Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Física

Mestrado em Física

Sadoque Salatiel da Silva Gomes

Quantização, Estados Coerentes e Fases Geométricas de um Circuito RLC Generalizado e Explicitamente Dependente do Tempo

João Pessoa - PB

2014

Sadoque Salatiel da Silva Gomes

Quantização, Estados Coerentes e Fases Geométricas de um Circuito RLC Generalizado e Explicitamente Dependente do Tempo

Dissertação submetida ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Inácio de Almeida Pedrosa Filho

João Pessoa - PB

2014

Sadoque Salatiel Da Silva Gomes

Quantização, Estados Coerentes e Fases Geométricas de um Circuito RLC Generalizado e Explicitamente Dependente do Tempo

Dissertação submetida ao Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre.

Aprovada em Junho de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr Inácio Pedrosa De Almeida Filho - Orientador
Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. José Roberto Nascimento - Examinador Interno
Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Alexandre Manoel de Morais Carvalho - Examinador Externo
Universidade Federal de Alagoas

João Pessoa-PB

2014

"Nossa recompensa se encontra no esforço e não no resultado, um esforço total é uma vitória completa..." Gandhi.

A Leví...

Agradecimentos

- *Minha Família*
- *Pela Paciência, disposição e sabedoria. Ao meu Orientador: Prof. Inácio de Almeida Pedrosa Filho.*
- *Aos meus colegas*
- *À Capes pelo apoio financeiro.*

Sumário

Resumo

Apresentamos um tratamento quântico alternativo para um circuito RLC mesoscópico generalizado com resistência, indutância e capacitância dependentes do tempo. Usando o método de invariantes quânticos de Lewis e Riesenfeld e invariantes quadráticos, obtemos os estados de Scrhödinger não-estacionários para este circuito com oscilação eletromagnética. Em seguida, construímos os estados coerentes para o circuito RLC quantizado e os empregamos para investigar algumas das propriedades quânticas do sistema, tais como flutuações quânticas da carga, do fluxo magnético e o produto incerteza correspondente. Além disso, obtemos as fases geométricas, dinâmicas e de Berry para este circuito mesoscópico não estacionário. Finalmente, calculamos as fases dinâmica e de Berry para três casos particulares. Surpreendentemente, encontramos expressões idênticas para a fase dinâmica, e as mesmas expressões para a fase da Berry.

Palavras-chave: Fase dinâmica. Fase de Berry. Circuito RLC.

Abstract

We present an alternative quantum treatment for a generalized mesoscopic RLC circuit with time-dependent resistance, inductance and capacitance. Taking advantage of the Lewis and Riesenfeld and quadratic invariants we obtain exact nonstationary Schrödinger states for this electromagnetic oscillation system. Afterwards, we construct coherent states for the quantized RLC circuit and employ them to investigate some of the system's quantum properties, such as quantum fluctuations of the charge and the magnetic flux and the corresponding uncertainty product. In addition, we derive the geometric, dynamical and Berry phases for this nonstationary mesoscopic circuit. Finally we evaluate the dynamical and Berry phases for three special circuits. Surprisingly, we find identical expressions for the dynamical phase and the same formulae for the Berry's phase.

Keywords: Dynamic phase. Berry's phase. RLC circuit.

Capítulo 1

Introdução

A descoberta de *invariantes exatos*(constantes de movimento exatas ou integrais primeiras exatas) é de importância fundamental para qualquer sistema físico, conhecendo um determinado número dessas quantidades, é possível prever o comportamento do sistema físico em questão, e assim impedir a ocorrência de caos, por exemplo. Em 1880, o matemático Vasilii Ermakov(1845-1922) foi o primeiro físico a demonstrar que algumas equações diferenciais não lineares de segunda ordem são relacionadas, de maneira simples e bem definida, com equações diferenciais lineares de segunda ordem. Hoje, conhecemos essa demonstração como método de Ermakov:

$$\text{Equação linear} \rightarrow \ddot{y} + M(x)y = 0$$

$$\text{Equação não linear} \rightarrow \ddot{z} + M(x)z = \lambda/z^3$$

sendo λ constante, a eliminação de $M(x)$ entre elas leva diretamente a integral primeira:

$$I = \tfrac{1}{2}(z\dot{y} - y\dot{z})^2 + (\tfrac{\lambda}{2})(\tfrac{y}{z})^2.$$

Em 1930, Milne desenvolveu um método análogo ao método de Ermakov para resolver a equação de Schrödinger em uma dimensão levando em consideração a forma oscilatória básica da função de onda de Schrödinger $\Psi(x)$. Sendo assim, ele encontrou que a equação não linear satisfeita pela amplitude de $\Psi(x)$ coincide com aquela obtida por Ermakov. Em 1950, o falecido E. Pinney apresentou a solução da equação de Ermakov-Pinney, que depois ficou conhecida como equação de Milne-Pinney, em termo das soluções linearmentes independentes da equação linear associada a essa equação.

Dada a equação:

$$\ddot{y} + p(x)y = \lambda/y^3(x)$$

para $y(x_0) = y_0, \dot{y}(x_0) = y_0$, a solução geral é dada por:

$$y_p(x) = [Ay_1^2(x) + By_2^2(x) + 2Cy_1(x)y_2(x)]^{1/2},$$

onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções linearmente independentes da equação linear homogênea $\ddot{y} + p(x)y = 0$. Quando $p(x)$ varia lentamente $y_1(x)$ e $y_2(x)$ podem ser determinados pelo método *WKB*, por exemplo. O sistema Ermakov-Milne-Pinney foi reencontrado, em 1967[2] por H. R. Lewis, Jr. ao estudar o movimento de um sistema caracterizado pela Hamiltoniana,

$$H(t) = \tfrac{1}{2\epsilon}[p^2 + \Omega^2(t)q^2]$$

onde q e p representam, respectivamente, posição e momento cononicamentes conjugados, e $\Omega(t)$ representa uma função arbitrária do tempo t, e ϵ é um parâmetro real e positivo [1].

Vale ressaltar que até início da década 60, o uso de invariantes quânticos com dependência temporal explícita tinha recebido pouca atenção. Isso aconteceu devido a falta de exemplos em que essas quantidades fossem possivelmente claras e proveitosas. Mas nos anos seguintes, uma classe de invariantes exatos para osciladores harmônicos dependentes do tempo, tanto clássico quanto quântico, foram apresentados[2, 3]. A simplicidade das regras para construção desses invariantes e sua relação instrutiva para expansão de uma teoria adiabática invariante, estimulou sua aplicação para resolução de alguns problemas em que a variável temporal estivesse explícita na mecânica quântica, como por exemplo, o oscilador harmônico dependente do tempo e uma partícula carregada em um campo eletromagnético dependente do tempo. É importante ressaltar que tais sistemas não são importantes tanto na mecânica clássica quanto na mecânica quântica. Podemos verificar a busca por soluções exatas da equação de Schrödinger com Hamiltoniana explicitamente dependente do tempo nos trabalhos de Lewis e Riesenfeld [2] e [4].

Entretanto, uma vez trabalhado com o oscilador harmônico dependente do tempo(esses são estudados desde o início da mecânica quântica e ainda continuam a ser um assunto importante e muito interessante nessa área [15]-[26]), agora podemos trabalhar com sistemas semelhantes, em particular, sistemas mesoscópicos dependentes do tempo que ultimamente vem atraindo uma grande atenção na literatura [27]-[44]. A origem deste grande interesse, sem dúvidas foi o grande desenvolvimento de técnicas nanométricas e nanoeletrônicas. Isso se deu, devido a fabricação de dispositivos eletrônicos e miniaturização dos circuitos e componentes integrados que vão acontecendo gradualmente para escala atômica, o que significa que os efeitos quânticos nos circuitos mesoscópicos devem ser levados em consideração. A mesoscopia estuda a fenomenologia da mecânica quântica para entender processos maiores, tendo em vista ,por exemplo, transportes quânticos de elétrons por nanoestruturas e a condutância delas. Suas pesquisas nesta área viabiliza o aperfeiçoamento de estrutura de semicondutores e outros componentes elétricos e magnéticos, proporcionando avanço nas áreas da tecnologia. Tendo em vista que ao conhecer o funcionamento da microscopia, poderemos entender ainda mais a macroscópio, uma vez que esses conhecimentos podem chegar ao desenvolvimento de novos equipamentos com tamanhos consideravelmente reduzidos devido à redução dos circuitos e dos condutores, como por exemplo: aparelhos de ressonância magnética podem ter seu tamanho drasticamente reduzido. Um sistema "simples"seria o circuito LC, a história mostra que Louisell [13], foi o primeiro físico que propôs o primeiro método para quantizá-lo. Desde então, muitos artigos têm discutido efeitos quânticos tanto de circuitos RLC como de circuitos LC independentes(ou dependentes) do tempo. Entretanto, nenhum deles têm considerado um circuito RLC generalizado e dependente do tempo, ainda.

1.1 Organização desta dissertação

No capítulo 2, vamos seguir *essencialmente* o tratamento de Lewis e Riesenfeld [4] , em que consideramos a teoria de invariantes explicitamente dependentes do tempo para um sistema quântico geral no qual o operador Hamiltoniano $H(t)$ tem dependência explícita no tempo. Evidentemente, não iremos tratar de um sistema fechado, no sentido de que influências externas, que não precisam ser especificadas(energia, momento angular e etc) podem alterar os parâmetros do sistema. Iremos ilustrar o método de Lewis e Riesenfeld aplicado a um sistema físico especial, o oscilador harmônico dependente do tempo, que é um sistema cujo Hamiltoniano tem a mesma forma de um oscilador harmônico simples, mas com a frequência variando com o tempo. A teoria de Lewis e Riesenfeld obteve sucesso, em particular, no tratamento do oscilador harmônico dependente do tempo, mas seu alcance é muito mais geral. A aplicação do método necessita, primeiramente, conhecer um operador Hermitiano invariante. Então, expandimos a função de onda como uma combinação linear das autofunções desse operador. Este método de Lewis aparece espontaneamente como uma alternativa no tratamento exato de sistemas quânticos independentes do tempo. Como iremos ver, o problema se resume em resolver a equação de Schrödinger dependente do tempo,

$$H\psi(q,t) = i\hbar \frac{\partial \psi(q,t)}{\partial t}$$

onde H é o operador Hamiltoniano explicitamente dependente do tempo. Consideramos um sistema cujo a Hamiltoniana tem a forma,

$$H(t) = \frac{1}{2\epsilon}[\rho^2 + \Omega^2(t)q^2]$$

onde q é a coordenada canônica, p o momento conjugado, $\Omega(t)$ é uma função complexa arbitrária de t, e ϵ é um parâmetro real positivo, se o sistema é quântico, q e p obedecem a relação comutação,

$$[q,p] = i\hbar.$$

Como veremos, para um oscilador harmônico dependente do tempo, $\epsilon = m$, existe uma classe de invariantes exatos I da forma,

$$I = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{q}{\rho}\right)^2 + (p\rho - \epsilon\rho' q)^2\right],$$

onde ρ é uma função de t que satisfaz,

$$\epsilon^2\rho'' + \Omega^2(t)\rho = 1/\rho^3.$$

Essa equação define uma classe de invariantes pelo fato de ρ poder ser qualquer solução particular da equação diferencial. A quantidade I é um invariante tanto para sistemas quânticos como para sistemas clássicos. Se resolvermos a equação diferencial para um dado ρ como uma série de potências positivas de ϵ, então ρ pode ser substituído em I como uma série em potências positivas de ϵ. Para sistemas clássicos com $\Omega(t)$ real, em que a série de I é invariante adiabática, o termo principal é proporcional a $(\epsilon H)/\Omega$. A aproximação adiabática é apropriada quando H é lentamente variável no tempo. A teoria de Lewis e Riesenfeld, em contraposição a abordagem adiabática, fornece a solução exata do problema. Porém, como seria de esperar, a utilização de uma técnica exata tem seu preço: a derivação de um invariante exato.

No capítulo 3, vamos conhecer os estados coerentes, estes foram descritos pela primeira vez pelo próprio Schrödinger[5], em 1926, tentando encontrar um pacote de onda que não se dispersasse durante sua propagação(agindo como se fosse uma partícula clássica). A solução que foi encontrada, portanto, só mantém sua forma em sistemas especiais(como no oscilador harmônico simples), e não para propagação no espaço livre, como mostrou Werner Heisenberg [11]. Entretanto, seu desenvolvimento se deu por volta do início da década de 60, quando Glauber [6] em 1963, estabeleceu a relação entre esses estados e propriedades do campo de radiação, dando origem a sua teoria quântica de laser, que hoje conhecemos como ótica quântica, que lhe rendeu um prêmio nobel em 2005. Esse conceito de estados coerentes de Glauber é frequentemente desprezado em discussões de filosofia da física quântica(mas não por físicos profissionais). Em trabalhos seminais publicados naquele mesmo ano, 1963, foi apresentada uma teoria eminente quântica sobre a radiação eletromagnética, que poderia ser comprovada experimentalmente através da detecção dos fótons. Era necessário descrever corretamente o que se estava medindo quando uma válvula fotomultiplicadora acusava uma contagem, identificada por um pulso ou um 'click' registrado quando um fóton é absorvido pelo detector, uma vez que a foto-detecção baseia-se no princípio do efeito foto-elétrico. Em seu estudo sobre coerência da radiação eletromagnética, Glauber determinou a função correlação entre os feixes em sua versão quântica, verificando que para um estado de luz térmica, esta era igual a função correlação clássica. Deste, ele comprovou inequivocamente que a mecânica quântica não se fazia necessária quando esse tipo de luz era usada nos experimentos. Então, Glauber inovou com uma versão atual para um estado quântico especial que fora aquele introduzido por Schrödinger, chamado *Estados Coerentes*, que se tornou emblemático não apenas na descrição de campos eletromagnéticos com coerência de fase, mas em outras áreas da física em que seja necessário representar sistemas com propriedades quânticas com aspectos mais próximos do mundo clássico. É importante salientar que campos eletromagnéticos de caráter quântico ou mesmo os estados coerentes não existem na natureza, mas podem ser produzidos artificialmente. É certo que, atualmente, existem uma grande variedade de estados coerentes, como é tratado por Perelomov[8]. Porém, nosso interesse está baseado nos estados coerentes do oscilador harmônico, também chamados de canônicos. Vamos abordar os estados coerentes de uma maneira histórica e introdutória, tratando mais uma vez do nosso sistema físico especial, o oscilador harmônico, onde não iremos nos preocupar em abordar uma teoria mais geral, que encontramos em [9] e [10].

No capítulo 4, faremos uma base introdutória ao capítulo 5, onde iremos quantizar o circuito LC. No estudo de sistemas mesoscópicos, um circuito LC representa um circuito característico e fundamental. Iremos, apropriadamente, mostrar as características tanto clássicas quanto quânticas desse circuito, apresentando em seguida a Hamiltoniana em função da carga e do fluxo magnético. Sendo considerado, neste caso particular, o Hamiltoniano de Caldirola-Kanai, com $R = 0$. Em seguida, consideramos o circuito quântico, onde as mesmas funções dependentes do tempo, carga e fluxo magnético, passam a ser operadores e a obedecer a relação de comutação $[Q, \Phi] = i\hbar$

No capítulo 5, onde está nosso trabalho *principal*, iremos apresentar um tratamento simples e direto para um circuito RLC mesoscópico generalizado com resistência, indutância e capacitância dependentes do tempo, denotados por *R(t)*, *L(t)* e *C(t)*, respectivamente. Baseado no método do invariante dinâmico e usando invariante quadrático resolvemos exatamente a equação de Schrödinger independente do tempo para este sistema mesoscópico. Portanto, usando os estados exatos não-estacionários de Schrödinger construímos os estados coerentes para o circuito RLC quantizado e os empregamos para investigar algumas das propriedades quânticas do sistema, como flutuações quânticas da carga e fluxo magnético e o produto de incerteza associado. Além disso, obtemos as fases geométrica, dinâmica e de Berry para este circuito mesoscópico não estacionário. Finalmente, como exemplo particular, iremos avaliar e discutir as fases dinâmicas e de Berry para três circuitos especiais.

