



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FABRICIO DOS SANTOS GAMA

**AÇÃO EFETIVA DE BAIXAS ENERGIAS EM TEORIA DE
SUPERCAMPOS COM ALTAS DERIVADAS**

TESE DE DOUTORADO

JOÃO PESSOA, PB
SETEMBRO, 2014

FABRICIO DOS SANTOS GAMA

**AÇÃO EFETIVA DE BAIXAS ENERGIAS EM TEORIA DE
SUPERCAMPOS COM ALTAS DERIVADAS**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Albert Petrov

JOÃO PESSOA, PB

SETEMBRO, 2014

G184a Gama, Fabricio dos Santos.

Ação efetiva de baixas energias em teoria de
supercampos com altas derivadas / Fabricio dos Santos
Gama.- João Pessoa, 2014.

80f.

Orientador: Albert Petrov

Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN

1. Física. 2. Teorias quânticas de campos. 3. Teorias de
supercampos. 4. Teoria com altas derivadas. 5. Ação efetiva.

UFPB/BC

CDU: 53(043)




Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO DE TITULAÇÃO
Doutorado

A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 11 de setembro de 2014, Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, **APROVA Fabrício dos Santos Gama** na defesa de sua tese intitulada “*Ação Efetiva de Baixas Energias em Teoria de Supercampos com Altas Derivadas*”.

João Pessoa, 11 de setembro de 2014


Orientador:


Prof. Dr. Albert Petrov
(UFPB)

1º Examinador:


Prof. Dr. Laércio Losano
(UFPB)


2º Examinador:


Prof. Dr. Victor Rivelles
(USP)

3º Examinador:


Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho
(UFPB)

4º Examinador:


Prof. Dr. Alyson Fábio Ferrari
(UFABC)

A minha esposa que eu tanto amo.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar à Deus por ter criado as leis da natureza, sem as quais este trabalho jamais poderia ter sido feito. Agradeço também a toda minha família, em particular, aos meus pais Pedro e Josefa pelo apoio à minha educação acadêmica e pela grande contribuição para minha educação moral. Eu gostaria de agradecer também ao Prof^o Albert Petrov pela orientação, pela colaboração e por ter sugerido os problemas tratados nesta tese. Agradecer aos professores José Roberto Nascimento, Marcelo Gomes e Adilson Silva pela colaboração. Agradecer à minha esposa Aliliane (Lilika) pela paciência, apoio e grande carinho durante meu doutorado. Aos meus colegas e professores da UFPB e da UEFS. Visto que são muitas pessoas, então não vou citar nomes para não esquecer de ninguém.


"Cada povo tem o governo que merece."

—JOSEPH DE MAISTRE

Resumo

Teorias com altas derivadas foram introduzidas muito cedo numa tentativa de regularizar as divergências ultravioletas das teorias quânticas de campos. Infelizmente, teorias com altas derivadas têm uma energia que não é limitada por baixo e parecem levar aos fantasmas, estados com norma negativa, que violam a unitariedade. Apesar disso, teorias com altas derivadas têm melhores propriedades de renormalização do que as teorias convencionais e assim têm sido estudadas a fundo. Recentemente, no contexto de teorias supersimétricas, o interesse neste assunto tem sido estimulado por estudos sobre, por exemplo, o método de regularização de altas derivadas, o modelo de supergravidade de altas derivadas, os aspectos clássicos de modelos de supercampo quiral com altas derivadas, etc. Esta tese examina as ações efetivas de baixas energias em teorias quânticas de campos supersimétricas com altas derivadas. Em particular, construímos quatro teorias supersimétricas com altas derivadas que são consistentes com as simetrias das teorias sem altas derivadas. Os modelos estudados aqui são os seguintes: Teoria de calibre tridimensional supersimétrica com altas derivadas genérica; Teoria de supercampo escalar tridimensional com altas derivadas genérica; Teoria de calibre com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$ e altas derivadas genérica; Teoria de supercampo quiral quadridimensional de altas derivadas com um termo cinético não convencional. Para estes modelos, calculamos as contribuições Kählerianas para o potencial efetivo em um laço, e para obter tais contribuições utilizamos as técnicas de supergráficos de Feynman padrão ou calculamos o traço funcional via uma expansão direta. No presente estudo, mostramos que o potencial efetivo Kähleriano em um laço para todas as quatro teorias não exibe nenhuma divergência.

Abstract

Higher derivative theories were introduced quite early in an attempt to regularize the ultraviolet divergencies of quantum field theories. Unfortunately, higher derivatives theories have an energy which is not bounded from below and seem to lead to ghosts, states with negative norm, that violate the unitarity. In spite of that, higher derivative theories have better renormalisation properties than the conventional theories and thus have been thoroughly studied. Recently, in the context of supersymmetric theories the interest in this subject has been stimulated by the studies about, for instance, the higher derivative regularization method, the higher derivative supergravity model, the classical aspects of the higher derivative chiral superfield models, and so on. This thesis examines low-energy effective actions of higher-derivative supersymmetric quantum field theories. In particular, we construct four higher derivative supersymmetric theories which are consistent with the symmetries of the theories without higher derivatives. The models studied here are the following: Generic higher-derivative supersymmetric three-dimensional gauge theory; Generic higher-derivative three-dimensional scalar superfield theory; Generic higher-derivative $\mathcal{N} = 2, d = 3$ gauge theory; Higher-derivative four-dimensional chiral superfield theory with a nonconventional kinetic term. For these models, we calculate the Kählerian contributions to the one-loop effective potential, and in order to obtain such contributions we use the standard Feynman supergraphs techniques or calculate the functional trace via direct expansion. In the present study  show that the one-loop Kählerian effective potential for all of the four theories does not display any divergences.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
INTRODUÇÃO	1
1 Alguns Aspectos Clássicos e Quânticos em Teoria de Supercampos em Três e Quatro Dimensões	5
1.1 SUPERESPAÇO E SUPERCAMPOS COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 3$	5
1.1.1 MOTIVAÇÃO	5
1.1.2 FORMALISMO DE SUPERCAMPOS COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 3$	6
1.2 MODELOS DE SUPERCAMPOS NO SUPERESPAÇO COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 3$	9
1.2.1 ASPECTOS CLÁSSICOS DE SUPERCAMPOS COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 3$	9
1.2.2 QUANTIZAÇÃO DOS MODELOS DE SUPERCAMPOS NO SUPERESPAÇO COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 3$	12
1.3 MODELOS DE SUPERCAMPOS NO SUPERESPAÇO COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 4$	16
1.3.1 FORMALISMO	17
1.3.2 ASPECTOS CLÁSSICOS DE SUPERCAMPOS COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 4$	19
1.3.3 QUANTIZAÇÃO DOS MODELOS DE SUPERCAMPOS NO SUPERESPAÇO COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 4$	23
1.3.4 REDUÇÃO DIMENSIONAL DO SUPERESPAÇO COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 4$ PARA O SUPERESPAÇO COM $\mathcal{N} = 2$ EM $d = 3$	26
2 Potencial Efetivo em Teoria de Supercampos com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$ e Altas Derivadas	30
2.1 EXPANSÃO EM LAÇOS E AÇÃO EFETIVA DE BAIXAS-ENERGIAS	30
2.2 TEORIA DE CALIBRE COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 3$ E ALTAS DERIVADAS GÊNÉRICAS	34
2.3 TEORIA ESCALAR COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 3$ E ALTAS DERIVADAS GÊNÉRICAS	41

3	Potencial Efetivo em Teoria de Supercampos com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$ e com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 4$ e Altas Derivadas	49
3.1	TEORIA DE CALIBRE COM $\mathcal{N} = 2$ EM $d = 3$ E ALTAS DERIVADAS GÊNÉRICAS	49
3.2	TEORIA DE SUPERCAMPO QUIRAL COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 4$ E ALTAS DERIVADAS	56
3.2.1	Lagrangiana Geral Mínima	57
3.2.2	Lagrangiana Geral Não Mínima	60
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	64
A	Notações e Convenções	66
	Referências Bibliográficas	68

INTRODUÇÃO

Simetrias são extremamente importantes na descrição de uma enorme variedade de sistemas físicos. Em particular, a teoria quântica de campos (TQC) ordinária tem como ingrediente principal do seu sucesso as simetrias impostas sobre ação, por exemplo, a imposição de simetrias internas tornaram a TQC bem sucedida na descrição de três das quatro interações fundamentais além de terem sido importantes na descoberta de um grande número de partículas elementares [1]. Talvez a simetria mais importante encontrada na TQC seja a simetria de Poincaré, visto que ela além de levar à conservação dos quadrimomenta, é devido a ela que podemos utilizar o grupo de Poincaré para classificar todas as grandezas de interesse físico de acordo com sua transformação sob tal grupo [2].

Nos últimos 40 anos, uma simetria tem sido muito estudada pelos físicos de altas-energias, tal simetria é conhecida como supersimetria (SUSY). Ela é uma extensão não-trivial da simetria de Poincaré. A SUSY foi "descoberta" cinco vezes de maneira independente no final da década de 60 e no início da década de 70. A primeira menção conhecida à supersimetria foi feita por Myazawa em 1966. Sua motivação foi tentar encontrar um grupo $SU(M/N)$ que combinaria grupos de simetria internos com grupos de simetria não-compactos do espaço-tempo [3]. Em 1971, foi mostrado que a supercorda de Neveu-Schwarz-Ramond possuía uma nova simetria de calibre anti-comutante [4]. No mesmo ano, Gol'fand and Likhtman queriam examinar as consequências para a TQC da sua nova extensão da álgebra de Poincarè [5]. Em 1972, Volkov and Akulov descobriram uma teoria supersimétrica não-linear [6]. E finalmente, dois anos depois, Wess e Zumino propuseram a primeira TQC quadridimensional supersimétrica interagente [7]. Apesar de ser uma idéia muito antiga, a SUSY ainda é muito estudada atualmente porque ela pode resolver problemas fenomenológicos que o modelo padrão não pode resolver, podemos citar alguns: o problema da hierarquia, o fornecimento de uma partícula candidata à matéria escura, a unificação das constantes de acoplamento, etc. [8]. O LHC (*Large Hadron Collider*) está atualmente procurando evidências da existência de partículas supersimétricas, mas mesmo que tais partículas não sejam encontradas, o estudo de teorias supersimétricas aumentou nosso entendimento das TQC e permanece ainda como um laboratório teórico muito útil para compreender melhor uma variedade de propriedades da TQC [9].

Do ponto de vista teórico, teorias supersimétricas exibem muitas propriedades interessantes, por exemplo, tais teorias apresentam um caráter unificador pelo fato delas unificarem simetrias

de espaço-tempo com simetrias internas além de tratarem bósons e férmions no mesmo pé de igualdade. Além disso, quando promovemos a SUSY para uma simetria local, a gravitação surge automaticamente e obtemos uma teoria da gravitação supersimétrica conhecida como supergravidade (SUGRA). Teoricamente, teorias supersimétricas apresentam um comportamento ultravioleta melhorado em relação às TQC ordinárias, em particular, a teoria Super-Yang-Mills com $\mathcal{N} = 4$ é ultravioleta finita [10]. No caso da SUGRA com $\mathcal{N} = 8$ quântica, há trabalhos recentes que oferecem evidências de que ela possa ser ultravioleta finita, levando assim a supergravidade a ser uma teoria quântica da gravidade perturbativamente consistente [11].

A SUSY não é a única maneira conhecida de se melhorar o comportamento ultravioleta de uma TQC, a introdução de derivadas de ordem superior na lagrangiana também cumpre esse papel. Teorias com altas derivadas (TAD) foram introduzidas muito cedo na história da TQC, por exemplo, em 1940, Bopp estudou classicamente uma generalização com altas derivadas da eletrodinâmica [12]. Em 1950, Pais e Uhlenbeck mostraram que TAD são dotadas de algumas inconsistências, como a geração de energia de campo livre não-positiva definida e a geração de fantasmas (*ghosts*), estados com norma negativa, que violam a unitariedade e/ou a causalidade [13]. Apesar disso, TAD exibem melhores propriedades de renormalização que as teorias convencionais e têm sido estudadas à fundo, por exemplo, a introdução de altas derivadas em TQC resulta em trabalhos como o de Lee e Wick, que em 1970 construíram uma versão finita da QED [14]. Inspirados pelo trabalho de Lee e Wick, Grinstein et al. construíram uma versão do modelo padrão com altas derivadas, tal versão se coloca como um possível candidato a resolução do problema de hierarquia [15]. O primeiro modelo de gravitação quântica renormalizável foi proposto em 1977, quando Stelle construiu uma versão renormalizável da gravitação quântica por meio da introdução de termos com altas derivadas na ação de Einstein-Hilbert [16]. De fato, a área da física onde há mais trabalhos publicados em TAD é a gravitação, isso se deve ao fato que a teoria de Einstein é perturbativamente não renormalizável [17]. Destacamos dois trabalhos recentes nesta linha: em [18] foi mostrado que podemos obter uma teoria renormalizável da gravitação por meio da adição de altas derivadas somente na parte espacial da ação, evitando assim a violação da unitariedade da teoria; em [19], foi mostrado que a gravitação conforme, que é uma teoria com derivadas de quarta ordem, pode ser considerada como uma teoria da gravitação quântica renormalizável e unitária, com a unitariedade sendo obtida porque a teoria é \mathcal{PT} -simétrica ao invés de hermitiana. Recentemente, no contexto de teorias supersimétricas, o interesse em TAD tem sido estimulado por trabalhos como o de Buchbinder e Stepanyantz, o qual versou sobre um esquema de regularização por meio de altas derivadas covariantes para uma teoria de calibre com $\mathcal{N} = 2$ supersimétrica [20]. Além disso, Antoniadis *et al.* analisaram classicamente modelos supersimétricos quirais com altas derivadas que podem ter aplicações em fenomenologia [21].

A ação efetiva (AE) é um objeto central no estudo da renormalização de TQC supersimétri-

cas com/sem altas derivadas, visto que a AE é o funcional gerador dos diagramas irreduzíveis de uma partícula, e tais diagramas são os mais convenientes para a investigação das bem conhecidas divergências que surgem na maioria dos modelos de TQC conhecidos [22]. A AE pode ser definida como a transformada de Legendre funcional do funcional gerador das funções de Green conexas. A AE codifica toda a informação referente a dinâmica quântica da teoria, pelo fato que qualquer elemento da matriz S pode ser obtido por meio do uso da AE e pelo cálculo de somente diagramas de nível de árvore [23]. É importante chamar a atenção para o fato que a AE é um objeto não-local e difícil de se calcular, por este motivo, algumas aproximações são necessárias para que se possa calcular a AE explicitamente. Entre as aproximações mais comuns estão a expansão em laços e a aproximação de baixas energias [24]. Apesar disto, muitos problemas de teoria quântica de campos são reduzidos, em certos casos, à encontrar o potencial efetivo, que nada mais é do que o termo de ordem zero da AE em uma aproximação de baixas energias. O potencial efetivo é, por exemplo, uma importante ferramenta para o estudo da quebra de supersimetria e/ou de simetria de calibre, além do estudo de estabilidade do vácuo [25].

No contexto de teorias supersimétricas, a ação efetiva de baixas energias (AEBE) para teorias de supercampos quadridimensionais foi definida e calculada para o modelo de supercampo quiral em [26], e desde então muitos trabalhos têm sido dedicados à este tema. Em particular, Buchbinder e Petrov calcularam as correções de um e dois laços para um modelo de supercampo quiral genérico em [27]. No contexto das teorias de calibre supersimétricas, a AEBE foi independentemente calculada no nível de um laço para a teoria de Yang-Mills em [28] e [29] por meio de cálculos com supergráficos. Estes resultados citados foram generalizados em [30] por meio do cálculo da AEBE em um laço para um modelo de supercampo quiral genérico acoplado ao supercampo de calibre, que mais tarde foi estendido para dois laços em [31]. O cálculo da AEBE para supercampos quânticos interagindo com supercampos calibre de fundo foi considerado em algumas referências [32].

Muita atenção também tem sido dada às teorias de supercampos de baixa dimensionalidade. Dois dos principais motivos são a simplicidade e o melhor comportamento ultravioleta. Um dos motivos da simplicidade vem do fato que, por exemplo, as transformações de calibre infinitesimais na teoria de supercampos com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$ ou $d = 2$ são lineares no supercampo de calibre, isso facilita a implementação do método do campo de fundo, ao contrário das transformações de calibre infinitesimais na teoria de supercampos com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 4$, que são altamente não lineares no supercampo de calibre [10]. A melhor convergência ultravioleta de teorias supersimétricas de baixa dimensionalidade pode ser justificada por simples argumentos de contagem de potências [33], um exemplo prático dessa propriedade vem dos trabalhos [34, 35], onde foi mostrado que a SUSY QED não-comutativa 2d e a SUSY QED 3d são UV-finitas em todos os laços, respectivamente. Em relação a AEBE em teorias de supercampos de

baixa dimensionalidade, destacamos o cálculo em um e dois laços da AEBE para um modelo de supercampo escalar em 3d [36] e para a teoria de Chern-Simons supersimétrica acoplada a matéria [37]. Além disso, a AEBE foi estudada também no contexto da supersimetria estendida para um modelo de supercampo quiral geral em [38] e para a teoria de Yang-Mills em [39], ambos em 3d. Em duas dimensões, a AE foi usada em [40] para o estudo da geração dinâmica de massa no modelo de Schwinger não-comutativo.

No contexto da AEBE em teoria de supercampos com altas derivadas, o interesse neste assunto tem sido estimulado por trabalhos como o de Buchbinder e Petrov que investigaram a estrutura da AEBE em um modelo de supercampo quiral com altas derivadas associado à SU-GRA com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 4$ [41]. Gomes *et al.* calcularam a AEBE no nível de um laço para duas versões de modelos de supercampo quiral com altas derivadas no setor kähleriano [42]. Este trabalho, em particular, teve continuação em [43], onde calculamos a AEBE para uma teoria de supercampo escalar tridimensional com altas derivadas genérica, e em [44], onde calculamos a AEBE para uma teoria de supercampo quiral quadridimensional com altas derivadas no setor quiral. Em [45], Gama *et al.* estudaram a AEBE em um laço para uma teoria de calibre supersimétrica com altas derivadas acoplada a matéria quiral em quatro dimensões. Fizemos mais estudos nesta linha de teorias de calibre supersimétricas com altas derivadas, mas desta vez em três dimensões. Estudamos a AEBE para as teorias de supercampos de calibre com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$, $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$ e altas derivadas genéricas em [46] e [47], respectivamente.

Esta tese é baseada em parte nos trabalhos publicados [43, 44] e [46, 47]. Ela está organizada da seguinte forma. O capítulo 1 é destinado à revisão de alguns conceitos relacionados à teoria de supercampos em três e quatro dimensões que serviram de base para os capítulos seguintes. Em particular, no cap. 1 revisamos alguns os aspectos clássicos e quânticos da teoria de supercampos. No cap. 2 calculamos as contribuições kählerianas para o superpotencial efetivo no nível de um laço para a teoria de supercampo escalar com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$ e altas derivadas genérica e para a teoria de supercampo de calibre com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$ e altas derivadas genérica. No cap. 3 calculamos as contribuições kählerianas para o superpotencial efetivo no nível de um laço para a teoria de supercampo quiral com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 4$ e altas derivadas no setor quiral e para a teoria de supercampo de calibre com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$ e altas derivadas genérica.

Alguns Aspectos Clássicos e Quânticos em Teoria de Supercampos em Três e Quatro Dimensões

1.1 SUPERESPAÇO E SUPERCAMPOS COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 3$

Nesta seção pretendemos apresentar brevemente alguns aspectos básicos do superespaço com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$.

1.1.1 MOTIVAÇÃO

Neste e nos capítulos seguintes vamos estudar SUSY utilizando o formalismo de supercampos (que vivem no superespaço) ao invés de utilizar a TQC ordinária por vários motivos, dentre eles podemos citar [10]:

- A SUSY é manifesta em todos os passos do cálculo.
- Facilita a construção de modelos supersimétricos, principalmente quando queremos construir termos de interação que exibem esta simetria.
- Fornece uma descrição mais compacta. Veremos, por exemplo, que a ação de Yang-Mills supersimétrico no superespaço com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 4$ possui um supercampo escalar de calibre que contém como componentes três campos ordinários (no calibre de Wess-Zumino).
- Já possui naturalmente campos auxiliares que são essenciais para: o fechamento fora da camada de massa da álgebra de SUSY, a linearidade das transformações de SUSY, a quebra-espontânea de SUSY, etc. Na TQC ordinária precisamos colocá-los à mão.
- Menos índices. Por exemplo, o campo vetorial $A_{\alpha\dot{\alpha}}$ quadridimensional está "escondido" no supercampo escalar de calibre V .
- Facilita cálculos quânticos. Introduzindo as regras de Feynman obtemos supergráficos, um supergráfico é equivalente aos diagramas de Feynman de todos os campos componentes contidos no supercampo. Além disso, quando se utiliza a TQC ordinária é preciso fazer cálculos para mostrar que há cancelamentos das divergências que surgem dos laços

dos campos componentes bosônicos e fermiônicos, enquanto que supergráficos incorporam esses cancelamentos automaticamente [48].

1.1.2 FORMALISMO DE SUPERCAMPOS COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 3$

A SUSY pode ser definida como a simetria que é obtida com a introdução de geradores fermiônicos que transformam-se como espinores de Weyl sob transformações de Lorentz, segue que estes geradores fermiônicos não irão comutar com os geradores do grupo de Lorentz. Logo, podemos afirmar que a SUSY estende não-trivialmente a álgebra do grupo de Poincaré [49]. Em particular, a álgebra de SUSY tridimensional contém, além dos geradores usuais do grupo de Poincaré, um gerador fermiônico Q_α que satisfaz a álgebra¹ [10]:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2P_{\alpha\beta}, \quad [Q_\alpha, P_{\mu\nu}] = 0, \quad (1.1)$$

onde estamos desconsiderando cargas centrais. Note na primeira expressão que há um anti-comutador, álgebras que envolvem comutadores e anti-comutadores são chamadas superálgebras de Lie [50].

Dentre as muitas consequências que resultam da álgebra de SUSY acima, vale apenas destacar duas delas. A primeira é que $[Q_\alpha, P_{\mu\nu}] = 0$ implica que P^2 é um operador de Casimir, ou seja, ele comuta com todos os geradores do supergrupo, assim as partículas pertencentes ao mesmo multipletto possuem a mesma massa. A segunda é que a energia em teorias supersimétricas é sempre positiva [51].

A simetria de Poincaré, dada por uma transformação de coordenadas no espaço de Minkowski, permite a formulação de uma TQC com esta simetria manifesta. A SUSY, por sua vez, é uma extensão da simetria de Poincaré, então é tentador procurarmos por um espaço que seja uma extensão do espaço de Minkowski, no qual possamos formular uma TQC que tenha a SUSY manifesta: tal espaço existe e é conhecido como superespaço. O superespaço possui além das coordenadas de espaço-tempo $x^{\alpha\beta}$, ele também possui coordenadas de Grassmann θ^α que se transformam como espinores de Weyl e são anti-comutantes $\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = 0$. Em outras palavras, o superespaço com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$ pode ser parametrizado por coordenadas $z^M = (x^{\alpha\beta}, \theta^\alpha)$, coordenadas estas que sob uma transformação de Lorentz transformam-se como [10]:

$$x'^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}[e^\omega]_{(\gamma}{}^{(\alpha} [e^\phi]_{\lambda)}{}^{\beta)} x^{\gamma\lambda}, \quad \theta'^\alpha = [e^\omega]_\beta{}^\alpha \theta^\beta, \quad (1.2)$$

onde $A_{(\alpha}B_{\beta)} \equiv A_\alpha B_\beta + A_\beta B_\alpha$. As derivadas em relação a estas coordenadas são definidas como sendo

$$\partial_{\gamma\rho} x^{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \delta_{(\gamma}{}^\alpha \delta_{\rho)}{}^\beta, \quad \partial_\alpha \theta^\beta \equiv \delta_\alpha{}^\beta. \quad (1.3)$$

¹Confira o apêndice A para as notações e convenções.

Para se saber como as coordenadas $z^M = (x^{\alpha\beta}, \theta^\alpha)$ mudam sob a ação das supertranslações $P_N = (P_{\gamma\lambda}, Q_\gamma)$, é necessário que se use a representação diferencial de tais geradores, a qual é dada por

$$P_{\gamma\lambda} = i\partial_{\gamma\lambda}, \quad Q_\gamma = i(\partial_\gamma - \theta^\lambda i\partial_{\gamma\lambda}). \quad (1.4)$$

Não é difícil demonstrar que (1.4) satisfaz a álgebra de SUSY (1.1). Logo, de (1.4) e $z'^M = \exp(-i\varepsilon^N P_N)z^M$, onde $\varepsilon^N = (\xi^{\gamma\lambda}, \varepsilon^\gamma)$ são parâmetros reais, obtemos

$$x'^{\alpha\beta} = x^{\alpha\beta} + \xi^{\alpha\beta} - \frac{i}{2}\varepsilon^{(\alpha}\theta^{\beta)}, \quad \theta'^\alpha = \theta^\alpha + \varepsilon^\alpha. \quad (1.5)$$

Note que as transformações de super-Poincaré $3d$ são a combinação de (1.5) com (1.2) [52].

Podemos definir superfunções analíticas no superespaço $\Phi_{\alpha\beta\dots}(x, \theta)$ que são escalares sob supertranslações e carregam uma representação do grupo $SL(2, \mathbb{R})$, em outras palavras, carregam índices do grupo $SL(2, \mathbb{R})$. Tais funções são denominadas supercampos [53].

Podemos expandir, por exemplo, o supercampo escalar real nas variáveis de Grassmann para obter

$$\Phi(x, \theta) = A(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x) - \theta^2 F(x). \quad (1.6)$$

Note que devido ao caráter anti-comutante das novas coordenadas a série termina em $O(\theta^2)$. Além disso, vemos que os "campos componentes" $A(x), \psi_\alpha(x), F(x)$ são os campos ordinários da TQC. Um supercampo possui campos componentes com o mesmo número de componentes bosônicas e fermiônicas, em particular, o supercampo acima exibe duas componentes de cada e esta igualdade é um resultado direto da álgebra de SUSY [54].

A derivada $\partial_{\alpha\beta}$ é covariante pelo fato de $\partial_{\alpha\beta}\Phi$ ser um supercampo. De fato, além de ser covariante sob rotações de Lorentz, ela é invariante sob supertranslações como está exibido abaixo:

$$\delta(\partial_{\alpha\beta}\Phi) \equiv \partial_{\alpha\beta}(\delta\Phi) = \quad (1.7)$$

$$i\partial_{\alpha\beta}(\xi P + \varepsilon Q)\Phi = i(\xi P + \varepsilon Q)\partial_{\alpha\beta}\Phi. \quad (1.8)$$

O mesmo não pode ser dito sobre $\partial_\alpha\Phi$, porque ∂_α não anti-comuta com Q_α , isso se deve ao fato de Q_α ter uma dependência explícita da coordenada θ^α (veja eq. (1.4)). Assim, devemos definir uma derivada covariante espinorial que comute com os geradores P e Q . A derivada que apresenta a propriedade citada é dada por [10]:

$$D_\alpha \equiv -iQ_\alpha + 2\theta^\beta P_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha + \theta^\beta i\partial_{\alpha\beta}). \quad (1.9)$$

Pode ser mostrado que tal derivada comuta com os geradores P e Q . E assim, $D_\alpha\Phi$ transforma-se como um supercampo.

Vamos mostrar agora como as transformações de SUSY afetam os campos físicos. Para isso, devemos aplicar a transformação $\delta\Phi = i\varepsilon Q\Phi \equiv \delta A + \theta\delta\psi - \delta F$. Antes disso, é conveniente fazermos a introdução de um artifício matemático [52]:

$$X| = \lim_{\theta \rightarrow 0} X. \quad (1.10)$$

A partir desta definição podemos escrever as componentes de (1.6) como o resultado das projeções de $\Phi(x, \theta)$:

$$A(x) = \Phi(x, \theta)|, \quad \psi_\alpha(x) = D_\alpha\Phi(x, \theta)|, \quad F(x) = D^2\Phi(x, \theta)|. \quad (1.11)$$

Não é difícil mostrar que $Q_\alpha\Phi(x, \theta)| = iD_\alpha\Phi(x, \theta)|$. Assim, utilizando este fato com a álgebra $\{D_\alpha, D_\beta\} = 2i\partial_{\alpha\beta}$, podemos calcular as transformações de SUSY sobre os campos componentes:

$$\delta A(x) = i\varepsilon^\alpha Q_\alpha\Phi| = -\varepsilon^\alpha D_\alpha\Phi| = -\varepsilon^\alpha\psi_\alpha, \quad (1.12)$$

$$\delta\psi_\alpha(x) = -\varepsilon^\beta(C_{\alpha\beta}F + i\partial_{\alpha\beta}A), \quad (1.13)$$

$$\delta F(x) = -i\varepsilon^\alpha\partial_\alpha{}^\beta\psi_\beta. \quad (1.14)$$

Note o efeito das transformações de SUSY sobre os campos componentes. Os campos bosônicos e fermiônicos não se transformam separadamente. É por isso que a SUSY é conhecida como a simetria que transforma férmions em bósons e vice-versa.

