

Italo'Ivo Lima Dias Pinto

*Efeito da quantidade finita de osciladores em
sistemas estocásticos de dois níveis.*

João Pessoa

2014

Italo'Ivo Lima Dias Pinto

***Efeito da quantidade finita de osciladores em
sistemas estocásticos de dois níveis.***

Tese apresentada ao programa de pós graduação
em Física, como requisito para a obtenção do
Título de Doutor em Física, Centro de Ciências
Exatas e da Natureza da Universidade Federal
da Paraíba

Orientador:
Alexandre da Silva Rosas

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

João Pessoa

2014

P659e Pinto, Italo'Ivo Lima Dias.
Efeito da quantidade finita de osciladores em sistemas estocásticos de dois níveis / Italo'Ivo Lima Dias Pinto.- João Pessoa, 2014.
68f. : il.
Orientador: Alexandre da Silva Rosas
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN
1. Física. 2. Sistemas estocásticos. 3. Osciladores estocásticos. 4. Transição de fase. 5. Ruído multiplicativo. 6. Osciladores de fases discretas.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Agradecimentos

Agradeço a Alexandre Rosas por ter me orientado ao longo de 8 anos da minha formação acadêmica. Aos outros membros do nosso grupo de pesquisa, Katja Lindenberg que me recebeu durante um ano em San Diego, Daniel Escaff e Upendra Harbola com os quais tive excelentes colaborações e que me ensinaram muito sobre dinâmica estocástica. Aos professores do departamento de física da UFPB que de alguma forma contribuíram para a minha formação e aos inúmeros colegas com quem convivi em sala de aula durante todo esse tempo de graduação e pós graduação. Agradeço aos meus pais e todos os familiares que sempre me apoiaram e me deram condições de continuar minha formação.

Thanks to Alexandre Rosas for having guided me through eight years of my education. And the other members of our research group, Katja Lindenberg who received me for a year in San Diego, Daniel Escaff and Upendra Harbola with whom I had great collaborations and taught me a lot about stochastic dynamics. To the teachers of the physics department at UFPB that somehow contributed to my education and the many colleagues with whom I spent time in the classroom during this time as an undergraduate and during the graduate programs. I thank my parents and all family members who have always supported me and gave me the conditions to continue my education.

Resumo

Nesta tese, apresentamos modelos de sistemas estocásticos de dois níveis que interagem através de um acoplamento global, de forma que o estado ocupado por cada unidade da população influi na taxa de transição de estado das demais. Apresentamos dois modelos de acoplamento global onde é possível observar uma transição de fase de um regime onde as unidades estão distribuídas igualmente entre os dois estados para uma fase onde há a aglomeração de unidades em um dos estados. Em um dos modelos de acoplamento essa transição ocorre de forma contínua com o parâmetro de acoplamento. Através de uma aproximação de campo médio mostramos que essa transição de fase ocorre devido a uma bifurcação de forquilha subcrítica onde uma das fases é associada a um regime monoestável (unidades igualmente divididas entre os dois estados) e a outra fase a um regime biestável simétrico (maior parte das unidades aglomeradas em um dos estados). Já o outro modelo apresenta uma transição de fase descontínua com o parâmetro de acoplamento. A abordagem de campo médio revela que essa transição de fase ocorre através de uma bifurcação de forquilha supercrítica onde temos um regime monoestável e um regime triestável apresentando simetria com relação ao poço de potencial central e a medida que o parâmetro de acoplamento é aumentado a estabilidade central diminui enquanto os outros dois estados se tornam mais estáveis. Foi mostrado que para ambos os modelos de acoplamento, quando temos uma quantidade finita de osciladores o sistema apresenta uma estrutura de ruído multiplicativo. Essa estrutura de ruído torna os estados estáveis obtidos com a aproximação de campo médio em estados metaestáveis. Também foi mostrado que as flutuações devido a quantidade finita de unidades quebra a simetria nos regimes com multiestabilidade, essa quebra de simetria ocorre devido a assimetrias da intensidade das flutuações. Obtemos também uma equação de Fokker-Planck para esse sistema. A solução da equação de Fokker-Planck nos dá a distribuição de probabilidade da quantidade de unidades em cada estado. Essa distribuição torna possível a construção de um diagrama de fases para a transição de fase dos regimes monoestáveis para os regimes que apresentam multiestabilidade. Essa transição é caracterizada em termos do parâmetro de acoplamento e da quantidade de unidades do sistema.

Palavras-Chave: Sistemas estocásticos, osciladores estocásticos, transição de fase, ruído multiplicativo, osciladores de fases discretas.

Abstract

In this thesis, we presented models of two state stochastic systems which interact through a global coupling, in a way that each population unit contributes to the state transition rates of the other units. We presented two models of global coupling in which is possible to observe a phase transition of a regime with units equally distributed on the two states to a phase where there is an agglomeration of units in one of the states. In the first coupling model this transition occurs in a continuous way as we increase the coupling parameter. Through a mean field approximation we shown that this phase transition occurs due to a subcritical pitchfork bifurcation where one of the phases is associated to a monostable regime (units equally distributed in the two states) and the other phase to a symmetric bistable regime (majority of the units agglomerated in one of the states). On the other hand the other model presents a discontinuous phase transition as we increase the coupling parameter, the mean field approach shows that this phase transition occurs due a supercritical pitchfork bifurcation where we have a monostable regime and a tristable regime presenting symmetry in relation to the central potential well, as the coupling parameter is increased the central stability reduces while the two other states becomes more stable. It was shown that for both coupling models, when we have a finite number of oscillators the system presents a multiplicative noise structure. This noise structure turns the stable states obtained with the mean field approximation on metastable states, also the fluctuations due to a finite number of units breaks the symmetry in the multistable regimes, this symmetry break occurs due to the asymmetric intensity of the fluctuations. We also obtained a Fokker-Planck equation for this system and the probability distribution of the number of units in each state, from this distribution it was possible to build a phase diagram for the phase transition from the monostable regime to the regime that presents multistability. This transition is characterized in terms of the coupling parameter and the number of units in the system.

Keywords: Stochastic systems, stochastic oscillators, phase transitions, multiplicative noise, discrete phase oscillators.

Conteúdo

1	Introdução	p. 7
2	Revisão	p. 11
2.1	Dinâmica não-linear	p. 11
2.1.1	Pontos fixos e estabilidade	p. 12
2.1.2	Bifurcações	p. 14
2.2	Equação Mestra	p. 18
2.3	Equação de Langevin	p. 19
2.3.1	Equação de Langevin para uma partícula Browniana	p. 20
2.3.2	Abordagem de Langevin para sistemas não lineares	p. 21
2.4	Equação de Fokker-Planck	p. 22
3	Modelo e Aproximação de campo médio	p. 30
3.1	Oscilador estocástico de 2 níveis isolado	p. 30
3.2	Conjunto de osciladores estocásticos de 2 níveis não acoplados	p. 31
3.3	Acoplamento global de osciladores estocásticos de 2 níveis	p. 32
3.3.1	Acoplamento com transição de fase contínua	p. 32
3.3.2	Acoplamento com transição de fase descontínua	p. 35
4	Equação mestra	p. 41
4.1	Sistema com dois osciladores	p. 41
4.2	Sistema com N osciladores	p. 44

5	Equação de Langevin	p. 47
5.1	Dedução da Equação de Langevin para osciladores estocásticos de dois níveis	p. 47
5.2	Acoplamento com transição de fase contínua	p. 50
5.3	Acoplamento com transição de fase descontínua	p. 51
6	Equação de Fokker-Planck	p. 53
6.1	Expansão da equação mestra	p. 53
6.2	Equação de Fokker-Planck	p. 55
6.3	Solução estacionária da Equação de Fokker-Planck	p. 55
6.3.1	Acoplamento com transição de fase contínua	p. 56
6.3.2	Acoplamento com transição de fase descontínua	p. 60
7	Considerações Finais	p. 64
	Bibliografia	p. 66

1 Introdução

Modelos de osciladores estocásticos de estado discreto são frequentemente encontrados na literatura. Existe uma classe específica de osciladores estocásticos que apresentam uma transição de fase de um regime desordenado para um regime ordenado onde grande parte da população de osciladores se concentra no mesmo estado. Esses fenômenos podem ser observados em sistemas de osciladores estocásticos de dois estados usados para modelar circuitos regulatórios genéticos [1] e problemas de formação de opinião em populações de eleitores [2]. Muitos modelos de osciladores de estados discretos são utilizados para estudar fenômenos de sincronização [3–11], onde grande parte da população de osciladores se concentra em um estado e sofre transições para os outros estados de forma sincronizada, de maneira análoga ao fenômeno de sincronização de osciladores de fase contínua como apresentado por Kuramoto [12]. Os modelos de estados discretos se mostram uma ferramenta útil para estudar tais fenômenos de sincronização, onde vários modelos apresentam uma transição para uma fase com oscilações coletivas sincronizadas.

Osciladores de estados discretos também são comumente utilizados para estudos de dinâmica de populações, onde um oscilador pode ser visto como um sítio em uma rede com vários possíveis estados de ocupação e a interação com outros sítios da rede determina a probabilidade do estado de ocupação ser modificado. O modelo pedra-papel-tesoura e suas generalizações são utilizados com frequência para modelar a evolução de cooperação e competição entre espécies com efeitos de envelhecimento da estrutura e ruídos externos [13]. Também é possível observar nesses modelos cíclicos a presença de oscilações, tanto locais quanto globais [14, 15]. Ainda sobre o modelo pedra-papel-tesoura podemos observar o surgimento de estruturas espaciais, em especial o surgimento de domínios com estruturas de interface que dependem da quantidade de espécies presentes na rede [16] e o surgimento de padrões em espiral em redes bidimensionais quadradas [17]. Um outro modelo de dinâmica de populações que utiliza estados discretos é o modelo epidêmico SIRS, onde cada sítio representa um indivíduo de uma população que apresenta um dos 3 estados possíveis, susceptível(S), infectado(I) e recuperado(R), esse modelo é utilizado para estudar a dinâmica de epidemias em uma população [18–20].

Existe uma literatura extensa [21–29] sobre osciladores estocásticos com 3 estados. Podemos destacar uma série de trabalhos publicados por Wood et al. [21–24] onde foi estudada uma família de modelos de osciladores estocásticos de 3 estados simétricos que apresentam transição de um estado quiescente para um estado sincronizado, onde o estado quiescente é caracterizado pela igual distribuição da população de osciladores entre os 3 estados, já o estado sincronizado apresenta grande parte da população de osciladores ocupando o mesmo estado e transitando para os outros estados de maneira sincronizada. Outras recentes contribuições para o estudo desse modelo de osciladores estocásticos [25, 26] mostram que os modelos de Wood também exibem uma segunda transição de fase para um regime onde as oscilações globais cessam devido ao surgimento de três estados estacionários simétricos.

Uma outra aplicação de sistemas de osciladores estocásticos de estados discretos é a possibilidade de construir um sistema de unidades excitáveis, unidades que quando isoladas permanecem no mesmo estado, porém quando acopladas a outras unidades podem mudar de estado por efeito das interações com as outras unidades acopladas. Modelos de sistemas compostos por unidades excitáveis utilizando osciladores de três estados globalmente acoplados foram apresentados em [27]. Num dos modelos apresentados, o sistema apresenta uma forma de acoplamento com transições estocásticas que leva a um estado estacionário estável. Em outro sistema apresentado apenas uma das transições entre estados é estocástica enquanto as transições entre os outros estados ocorre de maneira determinística através de um intervalo de tempo fixo. Foi mostrado que esse sistema apresenta um regime com oscilações coerentes, devido a uma bifurcação de Hopf na dinâmica das probabilidades dos estados de ocupação.

Podemos citar também o trabalho de Prager e colaboradores [28], que estende o trabalho anterior para uma classe maior de sistemas não markovianos onde os tempos de espera obedecem funções de densidade. Foi mostrado através de uma aproximação de campo médio que esse sistema também apresenta um estado com oscilações coletivas, através de uma bifurcação de Hopf crítica e subcrítica. Outro modelo para estudar redes de unidades excitáveis usa osciladores estocásticos de dois estados com realimentação atrasada [30], que dependendo da intensidade das flutuações o modelo apresenta um regime de biestabilidade quando variada a força do acoplamento. Ainda citando estudos de sistemas de unidades excitáveis temos dois modelos de três estados assimétricos utilizados por Assis [29] como modelagem de arranjos de neurônios. Um desses sistemas foi baseado nos modelos de Wood [21–24], onde a introdução de uma assimetria nos estados foi usada para tornar as unidades excitáveis. Esse estudo mostrou que a inclusão da assimetria torna impossível a ocorrência de oscilações coerentes. Já em um outro modelo baseado no modelo SIRS, usado para estudos de dinâmica de populações onde cada unidade pode assumir 3 estados, sendo esses susceptível, infectado e recuperado, foi

possível obter um arranjo de osciladores excitáveis que apresentam oscilações coerentes.

Podemos destacar também as contribuições de Tsimring e colaboradores [31–35], onde foram desenvolvidos trabalhos teóricos e experimentais direcionados para os estudos de circuitos genéticos que apresentam comportamento sincronizado. Nesses arranjos experimentais células são utilizadas para produção de determinadas proteínas que induzem uma fluorescência no sistema dependente das concentrações das proteínas produzidas, dessa forma os efeitos das proteínas nas células assumem o papel do acoplamento. Como resultado podemos observar oscilações sincronizadas através da fluorescência induzida por algumas proteínas utilizadas.

Por fim, mencionamos dois trabalhos recentes com osciladores estocásticos de dois estados desenvolvidos por Escaff et al. [36, 37], onde é apresentado um modelo de acoplamento global onde o sistema apresenta um estado quiescente com frações iguais de osciladores distribuídos nos dois estados e a medida que aumentamos o parâmetro de acoplamento ocorre a aglomeração dos osciladores em um dos dois estados. Essa transição de um regime quiescente para um regime de aglomeração se dá através de uma bifurcação de forquilha e foi mostrado que a inclusão de memória na dinâmica do sistema modifica o diagrama de bifurcação. De modo que o sistema com memória apresenta uma bifurcação de forquilha imperfeita.

Usualmente a abordagem analítica para tratar sistemas de osciladores de fase discreta globalmente acoplados consiste de uma aproximação de campo médio onde implicitamente é considerada uma quantidade infinita de osciladores. A proposta dessa tese é apresentar um modelo simples de osciladores estocásticos de dois estados com acoplamento global. Esse sistema apresenta um regime onde há a condensação de osciladores em um mesmo estado, dando ênfase aos efeitos de tamanho finito do sistema. O sistema estudado, quando abordado através de uma aproximação de campo médio apresenta uma dinâmica com um potencial simétrico. No tratamento que utilizamos para um sistema com quantidade finita de unidades observamos uma estrutura de ruído multiplicativo que introduz uma assimetria no comportamento de campo médio. Essa assimetria cresce no limite em que o número de unidades $N \rightarrow \infty$, esse resultado é uma aparente contradição ao resultado da aproximação de campo médio. Essa contradição pode ser explicada em termos da não comutatividade dos limites $t \rightarrow \infty$ e $N \rightarrow \infty$. No caso da aproximação de campo médio o tamanho do sistema é considerado infinito a priori e então se observa a evolução do sistema no tempo, ou seja, o limite $N \rightarrow \infty$ é aplicado antes do limite $t \rightarrow \infty$. Já na abordagem para sistema finitos obtemos o comportamento do sistema em um estado estacionário e observamos como esse comportamento se modifica com o tamanho do sistema, portanto, temos o limite $t \rightarrow \infty$ aplicado antes do limite $N \rightarrow \infty$, gerando resultados diferentes da aproximação de campo médio.

A referência [38] desenvolvida durante o processo de produção dessa tese apresenta um acoplamento inspirado no modelo de osciladores de dois estados apresentado por Escaff et al. [37], porém nosso artigo dá ênfase ao efeito da quantidade de osciladores em um sistema finito. Quando o sistema apresenta uma quantidade finita de osciladores os estados estáveis observados na aproximação de campo médio apresentam flutuações e devido a essas flutuações o sistema pode apresentar transições entre os vários estados estáveis, portanto esses estados são chamados de metaestáveis. Podemos destacar também que as flutuações se tornam mais intensas quando temos uma quantidade menor de osciladores. Um outro resultado curioso que observamos é que o efeito das flutuações devido a quantidade finita induz uma assimetria que não é observada através da aproximação de campo médio. Mostramos que essa assimetria é causada pelas flutuações que apresentam uma intensidade dependente da posição do sistema no espaço de fase.

A tese está organizada da seguinte forma. O capítulo 2 apresenta uma revisão do conteúdo necessário de dinâmica não linear, para o desenvolvimento da abordagem de campo médio, e dinâmica estocástica, para o desenvolvimento da equação de Langevin e equação mestra para um sistema com quantidade finita de osciladores. Apresentamos também uma forma de obter a equação de Fokker-Planck através da equação de Langevin. O capítulo 3 descreve o modelo de sistema de osciladores estocásticos de 2 estados, assim como os 2 modelos de acoplamento que iremos utilizar. Nesse capítulo, também é apresentada a abordagem da aproximação de campo médio e os resultados obtidos com essa aproximação. No capítulo 4 apresentamos a equação mestra para um sistema com N osciladores de 2 estados e apresentamos essa solução para ambos os modelos de acoplamento apresentados no capítulo 3. No capítulo 5 mostramos como obter a equação de Langevin a partir do modelo microscópico do nosso sistema obtendo uma equação de Langevin com ruído multiplicativo, onde a intensidade apresenta uma dependência da posição do sistema no espaço de fase. Mostramos que esse efeito é responsável pela assimetria observada no sistema com quantidade finita de osciladores. No capítulo 6 mostramos como obter a equação de Fokker-Planck a partir da equação mestra apresentada no capítulo 4 e a partir da equação de Langevin apresentada no capítulo 5. Apresentamos, também, a solução da equação de Fokker-Planck e as distribuições de probabilidade obtidas a partir dessa equação. No capítulo 7 são feitas as considerações finais e possíveis extensões dos problemas abordados nessa tese.

2 *Revisão*

Nesse capítulo apresentaremos uma breve revisão dos conceitos e ferramentas que iremos utilizar ao longo da tese. Inicialmente faremos uma revisão de dinâmica não linear, definindo o que são pontos fixos, estabilidade de pontos fixos e bifurcações, esses conceitos serão fundamentais para o desenvolvimento da nossa abordagem de campo médio. Também faremos uma revisão sobre as ferramentas de dinâmica estocástica que utilizaremos, daremos ênfase na apresentação da equação de Langevin, equação Mestra e equação de Fokker-Planck unidimensionais e na relação dessas equações. Essa revisão será importante nos capítulos posteriores, quando abordaremos sistemas finitos de osciladores estocásticos.

2.1 *Dinâmica não-linear*

Nesse trabalho utilizaremos apenas espaços de fase unidimensionais, dessa forma podemos descrever a dinâmica de um sistema unidimensional através de uma equação do tipo

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.1)$$

Observe que $f(x)$ não apresenta dependência explícita com t , os sistemas com dependência explícita com t são chamados não autônomos e apresentam um comportamento bem mais complicado e fogem do foco dado nessa breve revisão. Os sistemas descritos com derivadas de ordem 2 e superiores podem ser representados por um conjunto de equações no formato de (2.1) se definirmos uma variável auxiliar do tipo $\dot{x} = y$ e dessa forma uma equação do tipo $\ddot{x} = g(x)$ pode ser escrita como $\dot{y} = g(x)$, observe que estamos representando uma equação diferencial de segunda ordem como duas equações diferenciais de primeira ordem, sendo dessa forma um sistema bidimensional. De forma análoga podemos reduzir equações com n ordens de derivada a um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem, e portanto, um sistema com n dimensões. Porém ao longo dessa tese todo o tratamento e resultados serão apresentados utilizando apenas sistemas não lineares unidimensionais.

2.1.1 Pontos fixos e estabilidade

Os sistemas no formato (2.1) apresentam um fluxo definido pelo sinal de \dot{x} . Caso $\dot{x} < 0$, o sistema vai percorrer o espaço de fase de modo que x decresce com a evolução no tempo. Por outro lado, caso $\dot{x} > 0$, x cresce com a evolução no tempo. Finalmente, nos pontos onde $\dot{x} = 0$, o sistema permanece indefinidamente nesses pontos que são chamados *pontos fixos*. Os pontos fixos de um sistema não-linear são equivalentes aos pontos de equilíbrio de um sistema de mecânica clássica e podem ser classificados da seguinte forma quanto à estabilidade [3]:

- Estáveis, onde o fluxo no espaço de fase, próximo ao ponto, flui sempre na direção do ponto fixo. Nesse caso, aplicando pequenas perturbações o sistema se afasta do ponto fixo momentaneamente mas com a evolução no tempo o sistema retornará ao ponto estável.
- Instáveis, onde o fluxo no espaço de fase sempre flui a partir do ponto fixo. Nesse caso qualquer pequena perturbação no sistema fará com que ele saia do ponto fixo e escoe para outra região do espaço de fase nunca voltando a esse ponto.
- Ponto de sela, esse tipo de ponto fixo é caracterizado por apresentar uma direção estável e uma direção instável, portanto o fluxo no espaço de fase flui para o ponto fixo em uma direção e flui a partir do ponto fixo em outra direção.