Terminando com a conclusão, onde resumimos os principais resultados e as perspectivas futuras.

Capítulo 2

Invariantes quânticos dependentes do tempo

Nesta seção, iremos começar derivando uma classe de invariantes exatos para o nosso sistema, o oscilador harmônico, por meio de um método diferente do método clássico. Calculando em seguida os autovalores e autoestados desses invariantes, vamos também calcular o fator de fase dependente do tempo apropriado que fazem os autoestados soluções da equação de Schrödinger.

Vamos considerar um sistema em que o operador Hamiltoniano $H(t)$ é uma função explicita do tempo e considerar também a existência de um outro operador Hermitiano não-trivial dependente do tempo e invariante, $I(t)$. Sendo que, $I(t)$ satisfaz as seguintes condições

$$\frac{dI}{dt} \equiv \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[I, H] = 0 \tag{2.1}$$

e

$$I^{\dagger} = I \tag{2.2}$$

Sendo I um operador Hermitiano, temos três propriedades que são de máxima importância :

1. Seus autovalores são todos reais.

2. As autofunções de um operador hermitiano são, ou podem ser escolhidas de tal forma que sejam ortogonais.

3. As autofunções de um operador linear hermitiano formam um conjunto completo e ortogonal de funções.

2.1 Autovalores e autovetores do operador invariante

Como consequência das propriedades anteriores, observamos que o operador invariante faz parte de um conjunto completo de observáveis que comutam, pelo simples fato de ser Hermitiano. Dessa forma, existe um conjunto completo de autoestados de I. Seus autovalores associados, representamos por λ , e os autoestados ortonormais associados a cada λ , por $|\lambda, \kappa\rangle$, onde κ representa todos os números quânticos diferentes de λ, que especificam necessariamente os autoestados

$$I(t)|\lambda, \kappa\rangle = \lambda|\lambda, \kappa\rangle, \tag{2.3}$$

$$\langle\lambda', \kappa'|\lambda, \kappa\rangle = \delta_{\lambda'\lambda}\delta_{\kappa'\kappa}. \tag{2.4}$$

Além dos autovalores λ serem reais, também são independentes do tempo. Vamos mostrar isso de maneira bem simples, bastando apenas diferenciar a Eq.(2.3) em relação ao tempo, obtendo então

$$\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, \kappa\rangle + I\frac{\partial}{\partial t}|\lambda, \kappa\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t}|\lambda, \kappa\rangle + \lambda\frac{\partial}{\partial t}|\lambda, \kappa\rangle. \tag{2.5}$$

Atuando o ket $|\lambda, \kappa\rangle$ na Eq.(2.1), temos

$$i\hbar\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, \kappa\rangle + IH|\lambda, \kappa\rangle - \lambda H|\lambda, \kappa\rangle = 0. \tag{2.6}$$

Fazendo agora o produto escalar desta equação com $|\lambda', \kappa'\rangle$ e simplificando-a, ficamos com

$$i\hbar\langle\lambda', \kappa'|\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, \kappa\rangle + (\lambda' - \lambda)\langle\lambda', \kappa'|H|\lambda, \kappa\rangle = 0, \tag{2.7}$$

essa equação tem que ser válida para $\lambda = \lambda'$, isso implica que

$$\langle\lambda', \kappa'|\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, \kappa\rangle = 0. \tag{2.8}$$

Fazendo agora o produto escalar da Eq.(2.5) com $|\lambda',\kappa'\rangle$, obtemos

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \langle\lambda', \kappa'|\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, \kappa\rangle, \tag{2.9}$$

portanto, de (2.8) e (2.9) concluímos que

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0 \tag{2.10}$$

ou seja, conseguimos mostrar que os autovalores de I são independentes do tempo, diferentemente dos seus autoestados que podem conter uma certa dependência temporal. Então, vamos examinar a conexão entre os autoestados do operador hermitiano e a equação de Schrödinger.

2.1.1 Conexão entre os autoestados do operador *I(t)* e a equação de Schrödinger

Primeiramente vamos escrever a equação de movimento para $|\lambda,\kappa\rangle$, partindo da Eq.(2.5) e usando a Eq. (2.10), chegamos a seguinte expressão

$$(\lambda - I)\frac{\partial}{\partial t}|\lambda,\kappa;t\rangle = \frac{\partial I}{\partial t}|\lambda,\kappa;t\rangle, \tag{2.11}$$

fazendo o produto escalar com o bra $\langle\lambda',\kappa'|$ e usando a Eq.(2.7), eliminamos o termo

$$\langle\lambda',\kappa'|\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda,\kappa\rangle$$

e obtemos

$$i\hbar(\lambda-\lambda')\langle\lambda',\kappa'|\frac{\partial}{\partial t}|\lambda,\kappa\rangle = (\lambda-\lambda')\langle\lambda',\kappa'|H|\lambda,\kappa\rangle, \tag{2.12}$$

observamos facilmente que para $\lambda' \neq \lambda$, temos

$$i\hbar\langle\lambda',\kappa'|\frac{\partial}{\partial t}|\lambda,\kappa\rangle = \langle\lambda',\kappa'|H|\lambda,\kappa\rangle. \tag{2.13}$$

Veja que a Eq.(2.12) não implica diretamente que

$$i\hbar\langle\lambda',\kappa'|\frac{\partial}{\partial t}|\lambda,\kappa;t\rangle = \langle\lambda',\kappa'|H|\lambda,\kappa;t\rangle$$

Dá mesma forma que a Eq.(2.13) é válida para $\lambda' \neq \lambda$ ela também tem que ser válida para $\lambda' = \lambda$, isso para que o estado $|\lambda,\kappa;t\rangle$ seja solução da equação de Schrödinger. Agora, vamos eliminar essa restrição, usando o bem conhecido *fator de fase*.

Fator de fase

Até agora não foi mencionado nada em relação a fase de $|\lambda,\kappa\rangle$, porém vamos assumir que uma fase foi escolhida, de tal forma que possamos multiplicar $|\lambda,\kappa\rangle$ por um fator de fase dependente do Tempo. Com isso, podemos definir um novo conjunto de autovetores de

I(t) relacionados com nosso conjunto inicial por uma transformação de Gauge dependente do tempo, veja

$$|\lambda,\kappa;t\rangle_{\alpha} = e^{i\alpha_{\lambda,\kappa}(t)}|\lambda,\kappa;t\rangle \tag{2.14}$$

onde os $\alpha_{\lambda\kappa}(t)$ são funções arbitrárias reais dependentes do tempo. Isso porque mostramos que o operador *I(t)* não possui derivadas temporais Eq.(2.1), então $|\lambda,\kappa;t\rangle_{\alpha}$ é um estado ortonormal de *I(t)* assim como é de $|\lambda,\kappa;t\rangle$. Para $\lambda' \neq \lambda$, a Eq.(2.13) também vale para os elementos da matriz tomadas em relação aos novos autoestados. Todos os novos autoestados irá satisfazer a equação de Schödinger se escolhermos as fases de tal forma que a Eq.(2.13) tenha validade para $\lambda' = \lambda$. Ou seja, isso é equivalente escrever a seguinte equação diferencial para $\alpha_{\lambda\kappa}(t)$:

$$\hbar\delta_{\kappa\kappa'}\frac{d\alpha_{\lambda\kappa}}{dt} = \langle\lambda',\kappa'|i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H|\lambda,\kappa\rangle \tag{2.15}$$

Para que esta equação seja satisfeita, o estado $|\lambda,\kappa\rangle$ pode ser escolhido de tal forma que o lado direito dela se anule com $\kappa' \neq \kappa$. É sempre possível fazer isso, já que o operador $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t} - H$ é hermitiano. Uma vez que os estados foram definidos, as fases $\alpha_{\lambda\kappa}(t)$ agora são escolhidas para satisfazer

$$\hbar\frac{d\alpha_{\lambda\kappa}}{dt} = \langle\lambda,\kappa|i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H|\lambda,\kappa\rangle \tag{2.16}$$

Agora sim, cada novo conjunto de autoestados de *I(t)*, $|\lambda,\kappa;t\rangle_{\alpha}$, satisfaz a equação de Schrödinger, e a solução geral é

$$|t\rangle = \sum_{\lambda,\kappa} c_{\lambda,\kappa}e^{i\alpha_{\lambda\kappa}(t)}|\lambda,\kappa;t\rangle, \tag{2.17}$$

onde os $c_{\lambda,\kappa}$ são coeficientes independentes do tempo. Todos esses estados que foram vistos até agora são dependentes do tempo, na Eq. (2.17) deixamos apenas a dependência explicita.

2.2 Método de Lewis e Riesenfeld aplicado ao OHDT

Um oscilador harmônico unidimensional dependente do tempo é descrito pelo seguinte Hamiltoniano,

$$H(t) = (1/2M)[p^2 + \Omega^2(t)q^2] \tag{2.18}$$

onde q é a coordenada canônica, p seu momento conjugado, $\Omega(t)$ é uma função contínua, por parte, arbitrária dependente do tempo, e M um parâmetro real de massa positivo. As variáveis q e p satisfazem a relação de comutação canônica

$$[q,p] = i\hbar \tag{2.19}$$

e as equações canônicas de movimento são dadas por

$$\dot{q} = \frac{1}{i\hbar}[q,H] = \frac{1}{M}p \quad \text{e} \quad \dot{p} = \frac{1}{i\hbar}[p,H] = -\frac{1}{M}\Omega^2(t)q. \tag{2.20}$$

Nós assumimos a existência de um invariante Hermitiano, que tem a seguinte forma quadrática

$$I(t) = \frac{1}{2}[\alpha(t)q^2 + \beta(t)p^2 + \gamma\left\{q,p\right\}_+], \tag{2.21}$$

onde α, β e γ são funções reais do tempo, e usamos a notação convencional do anticomutador $\left\{q,p\right\}_+ \equiv qp + pq$. A derivada de $I(t)$ no tempo é dada por

$$\begin{aligned} I &= \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[I,H] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\dot{\alpha} - \frac{2\Omega^2}{M}\gamma\right)q^2 + \left(\dot{\beta} + \frac{2}{M}\gamma\right)p^2 + \left(\dot{\gamma} + \frac{1}{M}\alpha - \frac{\Omega^2}{M}\beta\left\{q,p\right\}_+\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Afim de satisfazer a Eq.(2.1), nós exigimos que

$$\dot{\alpha} = \frac{2\Omega^2}{M}\gamma, \quad \dot{\beta} = -\frac{2}{M}\gamma, \quad \dot{\gamma} = -\frac{1}{M}\alpha + \frac{\Omega^2}{M}\beta. \tag{2.23}$$

É conveniente introduzir uma outra função $\sigma(t)$, definida como

$$\beta(t) = \sigma^2(t) \tag{2.24}$$

onde $\sigma^2(t)$ é uma função real do tempo. A segunda equação das Eqs.(2.23) fica

$$\gamma = -M\sigma\dot{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma} = -M(\dot{\sigma}^2 + \sigma\ddot{\sigma}) \tag{2.25}$$

substituindo as Eqs.(2.24) e (2.25) na terceira das Eqs.(2.23) e resolvendo para α ficamos com

$$\alpha = M^2(\dot{\sigma}^2 + \sigma\ddot{\sigma}) + \Omega^2\sigma^2. \tag{2.26}$$

A primeira equação das Eqs.(2.23) está impondo uma restrição para $\dot{\alpha}$, eliminaremos essa restrição derivando a Eq.(2.26) em relação ao tempo

$$\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} = (M^2 \dddot{\sigma} + M^2\ddot{\sigma}\dot{\sigma} + 2M^2\ddot{\sigma}\dot{\sigma} + 2\dot{\Omega}\Omega\sigma^2 + 2\Omega\dot{\sigma}\sigma). \tag{2.27}$$

Impondo a condição $\dot{\alpha} = -2\Omega\dot{\sigma}\sigma$, temos

$$M^2(\dddot{\sigma} + M^2\ddot{\sigma}\dot{\sigma} + 2M^2\ddot{\sigma}\dot{\sigma} + 2\dot{\Omega}\Omega\sigma^2 + 4\Omega^2\dot{\sigma}\sigma) = 0$$

agora vamos fazer o seguinte $4\Omega^2\dot{\sigma}\sigma = 3\Omega^2\dot{\sigma}\sigma + \Omega^2\dot{\sigma}\sigma$, para reorganizarmos e deixá-la da seguinte forma

$$\sigma\frac{d}{dt}[M^2\ddot{\sigma} + \Omega^2\sigma] + 3\dot{\sigma}[M^2\ddot{\sigma} + \Omega^2\sigma] = 0 \tag{2.28}$$

que pode ser imediatamente escrita como

$$M^2\ddot{\sigma} + \Omega^2\sigma = \frac{C}{\sigma^3} \tag{2.29}$$

e a Eq. (2.26) fica

$$\alpha = \left(\frac{C}{\sigma^2}\right) + M^2\dot{\sigma}^2. \tag{2.30}$$

Com esses resultados podemos deixar nosso invariante de forma mais compacta

$$I = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{C}{\sigma^2}\right)q^2 + (\sigma p - M\dot{\sigma}q)^2\right] \tag{2.31}$$

sendo a Eq.(2.29) uma condição auxiliar. Para simplificar um pouco mais, vamos deixar de lado a "arbitrariedade"da constante real C, fazendo a seguinte transformação

$$\sigma(t) = C^{1/4}\rho(t), \tag{2.32}$$

sendo $\rho(t)$ uma nova função auxiliar do tempo. Após descartar o fator multiplicativo constante $c^{1/2}$, podemos escrever a equação a Eq.(2.31) na forma

$$I = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\rho^2}\right)q^2 + (\rho p - M\dot{\rho}q)^2\right] \tag{2.33}$$

e a condição auxiliar dada pela Eq.(2.29), se torna

$$M^2\ddot{\rho} + \Omega^2\rho = \frac{1}{\rho^3}, \tag{2.34}$$

que é conhecida na literatura como equação de Milne-Pinney[45] . Como queremos $I(t)$ Hermitiano, escolhemos apenas as soluções reais da Eq.(2.34).

