



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Propagação de Campos Eletromagnéticos em Meios Materiais Finitos

Alberto Lencina

Tese de Doutorado

João Pessoa
24 de Agosto de 2006

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Alberto Lencina

**Propagação de Campos Eletromagnéticos
em Meios Materiais Finitos**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Física.

Orientador: *Paulo Cesar de Oliveira*
Co-orientador: *Pablo Vaveliuk*

João Pessoa
24 de Agosto de 2006

*A todas as almas bondosas que souberam me sorrir a cada
passo desta viagem.*

Agradecimentos

Aos daqui e aos de lá. A todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente, em maior ou menor medida para a concretização desta etapa. Às agências de financiamento e promoção científica. E a todos os entes abstratos que de forma quase Kafkiana definem os nossos futuros.

Os de lá. Em particular agradeço a minha família e familiares: Papo, Mami, Ari, Mora, Abu e Tata. Aos meus amigos de sempre, que de forma incondicional me apoiaram neste projeto: El Negro, Yani, Narichi, Checha, Capi e Andi. Maxi, Pedro, Ale, Tomás, Juan e Marita. Micha e Leti. E a todos os familiares e achegados deles. A todos, porque sempre com uma palavra amiga e um abraço carinhoso deram-me ânimo para enfrentar a saudade da distância. A Beatriz pela sua incalculável :) colaboração. Ao CIOp todo por sempre guardar um lugar pra mim.

Aos daqui. Em particular a Miguel, Emerson, Victor e Dodó pelo apoio, o afeto e as conversas. A Marcelinho pela alegria e os sorrisos. A Yuri & Cia. pelos gratos momentos de café e bolacha. A Zé Roberto e Cia. pelas sextas-feiras. A todo o pessoal das nossas festas por nos brindar tanto carinho e alegrias. A todo o pessoal dos Laboratórios de Física por ter-me recebido de braços abertos. A todo o pessoal do Departamento de Física por ter-me brindado todo o necessário para o meu trabalho. A Paulo por ter-me acolhido no seu grupo e ter-me brindado todos os espaços, todo o apoio e a liberdade necessária para desenvolver-me. A Pablo, pela idéia, o incentivo, a coragem, o apoio, o trato “de igual a igual” e as inúmeras conversas “com a cabeça aberta” que tivemos.

Um destaque especial para o pessoal de BH que tão bem me recebeu e me recebe cada vez que passo por lá.

Finalmente, e muito especialmente, a Dulce que ao longo destes anos foi a pedra fundamental das minhas emoções, foi... foi muito, tanto que não dá para escrevê-lo. Amo vc! Obrigado.

Concluindo, agradeço a todos os que por espaço ou memória não estou agradecendo explicitamente nestas linhas.

Alberto.

22/07/06

Se fechas a porta a todos os erros deixarás fora a verdade.
— RABINDRANATH TAGORE (Filósofo e Poeta Indiano)

Resumo

Nesta tese é abordado o eletromagnetismo nos meios materiais. Parte-se das Equações de Maxwell Macroscópicas e supõe-se que os campos possuem uma dependência temporal que pode ser expressa em termos de uma transformada de Fourier. A conservação da energia, do momento linear e do momento angular são estudados nos meios materiais em geral. Calculando a média temporal do momento angular, as contribuições orbital e de *spin* são expressas sem a necessidade de apelar aos campos de *gauge*. Seguidamente é considerado o assunto central da pesquisa: a propagação de campos eletromagnéticos em meios materiais finitos. Demonstra-se a equivalência entre estudar a propagação dos campos desde o ponto de vista ondulatório ou desde o ponto de vista energético. A geometria considerada é a de meios com faces planas e paralelas e nela a propagação dos campos desde o ponto de vista energético é estabelecida. O conjunto de equações resultante serve para tratar a propagação de campos eletromagnéticos em meios finitos em geral. Portanto, este conjunto de equações, nomeado de *Formalismo S*, é visto como um método de resolução deste tipo de problemas. O Formalismo S deixa entrever uma possível não equivalência entre o módulo ao quadrado do campo e a média temporal do vetor de Poynting fato que motiva o estudo dessa não equivalência e a introdução de um novo tipo de meio chamado *meio Poynting*. Dado que o Formalismo S permite estudar meios cuja resposta é função da média temporal do vetor de Poynting, são considerados os meios com portadores de carga foto-induzidos. Finalmente, os meios não lineares saturáveis são analisados.

Palavras-chave: Conceitos fundamentais do eletromagnetismo; Formalismo S; meios opticamente não lineares.

Abstract

In this thesis, the electromagnetism in material media is considered. It starts from the Macroscopic Maxwell Equations assuming that the fields have a temporal dependence that can be expressed by a Fourier transform. The conservation of the energy, linear momentum and angular momentum are studied from a general point of view. By taking the temporal average of the angular momentum, the orbital and spin contributions were derived without appealing to gauge fields. Following, the central issue is considered: the electromagnetic field propagation in bounded media. It is demonstrated the equivalence in the field propagation from both, oscillatory and energetic, points of view. A plane-parallel-faces medium geometry was considered and the field propagation from the energetic point of view is here established. The resulting set of equations allows to deal with the electromagnetic field propagation in general bounded media. Thus, this equation set, that we called *S Formalism*, is viewed as a method to solve this kind of problems. This approach emphasizes the possible nonequivalence between the squared field amplitude and the temporal-averaged Poynting vector modulus. This fact motivated the study of such nonequivalence and leaves open the possibility to introduce a new kind of medium, so-called *Poynting medium*. Since the S-Formalism allows to study media whose response is a function of the temporal-averaged Poynting vector, the light-induced charge carrier media and finally, saturable media are considered.

Keywords: Fundamental concepts in electromagnetism; S Formalism; nonlinear optical media.

Sumário

1	Introdução	1
2	O Eletromagnetismo nos Meios Materiais	7
2.1	Fundamentos da teoria eletromagnética	9
2.1.1	As equações de Maxwell nos meios materiais	9
2.1.2	As relações constitutivas	13
2.1.3	Condições de fronteira no eletromagnetismo	16
2.2	Conservação da Energia, Momento e Momento Angular dos Campos Eletromagnéticos	19
2.2.1	Conservação da energia	19
2.2.2	O momento linear e a força	22
2.2.3	As equações do momento linear e o momento angular eletromagnético	24
2.2.4	Momento angular eletromagnético: orbital e <i>spin</i>	27
3	O Formalismo S	32
3.1	Questões básicas da propagação de campos eletromagnéticos em meios materiais	35
3.2	O problema da propagação da luz em meios de faces planas e paralelas: O Formalismo S	39
3.2.1	A geometria estudada	41
3.2.2	Equações de evolução dos campos	42
3.2.3	Condições de fronteira em termos da amplitude do campo e do vetor de Poynting adimensional	44
3.2.4	Propriedades ópticas dos meios de faces planas e paralelas no marco do Formalismo S	45
3.3	Um método para resolver numericamente as equações do Formalismo S	47
4	Aplicações do Formalismo S	49
4.1	Análise dos meios lineares	51
4.1.1	Relações constitutivas e soluções das equações do Formalismo S	52
4.1.2	Análise de dielétricos perfeitos	53
4.1.3	Análise de absorvedores lineares	54
4.1.4	Comparação da transmitância resultante do Formalismo S com a da lei de Beer	56
4.1.5	Estudo de meios com permissividade negativa	57
4.1.6	Conclusões	60
4.2	Análise dos meios Poynting	62
4.2.1	Relações constitutivas e soluções das equações do Formalismo S	62
4.2.1.1	Meios Kerr	62
4.2.1.2	Meios Poynting	64
4.2.2	Comparação das propriedades ópticas dos meios Kerr e Poynting	65