Vamos finalizar esta seção definindo a integração em relação as coordenadas de Grassmann θ^α . Especificamente, devido ao fato de estarmos interessados em construir uma ação que seja um funcional dos supercampos e de suas derivadas, devemos definir a integração por todas as coordenadas θ^α no superespaço de tal forma que a ação seja invariante sob supertranslações $\theta'^\alpha = \theta^\alpha + \varepsilon^\alpha$ que são induzidas pelo gerador Q_α [55]. A definição que satisfaz os requisitos desejados é a seguinte:

$$\int d^2\theta\mathcal{L} \equiv \partial^2\mathcal{L}, \quad (1.15)$$

onde \mathcal{L} é uma função dos supercampos e de suas derivadas.

A definição acima é equivalente à definição (desprezando termos com divergência total) [52]:

$$\int d^2\theta\mathcal{L} \equiv D^2\mathcal{L}|. \quad (1.16)$$

Assim, podemos mostrar com o auxílio da identidade $D_\alpha D^2 = -\partial_{\alpha\beta}D^\beta$ que um funcional dos supercampos e suas derivadas é invariante sob supertranslações:

$$\delta S = \int d^3x\delta D^2\mathcal{L}| = -\int d^3x\varepsilon^\alpha D_\alpha D^2\mathcal{L}| = \int d^3x\partial_{\alpha\beta}(\varepsilon^\alpha D^\beta\mathcal{L}|) = 0. \quad (1.17)$$

1.2 MODELOS DE SUPERCAMPOS NO SUPERESPAÇO COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 3$

Nesta seção vamos estudar um modelo de supercampo escalar de matéria e dois modelos de supercampo de calibre abeliano, visto que no capítulo 2 tais modelos serão úteis no estudo de teorias supersimétricas tridimensionais com altas derivadas. Nesta tese só trabalharemos com teorias de calibre abeliano.

1.2.1 ASPECTOS CLÁSSICOS DE SUPERCAMPOS COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 3$

Vamos agora construir uma versão no superespaço do modelo supersimétrico mais simples: o modelo de supercampo escalar real de matéria, tal modelo trata da descrição de apenas duas partículas, uma de spin-0 e uma de spin-1/2, ambas massivas. O supercampo escalar real já foi descrito na seção anterior, então estamos prontos para construir a ação correspondente ao multipletto escalar massivo utilizando análise dimensional. Da álgebra $\{Q, Q\} = 2P$ deduzimos que $[Q] = 1/2$, assim de (1.4) entendemos que $[\theta] = -1/2$. Visto que a integração na coordenada θ é igual à diferenciação, então $[\int d^2\theta] = 1$. Por sua vez, pelo fato de haver apenas um campo espinorial em (1.6) que tem dimensão $[\psi] = 1$ e queremos que este campo descreva o férmion massivo, segue que o supercampo escalar deve ter dimensão $[\Phi] = 1/2$ e os outros campos $[A] = 1/2$ e $[F] = 3/2$ (note que F é um campo escalar real que possui dimensão não-física). Finalmente, só há uma única escolha de termo quadrático sem nenhum parâmetro dimensional [50]:

$$S_{\text{cinético}} = \frac{1}{2} \int d^3x d^2\theta \Phi D^2 \Phi. \quad (1.18)$$

O termo acima corresponde ao termo cinético da ação. Logo, pode-se adicionar à ação acima um potencial $V(\Phi)$ [50]:

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x d^2\theta \Phi D^2 \Phi + \int d^3x d^2\theta V(\Phi). \quad (1.19)$$

Para garantir a renormalizabilidade do modelo, $V(\Phi)$ deve ser um polinômio de ordem 4 ou menos [52].

Se integrarmos (1.19) em θ e utilizarmos as identidades $D_\alpha D^2 = -\partial_{\alpha\beta} D^\beta$ e $(D^2)^2 = \square$, obtemos depois de alguma álgebra a ação (1.19) em termos dos campos componentes:

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x [F^2 + \psi^\alpha i \partial_\alpha^\beta \psi_\beta + A \square A] + \int d^3x [V''(A) \psi^2 + V'(A) F]. \quad (1.20)$$

A ação acima é invariante sob as transformações (1.12), (1.13) e (1.14).

Neste momento é bastante natural de nos perguntarmos como construir uma versão supersimétrica de uma teoria de calibre no superespaço. Isso é o que pretendemos fazer a partir de

agora. Além disso, queremos mostrar tal construção com o intuito de mais tarde discutirmos sua versão com altas derivadas.

É conveniente utilizar dois campos escalares reais Φ_1 e Φ_2 para definir um supercampo escalar complexo de matéria,

$$\Phi(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 + i\Phi_2), \quad (1.21)$$

de tal forma que possamos definir uma ação:

$$S_{\text{cinético}} = \frac{1}{2} \int d^3x d^2\theta D^\alpha \bar{\Phi} D_\alpha \Phi, \quad (1.22)$$

de modo que esta ação é invariante sob as transformações:

$$\Phi' = e^{iK} \Phi, \quad \bar{\Phi}' = \bar{\Phi} e^{-iK}, \quad (1.23)$$

onde K é um parâmetro constante e real. Se os supercampos complexos são auto-interagentes, então (1.22) pode ser generalizado para

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x d^2\theta D^\alpha \bar{\Phi} D_\alpha \Phi + \int d^3x d^2\theta V(\bar{\Phi}, \Phi). \quad (1.24)$$

A introdução de um campo de calibre em uma TQC pode ser efetivada utilizando um procedimento que consiste em utilizar uma ação que exibe uma simetria global (parâmetro constante) e promover o parâmetro da transformação de uma constante para uma função das coordenadas do espaço-tempo (local). Vamos utilizar o mesmo procedimento no superespaço [53].

Queremos agora promover K à um parâmetro local no superespaço. Todavia, a ação (1.22) não é invariante sob as novas transformações, visto que agora $D_\alpha K \neq 0$. Para recuperar a invariância devemos fazer a substituição $D_\alpha \rightarrow \nabla_\alpha$ em (1.22), onde ∇_α é dada por

$$\nabla_\alpha = D_\alpha \mp iA_\alpha, \quad (1.25)$$

que atuará em Φ e $\bar{\Phi}$, respectivamente [10]. Logo, pode-se reescrever (1.22)

$$S_{\text{cinético}} = \frac{1}{2} \int d^3x d^2\theta \nabla^\alpha \bar{\Phi} \nabla_\alpha \Phi, \quad (1.26)$$

que será invariante sob as transformações locais (1.23) se A_α transformar-se como

$$A'_\alpha = A_\alpha + D_\alpha K. \quad (1.27)$$

A expansão em série de Taylor em θ do supercampo de calibre A_α é dada por [50]

$$A_\alpha(x, \theta) = \chi_\alpha - \theta_\alpha B + i\theta^\beta V_{\alpha\beta} - 2\theta^2 \left(\lambda_\alpha + \frac{i}{2} \partial_{\alpha\beta} \chi^\beta \right). \quad (1.28)$$

Definindo o parâmetro de calibre como $K(x, \theta) \equiv \omega + \theta^\alpha \sigma_\alpha - \theta^2 \tau$, segue que podemos analisar como os campos componentes de A_α se transformam sob a transformação de calibre (1.27).

Portanto, de (1.28) e (1.27), obtemos

$$\delta\chi_\alpha = \sigma_\alpha \quad , \quad \delta B = \tau, \quad (1.29)$$

$$\delta V_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta} \omega \quad , \quad \delta\lambda_\alpha = 0. \quad (1.30)$$

Nota-se das transformações acima que $\delta V_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta}\omega$ é justamente a transformação de calibre usual da eletrodinâmica. Logo, (1.27) reproduz no nível de componentes as transformações de calibre usuais [10].

O supercampo A_α foi introduzido de tal forma que o termo cinético da ação do supercampo escalar complexo fosse invariante sob transformações locais (1.23), mas em (1.26) o supercampo A_α não possui dinâmica. Por este motivo, vamos construir uma ação invariante sob (1.27) para o supercampo A_α de tal forma que este supercampo possua dinâmica. Depois disso verificaremos se tal ação corresponde à ação de Maxwell supersimétrico 3D.

O primeiro passo para construir a ação desejada é encontrar um supercampo dado em termos do supercampo de calibre A_α que seja invariante sob (1.27). Este procedimento é análogo ao caso da teoria de Maxwell ordinária, em tal teoria o campo $F_{\mu\nu}$ é invariante sob transformações de calibre e é dado em termos de A_μ . A ação é escrita em termos de $F_{\mu\nu}$ [48].

O supercampo invariante sob (1.27), que é uma função do supercampo de calibre A_β é dado por [50]:

$$W_\alpha = \frac{1}{2}D^\beta D_\alpha A_\beta. \quad (1.31)$$

O supercampo acima é invariante de calibre devido à identidade $D^\beta D_\alpha D_\beta = 0$.

Agora, estamos em posição de construir a ação de super-Maxwell. A expansão em componentes de A_α é dada por (1.28), visto que queremos que $V_{\alpha\beta}$ seja o campo de calibre da nossa teoria, então $V_{\alpha\beta}$ deve ter dimensão 1/2, segue então que A_α deve ser adimensional, a partir disto e de (1.31), podemos afirmar que W_α tem dimensão 1. Logo, a ação (adimensional) que procuramos é dada por [10]:

$$S_{Maxwell} = \frac{1}{2g^2} \int d^3x d^2\theta W^\alpha W_\alpha, \quad (1.32)$$

onde g é uma constante de acoplamento adimensional.

Para ter certeza se a ação (1.32) é a ação que procuramos, devemos analisar os campos componentes de W_α e integrar por todas as coordenadas de Grassmann. Para isso, devemos calcular (1.31) utilizando (1.28). Este cálculo pode ser simplificado notando que em (1.29), os campos σ_α e B sofrem translações locais arbitrárias devido a transformação de calibre. Logo, podemos fixar um calibre de tal forma que os campos σ_α e B possam ser eliminados. O calibre no qual $\sigma_\alpha = B = 0$ é conhecido como o calibre de Wess-Zumino (WZ), tal calibre é útil porque ele elimina os campos não-físicos do supercampo A_α . Além disso, vale a pena destacar que o calibre de WZ quebra a supersimetria manifesta [52].

O supercampo $A_\alpha(x, \theta)$ no calibre de WZ é dado por:

$$A_\alpha|_{WZ}(x, \theta) = i\theta^\beta V_{\alpha\beta} - 2\theta^2 \lambda_\alpha. \quad (1.33)$$

Neste calibre, a expansão em campos componentes de W_α é dada por:

$$W_\alpha = \frac{1}{2}D^\beta D_\alpha A_\beta|_{WZ} = \lambda_\alpha + \theta^\beta f_{\alpha\beta} - \theta^2 i\partial_\alpha{}^\beta \lambda_\beta, \quad (1.34)$$

onde $f_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\partial_{(\alpha}{}^{\gamma}V_{\beta)\gamma}$ é o bispinor de Maxwell [48].

Com esta expansão em campos componentes, podemos integrar (1.32) para obter a extensão supersimétrica da teoria de Maxwell em termos de campos componentes. Integrando, obtemos

$$S_{Maxwell} = \frac{1}{2g^2} \int d^3x d^2\theta W^\alpha W_\alpha = \frac{1}{g^2} \int d^3x \left[-\frac{1}{2} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} + \lambda^\alpha i\partial_\alpha{}^\beta \lambda_\beta \right]. \quad (1.35)$$

A ação (1.35) corresponde à ação de super-Maxwell.

Pode-se construir uma versão de supercampos da teoria de Chern-Simons com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$ supersimétrica, basta notar que (1.31) satisfaz a identidade de Bianchi $D^\alpha W_\alpha = 0$, de modo que a ação

$$S_{CS} = \frac{m}{2g^2} \int d^3x d^2\theta A^\alpha W_\alpha, \quad (1.36)$$

é invariante sob as transformações de calibre (1.27), onde m é um parâmetro com dimensão de massa [50].

Calculando as equações de movimento para a combinação de (1.32) e (1.36), obtemos

$$\frac{\delta(S_{Maxwell} + S_{CS})}{\delta A^\alpha} = 0 \Rightarrow i\partial_\alpha{}^\beta W_\beta + mW_\alpha = 0. \quad (1.37)$$

A eq. de movimento acima descreve a dinâmica de um supercampo W_α massivo [10].

Integrando (1.36) em θ e usando o calibre de WZ, podemos reescrever (1.36) como

$$S_{CS} = \frac{m}{2g^2} \int d^3x (V^{\alpha\beta} i\partial_\alpha{}^\gamma V_{\beta\gamma} + 2\lambda^\alpha \lambda_\alpha), \quad (1.38)$$

onde esta ação é a versão em campos componentes da teoria de super-Chern-Simons. Note que diferente da teoria de Maxwell, o campo λ_α possui uma equação de movimento puramente algébrica, ou seja, a eq. de movimento para λ_α não descreve uma propagação do campo nem no espaço nem no tempo.

1.2.2 QUANTIZAÇÃO DOS MODELOS DE SUPERCAMPOS NO SUPERESPAÇO COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 3$

Nesta seção estamos interessados em estudar, muito brevemente, os aspectos quânticos da teoria de supercampos por meio de métodos funcionais, com o objetivo principal de introduzir as regras de Feynman para supercampos que levam à noção de supergráficos de Feynman.

Visto que vamos estudar a quantização por meio de métodos funcionais, então devemos antes disso definir a diferenciação de um funcional de supercampos no superespaço. Para isso, vamos primeiramente definir a função delta no superespaço de tal forma que ela satisfaça a relação usual:

$$\int d\theta f(\theta') \delta(\theta - \theta') = f(\theta). \quad (1.39)$$

Então, podemos definir [51]:

$$\delta(\theta - \theta') \equiv \theta - \theta'. \quad (1.40)$$

Assim, levando em conta todas as coordenadas de Grassmann, temos:

$$\delta^2(\theta - \theta') \equiv -(\theta - \theta')^2. \quad (1.41)$$

Logo, definindo $\delta^5(z - z') \equiv \delta^3(x - x')\delta^2(\theta - \theta')$, temos:

$$\int d^5z f(z') \delta^5(z - z') = f(z). \quad (1.42)$$

Agora, podemos definir a diferenciação de um funcional de um supercampo [10]:

$$\frac{\delta A^\alpha(z)}{\delta A^\beta(z')} = \delta^\alpha_\beta \delta^5(z - z'). \quad (1.43)$$

Note que esta definição é completamente análoga à definição de diferenciação de um funcional de um campo ordinário [1].

Da definição acima segue o resultado usual:

$$\frac{\delta}{\delta A^\alpha(z)} \int d^5z' f^\beta(z') A_\beta(z') = \int d^5z' f_\beta(z') \delta^\beta_\alpha \delta^5(z' - z) = f_\alpha(z) \quad (1.44)$$

Destacamos algumas identidades úteis entre as derivadas covariantes e as funções delta [51]:

$$\delta_{12}\delta_{12} = 0, \quad \delta_{12}D^\alpha\delta_{12} = 0, \quad \delta_{12}D^2\delta_{12} = \delta_{12}, \quad (1.45)$$

onde $\delta_{12} \equiv \delta^2(\theta_1 - \theta_2)$. Se houver mais que duas derivadas covariantes, podemos utilizar a álgebra dos D 's para reduzir a um número menor ou igual à dois.

Vamos agora definir um dos objetos mais fundamentais no estudo dos aspectos quânticos da teoria de campos: o funcional gerador. O principal motivo é que a partir dele pode-se derivar a regras de Feynman para um dado modelo. Dada uma ação $S[\phi]$ como sendo um funcional do campo ϕ , definimos o funcional gerador das funções de Green de n -pontos, ou amplitude de transição vácuo-vácuo na presença de uma fonte externa J do campo ϕ , como sendo dada por [56]:

$$Z[J] = \langle 0|0 \rangle_J \equiv \int \mathcal{D}\phi \exp [S[\phi] + \int d^3x J\phi]. \quad (1.46)$$

É importante frisar que a fonte J deve possuir as mesmas características que o campo ϕ , por exemplo, se ϕ é um espinor, então J também deve ser.

A partir de (1.46) obtemos as funções de Green de n -pontos [56]:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\dots\delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (1.47)$$

Após a definição (1.46), o que nos resta é calcular a integral funcional, para isso, vamos escrever a ação em uma forma conveniente:

$$S = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \phi \widehat{O} \phi + \mathcal{L}_{int}(\phi) \right], \quad (1.48)$$

onde \widehat{O} é um operador diferencial. Isso nos permite reescrever (1.46) como:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \exp \left[\int d^3x \mathcal{L}_{int} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right] \int \mathcal{D}\phi \exp \int d^3x \left[\frac{1}{2} \phi \widehat{O} \phi + J\phi \right], \\ &= \exp \left[\int d^3x \mathcal{L}_{int} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right] Z_0[J]. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Integrais funcionais como $Z_0[J]$ são em geral integrais Gaussianas e possuem a forma geral:

$$I(y) = \int dx \exp \left\{ \frac{1}{2} x^T \widehat{O} x + x^T y \right\}, \quad (1.50)$$

cuja a solução é dada por [51]:

$$I(y) = \text{const.} \exp \left\{ -\frac{1}{2} y^T \widehat{O}^{-1} y \right\}. \quad (1.51)$$

A generalização para um ou mais supercampos é direta.

A partir da definição (1.46), podemos definir o funcional gerador das funções de Green conexas como sendo:

$$W[J] \equiv \ln Z[J]. \quad (1.52)$$

O campo médio ou campo de fundo ϕ é definido como:

$$\phi[J] \equiv \frac{\langle 0|\phi|0\rangle_J}{\langle 0|0\rangle_J} = \frac{\delta W}{\delta J}. \quad (1.53)$$

A ação efetiva, ou o funcional gerador de vértices próprios, é definida como a transformada de Legendre funcional de $W[J]$ [56]:

$$\Gamma[\phi] = W[J] - \int d^3z J\phi. \quad (1.54)$$

A ação efetiva pode ser expandida em séries de potência em \hbar (expansão em laços), e assim, calculada perturbativamente.

Por meio das ferramentas que foram desenvolvidas até o momento, vamos agora derivar as regras de Feynman para a ação efetiva do modelo de supercampo escalar complexo auto-interagente (1.24), para a teoria de Maxwell (1.32) e Chern-Simons (1.36) supersimétrica acoplada à matéria. Então os funcionais geradores para as partes quadráticas dos modelos com suas respectivas fontes são dadas por:

$$Z_{0Es} = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Phi} \exp \int d^5z \left[\bar{\Phi} (D^2 + m) \Phi + J\Phi + \bar{J}\bar{\Phi} \right], \quad (1.55)$$

$$Z_{0Ma} = \int \mathcal{D}A_\alpha \exp \int d^5z \left[\frac{1}{2} A^\beta \left(\frac{1}{2g^2} D^2 D^\alpha D_\beta \right) A_\alpha + J^\alpha A_\alpha \right], \quad (1.56)$$

$$Z_{0CS} = \int \mathcal{D}A_\alpha \exp \int d^5z \left[\frac{1}{2} A^\beta \left(\frac{m}{2g^2} D^\alpha D_\beta \right) A_\alpha + J^\alpha A_\alpha \right]. \quad (1.57)$$

Antes de começarmos o cálculo dos funcionais geradores que vamos utilizar para a derivação dos propagadores, temos que introduzir em (1.56) e em (1.57) um termo para fixar o calibre.

Devemos proceder desta forma porque, assim como na QED ordinária, as integrais funcionais (1.56) e (1.57) são invariantes de calibre, segue deste fato que a integração é redundante, essa redundância faz com que a integração exceda a contagem de configurações de supercampo, ocorrendo assim a divergência do funcional. Para evitar tal divergência, adicionaremos em (1.56) e em (1.57) os termos de fixação de calibre [50]:

$$S_{\text{GF, Ma}} = \frac{1}{4g^2\xi} \int d^5z A^\beta D^2 D_\beta D^\alpha A_\alpha, \quad S_{\text{GF, CS}} = \frac{m}{4g^2\xi} \int d^5z A^\beta D_\beta D^\alpha A_\alpha, \quad (1.58)$$

respectivamente.

A partir das expressões (1.55), (1.56), (1.57) e (1.58) podemos obter os funcionais geradores das teorias desejadas por meio do cálculo das integrais gaussianas. Assim, usando o resultado (1.51) em (1.55), (1.56), (1.57) e (1.58), obtemos

$$Z_{0\text{Es}}[J, \bar{J}] = \exp \int d^5z \left[-\bar{J} \frac{D^2 - m}{\square - m^2} J \right], \quad (1.59)$$

$$Z_{0\text{Ma}}[J] = \exp \int d^5z \left[-\frac{1}{2} J^\beta \frac{g^2}{4\square^2} D^2 (D^\alpha D_\beta - \xi D_\beta D^\alpha) J_\alpha \right], \quad (1.60)$$

$$Z_{0\text{CS}}[J] = \exp \int d^5z \left[-\frac{1}{2} J^\beta \frac{g^2}{4m\square} (D^\alpha D_\beta - \xi D_\beta D^\alpha) J_\alpha \right]. \quad (1.61)$$

A partir destes resultados podemos obter os propagadores por meio de (1.47) e de $\frac{\delta j(x, \theta)}{\delta j(x', \theta')} = \delta^5(z - z')$, então [51]:

$$\langle \bar{\Phi}(z_1) \Phi(z_2) \rangle = -\frac{D^2 - m}{\square - m^2} \delta^5(z_1 - z_2), \quad (1.62)$$

$$\langle A_\beta(z_1) A^\alpha(z_2) \rangle_M = -\frac{g^2}{4\square^2} D^2 (D^\alpha D_\beta - \xi D_\beta D^\alpha) \delta^5(z_1 - z_2), \quad (1.63)$$

$$\langle \langle A_\beta(z_1) A^\alpha(z_2) \rangle_{\text{CS}} = -\frac{g^2}{4m\square} (D^\alpha D_\beta - \xi D_\beta D^\alpha) \delta^5(z_1 - z_2). \quad (1.64)$$

Notamos que se $\xi = 1$ ("calibre de Fermi-Feynman") no propagador (1.63), obtemos $\langle A_\beta(1) A^\alpha(2) \rangle_M = -\frac{g^2}{2\square} \delta^\alpha_\beta \delta_{12}$, que é um propagador análogo ao propagador da TQC ordinária. Isto segue das identidades $D_\alpha D_\beta = i\partial_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta} D^2$ e $(D^2)^2 = \square$ [50].

A partir dos resultados acima podemos derivar as regras de Feynman para obter a ação efetiva das teorias em consideração, mas vamos derivar primeiramente para a teoria de supercampo escalar complexo.

Logo, as regras de Feynman para a obtenção da ação efetiva do modelo de supercampo escalar complexo são dadas por [10, 50]:

1. Propagador (espaço dos momenta):

$$\langle \bar{\Phi}(1) \Phi(2) \rangle = \frac{D^2 - m}{k^2 + m^2} \delta_{12} \quad (1.65)$$

2. Vértices: os vértices podem ser lidos diretamente a partir dos termos de interação, por exemplo, $\int d^5z \bar{\Phi} \Phi D^\alpha \bar{\Phi} D_\alpha \Phi$, fornece um vértice com linhas $\bar{\Phi}$ e Φ deixando o próprio vértice, além de operadores D^α e D_α atuando sobre as correspondentes linhas $\bar{\Phi}$ e Φ , respectivamente.
3. Há um fator
 - $\int d^3k (2\pi)^{-3}$ para cada laço.
 - $[\prod_i \int d^3p_i (2\pi)^{-3} \varphi(p_i)] (2\pi)^3 \delta^3(\sum_i p_i)$ para cada linha externa com momentum p_i deixando o vértice, onde φ representa o supercampo médio na ação efetiva.
 - $\int d^2\theta$ para cada vértice.
4. Fatores de simetria usuais.

As regras de Feynman para as teorias de calibre abeliana são as mesmas utilizadas para o modelo de supercampo escalar complexo, com a adição dos propagadores [10, 50]:

$$\langle A_\beta(1) A^\alpha(2) \rangle_M = -\frac{g^2}{4(k^2)^2} D^2 (D^\alpha D_\beta - \xi D_\beta D^\alpha) \delta_{12}, \quad (1.66)$$

$$\langle A_\beta(1) A^\alpha(2) \rangle_{CS} = \frac{g^2}{4mk^2} (D^\alpha D_\beta - \xi D_\beta D^\alpha) \delta_{12}. \quad (1.67)$$

E com a adição de vértices que podem ser lidos a partir de:

$$\int d^5z \bar{\Phi} (\nabla^2 - D^2) \Phi = \int d^5z \bar{\Phi} \left[-A^\alpha D_\alpha - \frac{i}{2} (D^\alpha A_\alpha) - A^2 \right] \Phi. \quad (1.68)$$

A partir das regras acima, podemos ser levados a pensar que a ação efetiva é um funcional não-local nas coordenadas de Grassmann, porque associamos uma integração $\int d^2\theta$ em cada vértice, mas este pensamento é equivocado de acordo com o teorema de não-renormalização: qualquer contribuição quântica para a ação efetiva deve ser expressa como uma única integral $\int d^2\theta$ no superespaço. [10, 50, 33].

1.3 MODELOS DE SUPERCAMPOS NO SUPERESPAÇO COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 4$

Nesta seção pretendemos apresentar brevemente alguns aspectos básicos do superespaço com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 4$. Em particular, vamos estudar um modelo de supercampo quiral de matéria e um modelo de supercampo de calibre abeliano, visto que no capítulo 3 tais modelos serão úteis no estudo de teorias supersimétricas com altas derivadas.

1.3.1 FORMALISMO

Em quatro dimensões a álgebra de SUSY contém os geradores usuais do grupo de Poincaré, contém um gerador fermiônico Q_α que transforma-se como um espinor de Weyl de mão-direita e (diferentemente do caso tridimensional) outro gerador fermiônico adicional $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$, que transforma-se como um espinor de Weyl de mão-esquerda. Estes geradores satisfazem a álgebra² [54]:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = P_{\alpha\dot{\beta}}, \quad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \quad [Q_\alpha, P_{\alpha\dot{\beta}}] = 0, \quad (1.69)$$

onde $Q_\alpha^\dagger = -\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$. Além disso, estamos desconsiderando cargas centrais. Note que agora temos novos índices " $\dot{\alpha}$ " devido ao fato do grupo de Lorentz ser homomórfico ao grupo $SL(2, \mathbb{C})$, e por sua vez o grupo $SL(2, \mathbb{C})$ admite duas representações espinoriais inequivalentes.

O superespaço com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 4$ pode ser parametrizado por coordenadas $z^M = (x^{\alpha\dot{\alpha}}, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$. As coordenadas adicionais transformam-se como espinores de Weyl e comutam entre elas mesmas e com $x^{\alpha\dot{\alpha}}$. Tais coordenadas transformam-se sob uma transformação de Lorentz como [52]:

$$x'^{\alpha\dot{\alpha}} = [e^\omega]_\beta{}^\alpha [e^{\bar{\omega}}]_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\alpha}} x^{\beta\dot{\beta}}, \quad \theta'^\alpha = [e^\omega]_\beta{}^\alpha \theta^\beta, \quad \bar{\theta}'^{\dot{\alpha}} = [e^{\bar{\omega}}]_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}}. \quad (1.70)$$

As derivadas em relação a estas coordenadas são definidas como sendo [10]

$$\partial_{\gamma\dot{\gamma}} x^{\alpha\dot{\alpha}} \equiv \delta_\gamma{}^\alpha \delta_{\dot{\gamma}}{}^{\dot{\alpha}}, \quad \partial_\alpha \theta^\beta \equiv \delta_\alpha{}^\beta, \quad \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \equiv \delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \quad (1.71)$$

A representação diferencial dos geradores $P_N = (P_{\gamma\dot{\gamma}}, Q_\gamma, \bar{Q}_{\dot{\gamma}})$ que satisfazem a álgebra de SUSY (1.69) é dada por

$$P_{\alpha\dot{\alpha}} = i\partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad (1.72)$$

$$Q_\alpha = i(\partial_\alpha - \frac{1}{2}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}i\partial_{\alpha\dot{\alpha}}), \quad (1.73)$$

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = i(\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - \frac{1}{2}\theta^\alpha i\partial_{\alpha\dot{\alpha}}), \quad (1.74)$$

Podemos atuar (1.72-1.74) sobre as coordenadas $z^M = (x^{\alpha\dot{\alpha}}, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$ para obter

$$x'^{\alpha\dot{\alpha}} = x^{\alpha\dot{\alpha}} + \xi^{\alpha\dot{\alpha}} - \frac{i}{2}(\varepsilon^\alpha \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}} \theta^\alpha), \quad (1.75)$$

$$\theta'^\alpha = \theta^\alpha + \varepsilon^\alpha, \quad (1.76)$$

$$\bar{\theta}'^{\dot{\alpha}} = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}, \quad (1.77)$$

onde foi utilizado $z'^M = \exp(-i\varepsilon^N P_N)z^M$, com $\varepsilon^N = (\xi^{\alpha\dot{\alpha}}, \varepsilon^\alpha, \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}})$. Portanto, as transformações de super-Poincaré $4d$ são a combinação de (1.75-1.77) com (1.70) [52].