2.2.1 Autoestados, autovalores e as fases do invariante *I(t)*

Os autoestados e autovalores do operador invariante *I(t)* podem ser encontrados introduzindo os operadores canônicos de abaixamento e levantamento, a e $a^\dagger$, dependentes do tempo

$$a = (2\hbar)^{-1/2}\left\{\left[\left(\frac{1}{\rho}\right)q + i(\rho p - M\dot{\rho}q)\right]\right\},$$

$$a^\dagger = (2\hbar)^{-1/2}\left[\left(\frac{1}{\rho}\right)q - i(\rho p - M\dot{\rho}q)\right]. \tag{2.35}$$

Esses operadores satisfazem a regra de comutação

$$[a, a^\dagger] = 1 \tag{2.36}$$

de modo que o operador $aa^\dagger$ é um operador número com autovalores inteiros e não negativos. O operador invariante dado pela Eq.(2.33) pode ser escrito em termos de a e $a^\dagger$ como

$$I = \hbar(a^\dagger a + 1/2), \tag{2.37}$$

do qual resulta que os autoestados normalizados $|\lambda\rangle$ de I são os mesmos que os autoestados normalizados $|\mu\rangle$ de $a^\dagger a$:

$$a^\dagger a|\mu\rangle = \mu|\mu\rangle, \quad \mu = 0, , 1, 2, ... \tag{2.38}$$

Especificamos as fases relativas desses autoestados normalizados $|\mu\rangle$ exigindo as seguintes relações

$$\begin{aligned} a|\mu\rangle &= \mu^{1/2}|\mu - 1\rangle, \\ a^\dagger|\mu\rangle &= (\mu + 1)^{1/2}|\mu + 1\rangle. \end{aligned} \tag{2.39}$$

O espectro de autovalores de I é dado por

$$\lambda_\mu = (\mu + \frac{1}{2})\hbar, \quad \mu = 0, 1, 2, ... \tag{2.40}$$

Para realizar a transformação das Eqs.(2.15) e (2.16) precisamos calcular os elementos diagonal da matriz dos operadores H e $\partial/\partial t$. A matriz é obtida usando as Eqs.(2.35) para expressar H em termos de a e $a^\dagger$ e, portanto, aplicando as Eqs.(2.39):

$$\begin{aligned} \langle\mu|H|\mu\rangle &= \frac{\hbar}{4M}\left(M^2\dot{\rho}^2 + \Omega^2\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\langle\mu|\{a, a^\dagger\}_+|\mu\rangle = \\ &= \frac{1}{M}\left(M^2\dot{\rho}^2 + \Omega^2\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)(\mu + \frac{1}{2})\hbar. \end{aligned} \tag{2.41}$$

O hamiltoniano, é claro, também têm elementos elementos não diagonais, desde que a representação definida pelas Eqs.(2.38) e (2.39) não diagonalize este operador.

Para calcular os elementos da matriz diagonal de $\partial/\partial t$, tomamos a derivada parcial da segunda das Eqs.(2.39) em relação ao tempo, e em seguida um produto escalar apropriado, e obtemos

$$\langle\mu|\frac{\partial}{\partial t}|\mu\rangle = \langle\mu - 1|\frac{\partial}{\partial t}|\mu - 1\rangle + \mu^{-1/2}\langle\mu|\frac{\partial a^\dagger}{\partial t}|\mu - 1\rangle. \tag{2.42}$$

A expressão para $\partial a^\dagger/\partial t$ em termos de a e $a^\dagger$ é

$$\frac{\partial a^\dagger}{\partial t} = \frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{2\dot{\rho}}{\rho} + iM(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2)\right] a + iM(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2)a^\dagger\right\}, \tag{2.43}$$

de modo que a Eq.(2.42) torna-se

$$\begin{aligned}\langle\mu|\frac{\partial}{\partial t}|\mu\rangle &= \langle\mu - 1|\frac{\partial}{\partial t}|\mu - 1\rangle + i\frac{M}{2}(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2) \\ &= \langle 0|\frac{\partial}{\partial t}|0\rangle + i\frac{\mu}{2}M(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}).\end{aligned} \tag{2.44}$$

É evidente que o fato de $\partial/\partial t$ ser anti-hermitiano exige que todos elementos da matriz diagonal de $\partial/\partial t$ sejam puramente imaginários. Esse estado dependente do tempo pode, em geral, ter um fator de fase dependente do tempo, apenas a escolha que é arbitrária. De fato, uma escolha conveniente que adotamos, é aquela que faz $\langle 0|\partial/\partial t|0\rangle$ desaparecer no limite que ρ se torna constante, e faz uma contribuição do "ponto-zero"para Eq.(2.44):

$$\langle 0|\frac{\partial}{\partial t}|0\rangle = i\frac{M}{4}(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho}). \tag{2.45}$$

Com essa convenção, agora podemos escrever os elementos da matriz diagonal de $\partial/\partial t$ como

$$\langle\mu|\frac{\partial}{\partial t}|\mu\rangle = i\frac{M}{2}(\rho\ddot{\rho} - \dot{\rho})(\mu + \frac{1}{2}). \tag{2.46}$$

As fases necessárias para realizar a transformação da Eq.(2.14) podem ser calculadas substituindo as Eqs.(2.41) e (2.46) na Eq.(2.15) para que tenhamos

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_\mu}{dt} &= -\frac{1}{2M}\left\{M^2(\rho\ddot{\rho} + M^2\dot{\rho}^2)\right] \\ &\quad +\Omega^2\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}(\mu + \tfrac{1}{2}) \\ &= -\frac{1}{M}(\mu + \frac{1}{2})\frac{1}{\rho^2},\end{aligned} \tag{2.47}$$

onde fizemos o uso da condição auxiliar da Eq.(2.34). Assim, as funções de fase podem ser escritas na seguinte forma

$$\alpha_\mu(t) = -\frac{1}{M}(\mu + \frac{1}{2})\int^t dt' \frac{1}{\rho^2(t')} \tag{2.48}$$

É interessante notar que essas fases estão estritamente relacionadas com uma quantidade física que aparece na análise de osciladores harmônicos clássicos dependentes do tempo. No caso clássico, o invariante I pode ser escolhido como um momento canônico generalizado e a coordenada canônica cíclica correspondente é, portanto, igual a $-\alpha_\mu(\mu + \frac{1}{2})$.

Os elementos não diagonais da matriz de H e $\partial/\partial t$, embora não sejam relevantes aqui, são bem fáceis de calcular. A expressão de H em termos dos operadores de abaixamento e levantamento imediatamente produz

$$\langle\mu'|H|\mu\rangle$$

$$= (\hbar/4)\{M(\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho}) - 2i(\dot{\rho}/\rho)][\mu(\mu-1)]^{1/2}\delta_{\mu'+2,\mu}$$

$$+ [M(\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho}) + 2i(\rho/\dot{\rho})][(\mu+1)(\mu+2)]^{1/2}\delta_{\mu',\mu+2}\}, \quad \mu' \neq \mu \tag{2.49}$$

e da Eq.(2.13), obtemos

$$\langle\mu'|\frac{\partial}{\partial t}|\mu\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\mu'|H|\mu\rangle, \quad \mu' \neq \mu. \tag{2.50}$$

O resultado da Eq.(2.47) nos permite escrever que os autoestados de $I(t)$ que satisfazem a equação de Schrödinger para o oscilador harmônico dependente do tempo serão dados por

$$|\psi_n(t)\rangle = e^{i\alpha_n(t)}|n,t\rangle, \tag{2.51}$$

onde as fases $\alpha_n(t)$ são dadas pela Eq.(2.47), Assim, podemos escrever a solução geral da equação de Schrödinger para o Hamiltoniano Eq.(2.18) como sendo,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{i\alpha_n(t)}|n,t\rangle. \tag{2.52}$$

sendo os c_n constates.

Capítulo 3

Estados Coerentes

Agora, vamos construir os estados coerentes $|\alpha\rangle$ para o oscilador harmônico e apresentar suas propriedades mais importantes, partindo de sua definição em termos do operador aniquilação(abaixamento), a, e sua definição via operador deslocamento. Os estados coerentes, como iremos ver, tem também a propriedade de ser um estado de incerteza mínima, ou seja, ele minimiza o produto das incertezas de dois observáveis incompatíveis(ex: posição e momento).

Oscilador harmônico quântico

Um dos potenciais mais importantes na física é o potencial do oscilador harmônico

$$V(q) = \frac{m\omega^2}{2}q^2, \tag{3.1}$$

existem pelo menos duas formas possíveis para resolver a correspondente equação de Schrödinger independente do tempo, o método analítico e o método algébrico, por ser mais didático iremos trabalhar com o algébrico.

Método algébrico

Começamos usando a equação de Schrödinger independente do tempo em que inserimos a Hamiltoniana o potencial relacionado ao oscilador harmônico Eq.(3.1)

$$H\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dq^2} + \frac{m\omega^2}{2}q^2\right)\psi = E\psi. \tag{3.2}$$

Reescrevemos a Eq.(3.2) da seguinte forma

$$H\psi = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dq}\right)^2 + (m\omega q)^2\right]\psi = \frac{1}{2m}[p^2 + (m\omega q)^2]\psi = E\psi. \tag{3.3}$$

Vamos agora tentar expressar esta equação como o quadrado de algum operador(ainda desconhecido),

$$p^2 + q^2 \quad \Rightarrow \quad (q + ip)(q - ip) = p^2 + q^2 + i(pq - qp), \tag{3.4}$$

desde que q e p obedeçam a Eq.(2.19), $[p, q] = i\hbar$. Podemos definir os seguintes operadores

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega q + ip) \quad \textit{operador aniquilação}$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega q - ip) \quad \textit{operador criação}$$

Notando que os operadores posição e momento são expressos pelos $a's$ e $a^{\dagger}{}'s$ como

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \qquad p = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a - a^\dagger). \tag{3.5}$$

Agora, vamos calcular o comutador dos operadores criação e aniquilação. Eles comutam-se da seguinte forma

$$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0. \tag{3.6}$$

Para encontrar o comutador de a e $a^\dagger$, primeiro calculamos $aa^\dagger$ bem como $a^\dagger a$

$$aa^\dagger = \frac{1}{2m\omega\hbar}[(m\omega q)^2 + im\omega[p, q] + p^2], \tag{3.7}$$

$$a^\dagger a = \frac{1}{2m\omega\hbar}[(m\omega q)^2 - im\omega[p, q] + p^2]. \tag{3.8}$$

Facilmente encontramos que

$$[a, a^\dagger] = 1 \tag{3.9}$$

Considerando novamente o hamiltoniano da Eq.(3.3) e usando as Eqs.(3.7) e (3.8) para reescrevê-la como

$$H = \frac{1}{2m}(p^2 + (m\omega q)^2) = \frac{\hbar\omega}{2}(a^\dagger a + aa^\dagger). \tag{3.10}$$

Usando o comutador Eq.(3.9) podemos simplificar a hamiltoniana

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad \Rightarrow \quad aa^\dagger = a^\dagger a + 1, \tag{3.11}$$

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}). \tag{3.12}$$

Para a equação de autovalores

$$\hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})\psi = E\psi, \tag{3.13}$$

que reescrevemos como uma equação de autovalor para o operador $a^\dagger a$

$$a^\dagger a\psi = \left(\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right)\psi. \tag{3.14}$$

3.1 Definição e propriedades dos estados coerentes

Os estados coerentes $|\alpha\rangle$ para o oscilador são definidos pela seguinte equação de autovalor:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \tag{3.15}$$

onde o autovalor α pode ser um número complexo, pois o operador a é não hermitiano e, dessa forma, não pode representar uma medida física.

A Eq.(3.15) nos diz que os estados coerentes são definidos como sendo as autofunções do operador aniquilação deste oscilador, ou seja, os estados coerentes satisfazem a equação de autovalor do operador de abaixamento dos níveis de energia do oscilador. Utilizando a notação de Dirac[14], obtém-se as seguintes propriedades do hamiltoniano que governa o oscilador harmônico quântico, na representação dos estados de números, ou de ocupação, $|n\rangle$:

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad E_n = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{3.16}$$

e definimos esse estado de número como

$$|n\rangle = a[(a^\dagger)^n/(n!)^{1/2}|0\rangle. \tag{3.17}$$

Os próprios operadores a e $a^\dagger$ geram os autoestados de número, pois atuando-os sobre um ket $|n\rangle$ obtém-se outro ket $|n \pm 1\rangle$, usando a Eq.(3.17), temos

$$a|n\rangle = a\left[\frac{(a^\dagger)^n}{(n!)^{1/2}}\right]|0\rangle = (n)^{1/2}\frac{(a^\dagger)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}^{1/2}}|0\rangle + \frac{(a^\dagger)^n}{(n!)^{1/2}}a|0\rangle,$$

$$\Rightarrow a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \tag{3.18}$$

e

$$a^\dagger|n\rangle = a^\dagger[\frac{(a^\dagger)^n}{(n)^{1/2}}]|0\rangle = (n+1)^{1/2}\frac{(a^\dagger)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}|0\rangle,$$

$$\Rightarrow a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \qquad (3.19)$$

Essas duas Eqs.(3.18) e (3.19) constituem a álgebra de Heisenberg-Weyl[12]. O produto escalar de duas autofunções do oscilador harmônico resulta no delta de Kronecker, $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$, é zero quando m for diferente de n, ou 1 quando m for igual a n, então os kets $|n\rangle$ podem ser ortogonais e ortonormais e, por sua vez, o conjunto $|n\rangle$ é completo. Portanto, pelo teorema da expansão, podemos representar os estados coerentes do oscilador harmônico como uma combinação linear(superposição) dos seus autokets, a saber,

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle. \qquad (3.20)$$

Podemos escrever o lado esquerdo da Eq.(3.15) da seguinte forma

$$a|\alpha\rangle = a\sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a|n\rangle = \sum c_n\sqrt{n}|n-1\rangle, \qquad (3.21)$$

fazendo $n \to m+1$ nesta última equação, podemos ainda escrevê-la como

$$a|\alpha\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+1}\sqrt{m+1}|m\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}\sqrt{n+1}|n\rangle. \qquad (3.22)$$

Usando a superposição de autokets de número na Eq.(3.20), e comparando as Eqs.(3.15) e (3.22) encontramos a seguinte relação de recorrência dada por:

$$c_{n+1} = \frac{\alpha c_n}{\sqrt{n+1}}, \qquad (3.23)$$

onde, por indução, podemos expressar c_n em termos de c_0, isto é;

$$c_n = \frac{\alpha^n c_0}{\sqrt{n!}}, \qquad (3.24)$$

Portanto, os autokets do operador de abaixamento do oscilador, $|\alpha\rangle$, são representados segundo a expressão abaixo

$$|\alpha\rangle = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \qquad (3.25)$$

Aplicando agora a condição de normalização $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$, e lembrando-se que $\langle n|n\rangle = 1$, obtemos o valor da constante c_0 que será dado por:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad c_0 = \exp(-1/2|\alpha|^2). \qquad (3.26)$$

Substituindo, finalmente, o valor de c_0 na Eq.(3.25), obtemos os estados coerentes normalizados

$$|\alpha\rangle = e^{-1/2|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \quad \Rightarrow \quad |\alpha\rangle = e^{-1/2|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \tag{3.27}$$

De uma forma geral, a fase $|\alpha\rangle$ descreve o aspecto do estado coerente de uma onda

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\alpha\rangle. \tag{3.28}$$

Analogia com a expansão de um vetor V (real) no espaço euclidiano:

$$\vec{V} = \textstyle\sum_i \hat{\mathrm{e}}_i(\hat{\mathrm{e}}_i.\vec{V})$$

Em termos de base, os autokets de a são comparáveis ao conjunto de vetores unitários mutuamente ortogonais do espaço euclidiano. Uma propriedade importante para os estados coerentes é que eles são não ortogonais, ou seja, o produto escalar entre dois estados coerentes é não nulo

$$|\langle\alpha|\alpha'\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\alpha'|^2}. \tag{3.29}$$

Como seria esperado, pois eles são autokets de um operador não-hermitiano. Os estados coerentes são um conjunto supercompleto, pois é possível expressar qualquer autoket de um estado quântico do oscilador harmônico em termos dos estados coerentes, inclusive dele mesmo.