4.2.3	Sobre as propriedades de simetria espacial e temporal dos meios Poynting	67
4.2.4	Conclusões	69
4.3	Análise de meios com portadores de carga foto-induzidos	70
4.3.1	Relações constitutivas e modelo microscópico	71
4.3.1.1	Relações constitutivas	71
4.3.1.2	Modelo microscópico	72
4.3.2	Análise das propriedades ópticas	74
4.3.3	Análise da validade do modelo microscópico-macroscópico utilizado	81
4.3.4	Conclusões	83
4.4	Análise dos meios não-lineares saturáveis	85
4.4.1	Relações constitutivas dos meios não lineares saturáveis	86
4.4.2	Propriedades ópticas dos meios não lineares saturáveis	86
4.4.3	Conclusões	90
5	Conclusões gerais	91
	Apêndice I	97
	Apêndice II	100
	Apêndice III	103

Lista de Figuras

2.1	Diagrama esquemático de uma superfície de fronteira entre dois meios. É suposto que na região de fronteira existem densidades idealizadas de carga σ_{sup} e corrente $\mathbf{K}$. O volume V é um cilindro de altura pequena, metade em um meio e metade no outro, com a normal $\mathbf{n}$ apontando na direção do meio 1 para o meio 2. A curva retangular C está também metade em um meio e metade no outro e está orientada de forma tal que a normal ao plano que define é tangente à superfície de fronteira.	17
3.1	Representação esquemática do problema considerado. Uma onda plana, polarizada linearmente na direção $\hat{\mathbf{i}}$, propagando-se desde a região I, incide normalmente em um meio material de espessura $\tilde{d}$, e cuja resposta é dada por ϵ_t e σ_t . Como consequência aparecem uma onda refletida e uma transmitida.	41
4.1	Evolução espacial do vetor de Poynting adimensional S e o módulo ao quadrado do campo $\mathcal{E}^2$ para um dielétrico linear. Claramente se observa que S é uma constante e $\mathcal{E}^2$ é uma função oscilatória. Os parâmetros utilizados são $\sqrt{\epsilon_r} = 1.5$, $\tilde{d} = 3\pi$.	53
4.2	Evolução espacial do vetor de Poynting adimensional S , do módulo ao quadrado do campo $\mathcal{E}^2$, e da intensidade dada pela lei de Beer I_B para um absorvedor linear com diferentes valores da condutividade relativa: (a) $\sigma_r = 0.1$, (b) 1, (c) 10, com $\sqrt{\epsilon_r} = 2.5$, e $\tilde{d} = 2\pi$. Claramente, a não equivalência entre S e $\mathcal{E}^2$ está diretamente relacionada com o efeito da segunda fronteira.	55
4.3	Diferencia percentual $I_B(1) - S(1)$ em função de ϵ_r e σ_r para $\tilde{d} = 2\pi$.	57
4.4	Refletância (a), $\text{Log}_{10}\alpha_+$ (b), e $\text{Log}_{10}\alpha_-$ (c) em função de ϵ_r e $\text{Log}_{10}\sigma_r$. Na refletância $\tilde{d} = 2\pi$.	58
4.5	Transmitância como função do coeficiente não linear γ , para (a _i) meio Poynting, (b _i) meio Kerr com $\tilde{d} = 2\pi$. Onde para $i = 1$, $\sqrt{\epsilon_r} = 1.5$; e $i = 2$, $\sqrt{\epsilon_r} = 2.5$.	65
4.6	Transmitância em função de $\sqrt{\epsilon_r}\tilde{d}/2\pi$ para (a) meio Poynting, (b) meio Kerr com $\sqrt{\epsilon_r} = 2.5$ e $\gamma = 2$.	66
4.7	Resposta não linear do meio em função da coordenada espacial relativa para cada uma das três soluções compatíveis com as condições de fronteira. — meio Poynting; — — — meio Kerr. Os Parâmetros usados foram $\gamma = 9$, $\sqrt{\epsilon_r} = 1.5$, e $\tilde{d} = 2\pi$.	66
4.8	Representação esquemática do problema das transições intrínsecas interbanda. Os elétrons são excitados da banda de valência para a banda de condução formando então um par elétron-buraco.	73

4.9	Transmitância T , refletância R , energia absorvida A , e média espacial da permissividade total $\langle \epsilon_t \rangle$, como função da intensidade excitação adimensional ξ para vários valores de $(n_0\gamma, n_0\delta)$, como indicado em cada subfigura. Todas as figuras foram calculadas com $\sqrt{\epsilon_r} = 1.5$ e $\tilde{d} = 2\pi$.	75
4.10	Transmitância T , refletância R , energia absorvida A , e média espacial da permissividade total $\langle \epsilon_t \rangle$, como função da espessura adimensional $\tilde{d}$ para vários valores de $(n_0\gamma, n_0\delta)$, como indicado em cada subfigura. Todas as figuras foram calculadas com $\sqrt{\epsilon_r} = 1.5$ e $\text{Log}_{10}\xi = -5.5$.	79
4.11	Razão entre os termos de difusão e recombinação como função da coordenada espacial adimensional para $n_0\gamma = 0$, $n_0\gamma > 0$, e $n_0\gamma < 0$, como indicado na figura, com $\sqrt{\epsilon_r} = 1.5$, $n_0\delta = 10^{-4}$, $\xi = 10^9$ e $\tilde{d} = 2\pi$.	82
4.12	Transmitância T como função da excitação adimensional γ para meios tipo-Kerr e tipo-Poynting. Todas as figuras com $\tilde{d} = 2\pi$.	87
4.13	Transmitância T em função do coeficiente não linear adimensional δ e da excitação adimensional γ para um meio tipo-Poynting com $\tilde{d} = 2\pi$.	88
4.14	Transmitância T em função da excitação adimensional γ para um meio tipo-Poynting com $\delta = 6$.	90
III.1	Representação esquemática das transições extrínsecas tipo-n. Os elétrons são excitados desde centros dadores N_D para a banda de condução e nela podem se recombinar.	104

Lista de Tabelas

3.1	Lados direitos das Eqs. (3.1) e (3.2) e a Eq. (2.5d) para cada aproximação considerada: divergência nula e paraxial.	38
3.2	Quantidade conservadas da equação de Helmholtz e o vetor de Poynting complexo para cada aproximação.	39
4.1	Valores limites para $\alpha_{\pm}^2$ e R para as três regiões mencionadas no texto. Note-se que $F' = \frac{(\epsilon_r +1)^2}{4 \epsilon_r }$.	59

Introdução

Capítulo 1

A Teoria Eletromagnética clássica apresenta-se como uma das mais completas teorias da física dos nossos dias. Não só pela certeza das predições que dela surgem, senão também pela robustez que apresenta frente ao desenvolvimento das novas teorias. A Teoria Eletromagnética ficou intacta ante a Teoria da Relatividade [1] e a Mecânica Quântica [2], e não perde a validade frente às teorias físicas de vanguarda [3]. Todavia, na atualidade, depois de mais de 140 anos de teoria “bem consolidada”, tem-se dúvidas sobre se ela é uma teoria fechada ou ainda tem-se outros campos e efeitos para serem observados [4].