Usualmente se representa um sistema não-linear graficamente através dos *retratos de fase*, que são gráficos indicando as posições dos pontos fixos no espaço de fase e sua estabilidade. Convencionou-se indicar os pontos fixos estáveis com pontos preenchidos e os pontos fixos instáveis com pontos vazados no retrato de fase.

Na Fig. 2.1 está um exemplo dessa representação. O sistema apresentado no exemplo possui 3 pontos fixos, 2 estáveis e 1 instável. Lembrando que no nosso sistema temos $\dot{x} = f(x)$, para os pontos fixos estáveis temos $f(x) > 0$ à esquerda e $f(x) < 0$ à direita, portanto o fluxo leva o sistema para o ponto fixo estável. Já para o ponto fixo instável temos $f(x) < 0$ à esquerda e $f(x) > 0$ à direita fazendo com que o fluxo afaste o sistema do ponto fixo. Já no caso de termos um ponto de sela, o ponto fixo é representado como indicado na Fig. 2.2 com um ponto meio preenchido no lado estável e vazado no lado instável. No caso específico da Fig. 2.2 um sistema que se encontre à esquerda do ponto fixo vai se aproximar do ponto fixo assintoticamente enquanto um sistema que se encontre à direita do ponto fixo vai evoluir se afastando do ponto fixo.

Podemos obter informações úteis sobre a estabilidade de pontos fixos através da análise de estabilidade linear do ponto fixo. Uma vez que sabemos a posição de um ponto fixo x^* podemos

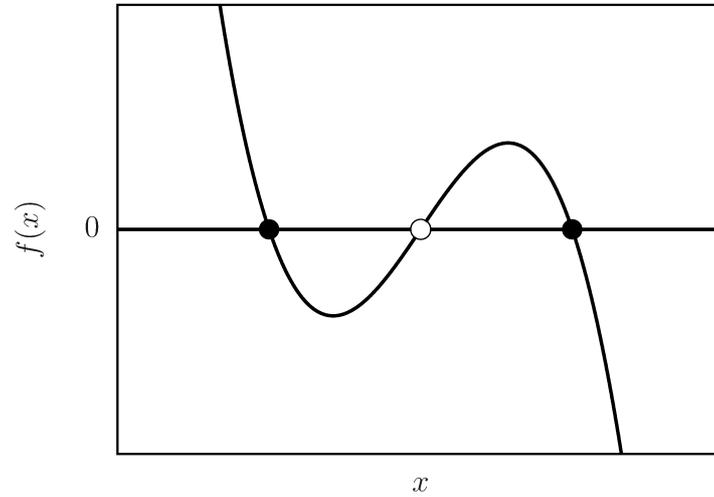


Figura 2.1: Retrato de fase de um sistema com espaço de fase unidimensional. Pontos preenchidos representam pontos fixos estáveis, pontos vazados representam pontos fixos instáveis.

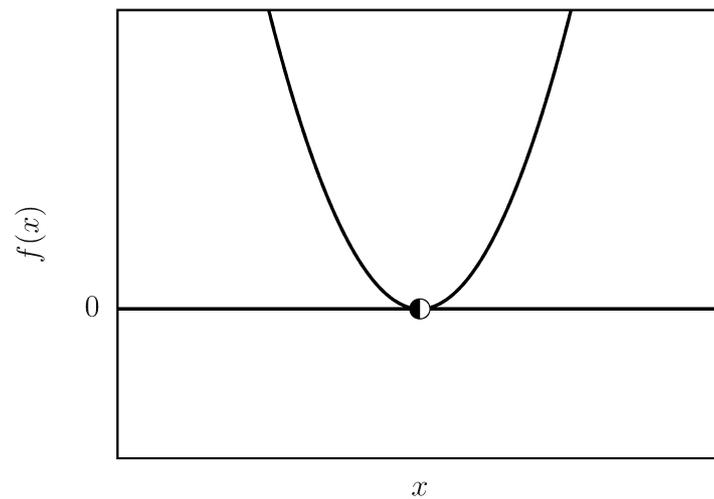


Figura 2.2: Retrato de fase de um sistema com espaço de fase unidimensional apresentando um ponto de sela. Um ponto fixo com metade preenchida e metade vazada indica estabilidade na direção da metade preenchida e instabilidade na direção da metade vazada.

determinar $\eta = x(t) - x^*$ como uma pequena perturbação em torno desse ponto fixo. Através da diferenciação de η com relação a t podemos obter

$$\dot{\eta} = \frac{d}{dt}(x - x^*) = \dot{x}. \quad (2.2)$$

Como η é uma pequena perturbação em torno de x^* , podemos usar a expansão de Taylor

$$\dot{\eta} = \dot{x} = f(x) = f(x^* + \eta) = f(x^*) + \eta f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2). \quad (2.3)$$

Uma vez que x^* é um ponto fixo, $f(x^*) = 0$, podemos escrever

$$\dot{\eta} = \eta f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2). \quad (2.4)$$

Dessa forma, caso $f'(x^*) \neq 0$, o termo $\eta f'(x^*)$ é dominante e podemos escrever a linearização em torno de x^* na forma

$$\dot{\eta} \approx \eta f'(x^*). \quad (2.5)$$

Portanto, o sinal de $f'(x^*)$ indica a estabilidade do ponto fixo x^* de modo que, se $f'(x^*) > 0$ a perturbação $\eta(t)$ cresce exponencialmente e portanto o ponto fixo é instável e caso $f'(x^*) < 0$ a perturbação $\eta(t)$ decresce exponencialmente e o ponto fixo é estável. O caso onde $f'(x^*) = 0$ indica que os termos $\mathcal{O}(\eta^2)$ não são desprezíveis e portanto a análise de estabilidade linear não é suficiente para determinar a estabilidade do ponto fixo.

Outra característica interessante da descrição utilizada até então é o fato de uma equação do tipo (2.1) ser associada a um potencial. Podemos determinar o potencial associado ao sistema (2.1) através da equação

$$f(x) = -\frac{dV}{dx}. \quad (2.6)$$

Dessa maneira, os pontos fixos estáveis são mínimos do potencial, os pontos fixos instáveis são máximos do potencial e os pontos de sela são os pontos de inflexão. Como na mecânica clássica o sistema sempre vai convergir para os mínimos do potencial, sempre se afastando dos máximos.

2.1.2 Bifurcações

Podemos definir sistemas não-lineares dependentes de um parâmetro, ou seja, podemos definir um $f(x, r)$ de modo que r não depende de t . Através da variação desse parâmetro r pontos fixos podem surgir ou desaparecer. Esse fenômeno de criação e aniquilação de pontos fixos recebe o nome de bifurcação. Podemos representar as bifurcações através de um gráfico das posições dos pontos fixos do sistema num plano $x \times r$, indicando os pontos fixos estáveis

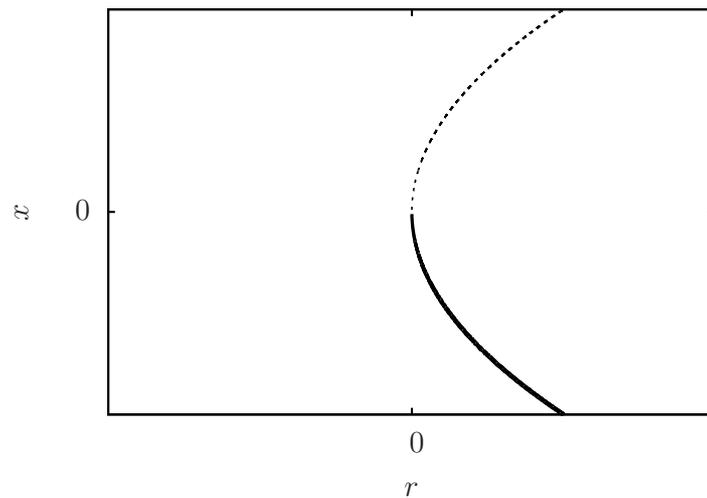


Figura 2.3: Bifurcação de ponto de sela. Linhas contínuas indicam a posição dos pontos fixos estáveis e linhas tracejadas indicam a posição dos pontos fixos instáveis.

por linhas sólidas e os pontos fixos instáveis por linhas tracejadas. A seguir apresentaremos os principais tipos de bifurcação existentes em fluxos unidimensionais [3].

Bifurcação ponto de sela

Nesse caso de bifurcação, um par de pontos fixos é criado quando modificamos o valor do parâmetro r . O par de pontos fixos criados dessa forma sempre se apresentam como um ponto fixo estável e um instável. O protótipo dessa bifurcação, também chamada de *forma normal*, é dado por

$$\dot{x} = x^2 - r, \quad (2.7)$$

dessa forma existem dois pontos fixos para $r > 0$ e não há pontos fixos para $r < 0$. $r = 0$ é o ponto onde ocorre a bifurcação, nesse ponto o sistema apresenta um ponto de sela, sendo estável para $x < 0$ e instável para $x > 0$.

A Fig. 2.3 mostra como se comportam os pontos fixos no sistema em função do parâmetro r . Podemos observar que para $r < 0$ não há pontos fixos e a medida que r cresce, surgem os 2 pontos fixos nas posições $x = \pm\sqrt{r}$. Um fato interessante é que efeitos da bifurcação aparecem mesmo antes da bifurcação ocorrer, o fluxo se torna mais lento a medida que o valor de r se aproxima do ponto da bifurcação, esse fenômeno é chamado de fantasma da bifurcação. Esse fenômeno fica evidente ao observarmos que $\dot{x} > 0$ para $r < 0$ e a medida que r cresce e se aproxima de 0, \dot{x} decresce e temos que $\dot{x}(0) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$, quando temos $r = 0$ temos o surgimento do ponto de sela que dá origem a bifurcação de ponto de sela.

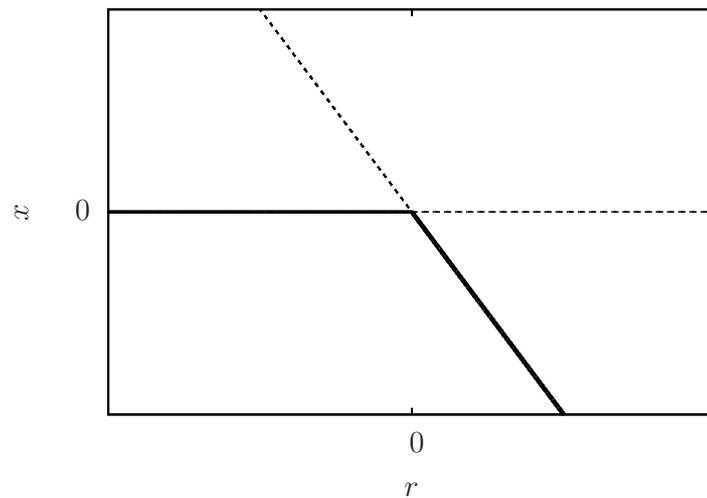


Figura 2.4: Bifurcação transcritical. Linhas contínuas indicam a posição dos pontos fixos estáveis e linhas tracejadas indicam a posição dos pontos fixos instáveis.

Bifurcação transcritical

Nesse tipo de bifurcação há dois pontos fixos, dos quais um possui posição fixa para qualquer valor do parâmetro r , enquanto o outro ponto fixo tem posição dependente de r e cruza a posição do ponto fixo com posição fixa a medida que aumentamos r . Durante esse processo os pontos fixos mudam a estabilidade a partir do valor de r onde há a bifurcação. Dessa forma um ponto fixo com posição dependente de r que se localiza a esquerda do ponto fixo com posição fixa antes da bifurcação, após a bifurcação estará a direita do ponto fixo com posição fixa. A forma normal dessa bifurcação é

$$\dot{x} = x^2 + rx \quad (2.8)$$

Nesse caso sempre existe um ponto fixo para $x = 0$ e esse ponto fixo é estável para $r < 0$ e instável para $r > 0$, além desse ponto fixo existe outro ponto fixo em $x = -r$ que tem estabilidade oposta a estabilidade do ponto fixo em $x = 0$. Para $r = 0$ os pontos fixos colidem em $x = 0$ formando um ponto de sela como no caso anterior, a partir desse ponto eles trocam a estabilidade.

A Fig. 2.4 mostra como a bifurcação ocorre, observe que para $r = 0$ ocorre a mudança de estabilidade dos dois pontos fixos.

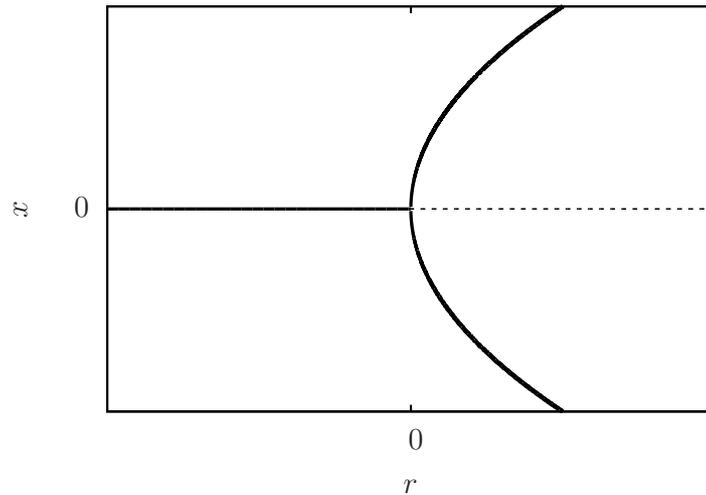


Figura 2.5: Bifurcação de forquilha supercrítica. Linhas contínuas indicam a posição dos pontos fixos estáveis e linhas tracejadas indicam a posição dos pontos fixos instáveis.

Bifurcação de forquilha supercrítica

A bifurcação de forquilha supercrítica ocorre em sistemas que apresentam um ponto fixo estável que perde a estabilidade ao mesmo tempo que surgem outros dois pontos fixos estáveis. O ponto fixo que se torna instável fica entre os dois novos pontos fixos estáveis. A forma normal da bifurcação de forquilha subcrítica é

$$\dot{x} = rx - x^3 \quad (2.9)$$

A Fig. 2.5 apresenta o diagrama da bifurcação de forquilha subcrítica. Pode-se observar que surgem dois pontos fixos estáveis enquanto um ponto fixo que já existia numa posição entre os novos pontos fixos perde sua estabilidade, se tornando um ponto fixo instável.

Bifurcação de forquilha subcrítica

Enquanto na bifurcação de forquilha supercrítica há o surgimento de dois pontos fixos estáveis, nesse caso há a aniquilação de dois pontos fixos instáveis numa posição onde havia um ponto fixo estável. Após a bifurcação, o ponto fixo estável perde sua estabilidade. A forma normal dessa bifurcação é dada por

$$\dot{x} = rx + x^3 \quad (2.10)$$

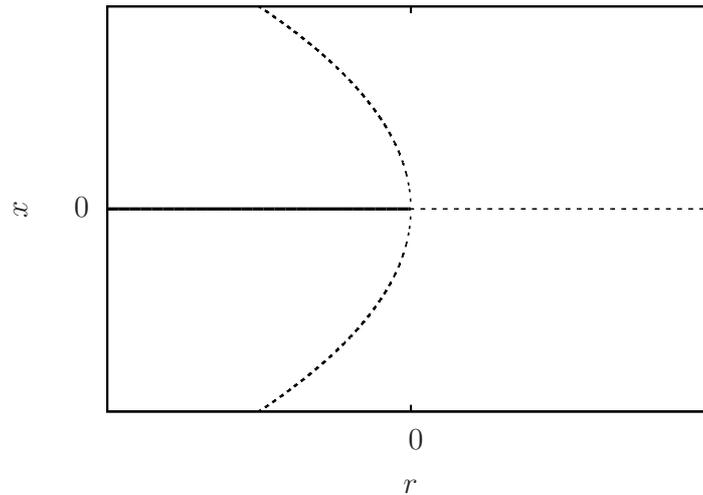


Figura 2.6: Bifurcação de forquilha subcrítica. Linhas contínuas indicam a posição dos pontos fixos estáveis e linhas tracejadas indicam a posição dos pontos fixos instáveis.

A Fig. 2.6 apresenta o diagrama da bifurcação. Essa bifurcação apresenta uma estrutura similar a bifurcação de forquilha subcrítica, porém com as estabilidades invertidas. Nesse caso temos dois pontos fixos instáveis que se aniquilam na mesma posição onde um ponto fixo estável perde a estabilidade. Usualmente termos de ordem superior estabilizam o sistema evitando que o sistema se afaste do ponto fixo instável indefinidamente. As bifurcações de forquilha serão úteis nos próximos capítulos por serem ambas protótipos de transições de fase, a subcrítica será usada para modelar uma transição contínua (segunda ordem) e a supercrítica junto com bifurcações de ponto de sela serão utilizada para construir um modelo de transição descontínua (primeira ordem).

2.2 Equação Mestra

A equação mestra descreve a evolução da probabilidade em um sistema markoviano. Ou seja, como se comporta a distribuição de probabilidade $P(y, t)$ para em um dado instante t obter um valor y de uma dada variável do sistema, em termos das taxas de transição entre os possíveis valores de y . Usualmente podemos escrever a equação mestra no formato [39]

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = \int [W(y|y')P(y', t) - W(y'|y)P(y, t)] dy', \quad (2.11)$$

onde $W(y_2|y_1)$ é a probabilidade de transição de y_1 para y_2 por unidade de tempo. Por se tratar de uma probabilidade, $W(y_2|y_1) \geq 0$. No caso do sistema possuir estados discretos ao invés de uma variável contínua y , podemos indicar cada estado com um índice n e então a Eq. (2.11),

toma a forma,

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \sum_{n'} [W_{nn'} p_{n'}(t) - W_{n'n} p_n(t)], \quad (2.12)$$

onde $p_n(t)$ é a probabilidade de em um dado instante t o sistema estar no estado n e W_{ab} é a probabilidade de transição do estado b para o estado a . Uma forma conveniente de escrever esse problema é definindo a chamada matriz \mathcal{W} que define as probabilidades de transição de forma que

$$\mathcal{W}_{nn'} = W_{nn'} - \delta_{nn'} \left(\sum_{n''} W_{n''n} \right), \quad (2.13)$$

e dessa forma podemos descrever as equações (2.12) no formato

$$\dot{p}_n(t) = \sum_{n'} \mathcal{W}_{nn'} p_{n'}(t), \quad (2.14)$$

onde o ponto denota uma derivada no tempo. Podemos também definir $\mathbf{p}(t)$ como um vetor com as componentes $p_n(t)$, dessa forma podemos escrever de forma mais compacta

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathcal{W} \mathbf{p}(t), \quad (2.15)$$

a matriz \mathcal{W} ainda apresenta as seguintes propriedades

$$\mathcal{W}_{nn'} \geq 0 \quad \text{para } n \neq n', \quad (2.16)$$

$$\sum_n \mathcal{W}_{nn'} = 0 \quad \text{para cada } n'. \quad (2.17)$$

A propriedade (2.16) é obedecida pelo simples fato das componentes $\mathcal{W}_{nn'}$ serem probabilidades e portanto não poderem assumir valores negativos. Já a propriedade (2.17) é a condição de balanço detalhado que determina que o sistema quando em equilíbrio possui seus processos elementares contrabalanceados pelos processos inversos. Como consequência da propriedade (2.17), temos que \mathcal{W} apresenta um autovalor 0, o estado $\mathbf{p}(t)$ associado a esse autovalor representa as probabilidades de obter cada estado n no regime estacionário do sistema. Portanto, sabendo as probabilidades de transição entre os estados podemos obter as probabilidades de cada estado no regime estacionário do sistema apenas calculando o autovetor $\mathbf{p}(t)$ para o autovalor 0.

2.3 Equação de Langevin

Inicialmente a equação de Langevin foi utilizada na física para descrever o movimento Browniano. Nesse modelo, é considerada uma partícula sujeita a uma força viscosa e que recebe impulsos aleatórios devido a choques com as partículas no fluido ao qual a partícula está

imersa. Posteriormente essa abordagem foi generalizada, de forma que podemos usá-la para modelar efeitos de flutuação em sistemas com comportamento macroscópico bem definido. A seguir apresentaremos a equação de Langevin para uma partícula Browniana.