Relação de completeza

Embora os estados coerentes sejam não ortogonais, é possível expandi-los em termos de um conjunto completo de estados, de fato, seja $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$, temos

$$\int |\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha = \int_0^{\infty}|\alpha|d|\alpha|\int_0^{2\pi}d\phi|\alpha\rangle\langle\alpha|. \tag{3.30}$$

Usando a expansão (3.27), obtemos

$$\begin{aligned}\textstyle\int |\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha &= \textstyle\sum_{n,n'}\int_0^{\infty}|\alpha|d|\alpha|\frac{|\alpha|^{n+n'}}{\sqrt{n!n'!}}e^{-|\alpha|^2}\int_0^{2\pi}d\phi e^{i\phi(n-n')}|n\rangle\langle n'| \\ &= 2\pi\textstyle\sum_n\int_0^{\infty}d|\alpha|e^{|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^{2n+1}}{n!}|n\rangle\langle n| = \pi\sum_n|n\rangle\langle n| = \pi,\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{1}{\pi}\int|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha = 1. \tag{3.31}$$

Essa relação é chamada de relação de completeza ou de fechamento. Ela atua em um ket gerando o mesmo ket. Por satisfazer a relação acima, garantimos que nosso conjunto de autofunções seja completo.

3.1.1 Incerteza mínima

Para facilitar nosso trabalho, vamos considerar o oscilador Eq.(3.2) com massa unitária, daí as Eqs.(3.5) se tornam,

$$q = (\hbar/2\omega)^{1/2}(a^{\dagger} + a) \tag{3.32}$$

$$p = i(\hbar\omega/2)^{1/2}(a^{\dagger} - a) \tag{3.33}$$

para encontrar o valor esperado de q e p nos estados coerentes iremos usar apenas a Eq.(3.15) que define esses estados, e sua correspondente forma adjunta. Então, ficamos com

$$\langle\alpha|q|\alpha\rangle = (2\hbar/\omega)^{1/2}\mathrm{Re}\alpha, \tag{3.34}$$

$$\langle\alpha|p|\alpha\rangle = (2\hbar/\omega)^{1/2}\mathrm{Im}\alpha, \tag{3.35}$$

onde Re α e Im α representam as partes reais e imaginárias de α.

Para encontrar as funções de onda para os estados coerentes, escrevemos a Eq.(3.15) na forma

$$(2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega q + ip)|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \tag{3.36}$$

e fazemos o produto escalar de ambos os membros com o estado conjugado $\langle q'|$, que correspondem aos autovalores q' de q. Desde que o momento possa ser representado por um operador derivada, $\langle q|p = -i\hbar(d/dq')\langle q|$, encontramos que a função de onda no espaço das coordenadas, $\langle q|\alpha\rangle$, obedece a equação diferencial

$$\frac{d}{dq'}\langle q'|\alpha\rangle = -2\left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2}\left\{\left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2}q' - \alpha\right\}\langle q'|\alpha\rangle. \tag{3.37}$$

A equação pode ser integrada imediatamente para produzir a solução para a função de onda que, na forma normalizada, que é

$$\langle q'|\alpha\rangle = (\omega/\pi\hbar)^{1/4}\exp -[(\omega/2\hbar)^{1/2}q' - \alpha]^2. \tag{3.38}$$

Usando um argumento análogo, fornecemos a função de onda no espaço p. Se fizermos o produto escalar da Eq.(3.36) com um autoestado $\langle p'|$, e usar a relação $\langle p'|q = \hbar(\partial/\partial p')\langle p'|$, chegamos a uma equação diferencial cuja solução normalizada é

$$\langle p'|\alpha\rangle = (\pi\hbar\omega)^{-1/4}\exp -[(2\hbar\omega)^{-1/2}p' + i\alpha]^2. \tag{3.39}$$

As varianças são definidas como

$$(\Delta q)^2 = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2, \tag{3.40}$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2, \tag{3.41}$$

encontramos, para as funções de onda Eqs.(3.38) e (3.39), que o produto das varianças é

$$(\Delta q)^2 (\Delta p)^2 = \frac{1}{4}\hbar^2. \tag{3.42}$$

De acordo com o princípio da incerteza, esse é o valor mínimo que o produto pode ter.

3.1.2 Operador deslocamento

O operador D(α) é definido por

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}, \tag{3.43}$$

onde α é um número complexo e a e $a^\dagger$ são operadores de criação e aniquilação, respectivamente. O operador deslocamento é um operador unitário, pois

$$DD^\dagger = 1.$$

Para que esta equação tenha validade, temos que garantir que os comutadores $[[A, B], A]$ e $[[A, B], B]$ se anulem, onde $A = \alpha a^\dagger$ e $B = \alpha^* a$. Então, vamos começar calculando o comutador de A e B

$$[A, B] = [\alpha a^\dagger, \alpha^* a] = \alpha\alpha^* \overset{-1}{[\alpha^\dagger, \alpha]} = -|\alpha|^2, \tag{3.44}$$

sendo o resultado um número real, ele comuta com A e B, e imediatamente temos o resultado para o operador deslocamento

$$D(\alpha) = e^{-1/2|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{\alpha^* a}. \tag{3.45}$$

Usando o operador $a^\dagger$ na Eq.(3.15), observamos que o n-ésimo autoestado excitado do oscilador é obtido a partir do autoestado fundamental atuando o operador $a^\dagger$ n vezes, então:

$$|n\rangle = a[(a)^n/(n!)^{1/2}|0\rangle. \tag{3.46}$$

Substituindo-a na Eq.(3.36), obtemos um resultado semelhante para $|\alpha\rangle$:

$$|\alpha\rangle = \exp(1/2|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = \exp(-1/2|\alpha|^2) \exp(\alpha a^\dagger)|0\rangle. \tag{3.47}$$

Este operador atuando sobre o autoestado fundamental é um operador deslocamento e unitário. De fato, utilizando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$\exp(-1/2[A,B])\exp(A)\exp(B)=\exp(A+B), \tag{3.48}$$

obtemos:

$$|\alpha\rangle=\exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right)\exp(\alpha a^\dagger)|0\rangle=\exp(\alpha a-\alpha^* a^\dagger)|0\rangle\equiv D(\alpha)|0\rangle. \tag{3.49}$$

Onde temos que os estados coerentes para o oscilador são definidos como sendo aqueles autoestados obtidos pela atuação de um operador deslocamento sobre o autoestado fundamental $|\alpha\rangle=D(\alpha)|0\rangle$, onde α pode assumir valores complexos.

Propriedades do operador deslocamento:

1) $D^\dagger(\alpha)=D^{-1}(\alpha)=D(-\alpha)$

2) $D^\dagger(\alpha)aD(\alpha)=a+\alpha$

3) $D^\dagger(\alpha)a^\dagger D(\alpha)=a^\dagger+a^*$

4) $D(\alpha+\beta)=D(\alpha)D(\beta)e^{-iIm(\alpha\beta^*)}$

A prova de 1) é simples, bastando apenas comprovar que o operador deslocamento é unitário.

Prova: 2)

$$D^\dagger(\alpha)aD(\alpha)=e^{\alpha a-\alpha a^\dagger}ae^{\alpha a^\dagger-\alpha^* a}=a+[\alpha^* a-\alpha a^\dagger,a]=,$$

$$=a+\alpha^*\overbrace{[a,a]}^{0}-\alpha\overbrace{[a^\dagger,a]}^{-1}=a+\alpha,$$

A prova de 3) é similar a 2).

Prova: 4)

$$D(\alpha+\beta)=e^{\alpha a^\dagger-\alpha^* a+\beta a^\dagger-\beta^* a}=$$

$$=e^{\alpha a^\dagger-\alpha^* a}e^{\beta a^\dagger-\beta^* a}e^{\frac{1}{2}[\alpha a^\dagger-\alpha a,\beta a^\dagger-\beta^* a]}=D(\alpha)D(\beta)e^{-\frac{1}{2}(\alpha\beta^*-\alpha^*\beta)}=$$

$$=D(\alpha)D(\beta)e^{-iIm(\alpha\beta^*)}.$$

De posse dessas propriedades a respeito do operador deslocamento, podemos criar os estados coerentes. O estado coerente $|\alpha\rangle$ é gerado a partir do vácuo $|0\rangle$ por um operador deslocamento $D(\alpha)$

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle. \tag{3.50}$$

O "vácuo"$|\alpha\rangle$ é o estado fundamental com número de ocupação $n = 0$, que é definido por $a|0\rangle = 0(3.51)$. Ou seja, os Estados Coerentes para o oscilador harmônico são definidos como sendo aqueles autoestados obtidos pela atuação de um operador deslocamento sobre o autoestado fundamental $|\alpha\rangle \equiv D(\alpha)|0\rangle$, onde α pode assumir valores complexos. Por isso $D(\alpha)$ é chamado operador deslocamento.

Aplicando um deslocamento negativo em $|\alpha\rangle$, encontramos das propriedades 1) e 2) que

$$aD(-\alpha)|\alpha\rangle = D(-\alpha)D^\dagger(-\alpha)aD(-\alpha)|\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow \quad aD(-\alpha)|\alpha\rangle = D(-\alpha)(a-\alpha)|\alpha\rangle = 0,$$

Isto implica que $D(-\alpha)|\alpha\rangle$ é o estado de vácuo $|0\rangle$.

$$D(-\alpha)|\alpha\rangle = |0\rangle \quad \Rightarrow \quad |\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle. \tag{3.51}$$

Por outro lado, nossa definição Eq.(3.43) pode seguir como um teorema, veja:

$$D(\alpha)D^\dagger(\alpha)a|\alpha\rangle = D(\alpha)D^\dagger(\alpha)aD(\alpha)|0\rangle = D(\alpha)(a|0\rangle + \alpha|0\rangle =$$

$$= \alpha D(\alpha)|0\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{3.52}$$

Observe que acabamos de ver duas definições equivalentes para os estados coerentes.

Evolução temporal

Vamos agora dar uma olhada na evolução temporal dos estados coerentes dos do oscilador harmônico. Usando a energia do oscilador harmônico, facilmente escrevemos

$$\psi_n(t,q) = \psi_n(q)e^{iE_nt/\hbar} = \psi_n(q)e^{-in\omega t}e^{i\omega t/2}. \tag{3.53}$$

Podemos agora escrever a evolução temporal do estado coerente

$$\phi_\alpha(t,q) = e^{-1/2|\alpha|^2}e^{-i\omega t/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha^n e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}|\psi_n(q). \tag{3.54}$$

Com um pequeno truque na notação, tornando α dependente do tempo $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$, podemos trazer a Eq.(3.53) para uma forma mais familiar

$$\phi_\alpha(t, q) = \phi_{\alpha(t)}(q)e^{-i\omega t/2}, \tag{3.55}$$

que identificamos como uma solução da equação de Schrödinger dependente do tempo.

Valor esperado de q para os estados Coerentes

Depois disso, queremos comparar o movimento dos estados coerentes ao do oscilador harmônico quântico (e clássico), o que faremos através do valor esperado de q

$$\langle q \rangle_{oscilador} = 0. \tag{3.56}$$

Recordando do valor esperado de q em termos dos operadores de criação e aniquilação, e a equação de autovalor do operador aniquilação (3.36), podemos facilmente calcular o valor esperado da posição dos estados coerentes

$$\langle q \rangle_{coerente} = \langle \phi_{\alpha(t)} | \alpha | \phi_{\alpha(t)} \rangle = \frac{q_0}{\sqrt{2}} \langle \phi_{\alpha(t)} | a + a^\dagger | \phi_{\alpha(t)} \rangle$$

$$= \frac{q_0}{\sqrt{2}}(\alpha(t) + \alpha^*(t)) = \sqrt{2} q_0 Re(\alpha(t)) = \sqrt{2} q_0 |\alpha| \cos(\omega t - \varphi), \tag{3.57}$$

onde usamos $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t} = |\alpha| e^{-i(\omega t - \varphi)}$. Para resumir o cálculo, temos

$$\langle q \rangle_{coerente} = \sqrt{2} q_0 |\alpha| \cos(\omega t - \varphi). \tag{3.58}$$

e concluímos que o estado coerente, ao contrário do oscilador harmônico quântico, *oscila*, semelhante ao seu análogo clássico.

Capítulo 4

Quantização de um circuito LC

Um circuito LC(indutância-capacitância) ideal é uma peça chave em circuitos mesoscópicos e, como vimos na introdução, sua quantização foi primeiramente discutida por Louisell[13]. Tal circuito mesoscópico não dissipativo é apenas o caso ideal, porque para casos reais a dissipação é inevitável, e os efeitos quânticos de R(resistência) devem ser levados em consideração. Nesta seção, vamos quantizar um circuito LC ideal de maneira análoga ao oscilador harmônico da seção anterior.

4.1 Descrição clássica

Considerando um circuito LC idealizado, que consiste exclusivamente em um capacitor de capacitância C e um indutor de autoindutância L. Como desprezamos inteiramente a resistência, não há dissipação, e a energia inicialmente armazenada no circuito se conserva. Pela Lei de Kirchhoff, temos

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0, \tag{4.1}$$

derivando em relação (4.1) ao tempo, com $dq/dt = i$, sendo q a carga e i a corrente elétrica, ficamos com

$$\frac{1}{c}\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} = 0, \tag{4.2}$$

ou seja,

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \omega_0^2 = 0, \tag{4.3}$$

com $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, que dá a frequência angular das oscilações livres neste circuito. A solução geral é simples e bastante conhecida

$$i(t) = Re(Ae^{i\phi}e^{i\omega t}) = A\cos(\omega t + \phi). \tag{4.4}$$

Integrando (4.4) em relação ao tempo, escrevemos

$$q(t) = \frac{A}{\omega_0}\sin(\omega_0 t + \phi). \tag{4.5}$$

E de maneira análoga ao oscilador harmônico clássico, escrevemos a Hamiltoniana para este sistema

$$H(t) = \frac{1}{2L}\frac{dq^2}{dt^2} + \frac{1}{2C}q^2, \tag{4.6}$$

sendo que neste caso $L(\frac{dq}{dt}) = \Phi(t)$, obtemos

$$H(t) = \frac{1}{2L}\Phi^2 + \frac{1}{2C}q^2, \tag{4.7}$$

onde Φ é o fluxo magnético. Dessa forma obtemos a hamiltoniana para este circuito, que é semelhante a obtida para o oscilador harmônico clássico.

