as flutuações quânticas, mas também analisar a relação de incerteza $\Delta q \Delta p$. Este produto deve nos levar a conclusões acerca da incerteza mínima. Um cálculo direto nos permite escrever este produto da seguinte forma

$$\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2} \sqrt{1 + \frac{C_1^2}{B^2}}. \quad (6.54)$$

Uma análise direta desta equação nos mostra que o produto da incerteza atinge um valor mínimo igual a $\frac{\hbar}{2}$ para um tempo τ tal que $C_1(\tau) = 0$, ou, conforme podemos concluir a partir da Eq. (6.38),

$$\dot{\beta}(\tau) = -\frac{4f_1(\tau)}{m_0 e^{\Lambda(\tau)} [\hbar^2 a^4 + 4f_1^2]}. \quad (6.55)$$

Portanto, a equação acima nos mostra que, se começarmos com um pacote de incerteza mínima, $\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2}$ para $\tau = 0$, então a condição acima será obviamente $\dot{\beta}(0) = 0$ (notemos que por definição $f_1(0) = 0$). Ademais, $\beta(0)$ está relacionada com a largura inicial do pacote Gaussiano. Assim, nossa análise tornou-se extremamente produtiva no sentido de que a mesma nos oferece condições iniciais necessárias para resolver a Eq. (6.14). Logo a solução de tal equação fica completamente determinada. Mas, retornemos nossa discussão a partir da busca de correlações quânticas, as quais, após obtidas, serão capazes de dar maior consistência e robustez a nossa proposta de utilizar o método dos invariantes

quânticos em nossa contribuição. A seguir, calcularemos as correlações quânticas entre coordenada e momento. As mesmas são definidas como segue [48]

$$C_{1,1} = \frac{1}{2} \langle \{ (q - \langle q \rangle), (p - \langle p \rangle) \}_+ \rangle \quad (6.56)$$

onde $\{ \ , \ }_+$ representa o anti-comutador. No cálculo das flutuações já encontramos os valores esperados de q e p . Então, para efetuar nossos cálculos referentes a correlação, precisamos calcular o valor esperado do anti-comutador $\{q, p\} = -i\hbar(1 + 2q\frac{\partial}{\partial q})$. A primeira parcela da equação anterior é imediata. Seu resultado é

$$\langle (-i\hbar) \rangle = -i\hbar. \quad (6.57)$$

Para a segunda parcela precisamos resolver a integral

$$\left\langle -i\hbar 2q \frac{\partial}{\partial q} \right\rangle = \left(\frac{2B}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int e^{-i(C_1 q + C_2)^2} e^{-B(q + \beta f_2)^2} \left(-i\hbar 2q \frac{\partial}{\partial q} \right) e^{i(C_1 q + C_2)^2} e^{-B(q + \beta f_2)^2}, \quad (6.58)$$

que após alguma álgebra, seu resultado é

$$\left\langle -i\hbar 2q \frac{\partial}{\partial q} \right\rangle = -i\hbar \left([2C_1\beta]f_2]^2 - 4C_1C_2\beta f_2 + \frac{C_1}{B} - 1 \right). \quad (6.59)$$

Com os resultados anteriores, encontramos que

$$\langle \{q, p\}_+ \rangle = -i\hbar \left([2C_1\beta]f_2]^2 - 4C_1C_2\beta f_2 + \frac{C_1}{B} \right). \quad (6.60)$$

Desse modo, retomando ao nosso objetivo de calcular as correlações quânticas, desenvolvemos a Eq. (6.56), substituindo os valores esperados de q , p e $\langle \{q, p\}_+ \rangle$. Feito isso, após uma álgebra, encontramos as correlações quânticas dadas por

$$C_{1,1} = \frac{\hbar}{2} \frac{C_1^2}{B}. \quad (6.61)$$

Da expressão acima, podemos ver que, mesmo quando o estado inicial for descorrelacionado, as correlações quânticas se desenvolvem com o passar do tempo. O aparecimento de correlações vem acompanhando o crescimento na incerteza. De fato, a Eq. (6.54) pode ser reescrita como

$$\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2} \sqrt{1 + \frac{4C_{1,1}^2}{\hbar^2}}, \quad (6.62)$$

o que implica claramente no fato da incerteza ser mínima para uma correlação nula. Concluindo esta seção, destacamos que a ausência de correlação no produto da incerteza

mínima já era esperado, uma vez que qualquer possível correlação existente criaria um vínculo na minimização do referido produto e, assim, este não atingiria seu valor mínimo [49]. De fato, o produto generalizado da incerteza é dado por [50].

$$(\Delta q)^2(\Delta p)^2 \geq \frac{1}{4}|\langle[q, p]\rangle|^2 + C_{1,1}^2. \quad (6.63)$$

Em nossos cálculos, encontramos que

$$(\Delta q)^2(\Delta p)^2 = \frac{\hbar^2}{4} + C_{1,1}^2. \quad (6.64)$$

Como

$$|\langle[q, p]\rangle|^2 = \hbar^2, \quad (6.65)$$

o nosso resultado para o produto da incerteza mínima, Eq. (6.64), de fato satisfaz a Eq. (6.63), conforme era necessário para que nossos cálculos fossem coerentes. Assim, nosso resultado não só concorda com a referência [50] como também mostra que, para um pacote Gaussiano, este produto generalizado de incertezas atinge seu menor valor. Ademais, uma vez que a correlação não depende da força externa, esta pode ser calculada para o caso particular de um oscilador harmônico dependente do tempo não-forçado.