2.3.1 Equação de Langevin para uma partícula Browniana

Uma partícula Browniana imersa em um fluido sem a influência de qualquer potencial está sujeita à força viscosa do fluido e a uma força estocástica devido a choques aleatórios com as partículas do fluido. Dessa forma a equação dinâmica para a velocidade da partícula é dada por

$$\dot{v} = -\gamma v + L(t). \quad (2.18)$$

O primeiro termo do lado direito da equação é a força viscosa à qual a partícula está sujeita e o termo $L(t)$ é uma variável estocástica que representa os choques aleatórios com as partículas do fluido. Usualmente, como no caso da partícula browniana [39], se postula as seguintes propriedades fisicamente plausíveis:

- $L(t)$ age como uma força externa e não depende de v , além disso temos que a média de $L(t)$ é nula. Portanto, de maneira formal podemos escrever $\langle L(t) \rangle = 0$.
- A força $L(t)$ é causada por colisões individuais da partícula Browniana com as moléculas do fluido e essas colisões ocorrem em uma escala de tempo muito menor do que a escala de tempo da equação dinâmica (2.18). Podemos expressar esse postulado definindo a função de correlação $\langle L(t)L(t') \rangle = \Gamma \delta(t - t')$, onde Γ é uma constante. Dessa forma estamos considerando as colisões instantâneas e não correlacionadas. De fato a correlação na forma de função δ é uma aproximação, que é bem precisa já que estamos observando o comportamento de uma partícula macroscópica em uma escala de tempo muito maior do que a escala de tempo das colisões das partículas microscópicas.
- $L(t)$ segue uma distribuição Gaussiana, dessa forma especificamos todas as propriedades de $L(t)$ em termos do parâmetro Γ .

O termo $L(t)$ com as propriedades descritas acima comumente recebe o nome de ruído gaussiano branco. O termo ruído branco se refere ao fato da composição espectral de $L(t)$ apresentar uma distribuição uniforme de frequências. Existem sistemas que apresentam um termo de ruído colorido usado para descrever ruídos com distribuições espectrais não uniformes. Termos de ruído colorido são obtidos quando a função de autocorrelação é diferente da função δ , essa autocorrelação implica em um processo não-Markoviano e portanto um sistema com memória.

Os sistemas que trataremos ao longo dessa tese são Markovianos, portanto apresentando termos de ruído gaussiano branco.

Podemos resolver a Eq. (2.18) formalmente, utilizando a condição inicial $v(0) = v_0$, podemos obter a solução

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} L(t') dt'. \quad (2.19)$$

Calculando a média de $v(t)$ sobre um subconjunto de partículas brownianas com mesma velocidade inicial v_0 e utilizando a primeira propriedade da variável estocástica $L(t)$ podemos obter,

$$\langle v(t) \rangle_{v_0} = v_0 e^{-\gamma t}. \quad (2.20)$$

Podemos também elevar a Eq. (2.19) ao quadrado e novamente fazer a média sobre um subconjunto de partículas com velocidade inicial v_0 , obtendo,

$$\langle (v(t))^2 \rangle_{v_0} = v_0^2 e^{-2\gamma t} + \Gamma e^{-2\gamma t} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' e^{\gamma(t'+t'')} \langle L(t') L(t'') \rangle. \quad (2.21)$$

E utilizando a segunda propriedade de $L(t)$, temos,

$$\langle (v(t))^2 \rangle_{v_0} = v_0^2 e^{-2\gamma t} + \frac{\Gamma}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}). \quad (2.22)$$

Lembrando que, para $t \rightarrow \infty$, a velocidade quadrática média está associada à temperatura de modo que $\langle (v(\infty))^2 \rangle = k_B T$, onde k_B é a constante de Boltzmann, podemos relacionar a constante Γ , à temperatura T e à viscosidade γ do sistema, obtendo,

$$\langle (v(\infty))^2 \rangle = \frac{\Gamma}{2\gamma} = k_B T. \quad (2.23)$$

Essa relação é a forma mais simples do teorema da flutuação-dissipação generalizado. Esse teorema define a relação entre a magnitude das oscilações com a temperatura e a viscosidade do meio no qual a partícula está imersa.

2.3.2 Abordagem de Langevin para sistemas não lineares

Podemos utilizar uma abordagem similar a que foi apresentada na seção anterior para descrever qualquer sistema que se conhece o comportamento macroscópico e sabe-se que está sob efeito de flutuações. De maneira geral podemos determinar uma equação no formato

$$\dot{y} = A(y) + C(y)L(t), \quad (2.24)$$

onde $A(y)$ usualmente é a função que descreve o comportamento macroscópico do sistema sem a presença de flutuações, $L(t)$ é uma variável estocástica com as mesmas características apre-

sentadas na seção anterior e $C(y)$ é uma função que define a dependência da intensidade das flutuações com a posição do sistema no espaço de fase. Quando $C(y)$ é constante dizemos que o sistema possui um ruído aditivo, quando o ruído possui uma intensidade com uma dependência explícita da posição do sistema no espaço de fase dizemos que o sistema possui um ruído multiplicativo.

Observe que as flutuações modeladas por $L(t)$ ocorrem numa escala de tempo muito pequena e portanto podemos aproximar $L(t)$ por uma sequência de funções $\delta(t)$ ocorrendo em tempos aleatórios. Porém segundo (2.24) essa aproximação de $L(t)$ por funções $\delta(t)$ gera descontinuidades em $y(t)$ tornando a posição y indeterminada no exato instante em que $L(t)$ é um pico, fazendo com que $C(y)$ também apresente essa indeterminação. A equação não indica quais valores de y devemos utilizar para determinar $C(y)$ durante os saltos de $L(t)$. Esse dilema de qual valor de y utilizar ao determinar o valor de $C(y)$ dá origem a duas interpretações do ruído $L(y)$ quando temos um ruído multiplicativo. Na interpretação de Stratonovich é considerado o valor médio de y antes e após a avaliação da função delta, enquanto na interpretação de Itô consideramos o valor de y antes da transição, essas duas interpretações geram resultados diferentes e, como será mostrado na próxima sessão, equações de Fokker-Planck diferentes [39].

2.4 Equação de Fokker-Planck

A Equação de Fokker-Planck se trata de um tipo especial de equação mestra, onde \mathcal{W} é um operador que envolve derivadas de segunda ordem, e pode ser usada como modelo de processos Markovianos [40]. De fato a Equação de Fokker-Planck pode ser obtida da equação mestra através de uma expansão em séries de potências, um exemplo desse procedimento será apresentado no capítulo 6. De forma geral, podemos escrever a Equação de Fokker-Planck da seguinte forma [39, 40]

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}A(y)P(y,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}B(y)P(y,t), \quad (2.25)$$

o primeiro termo do lado direito da equação recebe o nome de “termo de arrasto” ou “termo convectivo” e o segundo termo é chamado de “termo de difusão” ou “termo de flutuação”. Podemos também definir a corrente de probabilidade

$$J(y,t) = A(y)P(y,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}B(y)P(y,t), \quad (2.26)$$

e portanto podemos escrever a Eq. (2.25) na forma de uma equação de continuidade [39,40]

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial J(y,t)}{\partial y}. \quad (2.27)$$

A integração em todo o espaço de fase nos dá

$$\frac{d}{dt} \int_a^b P(y,t) dy = J(a,t) - J(b,t), \quad (2.28)$$

e pela condição de normalização temos, que

$$\int_a^b P(y,t) dy = 1, \quad (2.29)$$

portanto temos que $J(a,t) = J(b,t)$. O estado estacionário da distribuição $P(y,t)$ pode ser obtido a partir da condição $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$. Usando as Eqs. (2.26) e (2.27), temos que

$$-\frac{\partial J_{ss}(y)}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left[A(y)P_{ss}(y) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} B(y)P_{ss}(y) \right] = 0, \quad (2.30)$$

onde o subíndice ss indica estado estacionário (*stationary state*). A Eq. (2.30) impõe que o termo entre parênteses é constante. Contudo, como a distribuição de probabilidade no espaço não varia com o tempo, a corrente de probabilidade de fato se anula. Portanto temos

$$\frac{1}{2} \left(P_{ss}(y) \frac{\partial B(y)}{\partial y} + B(y) \frac{\partial P_{ss}(y)}{\partial y} \right) = A(y)P_{ss}(y). \quad (2.31)$$

Podemos rearrumar a equação acima da seguinte forma

$$\frac{1}{P_{ss}} \frac{\partial P_{ss}}{\partial y} = 2 \frac{A(y)}{B(y)} - \frac{1}{B(y)} \frac{\partial B(y)}{\partial y}. \quad (2.32)$$

Integrando, temos

$$\int \frac{1}{P'_{ss}} \frac{\partial P'_{ss}}{\partial y} dy = 2 \int \frac{A(y')}{B(y')} dy' - \int \frac{1}{B(y')} \frac{\partial B(y')}{\partial y'} dy'. \quad (2.33)$$

Portanto, podemos escrever

$$\ln [P_{ss}(y)] - \ln(K) = 2 \int \frac{A(y')}{B(y')} dy' - \ln [B(y)], \quad (2.34)$$

onde todas as constantes de integração foram incorporadas em K . Rearranjando os termos, podemos obter a solução estacionária da equação de Fokker-Planck

$$P_{ss}(y) = \frac{K}{B(y)} \exp \left[2 \int_0^y \frac{A(y')}{B(y')} dy' \right]. \quad (2.35)$$

A constante K pode ser determinada a partir da condição de normalização $\int P_{ss}(y') dy' = 1$.

Para definir a relação da Equação de Fokker-Planck com a Equação de Langevin vamos começar lembrando que a densidade de probabilidade satisfaz

$$P(y, t + \tau) = \int P(y, t + \tau | y', t) P(y', t) dy', \quad (2.36)$$

onde $P(y, t + \tau | y', t)$ é a probabilidade de obter o valor y num instante $t + \tau$ se no instante t foi obtido y' .

Definindo $\Delta = y - y'$ podemos escrever $P(y, t + \tau | y', t) P(y', t)$ como

$$P(y, t + \tau | y', t) P(y', t) = P(y + \Delta - \Delta, t + \tau | y - \Delta, t) P(y - \Delta, t). \quad (2.37)$$

Expandindo essa expressão em série de Taylor em torno do ponto $\Delta = 0$, temos

$$P(y, t + \tau | y', t) P(y', t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\Delta)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^n [P(y + \Delta, t + \tau | y, t) P(y, t)]. \quad (2.38)$$

Usando essa expansão na Eq. (2.36), temos

$$\begin{aligned} P(y, t + \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^n \left[\left(\int \Delta^n P(y + \Delta, t + \tau | y, t) d\Delta \right) P(y, t) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right)^n \left[\frac{M_n(y, t, \tau)}{n!} P(y, t) \right], \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde a mudança de sinal da integral devido a transformação de variáveis $\Delta = y - y'$ é absorvida pela inversão dos limites de integração, da seguinte forma, considere limites de integração simétricos se estendendo de $-\infty$ a ∞ , dessa forma temos [41]

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy' f(y') = - \int_{y+\infty}^{y-\infty} d\Delta f(y - \Delta) = - \int_{\infty}^{-\infty} d\Delta f(y - \Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta f(y - \Delta). \quad (2.40)$$

Os momentos de y , $M_n(y, t, \tau)$ são definidos como

$$\begin{aligned} M_n(y, t, \tau) &= \langle [\xi(t + \tau) - \xi(t)]^n \rangle |_{\xi(t)=y} \\ &= \int (y - y')^n P(y', t + \tau | y, t) dy \\ &= \int \Delta^n P(y + \Delta, t + \tau | y, t) d\Delta, \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde $\xi(t)$ indica uma trajetória possível do processo estocástico $y(t)$. Observando que $M_0 = 1$, temos

$$P(y, t + \tau) = P(y, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right)^n \left[\frac{M_n(y, t, \tau)}{n!} P(y, t) \right]. \quad (2.42)$$

Reescrevendo a Eq. (2.42) e dividindo por τ

$$\frac{P(y, t + \tau) - P(y, t)}{t + \tau - t} = \frac{1}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right)^n \left[\frac{M_n(y, t, \tau)}{n!} P(y, t) \right], \quad (2.43)$$

Expandindo $M_n(y, t, \tau)$ como uma série de Taylor de τ , podemos definir a quantidade $D^{(n)}(y, t) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial M_n(y, t, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}$ da seguinte forma

$$\frac{M_n(y, t, \tau)}{n!} = D^{(n)}(y, t) \tau + \mathcal{O}(\tau^2). \quad (2.44)$$

Tomando o limite $\tau \rightarrow 0$, os termos de ordem superior em τ desaparecem e temos a chamada expansão de Kramers-Moyal [39]

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(y, t)}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right)^n \left[D^{(n)}(y, t) P(y, t) \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial y} \left[D^{(1)}(y, t) P(y, t) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D^{(2)}(y, t) P(y, t) \right] \\ &\quad - \frac{\partial^3}{\partial y^3} \left[D^{(3)}(y, t) P(y, t) \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.45)$$

A partir dessa expansão, podemos obter a Equação de Fokker-Planck retendo os termos até segunda ordem. Dessa forma, temos

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \left[D^{(1)}(y, t) P(y, t) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D^{(2)}(y, t) P(y, t) \right], \quad (2.46)$$

e pela relação (2.41), temos que

$$D^{(n)}(y, t) = \frac{1}{n!} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle (\xi(t + \tau) - y)^n \rangle. \quad (2.47)$$

Agora, devemos obter a relação de $D^{(1)}(y, t)$ e $D^{(2)}(y, t)$ com a equação de Langevin. De modo que para obter as formas de $D^{(n)}(y, t)$, usaremos a Eq. (2.24), lembrando que o ruído $L(t)$ obedece a propriedade $\langle L(t)L(t') \rangle = \Gamma \delta(t - t')$. Integrando a Eq. (2.24), podemos obter

$$y(t + \tau) = y(t) + \int_t^{t+\tau} A(y(t')) dt' + \int_t^{t+\tau} C(y(t')) dW(t'). \quad (2.48)$$

Onde no último termo usamos a integral de Stieltjes, definida por

$$dW = \dot{W} dt = L(t) dt. \quad (2.49)$$

A integral de uma variável estocástica não é bem definida como uma integral de Riemann. O

processo $W(t)$ recebe o nome de processo de Wiener e podemos defini-lo da seguinte forma.

$$\omega(\tau) = W(t + \tau) - W(t) = \int_t^{t+\tau} L(t') dt'. \quad (2.50)$$

Como $L(t)$ é gaussiano, então $\omega(\tau)$ também é gaussiano e temos as seguintes propriedades

$$\omega(0) = 0 \quad (2.51)$$

$$\langle \omega(\tau) \rangle = 0 \quad (2.52)$$

$$\langle \omega(\tau_2) \omega(\tau_1) \rangle = \Gamma \min[\tau_1, \tau_2]. \quad (2.53)$$

Resolveremos integrais estocásticas da seguinte forma

$$S = \int_0^\tau \Phi[\omega(\tau'), \tau'] dW(\tau'), \quad (2.54)$$

onde $\Phi[\omega(\tau'), \tau']$ é uma função de uma variável estocástica $\omega(\tau')$ e, possivelmente, do tempo τ' . Esse tipo de integral não segue a definição das integrais de Riemann, uma vez que o elemento de integração $dW(\tau')$ apresenta descontinuidades. Portanto as regras usuais de integração não podem ser utilizadas para calculá-las. As interpretações de Itô e Stratonovich nos dão regras diferentes para o cálculo dessas integrais. Usaremos os índices I para a interpretação de Itô e S para a interpretação de Stratonovich. A definição de Itô para a integral estocástica é

$$S_I = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \Phi[\omega(\tau_i), \tau_i] [\omega(\tau_{i+1}) - \omega(\tau_i)], \quad (2.55)$$

onde

$$\Delta = \max(\tau_{i+1} - \tau_i), \quad 0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = \tau. \quad (2.56)$$

Já na interpretação de Stratonovich a integral estocástica é definida da seguinte forma

$$S_S = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \Phi \left[\frac{\omega(\tau_i) + \omega(\tau_{i+1})}{2}, \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2} \right] [\omega(\tau_{i+1}) - \omega(\tau_i)]. \quad (2.57)$$

Podemos descrever o termo de ruído como uma série de saltos espaçado no tempo, dessa forma observe que na interpretação de Itô a avaliação da integral é feita usando a posição de $\omega(\tau)$ imediatamente anterior ao salto, enquanto na interpretação de Stratonovich $\omega(\tau)$ é avaliada com a posição como a média entre os pontos inicial e final do salto. Essas diferentes interpretações do termo de ruído influem no cálculo dos momentos da distribuição da posição de y .

Usando as definições acima vamos calcular a quantidade

$$B = \left\langle \int_0^\tau \omega(\tau') dW(\tau') \right\rangle, \quad (2.58)$$

pela interpretação de Itô, temos

$$\begin{aligned}
B_I &= \left\langle \sum_{i=0}^{N-1} \omega(\tau_i) [\omega(\tau_{i+1}) - \omega(\tau_i)] \right\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} [\langle \omega(\tau_i) \omega(\tau_{i+1}) \rangle - \langle \omega(\tau_i) \omega(\tau_i) \rangle] \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} (\Gamma \tau_i - \Gamma \tau_i) = 0.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Pela interpretação de Stratonovich, temos

$$\begin{aligned}
B_S &= \left\langle \sum_{i=0}^{N-1} \left[\frac{\omega(\tau_i) + \omega(\tau_{i+1})}{2} \right] [\omega(\tau_{i+1}) - \omega(\tau_i)] \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} [\langle \omega(\tau_i) \omega(\tau_{i+1}) \rangle + \langle \omega(\tau_{i+1}) \omega(\tau_{i+1}) \rangle - \langle \omega(\tau_i) \omega(\tau_i) \rangle - \langle \omega(\tau_{i+1}) \omega(\tau_i) \rangle] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (\Gamma \tau_i + \Gamma \tau_{i+1} - \Gamma \tau_i - \Gamma \tau_i) \\
&= \frac{\Gamma}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (\tau_{i+1} - \tau_i) = \frac{\Gamma}{2} \tau.
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Podemos utilizar esses resultados para calcular o momento $\langle \xi(t + \tau) - y \rangle$. Da integração da equação de Langevin temos

$$y(t + \tau) = y(t) + \int_t^{t+\tau} A(y(t')) dt' + \int_t^{t+\tau} C(y(t')) dW', \tag{2.61}$$

usando $y = \xi(t)$, temos

$$\begin{aligned}
\xi(t + \tau) - y &= \int_t^{t+\tau} A(\xi(t')) dt' + \int_t^{t+\tau} C(\xi(t')) dW(t') \\
&= \int_0^\tau A(\xi(t + \tau')) d\tau' + \int_0^\tau C(\xi(t + \tau')) dW(\tau'),
\end{aligned} \tag{2.62}$$

onde $\tau' = t' - t$, usando as expansões

$$A(\xi(t')) = A(y) + A'(y)(\xi(t') - y) + \dots \tag{2.63}$$

$$C(\xi(t')) = C(y) + C'(y)(\xi(t') - y) + \dots \tag{2.64}$$

podemos calcular $\xi(t + \tau) - y$ perturbativamente. Assim, definindo $\xi^{(n)}(t)$ como a aproximação

de ordem n de $\xi(t)$, temos em primeira ordem que

$$\begin{aligned}\xi^{(1)}(t+\tau) - y &= \int_0^\tau A(\xi(t+\tau'))d\tau' + \int_0^\tau C(\xi(t+\tau'))dW(\tau') \\ &= \tau A(y) + C(y)\omega(\tau) \\ &\quad + \frac{\partial C(y)}{\partial y} \int_0^\tau (\xi(t') - y)dW(\tau') + \dots\end{aligned}\quad (2.65)$$

utilizando a mesma expansão recursivamente, podemos então escrever o termo de segunda ordem como

$$\begin{aligned}\xi^{(2)}(t+\tau) - y &= \tau A(y) + C(y)\omega(\tau) \\ &\quad + \frac{\partial C(y)}{\partial y} \int_0^\tau C(y)\omega(\tau')dW(\tau') + \dots \\ &= \tau A(y) + C(y)\omega(\tau) \\ &\quad + \frac{\partial C(y)}{\partial y} C(y) \int_0^\tau \omega(\tau')dW(\tau') + \dots\end{aligned}\quad (2.66)$$

onde os termos de ordem superior em τ foram omitidos. Calculando a média dessa quantidade temos

$$\langle \xi(t+\tau) - y \rangle = \tau A(y) + C(y) \frac{\partial C(y)}{\partial y} \left\langle \int_0^\tau \omega(\tau')dW(\tau') \right\rangle + \dots\quad (2.67)$$

Usando a definição dos momentos dada pela Eq. (2.47), temos que na interpretação de Stratonovich,

$$D_S^{(1)} = A(x) + \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial C(y)}{\partial y} C(y),\quad (2.68)$$

enquanto na interpretação de Itô,

$$D_I^{(1)} = A(x).\quad (2.69)$$

O cálculo de $D^{(2)}$ não envolve a avaliação de integrais estocásticas, portanto podemos facilmente obter $\langle (\xi(t+\tau) - y)^2 \rangle$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}(\xi(t+\tau) - y)^2 &= \left[\int_0^\tau A(\xi(t+\tau'))d\tau' + \int_0^\tau C(\xi(t+\tau'))dW(\tau') \right] \\ &\quad \left[\int_0^\tau A(\xi(t+\tau''))d\tau'' + \int_0^\tau C(\xi(t+\tau''))dW(\tau'') \right] \\ &= \int_0^\tau \int_0^\tau A(\xi(t+\tau'))A(\xi(t+\tau''))d\tau'd\tau'' \\ &\quad + 2 \int_0^\tau \int_0^\tau A(\xi(t+\tau''))C(\xi(t+\tau'))d\tau''dW(\tau') \\ &\quad + \int_0^\tau \int_0^\tau C(\xi(t+\tau'))C(\xi(t+\tau''))dW(\tau')dW(\tau'') \\ &= 2\tau A(y)C(y)\omega(\tau) + C^2(y)\omega^2(\tau) + \mathcal{O}(\tau^2).\end{aligned}\quad (2.70)$$

Utilizando a expansão (2.63) e o resultado (2.66), podemos mostrar que a primeira integral tem

ordem $\mathcal{O}(\tau^2)$. Usando as propriedades (2.52) e (2.53) podemos obter

$$\langle (\xi(t+\tau) - y)^2 \rangle = C^2(y)\Gamma\tau, \quad (2.71)$$

logo

$$\begin{aligned} D^{(2)} &= \frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle (\xi(t+\tau) - y)^2 \rangle |_{\xi(t)=x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} C^2(y) \langle \omega^2(\tau) \rangle \\ &= \frac{\Gamma}{2} C^2(y). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Portanto na interpretação de Stratonovich podemos obter a Equação de Fokker-Planck

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[A(y) + \frac{1}{2}\Gamma C(y)C'(y) \right] P + \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [C(y)]^2 P. \quad (2.73)$$

Com os mesmos $A(y)$ e $C(y)$ definidos na Eq. (2.24). E usando a interpretação de Itô podemos obter

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} A(y)P + \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [C(y)]^2 P. \quad (2.74)$$

O termo $\frac{1}{2}\Gamma C(y)C'(y)$ que diferencia a Eq. (2.73) da Eq. (2.74) recebe o nome de termo espúrio. Usualmente a interpretação de Stratonovich é aplicada para casos onde o ruído é proveniente de fontes externas e a interpretação de Itô quando as flutuações são inerentes ao sistema e causadas pelo próprio mecanismo que faz o sistema evoluir. Para finalizar essa revisão, ressaltamos mais uma vez que a diferença das duas interpretações é a forma de avaliar o termo $C(y)$ no momento de um salto devido ao termo de ruído. A escolha de qual interpretação usar depende do problema físico específico que será tratado.