A Teoria eletromagnética é uma teoria fenomenológica, isto é, ela resulta da generalização de um grande número de observações experimentais. Quando analisada desde um ponto de vista local, a teoria baseia-se em quatro equações diferenciais em derivadas parciais, a saber: a lei de Faraday; a lei de Ampere-Maxwell; a lei de Gauss; e a lei de ausência de monopolo magnético. Estas equações em conjunto são conhecidas como Equações de Maxwell [5]. Embora sejam fenomenológicas, as Equações de Maxwell podem ser derivadas de um princípio variacional quando se considera a Lagrangeana (ou ação) constituída por três partes: uma correspondente às partículas carregadas, uma outra ao campo eletromagnético e uma terceira, à interação do campo eletromagnético com as partículas carregadas. Dentre os principais resultados e talvez um dos mais surpreendentes é que os campos eletromagnéticos podem apresentar soluções ondulatórias no vácuo [6]. As Equações de Maxwell para o vácuo são chamadas de *Equações de Maxwell Microscópicas*. Por outro lado, para os meios materiais surge um problema para essas equações serem aplicadas, já que o número de cargas presentes torna impossível a resolução das mesmas. O problema é resolvido pela introdução do conceito de “ponto macroscópico” que representa uma região do espaço microscopicamente grande, de modo a conter um número macroscópico de átomos e/ou moléculas, e macroscopicamente pe-

quena, ou seja, as dimensões do ponto macroscópico são muito menores que as dimensões do sistema em estudo [7]. A primeira condição implica que quando tomamos as médias dos campos microscópicos, eliminamos as grandes flutuações destes, de modo que os campos médios variam de forma suave de um ponto macroscópico a outro. A segunda condição implica que o meio pode ser tomado como contínuo de modo que pode ser caracterizado por uma série de constantes macroscópicas que em conjunto representam a resposta do meio ao estímulo eletromagnético. Estas constantes podem ser obtidas tanto empiricamente quanto a partir da mecânica estatística clássica ou quântica, quando se postulam hipóteses acerca da estrutura microscópica do meio. Surgem assim, as chamadas *Equações de Maxwell Macroscópicas* (valores médios das Equações de Maxwell Microscópicas) que conservam alguma semelhança com a forma funcional das Equações de Maxwell Microscópicas, mas estes campos macroscópicos são avaliados nos pontos macroscópicos. Este processo necessário para manipular as Equações de Maxwell nos meios materiais, leva conseqüentemente a uma perda importante da informação acerca da estrutura microscópica da matéria, de modo que o eletromagnetismo macroscópico só se interessa pela resposta do meio em conjunto através das *relações constitutivas* que ligam os campos fundamentais com os induzidos. Com as relações constitutivas pode se definir um sem-número de meios materiais e é aí quando o eletromagnetismo é matéria de discussão. O assunto não é que a Teoria Eletromagnética deixe de ser válida quando consideramos meios materiais, senão que aparecem questões a ser discutidas tanto do ponto de vista quântico [8] quanto clássico. Por exemplo, uma pergunta a se fazer é: qual a relação constitutiva que descreve adequadamente este conjunto macroscópico de cargas? A resposta não é simples e por isso existe ainda uma grande atividade em relação ao estudo das mesmas [9]. Em geral pode se dizer que a diversificação de meios vá desde os meios lineares com ou sem inhomogeneidades até os não lineares com respostas locais ou não locais às potências dos campos ou funcionais destes [9, 10]. Também na atualidade está notando-se que algumas correções ao eletromagnetismo do vácuo poderiam ser interpretadas como a resposta de algum meio material particular [11]

ou que a resposta de um meio aos campos eletromagnéticos pode ser equivalente à propagação dos mesmos no vácuo mas com uma métrica diferente da euclidiana [12].

Como foi dito, as relações constitutivas, que ligam os campos fundamentais e induzidos por toda uma serie de constantes macroscópicas, podem ser deduzidas tanto a partir de modelos quântico-estatísticos [13, 14] que levam em consideração a estrutura microscópica do meio, tarefa levada a cabo pela Física do Estado Sólido quanto fenomenologicamente. Em isto último, as relações constitutivas são dadas de forma tal que, uma vez introduzidas nas Equações de Maxwell Macroscópicas, os resultados que estas provêem estejam em concordância com os resultados experimentais previamente obtidos [15]. Portanto é, ainda hoje, de interesse o estudo da resposta de diferentes tipos de meios à excitação eletromagnética [9].

Para resolver as Equações de Maxwell em presença de um número macroscópico de cargas (seja qual for seu estado de agregação: gasoso, líquido, ou sólido) existem, dentre outras, duas formas de traçar o problema. Por um lado pode se pensar que a presença das cargas produz uma inhomogeneidade espacial na resposta do meio (que pode ser tanto linear quanto não linear) e então as Equações de Maxwell Macroscópicas são resolvidas globalmente tendo em conta a inhomogeneidade da resposta [16]. Por outro lado, quando existem regiões bem definidas onde as cargas apresentam propriedades bem diferenciadas (p.e. diferentes materiais) as equações de Maxwell podem ser resolvidas dentro de cada região e as soluções destas devem ser "unidas". A forma unir as soluções deve ser consistente com as próprias Equações de Maxwell Macroscópicas, o que leva a que determinadas componentes dos campos fundamentais e induzidos se conservem ao atravessar a fronteira entre os meios. As relações que dão conta dos campos na fronteira são conhecidas como condições de fronteira. Mesmo conhecidas desde o alvorecer da Teoria Eletromagnética, ainda hoje é matéria de estudo diferentes condições de fronteira [17].

Quando trata-se de resolver exatamente um problema de propagação de campos eletromagnéticos, se apresentam muitas dificuldades, ainda sendo um problema com fronteiras bem

definidas (meio material finito). Dentre as principais dificuldades que pode se ter uma é que a resposta do meio seja não linear em relação aos campos eletromagnéticos. Isto faz com que as Equações de Maxwell Macroscópicas se tornem um sistema de equações não lineares acopladas, cuja solução na maioria dos casos não pode ser derivada analiticamente. Fato que faz com que se adotem diferentes aproximações, p.e. reduzindo a ordem das equações diferenciais [18] dentre outras. Também, o conceito de onda deve ser tomado com cuidado já que quando o meio é não linear a resposta dele pode incluir tanto harmônicos quanto sub-harmônicos, além da componente fundamental do campo eletromagnético. Mais ainda, já para meios lineares inhomogêneos o conceito de onda perde sentido [19]. Portanto, a procura de novos métodos para resolver as equações de Maxwell em diferentes condições é ainda hoje uma área de intensa atividade [20].

Uma área bastante controversa, relacionada com as Equações de Maxwell é aquela que tem a ver com quantidades definidas não linearmente como função dos campos, p.e.: força, momento linear, momento angular, fluxo de energia, tensor de esforços, tensor de momento e energia... Os estudos, em geral, limitam-se a casos onde os campos se propagam no vácuo ou em meios lineares [21, 22, 23] e mesmo nesses casos não se tem uma opinião unificada sobre como expressar essas quantidades. Portanto hoje em dia, com o extenso leque de meios materiais existente, opticamente ativos, se faz imperante o desenvolvimento dessas quantidades desde um ponto de vista macroscópico nos meios materiais em geral e o estudo delas em diferentes situações.