6.4 Discussão

Com o uso do método de invariantes dinâmicos utilizamos um operador invariante linear a fim de encontrar soluções exatas para a equação de Schrödinger para um oscilador harmônico amortecido e forçado dependente do tempo. Uma vez encontradas essas soluções, usamos uma função peso e contruímos soluções na forma de pacotes de onda Gaussianos e com soluções deste tipo, calculamos a densidade de probabilidade e sua respectiva largura, obtivemos ambas dependentes do tempo. Mostramos que a largura das flutuações e correlações do pacote Gaussiano não dependem da força externa. O que significa que a força externa age uniformemente sobre o pacote de ondas. É como se o pacote de ondas tivesse um centro de massa sobre o qual esta força atue mas sem causar distorção enquanto o pacote se movimenta. Em seguida, calculamos as flutuações quânticas da coordenada q e momento p , bem como as correlações quânticas. Por fim, notamos a dependência do produto das incertezas com a correlação e chegamos a conclusão que para uma correlação nula teremos um relação de incerteza mínima.

Capítulo 7

Conclusões

Neste trabalho, estudamos inicialmente um oscilador harmônico generalizado com massa e frequência dependentes do tempo e submetidos a uma força de fricção linear na velocidade cujo coeficiente de fricção dependia do tempo. Ao aplicarmos as equações de Hamilton para este sistema, obtivemos uma equação de movimento para a coordenada generalizada q e notamos de imediato que a dependência temporal na massa causa uma atenuação extra no sistema, fazendo com que $\dot{m}$ comporte-se como uma fricção efetiva, isto é, tendo um efeito equivalente a uma força de amortecimento proporcional à velocidade. Consideramos um caso especial desta equação diferencial ordinária e encontramos uma característica bastante interessante e peculiar. Observamos que este caso particular descreve simultaneamente três sistemas físicos diferentes que são: um oscilador com massa variando no tempo, um oscilador amortecido com massa constante e um oscilador com massa dependente do tempo e sob uma força de amortecimento linear na velocidade.

Em seguida, com a ajuda dos operadores invariantes quadráticos à luz do método de invariantes dinâmicos, devidamente descritos no capítulo 2, encontramos as soluções exatas da equação de Schrödinger, para este sistema. Notamos que a densidade de probabilidade no estado fundamental para este sistema não-estacionário voltava a ser Gaussiana, porém, em contraste ao oscilador harmônico padrão, a densidade de probabilidade do estado de vácuo possui uma dependência com o tempo em termos da função $\rho(t)$, que está associada com a largura desta densidade de probabilidade. Após isso, derivamos as fases geométrica, dinâmica e de Berry para este sistema não-estacionário e ao analisarmos alguns casos particulares para as fases de Berry e dinâmica, encontramos um detalhe bem interessante e intrigante, duas fases de Berry podem ser levadas uma em outra. Isto quer dizer que dois

sistemas físicos - um oscilador generalizado com massa dependente do tempo e um oscilador generalizado amortecido com massa constante - dão origem a resultados idênticos para as fases dinâmica e de Berry. Em seguida, construímos estados coerentes para este sistema quantizado e os empregamos para investigar algumas propriedades quânticas tais como flutuações quânticas da coordenada e momento. Ao calcular a flutuação quântica para a coordenada, vimos que o seu valor médio nos estados coerentes possui a mesma forma do movimento de uma partícula clássica. Por fim, encontramos o produto das incertezas entre a coordenada q e o momento p e vimos que este produto não é mínimo, mostrando que os estados coerentes não são, em geral, estados de incerteza mínima.

Após isso, com o uso do método de invariantes dinâmicos utilizamos um operador invariante linear a fim de encontrar soluções exatas para a equação de Schrödinger para um oscilador harmônico amortecido e forçado dependente do tempo. Uma vez encontradas essas soluções, usamos uma função peso e contruímos soluções na forma de pacotes de onda Gaussianos e com soluções deste tipo, calculamos a densidade de probabilidade e sua respectiva largura, obtivemos ambas dependentes do tempo. Como destaque, mostramos que a largura das flutuações e correlações do pacote Gaussiano não dependem da força externa. O que significa que a força externa age uniformemente sobre o pacote de ondas. É como se o pacote de ondas tivesse um centro de massa sobre o qual esta força atue mas sem causar distorção enquanto o pacote se movimenta. Em seguida, calculamos as flutuações quânticas da coordenada q e momento p , bem como as correlações quânticas. Por fim, notamos a dependência do produto das incertezas com a correlação e chegamos a conclusão que para uma correlação nula teremos um relação de incerteza mínima e vice-versa. Podemos perceber quão rico é o método dos invariantes quânticos dependentes do tempo, pois através do mesmo pudemos explorar a mecânica quântica de um sistema dependente do tempo. Por um lado, utilizamos um operador invariante linear e obtivemos nossas soluções exatas da equação de Schrödinger e as propriedades físicas do sistema de forma muito menos extensa, quando comparada aos invariantes quadráticos que por sua vez, além do método de Lewis e Riesenfeld foi necessário fazer uso de uma transformação unitária. Por um lado, ao consideramos um operador quadrático nosso trabalho de obter nossas soluções tornou-se um pouco maior. Porém, pudemos construir os estados coerentes para o sistema em questão. O método de Lewis e Riesenfeld ainda nos permite encontrar uma propriedade bastante importante e interessante de sistemas quânticos dependentes

do tempo, a fase de Berry.