4.2 Descrição quântica

A fim de quantizar o circuito LC, vamos resolver a equação de Schrödinger associada ao Hamiltoniano (4.7)

$$-\frac{\hbar^2}{2L}\frac{d^2\psi}{dq^2} + \frac{1}{2}L\omega^2 q^2\psi = E\psi. \tag{4.8}$$

A equação de Schrödinger dependente do tempo é dado por

$$H(t)\psi(q,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(q,t), \tag{4.9}$$

sendo q a carga, e Φ o fluxo magnético, operadores canonicamente conjugados que satisfazem a relação $[q, \Phi] = i\hbar$, com $\Phi = -i\hbar\partial/\partial q$. E os estados estacionários normalizados para este circuito são

$$\psi_n(x) = \left(\frac{L\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n(\xi)e^{-\xi^2/2}, \tag{4.10}$$

Sendo $\xi \equiv \sqrt{\frac{L\omega}{\hbar}}q$ uma variável adimensional e H_n os polinômios de Hermite. Procedendo de maneira similar ao oscilador harmônico quântico, escrevemos os operadores a e $a^\dagger$ em termos da carga q e do fluxo magnético Φ

$$a = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_0 L}}(\omega_0 Lq + i\Phi), \tag{4.11}$$

e

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_0 L}}(\omega_0 Lq - i\Phi). \tag{4.12}$$

Somando e subtraindo as Eqs.(4.11) e (4.12), nós encontramos q e Φ em função de a e $a^\dagger$

$$q = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0 C}{2}}(a^\dagger + a), \tag{4.13}$$

e

$$\Phi = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_0 L}{2}}(a^\dagger - a), \tag{4.14}$$

com $(\omega_0 L) = (\omega_0 C)^{-1/2}$. Vamos escrever a equação de Schrödinger da seguinte forma

$$H\psi = \frac{1}{2L}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dq}\right)^2 + (L\omega_0\Phi)^2\right]\psi = E\psi, \tag{4.15}$$

onde o Hamiltoniano pode ser escrito em termos dos operadores a e $a^\dagger$

$$H = \frac{1}{2L}[q^2 + (L\omega_0\Phi)^2] = \frac{\hbar\omega_0}{2}[aa^\dagger + a^\dagger a], \tag{4.16}$$

para a relação de comutação, encontramos

$$aa^\dagger = \frac{1}{2L\omega_0\hbar}[(L\omega_0\Phi)^2 + iL\omega_0[q,\Phi] + q^2], \tag{4.17}$$

e

$$a^\dagger a = \frac{1}{2L\omega_0\hbar}[(L\omega_0\Phi)^2 - iL\omega_0[q,\Phi] + q^2], \tag{4.18}$$

o que nos resulta em

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad \rightarrow \quad aa^\dagger = a^\dagger a + 1. \tag{4.19}$$

Portanto, substituindo (4.19) em (4.15) podemos escrever o Hamiltoniano como segue

$$H = \hbar\omega_0\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right). \tag{4.20}$$

Capítulo 5

Descrição quântica de um circuito RLC generalizado e explicitamente dependente do tempo

Nesta seção, vamos começar com uma descrição clássica de um circuito RLC generalizado e dependente do tempo. Depois iremos contruir os estados coerentes para este circuito e usar estes estados quânticos para calcular as flutuações de carga, fluxo magnético e o produto de incerteza. Logo em seguida, vamos derivar a fase geométrica e utilizar o limite assintótico adiabático para encontrar as fases dinâmicas e de Berry. Logo em seguida calculamos a fase dinâmica e de Berry para três casos particulares e encontramos resultados bastante interessantes.

5.1 Descrição clássica

Primeiramente vamos apresentar uma descrição clássica para o circuito RLC generalizado e dependente do tempo. A Hamiltoniana clássica este circuito é dada por

$$H(t) = e^{-\Lambda(t)}\frac{\Phi^2}{2L_0} + e^{\Lambda(t)}\frac{L_0\omega^2(t)}{2}q^2 + \frac{y(t)}{2}(\Phi q + q\Phi), \tag{5.1}$$

onde L_0 é a indutância para $t = 0$, $\omega^2 = 1/LC$ é a frequência de um circuito na ausência da resistência, $y(t)$ é uma função real dependente do tempo, $q(t)$ é a carga, Φ é o fluxo magnético, e

$$\Lambda(t) = \int_0^t \left(\frac{\dot{L} + R}{L} \right) d\tau, \tag{5.2}$$

onde o ponto representa uma derivada temporal. Agora, partindo de (5.1) vamos utilizar as equações Hamilton para encontrar a equação clássica de movimento para a carga $q(t)$

$$\text{(I)} \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial \Phi} = e^{-\Lambda(t)} \frac{\Phi}{L_0} + yq,$$

$$\text{(II)} \quad \dot{\Phi} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -e^{\Lambda(t)} L_0 \omega^2 q - yq,$$

da primeira das equações de Hamilton, temos

$$\dot{q} - yq = e^{-\Lambda(t)} \frac{\Phi}{L_0} \quad \Rightarrow \quad \Phi = L_0 \dot{q} e^{\Lambda(t)} - L_0 yq e^{\Lambda(t)},$$

ou ainda, derivando $\dot{q}$, obtemos

$$\ddot{q} = -\dot{\Lambda} e^{-\Lambda} \frac{\Phi}{L_0} + e^{\Lambda} \frac{\dot{\Phi}}{L_0} + \dot{y}q + y\dot{q},$$

substituindo os respectivos valores encontrados de Φ e $\dot{\Phi}$ nessa última expressão, ficamos com

$$\ddot{q} = -\frac{\Lambda e^{-\Lambda}}{L_0} (L_0 \dot{q} e^{\Lambda} - L_0 yq e^{\Lambda}) + \frac{e^{-\Lambda}}{L_0} (-e^{\Lambda} L_0 \omega^2 q - y\Phi) + \dot{y}q + y\dot{q}$$

$$\ddot{q} = -\dot{\Lambda}\dot{q} + \dot{\Lambda} yq - \omega^2 q - e^{-\Lambda} \frac{y\Phi}{L_0} + y\dot{q} + q\dot{y},$$

substituindo novamente o valor de Φ na equação acima, obtemos

$$\ddot{q} = -\dot{\Lambda}\dot{q} + \dot{\Lambda} yq - \omega^2 q - y(L_0 \dot{q} e^{\Lambda(t)} - L_0 yq e^{\Lambda(t)}) \frac{e^{-\Lambda}}{L_0} + y\dot{q} + q\dot{y}$$

$$\ddot{q} = -\dot{\Lambda}\dot{q} + \dot{\Lambda} yq - \omega^2 q - y\dot{q} + yq + y\dot{q} + q\dot{y}$$

$$\ddot{q} = -\dot{\Lambda}\dot{q} + \dot{\Lambda} yq - \omega^2 q + yq + q\dot{y}$$

$$\ddot{q} = -\dot{\Lambda}\dot{q} + (\dot{\Lambda} y - \omega^2 + y^2 + \dot{y})q$$

$$\ddot{q} + \left(\frac{\dot{L} + R}{L} \right) \dot{q} + \Omega(t) q = 0, \tag{5.3}$$

e chegamos a nossa equação de movimento, onde $\dot{\Lambda} = \left(\frac{\dot{L} + R}{L} \right)$ é dado pela Eq.(5.2) e $\Omega(t)$ é uma frequência modificada dada por

$$\Omega^2(t) = \omega^2 - y^2 - \dot{\Lambda} y - \dot{y}. \tag{5.4}$$

Dá Eq.(5.3), notamos o aparecimento de um termo incomum $\dot{L}$. A dependência temporal nesse termo causa uma atenção adicional no circuito (para $\dot{L} > 0$). Portanto, $\dot{L}$ se comporta como uma resistência efetiva. Também, é fácil verificar que neste caso o fluxo magnético é dado por

$$\Phi = N(t)[\dot{q} - yq], \tag{5.5}$$

$$N(t) = L_0 e^{\Lambda(t)}. \tag{5.6}$$

Portanto, usando a Eq.(5.5) nós encontramos que

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = N(t)[y\dot{q} + \omega_D^2], \tag{5.7}$$

onde $\omega_D^2 = (\omega^2 - y^2)$ com $\omega^2 - y^2 > 0$. A Eq.(5.7) representa a lei de Faraday para um circuito RLC generalizado com indutância variando no tempo. Observamos que para $y(t) = 0$, $R(t) = 0$ e a capacitância e indutância independentes do tempo, as Eqs.(5.6) e (5.7) reduzem ao circuito LC clássico.

Agora, vamos considerar o caso especial em que $y(t) = 0$, $L = L_0 \exp(\eta t)$, $C = C_0 \exp(-\eta t)$, $R(t) = R_0 \exp(\eta t)$, com L_0, c_0 e R_0 constantes e η sendo uma constante real e positiva. Para este caso a equação de movimento (5.3) torna-se

$$\ddot{q} + (\eta + \gamma_0)\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \tag{5.8}$$

onde $\gamma_0 = R_0/L_0$ e $\omega_0^2 = 1/(R_0/L_0)$. A solução da Eq.(5.8) é bem conhecida e é dada por

$$q(t) = Ae^{-(\eta+\gamma_0)t/2} \sin(\Omega_0 t + \sigma), \tag{5.9}$$

onde A e σ são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais e $\Omega^2 = \omega^2 - \left(\frac{\eta + \gamma_0}{2}\right)^2$ com $\Omega_0^2 > 0$. Dá Eq.(5.9) notamos claramente que a dependência temporal da indutância dá origem a uma atenuação adicional η para este circuito RLC.

5.2 Descrição quântica

A fim de obter uma descrição quântica de um circuito RLC generalizado dependente do tempo, precisamos resolver a equação de Schrödinger dependente do tempo associada com a Hamiltoniana (5.1), que pode ser escrita como

$$H(t)\Psi(q,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(q,t), \tag{5.10}$$

sendo que agora o fluxo magnético canônico é definido por $\Phi = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$(Cap. 4). A carga $q(t)$ e o fluxo magnético são operadores hermitianos que satisfazem a relação de comutação $[q, \Phi] = i\hbar$. As soluções da equação de Schrödinger podem ser obtidas com a ajuda do método de invariante dinâmico inventado por Lewis e Riesenfeld [2, 3](Cap. 2). Seguindo esse método, procuramos um operador hermitiano não trivial $I(t)$ que satisfaz (2.1)

$$\frac{dI}{dt} \equiv \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[I, H] = 0.$$

Se o invariante exato $I(t)$(constante de movimento) não contém qualquer operador que contenha derivada no tempo, as soluções da equação de Schrödinger (5.10) são diretamente escritas em termos das autofunções ortonormalizadas $\phi_n(q,t)$ de $I(t)$,

$$I(t)\phi_n(q,t) = \lambda_n\phi_n(q,t), \tag{5.11}$$

e uma função de fase $\beta_n(t)$ como

$$\psi_n(q,t) = e^{i\beta_n(t)}\phi_n(q,t) \tag{5.12}$$

Agora, da Eq.(5.9), os λ_n são autovalores independentes do tempo e a função de fase $\beta_n(t)$ é determinada pela equação

$$\hbar\frac{d\beta_n(t)}{dt} = \langle\phi_n|i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H|\phi_n\rangle \tag{5.13}$$

com ϕ obedecendo a condição(2.4) $\langle\phi_{n'}|\phi_n\rangle = \delta_{n',n}$. Vamos considerar um operador invariante quadrático que satisfaça a Eq.(2.1) [4, 23]

$$I(t) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{q}{\rho}\right)^2 + [\rho q - N(t)(\dot{\rho} - y\rho)]^2\right\} \tag{5.14}$$

onde $\rho(t)$ é uma função real dependente do tempo satisfazendo a equação de Milne-Pinney [45, 46]

$$\ddot{\rho} + \left(\frac{\dot{L} + R}{L}\right)\dot{\rho} + \Omega^2(t)\rho = \frac{1}{N^2(t)\rho^3}, \tag{5.15}$$

com $N(t)$ dado pela Eq.(5.6). Agora, vamos tentar encontrar os autoestados $\phi_n(q,t)$ de $I(t)$. Com este objetivo, vamos considerar a transformação unitária [23] afim de deixar a "desconhecida"Eq.(5.14) de uma forma mais simples e conhecida

$$\phi'_n(q,t) = U\phi_n(q,t), \tag{5.16}$$

com

$$U = \exp\left[\frac{-iN(t)}{2\hbar\rho}(\dot{\rho} - y\rho)q^2\right]. \tag{5.17}$$

Sob esta transformação unitária, a equação de autovalores (5.11) fica

$$I'\phi'_n(q,t) = \lambda_n \phi'_n(q,t), \tag{5.18}$$

onde

$$I' = UIU^\dagger = \frac{\hbar^2}{2}\rho^2\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{\rho^2}. \tag{5.19}$$

Em seguida, fazendo $\sigma = q/\rho$ podemos reescrever a equação de autovalores (5.18) na forma

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} + \frac{\sigma^2}{2}\right]\varphi_n(\sigma) = \lambda_n\varphi(\sigma), \tag{5.20}$$

onde φ_n é relacionado com ϕ' da seguinte forma

$$\varphi_n(\sigma) = \rho^{1/2}\phi'_n(q,t), \tag{5.21}$$

o fator $\rho^{1/2}$ foi introduzido para satisfazer a condição de normalização

$$\int \phi_n^{*'}(q,t)\phi'_n(q,t)dq = \int \varphi_n^*(\sigma)\varphi'_n(\sigma)d\sigma = 1.$$

Agora, é bem conhecido que as soluções da Eq.(5.20) são as autofunções

$$\varphi(\sigma) = \left[\frac{1}{\pi^{1/2}\hbar^{1/2}n!2^n}\right]^{1/2}\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2\hbar}\right]H_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{1/2}\sigma\right] \tag{5.22}$$

com autovalores

$$\lambda_n = \hbar\left(n + 1/2\right). \tag{5.23}$$

Sendo H_n o polinômio de Hermite de ordem n. Portanto, fazendo uso das equações (5.16), (5.17), (5.21) e (5.22) expressamos os autoestados do invariante dinâmico $I(t)$ como

$$\phi_n(q,t) = \left[\frac{1}{\pi^{1/2}\hbar^{1/2}n!2^n\rho}\right]\exp\left[\frac{iN(t)}{2\hbar}\left(\frac{\dot\rho}{\rho} + \frac{i}{N(t)\rho^2} - y(t)\right)q^2\right]\times H_n\left[\frac{1}{\hbar}^{1/2}\frac{q}{\rho}\right]. \tag{5.24}$$

O próximo passo é encontrar a função de fase (Fase de Lewis) dada pela expressão (5.13). Após um cálculo simples, obtemos [23, 3]

$$\beta_n(t) = -\left(n + 1/2\right)\int_0^t \frac{d\tau}{N(\tau)\rho^2(\tau)}. \tag{5.25}$$

Portanto, nós escrevemos a solução exata da equação de Schrödinger dependente do tempo (5.10), que é a seguinte

$$\psi_n(q,t) = \exp[i\beta_n(t)]\left[\frac{1}{\pi^{1/2}\hbar^{1/2}n!2^n\rho}\right]^{1/2}\exp\left[\frac{iN(t)}{2\hbar}\left(\frac{\dot\rho}{\rho} + \frac{i}{N(t)\rho^2} - y(t)\right)q^2\right]$$

$$\times H_n\left[\left(\frac{1}{\hbar}^{1/2}\right)\frac{q}{\rho}\right], \tag{5.26}$$

com a fase de Lewis $\beta_n(t)$ dada pela Eq. (5.25). A evolução geral de um estado de Schrödinger pode ser escrito como $\Psi(q,t) = \sum_n c_n\psi_n(q,t)$, onde os c_n são coeficientes independentes do tempo. Aqui, observamos que para $y(t) = 0$ e $R = R_0$, $L = L_0$ e $c = c_0$ constantes, os resultados desta seção coincidem com os da [47]. Também, é interessante notar que com a analogia com o oscilador harmônico padrão, obtemos a densidade de probabilidade no estado fundamental, (n = 0), para o circuito RLC generalizado, que passa a ser Gaussiana

$$|\psi_0(q,t)|^2 = \left[\frac{1}{\pi^{1/2}\hbar^{1/2}\rho}\right]\exp\left[-\frac{q^2}{\hbar\rho^2}\right]. \tag{5.27}$$

Ao contrário do oscilador harmônico, a densidade de probabilidade, do "estado de vácuo"tem uma dependência temporal nos termos de $\rho(t)$ [48]. Além do mais, o valor de $\rho(t)$ é associado com a largura dessa densidade de probabilidade.