3 *Modelo e Aproximação de campo médio*

Nesse capítulo apresentaremos o modelo de osciladores estocásticos de 2 níveis, definiremos o acoplamento global entre eles e desenvolveremos uma aproximação de campo médio para caracterizar uma transição de fase de um estado onde a população se encontra dividida meio a meio entre os dois estados e uma fase onde há um estado preferencial que concentra grande parte da população de osciladores. Nessa seção apresentaremos dois modelos de acoplamento global, um desses acoplamentos resulta numa transição de fase contínua e o outro apresenta uma transição de fase descontínua.

3.1 Oscilador estocástico de 2 níveis isolado

Nosso modelo é composto por osciladores estocásticos de 2 níveis, estes são unidades binárias que podem se encontrar nos estados 0 ou 1. As transições entre os estados se dão de maneira aleatória com taxas γ_0 para a transição do estado 0 para o estado 1 e γ_1 para a transição do estado 1 para o estado 0, isto pode ser visualizado de forma simples na Fig. 3.1.

Podemos definir P_1 como a probabilidade de em um dado instante t obter o oscilador no estado 1 e de forma similar podemos definir P_0 como a probabilidade de obter o oscilador no

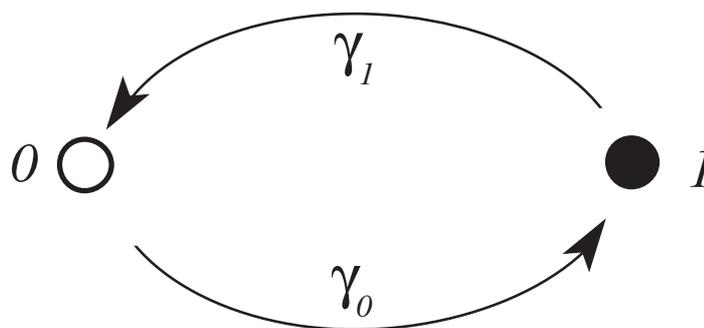


Figura 3.1: Desenho esquemático do oscilador estocástico de 2 níveis. As transições ocorrem aleatoriamente com taxas γ_0 e γ_1 .

estado 0. Utilizando essas definições, juntamente com a normalização da probabilidade onde temos $P_0 + P_1 = 1$ podemos descrever a dinâmica de P_1 com a seguinte equação mestra:

$$\begin{aligned}\dot{P}_1 &= \gamma_0 P_0(t) - \gamma_1 P_1(t) \\ &= \gamma_0 - (\gamma_0 + \gamma_1) P_1.\end{aligned}\tag{3.1}$$

A solução estacionária desse problema (lembrando que no estado estacionário $\dot{P}_1 = 0$) é

$$P_1^* = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 + \gamma_1},\tag{3.2}$$

que nesse caso é um atrator global do sistema, ou seja o estado de equilíbrio. A solução da Eq. (3.1) para uma distribuição de probabilidade inicial $P_1(0)$ nos dá a convergência do sistema para a solução estacionária. Resolvendo a Eq. (3.1), temos

$$\begin{aligned}\int_0^t dt' &= \int_{P_1(0)}^{P_1(t)} \frac{dP_1}{\gamma_0 - (\gamma_1 + \gamma_0)P_1} \\ t &= -\frac{1}{\gamma_1 + \gamma_0} \ln \left[\frac{\gamma_0 - (\gamma_1 + \gamma_0)P_1(t)}{\gamma_0 - (\gamma_1 + \gamma_0)P_1(0)} \right] \\ P_1(t) &= P_1^* \left(1 - \exp^{-(\gamma_0 + \gamma_1)t} \right) + P_1(0) \exp^{-(\gamma_0 + \gamma_1)t},\end{aligned}\tag{3.3}$$

indicando uma convergência exponencial para o estado estacionário.

3.2 Conjunto de osciladores estocásticos de 2 níveis não acoplados

Para o caso de N osciladores não acoplados, a probabilidade $P(N_1, t)$ de ter N_1 osciladores no estado 1 em um dado instante de tempo t é dada por uma distribuição binomial,

$$P(N_1, t) = \frac{N!}{(N - N_1)! N_1!} P_1(t)^{N_1} (1 - P_1(t))^{N - N_1}.\tag{3.4}$$

Definimos, então,

$$P_1(t) = \left\langle \frac{N_1}{N} \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{N_1=0}^N N_1 P(N_1, t),\tag{3.5}$$

onde P_1 satisfaz a Eq. (3.1). Nesse ponto, a fim de simplificar a notação, é interessante introduzir a variável $n_1 = N_1/N$. Dessa forma podemos escrever a seguinte equação mestra para a variável $\langle n_1 \rangle$

$$\frac{d\langle n_1 \rangle}{dt} = \gamma_0 - (\gamma_0 + \gamma_1) \langle n_1 \rangle.\tag{3.6}$$

Embora essa equação seja válida para a média de n_1 , a variável n_1 apresentará flutuações proporcionais a $\frac{1}{\sqrt{N}}$ devido a efeitos do tamanho finito que serão detalhados mais adiante, ou seja,

$$\frac{dn_1}{dt} = \gamma_0 - (\gamma_0 + \gamma_1)n_1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right), \quad (3.7)$$

onde os termos de ordem $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ representam as flutuações que ocorrem devido a natureza estocástica dos osciladores. Nesse capítulo daremos ênfase ao tratamento do caso onde $N \rightarrow \infty$, nesse caso as flutuações são desprezadas e a Eq. (3.6) descreve nosso sistema de maneira satisfatória, essa abordagem é denominada aproximação de campo médio.

3.3 Acoplamento global de osciladores estocásticos de 2 níveis

Note que até esse ponto não fizemos nenhuma consideração sobre as taxas de transição γ_0 e γ_1 . Daqui em diante consideraremos que as taxas de transição vão depender do número de osciladores em cada estado. Podemos dizer que ambas as taxas dependem apenas de n_1 , uma vez que a condição de normalização $n_1 + n_0 = 1$ nos permite escrever n_0 em função de n_1 . O acoplamento que usaremos não estabelece nenhum arranjo espacial e todos os osciladores contribuem para as taxas da mesma maneira, por esse motivo ele recebe a denominação de acoplamento global. Nesse trabalho apresentaremos 2 tipos de acoplamentos diferentes, de modo que um deles apresenta uma transição de fase contínua(segunda ordem) e o outro uma transição de fase descontínua(primeira ordem) em relação ao parâmetro de acoplamento r . Como veremos nas próximas duas seções, escolhas particulares para as taxas γ_0 e γ_1 podem levar às formas normais das bifurcações de forquilha supercrítica (transição contínua) e subcrítica (transição descontínua).

3.3.1 Acoplamento com transição de fase contínua

Considerando um conjunto de N osciladores idênticos, agora vamos definir γ_0 e γ_1 como funções dependentes de $n_1(t)$. Uma forma particularmente interessante de $\gamma_0(n_1)$ e $\gamma_1(n_1)$ que apresenta uma transição de fase de um regime com metade da população em cada estado para um regime onde uma fração maior da população se concentra no mesmo estado é definida por,

$$\begin{aligned} \gamma_0(n_1(t)) &= \frac{3}{2}n_1^2(t) + \frac{1-4\epsilon}{8}, \\ \gamma_1(n_1(t)) &= -\frac{1}{2}n_1^2(t) + \frac{5-4\epsilon}{8}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

valores negativos das taxas $\gamma_0(n_1)$ e $\gamma_1(n_1)$ não representam situações físicas e para evitar esses casos, vamos limitar o parâmetro de acoplamento $\varepsilon < 1/4$. Podemos escrever $n_1(t) = P_1(t) + \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$, no limite termodinâmico, onde $N \rightarrow \infty$ os termos de flutuação desaparecem. Portanto podemos reescrever as Eqs. (3.8) da seguinte forma,

$$\gamma_0(P_1(t)) = \frac{3}{2}P_1^2(t) + \frac{1-4\varepsilon}{8}, \quad (3.9)$$

$$\gamma_1(P_1(t)) = -\frac{1}{2}P_1^2(t) + \frac{5-4\varepsilon}{8}. \quad (3.10)$$

Substituindo essas taxas na equação mestra (3.1), podemos obter,

$$\dot{P}_1 = \varepsilon(P_1 - 1/2) - (P_1 - 1/2)^3, \quad (3.11)$$

usando a substituição $u = P_1 - 1/2$ podemos obter,

$$\dot{u} = \varepsilon u - u^3, \quad (3.12)$$

que é a forma normal da bifurcação de forquilha supercrítica (supercritical pitchfork bifurcation). Esse tipo de bifurcação é característica de transições de fase de segunda ordem, onde temos o aparecimento de dois novos pontos fixos para $\varepsilon > 0$ que se afastam de forma gradativa, a medida que aumentamos o valor do parâmetro de acoplamento ε .

A figura 3.2 apresenta uma bifurcação de forquilha supercrítica. Aqui usaremos a convenção normalmente utilizada nos livros de dinâmica não linear, onde as linhas contínuas representam os pontos fixos estáveis e as linhas tracejadas os pontos fixos instáveis. No gráfico a bifurcação ocorre para $\varepsilon = \varepsilon_c = 0$, podemos ver que a partir desse ponto são criados dois novos pontos fixos estáveis e o ponto fixo estável original perde sua estabilidade, se tornando um ponto fixo instável.

Agora caracterizaremos essa transição de um regime onde temos metade dos osciladores em cada um dos estados para o regime onde a maioria dos osciladores estão em um mesmo estado. Para obter os pontos fixos usamos a condição $\dot{P}_1 = 0$ e denotamos os pontos fixos por P_1^* . Aplicando essas condições na Eq. (3.11), podemos obter para $\varepsilon < 0$ que o sistema apresenta apenas o ponto fixo estável $P_1^* = 1/2$, enquanto que no caso $\varepsilon > 0$, o sistema apresenta os pontos fixos estáveis $P_1^* = 1/2 \pm \sqrt{\varepsilon}$ e o ponto fixo $P_1^* = 1/2$ se torna instável.

Podemos destacar dois intervalos do parâmetro ε para os quais o sistema apresenta comportamentos diferentes. Primeiro, o caso onde $\varepsilon < \varepsilon_c$ está apresentado na Fig. 3.3, o sistema converge para o único ponto fixo estável, que é $P_1^* = 1/2$. Já o caso $\varepsilon > \varepsilon_c$ apresentado na Fig. 3.4, o sistema possui dois pontos fixos estáveis em $P_1^* = 1/2 \pm \sqrt{\varepsilon}$ e um ponto fixo instável

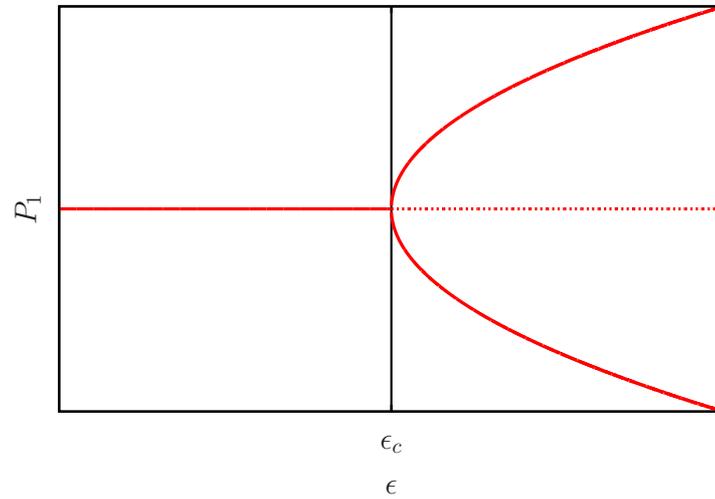


Figura 3.2: Gráfico de uma bifurcação de forquilha supercrítica. Linhas contínuas representam os pontos fixos estáveis e as linhas tracejadas os pontos fixos instáveis.

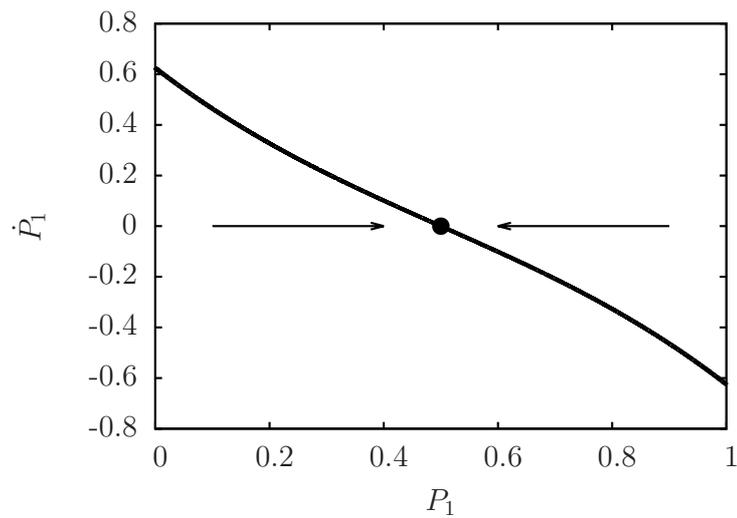


Figura 3.3: Diagrama de fluxo para o sistema (3.11) com $\epsilon = -1.0$, apresentando apenas um ponto fixo estável para o qual o fluxo converge.

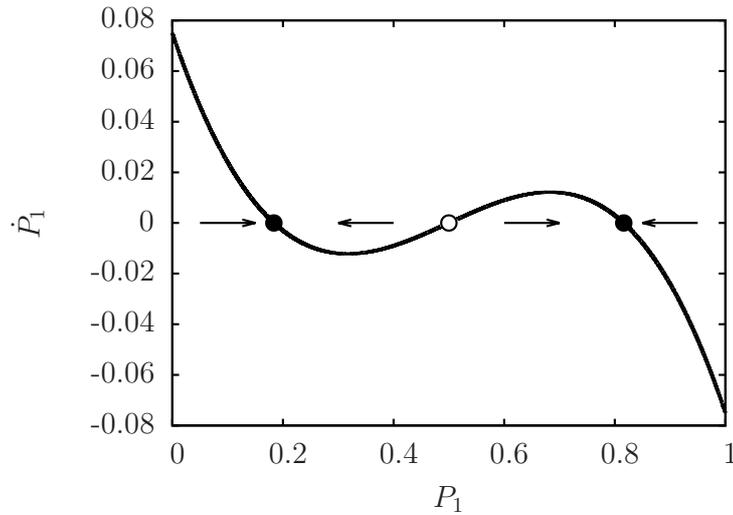


Figura 3.4: Diagrama de fluxo para o sistema (3.11) com $\varepsilon = 0.1$, apresentando um ponto fixo instável e dois pontos fixos estáveis.

em $P_1^* = 1/2$ e, dessa forma, o sistema converge para o ponto fixo estável $P_1^* = 1/2 + \sqrt{\varepsilon}$ caso $P_1(0) > 1/2$, caso contrário, para $P_1(0) < 1/2$ o sistema converge para o ponto fixo estável $P_1^* = 1/2 - \sqrt{\varepsilon}$. Observe que a condição inicial vai determinar o ponto final para o qual o sistema vai convergir e uma vez atingindo o ponto estável, o sistema permanecerá nesse estado indeterminadamente.

A Eq. (3.11) descreve uma dinâmica associada a um potencial dado por

$$\mathcal{U}(P_1) = \frac{1}{4}(P_1 - 1/2)^4 - \frac{1}{2}\varepsilon(P_1 - 1/2)^2. \quad (3.13)$$

Esse potencial está apresentado na Fig. 3.5, podemos notar que o sistema apresenta uma transição de um potencial de poço único para um potencial de poço duplo, sempre mantendo a simetria com relação ao ponto $P_1 = 1/2$.

3.3.2 Acoplamento com transição de fase descontínua

Já vimos que o acoplamento global com as taxas dadas pela Eq. (3.8) dão origem a um sistema de osciladores estocásticos que apresenta uma transição contínua, representada como uma bifurcação de forquilha supercrítica na aproximação de campo médio. Nesta seção apresentaremos taxas que dão origem a um sistema com transição de fase descontínua, nesse caso o sistema apresenta uma bifurcação de forquilha subcrítica.