Como perspectiva, podemos ainda aplicá-lo para contruirmos os estados coerentes e encontrarmos a fase de Berry correspondente a problemas como um sistema de dois níveis dependente do tempo e na cosmologia onde existem modelos onde a Hamiltoniana para o universo primitivo é quadrática do tipo oscilador harmônico.

Apêndice A

Tranformação Unitária

Mostraremos neste apêndice um outro método de determinar as funções de onda do oscilador harmônico dependente do tempo, conhecido como método da transformação unitária. Para tal, vamos considerar o operador unitário $U(t)$ dado por

$$U = \exp\left(\frac{-iM(t)\dot{\rho} - y\rho}{2\hbar\rho}q^2\right) \quad (\text{A.1})$$

Nosso trabalho será verificar qual será a nova forma do operador invariante quadrático sob a transformação gerada por U . A atuação de $U(t)$ numa função de onda $\phi_n(q, t)$ gera uma nova função de onda dada por

$$\phi'_n(q, t) = U\phi_n(q, t) \quad (\text{A.2})$$

e a equação de autovalores para o operador $I(t)$ será reescrita da seguinte forma

$$I'\phi'_n(q, t) = \lambda\phi'_n(q, t), \quad (\text{A.3})$$

onde agora usaremos

$$I'\phi'_n(q, t) = (UIU^\dagger)\phi'_n(q, t). \quad (\text{A.4})$$

Precisamos encontrar a forma do operador $I'(t)$. Para procedermos tal cálculo, vamos lembrar que operador tem o seguinte termo $(\rho p - N(t)(\dot{\rho} - yp)q)^2$. Vamos então desenvolver este termo

$$\begin{aligned} (\rho p - N(t)(\dot{\rho} - yp)q)^2 &= (p\rho - N(t)(\dot{\rho} - yp)q)(p\rho + N(t)(\dot{\rho} - yp)q) \\ &= p^2\rho^2 - p\rho N(t)\dot{\rho}q - q\rho N(t)\dot{\rho}p + q^2\rho^2 N(t)^2 \\ &= p^2\rho^2 - \dot{\rho}\rho N(t)(qp - i\hbar) - q\rho N(t)\dot{\rho}p + q^2\rho^2 N(t)^2 \\ &= p^2\rho^2 - 2\dot{\rho}\rho N(t)qp + i\hbar\rho N(t)\dot{\rho} + q^2\rho^2 N(t)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Agora vamos aplicar a transformação uniária de ambos os lados deste termo e realizar a quantização canônica, isto é, $q \rightarrow q$ e que $p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$ de modo a obtermos

$$\frac{1}{2}U[-\hbar^2\rho^2\frac{\partial^2}{\partial q^2} - 2\dot{\rho}\rho M(t)qi\hbar\frac{\partial}{\partial q} + i\hbar\rho M(t)\dot{\rho} + q^2\rho^2 M(t)^2]U^\dagger. \quad (\text{A.6})$$

Vemos que a derivada segunda atuará no operador U , e para facilitar nossos cálculos usaremos $U = \exp(u)$ com $u = aq^2$. Começando com o cálculo da derivada primeira e lembrando que precisamos fazer uso de uma função teste, que neste caso estamos chamando de ϕ obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial q}\right)(\exp aq^2\phi') &= 2aq\exp(aq^2)\phi + \exp(aq^2)\phi' \\ &= \frac{iM(t)\dot{\rho}q}{\hbar\rho}U^\dagger\phi + U^\dagger\phi' \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde $a = iM(t)\dot{\rho}/2\hbar\rho$, para melhor visualizar o cálculo da derivada primeira e que será útil para o que se segue. Dessa forma a derivada segunda será

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial q^2}(\exp(u)\phi) &= \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial}{\partial q}(\exp(u)\phi)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial q}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)\exp u + \phi\frac{\partial}{\partial q}(\exp(u))\right] \\ &= \frac{\partial^2\phi}{\partial q^2}\exp u + \phi'\frac{\partial}{\partial q}(\exp(u)) + \phi'\frac{\partial}{\partial q}(\exp(u)) + \phi\frac{\partial^2\phi}{\partial q^2}(\exp u) \\ &= \frac{\partial^2\phi}{\partial q^2}\exp u + 2\phi'\frac{\partial}{\partial q}(\exp(u)) + \phi\frac{\partial^2\phi}{\partial q^2}(\exp u) \\ &= \frac{\partial^2\phi}{\partial q^2}\exp u + 2\dot{\phi}2aq\exp u + \phi(2a\exp u + 4a^2q^2\exp u) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Substituindo a Eq. A.8 na Eq. A.6, fazendo a substituição $a = iN(t)(\dot{\rho} - yp)/2\hbar\rho$ e com uma pequena álgebra chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[U(\rho p - N(t)(\dot{\rho} - yp)q)^2U^\dagger]\phi &= \frac{1}{2}[-\hbar^2\rho^2\frac{\partial^2\phi}{\partial q^2} - 2\hbar qiN(t)\dot{\rho}\phi - \hbar\rho iN(t)\dot{\rho}\phi + b^2(t)\dot{\rho}^2q^2\phi - \\ &\quad 2\dot{\rho}^2b^2(t)q^2 + 2i\hbar\rho\dot{\rho}N(t)q\dot{\phi} + i\hbar\rho\dot{\rho}N(t)\phi + b^2(t)\dot{\rho}^2q^2U^\dagger\phi] \\ &= -\frac{\hbar^2\rho^2}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial q^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Assim,