De modo semelhante ao superespaço tridimensional, supercampos podem ser definidos como superfunções analíticas no superespaço $\Phi_{\alpha\beta\dots\dot{\alpha}\dot{\beta}\dots}(x, \theta, \bar{\theta})$ que são escalares sob super-translações e carregam uma representação do grupo $SL(2, \mathbb{C})$ [53].

²Novamente, vamos desconsiderar os geradores do grupo Lorentz.

Um exemplo de supercampo 4d é o supercampo escalar real:

$$V = C + \theta^\alpha \chi_\alpha + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} - \theta^2 M - \bar{\theta}^2 \bar{M} + \theta^\alpha \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} A_{\alpha\dot{\alpha}} - \bar{\theta}^2 \theta^\alpha \lambda_\alpha - \theta^2 \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} + \theta^2 \bar{\theta}^2 D'. \quad (1.78)$$

Note que devido a existência da nova coordenada $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$, os supercampos 4d possuem um número de campos componentes maior do que os supercampos 3d, e por sua vez, o supercampo (1.78) exibe mais componentes do que os supercampos 3d, no caso são oito componentes bosônicas e oito componentes fermiônicas [54].

As derivadas covariantes espinoriais são definidas como [52]:

$$D_\alpha \equiv -iQ_\alpha + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} P_{\alpha\dot{\alpha}} = (\partial_\alpha + \frac{1}{2} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} i \partial_{\alpha\dot{\alpha}}), \quad (1.79)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \equiv -i\bar{Q}_{\dot{\alpha}} + \theta^\alpha P_{\alpha\dot{\alpha}} = (\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2} \theta^\alpha i \partial_{\alpha\dot{\alpha}}). \quad (1.80)$$

Assim, $D_\alpha V$ e $\bar{D}_{\dot{\alpha}} V$ transformam-se como supercampos.

A integração por todas as coordenadas θ^α e $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ que é invariante sob supertranslações $\theta'^\alpha = \theta^\alpha + \varepsilon^\alpha$ e $\bar{\theta}'^{\dot{\alpha}} = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}$ é definida como sendo [55]:

$$\int d^4\theta \mathcal{L} \equiv D^2 \bar{D}^2 \mathcal{L}|. \quad (1.81)$$

Assim, podemos mostrar com o auxílio das identidades $\bar{D}^3 = D^3 = 0$ e $[\bar{D}^{\dot{\alpha}}, D^2] = i\partial^{\alpha\dot{\alpha}} D_\alpha$ que um funcional dos supercampos e suas derivadas é invariante sob supertranslações:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int d^4x d^4\theta \mathcal{L} = - \int d^4x (\varepsilon^\alpha D_\alpha + \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}} \bar{D}_{\dot{\alpha}}) D^2 \bar{D}^2 \mathcal{L}| = \\ &= \int d^4x \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} D^2 \bar{D}^2 \mathcal{L}| = \int d^4x \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}} \partial^{\alpha\dot{\alpha}} (\bar{D}_{\dot{\alpha}} D_\alpha \bar{D}^2 \mathcal{L}|) = 0. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Na próxima seção veremos que existem lagrangianas de interesse físico que satisfazem a restrição $\bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{L}}_c = 0$ ou $D_\alpha \bar{\mathcal{L}}_c = 0$. Assim, se considerarmos a integração como definida acima para tais lagrangianas obteremos um resultado trivial (desprezando termos com divergência total):

$$\int d^4\theta \bar{\mathcal{L}}_c = \int d^4\theta \bar{\mathcal{L}}_c = 0. \quad (1.83)$$

Para essas lagrangianas definimos a integração somente para parte das coordenadas θ ou $\bar{\theta}$. Definimos [52]:

$$\int d^2\theta \bar{\mathcal{L}}_c \equiv D^2 \bar{\mathcal{L}}_c|, \text{ se } \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{\mathcal{L}}_c = 0, \quad (1.84)$$

$$\int d^2\bar{\theta} \bar{\mathcal{L}}_c \equiv \bar{D}^2 \bar{\mathcal{L}}_c|, \text{ se } D_\alpha \bar{\mathcal{L}}_c = 0. \quad (1.85)$$

Não é difícil mostrar que essas novas integrações são invariantes sob supertranslações, basta seguir os mesmos passos que (1.82).

1.3.2 ASPECTOS CLÁSSICOS DE SUPERCAMPOS COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 4$

Um supercampo geral é altamente redutível, pelo fato que ele possui muitos campos componentes para descrever um número pequeno de partículas em cada múltiplo. Por exemplo, nesta seção vamos construir uma versão no superespaço do modelo supersimétrico mais simples: o modelo de WZ, tal modelo trata da descrição de apenas duas partículas, uma de spin-0 e uma de spin-1/2, massivas. Devido a esse fato, devemos impor restrições aos supercampos de modo a reduzir o número excessivo de campos componentes [54]. Vamos então definir o supercampo quiral (ou supercampo quiral de mão-direita), que além de ser o mais simples, é muito útil para muitas aplicações. Tal supercampo é definido como [10]:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0. \quad (1.86)$$

Note que esta restrição é consistente, visto que ela é invariante sob transformações de SUSY.

Para resolver a restrição acima, basta notar que qualquer função $\Phi(x^{(+)}, \theta^{(+)})$ de $x^{(+)} = x + \frac{i}{2}\theta\bar{\theta}$ e $\theta^{(+)} = \theta$ satisfaz tal restrição pelo fato que [57]:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}x^{(+)} = 0, \quad (1.87)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta^{(+)} = 0. \quad (1.88)$$

Nota-se que depois da mudança de variáveis $x^{(+)} = x + \frac{i}{2}\theta\bar{\theta}$ e $\theta^{(+)} = \theta$, a restrição (1.86) toma a forma [57]:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}^{(+)}\Phi^{(+)} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\Phi^{(+)} = 0. \quad (1.89)$$

Assim, a restrição diz que $\Phi^{(+)}$ não tem dependência de $\bar{\theta}$ nessas novas variáveis. A expansão em componentes de $\Phi^{(+)}(x^{(+)}, \theta)$ é dada por:

$$\Phi^{(+)}(x^{(+)}, \theta) = A(x^{(+)}) + \theta^{\alpha}\psi_{\alpha}(x^{(+)}) - \theta^2 F(x^{(+)}) . \quad (1.90)$$

A expansão acima é conhecida como representação quiral de Φ . Podemos obter a representação vetorial de Φ substituindo $x^{(+)} = x + \frac{i}{2}\theta\bar{\theta}$ em (1.90) e expandindo o resultado para obter [10]:

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = A(x) + \theta^{\alpha}\psi_{\alpha}(x) - \theta^2 F(x) + \frac{i}{2}\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}A(x) + \frac{i}{2}\theta^2\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\psi^{\alpha}(x) + \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\Box A(x). \quad (1.91)$$

Podemos também definir o supercampo anti-quiral (ou supercampo quiral de mão-esquerda) $\bar{\Phi}$ como:

$$D_{\alpha}\bar{\Phi} = 0. \quad (1.92)$$

Seguindo os mesmos passos que foram dados para o supercampo quirial, obtemos sua expansão em campos componentes na representação anti-quirial e vetorial respectivamente:

$$\bar{\Phi}^{(-)}(x^{(-)}, \bar{\theta}) = \bar{A}(x^{(-)}) + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(x^{(-)}) - \bar{\theta}^2 \bar{F}(x^{(-)}), \quad (1.93)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(x, \theta, \bar{\theta}) &= \bar{A}(x) + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(x) - \bar{\theta}^2 \bar{F}(x) - \frac{i}{2} \theta^{\alpha} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{A}(x) - \frac{i}{2} \bar{\theta}^2 \theta^{\alpha} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}(x) + \\ &+ \frac{1}{4} \theta^2 \bar{\theta}^2 \square \bar{A}(x). \end{aligned} \quad (1.94)$$

O produto e a soma de supercampos puramente (anti-)quirais é um supercampo (anti-)quiral. Todavia, o produto e a soma de um supercampo quirial com um anti-quiral geram um supercampo escalar geral [57].

Fazendo uma análise dimensional, podemos construir a ação correspondente ao multiplete quirial massivo. Da álgebra $\{Q, \bar{Q}\} = P$ deduzimos que $[Q] = [\bar{Q}] = 1/2$, assim de (1.73) e (1.74) entendemos que $[\theta] = [\bar{\theta}] = -1/2$. Visto que a integração nas coordenadas θ e $\bar{\theta}$ é igual à diferenciação, então $[\int d^4\theta] = 2$ e $[\int d^2\theta] = [\int d^2\bar{\theta}] = 1$. Por sua vez, pelo fato de haver apenas um campo espinorial em (1.91) que tem dimensão $[\psi] = 3/2$ e queremos que este campo descreva o férmion massivo, segue que o supercampo quirial deve ter dimensão $[\Phi] = 1$ e os outros campos $[A] = 1$ e $[F] = 2$. Finalmente, só há uma única escolha de termo quadrático sem nenhum parâmetro dimensional [50]:

$$S_{\text{cinético}} = \int d^4x d^4\theta \bar{\Phi} \Phi. \quad (1.95)$$

O termo acima corresponde ao termo cinético da ação. Logo, a ação mais geral renormalizável envolvendo somente supercampos quirais (e anti-quirais) é dada por [54]:

$$S = \int d^4x d^4\theta \bar{\Phi} \Phi + \left[\int d^4x d^2\theta W(\Phi) + h.c. \right], \quad (1.96)$$

onde $W(\Phi) = \frac{m}{2} \Phi^2 + \frac{\lambda}{3!} \Phi^3$. Este modelo corresponde ao modelo de WZ no superespaço.

Se integrarmos (1.96) em θ e utilizarmos as identidades $\bar{D}_{\dot{\alpha}} D^2 \Phi = i \partial^{\alpha}_{\dot{\alpha}} D_{\alpha} \Phi$ e $\bar{D}^2 D^2 \Phi = \square \Phi$ (válidas somente para supercampos quirais), obtemos depois de alguma álgebra a ação (1.96) em termos dos campos componentes:

$$S = \int d^4x [\bar{A} \square A + \bar{F} F + \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} i \partial^{\alpha}_{\dot{\alpha}} \psi_{\alpha}] + \int d^4x \{W''(A) \psi^2 + W'(A) F + h.c.\}. \quad (1.97)$$

Vamos utilizar a parte cinética do multiplete quirial como ponto de partida para a introdução do supercampo de calibre por meio do acoplamento mínimo. De (1.96) e (1.97), segue que o termo cinético é dado por por:

$$\int d^4x d^4\theta \bar{\Phi} \Phi. \quad (1.98)$$

A ação acima é invariante sob as transformações:

$$\Phi' = e^{i\lambda} \Phi, \quad \bar{\Phi}' = \bar{\Phi} e^{-i\lambda}, \quad (1.99)$$

onde λ é o parâmetro da transformação e ele é constante.

Queremos promover λ à um parâmetro local, mas devido ao fato que devemos preservar a quiralidade dos supercampos Φ e $\bar{\Phi}$, então λ deve ser promovido à supercampos quiral Λ e anti-quiral $\bar{\Lambda}$, respectivamente. Assim, as novas transformações ficam [10]:

$$\Phi' = e^{i\Lambda}\Phi, \quad \bar{\Phi}' = \bar{\Phi}e^{-i\bar{\Lambda}}, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda = D_{\alpha}\bar{\Lambda} = 0. \quad (1.100)$$

É claro que (1.98) não é invariante sob as novas transformações, visto que $\Lambda \neq \bar{\Lambda}$. Para recuperar a invariância devemos introduzir um supercampo de calibre $V(x, \theta, \bar{\theta})$, tal supercampo de calibre é chamado de pré-potencial [52], de tal forma que

$$\int d^4x d^4\theta \bar{\Phi} e^V \Phi \quad (1.101)$$

seja invariante sob a transformação de calibre [53]:

$$\delta V = i(\bar{\Lambda} - \Lambda). \quad (1.102)$$

A expansão em série de Taylor do supercampo de calibre V é dada por [50]

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C - i\theta^{\alpha}\chi_{\alpha} + i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} - \theta^2 M - \bar{\theta}^2 \bar{M} + \theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}A_{\alpha\dot{\alpha}} + i\bar{\theta}^2\theta^{\alpha}(\lambda_{\alpha} - \frac{i}{2}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}) \\ & - i\theta^2\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}(\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} + \frac{i}{2}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\chi^{\alpha}) + \theta^2\bar{\theta}^2(D' + \frac{1}{4}\square C). \end{aligned} \quad (1.103)$$

Pode-se analisar como os campos componentes de V se transformam sob a transformação de calibre (1.102). Para isso, vamos definir os parâmetros

$$\Lambda = \Lambda_1 + \theta^{\alpha}\Lambda_{\alpha} - \theta^2\Lambda_2 + \frac{i}{2}\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\Lambda_1 + \frac{i}{2}\theta^2\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\Lambda^{\alpha} + \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\square\Lambda_1, \quad (1.104)$$

$$\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}_1 + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\Lambda}_{\dot{\alpha}} - \bar{\theta}^2\bar{\Lambda}_2 - \frac{i}{2}\theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\Lambda}_1 - \frac{i}{2}\bar{\theta}^2\theta^{\alpha}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\Lambda}^{\dot{\alpha}} + \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\square\bar{\Lambda}_1. \quad (1.105)$$

Portanto, de (1.102-1.105), obtemos

$$\delta C = i(\bar{\Lambda}_1 - \Lambda_1), \quad \delta\chi_{\alpha} = \Lambda_{\alpha}, \quad \delta M = -i\Lambda_2, \quad (1.106)$$

$$\delta A_{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{2}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}(\bar{\Lambda}_1 + \Lambda_1), \quad \delta\lambda_{\alpha} = 0, \quad \delta D' = 0. \quad (1.107)$$

Os campos C , χ_{α} , M e seus conjugados sofrem translações locais arbitrárias devido a transformação de calibre (1.102). Logo, podemos fixar o calibre de WZ de modo que sejam eliminados o excesso de campos componentes do supercampo V , e assim permaneça somente os campos físicos [50]. Segue deste fato que o supercampo $V(x, \theta, \bar{\theta})$ no calibre de WZ é dado por:

$$V_{WZ} = \theta^{\alpha}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}A_{\alpha\dot{\alpha}} + i\bar{\theta}^2\theta^{\alpha}\lambda_{\alpha} - i\theta^2\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} + \theta^2\bar{\theta}^2D'. \quad (1.108)$$

Neste calibre, potências de ordem maior ou igual à três de V são nulas [54]:

$$V_{WZ}^3 = 0. \quad (1.109)$$

Introduzimos um supercampo de calibre V , de modo que tal supercampo possui um campo componente $A_{\alpha\dot{\alpha}}$ que é o campo de calibre da eletrodinâmica. Vamos, a partir disto, construir uma ação invariante sob (1.102) para o supercampo V . Antes disso, vamos introduzir o supercampo espinorial invariante W_α , tal espinor é uma função do supercampo de calibre V é dado por [10, 53]:

$$W_\alpha = i\bar{D}^2 D_\alpha V. \quad (1.110)$$

De (1.110) nota-se que W_α é um supercampo espinorial quirral $\bar{D}_{\dot{\alpha}} W_\alpha = 0$. Além disso, pode ser mostrado que ele é invariante sob (1.102).

Utilizando uma análise dimensional, podemos construir a ação correspondente a teoria super-Maxwell quadridimensional. A expansão em componentes de V é dada por (1.108) no calibre de WZ, visto que queremos que $A_{\alpha\dot{\alpha}}$ seja o campo de calibre da nossa teoria, então $A_{\alpha\dot{\alpha}}$ deve ter dimensão 1, segue então que V deve ser adimensional, a partir disto e de (1.110), podemos afirmar que W_α tem dimensão $3/2$. Logo, a ação (adimensional) que procuramos é dada por [10]:

$$S_{Max} = \frac{1}{2g^2} \int d^4x d^2\theta W^\alpha W_\alpha. \quad (1.111)$$

Para se obter a extensão supersimétrica da teoria de Maxwell em termos de campos componentes, devemos integrar (1.111) em θ . Antes disso, devemos primeiramente determinar a expansão em campos componentes de W_α no calibre de WZ. Esta tarefa pode ser simplificada se utilizarmos as novas variáveis ($x^{(+)\alpha\dot{\alpha}} \equiv y^{\alpha\dot{\alpha}}$):

$$y^{\alpha\dot{\alpha}} = x^{\alpha\dot{\alpha}} + \frac{i}{2}\theta^\alpha\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \quad \theta'^\alpha = \theta^\alpha, \quad \bar{\theta}'^{\dot{\alpha}} = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}. \quad (1.112)$$

Com essas novas variáveis, as derivadas covariantes ficam:

$$D_\alpha^{(+)} = \partial_\alpha + i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^{\alpha\dot{\alpha}}}, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}^{(+)} = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}. \quad (1.113)$$

E (1.108) é modificada para:

$$V_{WZ}(y, \theta, \bar{\theta}) = \theta^\alpha\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} A_{\alpha\dot{\alpha}}(y) + i\bar{\theta}^2\theta^\alpha\lambda_\alpha(y) - i\theta^2\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}(y) + \theta^2\bar{\theta}^2(D'(y) + \frac{i}{2}\partial^{\alpha\dot{\alpha}} A_{\alpha\dot{\alpha}}(y)). \quad (1.114)$$

Assim, podemos utilizar as expressões (1.110) e (1.114) para obter depois de algum trabalho algébrico:

$$W_\alpha = i\bar{D}^2 D_\alpha V|_{WZ} = \lambda_\alpha + \theta^\beta (-iC_{\beta\alpha} D' + f_{\alpha\beta}) - i\theta^2 \partial_\alpha^{\dot{\alpha}} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \quad (1.115)$$

onde $f_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\partial_{(\alpha\dot{\alpha}} A_{\beta)}^{\dot{\alpha}}$.

Com esta expansão em campos componentes, podemos integrar (1.111) para obter finalmente a teoria de Maxwell em termos de campos componentes:

$$S_{Max} = \frac{1}{g^2} \int d^4x \left[-\frac{1}{2} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} + i\lambda^\alpha \partial_\alpha^{\dot{\alpha}} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} + D'^2 \right]. \quad (1.116)$$

A partir do resultado acima, notamos que a ação (1.116), em contraste com sua versão tridimensional (1.35), possui um termo de campo auxiliar D'^2 .

1.3.3 QUANTIZAÇÃO DOS MODELOS DE SUPERCAMPOS NO SUPERESPAÇO COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 4$

Com o intuito de definir a diferenciação de um funcional de supercampos no superespaço com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 4$, vamos definir a função delta em tal superespaço como sendo:

$$\delta^4(\theta - \theta') \equiv (\theta - \theta')^2(\bar{\theta} - \bar{\theta}')^2. \quad (1.117)$$

Portanto, se definirmos $\delta^8(z - z') \equiv \delta^4(x - x')\delta^4(\theta - \theta')$, obtemos a relação usual:

$$\int d^8z f(z') \delta^8(z - z') = f(z). \quad (1.118)$$

Agora, podemos definir a diferenciação de um funcional de um supercampo irrestrito [10]:

$$\frac{\delta V(z)}{\delta V(z')} = \delta^8(z - z'). \quad (1.119)$$

Esta definição é completamente análoga à definição de diferenciação de um funcional de um supercampo no superespaço com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$ (1.43).

No caso de supercampos quirais devemos definir de forma diferente a diferenciação funcional, devido ao fato que um supercampo quiral possui uma restrição diferencial: $\bar{D}_\alpha \Phi = 0$. Logo, vamos definir neste caso [51]:

$$\frac{\delta \Phi(z)}{\delta \Phi(z')} = \bar{D}^2 \delta^8(z - z'). \quad (1.120)$$

Uma definição análoga pode ser feita para supercampos anti-quirais $D_\alpha \bar{\Phi} = 0$.

Destas definições seguem os resultados usuais, como por exemplo:

$$\frac{\delta}{\delta \Phi(z)} \int d^6z' \phi(z') \Phi(z') = \int d^6z' \phi(z') \bar{D}^2 \delta^8(z - z') = \phi(z). \quad (1.121)$$

Vamos exibir algumas identidades úteis entre as derivadas covariantes e as funções delta [51]:

$$\delta_{12} \bar{D}^2 D^2 \delta_{12} = \delta_{12}, \quad \delta_{12} D^2 \bar{D}^2 \delta_{12} = \delta_{12}, \quad \delta_{12} \frac{1}{2} D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha \delta_{12} = \delta_{12}, \quad (1.122)$$

onde $\delta_{12} \equiv \delta^4(\theta_1 - \theta_2)$. Se houver um número menor que quatro D 's entre os deltas, então o resultado será nulo, mas se acaso houver mais que quatro, podemos utilizar a álgebra dos D 's para reduzir a um número menor ou igual à quatro.

Com as ferramentas estudadas até o momento, podemos agora derivar as regras de Feynman para a ação efetiva do modelo de WZ (1.96) e para a teoria de calibre de Maxwell (1.111) supersimétrica acoplada à matéria não auto-interagente.

Os funcionais geradores para as partes quadráticas dos modelos com suas respectivas fontes quirais, anti-quirais e escalares são dados por [50]:

$$Z_{0WZ}[j, \bar{j}] = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Phi} \exp \left[\int d^8z \bar{\Phi} \Phi - \frac{1}{2} \int d^6z m \Phi^2 - \frac{1}{2} \int d^6\bar{z} m \bar{\Phi}^2 + \int d^6z j \Phi + \int d^6\bar{z} \bar{j} \bar{\Phi} \right], \quad (1.123)$$

$$Z_{0Max}[J] = \int \mathcal{D}V \exp \int d^8z \left[\frac{1}{2g^2} V D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha V + J V \right]. \quad (1.124)$$

Antes de começarmos o cálculo dos funcionais geradores (1.123) e (1.124), é conveniente reescrevermos as integrais quirais e anti-quirais em (1.123) como integrais por todo superespaço e fixar o calibre em (1.124) para evitar a divergência de Z_{0Max} .

Para isso, vamos utilizar o fato que se F e G são supercampos quirais, então podemos escrever [10]:

$$\int d^8z F \square^{-1} D^2 G = \int d^6z F \square^{-1} \bar{D}^2 D^2 G = \int d^6z F G, \quad (1.125)$$

onde foi utilizado $\bar{D}^2 D^2 G = \square G$. Assim, podemos utilizar esta identidade para reescrever (1.123) como:

$$Z_{0WZ}[j, \bar{j}] = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\bar{\Phi} \exp \int d^8z \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Phi & \bar{\Phi} \end{pmatrix} \hat{O} \begin{pmatrix} \Phi \\ \bar{\Phi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi & \bar{\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square^{-1} D^2 j \\ \square^{-1} \bar{D}^2 \bar{j} \end{pmatrix} \right], \quad (1.126)$$

onde,

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} \frac{-mD^2}{\square} & 1 \\ 1 & \frac{-m\bar{D}^2}{\square} \end{pmatrix}. \quad (1.127)$$

Vamos adicionar em (1.124) o termo de fixação de calibre [50]:

$$S_{GF} = -\frac{1}{\alpha g^2} \int d^8z (D^2 V)(\bar{D}^2 V), \quad (1.128)$$

de modo a reescrever (1.124) como:

$$Z_{0Max}[J] = \int \mathcal{D}V \exp \int d^8z \frac{1}{2g^2} \left[V (D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha - \frac{1}{\alpha} \{D^2, \bar{D}^2\}) V + J V \right]. \quad (1.129)$$

Por meio de (1.51) podemos calcular as integrais funcionais (1.126) e (1.129). Logo, depois de certo trabalho algébrico obtemos:

$$Z_{WZ}[j, \bar{j}] = \exp \left\{ \int d^8z \left[-\bar{j} \frac{1}{\square - m^2} j - \frac{1}{2} j \frac{mD^2}{\square(\square - m^2)} j - \frac{1}{2} \bar{j} \frac{m\bar{D}^2}{\square(\square - m^2)} \bar{j} \right] \right\} \quad (1.130)$$

$$Z_{Max}[J] = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^8z J \frac{g^2}{\square} \left[-\frac{D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha}{\square} + \alpha \frac{\{D^2, \bar{D}^2\}}{\square} \right] J \right\}. \quad (1.131)$$

A partir destes resultados podemos obter os propagadores da teoria de WZ por meio de

(1.47) e de $\frac{\delta_j(z)}{\delta_j(z')} = \bar{D}^2 \delta^8(z - z')$ (confira (1.120)), então [51]:

$$\langle \bar{\Phi}(z_1) \Phi(z_2) \rangle = -\frac{D^2 \bar{D}^2 \delta^8(z_1 - z_2)}{\square - m^2}, \quad (1.132)$$

$$\langle \Phi(z_1) \Phi(z_2) \rangle = -\frac{m \bar{D}^2 D^2 \bar{D}^2 \delta^8(z_1 - z_2)}{\square(\square - m^2)}, \quad (1.133)$$

$$\langle \bar{\Phi}(z_1) \bar{\Phi}(z_2) \rangle = -\frac{m D^2 \bar{D}^2 D^2 \delta^8(z_1 - z_2)}{\square(\square - m^2)}. \quad (1.134)$$

Já no caso da QED supersimétrica, sabemos que $\frac{\delta J(z)}{\delta J(z')} = \delta^8(z - z')$ (confira (1.119)), então [50]:

$$\langle V(z_1) V(z_2) \rangle = \frac{g^2}{\square} \left[-\frac{D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha}{\square} + \alpha \frac{\{D^2, \bar{D}^2\}}{\square} \right] \delta^8(z_1 - z_2). \quad (1.135)$$

A partir dos resultados acima podemos derivar as regras de Feynman para obter a ação efetiva das duas teorias, mas vamos derivar primeiramente para a teoria de WZ.

Os termos de interação do modelo de WZ são dados por:

$$S_I = \frac{\lambda}{3!} \int d^6 z \Phi^3 + \frac{\lambda}{3!} \int d^6 \bar{z} \bar{\Phi}^3. \quad (1.136)$$

Os vértices podem ser lidos diretamente a partir dos termos de interação, para cada vértice quiral associamos um fator $\lambda \int d^6 z$ e para um anti-quiral $\lambda \int d^6 \bar{z}$, cada linha interna no diagrama conectará dois vértices por meio dos propagadores obtidos acima. Entretanto, essas regras não são as mais convenientes devido ao fato que a medida de integração do vértice quiral é diferente do anti-quiral, pode ser provado que laços envolvendo somente vértices quirais ou anti-quirais geram contribuição nula para a ação efetiva, isso significa que os supergráficos relevantes para a ação efetiva envolvem tanto vértices quirais quanto anti-quirais. Segue disso que algumas dificuldades surgem quando tratamos de supergráficos contendo estes dois tipos de vértices [33].

Podemos reformular as regras de Feynman para que as medidas de integração dos vértices quirais e anti-quirais sejam iguais, para isso, utilizamos um \bar{D}^2 para converter a medida de integração de $d^6 z$ para $d^8 z$, e utilizamos um D^2 para converter a medida de integração de $d^6 \bar{z}$ para $d^8 \bar{z}$, isto significa que podemos descartar algumas derivadas covariantes dos propagadores (1.132), (1.133) e (1.134). Logo, as novas regras de Feynman para a obtenção da ação efetiva do modelo de WZ são dadas por [50, 51]:

1. Propagadores (espaço dos momenta):

$$\langle \bar{\Phi}(1) \Phi(2) \rangle = \frac{1}{k^2 + m^2} \delta_{12}, \quad (1.137)$$

$$\langle \Phi(1) \Phi(2) \rangle = -\frac{m D^2}{k^2(k^2 + m^2)} \delta_{12}, \quad (1.138)$$

$$\langle \bar{\Phi}(1) \bar{\Phi}(2) \rangle = -\frac{m \bar{D}^2}{k^2(k^2 + m^2)} \delta_{12}. \quad (1.139)$$

2. Vértices: Há um fator λ para cada vértice (anti)quiral e cada linha deixando o vértice há um fator $(D^2)\bar{D}^2$ atuando no respectivo propagador, sendo que omitimos um dos fatores $(D^2)\bar{D}^2$ atuando em um dos propagadores. Além disso, não há fatores $(D^2)\bar{D}^2$ atuando em linhas externas do supergráfico.