Na atualidade existem pinças ópticas as quais se baseiam nos gradientes de campos altamente focalizados que geram forças confinantes que permitem segurar e manipular nanopartículas [24]. É então necessário o conhecimento da interação do campo com os meios materiais e as forças sobre estes induzidas. Também nos últimos anos o momento angular de diferentes distribuições de campo e em diferentes situações tem sido estudado [25] e como este interage com os diferentes meios materiais está sendo motivo de importantes avanços [26].

Desta breve introdução podemos observar que ainda existem questões básicas, fundamentais, conceituais a serem abordadas:

- O estudo de quantidades dinâmicas e energéticas do campo eletromagnético em meios materiais.
- O papel das condições de fronteira em problemas de propagação de campos eletromagnéticos.
- O desenvolvimento de métodos de resolução das equações de Maxwell em condições não lineares.
- O estudo da resposta de diferentes/novos meios à excitação eletromagnética.

Doravante dedicaremos os nossos esforços a estes assuntos, os quais serão abordados com crescente grau de profundidade. No Capítulo 2 abordamos as Equações de Maxwell Macroscópicas, as condições de fronteira, as relações constitutivas e contudo deduziremos algumas relações gerais relacionadas com as quantidades dinâmicas e energéticas em meios materiais. A seguir, no Capítulo 3, desenvolvemos um método de resolução das Equações de Maxwell Macroscópicas no problema da propagação unidimensional de campos em meios finitos de faces planas e paralelas e incluímos sem aproximações as condições de fronteira. O método, batizado de Formalismo-S, destaca a importância do fluxo de energia eletromagnética na resolução de problemas de propagação de campos através de meios materiais. Também desenvolvemos um algoritmo para a implementação de soluções numéricas (que, para um tipo particular de não linearidades, simplifica consideravelmente o problema). Contudo, no Capítulo 4, aplicamos este método a diferentes meios, começando pelos lineares e seguindo por diferentes meios não lineares incluindo algumas novas propostas. Finalmente, e a modo de conclusão, no Capítulo 5 destacamos os principais resultados da nossa pesquisa e discursamos sobre as perspectivas que desta tese se desprendem.

O Eletromagnetismo nos Meios Materiais

Capítulo 2

Neste capítulo apresentaremos vários resultados gerais da Teoria Eletromagnética, sendo alguns destes bem conhecidos e outros não muito. É suposto que o leitor está familiarizado com: o eletromagnetismo nos meios materiais, a análise de Fourier dos campos e a propagação dos campos eletromagnéticos em meios não lineares. Portanto só os conceitos básicos, necessários para o desenvolvimento desta tese serão expostos. Na primeira seção começamos com os resultados bem conhecidos das Equações de Maxwell nos meios materiais, as relações constitutivas, e as condições de fronteira. Na segunda seção abordamos a conservação do fluxo de energia e estendemos os conceitos de tensor de esforços e força a meios materiais em geral fato que obriga a que tomemos, portanto, uma posição definida ante a definição do momento linear (definida frente à controvérsia histórica entre as definições de Abraham e Minkowski, dentre outras). Para apoiar essa definição serão apresentadas duas novas equações que dão conta do comportamento do momento linear e o momento angular dos campos eletromagnéticos. Finalmente analisamos em detalhe o momento angular dos campos eletromagnéticos demonstrando que com a ajuda das medias temporais estes podem se escrever em termos dos campos eletromagnéticos fundamentais, sem a necessidade de apelar aos campos de *gauge*.

2.1 Fundamentos da teoria eletromagnética

2.1.1 As equações de Maxwell nos meios materiais

As equações de Maxwell em presença de uma densidade de carga ρ_{micro} e uma densidade de corrente $\mathbf{j}_{micro}$ podem ser escritas em termos dos campos fundamentais microscópicos: o campo elétrico $\mathbf{e}$; o campo de indução magnética $\mathbf{b}$ ¹. No Sistema Internacional², as equações, têm a forma [7]

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{d\mathbf{b}}{dt}, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{j}_{micro} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\mathbf{e}}{dt}, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\rho_{micro}}{\epsilon_0}, \quad (2.1d)$$

sendo ϵ_0 e μ_0 a permissividade e a permeabilidade do vácuo, respectivamente, e ∇ o operador diferencial tridimensional euclidiano. É subentendido que todos os campos e as densidades de carga e corrente apresentam dependências espaço-temporais, a menos que seja indicado ao contrário.

As equações de Maxwell têm uma interpretação de causas e conseqüências. É dizer, as partes direitas são causas das correspondentes partes esquerdas. Por exemplo, na Eq. (2.1a) se tem que, variações temporais na indução magnética $\mathbf{b}$ produzem rotacionais de campo elétrico... e assim com as outras equações.

Quando as densidades ρ_{micro} e $\mathbf{j}_{micro}$ referem-se a um conjunto macroscópico de cargas (p.e. um meio material) o problema de resolver as equações de Maxwell microscópicas torna-se extremamente difícil sendo só possível obter resultados a valores médios. Como foi comentado

¹Adotamos esta nomenclatura porque teremos como campos fundamentais macroscópicos a $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$.

²Que será adotado ao longo desta Tese.

na introdução, estes valores médios justificam-se pelo seguinte fato: nos meios materiais a medição e a análise dos campos microscópicos que variam abruptamente no tempo e no espaço (p.e. entre dois átomos vizinhos onde os campos elétricos têm variações da ordem de 10^{14} V/m) não são acessíveis experimentalmente de forma direta, nem têm muito interesse prático desde o ponto de vista da óptica dos meios contínuos; de fato, os experimentos ópticos com luz monocromática não resolvem espacialmente a matéria além de um comprimento de onda, λ . Daqui a utilidade de uma teoria macroscópica dos meios materiais, para os quais um ponto macroscópico que tem um volume $\Delta V \ll \lambda^3$ é ainda suficientemente grande como para conter um grande número de átomos, $r^3 \ll \Delta V \ll \lambda^3$ (sendo r o rádio típico de um átomo). Portanto, para os fenômenos ópticos ordinários, os meios materiais manifestam-se como perfeitamente contínuos, e cada meio caracteriza-se, desde o ponto de vista óptico, por quantidades macroscópicas que dão conta da relação entre os campos eletromagnéticos fundamentais e a resposta deles a tais excitações.

A escolha do tipo de valor médio a calcular deve ser examinado com cuidado. À primeira vista, pode-se pensar que são necessárias médias sobre o espaço e o tempo. Mas não é assim, somente é necessário promediar no espaço (cuja justificação foi exposta no parágrafo anterior). Dado que a escala de tempo associada com $\Delta V^{1/3}$ é da ordem das flutuações atômicas e moleculares, o promediado no tempo não é necessário. De fato, depois do promediado espacial não subsistem vestígios das flutuações microscópicas no tempo. Isto porque, na ausência do estabelecimento de uma ordenação em distâncias macroscópicas, as variações dos campos microscópicos no tempo não são correlacionadas sobre distâncias da ordem de $\Delta V^{1/3}$. Tudo o que sobrevive são as componentes em frequência fundamental, correspondentes com as frequências externas aplicadas, ou aquelas correspondentes a processos não lineares coletivos: harmônicos e/ou sub-harmônicos.