$$\begin{aligned} I'\phi &= (UIU^\dagger)\phi = U\left[\frac{1}{2}\left(\frac{q}{\rho}\right)^2 + (\rho p - N(t)\dot{\rho}q)^2\right]U^\dagger\phi \\ &= U\frac{1}{2}\left(\frac{q}{\rho}\right)^2U^\dagger + U(\rho p - M(t)\dot{\rho}q)^2U^\dagger\phi \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{q}{\rho}\right)^2\phi - \frac{\hbar^2\rho^2}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial q^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Da segunda para a terceira linha usamos o resultado da Eq. A.9. De forma que o operador invariante transformado será dado por

$$I'(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{\rho} \right)^2 - \frac{\hbar^2 \rho^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2}. \quad (\text{A.11})$$

Vemos então que após esta transformação unitária, obtivemos um operador invariante que possui a mesma forma de um operador Hamiltoniano para um oscilador harmônico simples. Agora podemos facilmente encontrar a solução da equação de autovalores para $I'(t)$.

Apêndice B

Relações de incerteza

Neste apêndice, vamos usar os estados coerentes vistos no capítulo 4 para calcular os valores esperados de q , p bem como de suas respectivas incertezas. Com isso, obteremos o produto das incertezas para estes operadores nos estados $|\alpha\rangle$.

B.1 Incerteza do operador q

Em primeiro lugar devemos escrever q em termos de a e $a^\dagger$. Assim, da Eq. 5.78 teremos que

$$q = \left(\frac{\hbar\rho^2}{2}\right)^2 (a + a^\dagger). \quad (\text{B.1})$$

Agora, utilizando a equação de autovalor para a , o valor esperado de q neste estado será dado por

$$\langle q \rangle = \left(\frac{\hbar\rho^2}{2}\right)^2 (\alpha(t) + \alpha^*(t)), \quad (\text{B.2})$$

com $\alpha(t) = \alpha \exp 2i\alpha_0 = \alpha[\cos(2\alpha_0) + i\sin(2\alpha_0)]$, usando que a amplitude de $\alpha(t)$ é complexa, $\alpha = u + iv$, e fazendo um pouco de álgebra encontramos que

$$\begin{aligned} \langle q \rangle &= \left(\frac{\hbar\rho^2}{2}\right)^2 \alpha[\cos(2\alpha_0) + i\sin(2\alpha_0)] + \alpha^*[\cos(2\alpha_0) - i\sin(2\alpha_0)] \\ &= \left(\frac{\hbar\rho^2}{2}\right)^2 (u + iv)(\cos(2\alpha_0) + i\sin(2\alpha_0)) + (u - iv)(\cos(2\alpha_0) - i\sin(2\alpha_0)) \\ &= (2\hbar\rho^2)^2 u\cos(2\alpha_0) - v\sin(2\alpha_0) \\ &= \frac{(2\hbar\rho^2)^2}{\cos(\delta)} u\cos(2\alpha_0) - utg(\delta)\sin(2\alpha_0) \\ &= \frac{(2\hbar\rho^2)^2 u}{\cos(\delta)} \cos(\delta)\cos(2\alpha_0) - \sin(\delta)\sin(2\alpha_0) \\ &= (2\hbar\rho^2|\alpha|^2)^2 \cos(2|\alpha_0 + \delta). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Assim o valor esperado de q no estado coerente é dado por

$$\langle q \rangle = (2\hbar\rho^2|\alpha|^2)^2 \cos(\Omega(t) + \delta), \quad \Omega(t) = -2\alpha_0. \quad (\text{B.4})$$

De forma similar, o segundo momento associado ao operador q será

$$\begin{aligned} \langle q^2 \rangle &= \langle \varphi | \left(\frac{\hbar\rho^2}{2} \right)^{1/2} (a + a^\dagger) \left(\frac{\hbar\rho^2}{2} \right)^{1/2} (a + a^\dagger) | \varphi \rangle \\ &= \left(\frac{\hbar\rho^2}{2} \right) \langle \varphi | 1 + 2a^\dagger a + a^2 + (a^\dagger)^2 | \varphi \rangle \\ &= \left(\frac{\hbar\rho^2}{2} \right) 1 + 2|\alpha|^2 + \alpha^2 + (\alpha^*)^2, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

onde α^2 será dado por

$$\begin{aligned} \alpha^2(t) &= \alpha^2 (\cos(2\alpha_0) + i \sin(2\alpha_0))^2 \\ &= (u + iv)^2 (\cos^2(2\alpha_0) + 2i \cos(2\alpha_0) \sin(2\alpha_0) - \sin^2(2\alpha_0))^2 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

e

$$\begin{aligned} (\alpha^*)^2(t) &= (\alpha^*)^2 (\cos(2\alpha_0) - i \sin(2\alpha_0))^2 \\ &= (u - iv)^2 (\cos^2(2\alpha_0) - 2i \cos(2\alpha_0) \sin(2\alpha_0) - \sin^2(2\alpha_0))^2. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Somando as duas últimas equações obtemos