3. Há um fator

- $\int d^4k(2\pi)^{-4}$ para cada laço.
- $[\prod_i \int d^4p_i(2\pi)^{-4}\varphi(p_i)](2\pi)^4\delta^4(\sum_i p_i)$ para cada linha externa com momentum p_i deixando o vértice, onde φ representa o supercampo médio na ação efetiva.
- $\int d^4\theta$ para cada vértice.

4. Fatores de simetria usuais.

As regras de Feynman para a teoria de calibre abeliana são as mesmas utilizadas para o modelo de WZ com a adição do propagador do supercampo escalar:

$$\langle V(1)V(2) \rangle = -\frac{g^2}{k^2} \left[\frac{D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha}{k^2} - \alpha \frac{\{D^2, \bar{D}^2\}}{k^2} \right] \delta_{12}. \quad (1.140)$$

E com a adição de vértices que podem ser extraídos da expressão:

$$\int d^8z (\bar{\Phi} e^V \Phi - \bar{\Phi} \Phi) = \bar{\Phi} V \Phi + \frac{1}{2!} \bar{\Phi} V^2 \Phi + \dots \quad (1.141)$$

O vértice é interpretado como no modelo de WZ: cada linha (anti)quiral deixando o vértice há um fator $(D^2)\bar{D}^2$ atuando no respectivo propagador, a diferença é que não omitimos nenhum $(D^2)\bar{D}^2$ porque a integral acima já esta sendo calculada por todo o superespaço (d^8z) [50].

Assim como no caso tridimensional discutido anteriormente, em 4D também existe um teorema de não-renormalização: qualquer contribuição quântica para a ação efetiva deve ser expressa como uma única integral $\int d^4\theta$ no superespaço. Todavia, em 4D há uma implicação interessante, o teorema de não-renormalização em 4D implica que no modelo de WZ (1.96) a massa e a constante de acoplamento não recebem modificações devido às correções radiativas, visto que na ação clássica os termos de massa e de interação são integrados em $d^2\theta$ [10, 50, 33].

1.3.4 REDUÇÃO DIMENSIONAL DO SUPERESPAÇO COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 4$ PARA O SUPERESPAÇO COM $\mathcal{N} = 2$ EM $d = 3$

A álgebra de SUSY com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$ é essencialmente a mesma álgebra que a álgebra SUSY com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$ que estudamos anteriormente. A diferença é que no caso $\mathcal{N} = 2, d = 3$ se tem o dobro de geradores fermiônicos Q_α [58]:

$$\{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} = 2\delta^{ij}P_{\alpha\beta}, \quad [Q_\alpha^i, P_{\mu\nu}] = 0, \quad (1.142)$$

onde $i = 1, 2$.

Se seguirmos o mesmo raciocínio que foi empregado anteriormente, podemos então parametrizar o superespaço com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$ com coordenadas $z^M = (x^{\alpha\beta}, \theta^{i\alpha})$ e escrever as derivadas covariantes espinoriais D_α^i e a representação diferencial dos geradores $P_N = (P_{\alpha\beta}, Q_\alpha^i)$ como sendo

$$D_\alpha^i = \partial_\alpha^i + \theta^{i\beta} i \partial_{\alpha\beta}, \quad Q_\alpha^i = i(\partial_\alpha^i - \theta^{i\beta} i \partial_{\alpha\beta}), \quad P_{\alpha\beta} = i \partial_{\alpha\beta}. \quad (1.143)$$

Esta representação da álgebra (1.142) e dos geradores (1.143) é chamada de representação real [58].

É possível formular uma teoria de supercampos com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$ na representação real. Todavia, existe uma representação mais conveniente: a representação complexa. Podemos fazer uma mudança de base em (1.142) por meio das definições

$$Q_\alpha \equiv \frac{1}{2}(Q_\alpha^1 + iQ_\alpha^2), \quad \bar{Q}_\alpha \equiv \frac{1}{2}(Q_\alpha^1 - iQ_\alpha^2). \quad (1.144)$$

Portanto, segue de (1.142) e (1.144) a álgebra na representação complexa:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = P_{\alpha\beta}, \quad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \quad [Q_\alpha, P_{\mu\nu}] = 0. \quad (1.145)$$

Nesta representação, o superespaço com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$ pode ser parametrizado por coordenadas $z^M = (x^{\alpha\beta}, \theta^\alpha, \bar{\theta}^\alpha)$, de modo que as derivadas covariantes espinoriais D_α, \bar{D}_α e a representação diferencial dos geradores $P_N = (P_{\alpha\beta}, Q_\alpha, \bar{Q}_\alpha)$ são dadas por

$$Q_\alpha = i(\partial_\alpha - \frac{1}{2}\bar{\theta}^\beta i \partial_{\alpha\beta}), \quad \bar{Q}_\alpha = i(\bar{\partial}_\alpha - \frac{1}{2}\theta^\beta i \partial_{\alpha\beta}), \quad (1.146)$$

$$D_\alpha = (\partial_\alpha + \frac{1}{2}\bar{\theta}^\beta i \partial_{\alpha\beta}), \quad \bar{D}_\alpha = (\bar{\partial}_\alpha + \frac{1}{2}\theta^\beta i \partial_{\alpha\beta}). \quad (1.147)$$

, onde o gerador $P_{\alpha\beta} = i \partial_{\alpha\beta}$ permanece inalterado. As coordenadas e as derivadas nas diferentes representações estão relacionadas por

$$\theta^\alpha = \theta^{1,\alpha} - i\theta^{2,\alpha}, \quad \bar{\theta}^\alpha = \theta^{1,\alpha} + i\theta^{2,\alpha}, \quad (1.148)$$

$$\partial_\alpha = \frac{1}{2}(\partial_\alpha^1 + i\partial_\alpha^2), \quad \bar{\partial}_\alpha = \frac{1}{2}(\partial_\alpha^1 - i\partial_\alpha^2). \quad (1.149)$$

Assim, podemos utilizar (1.148,1.149) para relacionar (1.146,1.147) com (1.143).

Note que a álgebra de SUSY com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$ (1.145) e as expressões (1.146,1.147) são bastante análogas a álgebra de SUSY com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 4$ (1.69) e as expressões (1.72-1.74) que estudamos anteriormente. Isso sugere que uma teoria com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$ pode ser interpretada como uma teoria com $\mathcal{N} = 1$ com $d = 4$, de modo que todas as bem conhecidas técnicas utilizadas no estudo da teoria de supercampos com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 4$ também podem ser aplicadas no estudo da teoria de supercampos com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$. Além disso, podemos tirar proveito desta similaridade entre os dois superespaços citados e executar alguns passos simples

para reduzir os modelos já bem conhecidos no superespaço de dimensão maior para novos modelos no superespaço de dimensão menor. Tal redução é chamada de redução dimensional [10, 59].

Para reduzir um modelo com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 4$ supersimétrico para um com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$ supersimétrico, podemos seguir os passos: assumimos que todos os campos são independentes de uma coordenada; depois eliminamos a integração na coordenada eliminada $\int d^4x \rightarrow \int d^3x$; todos os índices com ponto são substituídos por índices sem ponto $\dot{\alpha} \rightarrow \alpha$; vetores são reduzidos de uma maneira diferente: $A_{\alpha\dot{\beta}} \rightarrow A_{\alpha\beta} + C_{\beta\alpha}\sigma$ [59].

Seguindo a prescrição acima, a ação da teoria de Maxwell com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$ supersimétrica pode ser obtida da ação (1.111). Logo,

$$S_{Max} = \frac{1}{2g^2} \int d^3x d^2\theta W^\alpha W_\alpha = \frac{1}{2g^2} \int d^3x d^4\theta V D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha V, \quad (1.150)$$

onde $\bar{D}^2 = \frac{1}{2}\bar{D}^\alpha \bar{D}_\alpha$. A sua versão em campos componentes pode ser obtida de (1.116) por meio da redução para o campo de calibre $A_{\alpha\dot{\beta}} \rightarrow A_{\alpha\beta} + C_{\beta\alpha}\sigma$, o que implica, $f_{\alpha\dot{\beta}} \rightarrow f_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha\beta}\sigma$. Logo, de (1.116), temos

$$S_{Max} = \frac{1}{g^2} \int d^4x \left[-\frac{1}{2}(f^{\alpha\beta} - \partial^{\alpha\beta}\sigma)(f_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha\beta}\sigma) + i\lambda^\alpha \partial_\alpha{}^\beta \lambda_\beta + D'^2 \right] \quad (1.151)$$

$$= \frac{1}{g^2} \int d^4x \left[-\frac{1}{2}f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} + \partial^{\alpha\beta}\sigma \partial_{\alpha\beta}\sigma + i\lambda^\alpha \partial_\alpha{}^\beta \lambda_\beta + D'^2 \right], \quad (1.152)$$

onde foi utilizado uma integração por partes e a identidade $\partial^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} = \square A_\gamma{}^\gamma = 0$. Note que temos em uma mesma ação os termos cinéticos dos campos de calibre, Klein-Gordon e Dirac para o multipletto $(A_{\alpha\beta}, \sigma, \lambda_\alpha)$, respectivamente.

O superespaço com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$ permite contrações de objetos $\bar{\theta}^\alpha \theta_\alpha$ e $\bar{D}^\alpha D_\alpha$ que não são possíveis de serem realizadas no superespaço quadridimensional. Devido a possibilidade de se contrair $\bar{D}^\alpha D_\alpha$, podemos integrar (1.150) por partes para obter:

$$S_{Max} = \frac{1}{2g^2} \int d^3x d^2\theta W^\alpha W_\alpha = -\frac{1}{2g^2} \int d^3x d^4\theta G^2, \quad (1.153)$$

onde

$$G \equiv \bar{D}^\alpha D_\alpha V. \quad (1.154)$$

O supercampo G é um supercampos real linear, visto que (1.154) satisfaz as restrições $D^2 G = \bar{D}^2 G = 0$. Além disso, (1.154) é invariante sob transformações de calibre. Todas estas propriedades podem ser demonstradas com o uso da identidade $\bar{D}^\alpha D_\alpha = D^\alpha \bar{D}_\alpha$ [60].

Pode-se utilizar (1.154) para construir a versão de supercampos da teoria de Chern-Simons com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$ supersimétrica. Logo, a ação invariante é dada por [60]

$$S_{CS} = \frac{m}{2g^2} \int d^3x d^4\theta V G = \frac{m}{2g^2} \int d^3x d^4\theta V \bar{D}^\alpha D_\alpha V. \quad (1.155)$$

Podemos calcular as equações de movimento para a combinação de (1.153) e (1.155). Segue que

$$\frac{\delta(S_{Max} + S_{CS})}{\delta V} = 0 \Rightarrow -\bar{D}^\alpha D_\alpha G + mG = 0. \quad (1.156)$$

Multiplicando a eq. de movimento acima por $\bar{D}^\beta D_\beta$ e utilizando a identidade $(\bar{D}^\alpha D_\alpha)^2 = -D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha$, obtemos

$$D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha G + m\bar{D}^\alpha D_\alpha G = 0. \quad (1.157)$$

Finalmente, devido às restrições $D^2 G = \bar{D}^2 G = 0$, pode-se escrever [61]

$$\square G = (\{D^2, \bar{D}^2\} - D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha) G = -D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha G. \quad (1.158)$$

Logo, podemos somar (1.156) com (1.157) para obter

$$D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha G + m^2 G = 0 \Rightarrow (\square - m^2) G = 0. \quad (1.159)$$

Portanto, o supercampo G satisfaz uma equação de Klein-Gordon massiva [62].

Podemos realizar a integração nas coordenadas de Grassmann e utilizar o calibre de WZ para escrever a versão em campos componentes da teoria de super-Chern-Simons (1.155):

$$S_{CS} = -\frac{m}{2g^2} \int d^3x (A^{\alpha\beta} i\partial_\alpha{}^\gamma A_{\beta\gamma} + 4\sigma D + 2\bar{\lambda}^\alpha \lambda_\alpha). \quad (1.160)$$

Note que similarmente a teoria de Chern-Simons com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$ supersimétrica (1.38), somente o campo de calibre $A_{\alpha\beta}$ é dinâmico em (1.160) [60]. Logo, pode-se resolver as equações de movimento algébricas para os campos $(\sigma, D, \lambda_\alpha)$ e eliminá-los da teoria.

Potencial Efetivo em Teoria de Supercampos com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$ e Altas Derivadas

2.1 EXPANSÃO EM LAÇOS E AÇÃO EFETIVA DE BAIXAS-ENERGIAS

Nesta seção vamos apresentar a metodologia que permite o cálculo perturbativo da ação efetiva e apresentaremos a definição da ação efetiva de baixas energias para teorias de supercampos com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$.

Podemos utilizar as definições (1.46), (1.52) e (1.54) para obter

$$e^{\Gamma[\varphi]} = \int \mathcal{D}\phi e^{S[\phi] + \int d^4x J(x)(\phi(x) - \varphi(x))}. \quad (2.1)$$

Por outro lado, diferenciando (1.54) em relação ao campo de fundo, obtemos

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = \frac{\delta W[J]}{\delta\varphi(x)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi(x)} \varphi(y) - J(x). \quad (2.2)$$

Por meio da regra da cadeia funcional

$$\frac{\delta W[J]}{\delta\varphi(x)} = \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\varphi(x)} \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)}, \quad (2.3)$$

e da definição do campo de fundo (1.53). A eq. (2.2) pode ser reescrita como

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = -J(x). \quad (2.4)$$

Substituindo (2.4) em (2.1), obtemos

$$\exp \frac{1}{\hbar} \Gamma[\varphi] = \int \mathcal{D}\phi \exp \frac{1}{\hbar} \left[S[\phi] - \int d^4x \frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} (\phi(x) - \varphi(x)) \right], \quad (2.5)$$

onde foi introduzida a constante de Planck \hbar por razões dimensionais [50]. Aparentemente, o resultado acima não parece ser útil para calcular a ação efetiva, devido ao fato de $\Gamma[\varphi]$ aparecer nos dois lados da eq. (2.5). Devido a este fato, vamos utilizar o método usual para se calcular a ação efetiva, que é recorrer à uma expansão perturbativa em \hbar [63]. A expansão em potências de \hbar é chamada expansão em laços, isso se deve ao fato que cada termo da expansão contém somente diagramas com um dado número de laços [17].

Vamos fazer a mudança de variáveis $\phi \rightarrow \varphi + \hbar^{1/2}\phi$ em (2.5) e expandir $S[\phi] \rightarrow S[\varphi + \hbar^{1/2}\phi]$ em séries de potência em $\hbar^{1/2}$. Logo, obtemos

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1}{\hbar}(\Gamma[\varphi] - S[\varphi])\right) &= \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)} \phi(x_1)\phi(x_2)\right. \\ &\quad + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\hbar^{n/2-1}}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \frac{\delta^n S[\varphi]}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_n)} \phi(x_1)\cdots\phi(x_n) \\ &\quad \left. - \hbar^{-1/2} \int d^4x \left(\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} - \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi(x)}\right) \phi(x)\right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Expandindo a ação efetiva em potências de \hbar

$$\Gamma[\varphi] = S[\varphi] + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \Gamma^{(n)}[\varphi], \quad (2.7)$$

a expressão acima (2.6) fica

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \hbar^{n-1} \Gamma^{(n)}[\varphi]\right) &= \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)} \phi(x_1)\phi(x_2)\right. \\ &\quad + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\hbar^{n/2-1}}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \frac{\delta^n S[\varphi]}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_n)} \phi(x_1)\cdots\phi(x_n) \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^{n-1/2} \int d^4x \frac{\delta\Gamma^{(n)}[\varphi]}{\delta\varphi(x)} \phi(x)\right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

O argumento da exponencial do lado direito de (2.8) pode ser interpretada como a ação de uma dada teoria, de modo que o termo quadrático nos campos quânticos, $\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi^2} \phi^2$, determina o propagador da teoria, enquanto que os termos de ordem maior nos campos quânticos podem ser interpretados como os vértices. Portanto, isso sugere que as correções quânticas para a ação efetiva, $\Gamma^{(n)}$, podem ser calculadas utilizando a técnica dos diagramas de Feynman [17, 50]. Além disso, nota-se que os propagadores e vértices extraídos de (2.8) irão depender do campo de fundo φ , isso sugere que (2.8) pode descrever os efeitos da retro-reação (*backreaction*) das flutuações do campo quântico ϕ sobre a dinâmica do campo de fundo clássico φ [64].

O termo $\frac{\delta\Gamma^{(n)}}{\delta\varphi} \phi$ em (2.8) só contribui com diagramas redutíveis de uma partícula [10, 17, 50]. Tais diagramas redutíveis cancelam os diagramas redutíveis que surgem dos outros termos da expansão. Portanto, podemos reescrever (2.8) como

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \hbar^{n-1} \Gamma^{(n)}[\varphi]\right) &= \int \mathcal{D}\phi \exp\left[\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \frac{\delta^2 S[\varphi]}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)} \phi(x_1)\phi(x_2)\right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\hbar^{n/2-1}}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \frac{\delta^n S[\varphi]}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_n)} \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\right] \Big|_{1PI}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde *1PI* significa que se deve considerar no cálculo da ação efetiva somente diagramas irreduzíveis de uma partícula.

Como acabamos de descrever, na TQC a ação efetiva é geralmente calculada por meio da expansão em laços. Todavia, mesmo que utilizemos este método perturbativo, o cálculo das correções quânticas para um campo de fundo arbitrário $\varphi(x)$ ainda é uma tarefa difícil. Um método aproximativo que se pode utilizar para contornar o problema é assumir que o campo de fundo varia lentamente, de modo que podemos expandir a ação efetiva em séries de potência de derivadas do campo de fundo e considerar apenas um número finito de termos [65]. Tal expansão pode ser escrita como

$$\Gamma[\varphi] = \int d^4x [-V_{eff}(\varphi) + \frac{1}{2}Z(\varphi)\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi + \dots] \quad (2.10)$$

$$= - \int d^4x V_{eff}(\varphi) + \frac{1}{2} \int d^4p Z(\varphi) p^2 \varphi(p) \varphi(-p) + \dots \quad (2.11)$$

A ação efetiva na aproximação (2.10) é chamada de ação efetiva de baixas energias. Dizemos "baixas energias" devido ao fato que em baixas energias $p^2 \rightarrow 0$ (confira eq. (2.11)). O termo de mais baixa ordem da expansão citada é o potencial efetivo que, naturalmente, pode ser obtido assumindo o campo de fundo constante em (2.9) [17]. Agora, vamos definir o potencial efetivo de supercampo $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$ pelo fato dele ser nosso objeto de estudo neste capítulo.

No caso da teoria de supercampos também é conveniente utilizar um método aproximativo e definir um potencial efetivo, para isso vamos escrever a ação efetiva como um funcional local e em termos das derivadas covariantes do supercampo escalar complexo:

$$\Gamma[\Phi, \bar{\Phi}] = \int d^5z \mathcal{L}_{eff}(\Phi, D_A \Phi, D_A D_B \Phi, \dots, \bar{\Phi}, D_A \bar{\Phi}, D_A D_B \bar{\Phi}, \dots), \quad (2.12)$$

onde $D_A = (D_\alpha, \partial_{\alpha\beta})$ e \mathcal{L}_{eff} é chamada lagrangiana efetiva.

Poderíamos analogamente à TQC utilizar (2.12) para definir o potencial efetivo de supercampo supondo o supercampo complexo constante, mas devido ao fato que a integração realizada por todas as coordenadas de Grassmann é igual à diferenciação, o resultado seria trivialmente nulo. Logo, devemos preservar a dependência em θ nos supercampos para que a anulação não ocorra. A condição adequada para o nosso problema é [33]:

$$\partial_{\alpha\beta} \Phi = \partial_{\alpha\beta} \bar{\Phi} = 0. \quad (2.13)$$

Note que a condição (2.13) é uma condição vantajosa por dois motivos: Primeiro, ela é invariante sob transformações de SUSY visto que $\partial_{\alpha\beta}$ comuta com todos os geradores de SUSY. Segundo, no nível de campos componentes os campos escalares pertencentes à $\Phi(\bar{\Phi})$ são constantes no espaço-tempo, o que concorda com a definição da TQC. Assim, podemos definir o potencial efetivo de supercampo como sendo [36]:

$$-V_{eff} = \int d^2\theta \mathcal{L}_{eff} |_{\partial_{\alpha\beta} \Phi = \partial_{\alpha\beta} \bar{\Phi} = 0}. \quad (2.14)$$

A lagrangiana efetiva $\mathcal{L}_{eff} |_{\partial_{\alpha\beta} \Phi = \partial_{\alpha\beta} \bar{\Phi} = 0}$ pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}_{eff} |_{\partial_{\alpha\beta} \Phi = \partial_{\alpha\beta} \bar{\Phi} = 0} = K(\Phi, \bar{\Phi}) + F(D_\alpha \Phi, D_\alpha \bar{\Phi}, D^2 \Phi, D^2 \bar{\Phi}; \Phi, \bar{\Phi}), \quad (2.15)$$

com $F|_{D_\alpha\Phi=D_\alpha\bar{\Phi}=D^2\Phi=D^2\bar{\Phi}=0} = 0$. O potencial K é chamado potencial efetivo kähleriano e F é o potencial efetivo de campo auxiliar [36]. Note que o termo de mais baixa ordem da expansão de derivadas covariantes da ação efetiva (2.12) é o potencial efetivo kähleriano. Todos os cálculos da ação efetiva deste capítulo serão realizados assumindo que os supercampos de fundo satisfazem a aproximação $D_A\bar{\Phi} = D_A\Phi = 0$.

Podemos expandir essas potencias em laços:

$$K(\Phi, \bar{\Phi}) = K_0(\Phi, \bar{\Phi}) + \sum_{L=1}^{\infty} \hbar^L K_L(\Phi, \bar{\Phi}), \quad (2.16)$$

$$F = F_0 + \sum_{L=1}^{\infty} \hbar^L F_L, \quad (2.17)$$

onde K_L, F_L são as correções quânticas. No modelo (1.24), por exemplo, as partes clássicas dos potenciais acima são dadas por $K_0(\Phi, \bar{\Phi}) = V(\bar{\Phi}, \Phi)$ e $F_0 = \frac{1}{2}D^\alpha\bar{\Phi}D_\alpha\Phi$.

Como no caso tridimensional, em quatro dimensões podemos também expandir a ação efetiva em termos das derivadas covariantes dos supercampos de matéria. Todavia, no superespaço com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 4$, os supercampos de matéria são descritos por supercampos quirais e anti-quirais [33, 50]:

$$\Gamma[\Phi, \bar{\Phi}] = \int d^8z \mathcal{L}_{eff}(\Phi, D_A\Phi, D_AD_B\Phi, \dots, \bar{\Phi}, D_A\bar{\Phi}, D_AD_B\bar{\Phi}, \dots) + \left\{ \int d^6z \mathcal{L}_{eff}^{(c)}(\Phi, \partial_{\alpha\dot{\alpha}}\Phi, \partial_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\beta\dot{\beta}}\Phi, \dots) + h.c. \right\}, \quad (2.18)$$

onde \mathcal{L}_{eff} é chamada lagrangiana efetiva geral, $\mathcal{L}_{eff}^{(c)}$ é chamada lagrangiana efetiva quiral. Levando em conta a expansão acima é tentador pensarmos que a ação efetiva não recebe contribuições do segundo termo devido ao teorema de não-renormalização, mas este pensamento é equivocado. O tipo de contribuição para a ação efetiva que compõe $\mathcal{L}_{eff}^{(c)}$ é dada por [33, 50]:

$$\int d^8z \frac{D^2}{\square} G = \int d^6z G, \quad (2.19)$$

onde G é uma função de supercampos quirais não-constantes. Deste modo não há nenhuma contradição entre (2.18) e o teorema de não-renormalização.

Podemos definir o potencial efetivo de supercampo como sendo [50]:

$$-V_{eff} = \left\{ \int d^4\theta \mathcal{L}_{eff} + \left(\int d^2\theta \mathcal{L}_{eff}^{(c)} + h.c. \right) \right\} \Big|_{\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\Phi = \partial_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\Phi} = 0}. \quad (2.20)$$

O potencial efetivo geral $\mathcal{L}_{eff}|_{\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\Phi = \partial_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\Phi} = 0}$ pode ser escrito como:

$$\mathcal{L}_{eff}|_{\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\Phi = \partial_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\Phi} = 0} = K(\Phi, \bar{\Phi}) + F(D_\alpha\Phi, \bar{D}_\alpha\bar{\Phi}, D^2\Phi, \bar{D}^2\bar{\Phi}; \Phi, \bar{\Phi}), \quad (2.21)$$

com $F|_{D_\alpha\Phi = \bar{D}_\alpha\bar{\Phi} = D^2\Phi = \bar{D}^2\bar{\Phi} = 0} = 0$. O potencial K é chamado potencial efetivo kähleriano e F é

o potencial efetivo de campo auxiliar [50]. Podemos expandir essas potências em laços:

$$K(\Phi, \bar{\Phi}) = K_0(\Phi, \bar{\Phi}) + \sum_{L=1}^{\infty} \hbar^L K_L(\Phi, \bar{\Phi}), \quad (2.22)$$

$$F = \sum_{L=1}^{\infty} \hbar^L F_L, \quad (2.23)$$

$$\mathcal{L}_{eff}^{(c)}(\Phi)|_{\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\Phi=0} = \mathcal{L}^{(c)}(\Phi) + \sum_{L=1}^{\infty} \hbar^L \mathcal{L}_L^{(c)}(\Phi), \quad (2.24)$$

onde K_L , F_L , $\mathcal{L}_L^{(c)}$ são as correções quânticas. Na maioria das teorias de interesse, no superspaço com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 4$, não há derivadas covariantes atuando nos supercampos de matéria na ação clássica, por isso o potencial F não possui parte clássica ao contrário de K e $\mathcal{L}_{eff}^{(c)}$ que no modelo de Wess-Zumino, por exemplo, são dadas por $K_0(\Phi, \bar{\Phi}) = \bar{\Phi}\Phi$ e $\mathcal{L}^{(c)}(\Phi) = m\frac{\Phi^2}{2} + \lambda\frac{\Phi^3}{3!}$.

2.2 TEORIA DE CALIBRE COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 3$ E ALTAS DERIVADAS GENÉRICA

Nesta seção será formulada uma teoria de calibre com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$ e altas derivadas genérica acoplada a matéria, tal teoria se reduz em certos casos a teorias como a super-QED escalar tridimensional, a teoria Maxwell-Chern-Simons supersimétrica, ou a teoria Chern-Simons, todas acopladas a matéria. Para esta teoria, calcularemos explicitamente o potencial efetivo em um laço por meio das técnicas que foram revisadas anteriormente. Esta seção é baseada no trabalho publicado [46].

Começamos com a seguinte teoria de calibre abeliana 3D genérica livre:

$$S = \frac{1}{2e^2} \int d^5z A^\beta \hat{R} D^\gamma D_\beta A_\gamma. \quad (2.25)$$

Aqui, \hat{R} é algum operador escalar comutante com $D^\gamma D_\beta$, e por este motivo ele deve ser uma função de D^2 , derivadas de espaço-tempo e algumas constantes. Esta teoria é evidentemente invariante sob as transformações usuais de calibre $\delta A_\alpha = D_\alpha K$, com K sendo um parâmetro de supercampo escalar arbitrário. É claro que se (a menos de constantes multiplicativas) $\hat{R} = 1$, obtemos uma teoria de Chern-Simons, se $\hat{R} = D^2$ obtemos a QED tridimensional, e se $\hat{R} = D^2 + m$ obtemos uma teoria de Maxwell-Chern-Simons. Se, em particular, \hat{R} envolve potências de ordem maior de D^2 , do operador d'Alembertiano \square e de suas funções, obtêm-se uma teoria de calibre supersimétrica com altas derivadas. Anteriormente, o potencial efetivo em um laço para esta teoria foi calculado para somente a teoria de Chern-Simons supersimétrica, $\hat{R} = 1$ [37], e a QED supersimétrica escalar $\hat{R} = D^2$ foi discutida na Ref. [50]. Nota-se que uma extensão não-abeliana desta teoria seria bastante sofisticada envolvendo vértices com auto acoplamento do supercampo de calibre. Todavia, o potencial efetivo em um laço será o mesmo como no caso

abeliano, a menos de uma constante dependente de um fator algébrico, visto que, no nível de um laço, somente vértices envolvendo linhas escalares externas irão gerar contribuições não-triviais para o potencial efetivo.

Adicionamos a esta ação o seguinte termo de fixação de calibre:

$$S_{GF} = \frac{1}{2e^2\alpha} \int d^5z A^\beta \hat{R} D_\beta D^\gamma A_\gamma, \quad (2.26)$$

que é uma generalização natural de altas derivadas do termo de fixação de calibre usual. Devido ao fato desta teoria ser abeliana, segue que os fantasmas desacoplam completamente.