Sem entrar nos detalhes deste promediado que podem ser encontrados na bibliografia [7], expomos aqui os resultados que deste devenem.

A relação entre as quantidades microscópicas e as macroscópicas é:

$$\langle \mathbf{e} \rangle = \mathbf{E}, \quad (2.2a)$$

$$\langle \mathbf{b} \rangle = \mathbf{B}, \quad (2.2b)$$

$$\langle \mathbf{j}_{micro} \rangle = \mathbf{j}_{liv} + \mathbf{j}_{mol} + \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \nabla \times \mathbf{M} + \dots, \quad (2.2c)$$

$$\langle \rho_{micro} \rangle = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P} + \dots, \quad (2.2d)$$

onde $\mathbf{M}$ e $\mathbf{P}$ são a magnetização e a polarização induzidas, respectivamente, $\mathbf{j}_{mol}$ representa as correntes moleculares induzidas e $\mathbf{j}_{liv}$ da conta da corrente de cargas livres no meio. Os termos de ordem superior tais como as correções relativistas e quadrupolos magnéticos e/ou elétricos, etc. não foram escritos explicitamente mas podem ser de relevância em certas condições experimentais (por exemplo na atividade óptica [27]). Tanto $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$ quanto $\mathbf{j}_{mol}$ são funcionais lineares e/ou não lineares dos campos de excitação, com dependências espaço-temporais que podem ser locais ou não locais.

Definindo então

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B} - \mathbf{M} + \dots), \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} + \dots, \quad (2.3b)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{j}_{liv} + \mathbf{j}_{mol}, \quad (2.3c)$$

obtém-se as Equações de Maxwell Macroscópicas

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad (2.4a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{d\mathbf{D}}{dt}, \quad (2.4b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.4c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2.4d)$$

sendo $\mathbf{H}$ o campo magnético, $\mathbf{D}$ o vetor deslocamento e ρ e $\mathbf{J}$ as densidades macroscópicas de carga e corrente, respectivamente.

Notar que da forma tratada aqui, os campos fundamentais são $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ e os induzidos $\mathbf{D}$ e $\mathbf{B}$ que juntamente com $\mathbf{J}$ representam a resposta do material. A relação explícita entre uns e outros da-se através das chamadas relações constitutivas, e serão detalhadas na seguinte subseção.

Os campos envolvidos nas equações de Maxwell (tanto macroscópicos quanto microscópicos) podem ter dependências temporais das mais arbitrárias. Portanto aqui é apropriado colocar uma primeira imposição para os campos a serem tratados no decorrer desta tese. Pediremos que os campos, tanto fundamentais quanto induzidos, apresentem transformada de Fourier temporal³. Contudo, as componentes de Fourier das Equações de Maxwell macroscópicas ficam

$$\nabla \times \mathbf{E}(\omega) = i\omega\mathbf{B}(\omega), \quad (2.5a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\omega) = \mathbf{J}(\omega) - i\omega\mathbf{D}(\omega), \quad (2.5b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\omega) = 0, \quad (2.5c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\omega) = \rho(\omega), \quad (2.5d)$$

onde i representa a unidade imaginária. Em todos os campos foi colocado explicitamente

³Detalhes sobre as transformadas de Fourier e alguns resultados usados nesta tese podem ser encontrados no Apêndice I.

a dependência com a frequência para diferenciar do caso em que a dependência é temporal. Lembrar que todos os campos também têm dependências espaciais.

2.1.2 As relações constitutivas

Uma vez que se têm as Equações de Maxwell Macroscópicas, é necessário dar então a relação entre os campos fundamentais e os induzidos. Tal relação dependerá da resposta do meio material em questão e esta pode ser, em princípio, uma resposta linear, é dizer que se polarize, ante a presença de, pelo menos, o campo elétrico da luz. Quando a luz aumenta sua intensidade também é de supor que a relação entre o campo e a resposta do meio deixe de ser linear, p.e. potências do campo elétrico incidente. Com esse tipo de resposta do meio podem acontecer fenômenos muito interessantes tais como a geração de segundo harmônico e a conversão paramétrica da luz [28, 29] dentre outros. Também pode acontecer que a resposta não linear do meio não possa ser expressa em termos de potências inteiras do campo elétrico como é o caso de meios fotocondutores e fotorrefratores que serão estudados nesta tese. Ou talvez pode não ser conveniente escrever a resposta como série de potências, como acontece com os meios saturáveis que também serão abordados nesta tese. Desde um ponto de vista geral as relações constitutivas são relações funcionais entre os campos induzidos e os fundamentais e podem incluir a geração de harmônicos ou só ter uma resposta na frequência fundamental. Por outro lado, tais respostas podem não ser instantâneas, isto é a resposta de um meio a um tempo dado pode depender do campo a vários tempos anteriores, ou seja uma resposta não local no tempo. Nesse caso se diz que o meio apresenta *dispersão temporal* e, quando analisado o espectro de Fourier das constantes que determinam a resposta do meio, estas apresentam uma dependência com a frequência do campo elétrico, como será apresentado em breve. De fato, todos os meios são temporalmente dispersivos já que todos, em maior ou menor medida, apresentam correntes moleculares induzidas e isso impõe uma dependência da resposta do meio com a frequência através da relação entre as correntes induzidas e as polarizações conhecida como relações de

Kramers-Kroning [30], mas tais detalhes não serão abordados aqui. Também os meios podem apresentar respostas não locais espaciais, nesse caso, se diz que apresentam uma *dispersão espacial*. Tal fenômeno da conta, por exemplo, da atividade óptica de alguns meios [27]. Aqui novamente impomos uma restrição à nossa análise já que nesta tese os meios com dispersão espacial não serão abordados. Finalmente tem que se comentar que por exemplo no caso de series de potências dos campos, a resposta pode ligar diferentes direções dos mesmos através de relações tensoriais entre uns e outros. Nesse caso é interessante destacar que existe um principio que da uma cota mínima para o número de elementos nulos do tensor. Tal principio é conhecido como *Principio de Neumann* e diz o seguinte [31]: *os elementos de simetria de qualquer propriedade física de um material devem incluir todos os elementos de simetria do grupo de simetria do material*. Este ponto de vista não será abordado em detalhe aqui mas quando for definido um novo tipo de meio na Sec. 4.2 se precisará de fazer uso dele para delimitar as propriedades que deveria possuir um material cuja resposta seja a desses novos meios propostos.