$$\begin{aligned} \alpha^2(t) + (\alpha^*)^2(t) &= 2u^2 \cos^2(2\alpha_0) - 2v \cos^2(2\alpha_0) - 8uv \cos(2\alpha_0) \sin(2\alpha_0) \\ &\quad - 2u \sin^2(2\alpha_0) + 2v^2 \sin^2(2\alpha_0). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Substituindo a Eq. B.8 na Eq. B.5 temos

$$\begin{aligned} \langle q^2 \rangle &= \frac{\hbar\rho^2}{2} [1 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2 \cos^2(2\alpha_0) - 2v \cos^2(2\alpha_0) - \\ &\quad 8uv \cos(2\alpha_0) \sin(2\alpha_0) + 2u \sin^2(2\alpha_0) + 2v^2 \sin^2(2\alpha_0)]. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Nossa última tarefa afim de encontrar a incerteza de q é calcular o quadrado do valor esperado deste observável no estado coerente e será dado por

$$\begin{aligned} \langle q \rangle^2 &= 2\hbar\rho^2 [\cos(2\alpha_0) - i \sin(2\alpha_0)]^2 \\ &= 2\hbar\rho^2 [u^2 \cos^2(2\alpha_0) - 2uv \cos(2\alpha_0) \sin(2\alpha_0) + v^2 \sin^2(2\alpha_0)]. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

A incerteza quadrática de q dada por

$$\begin{aligned} (\Delta q)^2 &= \rho^2 \hbar [1/2 + u^2 + v^2 - u^2 (\cos^2(2\alpha_0)) + \sin^2(2\alpha_0) - v^2 (\cos^2(2\alpha_0)) + \sin^2(2\alpha_0)] \\ &= \rho^2 \hbar [1/2 + u^2 + v^2 - u^2 - v^2] = \frac{\rho^2 \hbar}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Finalmente encontramos a incerteza quadrática de q_l dada por

$$(\Delta q)^2 = \frac{\rho^2 \hbar}{2}. \quad (\text{B.12})$$

B.2 Incerteza do operador momento

Para procedermos ao cálculo desta incerteza, vamos partir da Eq. 5.78 teremos que e a sua conjugada para obter p em termos dos operadores escada a e $a^\dagger$. Desta forma obtemos que

$$p = \frac{-i}{\rho} (\hbar/2)^{1/2} (a - a^\dagger) + M(t)(\dot{\rho} - \rho y) \frac{q}{\rho}. \quad (\text{B.13})$$

De maneira semelhante ao que fizemos para q , o valor esperado quadrático de p será dado por

$$\begin{aligned} \langle p \rangle^2 &= (2\hbar)^{1/2} (u \sin(2\alpha_0) + v \cos(2\alpha_0) / \rho) + \\ &\quad (2\hbar)^{1/2} M(t)(\dot{\rho} - \rho y)(u \cos(2\alpha_0) - v \sin(2\alpha_0))^2. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

E o valor esperado do momento ao quadrado será

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle &= \frac{\hbar}{2} [(1 + 2|\alpha| - \alpha^2(t) - (\alpha^*)^2(t)) / \rho + (M(\dot{\rho} - \rho y))^2 (1 + 2|\alpha| + \alpha^2(t) - (\alpha^*)^2(t)) + \\ &\quad \frac{2M(\dot{\rho} - \rho y)}{i\rho} (\alpha^2(t) - (\alpha^*)^2(t))]. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Finalmente usando as Eqs. (B.6) e (B.7) na Eq. (B.15) e subtraindo as Eqs. B.15 e B.14 obtemos a incerteza quadrática de p dada por

$$\begin{aligned} (\Delta p)^2 &= \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 \\ &= \frac{\hbar M^2 (\dot{\rho} - \rho y)}{2} + \hbar M^2 u^2 (\dot{\rho} - \rho y) + \hbar M^2 u^2 (\dot{\rho} - \rho y) + \frac{\hbar}{2\rho^2} + \frac{\hbar u^2}{\rho^2} + \frac{\hbar v^2}{\rho^2} - \\ &\quad \frac{2\hbar v^2}{\rho^2} \cos^2(2\alpha_0) - 2\hbar M^2 u^2 (\dot{\rho} - \rho y)^2 \cos^2(2\alpha_0) + \hbar M^2 u^2 (\dot{\rho} - \rho y)^2 \cos^2(2\alpha_0) - \\ &\quad \hbar M^2 v^2 (\dot{\rho} - \rho y)^2 \cos^2(2\alpha_0) - \frac{\hbar u^2}{\rho^2} \cos^2(2\alpha_0) + \frac{\hbar u^2}{\rho^2} \cos^2(2\alpha_0) - \\ &\quad \underbrace{\frac{4\hbar}{\rho^2} u v \cos(2\alpha_0) \sin(2\alpha_0)}_{172} + \underbrace{\frac{4\hbar}{\rho} M v^2 (\dot{\rho} - \rho y) \cos(2\alpha_0) \sin(2\alpha_0)}_{173} - \\ &\quad \underbrace{\frac{4\hbar}{\rho} M v^2 (\dot{\rho} - \rho y) \cos(2\alpha_0) \sin(2\alpha_0)}_{173} + \underbrace{4\hbar M^2 u v (\dot{\rho} - \rho y)^2 \cos(2\alpha_0) \sin(2\alpha_0)}_{174} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\frac{4\hbar M^2 uv(\dot{\rho} - \rho y)^2 \cos(2\alpha_0) \sin(2\alpha_0)}{174}} + \underbrace{\frac{4\hbar}{\rho^2} uv \cos(2\alpha_0) \sin(2\alpha_0)}_{172} + \\
& \frac{2\hbar u^2}{\rho^2} \sin^2(2\alpha_0) + \underbrace{\frac{4\hbar}{\rho} M uv \cos(2\alpha_0) \sin^2(2\alpha_0)}_{175} - \underbrace{\frac{4\hbar}{\rho} M uv \cos(2\alpha_0) \sin^2(2\alpha_0)}_{175} - \\
& 2\hbar M^2 v^2 (\dot{\rho} - \rho y)^2 \sin^2(2\alpha_0) - \hbar M^2 u^2 \dot{\rho}^2 \sin^2(2\alpha_0) + \hbar M^2 v^2 \dot{\rho}^2 \sin^2(2\alpha_0) + \\
& \frac{\hbar u^2}{\rho^2} \sin^2(2\alpha_0) - \frac{\hbar u^2}{\rho^2} \sin^2(2\alpha_0) \tag{B.16}
\end{aligned}$$