Agora, vamos acoplar o supercampo de calibre ao supercampo escalar de matéria. Como já discutimos anteriormente, é claro que a derivada covariante de calibre é $D_\alpha - iA_\alpha$, de modo que o objeto $(D_\alpha - iA_\alpha)\Phi$ (e similarmente $(D_\alpha + iA_\alpha)\bar{\Phi}$) é transformado covariantemente, isto é, se o supercampo escalar transforma-se $\Phi \rightarrow e^{iK}\Phi$ e o supercampo de calibre transforma-se $A_\alpha \rightarrow A_\alpha + D_\alpha K$, então obteremos $(D_\alpha - iA_\alpha)\Phi \rightarrow e^{iK}(D_\alpha - iA_\alpha)\Phi$. Portanto, em princípio, se introduzimos $\nabla_\alpha \equiv D_\alpha - iA_\alpha$, pode-se introduzir um termo cinético com altas derivadas,

$$S_\Phi^K = -\frac{1}{2} \int d^5z \nabla^\alpha \nabla^\beta \dots \nabla^\gamma \Phi (\nabla_\alpha \nabla_\beta \dots \nabla_\gamma \Phi)^*. \quad (2.27)$$

Podemos também introduzir o termo de massa e o termo de auto interação para o supercampo escalar da forma $\frac{\lambda}{2} \int d^5z (\Phi \bar{\Phi})^n$, todavia, de maneira mais geral, consideraremos aqui um potencial arbitrário $V(\bar{\Phi}, \Phi)$. Assim, a ação completa da teoria seria dada por

$$S_t = \int d^5z \left[\frac{1}{2} \left(A^\beta \frac{1}{e^2} \hat{R} (D^\gamma D_\beta + \frac{1}{\alpha} D_\beta D^\gamma) A_\gamma - \nabla^\alpha \nabla^\beta \dots \nabla^\gamma \Phi (\nabla_\alpha \nabla_\beta \dots \nabla_\gamma \Phi)^* \right) + V(\bar{\Phi}, \Phi) \right]. \quad (2.28)$$

Entretanto, para a primeira tentativa sugerimos que as altas derivadas estarão presentes somente no setor de calibre, como ocorre na Ref. [45]. Portanto, a equação acima reduz-se para

$$S_t = \int d^5z \left[\frac{1}{2} \left(A^\beta \frac{1}{e^2} \hat{R} (D^\gamma D_\beta + \frac{1}{\alpha} D_\beta D^\gamma) A_\gamma - \nabla^\alpha \Phi (\nabla_\alpha \Phi)^* \right) + V(\bar{\Phi}, \Phi) \right]. \quad (2.29)$$

Vamos agora calcular o potencial efetivo utilizando a metodologia da expansão em laços desenvolvida na seção anterior. Para isto, devemos fazer a separação $\Phi \rightarrow \bar{\Phi} + \phi$ no supercampo Φ (junto com uma separação análoga para $\bar{\Phi}$), onde agora $\bar{\Phi}$ é um supercampo de fundo e ϕ é um supercampo quântico. Vamos supor que o supercampo de calibre A_α é puramente quântico. Como estamos interessados somente no nível de um laço, então temos que manter na expansão somente termos quadráticos nas flutuações quânticas $\phi, \bar{\phi}$ e A_α . Usando esta prescrição, obtemos

$$S_2[\bar{\Phi}, \bar{\Phi}; \phi, \bar{\phi}, A_\alpha] = \frac{1}{2} \int d^5z \left[A^\beta \frac{1}{e^2} \hat{R} (D^\gamma D_\beta + \frac{1}{\alpha} D_\beta D^\gamma) A_\gamma + 2\bar{\phi} D^2 \phi + 2V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} \bar{\phi} \phi + i\bar{\Phi} A^\alpha D_\alpha \bar{\phi} - i\bar{\Phi} A^\alpha D_\alpha \phi + V_{\Phi\Phi} \phi^2 + V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} \bar{\phi}^2 - \bar{\Phi} \Phi A^\alpha A_\alpha \right], \quad (2.30)$$

onde termos irrelevantes foram omitidos, incluindo aqueles envolvendo derivadas covariantes dos supercampos escalares de fundo. Além disso, usamos uma notação conveniente $V_{\bar{\Phi}\Phi} = \frac{\partial^2 V(\bar{\Phi}, \Phi)}{\partial \bar{\Phi} \partial \Phi}$, $V_{\Phi\Phi} = \frac{\partial^2 V(\bar{\Phi}, \Phi)}{\partial \Phi^2}$, $V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} = \frac{\partial^2 V(\bar{\Phi}, \Phi)}{\partial \bar{\Phi}^2}$.

De (2.30), segue que os propagadores são dados por

$$\langle A_\gamma(1)A^\alpha(2) \rangle = \frac{e^2}{4k^2 \hat{R}_1} (D_1^\alpha D_{1\gamma} + \alpha D_{1\gamma} D_1^\alpha) \delta_{12} \quad , \quad \langle \bar{\Phi}(1)\Phi(2) \rangle = \frac{D_1^2}{k^2} \delta_{12} \quad , \quad (2.31)$$

onde $\delta_{12} \equiv \delta^2(\theta_1 - \theta_2)$ é uma função delta de Grassmann usual.

Agora, vamos estudar o potencial Kähleriano. Em um laço, os supergráficos básicos contribuintes para a ação efetiva na teoria em consideração são de três tipos: primeiro, aqueles com linhas internas compostas de somente propagadores escalares; segundo, aqueles compostos de somente propagadores de calibre; terceiro, aqueles envolvendo propagadores de matéria e de calibre alternantes. Todavia, como foi argumentado na Ref. [37], se considerarmos o calibre de Landau ($\alpha = 0$), então este último caso não precisa ser considerado em nossos cálculos, devido ao fato do propagador do supercampo de calibre $\langle A_\alpha A^\beta \rangle$ neste calibre ser proporcional à $D^\beta D_\alpha$, enquanto que o vértice no qual este propagador está associado é do tipo $(\Phi A^\alpha D_\alpha \bar{\Phi} - \bar{\Phi} A^\alpha D_\alpha \Phi)$, então, depois de uma integração por partes, o operador D_α atua sobre o propagador $\langle A_\alpha A^\beta \rangle$, de modo que ele é aniquilado devido a identidade $D_\alpha D^\beta D^\alpha = 0$. Logo, de agora em diante nesta seção, todos os cálculos serão realizados, por simplicidade, no calibre de Landau.

Visto que os vértices $(\Phi A^\alpha D_\alpha \bar{\Phi} - \bar{\Phi} A^\alpha D_\alpha \Phi)$ são irrelevantes no calibre de Landau, podemos então descartá-los e reescrever o funcional (2.30) como

$$S_2[\bar{\Phi}, \Phi; \phi, \bar{\phi}, A_\alpha] = \frac{1}{2} \int d^5z \left[A^\beta \frac{1}{e^2} \hat{R} (D^\gamma D_\beta + \frac{1}{\alpha} D_\beta D^\gamma) A_\gamma - \bar{\Phi} \Phi A^\alpha A_\alpha + \phi^i P_i^j D^2 \phi_j + \phi^i M_i^j \phi_j \right] \quad , \quad (2.32)$$

onde

$$\phi_i = \begin{pmatrix} \phi \\ \bar{\phi} \end{pmatrix} \quad , \quad \phi^j = \begin{pmatrix} \phi & \bar{\phi} \end{pmatrix} \quad , \quad P_i^j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad M_i^j = \begin{pmatrix} V_{\Phi\Phi} & V_{\Phi\bar{\Phi}} \\ V_{\bar{\Phi}\Phi} & V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} \end{pmatrix} \quad . \quad (2.33)$$

Portanto, os novos propagadores são ($\alpha = 0$)

$$\langle A_\gamma(1)A^\alpha(2) \rangle = \frac{e^2}{4k^2 \hat{R}_1} D_1^\alpha D_{1\gamma} \delta_{12} \quad , \quad \langle \phi_i(1)\phi^j(2) \rangle = \frac{P_i^j D_1^2}{k^2} \delta_{12} \quad . \quad (2.34)$$

Estes propagadores serão usados para os cálculos em um laço.

Vamos começar os cálculos dos supergráficos em um laço que contribuem para o setor puramente escalar, que são aqueles envolvendo os propagadores do supercampo escalar (2.34) conectando os vértices $\phi^i M_i^j \phi_j$. Tais supergráficos exibem as estruturas mostradas na Fig. 2.1.

Podemos calcular todas as contribuições notando que cada supergráfico na Fig. 2.1 é composto por n "subgráficos" como o mostrado na Fig. 2.2. Portanto, a contribuição do subgráfico da Fig. 2.2 é dada por

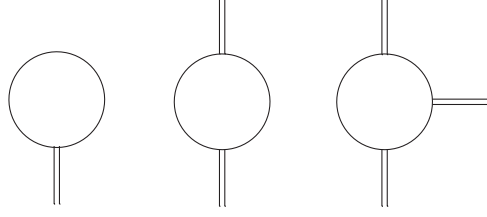


Figura 2.1 Supergráficos em um laço no setor puramente escalar.

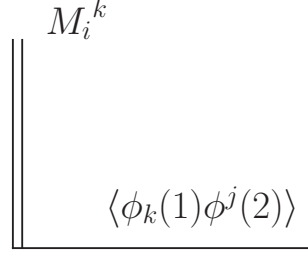


Figura 2.2 Um vértice típico dos supergráficos em um laço no setor de matéria.

$$(Q_{12})_i^j = (M_1)_i^k P_k^j \frac{D_1^2}{k^2} \delta_{12} = (\tilde{M}_1)_i^j \frac{D_1^2}{k^2} \delta_{12}, \quad (2.35)$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} V_{\Phi\bar{\Phi}} & V_{\Phi\Phi} \\ V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} & V_{\bar{\Phi}\Phi} \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Segue do resultado acima que a contribuição de um supergráfico formado por n subgráficos é dada por

$$\begin{aligned} I_n &= \int d^3x \frac{1}{2n} \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \dots d^2\theta_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr}\{(Q_{12})_i^j (Q_{23})_j^k \dots (Q_{n-1,n})_l^m (Q_{n,1})_m^p\} \\ &= \int d^3x \frac{1}{2n} \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \dots d^2\theta_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr}\left[(\tilde{M}_1)_i^j \frac{D_1^2}{k^2} \delta_{12} \right] \left[(\tilde{M}_2)_j^k \frac{D_2^2}{k^2} \delta_{23} \right] \dots \\ &\times \left[(\tilde{M}_n)_m^p \frac{D_n^2}{k^2} \delta_{n,1} \right], \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde Tr denota o traço por todos os índices matriciais e $2n$ é um fator de simetria. Tal fator leva em conta os coeficientes da expansão em series de Taylor da ação efetiva, o fator de simetria usual de cada supergráfico e o número de supergráficos topologicamente distintos [66]. Lembrando que os momenta externos devem ser nulos no cálculo do potencial efetivo.

Podemos integrar por partes a expressão I_n para obter

$$I_n = \int d^5z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2n} \text{Tr}[\tilde{M}^n] \left(\frac{D^2}{k^2}\right)^n \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'}. \quad (2.38)$$

A ação efetiva é dada pela soma de todos os supergráficos I_n , então

$$\Gamma_1^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} I_n = \int d^5z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \text{Tr}[\tilde{M}^n] \left(\frac{D^2}{k^2}\right)^n \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'}. \quad (2.39)$$

Não é difícil provar que $(D^2)^m \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'} = 0$ para $m = 2l$, e que $(D^2)^m \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'} = (\sqrt{-k^2})^{m-1}$ para $m = 2l + 1$, onde l é um inteiro não-negativo. Logo, segue que

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{(1)} &= \int d^5z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2(2l+1)} \text{Tr}[\tilde{M}^{2l+1}] \frac{1}{(k^2)^{l+1}} \\ &= \int d^5z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2(2l+1)} [\lambda_1^{2l+1} + \lambda_2^{2l+1}] \frac{1}{(k^2)^{l+1}}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde os λ 's são os autovalores da matriz \tilde{M} , a saber $\lambda_{1,2} = V_{\bar{\Phi}\Phi} \pm (V_{\Phi\Phi}V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}})^{1/2}$. Portanto, substituindo tais autovalores em (2.40) e somando em l obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{(1)} &= \frac{1}{2} \int d^5z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{|k|} \left[\arctan\left(\frac{V_{\bar{\Phi}\Phi} + (V_{\Phi\Phi}V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}})^{1/2}}{|k|}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \arctan\left(\frac{V_{\bar{\Phi}\Phi} - (V_{\Phi\Phi}V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}})^{1/2}}{|k|}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Finalmente, podemos calcular essas integrais para obter

$$\Gamma_1^{(1)} = -\frac{1}{8\pi} \int d^5z (V_{\bar{\Phi}\Phi}^2 + V_{\Phi\Phi}V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}}). \quad (2.42)$$

Aqui concluímos que esta contribuição para a ação efetiva em um laço não exibe nenhuma divergência, independentemente da forma do potencial $V(\bar{\Phi}, \Phi)$. Note que diferente de [37], aqui foi usado somente a soma de supergráficos, ao invés de cálculos de traço funcional.

Vamos agora passar para o cálculo dos supergráficos em um laço envolvendo o propagador do supercampo de calibre que conecta os vértices $-\bar{\Phi}\Phi A^\alpha A_\alpha$. Tais supergráficos exibem a estrutura mostrada na Fig. 2.3.

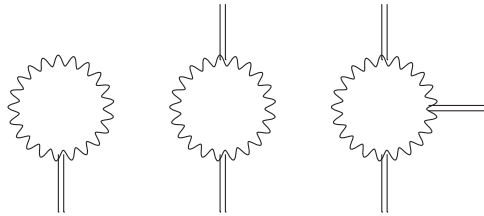


Figura 2.3 Supergráficos em um laço no setor de calibre.

Como antes, podemos calcular todas as contribuições notando que cada supergráfico acima é formado por n subgráficos como o que está exibido na Fig. 2.4.

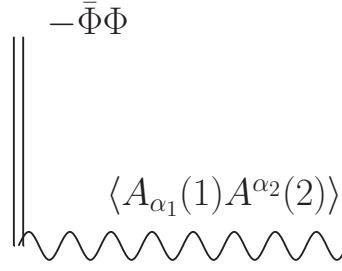


Figura 2.4 Um vértice típico nos supergráficos em um laço no setor de calibre.

O subgráfico da Fig. 2.4 fornece a contribuição

$$(P_{12})_{\alpha_1}{}^{\alpha_2} = -\frac{e^2(\bar{\Phi}\Phi)_1}{4k^2} \frac{1}{\hat{R}_1} D_1^{\alpha_2} D_{1,\alpha_1} \delta_{12}. \quad (2.43)$$

Logo, segue do resultado acima que a contribuição de um supergráfico formado por n subgráficos é dada por

$$\begin{aligned} J_n &= \int d^3x \frac{1}{2n} \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \dots d^2\theta_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (P_{12})_{\alpha_1}{}^{\alpha_2} (P_{23})_{\alpha_2}{}^{\alpha_3} \dots (P_{n-1,n})_{\alpha_{n-1}}{}^{\alpha_n} (P_{n,1})_{\alpha_n}{}^{\alpha_1} \\ &= \int d^3x \frac{1}{2n} \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \dots d^2\theta_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[-\frac{e^2(\bar{\Phi}\Phi)_1}{4k^2} \frac{1}{\hat{R}_1} D_1^{\alpha_2} D_{1,\alpha_1} \delta_{12} \right] \\ &\times \left[-\frac{e^2(\bar{\Phi}\Phi)_2}{4k^2} \frac{1}{\hat{R}_2} D_2^{\alpha_3} D_{2,\alpha_2} \delta_{23} \right] \dots \left[-\frac{e^2(\bar{\Phi}\Phi)_n}{4k^2} \frac{1}{\hat{R}_n} D_n^{\alpha_1} D_{n,\alpha_n} \delta_{n,1} \right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Depois de sucessivas integrações por partes e de somar todos os supergráficos J_n , obtemos a ação efetiva

$$\begin{aligned} \Gamma_2^{(1)} &= \int d^5z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left(-\frac{e^2\bar{\Phi}\Phi}{4k^2} \right)^n \frac{1}{\hat{R}^n} D^{\alpha_2} D_{\alpha_1} D^{\alpha_3} D_{\alpha_2} \dots D^{\alpha_n} D_{\alpha_{n-1}} \times \\ &\times D^{\alpha_1} D_{\alpha_n} \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Neste estágio do cálculo, temos que especificar o operador \hat{R} para que possamos prosseguir com o cálculo de $\Gamma_2^{(1)}$. A escolha mais geral é $\hat{R} = f(\square) + g(\square)D^2$ (lembrando que este operador é um escalar). Visto que esta expressão é bastante genérica e o resultado da manipulação completa da D -álgebra essencialmente depende da forma explícita do operador \hat{R} , vamos considerar aqui dois exemplos em que o resultado final é expresso em uma forma fechada e em termos de funções elementares.

O primeiro exemplo é $f = 0$ e $g \neq 0$, então temos

$$\hat{R} = g(\square)D^2 \Rightarrow \frac{1}{\hat{R}^n} = \left(\frac{-1}{g(k^2)k^2} \right)^n (D^2)^n. \quad (2.46)$$

Segue da álgebra de derivadas covariantes que $(D^2)^n D^{\alpha_2} D_{\alpha_1} D^{\alpha_3} D_{\alpha_2} \dots D^{\alpha_n} D_{\alpha_{n-1}} \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'} = 0$ para todo n . Portanto, das eqs. (2.45) e (2.46), obtemos

$$\Gamma_2^{(1)} = 0. \quad (2.47)$$

Em conclusão, o potencial efetivo Kähleriano em um laço é completamente dado pela expressão (3.25):

$$K^{(1)}(\Phi, \bar{\Phi}) = -\frac{1}{8\pi}(V_{\bar{\Phi}\Phi}^2 + V_{\Phi\bar{\Phi}}V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}}), \quad \text{para } f(\square) = 0 \text{ e } g(\square) \neq 0. \quad (2.48)$$

Este resultado é consistente com a afirmação feita em [50] que, na ausência de auto interação do supercampo escalar, o potencial efetivo Kähleriano em um laço para a QED tridimensional supersimétrica (que é, $g = 1$) é identicamente nulo. Neste trabalho, acabamos de demonstrar que a mesma situação ocorre para todas as classes de teorias em que $g \neq 1$, mas $f = 0$.

Nosso segundo exemplo é $f = \xi(-\square)^m$ e $g = 0$, onde ξ é um parâmetro com dimensão de massa não-trivial $[\xi] = [M]^{-2m}$, $\xi > 0$ e m é um inteiro não-negativo. Consequentemente, obtemos trivialmente

$$\hat{R} = \xi(-\square)^m \Rightarrow \frac{1}{\hat{R}^n} = \left(\frac{1}{\xi(k^2)^m} \right)^n. \quad (2.49)$$

Pode ser mostrado que $D^{\alpha_2}D_{\alpha_1}D^{\alpha_3}D_{\alpha_2} \dots D^{\alpha_l}D_{\alpha_{l-1}}\delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'} = 0$ para $n = 2l$ e $D^{\alpha_2}D_{\alpha_1}D^{\alpha_3}D_{\alpha_2} \dots D^{\alpha_l}D_{\alpha_{l-1}}\delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'} = 2^n(\sqrt{-k^2})^{n-1}$ para $n = 2l + 1$, onde l é um inteiro não-negativo. Portanto, das eqs. (2.45) e (2.49), obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_2^{(1)} &= \int d^5z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{-k^2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2(2l+1)} \left(-\frac{e^2\bar{\Phi}\Phi\sqrt{-k^2}}{2\xi(k^2)^{m+1}} \right)^{2l+1} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^5z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{|k|} \arctan \left(\frac{e^2\bar{\Phi}\Phi|k|}{2\xi(k^2)^{m+1}} \right), \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde foi usado o fato que $\sqrt{-k^2} = i|k|$ e a identidade $\arctan(x) = \frac{1}{i}\arctanh(ix)$.

A integral acima pode ser resolvida por indução. Então, obtemos

$$\Gamma_2^{(1)} = - \int d^5z \frac{1}{16\pi} \sec \left(\frac{\pi}{2m+1} \right) \left(\frac{e^2\bar{\Phi}\Phi}{2\xi} \right)^{\frac{2}{2m+1}}. \quad (2.51)$$

Vale a pena destacar que este resultado é finito e não necessita de nenhuma renormalização, sendo que esta finitude é uma propriedade comum em teorias de supercampo tridimensionais [50]. De fato, sabe-se que se o operador \hat{R} é de segunda ordem nas derivadas covariantes espinoriais, $\hat{R} = D^2$, a teoria é super-renormalizável, com as únicas divergências possíveis estando no nível de dois laços. Esta é exatamente a situação da super-QED [35]. Além disso, se o operador \hat{R} é de segunda ordem nas derivadas de espaço-tempo, $\hat{R} = \square$, a teoria correspondente é finita em todos os laços.

Novamente, o potencial efetivo de Kähler completo em um laço pode ser lido da soma das eqs. (3.25) e (2.51). Como resultado, finalmente obtemos

$$K^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) = -\frac{1}{16\pi} \sec \left(\frac{\pi}{2m+1} \right) \left(\frac{e^2\bar{\Phi}\Phi}{2\xi} \right)^{\frac{2}{2m+1}} - \frac{1}{8\pi}(V_{\bar{\Phi}\Phi}^2 + V_{\Phi\bar{\Phi}}V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}}), \quad (2.52)$$

para $f(\square) = \xi(-\square)^m$ e $g(\square) = 0$.

O resultado (2.52) é bastante genérico. Em particular, se $m = 0$, $\xi = 1$ e $V(\bar{\Phi}, \Phi) = \frac{\lambda}{2}(\bar{\Phi}\Phi)^2$, obtemos

$$K^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) = \frac{1}{64\pi}(e^2\bar{\Phi}\Phi)^2 - \frac{5}{8\pi}\lambda^2(\bar{\Phi}\Phi)^2. \quad (2.53)$$

Este é exatamente o potencial efetivo de Kähler em um laço (Euclidiano) para a teoria de Chern-Simons acoplada a matéria escalar sem massa e auto interagente sem altas derivadas. Nosso resultado está de acordo com o resultado obtido na Ref. [37].

2.3 TEORIA ESCALAR COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 3$ E ALTAS DERIVADAS GENÉRICA

Na seção anterior estudamos a ação efetiva para a teoria de calibre com altas derivadas genérica. Todavia, as altas derivadas foram introduzidas somente no setor de calibre, enquanto que o setor de matéria permaneceu inalterado. Nesta seção, será introduzida altas derivadas no setor de matéria, mas, por simplicidade, o supercampo de calibre será desconsiderado nos modelos abaixo. Especificamente, formularemos uma teoria de supercampos com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$ e altas derivadas genérica para a ação de supercampo escalar auto interagente. Consideraremos os casos envolvendo supercampos escalares reais e complexos. Para essas teorias, calcularemos explicitamente o potencial efetivo em um laço. Esta seção é baseada no trabalho publicado [43].

Para começar o nosso estudo, vamos recordar a ação de supercampo escalar geral sem altas derivadas (1.19):

$$S_R = \frac{1}{2} \int d^5z \Phi D^2 \Phi + \int d^5z V(\Phi), \quad (2.54)$$

onde Φ é um supercampo escalar real e $V(\Phi)$ é o superpotencial. Como já dissemos anteriormente, sem altas derivadas, o superpotencial deve ser um polinômio de quarta ordem ou menos para a renormalizabilidade do modelo (2.54). Todavia, no caso de altas derivadas tal restrição não será considerada.

Agora, vamos tentar generalizar esta teoria introduzindo altas derivadas na ação (2.54). Visto que há uma infinidade de maneiras de conseguir isto, demandaremos, por simplicidade, que a nova ação não contenha termos de interação com altas derivadas. A razão para esta escolha é que termos de interação com altas derivadas tendem a ter um pior comportamento ultravioleta do que termos sem altas derivadas. Consequentemente, consideraremos nesta seção a teoria com altas derivadas descrita pela ação:

$$S_{HR} = \frac{1}{2} \int d^5z \Phi \hat{R} \Phi + \int d^5z V(\Phi), \quad (2.55)$$

onde \hat{R} é algum operador escalar que é uma função de derivadas covariantes e algumas constantes. Devido a identidade $(D^2)^2 = \square$, podemos inferir que $\hat{R} = g(\square) + f(\square)D^2$ é a escolha mais geral para o operador escalar. Naturalmente, quando tomamos $g(\square) = 0$ e $f(\square) = 1$, recupera-se o modelo (2.54).

Seguindo o procedimento padrão, vamos expandir (2.55) em torno de um supercampo de fundo $\Phi \rightarrow \Phi + \phi$ e manter somente o termo quadrático na flutuação quântica ϕ , obtemos então

$$S_2[\Phi; \phi] = \frac{1}{2} \int d^5z \phi (g(\square) + f(\square)D^2) \phi + \frac{1}{2} \int d^5z V''(\Phi) \phi^2, \quad (2.56)$$

onde $V''(\Phi) = \frac{\partial^2 V(\Phi)}{\partial \Phi^2}$. Por conveniência, os propagadores podem ser definidos a partir dos termos que são independentes Φ e os vértices podem ser definidos a partir dos termos em que ϕ interage com Φ . Portanto, a partir de (2.56), segue que o propagador é dado por

$$\langle \phi(1) \phi(2) \rangle = - \frac{1}{g(k^2) + f(k^2)D_1^2} \delta_{12}. \quad (2.57)$$

Para calcular a correção de um laço para o potencial efetivo Kähleriano (KEP), iremos agora proceder em três passos. Primeiro, desenhemos todos os supergráficos em um laço permitidos por (2.56). Segundo, descartamos supergráficos envolvendo derivadas covariantes de Φ e calculamos as contribuições de cada supergráfico para a ação efetiva, com os momenta externos iguais a zero. Por último, somamos todas as contribuições e calculamos a integral nos momenta. O resultado será exatamente o KEP.

Vamos começar os cálculos de supergráficos em um laço que envolvem os propagadores de supercampo escalar (3.16) que conectam os vértices $V''(\Phi)\phi^2$. Tais supergráficos exibem as estruturas dadas na Fig. 2.5.

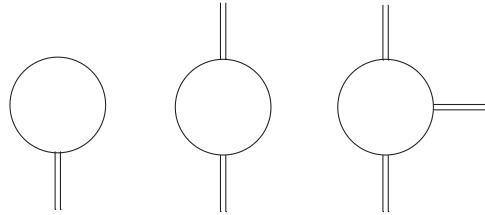


Figura 2.5 Supergráficos em um laço.

Cada supergráfico acima é formado por n subgráficos como aquele da Fig. 2.6.

Portanto, a contribuição deste subgráfico é dada por

$$Q_{12} = - \frac{V_1''}{g(k^2) + f(k^2)D_1^2} \delta_{12}, \quad (2.58)$$

onde $V_1'' \equiv V''(\Phi(p_1 = 0, \theta_1))$. Segue do resultado acima que a contribuição de um supergráfico

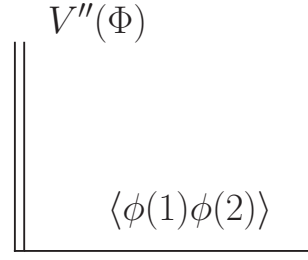


Figura 2.6 Um vértice típico em supergráficos em um laço.

formado por n subgráficos é dada por

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int d^3x \frac{1}{2n} \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \dots d^2\theta_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Q_{12} Q_{23} \dots Q_{n-1,n} Q_{n,1} \\
 &= \int d^3x \frac{1}{2n} \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \dots d^2\theta_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[-\frac{V_1''}{g(k^2) + f(k^2)D_1^2} \delta_{12} \right] \\
 &\times \left[-\frac{V_2''}{g(k^2) + f(k^2)D_2^2} \delta_{23} \right] \dots \left[-\frac{V_n''}{g(k^2) + f(k^2)D_n^2} \delta_{n,1} \right]. \quad (2.59)
 \end{aligned}$$

Podemos integrar por partes a expressão I_n e descartar termos envolvendo derivadas covariantes de Φ para obter

$$I_n = \int d^5z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2n} (-V'')^n \left[\frac{1}{g(k^2) + f(k^2)D^2} \right]^n \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'}. \quad (2.60)$$

A correção em um laço para a ação efetiva é dada pela soma de todos os supergráficos I_n ,

$$\Gamma^{(1)}[\Phi] = \sum_{n=1}^{\infty} I_n = \int d^5z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} (-V'')^n \left[\frac{1}{g(k^2) + f(k^2)D^2} \right]^n \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'}. \quad (2.61)$$

Vamos agora especificar o operador \hat{R} para que progredir com o cálculo de $\Gamma^{(1)}$. Em particular, vamos considerar nesta seção três exemplos que geram resultados relativamente simples.