Para obter um modelo com uma transição de fase descontínua com o parâmetro de acopla-

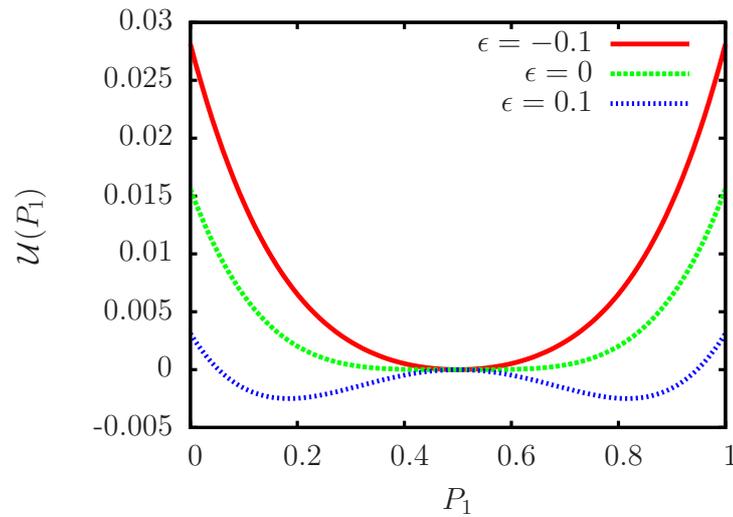


Figura 3.5: Potencial para sistema com transição de fase contínua. Independente do valor do parâmetro de acoplamento r o potencial é simétrico em relação a $P_1 = 1/2$.

mento escolhemos as taxas $\gamma_0(n_1)$ e $\gamma_1(n_1)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \gamma_0(n_1) &= \frac{1}{32}n_1(8n_1(6a-5b) + n_1^2(80b-32a) - 16n_1^3(5b+8) \\
 &\quad + 32n_1^4(b+3) - 16r - 20a + 9b + 32) \\
 \gamma_1(n_1) &= -\frac{1}{32}(n_1-1)(8n_1(2a-b) - 32n_1^2(a-b-1) \\
 &\quad + n_1^3(64-48b) + 32n_1^4(b+3) - 16r - 4a + b)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Nesse caso o parâmetro de acoplamento é r , e temos mais dois parâmetros arbitrários a e b . Seguindo o mesmo procedimento que utilizamos no caso anterior e substituindo essas taxas na equação mestra (3.1), podemos obter,

$$\dot{P}_1 = r\left(P_1 - \frac{1}{2}\right) + a\left(P_1 - \frac{1}{2}\right)^3 - b\left(P_1 - \frac{1}{2}\right)^5. \tag{3.15}$$

Mais uma vez utilizando a transformação $u = P_1 - 1/2$, temos,

$$\dot{u} = ru + au^3 - bu^5. \tag{3.16}$$

Essa é a forma normal de uma bifurcação de forquilha subcrítica, onde o termo de ordem 5 garante que a variável u não cresce ou decresce indefinidamente. A Fig. 3.6 mostra o diagrama de bifurcação da Eq. (3.15) para o caso específico onde $a = 20$ e $b = 100$. Nesse caso para $r < -1$ temos apenas um ponto fixo em $P_1^* = 1/2$. Em $r = -1$ há uma bifurcação, dando origem a um par de pontos fixos estáveis e um par de pontos fixos instáveis. De maneira geral podemos determinar os valores de r onde ocorrem as bifurcações, fazendo $\dot{P}_1 = 0$ na Eq. (3.15),

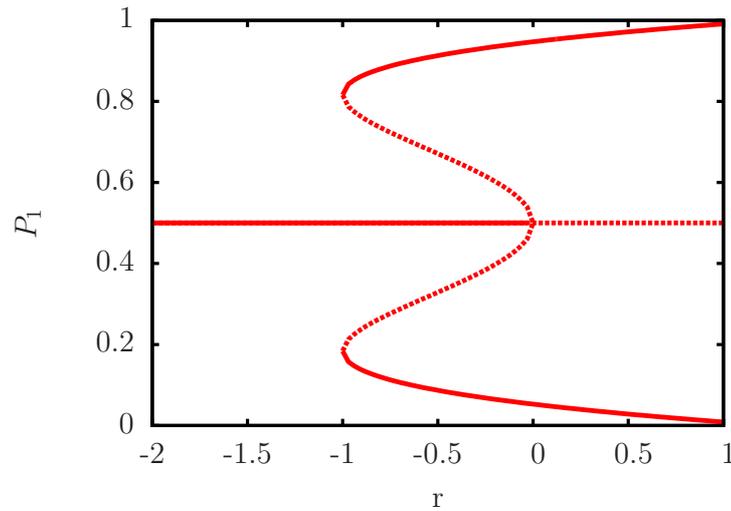


Figura 3.6: Diagrama de bifurcação para o sistema $\dot{P}_1 = r(P_1 - 1/2) + 20(P_1 - 1/2)^3 - 100(P_1 - 1/2)^5$. As linhas contínuas indicam as posições dos pontos fixos estáveis e as linhas tracejadas indicam as posições dos pontos fixos instáveis.

obtemos os seguintes pontos fixos estáveis.

$$P_1^* = \frac{1}{2} \quad (3.17)$$

$$P_1^* = \frac{b - \sqrt{2b\sqrt{4rb + a^2} + 2ab}}{2b} \quad (3.18)$$

$$P_1^* = \frac{b + \sqrt{2b\sqrt{4rb + a^2} + 2ab}}{2b}. \quad (3.19)$$

Obtemos também os seguintes pontos fixos instáveis

$$P_1^* = \frac{b - \sqrt{2ab - 2b\sqrt{4rb + a^2}}}{2b} \quad (3.20)$$

$$P_1^* = \frac{b + \sqrt{2ab - 2b\sqrt{4rb + a^2}}}{2b}. \quad (3.21)$$

Podemos encontrar o ponto onde as bifurcações de ponto de sela surgem através da condição

$$2ab - 2b\sqrt{4rb + a^2} = 2ab + 2b\sqrt{4rb + a^2}, \quad (3.22)$$

que nos dá o ponto exato onde a Eq. (3.15) apresenta 3 raízes reais.

Dessa equação podemos ver que surgem dois pares de pontos fixos para $r = -\frac{a^2}{4b}$. Portanto, para os valores dos parâmetros $a = 20$ e $b = 100$ temos a primeira bifurcação em $r = -1$. O sistema apresenta 3 regimes distintos, o primeiro obedece a condição $r < -1$ e o diagrama de fluxo está apresentado na Fig. 3.7, onde o sistema vai convergir para o ponto fixo $P_1^* = 1/2$ independentemente da condição inicial. A região $-1 < r < 0$ apresenta 5 pontos fixos e o

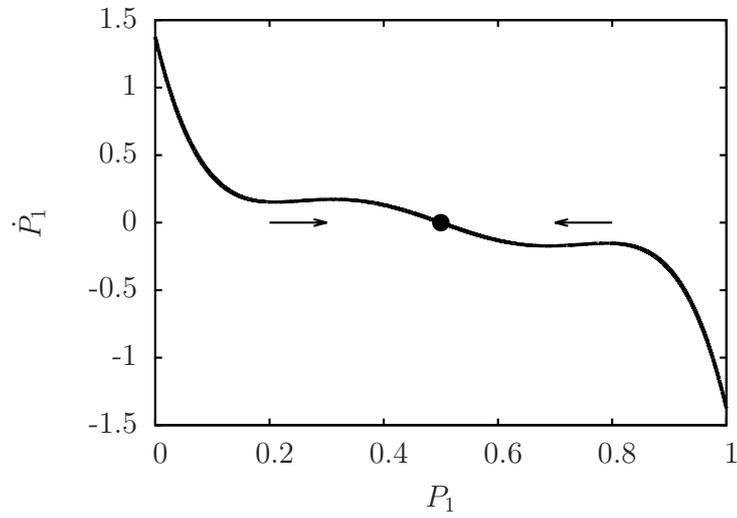


Figura 3.7: Diagrama de fluxo para o sistema (3.15) com $r = -1.5$. Indicando a existência de apenas um ponto fixo em $P_1 = 1/2$.

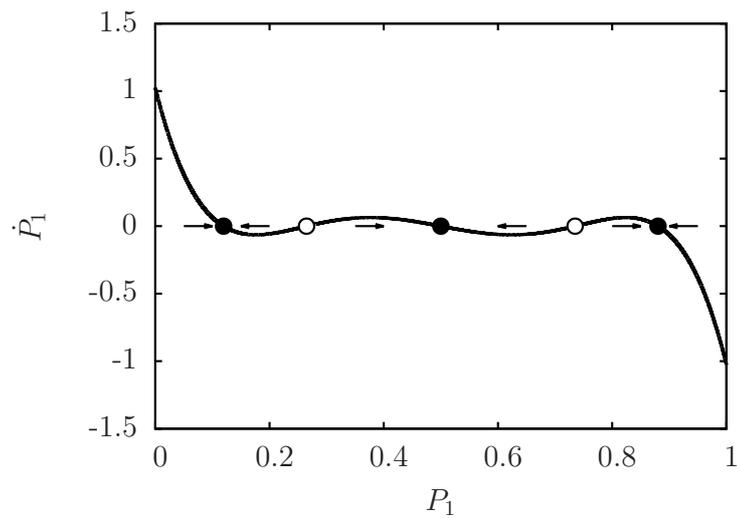


Figura 3.8: Diagrama de fluxo para o sistema (3.15) com $r = -0.8$. Indicando a existência de 3 pontos fixos estáveis e 2 pontos fixos instáveis.

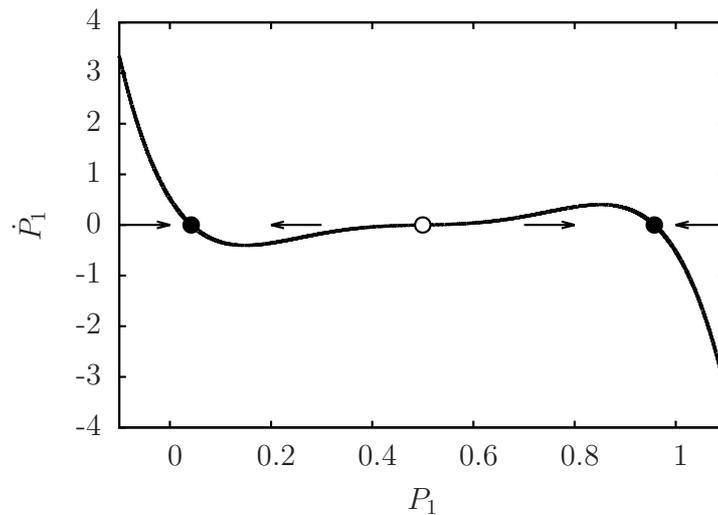


Figura 3.9: Diagrama de fluxo para o sistema (3.15) com $r = 0.2$. Indicando a existência de 2 pontos fixos estáveis e 1 ponto fixo instável.

diagrama de fluxo está apresentado na Fig. 3.8, nesse caso o sistema vai convergir para um dos 3 pontos fixos estáveis de modo a sempre se afastar dos pontos fixos instáveis, sendo a condição inicial determinante para o estado final do sistema. A última região, $r > 0$, com diagrama de fluxo apresentado na Fig. 3.9, apresenta 2 pontos fixos estáveis e o ponto fixo instável $P_1^* = \frac{1}{2}$. Nesse caso, o sistema vai convergir para o ponto fixo superior caso a condição inicial seja $P_1(0) > 1/2$ e caso $P_1(0) < 1/2$, o sistema converge para o ponto fixo estável inferior.

Na Fig. 3.10 apresentamos o potencial associado a Eq. (3.15). Nesse caso o sistema apresenta transição de um potencial de poço único para um potencial de poço triplo, com um poço centralizado em $n_1 = 1/2$, assim como no modelo anterior podemos notar que o sistema apresenta uma simetria com relação ao ponto $n_1 = 1/2$, essa simetria é mantida para qualquer valor de r .

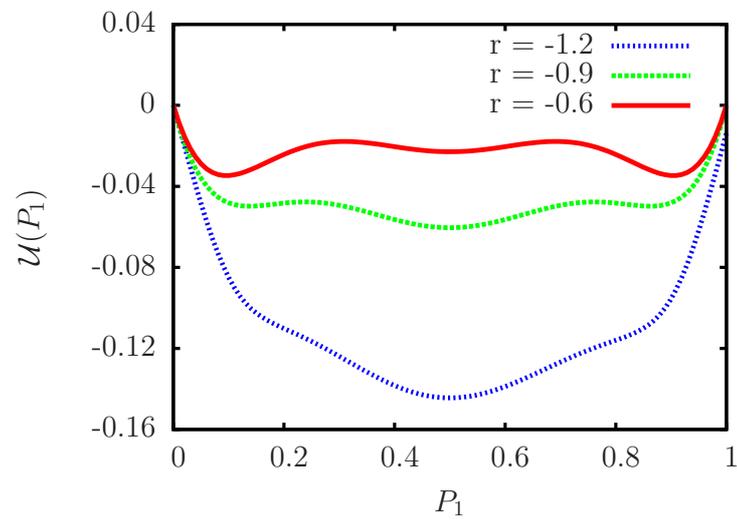


Figura 3.10: Potencial para sistema com transição de fase descontínua. Independente do valor do parâmetro de acoplamento r o potencial é simétrico em relação a $P_1 = 1/2$.

4 *Equação mestra*

Nesse capítulo faremos uma abordagem mesoscópica, escrevendo a equação mestra para sistemas de osciladores estocásticos globalmente acoplados. Iniciaremos o capítulo descrevendo a equação mestra para dois osciladores acoplados e obtendo a solução para esse sistema. Em seguida faremos a generalização da equação mestra para um sistema de N osciladores e apresentaremos alguns resultados para o sistema no estado estacionário.

4.1 Sistema com dois osciladores

No caso de apenas dois osciladores acoplados o sistema pode assumir 3 configurações $P(N_1, t)$, onde N_1 pode ser 0, 1 ou 2. Dessa forma podemos escrever as seguintes equações para a evolução do sistema,

$$\frac{\partial P(0, t)}{\partial t} = \gamma_1(1)P(1, t) - 2\gamma_0(0)P(0, t), \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial P(1, t)}{\partial t} = 2\gamma_1(2)P(2, t) + 2\gamma_0(0)P(0, t) - [\gamma_1(1) + \gamma_0(1)]P(1, t), \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial P(2, t)}{\partial t} = \gamma_0(1)P(1, t) - 2\gamma_1(2)P(2, t). \quad (4.3)$$

Do lado direito das equações, os termos positivos representam as probabilidades do sistema sofrer uma transição e assumir a configuração $P(N_1, t)$ e os termos negativos representam as probabilidades do sistema sofrer uma transição e deixar a configuração $P(N_1, t)$. De forma equivalente, podemos utilizar a formulação matricial e escrever

$$\begin{pmatrix} \dot{P}(0, t) \\ \dot{P}(1, t) \\ \dot{P}(2, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\gamma_0(0) & \gamma_1(1) & 0 \\ 2\gamma_0(0) & -\gamma_1(1) - \gamma_0(1) & 2\gamma_1(2) \\ 0 & \gamma_0(1) & -2\gamma_1(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(0, t) \\ P(1, t) \\ P(2, t) \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Para obter o estado estacionário devemos achar o estado onde $\dot{P}(N_1, t) = 0$ para qualquer valor de N_1 . Ou seja

$$\begin{pmatrix} -2\gamma_0(0) & \gamma_1(1) & 0 \\ 2\gamma_0(0) & -\gamma_1(1) - \gamma_0(1) & 2\gamma_1(2) \\ 0 & \gamma_0(1) & -2\gamma_1(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(0, t) \\ P(1, t) \\ P(2, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Resolvendo o sistema e usando a condição $\sum_{k=0}^2 P(k, t) = 1$, podemos obter

$$P(0) = \frac{\left[\frac{\gamma_1(1)}{2\gamma_0(0)} \right]}{\left[\frac{\gamma_1(1)}{2\gamma_0(0)} + \frac{\gamma_0(1)}{2\gamma_1(2)} + 1 \right]}, \quad (4.6)$$

$$P(1) = \frac{1}{\left[\frac{\gamma_1(1)}{2\gamma_0(0)} + \frac{\gamma_0(1)}{2\gamma_1(2)} + 1 \right]}, \quad (4.7)$$

$$P(2) = \frac{\left[\frac{\gamma_0(1)}{2\gamma_1(2)} \right]}{\left[\frac{\gamma_1(1)}{2\gamma_0(0)} + \frac{\gamma_0(1)}{2\gamma_1(2)} + 1 \right]}. \quad (4.8)$$

Agora vamos definir uma forma para $\gamma_0(N_1)$ e $\gamma_1(N_1)$, utilizando os mesmos modelos de taxas usados no capítulo anterior para transições de fase contínua e descontínua.

Relembrando a forma das taxas, para a transição de fase contínua temos

$$\gamma_0(N_1(t)) = \frac{3}{2} \left(\frac{N_1(t)}{N} \right)^2 + \frac{1 - 4\varepsilon}{8}, \quad (4.9)$$

$$\gamma_1(N_1(t)) = -\frac{1}{2} \left(\frac{N_1(t)}{N} \right)^2 + \frac{5 - 4\varepsilon}{8}. \quad (4.10)$$

substituindo essas taxas nas Eqs. (4.6), (4.7) e (4.8), e lembrando que $N = 2$, obtemos

$$P(0) = P(2) = \frac{2 - 2\varepsilon}{5 - 8\varepsilon}, \quad (4.11)$$

$$P(1) = \frac{1 - 4\varepsilon}{5 - 8\varepsilon}. \quad (4.12)$$

As Eqs. (4.11) e (4.12) estão ilustradas na Fig. 4.1. Podemos observar que as probabilidades de ter os dois osciladores no mesmo estado são iguais ($P(0)$ e $P(2)$) e elas crescem ao aumentar o parâmetro de acoplamento ε , enquanto a probabilidade de ter um oscilador em cada estado ($P(1)$) diminui a medida que aumentamos ε .

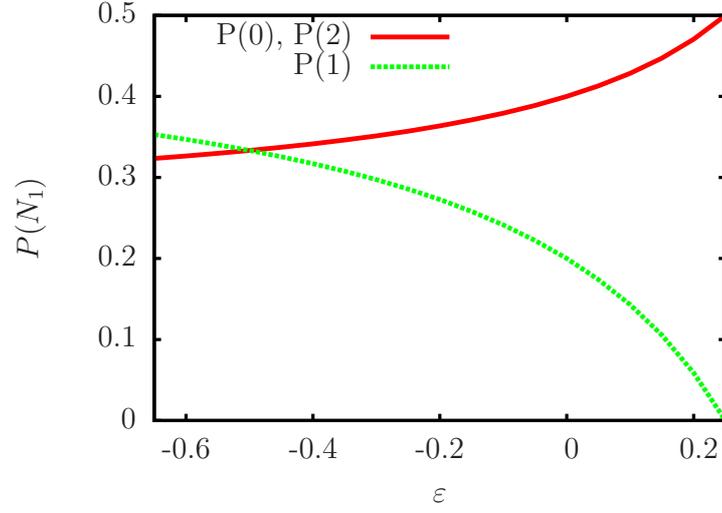


Figura 4.1: Probabilidades $P(0), P(1)$ e $P(2)$ como função de ε para as taxas γ_0 e γ_1 dadas pelas Eqs. (4.9) e (4.10).

Para a transição de fase descontínua as taxas de transição são dadas por,

$$\begin{aligned} \gamma_0(N_1) = & \frac{1}{32} \frac{N_1}{N} \left(8 \frac{N_1}{N} (6a - 5b) + \left(\frac{N_1}{N} \right)^2 (80b - 32a) \right. \\ & - 16 \left(\frac{N_1}{N} \right)^3 (5b + 8) + 32 \left(\frac{N_1}{N} \right)^4 (b + 3) \\ & \left. - 16r - 20a + 9b + 32 \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1(N_1) = & -\frac{1}{32} \left(\frac{N_1}{N} - 1 \right) \left(8 \left(\frac{N_1}{N} \right) (2a - b) \right. \\ & - 32 \left(\frac{N_1}{N} \right)^2 (a - b - 1) + \left(\frac{N_1}{N} \right)^3 (64 - 48b) \\ & \left. + 32 \left(\frac{N_1}{N} \right)^4 (b + 3) - 16r - 4a + b \right), \end{aligned} \quad (4.14)$$

usando $a = 20$ e $b = 100$ e substituindo $\gamma_1(N_1)$ e $\gamma_2(N_1)$ nos formatos (4.13) e (4.14), nas Eqs. (4.6),(4.7),(4.8) e resolvendo o sistema resultante, podemos obter

$$P(0) = P(2) = \frac{21 - 8r}{82 - 48r} \quad (4.15)$$

$$P(1) = \frac{20 - 16r}{41 - 24r}. \quad (4.16)$$

Na Fig. 4.2, temos os gráficos de $P(0), P(1)$ e $P(2)$ como função do parâmetro de acoplamento r , no caso utilizamos o intervalo de r apenas até -0.6 pois acima desse valor temos taxas negativas, não representando portanto um sistema físico realista. Nesse caso também podemos observar que há um aumento da probabilidade de encontrar os dois osciladores no mesmo estado

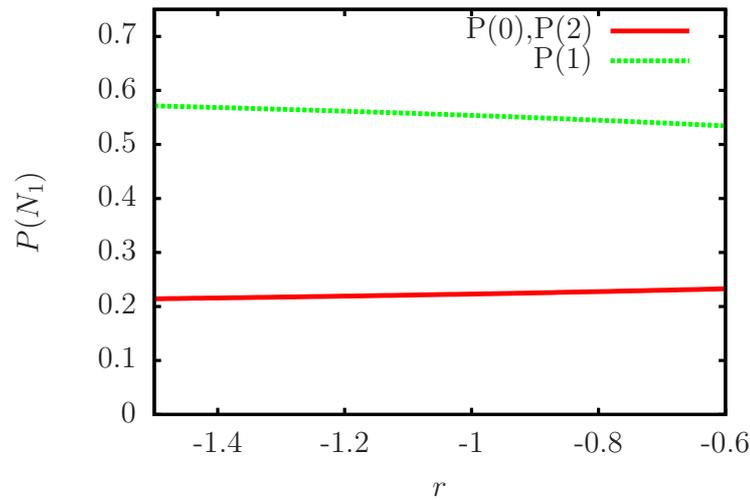


Figura 4.2: Probabilidades $P(0), P(1)$ e $P(2)$ como função de ε para as taxas γ_0 e γ_1 dadas pelas Eqs. (4.13) e (4.14).

com o aumento de r , enquanto a probabilidade de encontrar apenas um oscilador em cada estado diminui.