1. Coeficientes de u^2

$$- \frac{\hbar u^2}{\rho^2} \cos^2(2\alpha_0) - \frac{2\hbar u^2}{\rho^2} \sin^2(2\alpha_0) + \frac{\hbar u^2}{\rho^2} \sin^2(2\alpha_0) + \frac{\hbar u^2}{\rho^2} = 0$$

2. Coeficientes de v^2

$$- \frac{2\hbar v^2}{\rho^2} \cos^2(2\alpha_0) + \frac{\hbar v^2}{\rho^2} \cos^2(2\alpha_0) - \frac{\hbar v^2}{\rho^2} \sin^2(2\alpha_0) + \frac{\hbar v^2}{\rho^2} = 0$$

3. Coeficientes de $u^2 \dot{\rho}^2$

$$\begin{aligned}
C.u^2 \dot{\rho}^2 &= \hbar M^2 u^2 (\dot{\rho} - \rho y)^2 - 2\hbar M^2 u^2 (\dot{\rho} - \rho y)^2 \cos^2(2\alpha_0) + \hbar M^2 u^2 (\dot{\rho} - \rho y)^2 \cos^2(2\alpha_0) \\
&\quad - \hbar M^2 u^2 (\dot{\rho} - \rho y)^2 \sin^2(2\alpha_0) = 0 \tag{B.17}
\end{aligned}$$

4. Coeficientes de $v^2 \dot{\rho}^2$

$$\begin{aligned}
C.v^2 \dot{\rho}^2 &= \hbar M^2 v^2 (\dot{\rho} - \rho y)^2 - \hbar M^2 v^2 (\dot{\rho} - \rho y)^2 \cos^2(2\alpha_0) - 2\hbar M^2 v^2 (\dot{\rho} - \rho y)^2 \cos^2(2\alpha_0) \\
&\quad - \hbar M^2 v^2 (\dot{\rho} - \rho y)^2 \sin^2(2\alpha_0) = 0. \tag{B.18}
\end{aligned}$$

Cancelando os termos semelhantes e observando os coeficientes que se anulam, finalmente encontramos a incerteza quadrática de p dada por

$$(\Delta p)^2 = \frac{\hbar(\dot{\rho} - \rho y)^2 N(t)^2}{2} + \frac{\hbar}{2\rho^2}. \tag{B.19}$$

Agora de posse das Eqs. B.12 e B.19 obtemos o seguinte produto de incertezas quadráticas

$$(\Delta q)^2 (\Delta p)^2 = \frac{\rho^2 \hbar}{2} \left(\frac{\hbar \dot{\rho}^2 M^2}{2} + \frac{\hbar}{2\rho^2} \right) \tag{B.20}$$

ou de forma mais simplificada

$$\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2} \{1 + [N(t) \rho (\dot{\rho} - \rho y)]^2\}^{1/2}. \tag{B.21}$$

O resultado acima mostra que os estados coerentes vistos no capítulo 5 não são, em geral, estados de incerteza mínima. Na referência [34] mostramos que isto ocorre porque os estados $|\alpha\rangle$ na verdade correspondem aos bem conhecidos estados comprimidos [42, 43].

Apêndice C

Fase de Lewis para o invariante linear

Nesta seção, calcularemos as fases de Lewis para o problema de um oscilador harmônico amortecido e forçado dependente do tempo. Para isto, calcularemos os elementos de matriz da equação

$$\hbar \frac{d\mu_\lambda(t)}{dt} = \langle \phi_\lambda | (i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t)) | \phi_\lambda \rangle, \quad (\text{C.1})$$

de modo a obtermos a expressão para a função de fase. Primeiro derivaremos a Eq. (6.20) de modo a obter

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial q^2} &= \left(\frac{im_0 e^{\Lambda(t)} \dot{\beta}(t)}{\hbar \beta(t)} \right) |\phi_\lambda\rangle + \\ &\quad \left(iM(t)\beta(t)q + i(\lambda - \gamma(t)) \right)^2 |\phi_\lambda\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Agora usaremos que $p^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2}$. Assim, usando o resultado anterior teremos que

$$\langle \phi_\lambda | H(t) | \phi_\lambda \rangle = \left\langle \phi_\lambda \left| \left(-\frac{e^{-\Lambda(t)} \hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right) \right| \phi_\lambda \right\rangle + \frac{1}{2} m_0 e^{\Lambda(t)} \omega^2(t) q^2 - e^{\Lambda(t)} F(t) q. \quad (\text{C.3})$$