Como nosso primeiro exemplo, vamos tomar $f = 0$ e $g \neq 0$. Logo, segue de (2.61) que

$$\Gamma^{(1)}[\Phi] = \int d^5z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left[-\frac{V''}{g(k^2)} \right]^n \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'}. \quad (2.62)$$

Portanto, devido a propriedade da função delta de Grassmann $\delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'} = 0$, o KEP é dado por

$$K^{(1)}(\Phi) = 0, \quad (2.63)$$

para $\hat{R} = g(\square)$. De fato, podemos fazer uma afirmação mais forte. De (2.55), o modelo em consideração é dado por

$$S_{HR} = \frac{1}{2} \int d^5z \Phi g(\square) \Phi + \int d^5z V(\Phi). \quad (2.64)$$

Note que não há nenhuma derivada espinorial no modelo (2.64). Portanto, também não haverá nenhuma derivada espinorial nem nos propagadores nem nos vértices. Então, segue das regras de supergráficos que em uma contribuição arbitrária de n laços para a ação efetiva, todas as funções delta $\delta(\theta_i - \theta_{i+1})$ vindas do propagador podem ser usadas para trivialmente calcular as integrais $d^2\theta_i$ que vem dos vértices. Como um resultado, a correção de n laços para a ação efetiva terá a estrutura final

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n)}[\Phi] &= \sum_n \int d^3x_1 \dots d^3x_n \int d^2\theta \mathcal{T}(x_1, \dots, x_n) F_1(\Phi(x_1, \theta)) \dots F_n(\Phi(x_n, \theta)) \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'} \\ &\Rightarrow \Gamma^{(n)}[\Phi] = 0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Logo, pode-se concluir que

$$\Gamma[\Phi] = S_{HR}[\Phi]. \quad (2.66)$$

A partir deste resultado, podemos afirmar que a teoria (2.64) é finita e não possui correções quânticas, ou seja, é trivial. Este resultado já é conhecido em quatro dimensões [33]. Todavia, aqui foi demonstrado explicitamente sua manifestação em três dimensões.

Nosso segundo exemplo é $f = \xi(-\square)^m$ e $g = 0$, onde ξ é parâmetro com dimensão $[\xi] = [M]^{-2m}$, $\xi > 0$, e m é um inteiro não-negativo. Consequentemente, temos

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}[\Phi] &= \int d^5z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} (-V'')^n \left[\frac{1}{\xi(k^2)^m D^2} \right]^n \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'} \\ &= \int d^5z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left[\frac{V''}{\xi(k^2)^{m+1}} \right]^n (D^2)^n \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Utilizando as identidades $(D^2)^n \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'} = 0$ para $n = 2l$ e $(D^2)^n \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'} = (\sqrt{-k^2})^{n-1}$ para $n = 2l + 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}[\Phi] &= \int d^5z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{-k^2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left[\frac{V''\sqrt{-k^2}}{\xi(k^2)^{m+1}} \right]^{2l+1} \\ &= \frac{1}{2} \int d^5z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{|k|} \arctan \left[\frac{V''|k|}{\xi(k^2)^{m+1}} \right], \end{aligned} \quad (2.68)$$

A integral acima foi resolvida em [46]. Logo, obtemos

$$\Gamma^{(1)}[\Phi] = \int d^5z \frac{1}{16\pi} \sec \left(\frac{\pi}{2m+1} \right) \left[\frac{V''(\Phi)}{\xi} \right]^{\frac{2}{2m+1}}. \quad (2.69)$$

Finalmente, o KEP em um laço completo pode ser lido de (2.69). Portanto, trivialmente obtêm-se

$$K^{(1)}(\Phi) = \frac{1}{16\pi} \sec \left(\frac{\pi}{2m+1} \right) \left[\frac{V''(\Phi)}{\xi} \right]^{\frac{2}{2m+1}}, \quad (2.70)$$

para $\hat{R} = \xi(-\square)^m D^2$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Nota-se que a correção de um laço para o KEP é finita e sua finitude é independente da forma do potencial $V(\Phi)$, tal finitude também é encontrada para o KEP para a mesma teoria sem altas derivadas [36]. Além disso, como o resultado (2.70) é genérico, vamos escolher em particular $m = 0$ e $\xi = 1$, de modo que obtemos

$$K^{(1)}(\Phi) = -\frac{1}{16\pi} [V''(\Phi)]^2, \quad (2.71)$$

Este é o KEP em um laço (Euclidiano) para a teoria de supercampo escalar real em três dimensões sem altas derivadas. Percebe-se que nosso resultado está de acordo com o resultado obtido em [36].

Nosso último exemplo será $f = \xi_f(-\square)^l$ e $g = \xi_g(-\square)^{2l+1}$, onde l é um inteiro positivo, ξ_f e ξ_g são parâmetros positivos com dimensão $[\xi_f] = [M]^{-2l}$ e $[\xi_g] = [M]^{-2(2l+1)}$, respectivamente. Segue desta escolha que podemos reescrever (2.61) como

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}[\Phi] &= \int d^5z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} (-V'')^n \left[\frac{1}{\xi_g(k^2)^{2l+1} + \xi_f(k^2)^l D^2} \right]^n \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'} \\ &= \int d^5z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} (-V'')^n \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} ds s^{n-1} \\ &\quad \times \exp[-s(\xi_g(k^2)^{2l+1} + \xi_f(k^2)^l D^2)] \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

onde foi utilizado a representação de Schwinger-DeWitt [67]

$$\frac{1}{\hat{O}^n} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} ds s^{n-1} e^{-s\hat{O}}. \quad (2.73)$$

Podemos somar em n , para que possamos reescrever (2.72) como

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}[\Phi] &= \int d^5z \int_0^{\infty} ds \frac{1}{2s} (-2 + e^{-sV''}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-s\xi_g(k^2)^{2l+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-s\xi_f(k^2)^l)^m}{m!} \\ &\quad \times (D^2)^m \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

onde foi expandido o argumento da exponencial. Pode-se eliminar termos que não dependem do supercampo de fundo por meio da normalização da ação efetiva. Portanto, obtemos

$$\Gamma^{(1)}[\Phi] = \int d^5z \int_0^{\infty} ds \frac{1}{2s} e^{-sV''} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-s\xi_g(k^2)^{2l+1}} \frac{1}{\sqrt{-k^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s\xi_f(k^2)^l \sqrt{-k^2})^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (2.75)$$

Somando em n , obtemos

$$\Gamma^{(1)}[\Phi] = -\frac{1}{2} \int d^5z \int_0^{\infty} ds \frac{1}{s} e^{-sV''} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{|k|} e^{-s\xi_g(k^2)^{2l+1}} \sin[s\xi_f(k^2)^l |k|]. \quad (2.76)$$

As duas integrais acima podem ser resolvidas por indução. Logo, obtêm-se

$$\Gamma^{(1)}[\Phi] = \int d^5z -\frac{1}{8\pi} \sec\left(\frac{\pi}{2l+1}\right) \left[\frac{V''(\Phi)}{\xi_g}\right]^{\frac{1}{2l+1}} \operatorname{arcsinh}\left\{\frac{2}{2l+1} \sinh\left[\frac{\xi_f}{2\sqrt{\xi_g V''(\Phi)}}\right]\right\} \quad (2.77)$$

Novamente, o KEP completo em um laço pode ser lido diretamente da eq. (2.77). Finalmente, obtemos

$$K^{(1)}(\Phi) = -\frac{1}{8\pi} \sec\left(\frac{\pi}{2l+1}\right) \left[\frac{V''(\Phi)}{\xi_g}\right]^{\frac{1}{2l+1}} \operatorname{arcsinh}\left\{\frac{2}{2l+1} \sinh\left[\frac{\xi_f}{2\sqrt{\xi_g V''(\Phi)}}\right]\right\}, \quad (2.78)$$

para $\hat{R} = \xi_g(-\square)^{2l+1} + \xi_f(-\square)^l D^2$, $l = 1, 2, 3, \dots$. Como os outros resultados obtidos anteriormente, este também é finito independentemente de $V(\Phi)$.

Vamos agora passar para o cálculo do KEP para modelos com altas derivadas envolvendo o supercampo escalar complexo. Visto que a ideia geral do cálculo é bastante similar à ideia descrita acima, não apresentaremos os detalhes dos cálculos.

Similarmente à (2.54), a teoria de supercampo escalar complexo tridimensional é descrita pela ação

$$S_C = \int d^5z [\bar{\Phi} D^2 \Phi + V(\bar{\Phi}\Phi)]. \quad (2.79)$$

Todavia, diferentemente de (2.54), esta teoria tem uma simetria global. A ação (2.79) é invariante sob a seguinte transformação global: $\Phi \rightarrow e^{iK}\Phi$. Portanto, para introduzir altas derivadas, será demandado que os termos de altas derivadas não quebrem explicitamente a simetria da teoria (2.79). Novamente, por simplicidade, também demandaremos que a nova ação não contenha termos de interação com altas derivadas. Conseqüentemente, consideraremos aqui a teoria descrita pela ação:

$$S_{HC} = \int d^5z [\bar{\Phi} \hat{R} \Phi + V(\bar{\Phi}\Phi)], \quad (2.80)$$

onde $\hat{R} = g(\square) + f(\square)D^2$.

Podemos fazer a expansão em laços $\Phi \rightarrow \Phi + \phi$, $\bar{\Phi} \rightarrow \bar{\Phi} + \bar{\phi}$ na eq. (2.80). Portanto, obtemos

$$S_2[\Phi, \bar{\Phi}; \phi, \bar{\phi}] = \int d^5z [\bar{\phi}(g(\square) + f(\square)D^2)\phi + V_{\Phi\bar{\Phi}}\phi\bar{\phi} + \frac{1}{2}V_{\Phi\Phi}\phi^2 + \frac{1}{2}V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}}\bar{\phi}^2], \quad (2.81)$$

onde $V_{\Phi\bar{\Phi}} = \frac{\partial^2 V(\bar{\Phi}, \Phi)}{\partial \bar{\Phi} \partial \Phi}$, $V_{\Phi\Phi} = \frac{\partial^2 V(\bar{\Phi}, \Phi)}{\partial \Phi^2}$, $V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} = \frac{\partial^2 V(\bar{\Phi}, \Phi)}{\partial \bar{\Phi}^2}$. É conveniente reescrever o funcional (2.81) em uma forma matricial, a saber

$$S_2[\Phi, \bar{\Phi}; \phi, \bar{\phi}] = \frac{1}{2} \int d^5z [\phi^i P_i^j (g(\square) + f(\square)D^2) \phi_j + \phi^i M_i^j \phi_j]. \quad (2.82)$$

onde

$$\phi_i = \begin{pmatrix} \phi \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}, \quad \phi^i = \begin{pmatrix} \phi & \bar{\phi} \end{pmatrix}, \quad P_i^j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_i^j = \begin{pmatrix} V_{\Phi\Phi} & V_{\Phi\bar{\Phi}} \\ V_{\Phi\bar{\Phi}} & V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Então, segue que o propagador é dado por

$$\langle \phi_i(1) \phi^j(2) \rangle = -\frac{P_i^j}{g(k^2) + f(k^2)D_1^2} \delta_{12}. \quad (2.84)$$

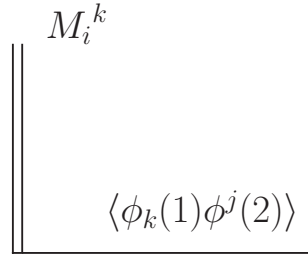


Figura 2.7 Um vértice matricial em supergráficos em um laço.

Os supergráficos em um laço terão o mesmo padrão que os supergráficos na Fig. 2.5, exceto pelo fato que cada supergráfico será formado por n subgráficos como aquele exibido na Fig. 2.7.

Portanto, a contribuição do subgráfico da Fig. 2.7 é dada por

$$(\mathcal{Q}_{12})_i^j = -(M_1)_i^k P_k^j \frac{1}{g(k^2) + f(k^2)D_1^2} \delta_{12} = -(\tilde{M}_1)_i^j \frac{1}{g(k^2) + f(k^2)D_1^2} \delta_{12}, \quad (2.85)$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} V_{\Phi\bar{\Phi}} & V_{\Phi\Phi} \\ V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}} & V_{\bar{\Phi}\Phi} \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

Segue do resultado acima que a contribuição de um supergráfico formado por n subgráficos é dada por

$$\begin{aligned} J_n &= \int d^3x \frac{1}{2n} \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \dots d^2\theta_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr}\{(\mathcal{Q}_{12})_i^j (\mathcal{Q}_{23})_j^k \dots (\mathcal{Q}_{n-1,n})_l^m (\mathcal{Q}_{n,1})_m^p\} \\ &= \int d^3x \frac{1}{2n} \int d^2\theta_1 d^2\theta_2 \dots d^2\theta_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr}\left\{ \left[-(\tilde{M}_1)_i^j \frac{1}{g(k^2) + f(k^2)D_1^2} \delta_{12} \right] \right. \\ &\quad \times \left. \left[-(\tilde{M}_2)_j^k \frac{1}{g(k^2) + f(k^2)D_2^2} \delta_{23} \right] \dots \left[-(\tilde{M}_n)_m^p \frac{1}{g(k^2) + f(k^2)D_n^2} \delta_{n,1} \right] \right\}, \quad (2.87) \end{aligned}$$

Depois de sucessivas integrações por partes e de somar todos os supergráficos J_n , obtemos a ação efetiva

$$\Gamma^{(1)}[\Phi, \bar{\Phi}] = \int d^5z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \text{Tr}[\tilde{M}^n] \left[\frac{-1}{g(k^2) + f(k^2)D^2} \right]^n \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'}. \quad (2.88)$$

O traço da matriz \tilde{M}^n pode ser calculado por meio dos autovalores de \tilde{M} , os quais são dados por $\lambda_{1,2} = V_{\Phi\Phi} \pm (V_{\Phi\Phi} V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}})^{1/2}$. Portanto, $\text{Tr}[\tilde{M}^n] = \lambda_1^n + \lambda_2^n$. Segue deste fato que

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}[\Phi, \bar{\Phi}] &= \int d^5z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} (-\lambda_1)^n \left[\frac{1}{g(k^2) + f(k^2)D^2} \right]^n \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'} \\ &\quad + \int d^5z \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} (-\lambda_2)^n \left[\frac{1}{g(k^2) + f(k^2)D^2} \right]^n \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'}. \quad (2.89) \end{aligned}$$

Nota-se que a expressão (2.89) é completamente análoga à (2.61). Portanto, não será preciso reproduzir os cálculos.

Os KEPs em um laço para a teoria de supercampo escalar complexo em três dimensões com altas derivadas são dados por

$$K^{(1)}(\Phi, \bar{\Phi}) = 0, \quad (2.90)$$

para $\hat{R} = g(\square)$. Além disso, $\Gamma[\Phi, \bar{\Phi}] = S_{HC}[\Phi, \bar{\Phi}]$.

$$\begin{aligned} K^{(1)}(\Phi, \bar{\Phi}) &= \frac{1}{16\pi} \sec\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) \left\{ \left[\frac{V_{\bar{\Phi}\Phi} + (V_{\Phi\Phi}V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}})^{1/2}}{\xi} \right]^{\frac{2}{2m+1}} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{V_{\bar{\Phi}\Phi} - (V_{\Phi\Phi}V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}})^{1/2}}{\xi} \right]^{\frac{2}{2m+1}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.91)$$

para $\hat{R} = \xi(-\square)^m D^2$, $m = 0, 1, 2, \dots$.

$$\begin{aligned} K^{(1)}(\Phi, \bar{\Phi}) &= -\frac{1}{8\pi} \sec\left(\frac{\pi}{2l+1}\right) \left\{ \left[\frac{V_{\bar{\Phi}\Phi} + (V_{\Phi\Phi}V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}})^{1/2}}{\xi_g} \right]^{\frac{1}{2l+1}} \right. \\ &\quad \times \operatorname{arcsinh}\left\{ \frac{2}{2l+1} \sinh\left[\frac{\xi_f}{2\sqrt{\xi_g(V_{\bar{\Phi}\Phi} + (V_{\Phi\Phi}V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}})^{1/2})}} \right] \right\} + \left[\frac{V_{\bar{\Phi}\Phi} - (V_{\Phi\Phi}V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}})^{1/2}}{\xi_g} \right]^{\frac{1}{2l+1}} \\ &\quad \times \operatorname{arcsinh}\left\{ \frac{2}{2l+1} \sinh\left[\frac{\xi_f}{2\sqrt{\xi_g(V_{\bar{\Phi}\Phi} - (V_{\Phi\Phi}V_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}})^{1/2})}} \right] \right\} \left. \right\}, \end{aligned} \quad (2.92)$$

para $\hat{R} = \xi_g(-\square)^{2l+1} + \xi_f(-\square)^l D^2$, $l = 1, 2, 3, \dots$.

Todos os resultados acima não exibem divergências, e essa conclusão é válida para todo $V(\bar{\Phi}\Phi)$. Além disso, se tomarmos em (2.91) os valores particulares $m = 0$, $\xi = 1$, e $V(\bar{\Phi}, \Phi) = \frac{\lambda}{2}(\bar{\Phi}\Phi)^2$, recupera-se o KEP em um laço (Euclidiano) para a teoria de supercampo escalar complexo em três dimensões sem altas derivadas, cujo resultado foi originalmente obtido em [37] no contexto da teoria de calibre.

Potencial Efetivo em Teoria de Supercampos com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$ e com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 4$ e Altas Derivadas

3.1 TEORIA DE CALIBRE COM $\mathcal{N} = 2$ EM $d = 3$ E ALTAS DERIVADAS GENÉRICA

Nesta seção pretendemos dar continuidade aos nossos estudos sobre a ação efetiva em teorias de supercampos em três dimensões. Todavia, vamos considerar nesta seção uma versão da teoria de supercampos tridimensionais com supersimetria estendida. Especificamente, formularemos uma teoria de supercampos com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$ de calibre com altas derivadas genérica acoplada à matéria que em certos casos reduz-se à super-QED escalar com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$, ou teoria de Maxwell-Chern-Simons supersimétrica ou teoria de Chern-Simons com matéria. Para esta teoria, será explicitamente calculado o potencial efetivo em um laço. Esta seção é baseada no trabalho publicado [47].

No setor de calibre puro, vamos começar com a mais geral ação da $\mathcal{N} = 2$, $d = 3$ teoria de calibre abeliana

$$S_G = \frac{1}{2} \int d^3x d^4\theta V [f(\square) \bar{D}^\alpha D_\alpha + h(\square) D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha] V, \quad (3.1)$$

onde $f(\square)$ e $h(\square)$ são funções analíticas do operador d'Alembertiano \square . Em particular, se (a menos de constantes multiplicativas) $f = m$, onde m é uma constante com dimensão de massa, e $h = 0$ obtemos uma teoria de Chern-Simons; se $f = 0$ e $h = 1$, obtemos uma teoria de Maxwell, e se $f = m$ e $h = 1$ obtemos uma teoria de Maxwell-Chern-Simons. Se f e/ou h envolve graus maiores de \square , obtemos uma teoria de calibre supersimétrica com altas derivadas.

A estrutura da expressão (3.1) merece alguma justificação. Primeiro, foi ignorado em (3.1) termos de auto acoplamento do supercampo de calibre $V(z)$ devido ao fato que o KEP é, por definição, uma função somente dos supercampos de matéria de fundo, e termos de auto acoplamento do supercampo de calibre necessariamente contribuem com supercampos de calibre de fundo em um laço. Portanto, termos de auto acoplamento do supercampo $V(z)$ não contribuem para o KEP em um laço. Segundo, por simplicidade, só trabalharemos com uma teoria abeliana porque o KEP em um laço para uma teoria não-abeliana é o mesmo para uma teoria abeliana,

a menos de uma constante dependente de um fator algébrico, isso se deve ao fato que o auto acoplamento do supercampo de calibre não contribui para o KEP em um laço. Por último, S_G é invariante sob a transformação de calibre $\delta V = i(\bar{\Lambda} - \Lambda)$ porque os operadores $\bar{D}^\alpha D_\alpha$ e $D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha$ comutam com \square e aniquilam os supercampos $\bar{\Lambda}$ e Λ que satisfazem as condições $D_\alpha \bar{\Lambda} = 0$ e $\bar{D}_\alpha \Lambda = 0$. Além disso, o operador de altas derivadas em (3.1) foi escolhido para ser linear em $\bar{D}^\alpha D_\alpha$ e $D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha$ devido às identidades:

$$(\bar{D}^\alpha D_\alpha)^n = \square^{\frac{n-1}{2}} \bar{D}^\alpha D_\alpha, \quad n = 2l - 1, \quad (3.2)$$

$$(\bar{D}^\alpha D_\alpha)^n = -\square^{\frac{n}{2}-1} D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha, \quad n = 2l, \quad (3.3)$$

$$(D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha)^n = (-1)^{n+1} \square^{n-1} D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4)$$

onde $l = 1, 2, 3, \dots$

Podemos adicionar à (3.1) o seguinte termo de fixação de calibre:

$$S_{GF} = -\frac{1}{2\alpha} \int d^3 x d^4 \theta V \{D^2, \bar{D}^2\} V. \quad (3.5)$$

Naturalmente, poderíamos ter utilizado um termo de fixação de calibre mais sofisticado envolvendo altas derivadas como foi feito na seção 2.2. Todavia, usaremos (3.5) por conveniência. Ademais, sabemos que $\delta V = i(\bar{\Lambda} - \Lambda)$ é uma simetria abeliana, e portanto os fantasmas desacoplam completamente.

Agora, vamos considerar o setor de matéria. Faremos duas suposições com o intuito de simplificar o modelo envolvendo os supercampos de matéria. Primeiro, demandaremos que a ação de matéria não contenha termos com altas derivadas. Segundo, não consideraremos auto acoplamentos envolvendo somente os supercampos Φ ou $\bar{\Phi}$. Tendo feito essas suposições, a mais genérica ação de matéria é dada por

$$S_M = \int d^3 x d^4 \theta K(\bar{\Phi}, \Phi), \quad (3.6)$$

onde $K(\bar{\Phi}, \Phi)$ é o KEP no nível de árvore.

Para podermos acoplar (3.6) ao supercampo de calibre, a função $K(\bar{\Phi}, \Phi)$ deve primeiramente ser invariante sob as transformações globais $\delta \Phi = i\lambda \Phi$ e $\delta \bar{\Phi} = -i\lambda \bar{\Phi}$. Segue disto que $K(\bar{\Phi}, \Phi)$ deve satisfazer a restrição

$$\bar{\Phi} \frac{\partial K(\bar{\Phi}, \Phi)}{\partial \bar{\Phi}} = \frac{\partial K(\bar{\Phi}, \Phi)}{\partial \Phi} \Phi. \quad (3.7)$$

A solução geral desta restrição é $K(\bar{\Phi}, \Phi) = K(\bar{\Phi}\Phi)$.

Agora, podemos introduzir o supercampo de calibre V em (3.6) para obter

$$S_M = \int d^3 x d^4 \theta K(\bar{\Phi} e^{2gV} \Phi), \quad (3.8)$$

que é invariante sob as transformações locais $\delta \Phi = i\Lambda(z)\Phi$, $\delta \bar{\Phi} = -i\bar{\Lambda}(z)\bar{\Phi}$ e $\delta V = i(\bar{\Lambda} - \Lambda)$.

Finalmente, a $\mathcal{N} = 2$, $d = 3$ teoria de calibre com altas derivadas genérica que será estudada nesta seção segue de (3.1), (3.5) e (3.8):

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x d^4\theta \{ V[f(\square)\bar{D}^\alpha D_\alpha + h(\square)D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha - \frac{1}{\alpha}\{D^2, \bar{D}^2\}]V + 2K(\bar{\Phi}e^{2gV}\Phi) \}. \quad (3.9)$$

Agora estamos prontos para calcular a ação efetiva em um laço. Fazendo a expansão em laços $\Phi \rightarrow \bar{\Phi} + \phi$, $\bar{\Phi} \rightarrow \bar{\Phi} + \bar{\phi}$ e $V \rightarrow V$, obtemos de (3.9)

$$\begin{aligned} S_2[\bar{\Phi}, \Phi; \bar{\phi}, \phi, V] &= \frac{1}{2} \int d^3x d^4\theta \{ V[f(\square)\bar{D}^\alpha D_\alpha + h(\square)D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha - \frac{1}{\alpha}\{D^2, \bar{D}^2\}]V \\ &+ \frac{(2g)^2}{2} (K_{\bar{\Phi}}\bar{\Phi} + K_\Phi\Phi + K_{\bar{\Phi}\bar{\phi}}\bar{\Phi}^2 + K_{\Phi\phi}\Phi^2)V^2 + 2g(K_{\bar{\Phi}} + K_{\bar{\Phi}\bar{\phi}}\bar{\Phi} \\ &+ K_{\bar{\Phi}\Phi}\bar{\Phi})\bar{\phi}V + 2g(K_\Phi + K_{\Phi\phi}\Phi + K_{\bar{\Phi}\phi}\bar{\Phi})V\phi + 2K_{\bar{\Phi}\phi}\bar{\phi}\phi \}, \quad (3.10) \end{aligned}$$

onde as derivadas covariantes dos supercampos de fundo foram omitidas devido ao nosso interesse somente no KEP [33]. Diferenciando a restrição (3.7), obtemos novas identidades que podem ser utilizadas para simplificar (3.10), então obtemos

$$S_2[\bar{\Phi}, \Phi; \bar{\phi}, \phi, V] = S_q + S_{int}, \quad (3.11)$$

$$S_q = \frac{1}{2} \int d^3x d^4\theta \{ V[f(\square)\bar{D}^\alpha D_\alpha - \square h(\square)\Pi_{1/2} - \frac{1}{\alpha}\square\Pi_0]V + 2K_{\bar{\Phi}\phi}\bar{\phi}\phi \}, \quad (3.12)$$

$$S_{int} = \frac{1}{2} \int d^3x d^4\theta \{ (2g)^2 K_{\bar{\Phi}\phi}\bar{\Phi}\Phi V^2 + 2(2g)K_{\bar{\Phi}\phi}\bar{\Phi}\bar{\phi}V + 2(2g)K_{\bar{\Phi}\phi}\bar{\Phi}V\phi \}, \quad (3.13)$$

onde foi utilizado os operadores de projeção $\Pi_{1/2} \equiv -\square^{-1}D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha$ e $\Pi_0 \equiv \square^{-1}\{D^2, \bar{D}^2\}$, que juntos com o operador $\bar{D}^\alpha D_\alpha$ satisfazem as propriedades

$$\Pi_{1/2}^2 = \Pi_{1/2}, \quad \Pi_0^2 = \Pi_0, \quad (\bar{D}^\alpha D_\alpha)^2 = \square\Pi_{1/2}, \quad (3.14)$$

$$\Pi_{1/2}\Pi_0 = 0, \quad \Pi_0\bar{D}^\alpha D_\alpha = 0, \quad \Pi_{1/2}\bar{D}^\alpha D_\alpha = \bar{D}^\alpha D_\alpha. \quad (3.15)$$

Essas propriedades podem ser utilizadas para deduzir as identidades (3.2-3.4). Além disso, podemos utiliza-las para extrair os propagadores de S_q . Assim, no espaço dos momenta, obtemos

$$\langle V(1)V(2) \rangle = [X(p^2)\bar{D}^\alpha D_\alpha + Y(p^2)\Pi_{1/2} - \frac{\alpha}{p^2}\Pi_0]_1 \delta_{12}, \quad (3.16)$$

$$\langle \bar{\phi}(1)\phi(2) \rangle = \left(\frac{1}{K_{\bar{\Phi}\phi}p^2} \right)_1 \delta_{12}, \quad (3.17)$$

onde

$$X(p^2) = \frac{f(-p^2)}{p^2[p^2 h^2(-p^2) + f^2(-p^2)]} \quad \text{and} \quad Y(p^2) = -\frac{h(-p^2)}{p^2 h^2(-p^2) + f^2(-p^2)}. \quad (3.18)$$

Ao contrário do que foi feito na seção 2.2, faremos os cálculos utilizando o propagador do supercampo de calibre sem fixar o parâmetro de calibre α .

Vamos começar o cálculo dos supergráficos em um laço que contribuem para o KEP. No nível de um laço, teremos dois tipos de contribuições. Na primeira, todos os supergráficos

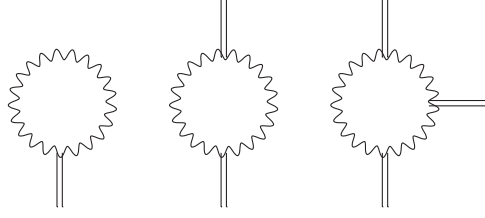


Figura 3.1 Supergráficos em um laço no setor de calibre.

envolvem somente propagadores do supercampo de calibre $\langle V(1)V(2) \rangle$ nas linhas internas conectando os vértices $(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi V^2$. Tais supergráficos exibem as estruturas dadas na Fig. 3.1.

Naturalmente, podemos calcular todas as contribuições notando que cada supergráfico acima é formado por n fragmentos como o da Fig. 3.2.