5.3 Estados coerentes para o circuito RLC quantizado dependente do tempo

Nesta seção estamos interessados em construir estados coerentes(Cap. 3) para o circuito RLC generalizado dependente do tempo. Portanto, vamos introduzir o conjunto de operadores criação e aniquilação dependentes do tempo definidos como [49]-[51]

$$b' = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{q}{\rho}\right) + i\rho\Phi\right], \tag{5.28}$$

$$b'^{\dagger} = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{q}{\rho}\right) - i\rho\Phi\right], \tag{5.29}$$

com $[b', b'^{\dagger}] = 1$. Em termos desses operadores, o invariante $I'(t)$ dado pela Eq.(5.19) pode ser reescrito como

$$I' = \hbar\left(b'b^{\dagger} + 1/2\right). \tag{5.30}$$

Os estados coerentes associados a este invariante tem a forma [39-41 ref. art*]

$$\phi_\alpha(\sigma,t) = \exp[-|\alpha|^2/2]\sum_n \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}}\exp[i\beta_n(t)]\varphi_n(\sigma), \tag{5.31}$$

onde α é um número complexo arbitrário. Portanto, usando as Eqs. (5.16), (5.17), (5.21) e (5.31) encontramos que os estados coerentes para o circuito RLC dependente do tempo descrito pela Hamiltoniana (5.1) é dada por

$$\phi_\alpha(q,t) = \frac{1}{\rho^{1/2}} \exp\left[\frac{iN(t)}{2\hbar\rho}(\dot{\rho} - y\rho)q^2\right] \varphi_\alpha(\sigma,t). \tag{5.32}$$

Esses estados satisfazem a equação de autovalor

$$b\phi_\alpha(q,t) = \alpha(t)\phi_\alpha(q,t), \tag{5.33}$$

com b e b' descritos por

$$b = U^\dagger b' U = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left\{\left(\frac{q}{\rho}\right) + i[\rho\Phi - N(t)(\dot{\rho} - \rho y)q]\right\}, \tag{5.34}$$

e

$$b^\dagger = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left\{\left(\frac{q}{\rho}\right) - i[\rho\Phi - N(t)(\dot{\rho} - \rho y)q]\right\}, \tag{5.35}$$

e

$$\alpha(t) = \alpha \exp[2i\beta_0], \tag{5.36}$$

onde β_0 é obtido da Eq.(5.25), fazendo $n = 0$. Em termos de b e $b^\dagger$ o invariante $I(t)$ é expresso como

$$I(t) = \hbar\left(bb^\dagger + 1/2\right), \tag{5.37}$$

com $[b, b^\dagger] = 1$. Os operadores b e $b^\dagger$ obedecem também as seguintes propriedades

$$b(t)|\phi_n\rangle = n^{1/2}|\phi_{n-1}\rangle, \tag{5.38}$$

$$b^\dagger(t)|\phi_n\rangle = (n+1)^{1/2}|\phi_{n+1}\rangle, \tag{5.39}$$

onde os estados de Fock $|\phi_n\rangle$, como já vimos(Cap.3) são autoestados do invariante $I(t)$ com autovalores não-degenerados λ_n. As propriedades acima serão usadas na próxima seção.

Vamos agora calcular o valor esperado da carga $q(t)$ no estado coerente $\phi_\alpha(t)$. Temos que

$$q = \rho\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} (b + b^\dagger). \tag{5.40}$$

Portanto, o valor esperado de q no estado ϕ_α é

$$\langle q\rangle = \rho\left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} (\alpha^* + \alpha), \tag{5.41}$$

e, usando a Eq.(5.36) juntamente com uma álgebra simples, obtemos

$$\langle q\rangle = (2\hbar|\alpha|^2\rho^2)^{1/2}\sin[-2\beta_0(t)+\delta], \tag{5.42}$$

onde δ é o argumento do número complexo α. Comparando este resultado com aquele da Eq.(5.9) podemos ver que o centro do pacote de onda do estado coerente segue o movimento de uma partícula clássica. Portanto, o resultado acima concorda com a ideia original de Schrödinger sobre os estados coerentes, que estava interessado em encontrar estados quânticos que seguissem o movimento de uma partícula clássica em um dado potencial [52]. No que segue, estimamos as flutuações quânticas em q e Φ no estado $\phi_\alpha(q,t)$. Depois de uma certa álgebra [ver Apêndice - A]

$$\langle\Delta q\rangle^2 = \langle q^2\rangle - \langle q\rangle^2 = \frac{\hbar}{2}\rho^2, \tag{5.43}$$

$$\langle\Delta\Phi\rangle = \langle\Phi^2\rangle - \langle\Phi\rangle^2 = \frac{\hbar}{2}\left\{\frac{1}{\rho^2} + [N(t)(\dot{\rho}-\rho y)]^2\right\}. \tag{5.44}$$

Portanto, o produto de incerteza é dado por

$$(\Delta q)(\Delta\Phi) = \frac{\hbar}{2}\left\{1 + [N(t)\rho(\dot{\rho}-\rho y)]^2\right\}. \tag{5.45}$$

Analizando a Eq.(5.44) observamos que o produto de incerteza, em geral, não atinge o seu valor mínimo.

5.4 Fases geométrica, dinâmica e de Berry

Teorema adiabático

Consideremos um pêndulo clássico de comprimento L com período $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. Imaginemos agora que, muito lentamente, variamos o comprimento do pêndulo. Se a variação for muito lenta em comparação com a frequência do pêndulo, então o novo período deverá ser dado por

$$T = 2\pi\sqrt{L(t)/g}. \tag{5.46}$$

Nestas condições dizemos que o processo é adiabático. Quando um processo varia adiabaticamente, resolvemos o problema exatamente com as condições exteriores consideradas fixas e depois deixamos os parâmetros variar com o tempo, lentamente à escala das variações do sistema.

Em mecânica quântica podemos formular este resultado sob a forma de teorema.

Se uma partícula estava inicialmente no estado $|n_i\rangle$ *do Hamiltoniano* H_i*, na transição adiabática de* H_i *para* H_f *, ela vai ser levada para o estado* $|n_i\rangle$ *do Hamiltoniano* H_f*.*

Estamos admitindo, por simplicidade, que o espectro é não degenerado e a igualdade é a menos de alguma fase. Embora este resultado pareça simples, a demonstração não é. Vamos só dar o resultado final, podendo a demonstração ser vista no livro do Griffiths [54] e no artigo original de Michael Berry [53].

$$\Psi_n(t) = e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} \psi_n(t), \tag{5.47}$$

onde

$$\theta_n(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t E_n(t')dt', \tag{5.48}$$

é uma fase dinâmica, que tem a ver com a evolução temporal dos estados com o tempo,e

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \langle \psi_n(t')| \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \rangle dt', \tag{5.49}$$

é uma fase original de origem geométrica. Que a fase $\theta_n(t)$ é uma fase dinâmica, é fácil de perceber. Se não houver transformação adiabática, então E_n não depende do tempo e, portanto

$$e^{i\theta_n(t)} = e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t)dt}, \tag{5.50}$$

isto é, a evolução normal no tempo dos estados estacionários.

Fases de Berry

Vimos na secção anterior que quando um dado $|n_i\rangle$ dum dado Hamiltoniano evolui adiabaticamente, o estado final $|n_i\rangle$ do Hamiltoniano final, obtém-se multiplicando o estado inicial por uma fase dinâmica e outra geométrica, onde esta última é dada por

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \langle \psi_n(t')| \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \rangle dt', \tag{5.51}$$

A variação com t deve-se a que algum parâmetro do Hamiltoniano que varia com o tempo. Seja esse parâmetro R(t). Então

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\psi_n}{\partial R} \frac{dR}{dt}, \tag{5.52}$$

e, portanto

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \langle \psi_n(t')| \frac{\psi_n(t')}{\partial R} \rangle \frac{dR}{dt'} dt' = i \int_{R_i}^{R_f} \langle \psi_n(t')| \frac{\psi_n(t')}{\partial R} \rangle dR. \tag{5.53}$$

Em particular se o Hamiltoniano retorna ao estado inicial ao fim do tempo T , devemos ter $\gamma_n(t) = 0$ e, portanto, o resultado é trivial. Contudo, se em vez de um só parâmetro, tivermos N parâmetros:$R_1(t), R2(t), ..., R_n(t)$, obtemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\psi_n}{\partial R_1}\frac{dR_1}{dt} + \frac{\psi_n}{\partial R_2}\frac{dR_2}{dt} + ... + \frac{\psi_n}{\partial R_n}\frac{dR_n}{dt} = (\vec{\nabla}_R \psi_n).\frac{d\vec{R}}{dt}, \tag{5.54}$$

e, obtemos

$$\gamma_n(t) = i\int_{R_i}^{R_f} \langle \psi_n(t')|(\vec{\nabla}_R \psi_n).\rangle dR. \tag{5.55}$$

Se o Hamiltoniano volta ao estado inicial ao fim de um tempo T , obtemos

$$\gamma_n(t) = i\oint_{R_i}^{R_f} \langle \psi_n(t')|(\vec{\nabla}_R \psi_n).\rangle dR. \tag{5.56}$$

que é uma integral ao longo de um caminho fechado e que em geral não será zero se o espaço dos parâmetros for não trivial topologicamente. A Eq.(5.56) foi pela primeira vez deduzida por Michael Berry[53] e é conhecida por fase de Berry. Pode mostrar-se que, para que a fase seja diferente de zero, é condição necessária que o número de parâmetros R_i seja pelo menos de dois e que a função de onda ψ_n seja complexa. Estas condições não são no entanto suficientes e na maior parte dos casos a fase é nula.

Nesta seção, temos um interesse duplo. Primeiramente, derivar a fase geométrica para generalizar o circuito RLC. Em seguida, fazendo o uso do limite adiabático, pretendemos encontrar as fases dinâmica e de Berry para uma evolução cíclica de um sistema. Portanto, vamos analisar a Eq.(5.13) e obter a fase geométrica como

$$\gamma_n(t) = i\int_0^t \langle \phi_n(t)|\frac{\partial}{\partial \tau}|\phi_n(t)\rangle d\tau. \tag{5.57}$$

Lembramos aqui que o último termo do lado direito da Eq.(5.13) corresponde a fase dinâmica usual, que é, $\gamma_n^d(t) = \int_0^t \langle \phi| - H/\hbar|\phi\rangle d\tau$. Assumindo agora que o invariante $I(t)$ é periódico em T, os autoestados de $I(t)$ satisfazem a relação $|\phi_n(T)\rangle = |\phi_n(0)\rangle$. Consequentemente, podemos reescrever a Eq.(5.57) como [55, 56, 57, 58, 59]

$$\gamma_n(T) = i\int_0^T \langle \phi_n|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle dt. \tag{5.58}$$

A fim de encontrar a fase geométrica Eq.(5.58) procedemos usando a Eq.(5.59) e fazendo o produto escalar conveniente, obtemos que [4, 57, 58]

$$\langle \phi_n|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle = \langle \phi_0|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_0\rangle + n^{-1/2}\langle \phi_n|\frac{\partial b^\dagger}{\partial t}|\phi_{n-1}\rangle. \tag{5.59}$$

Portanto, avaliando o último termo da Eq.(5.59) com auxílio das Eqs.(5.38) e (5.39) obtemos que

$$i\langle\phi_n|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle = \langle\phi_0|i\frac{\partial}{\partial t}|\phi_0\rangle + \frac{n}{2}\left[N(t)(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{y} - \ddot{\rho}\rho) + \dot{N}(t)(\rho^2 y - \rho\dot{\rho})\right]. \tag{5.60}$$

Agora, com uma escolha conveniente para calcular o primeiro termo do lado direito da Eq.(5.60)(é o gauge de Lewis para o estado fundamental $|\phi_0\rangle$) [4, 57, 58]. Para este caso, esse termo é dado por

$$\langle\phi_0|i\frac{\partial}{\partial t}|\phi_0\rangle = \frac{1}{4}\left[N(t)(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{y} - \ddot{\rho}\rho) + \dot{N}(t)(\rho^2 y - \rho\dot{\rho}\right]. \tag{5.61}$$

Desta maneira, usando as Eqs.(5.58),(5.59) e (5.60) encontramos que

$$\gamma_n(T) = -\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^T [N(t)(-\dot{\rho}^2 - \rho^2\dot{y} + \ddot{\rho}\rho) + \dot{N}(t)(\rho^2 y - \rho\dot{\rho})]dt, \tag{5.62}$$

o qual, usando Eq.(5.15), podemos reescrevê-la como

$$\gamma_n(T) = -\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^T \left[N(t)(\omega_D^2\rho^2 - \dot{\rho}^2) - \frac{1}{N(t)\rho^2}\right] dt, \tag{5.63}$$

onde $\omega_D^2 = \omega^2 - y^2$. O Resultado acima representa a fase geométrica para um circuito RLC generalizado dependente do tempo. Em seguinte, iremos encontrar as fases dinâmica e de Berry, fazendo uso do nosso limite assintótico adiabático. Com este propósito, vamos manter nossa atenção na equação auxiliar (5.15) e na fase de Lewis Eq.(5.25). No limite adiabático, o termo $\dot{\rho}$ é muito pequeno e pode ser desprezado. Então, a solução da equação de Milne-Pinney (5.25) se torna [57, 59]

$$\frac{1}{N\rho^2} = \omega_D\left[1 - \frac{1}{\omega_D^2}\left(\frac{\dot{N}y + N\dot{y}}{N}\right)\right]^{1/2}. \tag{5.64}$$

Deste modo, expandindo em relação a

$$\frac{1}{\omega_D^2}\left(\frac{\dot{N}y + N\dot{y}}{N}\right) \ll 1, \tag{5.65}$$

podemos escrever a Eq.(5.64) como

$$\frac{1}{N\rho^2} = \omega_D - \frac{1}{2\omega_D}\left(\frac{\dot{N}y + N\dot{y}}{N}\right), \tag{5.66}$$

Como consequência, substituímos a Eq.(5.66) na Eq.(5.25) e obtemos que a fase de Lewis em uma evolução cíclica adiabática é dada por

$$\beta_n(T) = -(n+1/2)\int_0^T \omega_D dt + (n+1/2)\int_0^T \frac{(\dot{N}y + N\dot{y})}{2\omega_D N}dt, \tag{5.67}$$

onde

$$\gamma_n^d = -\left(n + 1/2\right) \int_0^T \omega_D dt, \tag{5.68}$$

é a fase dinâmica, e

$$\gamma_n^b(T) = (n + 1/2) \int_0^T \frac{(\dot{N}y + N\dot{y})}{2\omega_D N} dt, \tag{5.69}$$