Substituindo na equação acima as Eqs. (6.20) e (C.2), após um cálculo direto, encontramos o valor esperado da Hamiltoniana dada pela Eq. (6.1):

$$\begin{aligned} \langle \phi_\lambda | H(t) | \phi_\lambda \rangle &= \frac{1}{2} m_0 e^{\Lambda(t)} \left(\omega^2(t) + \frac{\dot{\beta}^2(t)}{\beta^2(t)} \right) q^2 + \frac{e^{\Lambda(t)} [\lambda - \gamma(t)]^2}{2m_0 \beta^2(t)} \\ &\quad - \frac{i\hbar \dot{\beta}(t)}{\beta(t)} + \frac{\dot{\beta}(t)}{\beta^2(t)} (\lambda - \gamma(t)) q - e^{\Lambda(t)} F(t) q. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Derivando a Eq. (6.23) e, usando as Eqs. (6.1), (6.14) para simplificar o resultado,

obteremos que

$$\begin{aligned} \langle \phi_\lambda | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \phi_{\lambda'} \rangle &= \frac{1}{2} m_0 e^{\Lambda(t)} \left(\omega^2(t) + \frac{\dot{\beta}^2(t)}{\beta^2(t)} \right) q^2 \\ &\quad - \frac{i\hbar \dot{\beta}(t)}{\beta(t)} + \frac{\dot{\beta}(t)}{\beta^2(t)} (\lambda - \gamma(t)) q - e^{\Lambda(t)} F(t) q. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Logo, com a substituição da Eqs. (C.4) e (C.5) na Eq. (C.1), teremos afinal as funções de fase que queríamos determinar dadas pela seguinte expressão:

$$\frac{d\mu_\lambda}{dt} = - \frac{e^{-\Lambda(t)} [\lambda - \gamma(t)]^2}{2\hbar m_0 \beta^2(t)}. \quad (\text{C.6})$$

A determinação das funções de fase é obtida finalmente por

$$\mu_\lambda(t) = - \frac{1}{2\hbar} \int_0^t \frac{e^{\Lambda(\tau)} [\lambda - \gamma(\tau)]^2}{2\hbar m_0 \beta^2(\tau)} d\tau. \quad (\text{C.7})$$

Desta forma encontramos as funções de fase que será parte da solução da equação de Schrödinger como apresentado no capítulo 6.

Referências Bibliográficas

- [1] PEDROSA, I. A.; ROSAS, A. Electromagnetic field quantization in time-dependent linear media. *Phys. Rev. Lett.*, v. 103, p. 010402, (2009).
- [2] CALDIROLA, P. Quantum theory of nonconservative systems. *Nuovo Cimento*, v. 77, (1983).
- [3] KANAI, E. On the quantization of the dissipative systems. *Prog. Theor. Phys.*, v. 3, p. 440–442, (1948).
- [4] PEDROSA, I. A.; SERRA, G.; GUEDES, I. Wave functions of a time-dependent harmonic oscillator with and without a singular perturbation. *Phys. Rev. A*, v. 56, p. 4300, (1997).
- [5] PEDROSA, I.; GUEDES, I. Wave function of the time-dependent inverted harmonic oscillator. *Mod. Phys. Lett.B*, v. 16, p. 637, (2002).
- [6] PEDROSA, I. A.; PINHEIRO, A. P. Quantum description of a mesoscopic rlc circuit. *Progress of Theoretical Physics*, Kyoto, v. 125, p. 1133, (2011).
- [7] BERRY, M. V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc. R. Soc. A*, v. 392, p. 45–57, (1984).
- [8] FURTADO, C.; BEZERRA, V. B. Gravitational berryâs quantum phase. *Phys. Rev. D*, v. 62, p. 45–57, (2000).
- [9] SANDERS, B. C.; ET AL. Geometric phase of three-level systems in interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, v. 86, p. 369–372, (2001).
- [10] MONTEOLIVA, D. B.; ET AL. On geometric phases and dynamical invariants. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 27, p. 6897, (1994).

- [11] PEDROSA, I. A.; LIMA, D. A. P. Coherent states and geometric phases of a generalized mass and frequency damped harmonic oscillator with time-dependent. *Int. J. of Modern Physics B*, v. 28, (2014).
- [12] GRIFFITHS, D. J. *Introduction to quantum mechanics*. Prentice Hall, (2005).
- [13] SAKURAI, J. J. *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, (1994).
- [14] KERNER, E. H. Noted on forced and damped oscillator in quantum mechanics. *Can. J. Phys.*, v. 36, p. 371–377, (1958).
- [15] LIANG, M.; WU, H. Quantum and classical exact solutions of the time dependent driven generalized harmonic oscillator. *Physica Scripta*, Stockholm, v. 68, p. 41–44, (2003).
- [16] KHANDEKAR, D.; LAWANDE, S. V. Exact propagator for time-dependent harmonic oscillator with and without a singular perturbation. *J. Math. Phys.*, v. 16, p. 384, (1975).
- [17] KHANDEKAR, D.; LAWANDE, S. V. Exact solution of a time-dependent quantal harmonic oscillator with damping and a perturbative force. *J. Math. Phys.*, v. 20, p. 1870, (1979).
- [18] SONG, D. Y. The time-dependent canonical formalism: generalized harmonic oscillator and the infinite square well with a moving boundary. *Phys. Rev. A*, v. 20, p. 2616, (1999).
- [19] LI, F.; WANG, J.; WEYGUNY, A.; LIN, D. L. Gauge transformations approach to the exact solutions of a generalized harmonic oscillator. *J. Phys. A*, v. 27, p. 985–992, (1994).
- [20] MAAMACHE, M. Unitary transformation approach to the exact solution for the singular oscillator. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 29, p. 2838–2883, (1996).
- [21] PARK, T. J. Canonical transformation for the time-dependent harmonic oscillator. *Bull. Korean Chem. Soc.*, v. 25, p. 285–288, (2004).