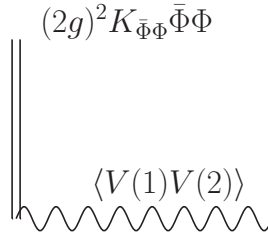


Figura 3.2 Um fragmento típico de supergráficos em um laço no setor de calibre.

A contribuição do fragmento da Fig. 3.2 é dada por

$$Q_{12} = [(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi]_1 (X\bar{D}^\alpha D_\alpha + Y\Pi_{1/2} - \frac{\alpha}{p^2} \Pi_0)_1 \delta_{12} . \quad (3.19)$$

Segue do resultado acima que a contribuição de um supergráfico formado por n fragmentos é dada por

$$\begin{aligned} I_n &= \int d^3x \frac{1}{2n} \int d^4\theta_1 d^4\theta_2 \dots d^4\theta_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} Q_{12} Q_{23} \dots Q_{n-1,n} Q_{n,1} \\ &= \int d^3x \frac{1}{2n} \int d^4\theta_1 d^4\theta_2 \dots d^4\theta_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi]_1 (X\bar{D}^\alpha D_\alpha + Y\Pi_{1/2} \\ &\quad - \frac{\alpha}{p^2} \Pi_0)_1 \delta_{12} [(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi]_2 (X\bar{D}^\alpha D_\alpha + Y\Pi_{1/2} - \frac{\alpha}{p^2} \Pi_0)_2 \delta_{23} \dots \\ &\quad \times [(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi]_n (X\bar{D}^\alpha D_\alpha + Y\Pi_{1/2} - \frac{\alpha}{p^2} \Pi_0)_n \delta_{n,1} . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Depois de uma integração por partes da expressão I_n e de descartar os termos envolvendo derivadas covariantes de $\bar{\Phi}$ e Φ , obtemos

$$I_n = \int d^3x d^4\theta \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2n} [(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi]^n (X\bar{D}^\alpha D_\alpha + Y\Pi_{1/2} - \frac{\alpha}{p^2} \Pi_0)^n \delta_{\theta\theta'} |_{\theta=\theta'} . \quad (3.21)$$

Somando todos os supergráficos I_n , temos

$$\Gamma_1^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} I_n = \int d^3x d^4\theta \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} [(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi]^n [(X\bar{D}^\alpha D_\alpha + Y\Pi_{1/2})^n \delta_{\theta\theta'}]_{\theta=\theta'} - \frac{2}{p^2} \left(-\frac{\alpha}{p^2} \right)^n, \quad (3.22)$$

onde usamos (3.14), (3.15) e o fato que $\Pi_0 \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'} = -2/p^2$. Somando em n obtemos

$$\Gamma_1^{(1)} = \int d^3x d^4\theta \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ -\frac{1}{2} \ln \left[1 - (2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi (X\bar{D}^\alpha D_\alpha + Y\Pi_{1/2}) \right] \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'} + \frac{1}{p^2} \ln \left[1 + \frac{\alpha(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi}{p^2} \right] \right\}. \quad (3.23)$$

O primeiro logaritmo pode ser separando em duas partes, então

$$\Gamma_1^{(1)} = \int d^3x d^4\theta \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ -\frac{1}{2} \ln \left[1 - \frac{(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi X}{1 - (2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi Y} \bar{D}^\alpha D_\alpha \right] \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'} - \frac{1}{2} \ln \left[1 - (2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi Y \Pi_{1/2} \right] \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'} + \frac{1}{p^2} \ln \left[1 + \frac{\alpha(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi}{p^2} \right] \right\}. \quad (3.24)$$

Finalmente, expandimos em séries de Taylor os primeiros dois logaritmos e utilizamos (3.2-3.4), (3.14-3.15) e $\Pi_{1/2} \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'} = 2/p^2$ para obter

$$\Gamma_1^{(1)} = \int d^3x d^4\theta \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2} \left\{ -\frac{1}{2} \ln \left[1 + p^2 \left(\frac{(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi X}{1 - (2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi Y} \right)^2 \right] - \ln \left[1 - (2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi Y \right] + \ln \left[1 + \frac{\alpha(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi}{p^2} \right] \right\}. \quad (3.25)$$

Vamos passar agora para o cálculo do segundo tipo de supergráficos em um laço, os quais envolvem os propagadores do supercampo de matéria e de calibre nas linhas internas conectando os vértices $(2g)K_{\bar{\Phi}\Phi} \Phi\bar{\Phi}V$ e $(2g)K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}V\Phi$. Tais supergráficos exibem a estrutura mostrada na Fig. 3.3.

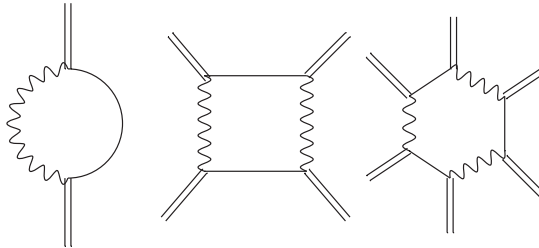


Figura 3.3 Supergráficos em um laço em um setor misto.

É importante chamarmos a atenção para o fato que podemos inserir um número arbitrário de vértices $(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi V^2$ nos propagadores de calibre. Portanto, deveríamos primeiramente

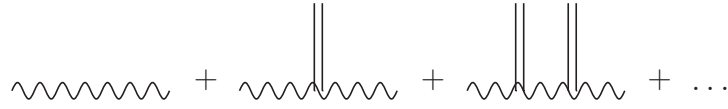


Figura 3.4 Propagador completo.

introduzir o propagador completo. Neste propagador, a soma por todos os vértices $(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} V^2$ é realizada (confira Fig. 3.4). Como um resultado, este propagador completo é igual à

$$\begin{aligned} \langle V(1)V(2) \rangle_D &= \langle V(1)V(2) \rangle + \int d^4\theta_3 \langle V(1)V(3) \rangle [(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi]_3 \langle V(3)V(2) \rangle \\ &+ \int d^4\theta_3 d^4\theta_4 \langle V(1)V(3) \rangle [(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi]_3 \langle V(3)V(4) \rangle [(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi]_4 \\ &\times \langle V(4)V(2) \rangle + \dots \end{aligned} \quad (3.26)$$

Usando (3.16) e integrando por partes, chegamos em

$$\langle V(1)V(2) \rangle_D = \sum_{n=0}^{\infty} [(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi]_1^n [(X\bar{D}^\alpha D_\alpha + Y\Pi_{1/2})^{n+1} + \left(-\frac{\alpha}{p^2}\right)^{n+1} \Pi_0]_1 \delta_{12}. \quad (3.27)$$

Como antes, podemos calcular todas as contribuições notando que cada supergráfico acima (Fig. 3.3) é formado por n fragmentos, como os que estão exibidos na Fig. 3.5 e Fig. 3.6. Visto que ambos fragmentos, Figs. 3.5 e 3.6, fornecem a mesma contribuição, só precisamos calcular o fragmento da Fig. 3.5. Este fragmento gera a contribuição $(\Pi_- \equiv -\bar{D}^2 D^2 / p^2)$

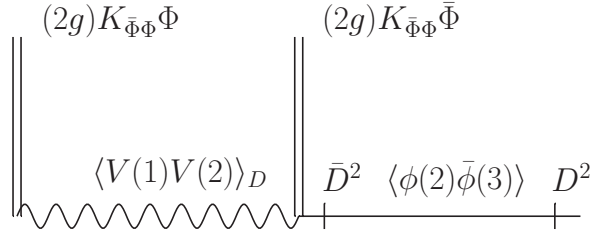
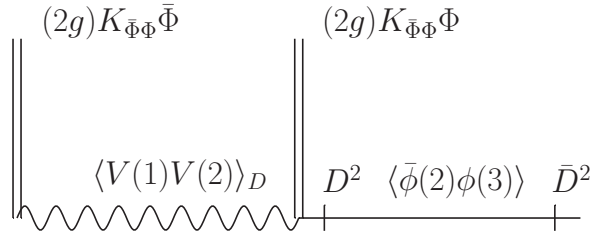
$$\begin{aligned} R_{13} &= \int d^4\theta_2 [(2g) K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}]_1 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi]_1^n [(X\bar{D}^\alpha D_\alpha + Y\Pi_{1/2})^{n+1} \right. \\ &+ \left. \left(-\frac{\alpha}{p^2}\right)^{n+1} \Pi_0]_1 \delta_{12} \right\} [(2g) K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}]_2 \left[-\left(\frac{\Pi_-}{K_{\bar{\Phi}\Phi}}\right)_2 \delta_{23} \right] \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} [(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi]_1^{n+1} \left(-\frac{\alpha}{p^2}\right)^{n+1} (\Pi_-)_1 \delta_{13}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Somando este resultado, chegamos em

$$R_{13} = \left(\frac{(2g)^2 \alpha K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi}{p^2 + (2g)^2 \alpha K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi} \Pi_- \right)_1 \delta_{13}. \quad (3.29)$$

Segue do resultado acima que a contribuição de um supergráfico formado por n fragmentos é dada por

$$\begin{aligned} J_n &= \int d^3x \frac{1}{2n} \int d^4\theta_1 d^4\theta_3 \dots d^4\theta_{2n-1} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} R_{13} R_{35} \dots R_{2n-3,2n-1} R_{2n-1,1} \\ &= \int d^3x \frac{1}{2n} \int d^4\theta_1 d^4\theta_3 d^4\theta_5 \dots d^4\theta_{2n-1} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\left(\frac{(2g)^2 \alpha K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi}{p^2 + (2g)^2 \alpha K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi} \Pi_- \right)_1 \delta_{13} \right] \\ &\times \left[\left(\frac{(2g)^2 \alpha K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi}{p^2 + (2g)^2 \alpha K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi} \Pi_- \right)_3 \delta_{35} \right] \dots \left[\left(\frac{(2g)^2 \alpha K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi}{p^2 + (2g)^2 \alpha K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi} \Pi_- \right)_{2n-1} \delta_{2n-1,1} \right] \\ &= \int d^3x d^4\theta \frac{1}{2n} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{(2g)^2 \alpha K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi}{p^2 + (2g)^2 \alpha K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi} \right)^n \Pi_- \delta_{\theta\theta'} |_{\theta=\theta'}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

**Figura 3.5** Um fragmento típico de supergráficos em um laço no setor misto.**Figura 3.6** Um fragmento típico de supergráficos em um laço no setor misto.

Usando $\Pi_- \delta_{\theta\theta'}|_{\theta=\theta'} = -1/p^2$, obtemos a ação efetiva

$$\Gamma_2^{(1)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_n = - \int d^3x d^4\theta \frac{1}{p^2} \ln \left[1 + \frac{\alpha(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi}{p^2} \right]. \quad (3.31)$$

Vale apenas destacar que a contribuição (3.31) cancela a dependência de (3.25) do parâmetro de calibre α . Somando (3.25) com (3.31), obtemos a ação efetiva em um laço total

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}[\bar{\Phi}, \Phi] &= \int d^3x d^4\theta \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2} \left\{ -\frac{1}{2} \ln \left[1 + p^2 \left(\frac{(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi X}{1 - (2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi Y} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \ln \left[1 - (2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi Y \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Finalmente, chegamos no seguinte resultado para o KEP (como foi feito anteriormente, a correspondente ação efetiva pode ser restaurada da relação $\Gamma^{(1)} = \int d^3x d^4\theta K^{(1)}$):

$$\begin{aligned} K^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2} \left\{ -\frac{1}{2} \ln \left[1 + p^2 \left(\frac{(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi X}{1 - (2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi Y} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \ln \left[1 - (2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi Y \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde, X e Y são dados por (3.18). Além disso, notamos que (3.33) é independente do parâmetro de calibre para qualquer escolha de $K(\bar{\Phi}e^{2gV}\Phi)$, $f(-p^2)$ e $h(-p^2)$.

Para podermos resolver explicitamente a integral acima, temos que especificar os operadores $f(\square)$ e $h(\square)$ em (3.18) e (3.33). Então, vamos considerar dois exemplos.

Como nosso primeiro exemplo, vamos tomar $f(\square) = \xi_f (-\square)^n$ e $h(\square) = 0$ em (3.18), onde ξ_f é um parâmetro com dimensão de massa $[\xi_f] = [M]^{-2n+1}$, $\xi_f > 0$ e n é um inteiro não

negativo. Esta escolha corresponde a uma teoria de Chern-Simons com altas derivadas (confira (3.1)). Então, segue de (3.33) que

$$K_{HCS}^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2} \ln \left[1 + \frac{1}{(p^2)^{2n+1}} \left(\frac{(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi}{\xi_f} \right)^2 \right], \quad (3.34)$$

cuja solução é dada por

$$K_{HCS}^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) = -\frac{1}{4\pi} \csc \left[\frac{\pi}{2(2n+1)} \right] \left(\frac{(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi}{\xi_f} \right)^{\frac{1}{2n+1}}. \quad (3.35)$$

O segundo exemplo é $f(\square) = 0$ e $h(\square) = \xi_h(-\square)^n$ em (3.18), onde $[\xi_h] = [M]^{-2n}$, $\xi_h > 0$. Esta escolha corresponde à uma teoria de Maxwell com altas derivadas. Logo, segue de (3.33) que

$$K_{HQED}^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) = -\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2} \ln \left[1 + \frac{1}{(p^2)^{n+1}} \left(\frac{(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi}{\xi_h} \right) \right], \quad (3.36)$$

cuja solução é dada por

$$K_{HQED}^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) = -\frac{1}{2\pi} \csc \left[\frac{\pi}{2(n+1)} \right] \left(\frac{(2g)^2 K_{\bar{\Phi}\Phi} \bar{\Phi}\Phi}{\xi_h} \right)^{\frac{1}{2(n+1)}}. \quad (3.37)$$

Notamos que as correções em um laço para os KEPs, a saber (3.35,3.37), são finitas e não necessitam de renormalização. Além disso, esses resultados são universais, válidos para qualquer forma do potencial $K(\bar{\Phi}e^{2gV}\Phi)$. Também nota-se que a estrutura funcional de (3.35) e (3.37) não envolve qualquer dependência do tipo logarítmica, tal dependência é geralmente encontrada em teorias quadridimensionais. Finalmente, na seção 2.2 e em [46] foi mostrado que o KEP em um laço é nulo para a $\mathcal{N} = 1$, $d = 3$ QED acoplada a matéria não interagente; notamos de (3.37) que este não é o caso para a $\mathcal{N} = 2$, $d = 3$ QED acoplada a matéria não interagente.

3.2 TEORIA DE SUPERCAMPO QUIRAL COM $\mathcal{N} = 1$ EM $d = 4$ E ALTAS DERIVADAS

No capítulo 2, foi calculada a ação efetiva para uma teoria de calibre com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$ e altas derivadas genérica, mas sem altas derivadas no setor de matéria. Depois, continuamos nossos estudos com o cálculo da ação efetiva para teoria de supercampo escalar com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$ e altas derivadas genérica. Neste capítulo, de maneira similar, foi calculada a ação efetiva para uma teoria de calibre com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$ e altas derivadas genérica, também sem altas derivadas no setor de matéria. Agora, vamos passar para o cálculo da ação efetiva para teoria de supercampo quiral com altas derivadas. Todavia, vamos considerar modelos no superespaço com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 4$, ao invés de sua redução para o superespaço com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$.

Nesta seção, vamos calcular explicitamente o potencial efetivo em um laço para uma teoria de supercampo quiral com altas derivadas em quatro dimensões com um termo cinético não

convencional. Será considerado os casos de lagrangianas gerais mínimas e não mínimas. Em particular, encontramos que no caso mínimo a parte divergente do potencial efetivo se anula por razão da quiralidade. Esta seção é baseada no trabalho publicado [44].

3.2.1 Lagrangiana Geral Mínima

Nos trabalhos [68] uma teoria com altas derivadas e com termo cinético convencional (termo em que as altas derivadas entram na langrangiana geral na forma $\int d^8z \Phi \square \bar{\Phi}$) foi estudada. Em tais trabalhos, a ação efetiva foi considerada e sua super-renormalizabilidade (e, em certos casos, finitude) foi mostrada. Nesta seção, vamos estudar uma teoria de supercampo $4D$ com altas derivadas, onde as altas derivadas são implementadas em uma maneira não-convencional, que é, na lagrangiana quiral:

$$S = \int d^8z K(\Phi, \bar{\Phi}) + [\int d^6z (-\frac{a}{2} \Phi \square \Phi + W(\Phi)) + h.c.]. \quad (3.38)$$

Aqui a é uma constante com dimensão de massa negativa (-1). O potencial de Kähler é dado por $K(\Phi, \bar{\Phi}) = \Phi \bar{\Phi}$ e o potencial quiral é dado por $W(\Phi) = \frac{1}{2} m \Phi^2 + \frac{\lambda}{3!} \Phi^3$. Destacamos que os aspectos fenomenológicos de tal teoria foram estudados no nível de árvore em [69].

Antes de realizar qualquer cálculo quântico, quando possível, é conveniente determinar o grau de divergência superficial ω para o modelo (3.38). Primeiro, temos que calcular os propagadores da teoria (3.38). Eles são dados por

$$\langle \bar{\Phi}(1) \Phi(2) \rangle = \frac{1}{p^2 + (m + ap^2)^2} \delta_{12}, \quad (3.39)$$

$$\langle \Phi(1) \Phi(2) \rangle = -\frac{(m + ap^2) D_1^2}{p^2 [p^2 + (m + ap^2)^2]} \delta_{12}, \quad (3.40)$$

$$\langle \bar{\Phi}(1) \bar{\Phi}(2) \rangle = -\frac{(m + ap^2) \bar{D}_1^2}{p^2 [p^2 + (m + ap^2)^2]} \delta_{12}, \quad (3.41)$$

onde $m = W''(\Phi)|_{\Phi=0}$. Segundo, temos que determinar o número de derivadas covariantes espinoriais em cada um dos supergráficos da teoria. No nosso caso, o número de derivadas é o mesmo que o do modelo de Wess-Zumino usual, a saber $4V - 2E + 2C - 4L$, onde V , E , P , C e L denotam o número de vértices, linhas externas, $\langle \bar{\Phi}(1) \Phi(2) \rangle$ -propagadores, propagadores quirais e laços, respectivamente.

Finalmente, assumimos que todas as derivadas covariantes são convertidas em momenta via a D -álgebra. Então, segue que o grau de divergência superficial máximo é dado por

$$\begin{aligned} \omega_{max} &= 4L - 4P - 4C + \frac{1}{2}(4V - 2E + 2C - 4L) \\ &= 2 - 2P - C - E, \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde utilizamos a identidade topológica $L + V - P - C = 1$. Naturalmente, para qualquer contribuição de supergráfico não-trivial para a ação efetiva teremos $E \geq 2$ e P (ou C) sendo no

mínimo igual a 1. Portanto, a teoria (3.38) é finita, que é uma propriedade bastante natural em modelos com altas derivadas (confira [41]).

Agora, vamos começar o cálculo do potencial efetivo em um laço. Nesta seção, vamos considerar o caso mínimo, ou seja, $K(\Phi, \bar{\Phi}) = \Phi\bar{\Phi}$ e $W(\Phi)$ arbitrário. Então, pela regra $\Phi \rightarrow \Phi + \phi$, $\bar{\Phi} \rightarrow \bar{\Phi} + \bar{\phi}$, segue que a parte quadrática nos campos quânticos da ação (3.38) fica

$$S_2[\Phi, \bar{\Phi}; \phi, \bar{\phi}] = \int d^8z \phi \bar{\phi} + \left[\frac{1}{2} \int d^6z (-a\phi \square \phi + W''(\Phi)\phi^2) + h.c. \right], \quad (3.43)$$

onde $W'' = d^2W/d\Phi^2$.

De modo diferente ao que tem sido feito até o momento, não iremos utilizar a metodologia dos supergráficos de Feynman para calcular a ação efetiva. Faremos o cálculo direto do traço funcional. Para isso, é conveniente escrever os supercampos quirais e antiquirais quânticos em termos de supercampos irrestritos, a saber $\phi = \bar{D}^2\psi$ e $\bar{\phi} = D^2\bar{\psi}$ [70]. Depois de substituir tais expressões em (3.43) se chegará em uma ação invariante sob as transformações de calibre $\delta\psi = \bar{D}^{\dot{\alpha}}\bar{\omega}_{\dot{\alpha}}$ e $\delta\bar{\psi} = D^{\alpha}\omega_{\alpha}$. Portanto, para fixar o calibre, adicionaremos a seguinte ação de fixação de calibre [10]

$$S_{GF} = \int d^8z \bar{\psi} (\bar{D}^2 D^2 - D^{\alpha} \bar{D}^2 D_{\alpha}) \psi. \quad (3.44)$$

Os fantasmas associados à esta teoria não se acoplam. Assim, podemos reescrever (3.43) como

$$S_2[\Phi, \bar{\Phi}; \psi, \bar{\psi}] = \frac{1}{2} \int d^8z \{ \bar{\psi} \square \psi + h.c. \} + \frac{1}{2} \int d^8z \{ \psi (W'' - a\square) \bar{D}^2 \psi + h.c. \}. \quad (3.45)$$

A eq. (3.45) pode ser colocada na forma matricial

$$S_2[\Phi, \bar{\Phi}; \psi, \bar{\psi}] = \frac{1}{2} \int d^8z \begin{pmatrix} \psi & \bar{\psi} \end{pmatrix} \hat{O} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

onde

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} (W'' - a\square)\bar{D}^2 & \square \\ \square & (\bar{W}'' - a\square)D^2 \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Portanto, na aproximação de um laço, a ação efetiva correspondente a teoria (3.38) é

$$\exp\left(\Gamma^{(1)}[\Phi, \bar{\Phi}]\right) = \int D\psi D\bar{\psi} \exp\left[\frac{1}{2} \int d^8z \begin{pmatrix} \psi & \bar{\psi} \end{pmatrix} \hat{O} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}\right]. \quad (3.48)$$

Então, as integrais gaussianas acima podem ser calculadas

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}[\Phi, \bar{\Phi}] &= -\frac{1}{2} \ln \text{Det } \hat{O} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{O} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4\theta' d^4\theta \delta^4(\theta' - \theta) \text{Tr} \ln \hat{O}(x, \theta) \delta^4(\theta - \theta'), \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde Tr é o traço matricial e funcional. De (3.47) e (3.49), podemos escrever

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln O(x, \theta) = & \text{Tr} \ln \begin{pmatrix} 0 & \square \\ \square & 0 \end{pmatrix} + \text{Tr} \ln \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{pmatrix} 0 & \frac{(\bar{W}'' - a\square) D^2}{\square} \\ \frac{(W'' - a\square) \bar{D}^2}{\square} & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Pode-se eliminar o primeiro traço acima por meio da normalização da ação efetiva, visto que ele não depende de supercampos de fundo, enquanto que o logaritmo do segundo traço pode ser expandido em séries de Taylor. Por causa do traço matricial, somente termos de grau par da expansão do logaritmo gerarão contribuição não nula. Portanto, obtemos de (3.50)

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln O(x, \theta) = & \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{(\bar{W}'' - a\square)(W'' - a\square) D^2 \bar{D}^2}{\square^2} & 0 \\ 0 & \frac{(W'' - a\square)(\bar{W}'' - a\square) \bar{D}^2 D^2}{\square^2} \end{pmatrix} \right\} \\ = & \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[1 - \frac{(\bar{W}'' - a\square)(W'' - a\square) D^2 \bar{D}^2}{\square^2} - \frac{(W'' - a\square)(\bar{W}'' - a\square) \bar{D}^2 D^2}{\square^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde foi calculado o traço matricial. Inserindo o resultado acima em (3.49), o potencial efetivo Kähleriano pode ser escrito como

$$K^{(1)}(\Phi, \bar{\Phi}) = -\frac{1}{4} \int d^4 \theta' \delta^4(\theta' - \theta) \text{Tr} \ln \left(1 - \frac{(\bar{W}'' - a\square)(W'' - a\square)}{\square} \Pi_0 \right) \delta^4(\theta - \theta'), \quad (3.52)$$

onde $\Pi_0 = \frac{\{D^2, \bar{D}^2\}}{\square}$ é um operador de projeção [10]. Visto que $\Pi_0^n = \Pi_0$ e $\delta^4(\theta' - \theta) \Pi_0 \delta^4(\theta - \theta') = 2 \frac{\delta^4(\theta - \theta')}{\square}$, então segue que

$$K^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} \ln \left[1 + \frac{(ap^2 + W'')(ap^2 + \bar{W}'')}{p^2} \right]. \quad (3.53)$$

É claro que quando $a = 0$, restauramos a bem conhecida expressão

$$K^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} \ln \left(1 + \frac{\bar{W}'' W''}{p^2} \right), \quad (3.54)$$

que foi explicitamente encontrada em [26], onde foi mostrado que depois da subtração das divergências UV, obtêm-se

$$K^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) = -\frac{1}{32\pi^2} \bar{W}'' W'' \ln \frac{\bar{W}'' W''}{\mu^2}. \quad (3.55)$$

Agora, o que nos falta é resolver a integral (3.53). Esta tarefa pode ser realizada se separarmos o logaritmo em três partes,

$$K^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} \left[\ln(p^2 + \Omega_+) + \ln(p^2 + \Omega_-) - \ln(p^2) \right], \quad (3.56)$$

onde

$$\Omega_{\pm} = \frac{1 + a(\bar{W}'' + W'') \pm \sqrt{[1 + a(\bar{W}'' + W'')]^2 - 4a^2\bar{W}''W''}}{2a^2}. \quad (3.57)$$

O último logaritmo não depende dos supercampos de fundo, então podemos eliminá-lo da expressão acima. As integrais (3.56) são bem conhecidas e podem ser calculadas utilizando a prescrição da regularização dimensional. Portanto, podemos regularizar esta integral pela substituição formal de $d^4 p$ por $\mu^{4-2\omega} d^{2\omega} p$, então, temos

$$K^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) = -\frac{1}{2}\mu^{4-2\omega} \int \frac{d^{2\omega} p}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{p^2} \left[\ln(p^2 + \Omega_+) + \ln(p^2 + \Omega_-) \right]. \quad (3.58)$$

No limite $\omega \rightarrow 2$ encontramos

$$K^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) = \frac{1}{32\pi^2(2-\omega)}(\Omega_+ + \Omega_-) - \frac{1}{32\pi^2} \left[\Omega_+ \ln\left(\frac{\Omega_+}{\mu^2}\right) + \Omega_- \ln\left(\frac{\Omega_-}{\mu^2}\right) \right], \quad (3.59)$$

onde constantes adimensionais foram removidas por meio de uma redefinição do parâmetro μ^2 .

Embora o primeiro termo seja divergente, notamos de (3.57) que $(\Omega_+ + \Omega_-) = \frac{1+a(\bar{W}''+W'')}{a^2}$. Devido ao fato da contribuição para a ação efetiva ser obtida da integração do potencial Kähleriano por todo o $d^8 z$, encontramos que o termo divergente é aniquilado pela integração de Grassmann. Portanto, o resultado final é finito e igual à

$$\begin{aligned} K^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) &= -\frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{1 + a(\bar{W}'' + W'') + \sqrt{[1 + a(\bar{W}'' + W'')]^2 - 4a^2\bar{W}''W''}}{2a^2} \right. \\ &\times \ln\left(\frac{1 + a(\bar{W}'' + W'') + \sqrt{[1 + a(\bar{W}'' + W'')]^2 - 4a^2\bar{W}''W''}}{2\mu^2 a^2}\right) \\ &+ \frac{1 + a(\bar{W}'' + W'') - \sqrt{[1 + a(\bar{W}'' + W'')]^2 - 4a^2\bar{W}''W''}}{2a^2} \\ &\left. \times \ln\left(\frac{1 + a(\bar{W}'' + W'') - \sqrt{[1 + a(\bar{W}'' + W'')]^2 - 4a^2\bar{W}''W''}}{2\mu^2 a^2}\right) \right]. \quad (3.60) \end{aligned}$$

Logo, o potencial efetivo de Kähler em um laço é finito para o modelo (3.38), onde $K(\bar{\Phi}, \Phi) = \bar{\Phi}\Phi$ e $W(\Phi)$ arbitrário.