As relações constitutivas consideradas nesta Tese serão escalares e cuja resposta seja na freqüência fundamental do campo de excitação, mas permitindo que esta seja não linear com os campos da forma mais geral possível. Tal resposta pode ser escrita através de funções generalizadas que incluam tanto a resposta linear quanto a não linear do meio da seguinte forma⁴:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \epsilon[\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, t, t'] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt', \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \int_{-\infty}^t \mu[\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, t, t'] \mathbf{H}(\mathbf{r}, t') dt', \quad (2.6b)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t \sigma[\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, t, t'] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt', \quad (2.6c)$$

⁴Aqui serão usadas explicitamente as dependências espaço-temporais para facilitar a leitura devido às distintas variáveis envolvidas.

sendo ϵ a permissividade relativa do material, μ sua permeabilidade relativa e σ sua condutividade. Em todos os casos [...] significa dependência funcional. Os limites de integração implicam que estamos considerando os efeitos de todos os tempos anteriores ao tempo atual. Pois bem, como o tempo é homogêneo, nas expressões anteriores não importa o instante particular t no qual atua a “causa” $\mathbf{E}$ ou $\mathbf{H}$, senão o tempo transcorrido até se manifestar o “efeito” $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ ou $\mathbf{J}$. Portanto, os funcionais que descrevem o meio devem depender dos tempos t e t' através da sua diferença $t - t'$. Definindo $\tau = t - t'$, com $d\tau = -dt'$, temos

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_0^\infty \epsilon[\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \tau] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau, \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \int_0^\infty \mu[\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \tau] \mathbf{H}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau, \quad (2.7b)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \sigma[\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \tau] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau. \quad (2.7c)$$

Estas relações têm que incluir o princípio de causalidade, de forma que para $\tau < 0$ todos os funcionais devem ser nulos, podendo então se escrever

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^\infty \epsilon[\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \tau] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau, \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \int_{-\infty}^\infty \mu[\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \tau] \mathbf{H}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau, \quad (2.8b)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^\infty \sigma[\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \tau] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau. \quad (2.8c)$$

Notar que assim escritas as relações constitutivas são interpretadas como a convolução do campo fundamental com a resposta do meio. Desta forma podemos calcular então a transformada de Fourier, e usando o fato que a transformada da convolução é igual ao produto das

transformadas⁵, temos

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \epsilon_t[\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \omega] \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mu_t[\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \omega] \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.9b)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \omega \sigma_t[\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{H}, \omega] \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.9c)$$

onde o fator $\epsilon_0 \omega$ foi introduzido por conveniência futura, ϵ_t representa a permissividade relativa *total* do meio, μ_t a permeabilidade relativa *total* e σ_t a condutividade relativa *total*. Por *total* entendemos que com estas relações constitutivas estamos considerando todas as respostas do meio (do nosso interesse). Estas serão os tipos de relações constitutivas usadas no decorrer do nosso trabalho. Em todos os casos estas funcionais serão consideradas reais.

2.1.3 Condições de fronteira no eletromagnetismo

No caso dos meios materiais, existe uma enorme quantidade de átomos e moléculas cada um com muitos elétrons possuindo então estes sistemas muitas ressonâncias. Quando uma onda luminosa incide sobre um meio material, estas ressonâncias podem ser vistas como osciladores que absorvem e espalham parte da radiação incidente, e esta onda espalhada se sobrepõe à parte que fica da onda incidente e às espalhadas por outros osciladores do meio. Portanto, a onda que incide num outro oscilador é a soma de uma parte da onda incidente e as *ondas secundárias* procedentes de todos os outros osciladores. Aqui é onde tem que se distinguir dentre meios ópticos *diluídos*, onde o campo local é praticamente igual ao da onda incidente e não há coerência entre as diferentes ondas secundárias; e os meios *densos* nos quais a hipótese anterior deixa de ser válida. Um critério aproximado para distinguir uns meios de outros baseia-se no número de átomos, N_λ contidos em um volume λ^3 . Se tal número é pequeno, $N_\lambda \sim 1$ o

⁵Ver Apêndice I

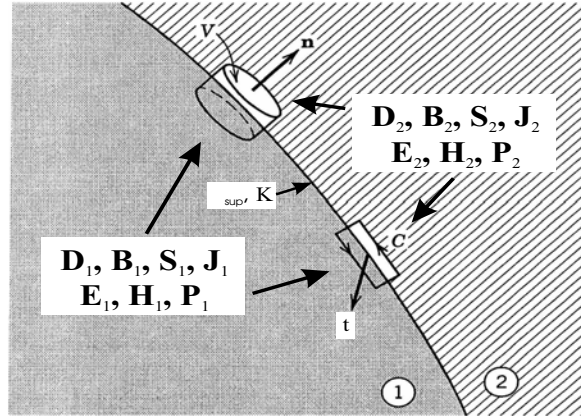


Figura 2.1 Diagrama esquemático de uma superfície de fronteira entre dois meios. É suposto que na região de fronteira existem densidades idealizadas de carga σ_{sup} e corrente $\mathbf{K}$. O volume V é um cilindro de altura pequena, metade em um meio e metade no outro, com a normal $\mathbf{n}$ apontando na direção do meio 1 para o meio 2. A curva retangular C está também metade em um meio e metade no outro e está orientada de forma tal que a normal ao plano que define é tangente à superfície de fronteira.

meio é opticamente diluído, e se é grande, $N_\lambda \gtrsim 10^3$ o meio é opticamente denso.

A solução geral do problema do espalhamento da luz por meios densos é complicada, dado que é necessário ter em conta a interação (acoplamento) entre todas as cargas presentes na porção de material considerada através das ondas secundárias emitidas por cada uma delas. O problema foi resolvido para um meio cristalino estático por Ewald em 1912 [32] e para um meio contínuo por Oseen em 1915 [33]. Dentro da eletrodinâmica clássica a teoria de Ewald-Oseen dá a visão mais profunda da óptica nos meios densos. Desde este ponto de vista, a simples transmissão da luz através da atmosfera ou através da janela é um complicado processo de absorção e espalhamento. Mas justamente devido à complexidade deste método, na maioria dos casos práticos resulta mais útil, e desde logo mais simples, a aproximação que se consegue com as Equações de Maxwell Macroscópicas. Nesse sentido é que serão utilizadas as condições de fronteira que serão deduzidas nesta seção. Serão válidas sempre que aplicadas a problemas onde as irregularidades entre os meios sejam menores que o comprimento de onda utilizado.

Para a dedução das condições de fronteira parte-se das componentes de Fourier das Equações de Maxwell Macroscópicas, Eqs. (2.5). Estas são equações diferenciais que se aplicam local-

mente a cada ponto no espaço-tempo. Por meio do Teorema da Divergência e do Teorema de Stokes podem ser levadas à sua forma integral. Então, escolhendo apropriadamente um volume de integração definido na fronteira de dois meios materiais genéricos, como mostra a Fig. 2.1 e usando um processo limite estas tomam a forma [34]

$$(\mathbf{D}_2(\omega) - \mathbf{D}_1(\omega)) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_{sup}, \quad (2.10a)$$

$$(\mathbf{B}_2(\omega) - \mathbf{B}_1(\omega)) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (2.10b)$$

$$(\mathbf{E}_2(\omega) - \mathbf{E}_1(\omega)) \times \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad (2.10c)$$

$$(\mathbf{H}_2(\omega) - \mathbf{H}_1(\omega)) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{K}, \quad (2.10d)$$

sendo $\hat{\mathbf{n}}$ um vetor unitário na direção normal à fronteira apontando do meio 1 para o meio 2, σ_{sup} uma possível densidade superficial de carga, $\mathbf{K}$ uma possível densidade superficial de corrente tangencial à superfície, e os sub-índices $i = 1, 2$ indicam cada um dos meios considerados.