- [22] LEWIS JR, H. R.; RIESENFELD, W. D. An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent eletromagnetic field. *J. Math.*, v. 10, p. 1458–1473, (1969).
- [23] LEWIS JR., H. R. Classical and quantum systems with time-dependent harmonic-oscillator-type hamiltonians. *Phys. Rev. Lett.*, v. 18, p. 510–512, (1967).
- [24] ERMAKOV, V. P. *Univ. Izv. Kiev*, v. 20, p. 1, (1880).
- [25] RAY, J. R. Minimum-uncertainty coherent states for certain time-dependent systems. *Phys. Rev. D*, v. 25, p. 3417–3419, (1982).
- [26] PEDROSA, I. A. Exact wave funtions of a harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency. *Phys. Rev. A*, v. 55, p. 3219–3221, (1997).
- [27] MILNE, W. E. The numerical determination of characteristic numbers. *Phys. Rev.*, v. 35, p. 863, (1930).
- [28] PINNEY, E. *Proc. A. M. S.*, v. 1, p. 681, (1950).
- [29] GOLDSTEIN, H.; POOLE, C. P.; SAFKO, J. L. *Classical mechanics, 3rd ed.* New York: Addison Wesley, (2000).
- [30] AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, v. 115, p. 485, (1959).
- [31] CHAMBERS, R. G. Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux. *Phys. Rev. Lett.*, v. 5, p. 3, (1960).
- [32] FUENTES-GURIDI, I.; ET AL. Geometric phases of mesoscopic spin in bose-einstein condensates. *Phys. Rev. A*, v. 66, p. 022102, (2002).
- [33] HARTLEY, J. G.; RAY, J. R. Coherent states for the timeâdependent harmonic. *Phys. Rev. D*, v. 25, p. 382, (1982).
- [34] PEDROSA, I. A. Comment on the coherent states for the time-dependent harmonic oscillator. *Phys. Rev. D*, v. 36, p. 1279, (1987).
- [35] CERVERO, J. M.; VILARROEL, J. On the quantum theory of the damped harmonic oscillator. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 17, p. 2963, (1984).

- [36] GUEDES, I. A. P. I. Quantum states of a generalized time-dependent inverted harmonic oscillator. *Int. J. Mod. Phys. B*, v. 18, p. 1379, (2004).
- [37] GREENBERG, D. M. A critique of the major approaches to damping in quantum theory. *J. Math. Phys.*, v. 20, p. 762, (1979).
- [38] LIMA, A. L.; ROSAS, A.; PEDROSA, I. A. Quantum states of a generalized time-dependent inverted harmonic oscillator. *Ann. Phys.*, v. 323, p. 2253, (2008).
- [39] MORALES, D. A. Correspondence between berry's phase and lewis phase for quadratics hamiltonians. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 21, p. L889, (1988).
- [40] MAAMACHE, M. Ermakov systems, exact solution, and geometrical angles and phases. *Phys. Rev. A*, v. 52, p. 936, (1995).
- [41] NIETO, M. M.; SIMMONS, J. L. M. Coherent states for general potentials. i. formalism. *Phys. Rev. D*, v. 20, p. 1321, (1979).
- [42] STOLER, D. Equivalence classes of minimum uncertainty packets. *Phys. Rev. D*, v. 1, p. 3217, (1970).
- [43] WALLS, D. F. Squeezed states of light. *Nature*, v. 306, p. 141, (1983).
- [44] UM, C. I.; YEON, K. H.; GEORGE, T. F. The quantum damped harmonic oscillator. *Phys. Rep.*, v. 362, p. 63–192, (2002).
- [45] UM, C. I.; YEON, K. H.; GEORGE, T. F. Time-dependent general quantum quadratic hamiltonian systems. *Phys. Rev. A*, v. 68, p. art. 052108, (2003).
- [46] VAIDYANATHAN, R. Linear invariants of a time-dependent quantal oscillator. *J. Math. Phys.* 23, v. 68, p. art. 052108, (2003).
- [47] KIM, H. C.; LEE, M. H.; JI, J. Y.; KIM, J. K. Heisenberg-picture approach to the exact quantum motion of a time-dependent forced harmonic oscillator. *Phys. Rev. A*, v. 53, p. 3767–3772, (1996).
- [48] BOHM, D. *Quantum theory*. New York : Price Hall, (1962).
- [49] WALLS, D. F.; MILBURN, G. J. *Quantum optics*. (1995).

- [50] POWELL, J. L. Linear invariants of a time-dependent quantal oscillator. *J. Math. Phys.* 23, v. 68, p. art. 052108, (2003).