4.2 Sistema com N osciladores

Para um conjunto com N osciladores globalmente acoplados, podemos descrever a evolução da probabilidade do estado $P(N_1, t)$ com a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(N_1, t) &= (N - N_1 + 1)\gamma_0(N_1 - 1)P(N_1 - 1, t) \\ &+ (N_1 + 1)\gamma_1(N_1 + 1)P(N_1 + 1, t) \\ &- [N_1\gamma_1(N_1) + (N - N_1)\gamma_0(N_1)]P(N_1, t). \end{aligned} \quad (4.17)$$

note que a Eq. (4.17) é uma generalização do procedimento utilizado na seção anterior e estamos considerando que não ocorrem múltiplas transições de estado ao mesmo tempo, ou seja em cada instante de tempo ocorre apenas uma transição. Essa condição é compatível com uma probabilidade de transição $\gamma\Delta t$ pequena, ou seja um intervalo Δt pequeno, que está implícito ao escrever a derivada temporal no lado esquerdo da equação. Da mesma forma que na seção anterior, podemos escrever o sistema de $N + 1$ no seguinte formato

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathcal{M}\mathbf{P}(t), \quad (4.18)$$

onde \mathcal{M} é uma matriz dada por

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_{3,2} & M_{3,3} & M_{3,4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & M_{N,N} & M_{N,N+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M_{N+1,N} & M_{N+1,N+1} \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Na matriz \mathcal{M} os elementos da diagonal principal são escritos como $M_{k,k} = -(N - k + 1)\gamma_0(k - 1) - (k - 1)\gamma_1(k - 1)$, os elementos da primeira diagonal acima da diagonal principal são dados por $M_{k,k+1} = k\gamma_1(k)$, e os elementos da primeira diagonal abaixo da diagonal principal são $M_{k+1,k} = (n - k + 1)\gamma_0(k - 1)$. Todos os outros elementos da matriz \mathcal{M} são 0.

Para obter as probabilidades do estado estacionário, temos que achar o autovetor $\mathbf{P}(t)$ associado ao autovalor 0 e que satisfaz a condição de normalização

$$\sum_{m=0}^N P(m, t) = 1, \quad (4.20)$$

dessa forma é possível achar a probabilidade de cada um dos $N + 1$ estados no regime estacionário.

Para ilustrar, a Fig. 4.3 apresenta a solução estacionária $P(N_1)$ para um sistema de 50 osciladores e vários valores de ε , como indicado no gráfico. Essa solução foi obtida usando-se as taxas $\gamma_0(n_1)$ e $\gamma_1(n_1)$ dadas pelas Eqs. (4.9) e (4.10) (transição de fase contínua). Podemos observar claramente a transição de um regime com um máximo centralizado para um regime com dois máximos com alturas assimétricas. A transição de um regime monomodal para um regime bimodal foi explorada com a aproximação de campo médio, porém a aproximação de campo médio prevê um potencial simétrico para esse sistema. Essa assimetria será explorada mais a frente quando formos tratar do problema usando a abordagem de Langevin.

Já no modelo onde as taxas são dadas pelas Eqs. (4.13) e (4.14) (transição de fase descontínua), a solução está apresentada na Fig. 4.4. No gráfico podemos ver que com o aumento de r ocorre uma transição de um regime onde há apenas um pico para um regime onde existem três picos, e o pico central diminui a medida que r cresce além da transição. Podemos também observar uma assimetria na distribuição de probabilidades, como no caso anterior daremos mais atenção a essa assimetria quando formos tratar do problema utilizando a abordagem de Langevin.

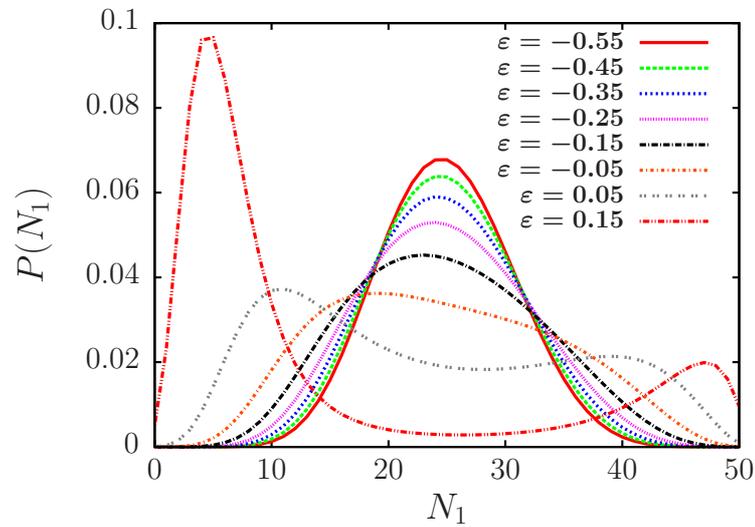


Figura 4.3: Distribuição de probabilidades $P(N_1)$ obtida através da solução da equação mestra para um sistema com 50 osciladores. Podemos observar que a transição do regime monomodal para o regime bimodal ocorre de modo contínuo.

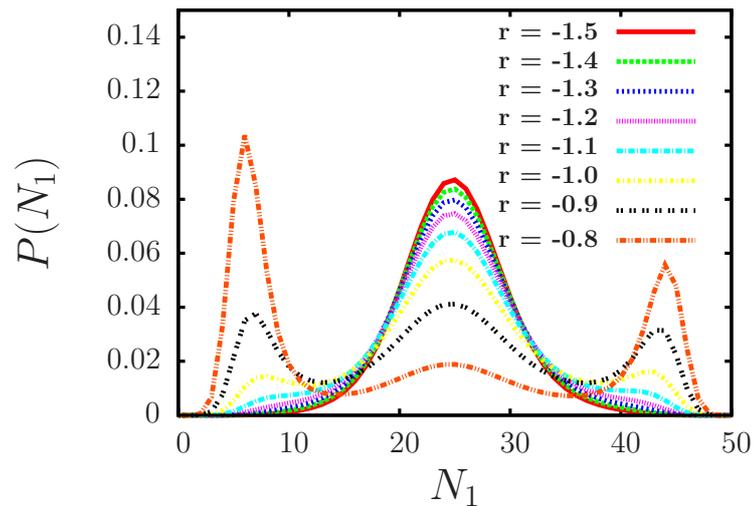


Figura 4.4: Distribuição de probabilidades $P(N_1)$ obtida através da solução da equação mestra para um sistema com 50 osciladores. Podemos observar que a transição do regime monomodal para o regime trimodal ocorre de modo descontínuo.

5 *Equação de Langevin*

Nesse capítulo vamos utilizar a abordagem de Langevin para estudar um sistema de osciladores estocásticos de dois níveis globalmente acoplados. Para obter a equação de Langevin para esse sistema partiremos de um modelo microscópico, que também foi utilizado em nossas simulações computacionais.

5.1 **Dedução da Equação de Langevin para osciladores estocásticos de dois níveis**

Como nos capítulos anteriores, vamos definir, em um sistema de N osciladores, $N_1(t)$ como a quantidade de osciladores no estado 1 e $N - N_1(t)$ como a quantidade de osciladores no estado 0, para um dado instante t . Essas quantidades mudam de acordo com as taxas de transição γ_0 e γ_1 que devido a nosso acoplamento dependem da fração $n_1(t) \equiv N_1(t)/N$. Lembrando que γ_0 é a taxa de transição do estado 0 para o estado 1 e γ_1 é a taxa de transição do estado 1 para o estado 0, temos que N_1 no instante $t + dt$ é dado por

$$\begin{aligned} N_1(t + dt) &= N_1(t) - \sum_{k=1}^{N_1} \theta[\gamma_1(n_1)dt - \zeta_k] \\ &\quad + \sum_{k=N_1+1}^N \theta[\gamma_0(n_1)dt - \zeta_k]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Onde $\theta(x)$ é a função degrau de Heaviside, sendo definida como $\theta(x) = 1$ se $x > 0$ e $\theta(x) = 0$ se $x < 0$. O conjunto $\{\zeta_k\}_{k=1}^N$ é um conjunto de variáveis aleatórias independentes, distribuídas de forma uniforme no intervalo $[0, 1]$. Dessa forma se o oscilador k está no estado 1 no tempo t , então se $\gamma_1(n_1)dt > \zeta_k$, o oscilador k muda do estado 1 para o estado 0 e como consequência N_1 decresce de 1. Se $\gamma_1(n_1)dt < \zeta_k$, então o oscilador k permanece no estado 1. De forma similar, para um oscilador no estado 0, se $\gamma_0(n_1)dt > \zeta_k$ ele modifica seu estado para 1, aumentando N_1 em 1, e caso $\gamma_0(n_1)dt < \zeta_k$, o oscilador permanece no estado 0. Portanto a Eq. (5.1) é um processo de contagem direto. É importante ressaltar que para determinar $N_1(t + dt)$ estamos usando as taxas $\gamma_0(n_1)$ e $\gamma_1(n_1)$ no instante t , portanto a equação de Langevin que obteremos

apresentará um termo de flutuação segundo a interpretação de Itô.

Nas simulações foi utilizado um procedimento de contagem similar, onde foi levado em consideração intervalos de tempo discretos e as variáveis ζ_k eram determinadas a cada passo através de um gerador de números aleatórios com distribuição de probabilidade uniforme no intervalo $[0, 1]$.

Para dar continuidade a nosso tratamento analítico da Eq. (5.1) se faz necessário investigar as variáveis aleatórias

$$\phi_k = \theta(X_0 - \zeta_k) \text{ e } \Phi_M = \sum_{k=1}^M \phi_k, \quad (5.2)$$

onde $X_0 \in [0, 1]$ é uma quantidade fixa, enquanto a variável Φ_M é uma contagem de quantos osciladores em uma população de M osciladores mudam de estado no instante t . Denotando a probabilidade do evento A por $P(A)$, temos

$$\begin{aligned} P(\phi_k = 1) &= X_0 \\ P(\Phi_M = M') &= \frac{M!}{(M-M')!M'} X_0^{M'} (1-X_0)^{M-M'}, \quad M' < M. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Como ζ_k varia de 0 a 1, temos que a probabilidade de obter $\phi_k = 1$ é dada por X_0 , Já $P(\Phi_M = M')$ é a distribuição de probabilidade para ter M' transições em um conjunto de M osciladores. A distribuição $P(\Phi_M = M')$ é muito comum em problemas de mecânica estatística e é conhecida como distribuição binomial [45]. Os dois primeiros momentos da distribuição binomial são dados por,

$$\langle \Phi_M \rangle = MX_0 \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma(\Phi_M) &= \sqrt{\langle (\Phi_M - \langle \Phi_M \rangle)^2 \rangle} \\ &= \sqrt{MX_0(1-X_0)}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Sabemos, também, que essa distribuição obedece o teorema do limite central [47], portanto para uma quantidade muito grande de repetições M , temos,

$$P(\Phi_M = M') \approx \mathcal{N}(\langle \Phi_M \rangle, \sigma(\Phi_M)), \quad (5.6)$$

onde $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ denota uma distribuição gaussiana com média μ e desvio padrão σ . Isso nos leva a introduzir a mudança de variáveis,

$$\psi = \frac{\Phi_M - \langle \Phi_M \rangle}{\sigma(\Phi_M)}, \quad (5.7)$$

e, portanto

$$\Phi_M = \langle \Phi_M \rangle + \sigma(\Phi_M) \psi, \quad (5.8)$$

para $M \gg 1$, $\psi \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Usando essa mudança de variáveis e relacionando $X_0 = \gamma_1(n_1) dt$ e $M = N_1$ nos resultados acima, podemos obter a seguinte relação para o primeiro somatório da Eq. (5.1),

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_1} \theta[\gamma_1(n_1) dt - \zeta_k] &= N_1 \gamma_1(n_1) dt \\ &+ \sqrt{N_1 \gamma_1(n_1) dt (1 - \gamma_1(n_1) dt)} \psi_1, \\ &= N_1 \gamma_1(n_1) dt \\ &+ \sqrt{N_1 \gamma_1(n_1) dt} \psi_1. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Onde desprezamos os termos de ordem $O[(dt)^2]$ dentro das raízes quadradas. E por outro lado, relacionando $X_0 = \gamma_0(n_1) dt$ e $M = N - N_1$, da mesma forma, podemos obter,

$$\begin{aligned} \sum_{k=N_1+1}^N \theta[\gamma_0(n_1) dt - \zeta_k] &= (N - N_1) \gamma_0(n_1) dt \\ &+ \sqrt{(N - N_1) \gamma_0(n_1) dt (1 - \gamma_0(n_1) dt)} \psi_0 \\ &= (N - N_1) \gamma_0(n_1) dt \\ &+ \sqrt{(N - N_1) \gamma_0(n_1) dt} \psi_0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

Foi assumido que as três quantidades N , N_1 e $(N - N_1)$ são todas grandes, de modo que ψ_0 e $\psi_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Lembrando que ψ_1 é gerado a partir do conjunto $\{\zeta_k\}_{k=1}^{N_1}$, enquanto ψ_0 é gerado do conjunto $\{\zeta_k\}_{k=N_1+1}^N$, elas são independentes. Dessa forma, podemos definir a variável aleatória

$$\Psi = \frac{\sqrt{(N - N_1) \gamma_0(n_1) dt} \psi_0 - \sqrt{N_1 \gamma_1(n_1) dt} \psi_1}{\sqrt{(N - N_1) \gamma_0(n_1) dt + N_1 \gamma_1(n_1) dt}}, \quad (5.11)$$

de forma que $\Psi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Assim substituindo (5.9) e (5.10) na Eq. (5.1), temos

$$\begin{aligned} dN_1 &= \gamma_0(n_1) (N - N_1) dt - \gamma_1(n_1) N_1 dt \\ &+ \sqrt{[\gamma_0(n_1) (N - N_1) + \gamma_1(n_1) N_1] dt} \Psi, \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde $dN_1 = N_1(t + dt) - N_1(t)$. Finalmente podemos escrever essa equação para a densidade $n_1(t)$ e definir

$$\xi(t) = \frac{\Psi}{\sqrt{dt}}. \quad (5.13)$$

Como $\Psi \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\xi(t)$ corresponde a um ruído branco gaussiano com

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \text{ e } \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (5.14)$$

Dessa forma chegamos a uma equação de Langevin que governa $n_1(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 = & \gamma_0(n_1) - [\gamma_0(n_1) + \gamma_1(n_1)]n_1 \\ & + \sqrt{(1 - n_1)\gamma_0(n_1) + n_1\gamma_1(n_1)} \times \frac{\xi(t)}{\sqrt{N}}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Note que no limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$, a Eq. (5.15) se reduz ao caso da aproximação de campo médio

$$\dot{n}_1 = \gamma_0(n_1) - [\gamma_0(n_1) + \gamma_1(n_1)]n_1. \quad (5.16)$$

Da Eq. (5.15) podemos extrair algumas informações que ajudam a explicar a assimetria encontrada nas soluções da equação mestra no capítulo anterior. Os termos de arrasto na Eq. (5.15) correspondem aos potenciais obtidos na abordagem de campo médio, sendo assim simétricos, porém o termo de flutuação é um ruído multiplicativo, tendo sua intensidade dependente de n_1 . Portanto exploraremos a dependência da intensidade das flutuações para cada mínimo dos potenciais do sistema sem ruído utilizando os modelos de acoplamento para $\gamma_0(n_1)$ e $\gamma_1(n_1)$ adotados nas seções anteriores. Vamos definir a intensidade do ruído η no formato

$$\eta = \sqrt{(1 - n_1^*)\gamma_0(n_1^*) + n_1^*\gamma_1(n_1^*)}, \quad (5.17)$$

onde n_1^* é o valor de n_1 em um dado ponto fixo estável do sistema sem flutuação.

5.2 Acoplamento com transição de fase contínua

Para o acoplamento com transição de fase contínua temos as taxas de transição dadas pelas Eqs. (3.8). Nesse modelo a transição de fase ocorre quando o parâmetro de acoplamento $\varepsilon = 0$, com a criação de dois pontos fixos estáveis em $n_1^* = \frac{1}{2} + \sqrt{\varepsilon}$ e $n_1^* = \frac{1}{2} - \sqrt{\varepsilon}$ quando temos $\varepsilon > 0$, lembrando que para garantir $\gamma_0(n_1)$ e $\gamma_1(n_1)$ positivos, ε deve ser menor que $1/4$. Na Fig. 5.1 temos o gráfico de $\eta(\varepsilon)$. Podemos observar que para qualquer valor de ε as flutuações no ponto $n_1^* = 1/2 + \sqrt{\varepsilon}$ são maiores que as flutuações no ponto $n_1^* = 1/2 - \sqrt{\varepsilon}$, portanto a assimetria observada nas soluções da equação mestra ocorrem devido a uma assimetria na intensidade da flutuação. Observe que nas soluções da equação mestra para $\varepsilon > 0$ a distribuição $P(n_1)$ apresenta um pico mais alto na região próxima do ponto $n_1^* = 1/2 - \sqrt{\varepsilon}$ e um pico menor na região próxima de $n_1^* = 1/2 + \sqrt{\varepsilon}$. Como a intensidade das flutuações é maior na região próxima

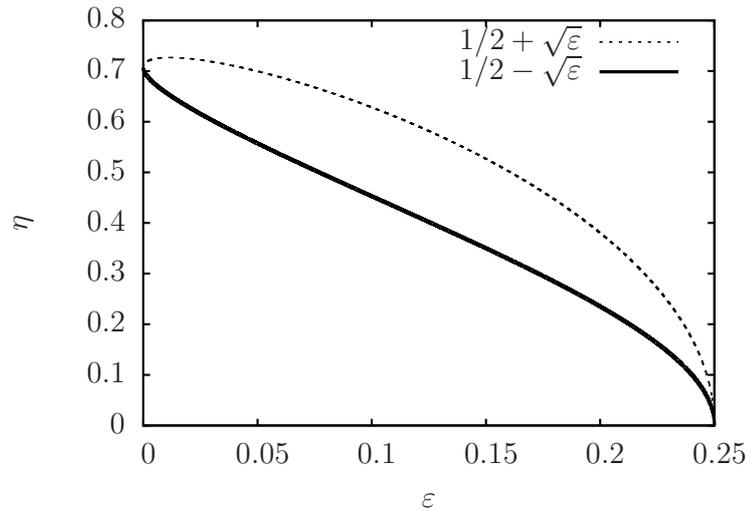


Figura 5.1: Gráfico de η em função do parâmetro de controle ε . A intensidade das flutuações são sempre maiores em torno do ponto fixo $n_1 = 1/2 + \sqrt{\varepsilon}$.

a $n_1^* = 1/2 + \sqrt{\varepsilon}$, flutuações com intensidade suficiente para levar o sistema ao outro ponto são mais frequentes, tornando o ponto $n_1^* = 1/2 - \sqrt{\varepsilon}$ mais estável.

5.3 Acoplamento com transição de fase descontínua

No modelo de acoplamento dado pelas taxas de transição descritas pelas Eqs. (3.14), com os parâmetros $a = 20$ e $b = 100$, temos que a transição de fase ocorre para o parâmetro de controle $r = -1$. Além disso, para esse caso específico, r deve ser inferior a -0.6 para garantir que as taxas vão sempre assumir valores positivos. O sistema sem flutuações, seguindo esse modelo, possui 3 pontos fixos estáveis, $n_1^* = \frac{1}{2}$, $n_1^* = \frac{1}{2} + \alpha$ e $n_1^* = \frac{1}{2} - \alpha$, onde $\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+4br+a}}{2b}}$. Mais uma vez, usando η como definido na Eq. (5.17), temos a intensidade das flutuações como função do parâmetro de controle r na Fig. 5.2 para os três pontos fixos estáveis. Podemos notar no gráfico que as flutuações em torno do ponto fixo estável central são bem mais intensas, caracterizando o pico mais largo e baixo na solução da equação mestra. Também podemos observar que as flutuações são mais intensas na região de $n_1^* = \frac{1}{2} + \alpha$ do que na região de $n_1^* = \frac{1}{2} - \alpha$, explicando o pico mais alto em $n_1^* = \frac{1}{2} - \alpha$ e o pico mais baixo em $n_1^* = \frac{1}{2} + \alpha$ observados na solução da equação mestra.

Dessa forma podemos chegar a conclusão que as flutuações induzidas pela quantidade finita de osciladores gera um ruído multiplicativo assimétrico, responsável pela assimetria na distribuição de probabilidade $P(n_1)$. A intensidade depende da posição no espaço de fase diminui a estabilidade em pontos onde o ruído apresenta maior intensidade, portanto o potencial

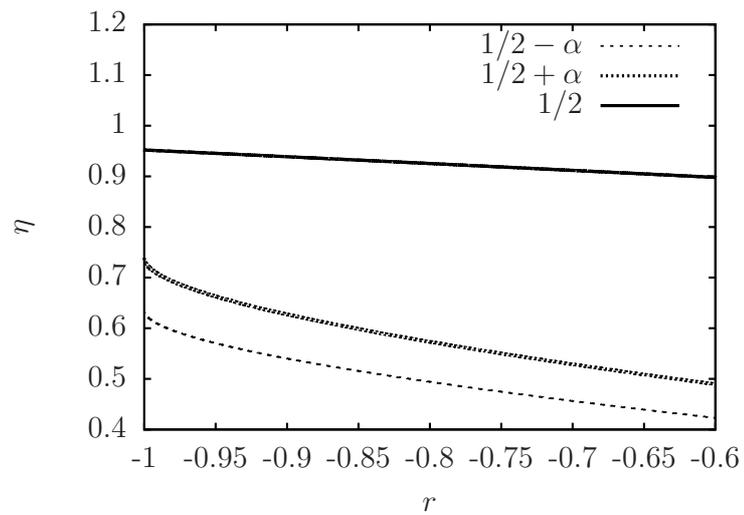


Figura 5.2: Gráfico de η em função do parâmetro de controle r . A intensidade das flutuações são sempre maiores em torno do ponto fixo $n_1 = 1/2 + \alpha$.

simétrico observado com a aproximação de campo médio se torna assimétrico e a região com flutuações de menor intensidade apresentam uma estabilidade maior. Esse fenômeno explica a aparente discordância entre os resultados de potenciais simétricos obtidos com a aproximação de campo médio e as distribuições de probabilidades assimétricas obtidas através da solução da equação mestra.