é a fase de Berry que pode ser reescrita como

$$\gamma_n^b(T) = (n + 1/2) \int_0^T \frac{(L\dot{y} + \dot{L} + R)y}{2\omega_D N} dt, \tag{5.70}$$

onde usamos Eq.(5.6). Os resultados acima estão de acordo com os obtidos para o oscilador harmônico dependente do tempo [57, 58, 61]. Aqui, vale a pena notar que para $y(t) = 0$ temos que $\gamma_n^b(T) = 0$ como deve ser. Por outro lado, para $R(t) = 0$ a Eq.(5.58) se torna a fase de Berry para um circuito LC generalizado. Em seguida, vamos calcular a fase dinâmica e de Berry para o caso especial discutido na Seção I [parágrafo acima da Eq.(5.8)] mas agora a colocando $y(t) = y_0 =$ cte e $R(t) = 0$. Então, das Eqs.(5.68) e (5.70) facilmente encontramos que

$$\gamma_n^d = -\left(n + 1/2\right) \omega_D^0 T, \tag{5.71}$$

$$\gamma_n^b(T) = (n + 1/2) \frac{(\eta y_0)}{2\omega_D^0} T, \tag{5.72}$$

onde $\omega_D^0 = (\omega_0^2 - y_0^2)^{1/2}$ com $\omega_0^2 = (1/L_0 C_0)$. Portanto, as expressões acima representam as fases dinâmica e de Berry para um circuito LC generalizado dependente do tempo com $L = L_0 \exp(\eta t)$, $C = C_0 \exp(-\eta t)$ e y_0= cte. Como outro exemplo vamos considerar o caso quando todos os parâmetros relevantes do circuito são independentes do tempo, $L = L_0, C = C_0, R = R_0$ e $y = y_0$. Portanto, mais uma vez a partir das Eqs.(5.68) e (5.70) nós encontramos que a fase dinâmica é dada pela Eq.(5.71) e a fase de Berry é encontrada por

$$\gamma_n^b(T) = (n + 1/2) \frac{(\gamma_0 y_0)}{2\omega_D} T, \tag{5.73}$$

com $\gamma_0 = R_0/L_0$. Também, vale a pena mencionar que para este caso a Hamiltoniana Eq. (5.1) torna-se

$$H(t) = e^{-\gamma_0 t} \frac{\phi^2}{2L_0} + e^{\gamma_0 t} \frac{L_0 \omega_D^2}{2} q^2 + \frac{y(t)}{2} (\phi q + q\phi). \tag{5.74}$$

Este Hamiltoniano (para $y(t) = 0$) é conhecido na literatura como Hamiltoniano de Caldirola-Kanai e tem sido frequentemente usado para o estudo de sistema quântico dependente do tempo em várias áreas da física[15, 16, 17, 18, 19]. Agora, vamos observar que o comportamento de um circuito RLC com parâmetros independentes do tempo e ver que é mais simples que a de um circuito RLC com parâmetros dependente do tempo. Portanto, pode-se esperar que encontrar experimentalmente a fase de Berry seja mais fácil. Observamos também que apesar da independência temporal dos parâmetros relevantes de um circuito, isto é, a indutância, capacitância e resistência, o Hamiltoniano que descreve o sistema [veja Eq.(5.74)] contínuo e dependente do tempo e consequentemente os autoestados do operador invariante associado $I(t)$ são não-estacionários desde que a existência da fase de Berry seja preservada. Neste momento, vale a pena lembrar que a fase de Berry surgi quando os parâmetros dependentes do tempo de um sistema que evolui no tempo executam uma evolução adiabática cíclica completa com determinados parâmetros [55, 56, 57, 58].

Finalmente, gostaríamos de mostrar que as Eqs.(5.73) e (5.72) são reduzidas uma a outra pelas alterações $\gamma_0 \to \eta$ ou $\eta \to \gamma_0$. Esses resultados dão origem a uma implicação física fascinante. Temos então dois sistemas físicos completamente diferentes - um circuito LC com parâmetros dependente do tempo e um circuito RLC generalizado com parâmetros independentes do tempo - ambas dão origem a fórmulas idênticas para a fase dinâmica e formalmente a mesma expressão para a fase de Berry. Esses resultados interessantes e intrigantes são intrinsecamente relacionados a dependência temporal da indutância.

Para terminar com esta seção, vamos considerar mais uma vez o caso especial discutido na seção II [veja novamente o parágrafo acima da Eq.(5.8)], mas agora fazendo $y(t) = y_0$. É facilmente verificada usando, respectivamente, as Eqs.(5.68) e (5.70) que a fase dinâmica é mais uma vez dada pela Eq.(5.71) e a fase de Berry pela expressão

$$\gamma_n^b = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{(\gamma_0 + \eta) y_0}{2\omega_D^0} T. \tag{5.75}$$

Veja que essa equação contém simultaneamente ambos os parâmetros relacionados a "atenuação"do circuito, γ_0 e η. Observamos também que a Eq.(5.75) reproduz, respectivamente, as Eqs.(5.72) e(5.73), fazendo $\gamma_0 = 0$ ou $\eta = 0$, como deveria ser.

Capítulo 6

Conclusões

Começamos fazendo uma revisão dos principais temas abordados no nosso trabalho principal, que se encontra no capítulo 5, onde representamos uma descrição quântica de um circuito RLC mesoscópico com resistência, indutância e capacitância dependentes do tempo. Vimos que a dependência do tempo da indutância dá origem a uma atenuação adicional desse circuito e causa uma mudança na Lei de Faraday. Combinamos o método do invariante quadrático e invariante dinâmico para resolver a equação de Schrödinger dependente do tempo para um circuito RLC e escrever as correspondentes funções de onda em termos das soluções da Equação de Milne-Pinney e dos bem conhecidos polinômios de Hermite. Além disso, construímos os estados coerentes para o circuito quantizado e calculamos a densidade de probabilidade do estado fundamental, valor esperado da carga, flutuações quânticas da carga e do fluxo magnético bem como o produto de incerteza que, como foi visto, não mantém o seu valor mínimo. E ainda, obtemos as fases de Berry, dinâmica e geométrica para o circuito generalizado. Depois, avaliamos e discutimos a fase dinâmica e de Berry para três casos particulares. Finalmente, podemos ressaltar que a atenuação causada pela dependência temporal na indutância é similar a causada no campo eletromagnético com permissividade dependente do tempo [62, 63]. Portanto, seria interessante investigar a conexão entre a propagação de um campo eletromagnético em um meio linear com permissividade dependente do tempo e um circuito elétrico mesoscópico com indutância dependente do tempo. Isso vai ser objeto de futuros estudos.

A - Flutuações Quânticas em q e Φ

.

Vamos começar escrevendo q em termos dos operadores b e $b^\dagger$, ou seja,

$$q = \rho(\hbar/2)^{1/2}(b^\dagger + b)$$

$$\langle q \rangle = \rho(\hbar/2)^{1/2}\langle|b^\dagger + b|\rangle$$

$$\langle q \rangle = \rho(\hbar/2)^{1/2}\langle|\alpha^* + \alpha|\rangle, \tag{6.1}$$

elevando-a ao quadrado , encontramos que

$$\langle q \rangle^2 = \rho^2(\hbar/2)\langle|(\alpha^*)^2 + \alpha^2 + 2|\alpha|^2\rangle, \tag{6.2}$$

afim de encontrar a variança em q , vamos calcular agora $\langle q^2 \rangle$

$$\langle q^2 \rangle = \rho^2(\hbar/2)\langle|(b^\dagger)^2 + b^2 + b^\dagger b + bb^\dagger|\rangle$$

$$\langle q^2 \rangle = \rho^2(\hbar/2)\langle|(\alpha^*)^2 + \alpha^2 + 2b^\dagger b + 1|\rangle$$

$$\langle q^2 \rangle = \rho^2(\hbar/2)\langle|(\alpha^*)^2 + \alpha^2 + 2|\alpha|^2 + 1|\rangle, \tag{6.3}$$

portanto, a variança em q é

$$(\Delta q)^2 = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2 = \rho^2\left(\frac{\hbar}{2}\right)$$

$$(\Delta q)^2 = \rho^2\left(\frac{\hbar}{2}\right). \tag{6.4}$$

Agora, vamos fazer o mesmo procedimento para Φ, então

$$\rho\Phi = L(\dot{\rho} - \rho y)q + i(\hbar/2)(b^\dagger - b)$$

$$\rho\Phi = L(\dot{\rho} - \rho y)\rho(\hbar/2)^{1/2}(b^\dagger + b) + i(\hbar/2)(b^\dagger - b)$$

$$\rho\Phi = (\hbar/2)^{1/2}\{L(\dot{\rho}-\rho y)\rho b^{\dagger} + L(\dot{\rho}-\rho y)\rho b + ib^{\dagger} - ib\}$$

$$\Phi = (\hbar/2)^{1/2}\{L(\dot{\rho}-\rho y)b^{\dagger} + L(\dot{\rho}-\rho y)b + (i/\rho)b^{\dagger} - (i/\rho)b\}$$

$$\Phi = i(\hbar/2)^{1/2}\{[(1/\rho) - iL(\dot{\rho}-\rho y)]b^{\dagger} - [(1/\rho) + iL(\dot{\rho}-\rho y)]b\}$$

$$\Phi = i(\hbar/2)^{1/2}\{(1/\rho)(b^{\dagger}-b) - iL(\dot{\rho}-\rho y)(b^{\dagger}+b)\},$$

de tal forma que o valor esperado para Φ se torna

$$\langle\Phi\rangle = i(\hbar/2)^{1/2}\{(1/\rho)(\alpha^*-\alpha) - iL(\dot{\rho}-\rho y)(\alpha^*+\alpha)\}$$

$$\langle\Phi\rangle = (\hbar/2)^{1/2}\{(i/\rho)(\alpha^*-\alpha) - L(\dot{\rho}-\rho y)(\alpha^*+\alpha)\}. \tag{6.5}$$

Calculando $\langle\Phi^2\rangle$, temos

$$\langle\Phi^2\rangle = (\hbar/2)\{-(1/\rho^2)((\alpha^*)^2+\alpha^2-2|\alpha|^2-1) + 2iL(\dot{\rho}-\rho y)((\alpha^*)^2+\alpha^2)$$
$$+L^2(\dot{\rho}-\rho y)^2(\alpha^*)^2+\alpha^2+2|\alpha|^2+1)\}, \tag{6.6}$$

e, para $\langle\Phi\rangle^2$, temos

$$\langle\Phi\rangle^2 = (\hbar/2)\{-(1/\rho^2)((\alpha^*)^2+\alpha^2-2|\alpha|^2) + \frac{2iL(\dot{\rho}-\rho y)}{\rho}((\alpha^*)^2-\alpha^2)$$
$$+L^2(\dot{\rho}-\rho y)^2(\alpha^*)^2+\alpha^2+2|\alpha|^2)\}. \tag{6.7}$$

Então, obtemos a variança em Φ

$$(\Delta\Phi)^2 = \langle\Phi^2\rangle - \langle\Phi\rangle^2$$
$$= (\hbar/2)\{(1/\rho^2) + L^2(\dot{\rho}-\rho y)^2\}. \tag{6.8}$$

Portanto, o produto das varianças de q e Φ nos dá

$$(\Delta q)^2(\Delta\Phi)^2 = (\hbar\rho^2/2)[(1/\rho^2) + L^2(\dot{\rho}-\rho y)^2]\hbar/2$$
$$= (\hbar/2)^2\{1 + [L\rho(\dot{\rho}-\rho y)]^2\},$$

resultando em,

$$(\Delta q)(\Delta\Phi) = (\hbar/2)\{1 + [L\rho(\dot{\rho}-\rho y)]^2\}^{1/2}, \tag{6.9}$$

que para $y = 0$ volta a sua forma natural

$$(\Delta q)(\Delta\Phi) = (\hbar/2)[(1 + L\rho\dot{\rho})^2]^{1/2}. \tag{6.10}$$

Sendo $L(t) = L_0 e^{\Lambda(t)}$, a Eq.(6.9) resulta em

$$(\Delta q)(\Delta\Phi) = (\hbar/2)\{1 + [L_0 e^{\Lambda(t)}\rho(\dot{\rho}-\rho y)]^2\}^{1/2}. \tag{6.11}$$

B - Fases de Berry, Dinâmica e Geométrica

.

Dedução das equações (5.52), (5.58) e (5.59)

Já vimos que a fase geométrica é dada por,

$$\gamma_n(t) = i\int_0^t \langle\phi_n|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle d\tau. \tag{6.12}$$

Da Eq.(5.37), temos que

1)$I(t) = \hbar(bb^\dagger + \frac{1}{2})$

2)$I(t)|n,t\rangle - \hbar(n+1/2)|n,t\rangle$

3)$b(t)|n,t\rangle = \sqrt{n}|n-1,t\rangle$

4)$b^\dagger(t) = \sqrt{n+1}|n+1,t\rangle$.

De 4), obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}(b^\dagger|n,t\rangle) = \frac{\partial}{\partial t}[(n+1)^{1/2}|n+1,t\rangle, \tag{6.13}$$

$$\frac{\partial b^\dagger}{\partial t}|n\rangle + b^\dagger\frac{\partial|n\rangle}{\partial t} = (n+1)^{1/2}\frac{\partial}{\partial t}|n+1\rangle. \tag{6.14}$$

Fazendo o produto escalar da Eq.(6.14) com o estado $|n\rangle$, temos

$$\langle n|\frac{\partial b^\dagger}{\partial t}|n\rangle + \langle n|b^\dagger\frac{\partial}{\partial t}|n\rangle = (n+1)^{1/2}\langle n|\frac{\partial}{\partial t}|n+1\rangle$$

$$\langle n|\frac{\partial b^\dagger}{\partial t}|n\rangle + \langle n-1|\frac{\partial}{\partial t}|n\rangle = n^{1/2}\langle n|\frac{\partial}{\partial t}|n+1\rangle. \tag{6.15}$$

Agora fazendo a mudança de variável $n \Rightarrow n-1$, ficamos com

$$\langle n|\frac{\partial b^\dagger}{\partial t}|n-1\rangle + n^{1/2}\langle n-1|\frac{\partial}{\partial t}|n-1\rangle = n^{1/2}\langle n|\frac{\partial}{\partial t}|n\rangle$$

$$\langle n|\frac{\partial}{\partial t}|n\rangle = \langle n-1|\frac{\partial}{\partial t}|n-1\rangle + n^{-1/2}\langle n|\frac{\partial}{\partial t}|n-1\rangle, \tag{6.16}$$

$$b^\dagger = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2}\left\{\left(\frac{q}{\rho}\right) - i[\rho\Phi - N(t)(\dot\rho - \rho y)q]\right\}$$

$$\frac{\partial b^\dagger}{\partial t} = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2}\left\{\left[-\frac{\dot\rho}{\rho^2} - i\dot\rho\dot N + iN(t)\ddot\rho - i\dot N\rho y - iN\dot\rho y - iL\rho\dot y\right]q - i\dot\rho\Phi\right\}. \tag{6.17}$$

Substituindo q e Φ nesta equação, encontramos

$$\frac{\partial b^\dagger}{\partial t} = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)^{1/2}\{\left[-\dot\rho/\rho^2 - i\dot\rho\dot N + iN(t)\ddot\rho - i\dot N\rho y - iN\dot\rho y - iL\rho\dot y\right]\rho\left(\frac{\hbar}{2}\right)(b+b^\dagger)$$

$$-i\dot\rho[i(\hbar/2)^{1/2}\left((1/\rho) - iN(\dot\rho-\rho y)\right)b^\dagger - (1/\rho) + iN(\dot\rho - \rho y)b]\}$$

$$\frac{\partial b^\dagger}{\partial t} = \frac{1}{2}\{[-\overset{-1}{\dot\rho/\rho} + i\dot N\rho(\dot\rho-\rho y) + iN\rho(\ddot\rho - \rho\dot y - \dot\rho y)(b+b^\dagger)$$

$$-[\overset{-1}{\dot\rho/\rho} - iN\dot\rho(\dot\rho-\rho y)]b^\dagger - [\overset{-1}{\dot\rho/\rho} + \dot\rho N(\dot\rho - \rho y)]b\}$$

$$\frac{\partial b^\dagger}{\partial t} = \frac{1}{2}\overbrace{\{[-2\dot\rho/\rho + i\dot N(\rho\dot\rho - \rho^2 y) + iN(\rho\ddot\rho - \rho^2\dot y + i\rho\dot\rho y - N(\dot\rho^2 - \dot\rho\rho y)]}^{A}\, b$$

$$+\overbrace{i[\dot N\rho\dot\rho - \dot N\rho^2 y + N\rho\ddot\rho - N\rho^2\dot y - N\dot\rho^2]}^{B}\, b^\dagger\}. \tag{6.18}$$