A leitura destas equações nos diz que tanto as componentes normais de $\mathbf{B}$ quanto as tangenciais de $\mathbf{E}$ são contínuas na fronteira entre dois meios enquanto que as componentes tangenciais de $\mathbf{D}$ e as normais de $\mathbf{H}$ possuem uma descontinuidade relacionada com densidades superficiais de carga e corrente respectivamente. Tais densidades superficiais só têm significado matemático, não estão presentes na natureza, e foram consideradas só por apego ao rigor matemático [35].

2.2 Conservação da Energia, Momento e Momento Angular dos Campos Eletromagnéticos

2.2.1 Conservação da energia

As Equações de Maxwell, como é sabido, possuem implicitamente todas as quantidades energéticas e dinâmicas necessárias para uma completa interpretação da Teoria Eletromagnética. Nesta subseção abordaremos a questão da conservação da energia eletromagnética nos meios materiais. Diferentemente de outras abordagens aqui proporemos uma equação deduzida das Equações de Maxwell Macroscópicas e a partir daí faremos a interpretação de cada termo sem entrar em discussões sobre campos homogêneos ou inhomogêneos [36] os quais pareceriam não ter sentido a nível clássico. Essa linha de raciocínio permitirá nas próximas subseções achar equações nunca antes deduzidas e que podem ser carregadas de conteúdos dinâmicos.

Consideremos a Eq. (2.4a) multiplicada escalarmente por $\mathbf{H}$ e subtraímos a Eq. (2.4b) multiplicada escalarmente por $\mathbf{E}$. Fazendo uso da identidade vetorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}), \quad (2.11)$$

obtemos o conhecido Teorema de Poynting, deduzido em 1884 [37],

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \left(\mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt} + \mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right) = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.12)$$

onde foi definido o vetor $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, conhecido como vetor de Poynting.

A interpretação estrita da Eq. (2.12) não é simples e existe uma grande divergência sobre a sua aplicabilidade e extatidão [23, 36, 38]. Nós, sabendo dessas limitações, e ficando elas fora da análise desta tese, supomos válida a interpretação usualmente achada nos livros de texto [39] que é a seguinte: o lado direito corresponde ao trabalho por unidade de volume realizado

pelos campos sobre as cargas do meio. Desta forma a energia do campo passa para o meio em forma de agitação térmica, este é o chamado efeito Joule. O termo da divergência do vetor de Poynting corresponde ao fluxo de energia através de uma superfície normal à direção do vetor. Já o termo entre parênteses interpreta-se como a variação temporal da densidade de energia eletromagnética. No conjunto tem-se que qualquer fluxo de energia através de uma superfície é compensado por uma variação da densidade de energia ou por uma conversão da mesma em energia térmica por meio do efeito Joule. Notar que o termo do efeito Joule atua como um sumidouro de energia. Analogamente, se em $\mathbf{J}$ fossem considerados termos não dissipativos, por exemplo relacionados a meios de ganho, o lado direito do teorema de Poynting interpretaria-se como uma fonte de energia.

Lembrando a definição das quantidades $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ através das Eqs. (2.3) poderia separar-se o termo entre parênteses na Eq. (2.12) tem uma parte referida aos campos fundamentais e outra aos induzidos no meio. Assim pode se interpretar o fluxo de energia através de uma superfície como sendo compensado por uma variação temporal da densidade de energia dos campos eletromagnéticos do vácuo ou sendo utilizado tanto para converter essa energia em calor quanto para polarizar e/ou magnetizar o meio.

Para estudar a continuidade do vetor de Poynting na fronteira entre dois meios, devemos considerar apropriadamente um volume de integração, como o da Fig. 2.1. Assim aplicando o teorema da divergência à Eq. (2.12), supondo que existe uma densidade superficial de corrente $\mathbf{K}$ paralela à superfície, e aplicando um processo limite temos

$$(\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.13)$$

sendo $\hat{\mathbf{n}}$ um vetor unitário na direção perpendicular à superfície que separa os meios. Desta equação vemos então que para meios que possuem uma condutividade finita ($\mathbf{K} \neq 0$) necessariamente a componente normal do vetor de Poynting deve ser contínua.

Usando o fato de que os campos considerados possuem transformadas de Fourier, calcu-

lamos a média temporal da Eq. (2.12). Para isso lembremos que o produto das funções é igual à transformada da convolução das transformadas. Também, como demonstrado no Apêndice I, usamos que o valor médio da transformada de uma convolução é igual à integral da parte real do produto de uma das transformadas pelo conjugado da outra. Contudo da Eq. (2.12) temos para cada componente de Fourier dos campos envolvidos

$$\nabla \cdot \text{Re}\{\mathbf{S}_C\} + \text{Im}\{\omega \mathbf{D}(\omega) \cdot \mathbf{E}^*(\omega)\} + \text{Im}\{\omega \mathbf{B}(\omega) \cdot \mathbf{H}^*(\omega)\} = -\text{Re}\{\mathbf{J}(\omega) \cdot \mathbf{E}^*(\omega)\}, \quad (2.14)$$

onde foi definido $\mathbf{S}_C = \mathbf{E}(\omega) \times \mathbf{H}^*(\omega)$ [40]. Embora, pelo tipo de relações constitutivas aqui consideradas (ϵ_t , μ_t e σ_t reais) esta expressão se simplifica para

$$\nabla \cdot \text{Re}\{\mathbf{S}_C\} = -\sigma_t |\mathbf{E}(\omega)|^2. \quad (2.15)$$

Desta última equação vemos que na média cada componente de Fourier do vetor de Poynting ao se propagar é afetada pelas perdas por efeito Joule no meio. Aquelas variações temporais da densidade de energia usadas para polarizar/magnetizar o meio têm um caráter conservativo e portanto a sua média dá zero. Este resultado será de muita utilidade para a interpretação das equações do Formalismo S.

Antes de finalizar esta subseção, vale a pena comentar um caso interessante desta última expressão. Consideremos campos que se propagam em um meio com $\sigma_t = 0$ e que satisfazem $\nabla_T \text{Re}\{\mathbf{S}_{C_T}\} = 0$, sendo T a parte correspondente às componentes transversais à direção principal de propagação. Esses campos são conhecidos como “não difrativos” [41]. A modo informativo, chamando “longitudinal” à direção principal de propagação e às transversais considerando-as em coordenadas cilíndricas: azimutal e radial; existem quatro casos em que os feixes serão não difrativos [42]

- i) Campos com fluxo de energia que varia radial e azimutalmente.
- ii) Campos com fluxo de energia radial constante e que varia azimutalmente.

- iii) Campos só com fluxo de energia azimutal.
- iv) Campos só com fluxo de energia longitudinal.

Nas próximas seções veremos que talvez esta não seja a única forma de caracterizar os campos não difrativos.

2.2.2 O momento linear e a força

Como foi comentado no início da subseção anterior, as equações de Maxwell possuem toda a informação dinâmica para poder ter uma interpretação completa da Teoria Eletromagnética. Na Subsec. 2.2.1 foi deduzida a conservação da energia e nesta deduziremos a conservação do momento linear e obteremos uma forma geral, e formal, de escrevê-la em meios materiais. Analogamente à subseção anterior, procuraremos uma equação deduzida das Equações de Maxwell Macroscópicas e faremos a interpretação de cada termo. Diferentemente de outros textos, aqui não faremos nenhuma pre-suposição da forma funcional que devem ter tanto o momento linear quanto a força eletromagnética ou o tensor de esforço que aparecem na conservação. A separação de cada termo será feita de uma forma matematicamente consistente. Historicamente existe uma controvérsia em relação à forma correta de escrever o momento linear⁶ em um meio material. Dentre outras, as duas formas mais conhecidas são a de Minkowski e a de Abraham [22]. Nosso tratamento prediz que o momento linear coincide com aquele de Minkowski mas, de forma geral, é necessário aceitar uma modificação na força eletromagnética e o tensor de esforços. Embora, quando considerados meios lineares, recuperam-se as conhecidas expressões da força de Lorentz e o tensor de esforços de Maxwell.