6 Equação de Fokker-Planck

Nesse capítulo exploraremos a equação de Fokker-Planck obtida para o sistema com N osciladores estocásticos globalmente acoplados. Inicialmente apresentaremos uma forma de obter a Equação de Fokker-Planck a partir da equação mestra (4.17), em seguida usaremos o resultado obtido através da abordagem de Langevin para obter a equação de Fokker-Planck e mostraremos que por ambos os métodos podemos obter equações de Fokker Planck equivalentes. Em seguida obtemos a solução da equação de Fokker-Planck e compararemos essa solução analítica com resultados obtidos a partir de simulações numéricas.

6.1 Expansão da equação mestra

Como vimos anteriormente, a equação mestra (4.17) trata da evolução temporal da distribuição de probabilidades $P(N_1, t)$, que, no nosso caso, descreve a probabilidade de em um dado instante t obter N_1 osciladores no estado 1. Em um sistema com probabilidades de transição do estado 0(1) para o estado 1(0) durante um intervalo de tempo dt dadas por $\gamma_0 dt$ ($\gamma_1 dt$). Além disso, no nosso modelo, o acoplamento global é caracterizado pela dependência das taxas γ_0 e γ_1 com N_1 . Note que, devido à condição de normalização, a mudança de variáveis para n_1 implica em $P(n_1, t) = NP(N_1, t)$. Dessa forma podemos reescrever a equação mestra (4.17) na forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial t} P(n_1, t) &= \left(1 - n_1 + \frac{1}{N}\right) \gamma_0 \left(n_1 - \frac{1}{N}\right) P\left(n_1 - \frac{1}{N}, t\right) \\ &- [n_1 \gamma_1(n_1) + (1 - n_1) \gamma_0(n_1)] P(n_1, t) \\ &+ \left(n_1 + \frac{1}{N}\right) \gamma_1 \left(n_1 + \frac{1}{N}\right) P\left(n_1 + \frac{1}{N}, t\right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Como foi visto no capítulo 4, a Eq. (4.17) considera que não há múltiplas transições no mesmo instante de tempo. Considerando a quantidade de osciladores $N \gg 1$, podemos escrever as

seguintes expansões

$$P(n_1 \pm \delta, t) = P(n_1) \pm \frac{d}{dn_1} P(n_1) \delta + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dn_1^2} P(n_1) \delta^2 + \mathcal{O}(\delta^3), \quad (6.2)$$

$$\gamma_l(n_1 \pm \delta, t) = \gamma_l(n_1) \pm \frac{d}{dn_1} \gamma_l(n_1) \delta + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dn_1^2} \gamma_l(n_1) \delta^2 + \mathcal{O}(\delta^3). \quad (6.3)$$

Onde l é um rótulo para um dos estados 0 ou 1. Usando essas expansões na Eq. (6.1) e desprezando os termos de ordem $\mathcal{O}(\delta^3)$ e superiores podemos obter a Eq. de Fokker-Planck no formato

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial t} P(n_1, t) &= \left(1 - n_1 + \frac{1}{N}\right) \left[\gamma_0(n_1) - \frac{\partial}{\partial n_1} \gamma_0(n_1) \frac{1}{N} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial n_1^2} \gamma_0(n_1) \frac{1}{N^2} \right] \\ &\quad \left[P(n_1) - \frac{\partial}{\partial n_1} P(n_1) \frac{1}{N} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial n_1^2} P(n_1) \frac{1}{N^2} \right] \\ &+ \left(n_1 + \frac{1}{N}\right) \left[\gamma_1(n_1) + \frac{\partial}{\partial n_1} \gamma_1(n_1) \frac{1}{N} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial n_1^2} \gamma_1(n_1) \frac{1}{N^2} \right] \\ &\quad \left[P(n_1) + \frac{\partial}{\partial n_1} P(n_1) \frac{1}{N} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial n_1^2} P(n_1) \frac{1}{N^2} \right] \\ &- [n_1 \gamma_1(n_1) + (1 - n_1) \gamma_0(n_1)] P(n_1, t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right) \\ &= \frac{1}{N} \left[\gamma_0(n_1) P(n_1) - (1 - n_1) P(n_1) \frac{\partial \gamma_0(n_1)}{\partial n_1} \right. \\ &\quad \left. - (1 - n_1) \gamma_0(n_1) \frac{\partial P(n_1)}{\partial n_1} + \gamma_1(n_1) P(n_1) \right. \\ &\quad \left. + n_1 P(n_1) \frac{\partial \gamma_1(n_1)}{\partial n_1} + n_1 \gamma_1(n_1) \frac{\partial P(n_1)}{\partial n_1} \right] \\ &+ \frac{1}{N^2} \left[-\frac{\partial \gamma_0(n_1)}{\partial n_1} P(n_1) - \frac{\partial P(n_1)}{\partial n_1} \gamma_0(n_1) \right. \\ &\quad \left. + (1 - n_1) \frac{\partial \gamma_0(n_1)}{\partial n_1} \frac{\partial P(n_1)}{\partial n_1} + \frac{(1 - n_1)}{2} P(n_1) \frac{\partial^2 \gamma_0(n_1)}{\partial^2 n_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 - n_1)}{2} \gamma_0(n_1) \frac{\partial^2 P(n_1)}{\partial^2 n_1} + P(n_1) \frac{\partial}{\partial n_1} \gamma_1(n_1) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_1(n_1) \frac{\partial}{\partial n_1} P(n_1) + n_1 \frac{\partial \gamma_1(n_1)}{\partial n_1} \frac{\partial P(n_1)}{\partial n_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n_1}{2} P(n_1) \frac{\partial^2 \gamma_1(n_1)}{\partial n_1^2} + \frac{n_1}{2} \gamma_1(n_1) \frac{\partial^2 P(n_1)}{\partial n_1^2} \right] \\ &+ \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^3}\right). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Portanto, podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial t} P(n_1, t) = -\frac{\partial}{\partial n_1} [\mathcal{F}(n_1) P(n_1, t)] + \frac{1}{2N} \frac{\partial^2}{\partial n_1^2} [\mathcal{G}(n_1) P(n_1, t)], \quad (6.5)$$

onde $\mathcal{F}(n)$ e $\mathcal{G}(n)$ são definidas por

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(n) &= (1-n)\gamma_0(n) - n\gamma_1(n) \\ \mathcal{G}(n) &= (1-n)\gamma_0(n) + n\gamma_1(n).\end{aligned}\tag{6.6}$$

Podemos obter a distribuição de probabilidades do estado estacionário utilizando a condição $\frac{\partial}{\partial t}P(n_1, t) = 0$ e resolvendo a equação diferencial para $P(n_1)$. Essa solução é de fundamental importância por se tratar do estado assintótico para o qual o sistema evolui no limite $t \rightarrow \infty$.

6.2 Equação de Fokker-Planck

Alternativamente podemos obter a equação de Fokker-Planck a partir da equação de Langevin para o sistema de osciladores globalmente acoplados. Podemos reescrever a Eq. (5.15) utilizando as definições (6.6), de forma que a Eq. (5.15) assume a forma

$$\dot{n}_1 = \mathcal{F}(n_1) + \sqrt{\mathcal{G}(n_1)} \frac{\xi(t)}{\sqrt{N}}.\tag{6.7}$$

Nosso modelo apresenta um ruído multiplicativo onde a intensidade $\mathcal{G}(n_1)$ é calculada pelos valores de n_1 antes do salto devido à flutuação, dessa forma usaremos o termo de flutuação segundo a interpretação de Itô [42, 43]. Portanto aplicando o resultado (2.74) na Eq. (6.7) temos que a Eq. de Fokker-Planck para esse sistema é

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P(n_1, t) &= -\frac{\partial}{\partial n_1}[\mathcal{F}(n_1)P(n_1, t)] \\ &+ \frac{1}{2N} \frac{\partial^2}{\partial n_1^2}[\mathcal{G}(n_1)P(n_1, t)],\end{aligned}\tag{6.8}$$

que é idêntica à Eq. (6.5), com $\mathcal{F}(n_1)$ e $\mathcal{G}(n_1)$ definidos por (6.6).

6.3 Solução estacionária da Equação de Fokker-Planck

Para obter o comportamento estacionário da equação de Fokker-Planck devemos resolver a Equação de Fokker-Planck usando a condição $\frac{\partial P(n_1, t)}{\partial t} = 0$, ou seja, estamos procurando a solução da equação

$$-\frac{\partial}{\partial n_1}[\mathcal{F}(n_1)P_{ss}(n_1)] + \frac{1}{2N} \frac{\partial^2}{\partial n_1^2}[\mathcal{G}(n_1)P_{ss}(n_1)] = 0,\tag{6.9}$$

onde estamos utilizando o subscrito ss para indicar que estamos nos referindo a distribuição de probabilidade no estado estacionário. Observe também que a solução estacionária não apresenta uma dependência temporal, apresentando dependência apenas com n_1 . Utilizando a solução estacionária da Equação de Fokker-Planck apresentada em (2.35) temos a distribuição $P_{ss}(n_1)$, dada por

$$P_{ss}(n_1) = C_N \frac{\exp\{2N\mathcal{U}_{eff}(n_1)\}}{\mathcal{G}(n_1)}, \quad (6.10)$$

onde o potencial efetivo \mathcal{U}_{eff} é dado por

$$\mathcal{U}_{eff}(n_1) = \int_0^{n_1} \frac{\mathcal{F}(n)}{\mathcal{G}(n)} dn, \quad (6.11)$$

e C_N é uma constante obtida a partir da condição de normalização, de modo a garantir que

$$\int_0^1 P_{ss}(n'_1) dn'_1 = 1. \quad (6.12)$$

As integrais nas Eqs. (6.10) e (6.11) só podem ser resolvidas de forma explícita após definirmos as taxas $\gamma_0(n_1)$ e $\gamma_1(n_1)$, apresentaremos portanto esses resultados para os sistemas estudados anteriormente com taxas de transição definidas por (3.8) e (3.14).

6.3.1 Acoplamento com transição de fase contínua

Para o sistema com as taxas definidas pelas Eqs. (3.8), sabemos pela aproximação de campo médio que existe um ponto fixo estável para $\varepsilon < 0$ em $n_1 = \frac{1}{2}$ e dois pontos fixos estáveis para $\varepsilon > 0$, localizados em $n_1 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\varepsilon}$. Podemos destacar também a simetria observada nos potenciais obtidos pela aproximação de campo médio, também é interessante comparar esse resultado com o potencial efetivo dado por (6.11), que é um potencial que incorpora os efeitos das flutuações. A Fig. 6.1 mostra o gráfico do potencial efetivo (6.11) obtido usando as taxas de transição dadas por (3.8).

Podemos observar a transição de um potencial com poço único para um potencial de poço duplo quando aumentamos o valor do parâmetro de acoplamento, também é possível observar que os potenciais são assimétricos em relação ao ponto $n_1 = \frac{1}{2}$, ao contrário da simetria observada nos potenciais encontrados usando a aproximação de campo médio. É interessante observar que o potencial efetivo não apresenta uma dependência com a quantidade de osciladores N , porém a solução (6.10) apresenta uma dependência explícita em N .

A Fig. 6.2 apresenta a solução (6.10) para um sistema com o parâmetro de acoplamento $\varepsilon = 0.1$ e número de unidades N dadas por 100, 200, 300, 400 e 500 como definido na figura.

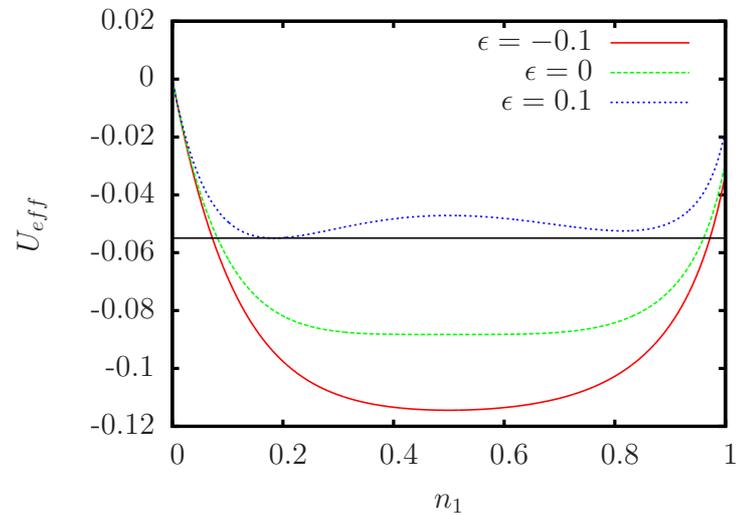


Figura 6.1: Potencial efetivo para um sistema com as taxas de transição dadas pelas Eqs. (3.8). Pode-se perceber a assimetria em relação ao ponto $n_1 = 1/2$, diferente do potencial obtido através da aproximação de campo médio.

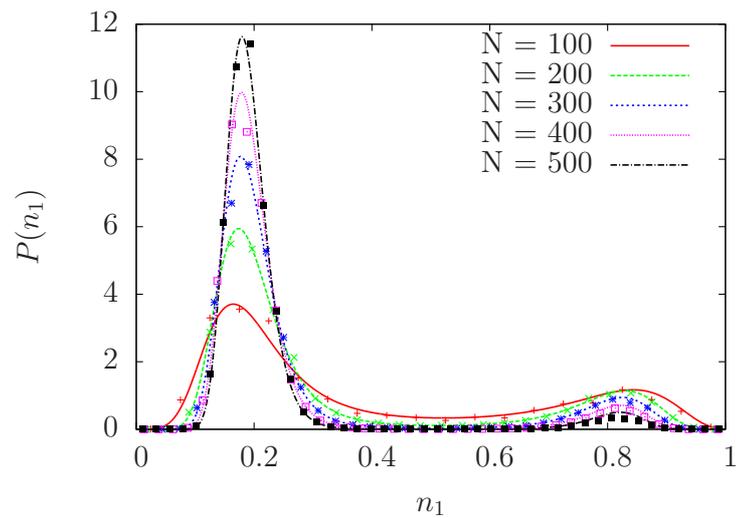


Figura 6.2: Distribuição de probabilidades para um sistema com as taxas de transição dadas pelas Eqs. (3.8) e $\epsilon = 0.1$. As curvas são os resultados analíticos obtidos através da equação de Fokker-Planck, os pontos são resultados obtidos através de simulações numéricas.

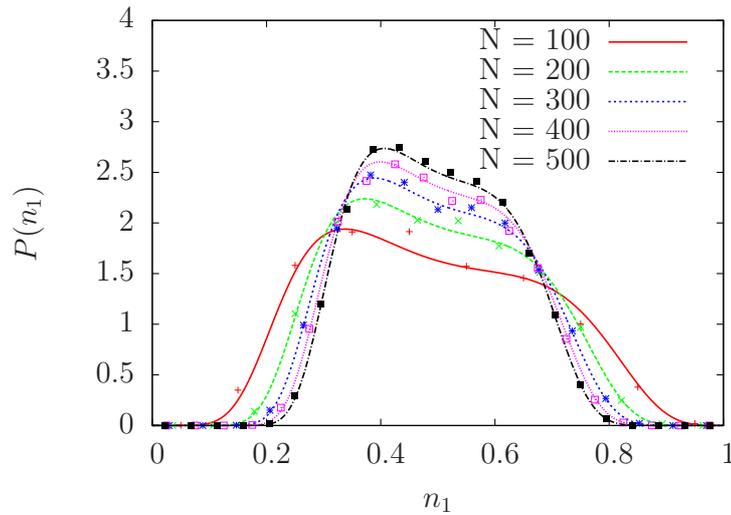


Figura 6.3: Distribuição de probabilidades para um sistema com as taxas de transição dadas pelas Eqs. (3.14) e $\varepsilon = 0.001$. As curvas são os resultados analíticos obtidos através da equação de Fokker-Planck, os pontos são resultados obtidos através de simulações numéricas.

As curvas apresentadas na figura são os resultados analíticos e os pontos são resultados obtidos através de simulações numéricas. Podemos observar que o caráter bimodal é bem evidente para todos os casos de N , para valores maiores de N a assimetria da distribuição se torna mais evidente de modo que o pico em torno de 0.2 se torna mais alto a medida que aumentamos N . Esse resultado pode ser explicado pelo fato da intensidade das flutuações dependerem de N , de forma que temos flutuações menores para quantidades de osciladores maiores, que aliada a assimetria das flutuações, faz com que a assimetria seja mais visível para sistemas com N maior.

A Fig. 6.3 apresenta a solução (6.10) porém, nesse caso, para $\varepsilon = 0.001$. Podemos observar uma distribuição monomodal assimétrica, ao aumentar o número de osciladores N a distribuição se torna mais estreita em torno de 0.5.

Podemos construir um diagrama de fases para as fases monomodal e bimodal através da determinação dos máximos da solução (6.10), derivando com relação a n_1 , temos

$$\frac{\partial P_{ss}(n_1)}{\partial n_1} = C_n \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\exp(2N\mathcal{U}_{eff}(n_1))}{\mathcal{G}(n_1)} = 0. \quad (6.13)$$

Pela definição de \mathcal{U}_{eff} , temos

$$2N\mathcal{F}(n_1) - \frac{\partial \mathcal{G}(n_1)}{\partial n_1} = 0, \quad (6.14)$$

Substituindo os termos $\mathcal{F}(n_1)$ e $\mathcal{G}(n_1)$ dados pelas definições (6.6), podemos escrever

$$2N((1-n_1)\gamma_0(n_1) - n_1\gamma_1(n_1)) - (1-n_1)\frac{\partial\gamma_0(n_1)}{\partial n_1} - n_1\frac{\partial\gamma_1(n_1)}{\partial n_1} + \gamma_0(n_1) - \gamma_1(n_1) = 0 \quad (6.15)$$

e portanto, temos

$$(2n_1(N(4\varepsilon - 3) - 6) - 4N\varepsilon - 8Nn_1^3 + 12(N+2)n_1^2 + N - 2) = 0. \quad (6.16)$$

Definindo a_0 , a_1 e a_2 como

$$a_0 = -\frac{-4N\varepsilon + N - 2}{8N}; \quad a_1 = -\frac{N(4\varepsilon - 3) - 6}{4N};$$

$$a_2 = -\frac{3(N+2)}{2N}, \quad (6.17)$$

podemos escrever a Eq. (6.16) como

$$n_1^3 + a_2n_1^2 + a_1n_1 + a_0 = 0. \quad (6.18)$$

A condição para que essa equação possua três raízes reais é dada por [46]

$$q^3 + r^2 \leq 0, \quad (6.19)$$

onde

$$q = \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{9}a_2^2; \quad r = \frac{1}{6}(a_1a_2 - 3a_0) - \frac{1}{27}a_2^3. \quad (6.20)$$

Usando a Eq. (6.17) temos

$$r = \frac{(N+2)^3}{8N^3} + \frac{1}{6} \left(\frac{3(N+2)(N(4\varepsilon - 3) - 6)}{8N^2} + \frac{3(-4N\varepsilon + N - 2)}{8N} \right),$$

$$q = -\frac{(N+2)^2}{4N^2} - \frac{N(4\varepsilon - 3) - 6}{12N}. \quad (6.21)$$

Dessa forma temos que a condição para uma transição de fase de um regime monomodal para um regime bimodal é

$$27 [N^2(4\varepsilon - 1) + 6N + 8]^2 - 8 (2N^2\varepsilon + 3N + 6)^3 \leq 0. \quad (6.22)$$

A Fig. 6.4 apresenta o diagrama de fase dessa transição do regime monomodal para o regime bimodal, na região a direita da curva o comportamento é bimodal enquanto na região a esquerda da curva o comportamento é monomodal. A reta vermelha na Fig. 6.4 indica o valor de ε para a transição calculado através da aproximação de campo médio.