Agora, temos que

$$\langle n|\frac{\partial b^\dagger}{\partial t}|n-1\rangle = \frac{1}{2}[A\overbrace{\langle n|b|n-1\rangle}^{0} + B\langle n|b^\dagger|n-1\rangle]$$

$$= Bn^{1/2}\langle n-1|n-1\rangle$$

$$\langle n|\frac{\partial b^\dagger}{\partial t}|n-1\rangle = \frac{1}{2}Nn^{1/2}(\ddot\rho\rho - \rho^2\dot y - \dot\rho^2 + \frac{i}{2}\dot N(\rho\dot\rho - \rho^2 y)n^{1/2}$$

$$= \frac{i}{2}Nn^{1/2}[\ddot\rho\rho - \dot\rho^2 - \rho^2\dot y) + \frac{i}{2}\dot N n^{1/2}(\rho\dot\rho - \rho^2 y)$$

$$\frac{i}{2}n^{1/2}\{N[\ddot\rho - \dot\rho^2 - \rho^2\dot y] + \dot N(\rho\dot\rho - \rho^2 y)\}. \tag{6.19}$$

Portanto, das Eqs.(6.16) e (6.19), encontramos que

$$i\langle n|\frac{\partial}{\partial t}|n\rangle = \langle n-1|i\frac{\partial}{\partial t}|n-1\rangle$$

$$+i\frac{n^{-1/2}}{2}\{in^{1/2}[N(\ddot\rho\rho - \dot\rho^2 - \rho^2\dot y) + \dot N(\rho\dot\rho - \rho^2 y)]\}$$

$$i\langle n|\frac{\partial}{\partial t}|n\rangle = \langle n-1|i\frac{\partial}{\partial t}|n-1\rangle$$

$$+\frac{n^1}{2}[N(-\ddot{\rho}\rho + \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{y}) + \dot{N}(-\rho\dot{\rho} + \rho^2 y)]. \tag{6.20}$$

Agora, podemos reescrever a Eq.(6.20) como

$$i\langle n|\frac{\partial}{\partial t}|n\rangle = \langle 0|i\frac{\partial}{\partial t}|0\rangle$$

$$+\frac{n}{2}[N(-\ddot{\rho}\rho + \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{y}) + \dot{N}(-\rho\dot{\rho} + \rho^2 y)]. \tag{6.21}$$

Agora, usando o "Gauge de Lewis"

$$\langle 0|i\frac{\partial}{\partial t}|0\rangle = \frac{1}{4}[N(-\ddot{\rho}\rho + \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{y}) + \dot{N}(-\rho\dot{\rho} + \rho^2 y)]. \tag{6.22}$$

Obtemos que

$$i\langle n|\frac{\partial}{\partial t}|n\rangle = 1/2(n+1/2)[N(-\ddot{\rho}\rho + \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{y}) + \dot{N}(-\rho\dot{\rho} + \rho^2 y)]. \tag{6.23}$$

Portanto, das Eqs.(6.1) e (6.23) temos que a fase geométrica é dada por

$$\gamma_n(T) = -\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^T [N(t)(-\dot{\rho}^2 - \rho^2\dot{y} + \ddot{\rho}\rho) + \dot{N}(t)(\rho^2 y - \rho\dot{\rho})]d\tau, \tag{6.24}$$

o qual, usando a equação auxiliar Eq.(5.15), podemos reescrevê-la como

$$\gamma_n(T) = -\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^T \left[N(t)(\omega_D^2\rho^2 - \dot{\rho}^2) - \frac{1}{N(t)\rho^2}\right]dt, \tag{6.25}$$

onde $\omega_D^2 = \omega^2 - y^2$. A solução da equação auxiliar Eq.(5.15) pode ser expressa em termos do parâmetro adiabático ϵ

$$\rho(t) = \rho_0(t) + \epsilon\rho_1(t) + \epsilon^2\rho_2(t) + ... \tag{6.26}$$

Neste limite, obtemos que

$$\gamma_n^b(T) = (n+1/2)\int_0^T \frac{(\dot{N}y + N\dot{y})}{2\omega_D N}d\tau, \tag{6.27}$$

que é a fase de Berry.

Outra forma de encontrar a fase de Berry Eq.(6.27). A fase de Lewis e Riesenfeld é dada por Eq.(5.13),

$$\hbar\frac{d\beta_n(t)}{dt} = \langle\phi_n|i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H|\phi_n\rangle,$$

que pode ser reescrita como

$$\dot{\beta}_n(t) = \langle\phi_n|i\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle + \langle\phi_n| - H|\phi_n\rangle$$

portanto,

$$\dot{\beta}_n(t) = \gamma_n(t) + d_n(t)$$

onde

$$\gamma_n(t) = i\int_0^t \langle\phi_n|\frac{\partial}{\partial t}|\phi_n\rangle, \tag{6.28}$$

$$d_n = -\int_0^t \langle\phi_n|H|\phi_n\rangle. \tag{6.29}$$

A Eq.(6.28) é a fase de Berry e a Eq.(6.29) é a fase dinâmica. Em um período, temos que

$$(\omega, y, L)(0) = (\omega, y, L)(T).$$

Temos que no limite adiabático, o termo ρ na equação auxiliar (5.15) pode ser ignorado. Assim, obtemos que

$$\ddot{\rho} + \left(\frac{\dot{L}+R}{L}\right)\dot{\rho} + \Omega^2(t)\rho = \frac{1}{L^2(t)\rho^3}, \tag{6.30}$$

com

$$\Lambda(t) = \int_0^t \left(\frac{\dot{L}+R}{L}\right)d\tau, \qquad \dot{\Lambda} = \left(\frac{\dot{L}+R}{L}\right), \tag{6.31}$$

e

$$N = L_0 e^{\Lambda(t)}, \qquad \dot{N} = \dot{\Lambda}L_0 e^{\Lambda(t)}, \qquad \dot{\Lambda} = \dot{N}/N. \tag{6.32}$$

Portanto, temos que

$$\frac{d}{dt}\dot{\rho} + \frac{\dot{N}}{N}\dot{\rho} + [(\omega^2 - y^2) - \frac{\dot{N}}{N}y - \dot{y}]\rho = \frac{1}{N^2\rho^3}$$

$$[(\omega^2 - y^2) - \frac{\dot{N}}{N}y - \dot{y}] = \frac{1}{N^2\rho^4}$$

$$[\omega_D^2 - \frac{\dot{N}}{N}y - \dot{y}] = \frac{1}{N^2\rho^4}$$

$$\omega_D^2[1 - 1/\omega_D^2(\frac{\dot{N}}{N}y + \dot{y})] = \frac{1}{N^2\rho^4}$$

$$\frac{1}{N\rho^2} = \omega_D[1 - 1/\omega_D^2(\frac{\dot{N}}{N}y + \dot{y})]^{1/2}.$$

Para

$$1/\omega_D^2\frac{\dot{N}y + N\dot{y}}{N} \ll 1$$

encontramos que $[1+x]^n = 1 + nx/1! + n(n-2)x^2/2! - ...,$

$$[1 - 1/\omega_D^2 N(\frac{\dot{N}y + N\dot{y}}{N})]^{1/2} = 1 - \frac{1}{2\omega_D^2 L}(\dot{L}y + L\dot{y}). \tag{6.33}$$

Logo, ficamos com

$$\frac{1}{L\rho^2} = \omega_D - \frac{1}{2\omega_D^2 N}(\dot{N}y + N\dot{y}). \tag{6.34}$$

Mas, a fase de Lewis e Riesenfeld é

$$\beta_n(T) = -(n+1/2)\int_0^t \frac{1}{N\rho^2}d\tau. \tag{6.35}$$

Então, usando a Eq.(6.34) na Eq.(6.35), obtemos que

$$\beta_n(T) = -(n+1/2)\int_0^T \omega_D dt + (n+1/2)\int_0^T \frac{1}{2\omega_D^2 N}(\dot{N}y + N\dot{y})dt, \tag{6.36}$$

onde a primeira equação do segundo lado da igualdade corresponde a fase dinâmica,

$$d_n(T) = -(n+1/2)\int_0^T \omega_D dt, \tag{6.37}$$

e a segunda equação corresponde a fase de Berry,

$$\gamma_n(T) = (n+1/2)\int_0^T \frac{(\dot{N}y + N\dot{y})}{2\omega_D^2 N}dt. \tag{6.38}$$

Como queríamos demonstrar.

Referências Bibliográficas

[1] José Maria Bassalo, Mauro Cattani. Osciladores Harmônicos Clássicos e Quânticos (Livraria da Física, 1ª Edição, 2009).

[2] H. R. Lewis, Jr. *Classical and Quantum Systems with Time Dependent Harmonic Oscillator Type Hamiltonians*. Phys. Rev. Lett. **18**, 636 Published 10 April 1967

[3] H. R. Lewis Jr. *Class of Exact Invariants for Classical and Quantum Time-Dependent Harmonic Oscillators*. J. Math. Phys. **9**, 1976 (1968)

[4] H. R. Lewis Jr. e W. B. Riesenfeld. *An Exact Quantum Theory of the Time-Dependent Harmonic Oscillator and of a Charged Particle in a Time-Dependent Electromagnetic Field*. J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969)

[5] E. Schrödinger, *Naturwiss*, **14**, 644, (1926)

[6] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **130**, 2529, (1963)

[7] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **131**, 2765, (1963); *Phys. Rev.* **10**, 84, (1963)

[8] A. M. Perelomov. *Generalized Coherent States and Their Application.* Springer-Verlag, (1986)

[9] J. R. Klauber, B-S Stargerstam (Ed.),*Coherents states: Applications in physics and mathematical physics*, World Scientific (1994).

[10] D.H. Feng, J.R. Klauder, M.R. Strayer (Ed.), *Coherents states: Past, present and future,* World Scientific (1984).

[11] W. Heisenberg, *The Physical Principles of the Quantum Theory*(University of Chicago Press, Chicago, 1930, reprinted by dover Publications , Inc., New York, 1930), pp 16-19.

[12] Angel Ballesteros, *Quantum Heisenberg-Weyl Algebras.* J. Phys. A: Math. Gen. 30 L149, (1997)

[13] Louisell, H. W. *Quantum statistical properties of radiation.* Wiley, New York (1963)

[14] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.(London), Ser. A,*__114__, 243 (1927)

[15] P. Caldirola, *Nuovo Cimento* **18**, 393 (1941)

[16] E. Kanai, *Prog. Theo. Phys.* **v.3** p.440 (1948)

[17] R. W. Hasse, *J. Math. Phys.* **16**, 2005 (1975)

[18] C. -I. Um, K. -H. Yeon and T.F. George, *Phys. Rep.* **362**, 63 (2002) amd references therein

[19] P. Caldirola, *IL Nuovo Ciemento.* **77**B, 241 (1983)

[20] N. Unal, *Ann. Phys.*__327__, 2177 (2012); *J.Math. Phys.* **53**, 012102(2012)

[21] S.F. Özeren, *J. Math. Phys.* **50**, 012902(2009); **51**, 122901 (2010)

[22] C. P. Sun and L. H. Yu, *Phys. Rev. A* **51**, 1985 (1995)

[23] I. A. Pedrosa, *Phys. Rev. A* **55** 3219 (1997)

[24] I. Guedes, *Phys. Rev. A* **63** 0344102 (2001)

[25] I. A. Pedrosa and I. Guedes, *Int. J. Mod. Phys. B* **18** 1379 (2004)

[26] CAMOP; *Quantum Non-Stationary Systems, Phys. Scr.* **82** 2253 (2008)

[27] M. A. Kastner, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 849 (1992)

[28] B. Chen *e*t al., *Phys, Lett. A* **205**, 121 (1995)

[29] Z. M. Zhang, L. S. He and S. K. Zhou, *Phys. Lett. A* **244**, 196 (1998)

[30] J. S. Wang and C. Y. Sun, *Int. J. Theo. Phys.* **37**, 1213 (1998)

[31] L. F. Wei, and X. L. Lei, *Phys. Scr.* **62**, 7 (2000)

[32] W. J. -Suo, L. T. -Kun and Z. M. -Sheng, Chin *Phys. Lett.* **17**, 528 (2000)

[33] J. G. How et al., *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5321 (2001)

[34] J. R. Choi, *Int. J. Theo. Phys.* **41**, 1931 (2002)

[35] D. Xu, *J.Phys. A: Math. Gen* **35**, L455 (2002)

[36] S. Zhang et al., *Phys. Lett. A* **294**, 319 (2002)

[37] Y. H. Ji, H. M. Luo and Y. Y. Wu, *Phys. Lett. A* **318**, 141 (2003)

[38] J. Gabelli et al., *Science,* **313**, 499 (2006)

[39] Y. H. Ji, H. M. Luo and Q. Guo, *Phys. Lett A* **349**, 104 (2006)

[40] J. R. Choi, *Phys. Scr.* **73**, 587 (2006)

[41] X. L. Xu, H. Q. Li and J. S. Wang, *Physica B*, **396**, 199 (2007)

[42] Y. Y. -Hong, *Commum. Theo. Phys.* **49**, 1052 (2008)

[43] Z. X. Yan, W. J. Suo and F. H. Yi, *Chin. Phys, Lett.*, **25**, 3126 (2008)

[44] X. C. Lin, *Chin. Phys. B* **21**, 020402 (2012)

[45] W. E. Milne, *Phys. Rev.* **35**, 863 (1930)

[46] W. K. Schief, *Appl. Math. Lett* **10**, 1458 (1969)

[47] I. A. Pedrosa and A. P. Pinheiro, *Prog. Theo. Phys.* **125**, 1133 (2011)

[48] A. L. Lima, A. Rosas and I. A. Pedrosa *Ann. Phys.* **325**, 2253 (2008)

[49] I. A. Pedrosa, *Phys. Rev. D* **36**, 1279 (1987)

[50] J. G. Hartley and J. R. Ray, *Phys. Rev. D* **25**, 382 (1982)

[51] J. R. Ray, *Phys. Rev. D* **25**, 3417 (1982)

[52] M. M. Nieto and L. M. Simmons, Jr., *Phys. Rev. D* **20**, 1321 (1979)

[53] M. V. Berry, Proc. Roy. Soc. Lond. **A392**, 45 (1984).

[54] D. J. Griffiths, Introduction to Quantum Mechanics (Prentice Hall, 2nd Edition, 2005).

[55] M. V. Berry, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A* **392**, 45 (1984)

[56] D. A. Morales, *J. Phys. A: Math. Gen.* **21**, L889 (1988)

[57] X. C. Gao, J. B. Xu and T. Z. Qian *Ann. Phys.* **204**, 235 (1990)

[58] D. B. Monteoliva, H. J. Korsch and J. A. Nunes, *J. Phys.* **27**, 6897 (1994)

[59] M. Maamache, *Phys. Rev. A* **52**, 936 (1995)

[60] D. Xu, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, L455 (2002)

[61] X. C. Gao, *Phys. Rev. A* **44**, 7016 (1991)

[62] I. A. Pedrosa and A. Rosas *Phys. Rev. Lett* **103**, 010402 (2009)

[63] I. A. Pedrosa, *Phys. Rev. A* **83**, 032108 (2011)