3.2.2 Lagrangiana Geral Não Mínima

Vamos considerar agora o caso mais genérico, que é, a lagrangiana geral arbitrária $K(\bar{\Phi}, \Phi)$ (nos referiremos à este caso como caso não mínimo):

$$S = \int d^8 z K(\bar{\Phi}, \Phi) + \left[\int d^6 z \left(-\frac{a}{2} \Phi \square \Phi + W(\Phi) \right) + h.c. \right]. \quad (3.61)$$

Repetindo os cálculos da seção anterior, encontramos que operador \hat{O} , que é obtido dos termos quadráticos nas flutuações quânticas, é dado por:

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} (W'' - a\square)\bar{D}^2 & K_{\Phi\bar{\Phi}}\bar{D}^2 D^2 + D^2 \bar{D}^2 - D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha \\ K_{\Phi\bar{\Phi}} D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2 - D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha & (\bar{W}'' - a\square)D^2 \end{pmatrix}.$$

Agora, vamos calcular o traço do operador $\ln O(x, \theta)$. Podemos separá-lo em

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln O(x, \theta) = & \\ & \text{Tr} \ln \begin{pmatrix} 0 & K_{\Phi\bar{\Phi}} \bar{D}^2 D^2 + D^2 \bar{D}^2 - D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha \\ K_{\Phi\bar{\Phi}} D^2 \bar{D}^2 + \bar{D}^2 D^2 - D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha & 0 \end{pmatrix} \\ & + \text{Tr} \ln \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{(\bar{W}'' - a\Box)}{K_{\Phi\bar{\Phi}}\Box} D^2 \\ \frac{(W'' - a\Box)}{K_{\Phi\bar{\Phi}}\Box} \bar{D}^2 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

No lado direito da eq. acima, temos dois traços funcionais. O segundo traço pode ser calculado utilizando o mesmo raciocínio que foi aplicado anteriormente para a obtenção de (3.53). Já o primeiro pode ser reescrito em uma forma mais conveniente por meio do uso da identidade $\{D^2, \bar{D}^2\} - D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha = \Box$. Logo,

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln \begin{pmatrix} 0 & (K_{\Phi\bar{\Phi}} - 1) \bar{D}^2 D^2 + \Box \\ (K_{\Phi\bar{\Phi}} - 1) D^2 \bar{D}^2 + \Box & 0 \end{pmatrix} = \text{Tr} \ln \begin{pmatrix} 0 & \Box \\ \Box & 0 \end{pmatrix} \\ + \text{Tr} \ln \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{(K_{\Phi\bar{\Phi}} - 1)}{\Box} D^2 \bar{D}^2 & 0 \\ 0 & \frac{(K_{\Phi\bar{\Phi}} - 1)}{\Box} \bar{D}^2 D^2 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Neste formato, podemos aplicar o mesmo raciocínio que foi utilizado anteriormente para calcular o traço acima.

Em suma, depois de algum trabalho algébrico, o potencial efetivo de Kähler em um laço para o modelo (3.61) é dado por

$$K^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} \ln(K_{\Phi\bar{\Phi}}) - \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} \ln \left[1 + \frac{(ap^2 + \bar{W}'')(ap^2 + W'')}{K_{\Phi\bar{\Phi}}^2 p^2} \right]. \quad (3.64)$$

O primeiro termo nesta expressão é nulo se considerarmos o esquema de regularização dimensional. O segundo termo pode ser simplificado pelo uso da identidade

$$1 + \frac{(\tilde{a}p^2 + \tilde{W}'')(\tilde{a}p^2 + \tilde{W}'')}{p^2} = \frac{(p^2 + \Omega_+)(p^2 + \Omega_-)}{p^2} \tilde{a}^2, \quad (3.65)$$

onde denotamos $\tilde{Q} \equiv \frac{Q}{K_{\Phi\bar{\Phi}}}$ (com $Q = W''$ ou $Q = \bar{W}''$ ou $Q = a$), e

$$\Omega_{\pm} = \frac{1 + \tilde{a}(\tilde{W}'' + \tilde{W}'') \pm \sqrt{[1 + \tilde{a}(\tilde{W}'' + \tilde{W}'')]^2 - 4\tilde{a}^2 \tilde{W}'' \tilde{W}''}}{2\tilde{a}^2}. \quad (3.66)$$

Assim, podemos reescrever (3.64) como

$$K^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) = - \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} \left[\ln(p^2 + \Omega_+) + \ln(p^2 + \Omega_-) - \ln(p^2) \right]. \quad (3.67)$$

Como antes, o último termo nesta expressão pode ser eliminado por ser independente dos supercampos de fundo. As outras integrais podem ser calculadas pelo uso da regularização dimensional, que novamente consiste na mudança $d^4 p \rightarrow \mu^{4-2\omega} d^{2\omega} p$. Então, temos para $\omega \rightarrow 2$

$$K^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) = \frac{1}{32\pi^2(2-\omega)}(\Omega_+ + \Omega_-) - \frac{1}{32\pi^2} \left[\Omega_+ \ln \left(\frac{\Omega_+}{\mu^2} \right) + \Omega_- \ln \left(\frac{\Omega_-}{\mu^2} \right) \right], \quad (3.68)$$

Finalmente, fazendo as substituições apropriadas, encontramos

$$\begin{aligned} K^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) &= \frac{K_{\bar{\Phi}\Phi}^2}{32\pi^2 a^2 (2-\omega)} + \frac{(\bar{W}'' + W'')}{32\pi^2 a (2-\omega)} \\ &- \frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{K_{\bar{\Phi}\Phi}^2 + a(\bar{W}'' + W'') + \sqrt{[K_{\bar{\Phi}\Phi}^2 + a(\bar{W}'' + W'')]^2 - 4a^2 \bar{W}'' W''}}{2a^2} \right. \\ &\times \ln \left(\frac{K_{\bar{\Phi}\Phi}^2 + a(\bar{W}'' + W'') + \sqrt{[K_{\bar{\Phi}\Phi}^2 + a(\bar{W}'' + W'')]^2 - 4a^2 \bar{W}'' W''}}{2\mu^2 a^2} \right) \\ &+ \frac{K_{\bar{\Phi}\Phi}^2 + a(\bar{W}'' + W'') - \sqrt{[K_{\bar{\Phi}\Phi}^2 + a(\bar{W}'' + W'')]^2 - 4a^2 \bar{W}'' W''}}{2a^2} \\ &\left. \times \ln \left(\frac{K_{\bar{\Phi}\Phi}^2 + a(\bar{W}'' + W'') - \sqrt{[K_{\bar{\Phi}\Phi}^2 + a(\bar{W}'' + W'')]^2 - 4a^2 \bar{W}'' W''}}{2\mu^2 a^2} \right) \right] \quad (3.69) \end{aligned}$$

Este resultado é explicitamente divergente. Todavia, novamente se nota que para obter a contribuição para a ação efetiva, devemos integrar o potencial efetivo de Kähler em $d^8 z$. Assim, o segundo termo divergente é aniquilado via integração nas coordenadas de Grassmann, enquanto que o primeiro no caso mínimo $K(\bar{\Phi}, \Phi) = \bar{\Phi}\Phi$ reduz-se a uma constante independente de supercampos cuja integral por todo superespaço é nula. Ao mesmo tempo, não há nenhum outro caso em que as divergências zerem. Portanto, somente modelos mínimos com $K(\bar{\Phi}, \Phi) = \bar{\Phi}\Phi$ geram o potencial efetivo de Kähler em um laço finito.

É esperado que no limite $a \rightarrow 0$, onde o termo de altas derivadas na ação desaparece, se obtenha o potencial efetivo para o modelo de Wess-Zumino. Logo, vamos verificar que este é o caso. Tomando o limite $a \rightarrow 0$ em (3.69), encontramos que

$$\begin{aligned} K^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) &= -\frac{1}{32\pi^2} \left\{ \frac{1}{a^2} \left[-\frac{K_{\bar{\Phi}\Phi}^2}{(2-\omega)} + K_{\bar{\Phi}\Phi}^2 \ln \left(\frac{K_{\bar{\Phi}\Phi}^2}{\mu^2 a^2} \right) \right] + \frac{1}{a} \left[W'' \ln \left(\frac{e K_{\bar{\Phi}\Phi}^2}{\mu^2 a^2} \right) \right. \right. \\ &+ \bar{W}'' \ln \left(\frac{e K_{\bar{\Phi}\Phi}^2}{\mu^2 a^2} \right) \left. \right] + \frac{1}{2K_{\bar{\Phi}\Phi}^2} (\bar{W}''^2 + W''^2) - \frac{\bar{W}'' W''}{K_{\bar{\Phi}\Phi}^2} \ln \left(\frac{K_{\bar{\Phi}\Phi}^2}{\mu^2 a^2} \right) \\ &\left. + \frac{\bar{W}'' W''}{K_{\bar{\Phi}\Phi}^2} \ln \left(\frac{\bar{W}'' W''}{\mu^2 K_{\bar{\Phi}\Phi}^2} \right) + O(a) \right\}. \quad (3.70) \end{aligned}$$

Para o caso usual, quando $K(\bar{\Phi}, \Phi) = \bar{\Phi}\Phi$ e $W(\Phi) = \frac{m}{2}\Phi^2 + \frac{\lambda}{3!}\Phi^3$, os únicos termos que sobrevivem no limite $a \rightarrow 0$ (quando as altas derivadas são "desligadas") são

$$K^{(1)}(\bar{\Phi}, \Phi) = -\frac{1}{32\pi^2} \bar{\Psi}\Psi \ln(a^2 \bar{\Psi}\Psi), \quad (3.71)$$

onde $\Psi \equiv m + \lambda\Phi$, que é, o potencial efetivo em um laço para o modelo de Wess-Zumino[26]. Logo, como esperado, o modelo de Wess-Zumino pode ser tratado como um limite de nossa teoria com altas derivadas.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta tese, tratamos da construção de quatro tipos de teorias supersimétricas com altas derivadas de uma maneira consistente: teoria de calibre com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$ e altas derivadas genérica, teoria de supercampo escalar com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$ e altas derivadas genérica, teoria de calibre com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$ e altas derivadas genérica, e teoria de supercampo quiral com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 4$ e altas derivadas. Além disso, nos ocupamos com o cálculo das contribuições Kählerianas para o potencial efetivo de supercampo no nível de um laço. Lembrando que o potencial efetivo Kähleriano é o termo de mais baixa ordem da expansão de derivadas covariantes da ação efetiva de supercampos.

Na primeiro capítulo da tese fizemos uma breve revisão de alguns aspectos clássicos e quânticos da teoria de supercampos em três e quatro dimensões. Na primeira parte, onde foi revisado os aspectos clássicos, definimos o superespaço como uma extensão do espaço-tempo de Minkowski com coordenadas adicionais de Grassmann que se transformam como espinores. A partir disso, definimos funções analíticas no superespaço que carregam índices dos grupos de simetria, tais funções são conhecidas como supercampos. Com este formalismo à nossa disposição, construímos versões no superespaço dos modelos supersimétricos mais conhecidos. Na segunda parte, revisamos os aspectos quânticos. Definimos a diferenciação funcional de um funcional de um supercampo, vimos que ela se assemelha à definição encontrada na TQC. Depois disso, exibimos o formalismo geral necessário para à quantização de modelos definidos no superespaço. Em seguida, providos com o formalismo geral básico, obtivemos as regras de Feynman para a ação efetiva dos modelos supersimétricos mais conhecidos. Finalizamos o capítulo com a redução dimensional do superespaço com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 4$ para o superespaço com $\mathcal{N} = 2$ em $d = 3$. Neste capítulo, vimos que no formalismo de supercampos a SUSY é manifesta em todos os passos do cálculo, o que facilita a construção de modelos supersimétricos. Vimos também que as versões no superespaço de tais modelos além de serem mais compactos, possuem menos índices.

Começamos a apresentar nossa contribuição original para a área de pesquisa a partir do capítulo 2 da tese. No início do capítulo 2, apresentamos a expansão em laços e definimos o principal objeto de interesse desta tese: a ação efetiva de baixas energias e, em particular, o potencial efetivo de Kähler. Baseado no artigo [46], discutimos e construímos uma teoria de calibre com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$ supersimétrica com altas derivadas genérica consistente com a

invariância de calibre. Logo após, restringimos nossos estudos, por simplicidade, somente ao caso do modelo supersimétrico com altas derivadas abeliano e acoplado com a matéria escalar sem altas derivadas. Em seguida, calculamos explicitamente o potencial efetivo de Kähler no nível de um laço para o modelo citado, considerando dois exemplos de operador com altas derivadas em que o resultado final pode ser expresso em uma forma fechada e em termos de funções elementares. Baseado no artigo [43], finalizamos o capítulo com a discussão e construção de uma teoria de supercampo escalar (real e complexo) com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$ supersimétrica com altas derivadas genérica, onde calculamos explicitamente o potencial efetivo de Kähler no nível de um laço considerando três exemplos de operador com altas derivadas. Nosso principal resultado neste capítulo foi mostrar que o potencial efetivo de Kähler em um laço, para todos os modelos considerados, é finito e sua estrutura funcional não envolve qualquer dependência do tipo logarítmica. Além disso, vimos que essa conclusão é válida para todo $V(\bar{\Phi}\Phi)$.

Continuamos com nossas contribuições originais no capítulo 3 da tese. Baseado no artigo [47], no início do capítulo 3, discutimos e construímos uma teoria de calibre tridimensional com supersimetria estendida com altas derivadas genérica. Em seguida, tal teoria foi acoplada com a matéria quiral, onde não se considerou auto acoplamentos envolvendo somente os supercampos Φ e $\bar{\Phi}$ e altas derivadas no setor de matéria. Logo após, calculamos explicitamente o potencial efetivo de Kähler no nível de um laço para o modelo citado sem fixar o parâmetro de calibre α . Nosso principal resultado nesta parte foi mostrar que o potencial efetivo de Kähler em um laço é finito, não depende do parâmetro de calibre α e sua estrutura funcional não envolve qualquer dependência do tipo logarítmica, para todo $K(\bar{\Phi}e^{2gV}\Phi)$. Baseado no artigo [44], finalizamos o capítulo 3 com o cálculo do potencial efetivo em um laço para uma teoria de supercampo quiral com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 4$ e altas derivadas e com um termo cinético não convencional, onde foi considerado os casos de lagrangianas gerais mínimas e não-mínimas. Nosso principal resultado nesta parte foi mostrar que o potencial efetivo de Kähler em um laço é finito somente que no caso mínimo, onde a parte divergente do potencial efetivo se anula por razão da quiralidade. Além disso, mostramos que tal potencial efetivo possui estrutura funcional do tipo logarítmica.

Como perspectivas futuras, seria a continuação natural do estudo feito aqui estudar a ação efetiva para teorias de calibre supersimétricas com altas derivadas no caso não-abeliano e sob a influência de um supercampo de calibre de fundo. Uma perspectiva mais audaciosa seria estudar teorias com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 3$ e com $\mathcal{N} = 1$ em $d = 4$ supersimétricas em superespaços não-comutativos ou não-anticomutativos. Pretendemos realizar estes estudos em futuros trabalhos.

Notações e Convenções

Nesta tese utilizamos as notações e convenções adotadas na referência [10].

Vamos primeiramente apresentar as convenções e notações para o espaço-tempo em três dimensões.

Parte da tese é baseada no espaço de Minkowski tridimensional, então escolhemos as matrizes gama γ^μ como sendo $(\gamma^\mu)^\alpha_\beta = (\sigma^2, i\sigma^1, i\sigma^3)$, onde as matrizes σ^i são as matrizes de Pauli usuais. As matrizes gama satisfazem uma álgebra de Clifford $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}$, com $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1)$.

Os índices espinoriais são levantados e abaixados com o uso da matriz $C_{\alpha\beta} = \sigma^2$, de modo que $C^{12} = -C_{12} = i$, e $\psi^\alpha = C^{\alpha\beta}\psi_\beta$, $\psi_\beta = \psi^\alpha C_{\alpha\beta}$, $\psi^2 \equiv \frac{1}{2}C_{\beta\alpha}\psi^\alpha\psi^\beta$. Logo, segue destas escolhas e de $(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} = C_{\gamma\alpha}(\gamma^\mu)^\gamma_\beta$ e $(\gamma_\mu)^{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}C^{\beta\lambda}(\gamma^\nu)^\alpha_\lambda$ que

$$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} = (-\hat{I}, -\sigma^3, \sigma^1), \quad (\gamma_\mu)^{\alpha\beta} = (-\hat{I}, -\sigma^3, \sigma^1). \quad (\text{A.1})$$

Portanto, a partir dessas equações obtemos as identidades úteis

$$(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\nu)^{\alpha\beta} = 2\delta^\mu_\nu, \quad (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma_\mu)^{\gamma\delta} = (\delta_\alpha^\gamma\delta_\beta^\delta + \delta_\alpha^\delta\delta_\beta^\gamma). \quad (\text{A.2})$$

Finalmente, podemos usar as matrizes gama para mapear as componentes de vetores tridimensionais em matrizes hermitianas simétricas 2×2 por meio das definições

$$\text{Para campos: } V^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_\mu)^{\alpha\beta}V^\mu, \quad V^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}V^{\alpha\beta}; \quad (\text{A.3})$$

$$\text{Para derivadas: } \partial_{\alpha\beta} = (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\partial_\mu, \quad \partial_\mu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu)^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}; \quad (\text{A.4})$$

$$\text{Para coordenadas: } x^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu)^{\alpha\beta}x^\mu, \quad x^\mu = (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}x^{\alpha\beta}. \quad (\text{A.5})$$

Vamos agora apresentar as convenções e notações para o espaço-tempo em quatro dimensões.

Outra parte da tese é baseada no espaço de Minkowski quadridimensional. As matrizes gama que escolhemos são

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)^\alpha_{\dot{\alpha}} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}}_\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

onde,

$$(\sigma^\mu)^\alpha_{\dot{\alpha}} = (-\sigma^2, i\sigma^3, -\hat{I}, -i\sigma^1), \quad (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}}_\alpha = (-\sigma^2, i\sigma^3, \hat{I}, -i\sigma^1), \quad (\text{A.7})$$

tais matrizes satisfazem as identidades abaixo

$$(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)^\alpha_\beta = -2\eta^{\mu\nu} \delta^\alpha_\beta, \quad (\text{A.8})$$

$$(\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} = -2\eta^{\mu\nu} \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}. \quad (\text{A.9})$$

De (A.6) e (A.8,A.9) segue que $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}$, com $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Os índices espinoriais são levantados e abaixados com o uso das matrizes

$$C_{\alpha\beta} = -C_{\beta\alpha} = -C^{\alpha\beta} = C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -C^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

de modo que $\psi^\alpha = C^{\alpha\beta} \psi_\beta$, $\psi_\beta = \psi^\alpha C_{\alpha\beta}$, etc. Os espinores tem a seguinte normalização: $\psi^2 = \frac{1}{2} C_{\beta\alpha} \psi^\alpha \psi^\beta$; $\bar{\psi}^2 = \frac{1}{2} C_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}}$.

Logo, segue destas escolhas e de $(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} = (\sigma^\mu)^\beta_{\dot{\alpha}} C_{\beta\alpha}$ e $(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} = \eta_{\mu\nu} C^{\alpha\beta} (\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\alpha}}_\beta$ que

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} = (\hat{I}, \vec{\sigma}), \quad (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} = (\hat{I}, \vec{\sigma}), \quad (\text{A.11})$$

onde estas matrizes satisfazem as identidades:

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}_\nu)^{\dot{\alpha}\alpha} = 2\delta^\mu_\nu, \quad (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\beta}\beta} = 2\delta_\alpha^\beta \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}. \quad (\text{A.12})$$

De maneira análoga ao o que foi feito no caso tridimensional, podemos usar as matrizes sigma para mapear as componentes de vetores quadridimensionais em matrizes hermitianas 2×2 por meio das definições

$$\text{Para campos: } V^{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\sigma}_\mu)^{\alpha\dot{\alpha}} V^\mu, \quad V^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} V^{\alpha\dot{\alpha}}; \quad (\text{A.13})$$

$$\text{Para derivadas: } \partial_{\alpha\dot{\alpha}} = (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu, \quad \partial_\mu = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_\mu)^{\alpha\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}}; \quad (\text{A.14})$$

$$\text{Para coordenadas: } x^{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_\mu)^{\alpha\dot{\alpha}} x^\mu, \quad x^\mu = (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} x^{\alpha\dot{\alpha}}, \quad (\text{A.15})$$

Por fim, todos os cálculos quânticos são realizados com rotação de Wick: a assinatura da métrica fica $(-+++)$ \rightarrow $(++++)$, $d^4x \rightarrow id^4x$, $e^{-iS} \rightarrow e^S$, etc. A constante de acoplamento g é dada por $\sqrt{2}$ vezes a constante g usual [10].

Referências Bibliográficas

- [1] L. Ryder, "Quantum Field Theory", Cambridge University, Cambridge, England, (1996).
- [2] M. Maggiore, "A Modern Introduction to Quantum Field Theory", Oxford University Press, Oxford, (2005).
- [3] H. Myazawa, Prog. Theor. Phys. 36, 1266 (1966); Phys. Rev. 170, 1586 (1968).
- [4] A. Neveu, J. H. Schwarz, Nucl Phys. B31, 86 (1971); P. Ramond, Phys. Rev. D3, 2415 (1971).
- [5] Y. Gol'fand, E. Lichtman, JETP Lett.13, 323 (1971).
- [6] D. Volkov, V. Akulov, JETP Lett.16, 621 (1972).
- [7] J. Wess, B. Zumino, Nucl. Phys. B70, 139 (1974).
- [8] H. Baer, X. Tata, "Weak Scale Supersymmetry: From Superfields to Scattering Events", Cambridge University Press, Cambridge, England (2006).
- [9] M. Kaku, "Quantum Field Theory", Oxford University Press, New York, (1993).
- [10] S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Rocek, W. Siegel. "Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry", Benjamin/Cummings, (1983).
- [11] Z. Bern, J. Carrasco, L. Dixon, H. Johansson, R. Roiban, Phys. Rev. Lett.103, 081301 (2009); R. Kallosh, JHEP12, 009 (2010).
- [12] F. Bopp, Ann. d. Physik38, 345 (1940).
- [13] A. Pais, G. Uhlenbeck, Phys. Rev.79, 145 (1950).
- [14] T. Lee, G. Wick, Phys. Rev. D2, 1033 (1970).
- [15] B. Grinstein, D. O'Connell, M. B. Wise, Phys. Rev. D77, 025012 (2008); Phys. Rev. D77, 065010 (2008).
- [16] K. Stelle, Phys. Rev. D16, 953 (1977).

- [17] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov, and I. L. Shapiro, "Effective Action in Quantum Gravity", IOP Publishing, Bristol and Philadelphia, (1992).
- [18] P. Horava, Phys. Rev. D79, 084008 (2009), arXiv:0901.3775.
- [19] P. D. Mannheim, Found. Phys.42, 388 (2012), arXiv:1101.2186.
- [20] I. L. Buchbinder, K. V. Stepanyantz, Nucl. Phys. B883, 20 (2014).
- [21] I. Antoniadis, E. Dudas, D. M. Ghilencea, P. Tziveloglou, Nucl. Phys. B831, 133 (2010).
- [22] R. J. Rivers, "Path integral methods in quantum field theory", Cambridge University Press, Cambridge, (1987).
- [23] C. Scrucca, "Advanced quantum field theory", Doctoral School in Physics, EPFL, <http://itp.epfl.ch/webdav/site/itp/users/181759/public/aqft.pdf>
- [24] D.V. Vassilevich, Phys. Rept.388, 279 (2003), hep-th/0306138.
- [25] S. Coleman, S. Weinberg, Phys. Rev. D7, 1888 (1973); P. Fayet, J. Iliopoulos, Phys. Lett. B51, 461 (1974); S. Coleman, Phys. Rev. D15, 2929 (1977).
- [26] I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko, J. V. Yarevskaya, Nucl. Phys. B411, 665 (1994).
- [27] I. L. Buchbinder, A. Yu. Petrov, Phys. At. Nucl.63, 1657 (2000).
- [28] A. Pickering, P. West, Phys. Lett. B383, 54 (1996), hep-th/9604147.
- [29] B. de Wit, M. T. Grisaru, M. Rocek, Phys. Lett. B374, 297 (1996), hep-th/9601115.
- [30] A. Brignole, Nucl. Phys. B579, 101 (2000), hep-th/0001121.
- [31] S. Nibbelink, T. Nyawelo, JHEP01, 034 (2006), hep-th/0511004.
- [32] T. Ohrndorf, Phys. Lett. B176, 421 (1986); I.N. McArthur, T.D. Gargett, Nucl. Phys. B497, 525 (1997), hep-th/9705200; N.G. Pletnev and A.T. Banin, Phys. Rev. D60, 105017 (1999), hep-th/9811031; S.M. Kuzenko and I.N. McArthur, JHEP10, 029 (2003), hep-th/0308136; S.M. Kuzenko and S.J. Tyler, JHEP05, 081 (2007), hep-th/0703269.
- [33] I.L. Buchbinder and S.M. Kuzenko, "Ideas and Methods in Supersymmetry and Supergravity", Institute of Physics Publishing, Bristol, (1995).
- [34] M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov and A. J. da Silva, Europhys. Lett.98, 21002 (2012), arXiv:1112.2105.

- [35] A. F. Ferrari, M. Gomes, A. C. Lehum, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, Phys. Rev. D77, 065005 (2008), arXiv:0709.3501.
- [36] A. F. Ferrari, M. Gomes, A. C. Lehum, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A. J. da Silva, E. O. Silva, Phys. Lett. B678, 500 (2009), arXiv:0901.0679.
- [37] M. Gomes, A. C. Lehum, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A. J. da Silva, Phys. Rev. D87, 027701 (2013), arXiv:1210.6863.
- [38] I. L. Buchbinder, B. S. Merzlikin, and I. B. Samsonov, Nucl. Phys. B860, 87 (2012), arXiv:1201.5579.
- [39] I.L. Buchbinder, N.G. Pletnev, I.B. Samsonov, JHEP04, 124 (2010), arXiv:1003.4806.
- [40] A. C. Lehum, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, Phys. Rev. D86, 025011 (2012), arXiv:1202.5176.
- [41] I. L. Buchbinder, A. Yu. Petrov, Class. Quant. Grav. 13, 2081 (1996), hep-th/9511205; Class. Quant. Grav. 14, 21 (1997), hep-th/9607217.
- [42] M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A. J. Silva, Phys. Lett. B682, 229 (2009).
- [43] F. S. Gama, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, Phys. Rev. D88, 065029 (2013), arXiv:1308.5834.
- [44] F. S. Gama, M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A. J. da Silva, Phys. Lett. B733, 247 (2014), arXiv:1401.5414.
- [45] F. S. Gama, M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A. J. Silva, Phys. Rev. D84, 045001 (2011), arXiv:1101.0724.
- [46] F. S. Gama, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, Phys. Rev. D88, 045021 (2013), arXiv:1307.3190.
- [47] F. S. Gama, M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A. J. da Silva, Phys. Rev. D89, 085018 (2014), arXiv:1401.6839.
- [48] W. Siegel, arXiv:hep-th/9912205.
- [49] J. Lykken, arXiv:hep-th/9612114.
- [50] A. Petrov, arXiv:hep-th/0106094.
- [51] P. West, "Introduction to Supersymmetry and Supergravity", World Scientific, Singapore, (1990).

- [52] S. J. Gates, arXiv:hep-th/9809064.
- [53] A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky, E. Sokatchev, "Harmonic Superspace", Cambridge University Press, Cambridge (2001).
- [54] J. Wess, J. Bagger, "Supersymmetry and Supergravity", Princeton University Press, Princeton NJ, (1992).
- [55] P. Srivastava, "Supersymmetry and Superfields", Adam-Hilger, Bristol England, (1986).
- [56] D. Bailin, A. Love, "Introduction to Gauge Field Theory", Adam Hilger, Bristol and Boston, (1993).
- [57] D. Bailin, A. Love, "Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory", Institute of Physics Publishing, Bristol England (1994).
- [58] S. J. Gates, Nucl. Phys. B238, 349 (1984).
- [59] S. J. Gates, C. M. Hull, M. Rocek, Nucl. Phys. B248, 157 (1984).
- [60] H. Nishino and S. J. Gates, Int. J. Mod. Phys. A8, 3371 (1993).
- [61] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindstrom, M. Rocek, Commun. Math. Phys.108, 535 (1987).
- [62] I. L. Buchbinder, N. G. Pletnev and I. B. Samsonov, Phys. Part. Nucl.44, 234 (2013).
- [63] D.J. Toms, "The Schwinger Action Principle and Effective Action", Cambridge University Press, Cambridge (2007).
- [64] V. Mukhanov, S. Winitzki, "Introduction to Quantum Effects in Gravity", Cambridge University Press, Cambridge (2007).
- [65] R. Grigjanis, R. Kobes, Y. Fujimoto, Can. J. Phys.64, 537 (1986).
- [66] B. Hatfield, "Quantum Field Theory of Point Particles and String Theory", Westview Press, (1998).
- [67] A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky, Phys. Lett. B131, 313 (1983).
- [68] M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A. J. da Silva, Phys. Lett. B682, 229 (2009), arXiv: 0908.0900; M. Dias, A. Yu. Petrov, C. Senise, A. J. da Silva, arXiv: 1212.5220.
- [69] I. Antoniadis, E. Dudas, D. M. Ghilencea, JHEP 0803, 045 (2008), arXiv: 0708.0383.
- [70] M. T. Grisaru, M. Rocek, R. von Unge, Phys. Lett. B383, 415 (1996).