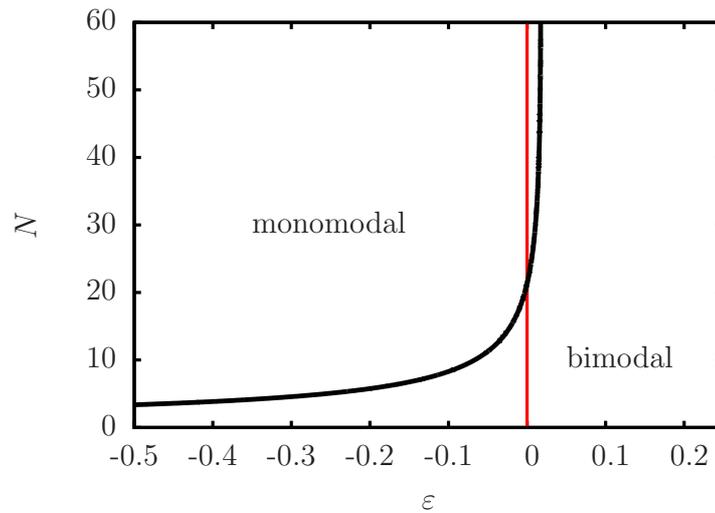


Figura 6.4: Diagrama de fase para a transição entre regime monomodal e bimodal. A região a direita da curva o comportamento é bimodal enquanto na região a esquerda da curva o comportamento é monomodal. A reta vermelha indica o valor de ε para a transição segundo a aproximação de campo médio.

6.3.2 Acoplamento com transição de fase descontínua

Para o sistema definido pelas taxas (3.14), observamos a partir da aproximação de campo médio dois regimes, um onde há apenas um ponto fixo estável em $n_1 = \frac{1}{2}$ e outro regime onde há 3 pontos fixos e pela aproximação de campo médio foi previsto um potencial simétrico. Através da equação de Langevin foi visto também que o sistema apresenta um ruído multiplicativo assimétrico de maneira similar ao modelo descrito pelas equações (3.8). Da mesma forma que fizemos para o outro modelo podemos obter o potencial efetivo apresentado na Fig. 6.5, observe que esse potencial efetivo também apresenta assimetrias devido ao efeito das flutuações. A Fig. 6.6 apresenta a solução (6.10) para um sistema com o número de unidades N fixo em 100 e três valores do parâmetro de acoplamento $r = -1.2, -1.0, -0.9$ e -0.8 . Assim como nas soluções apresentadas anteriormente as curvas apresentadas na figura são os resultados analíticos e os pontos são resultados obtidos através de simulações numéricas. Para valores de r menores que -0.9 podemos notar a presença de apenas um pico central, quando r assume um valor superior a -0.9 podemos notar a presença de 3 picos com o pico central diminuindo quando aumentamos o valor de r , os outros 2 picos ocupam posições simétricas em relação ao pico central porém com diferentes alturas, sendo o pico da esquerda mais alto. Essa diferença de altura ocorre devido a menor intensidade das flutuações na região do pico da esquerda.

A Fig. 6.7 apresenta as soluções (6.10) para um sistema com a quantidade de unidades $N = 100, 200$ e 300 . Podemos observar que a medida que aumentamos o número de unidades a

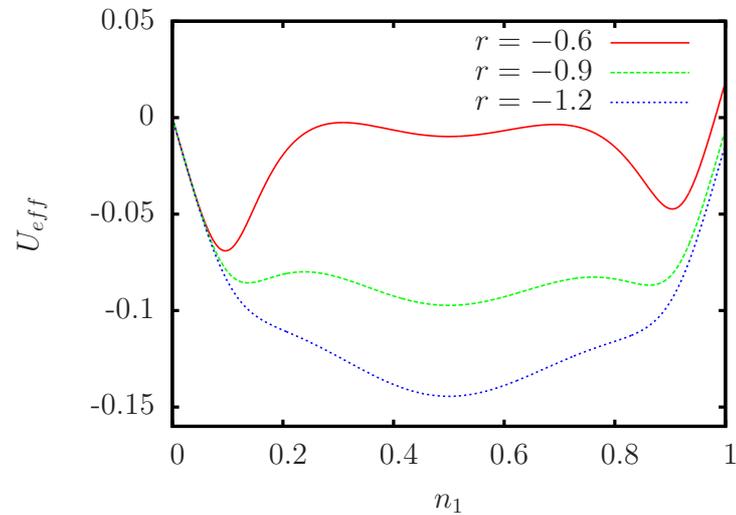


Figura 6.5: Potencial efetivo para um sistema com as taxas de transição dadas pelas Eqs. (3.8). Pode-se perceber a assimetria em relação ao ponto $n_1 = 1/2$, diferente do potencial obtido através da aproximação de campo médio.

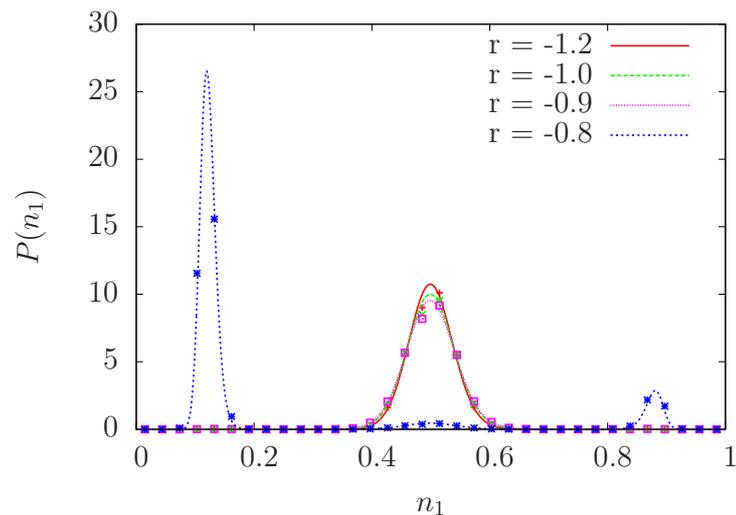


Figura 6.6: Distribuição de probabilidades para um sistema com as taxas de transição dadas pelas Eqs. (3.14) e $N = 100$. As curvas são os resultados analíticos obtidos através da equação de Fokker-Planck, os pontos são resultados obtidos através de simulações numéricas.

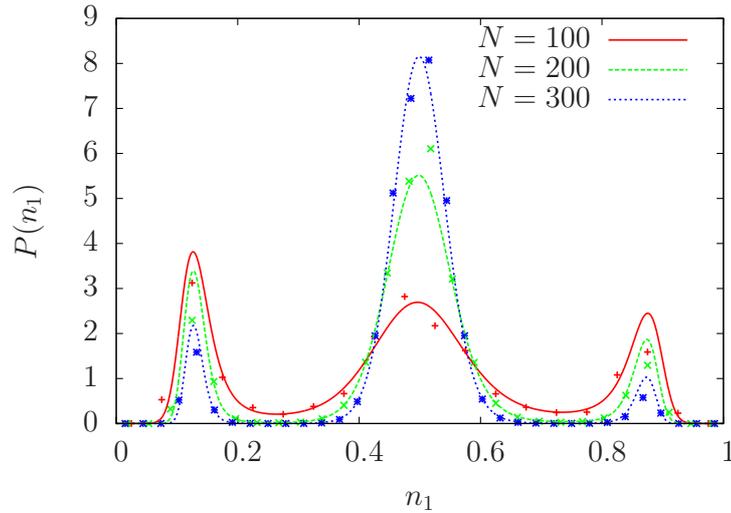


Figura 6.7: Distribuição de probabilidades para um sistema com as taxas de transição dadas pelas Eqs. (3.14) e $r = -0.85$. As curvas são os resultados analíticos obtidos através da equação de Fokker-Planck, os pontos são resultados obtidos através de simulações numéricas.

distribuição se torna mais concentrada nos picos de modo que observamos picos com larguras menores e o pico central se torna mais alto para valores maiores de N . Esse efeito se dá pela diminuição da intensidade das flutuações fazendo com que a distribuição $P_{ss}(n_1)$ seja mais concentrada em torno dos mínimos e faz com que as transições entre mínimos seja menos comum.

Seguindo os mesmos passos utilizados para o modelo anterior podemos analisar as posições dos máximos e mínimos para os diferentes valores que r pode assumir. Dessa forma aplicando as taxas (3.14) na Eq. (6.14) podemos obter

$$\begin{aligned}
 &16(50N + 309)n_1^5 - 80(25N + 152)n_1^4 + 80(23N + 142)n_1^3 \\
 &\quad - 40(19N + 126)n_1^2 - 2n(N(4r - 65) + 4r - 513) \\
 &\quad + 4Nr - 5N + 4r - 65 = 0.
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

As soluções da Eq. (6.23) nos dá a posição dos extremos da distribuição $P_s(n_1)$, porém diferente do caso anterior uma equação de quinto grau não possui uma fórmula geral para encontrar as raízes, ou determinar a quantidade de raízes reais. Porém podemos obter numericamente tais raízes para diferentes valores de r , este resultado está apresentado na Fig. 6.8. De forma análoga aos diagramas utilizados em dinâmica não linear representamos os máximos de $P(n_1)$ como linhas contínuas e os mínimos como linhas tracejadas. Esse diagrama foi feito para um sistema com $N = 300$, porém o mesmo comportamento é observado para outros valores de N . Existem diagramas de bifurcação semelhantes em dinâmica não linear que recebem o nome

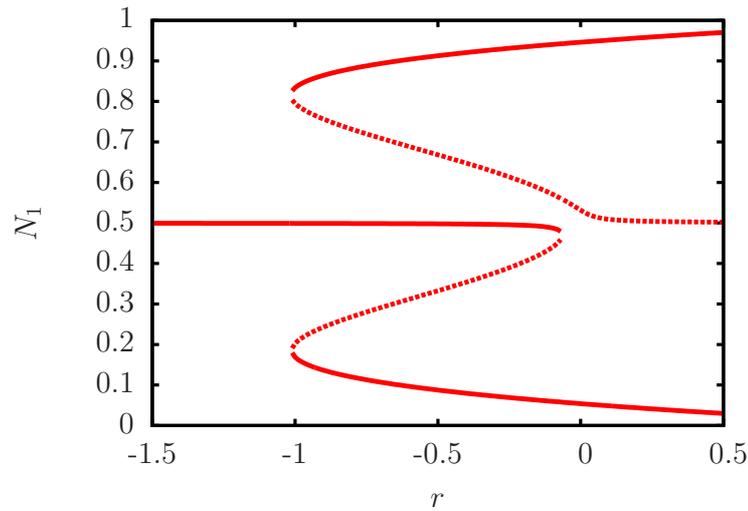


Figura 6.8: Posição dos máximos da distribuição $P(n_1)$ em função de r para um sistema com as taxas de transição dadas pelas Eqs. (3.14) e $N = 300$.

de bifurcação de forquilha subcrítica imperfeita, por se assemelhar a bifurcação de forquilha subcrítica, porém as bifurcações imperfeitas apresentam uma lacuna próxima ao ponto onde a bifurcação de fato ocorreria, sendo apenas uma composição de três bifurcações de ponto de sela. Há trabalhos que mostram que um sistema que apresenta uma bifurcação de foquilha pode apresentar uma bifurcação de forquilha imperfeita quando perturbado por uma fonte de ruído [48].

Nesse capítulo apresentamos a Equação de Fokker-Planck assim como sua solução. Constatamos a presença da assimetria na distribuição $P_{ss}(n_1)$, a qual pode ser explicada pela influência das flutuações que surgem pelo número finito de unidades. Observamos que no limite $N \rightarrow \infty$ a assimetria é acentuada, esse resultado contradiz o resultado obtido através da aproximação de campo médio que prevê um potencial simétrico. Essa contradição pode ser explicada em termos da ordem dos limites que são tomados em cada abordagem. No caso da abordagem de campo médio, inicialmente temos um sistema com uma quantidade infinita de unidades que evolui para o estado estacionário. Na nossa abordagem de Fokker-Planck, obtivemos uma solução geral para uma quantidade qualquer N e observamos como o sistema se comporta à medida que aumentamos N . Em outras palavras em ambos os casos estamos tomando os limites $N \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow \infty$, porém na aproximação de campo médio o limite $N \rightarrow \infty$ é aplicado primeiro e na abordagem de Fokker-Planck a ordem de aplicação desses limites é invertida e dessa forma cada abordagem gera resultados diferentes.

7 *Considerações Finais*

Nesta tese foram apresentados dois modelos de osciladores estocásticos de dois níveis com acoplamento global, onde ambos apresentam transições de fase com a variação do parâmetro de acoplamento, um deles apresenta uma transição de fase contínua enquanto o outro modelo apresenta uma transição de fase descontínua. Uma abordagem de campo médio para ambos os modelos de acoplamento consegue prever as transições de fase de uma fase desordenada, onde metade dos osciladores se apresenta em cada um dos dois estados para uma fase ordenada, onde há a concentração de grande parte dos osciladores em um dos dois estados. Utilizando a abordagem de campo médio foi mostrado que não há um estado preferencial para essa condensação de osciladores no mesmo estado para um sistema com uma quantidade infinita de osciladores.

Uma outra abordagem foi utilizada para obter resultados para um sistema com quantidade finita de osciladores. Partindo do modelo microscópico do nosso sistema pudemos obter uma equação de Langevin para o sistema finito, onde é observada uma interessante estrutura com ruído multiplicativo com intensidade inversamente proporcional a raiz quadrada da quantidade de osciladores. Foi mostrado também que para uma quantidade infinita de unidades o sistema apresenta a mesma estrutura observada na aproximação de campo médio. Através da equação de Fokker-Planck associada a equação de Langevin é possível obter a distribuição de probabilidade assimétrica, que apresenta uma intensificação na assimetria ao aumentar a quantidade de osciladores no sistema. Esse comportamento assimétrico é aparentemente contraditório com o comportamento de campo médio. Essa contradição pode ser explicada por uma não comutatividade nos limites $N \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow \infty$. No caso da abordagem de campo médio, o limite $N \rightarrow \infty$ é aplicado primeiro, enquanto na abordagem de Langevin o limite $t \rightarrow \infty$ é aplicado primeiro.

Além da obtenção da equação de Fokker-Planck através da abordagem de Langevin, mostramos também uma forma alternativa de obter a equação de Fokker-Planck através da expansão da equação mestra. Porém essa outra abordagem é menos instrutiva pois, através dela não é possível observar a estrutura de ruído multiplicativo que dá origem a assimetria no sistema com quantidade finita de unidades.

Um outro resultado que pode ser extraído da solução da equação de Fokker-Planck é o diagrama de fase para a transição da fase desordenada para a fase com condensação de osciladores em um estado. Foi mostrado que para o sistema de tamanho finito o valor do parâmetro de acoplamento para essa transição de fase depende da quantidade de unidades e dessa forma foi possível montar um diagrama de fases para essa transição.

A abordagem usada para estudar os efeitos da quantidade finita de osciladores pode ser usada para estudar sistemas mais complexos, como exemplo podemos citar um sistema de osciladores estocásticos de 3 níveis como o modelo de Wood et al. [21–24] que apresenta uma transição para uma fase com oscilações globais sincronizadas. Dessa forma podemos obter informações de como a quantidade finita de unidades pode alterar fenômenos de sincronização. Uma outra extensão é a aplicação dessa abordagem para um sistema de osciladores de dois níveis com comportamento não markoviano, onde as taxas de transição entre os dois estados é influenciada pelo tempo de permanência do oscilador em cada estado, como apresentado por Escaff et al. em [37].

Bibliografia

- [1] T. S. Gardner, C. R. Cantor, J. J. Collins, *Nature* **403**, 339 (2000).
- [2] D. H. Zanette, *Phys. Rev. E* **55**, 5315 (1997).
- [3] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering* (Perseus Books Publishing, Massachusetts, 1994).
- [4] A. T. Winfree, *J. Theor. Biol.* **16**, 15 (1967).
- [5] S. H. Strogatz, *Physica D* **143**, 1 (2000).
- [6] T. Risler, J. Prost, and F. Julicher, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 175702 (2004).
- [7] T. Risler, J. Prost, and F. Julicher, *Phys. Rev. E* **72**, 016130 (2005).
- [8] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Non-linear Science* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [9] H. Sakaguchi, S. Shinomoto, and Y. Kuramoto, *Prog. Theor. Phys.* **77**, 1005 (1987).
- [10] H. Daido, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 231 (1988).
- [11] S. H. Strogatz, and R. E. Mirollo, *J. Phys. A* **21**, L699 (1988).
- [12] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer, Berlin, 1984).
- [13] Z. Wang, X. Zhu, J. J. Arenzon, *Phys. Rev. E* **85**, 011149 (2012).
- [14] A. F. Lütz, S. Risau-Gusman, J. J. Arenzon, *J. Theor. Biol.* **317**, 286 (2013)
- [15] C. Rulquin, J. J. Arenzon, *Phys. Rev. E* **89**, 032133 (2014).
- [16] P. P. Avelino, D. Bazeia, L. Losano, J. Menezes, B. F. de Oliveira, *Phys. Rev. E* **89**, 042710 (2014).
- [17] P. P. Avelino, D. Bazeia, L. Losano, J. Menezes, B. F. de Oliveira, *Phys. Rev. E* **86**, 036112 (2012).
- [18] J. Joo, J. L. Lebowitz, *Phys. Rev. E*, **70**, 036114 (2004).
- [19] J. D. Murray, *Mathematical Biology* (Springer-Verlag, New York, 1980).
- [20] V. R. V. Assis, M. Copelli, *Phys. Rev. E*, **77**, 011923 (2008).
- [21] K. Wood, C. Van den Broeck, R. Kawai, and K. Lindenberg, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 145701 (2006).

- [22] K. Wood, C. Van den Broeck, R. Kawa, and K. Lindenberg, *Phys. Rev. E* **74**, 031113 (2006).
- [23] K. Wood, C. Van den Broeck, R. Kawai, and K. Lindenberg, *Phys. Rev. E* **75**, 041107 (2007).
- [24] K. Wood, C. Van den Broeck, R. Kawai, and K. Lindenberg, *Phys. Rev. E* **76**, 041132 (2007).
- [25] Vladimir R. V. Assis, Mauro Copelli, and Ronald Dickman, *J. Stat. Mech.: Theory and Exp.* P09023 (2011).
- [26] Vladimir R. V. Assis and Mauro Copelli, *Physica A* **391**, 1900 (2012).
- [27] T. Prager, B. Naundorf, and L. Schimansky-Geier, *Physica A* **325**, 176 (2003).
- [28] T. Prager, M. Falcke, L. Schimansky-Geier, and M. A. Zaks, *Phys. Rev. E* **76**, 011118 (2007).
- [29] Vladimir R. V. Assis, *Transições de fase em redes de elementos excitáveis estocásticos*, Tese de doutorado, Universidade federal de Pernambuco (2010).
- [30] N. Kouvaris, F. Müller, L. Schimansky-Geier, *Phys. Rev. E* **82**, 061124 (2010).
- [31] D. Huber and L. S. Tsimring, *Phys. Rev. E* **71**, 036150 (2005).
- [32] B. Fernandez and L. S. Tsimring, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 165705 (2008).
- [33] T. Danino, O. Mondragón-Palomino, L. Tsimring, and J. Hasty, *Nature* **463**, 326 (2010).
- [34] A. Prindle, J. Selimkhanov, H. Li, I. Razinkov, L. Tsimring, and J. Hasty, *Nature* **508**, 386 (2014).
- [35] J. Stricker, S. Cookson, M. R. Bennet, W. H. Mather, L. Tsimring, and J. Hasty, *Nature* **463**, 326 (2010).
- [36] D. Escaff, U. Harbola, and K. Lindenberg, *Phys. Rev. E* **86**, 011131 (2012).
- [37] D. Escaff and K. Lindenberg, *Eur. Phys. J. Special Topics* **223**, 155 (2014).
- [38] I. L. D. Pinto, D. Escaff, U. Harbola, A. Rosas and K. Lindenberg, *Phys. Rev. E* **89**, 052143 (2014).
- [39] N. G. Van Kampen, *Stochastic processes in physics and chemistry*, third edition (Elsevier, North-holland, 2007).
- [40] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications*, 2nd edition (Springer, Verlag Berlin Heidelberg New York, 1996).
- [41] J. L. García-Palacios, arXiv, 0701242v1 (2007).
- [42] B. J. West, R. Bulsara, K. Lindenberg, V. Seshadri and K. E. Shuler, *Physica A* **97**, 211 (1979).

- [43] R. Bulsara, Katja Lindenberg, V. Seshadri, K. E. Shuler and B. J. West, *Physica A* **97**, 234 (1979).
- [44] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* (Springer-Verlag, Berlin, 1983), pp. 139.
- [45] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 2nd ed. (McGraw-Hill, New York, 1984).
- [46] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Tenth printing (National Bureau of Standards, United States, 1972).
- [47] S. Salinas, *Introdução à física estatística* (Ed. EDUSP, São Paulo, 2005).
- [48] A. Juel, A. G. Darbyshire, T. Mullin, *Proceeding of the Royal Society A* **8** vol. 453 (1997).