Nossa dedução começa então, calculando $\mathbf{D} \times \text{Eq.(2.4a)} - \text{Eq.(2.4b)} \times \mathbf{B}$, assim temos:

$$\partial_t (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (2.16)$$

⁶Estritamente é *densidade de momento linear*, mas será omitido o termo *densidade* a fim de não sobrecarregar o texto. Do mesmo jeito será feito com a densidade de força eletromagnética e as densidades de momento angular (total, orbital e de *spin*).

Com ajuda da identidade vetorial

$$(-\mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}))_i = \nabla_j (a_i b_j - \delta_{ij} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\nabla_i \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} - a_i \nabla \cdot \mathbf{b}, \quad (2.17)$$

onde ∇_j representa a componente j do operador diferencial euclidiano, podemos escrever

$$F_{mec_i}^L + \partial_t P_{ele_i} = \nabla_j T_{ij}^L, \quad (2.18)$$

sendo cada termo dado por

$$\mathbf{P}_{ele} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}, \quad (2.19)$$

$$T_{ij}^L = E_i D_j + H_i B_j - \delta_{ij} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{X}_E \cdot \mathbf{Y}_D - \mathbf{X}_H \cdot \mathbf{Y}_B), \quad (2.20)$$

$$F_{mec_i}^L = \rho E_i + (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_i - V_{E_i} - V_{H_i} \quad (2.21)$$

onde

$$\nabla_i (\mathbf{X}_E \cdot \mathbf{Y}_D) = [(\nabla_i \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E}]_{=\nabla}, \quad (2.22)$$

$$V_{E_i} = [(\nabla_i \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E}]_{\neq \nabla}, \quad (2.23)$$

e analogamente para $\mathbf{X}_H$, $\mathbf{Y}_B$, e $\mathbf{V}_H$; sendo que $= \nabla$ significa “a parte da expressão que pode se escrever como derivada do produto”, obviamente $\neq \nabla$ representa o caso contrário.

A Eq. (2.18) é o principal resultado desta seção. Dela pode se ler que, nos meios materiais em geral, a conservação do momento linear eletromagnético é idêntica à do vácuo, mas com a expressão do momento linear, a força e o tensor de esforços dados pelas Eqs. (2.19), (2.20), e (2.21), respectivamente. O critério de separação usado foi o seguinte: os termos contidos em derivadas temporais foram agrupados como momento linear eletromagnético; os termos que podem ser escritos como divergência de algum tensor foram colocados dentro do tensor

de esforços; os restantes foram agrupados dentro da força eletromagnética. Essa parece a forma mais natural de separá-los já que respeita o comportamento espaço-temporal de cada um: as variações temporais do momento linear são contrabalançadas pela aparição de uma força mecânica que atua sobre o volume a considerar e que pode ser calculada pelas contribuições de superfície através do tensor de esforços. A introdução dos tensores $\mathbf{X}_\psi$, $\mathbf{Y}_\psi$ e $\mathbf{V}_\psi$ ($\psi = \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$) parece arbitrária mas é uma forma de manter a generalidade dos resultados e se verá que possuem um significado ainda mais profundo já que tais vetores são as fontes de momento angular orbital eletromagnético.

Os resultados aqui deduzidos não serão desenvolvidos nesta tese mas foram incluídos para acompanhar o conjunto de idéias e novos pensamentos em relação ao eletromagnetismo nos meios materiais. Tais novas idéias são as que conduziram ao desenvolvimento do Formalismo S que será detalhado no capítulo seguinte. Por enquanto continuamos a desenvolver conceitos desde novos pontos de vista, que complementarão os deduzidos na presente subseção. Nesse sentido, na seguinte subseção apresentaremos equações que sustentarão a definição aqui encontrada para o momento linear eletromagnético.

2.2.3 As equações do momento linear e o momento angular eletromagnético

Como foi comentado na subseção anterior, o momento linear eletromagnético é um tópico ainda em discussão, portanto mais discutido é ainda o fato de como se comporta frente a distribuições de carga ou como este depende dos campos eletromagnéticos. Também nada se tem dito em relação à continuidade dele na fronteira entre dois meios. Todas essas questões serão respondidas semi-quantitativamente nesta subseção e, uma vez sustentada a definição do momento linear e o seu comportamento, entraremos na análise do momento angular eletromagnético.

Analogamente às seções anteriores calculamos $\mathbf{B}$ Eq.(2.4d) – $\mathbf{D}$ Eq.(2.4c), e depois de um

pouquinho de álgebra temos

$$\nabla \times \mathbf{P}_{ele} = -\rho \mathbf{B} + (\mathbf{D} \cdot \nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{D}. \quad (2.24)$$

Esta equação dá conta do comportamento do momento linear tanto frente a distribuições de carga quanto a campos com distribuições espaciais não uniformes. As distribuições de carga acoplam-se com a indução magnética do feixe para ser fontes de rotacionais do momento linear do campo. Também quando um dos campos induzidos possui dependências espaciais na direção do outro eles atuam como fontes de rotacionais do momento linear. Notar, embora, que as densidades de correntes não apresentam efeito nenhum sobre o momento linear do campo eletromagnético. Note-se que, também para o momento linear, existe uma simetria de *gauge* do tipo da que aparece com o vetor de Poynting, já que a Eq. (2.24) não muda se for adicionado ao momento linear o gradiente de uma função arbitrária. Embora, entendemos que tal simetria carece de sentido físico, já que não possui um carácter fundamental como as presentes nos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

Da mesma forma que nas subseções anteriores, considerando um volume como o da Fig. 2.1 e aplicando o teorema de Stokes, podemos estudar o comportamento do momento linear na fronteira entre dois meios. Supondo a existência de uma distribuição superficial de carga σ_{sup} , temos:

$$(\mathbf{P}_{ele2} - \mathbf{P}_{ele1}) \times \hat{\mathbf{n}} = \sigma_{sup} \mathbf{B}, \quad (2.25)$$

onde, como sempre, $\hat{\mathbf{n}}$ representa um vetor unitário na direção normal à fronteira entre os dois meios. Desta última equação se observa, portanto, que na ausência de uma densidade superficial de carga a componente tangencial do momento linear eletromagnético é conservada.

É interessante destacar que para meios lineares isotrópicos o momento linear eletromagnético é proporcional ao vetor de Poynting. Então, nesses meios as Eqs. (2.12) e (2.24) impõem

condições sobre o vetor de Poynting em relação aos campos, correntes e cargas. No entanto tais equações têm significados bem diferentes. Enquanto o teorema de Poynting, refere-se à norma do vetor de Poynting, é dizer à quantidade de energia que está fluindo numa determinada direção e quais são as fontes que aumentam ou diminuem esta energia, a Eq. (2.24) da conta da direção na qual essa energia está se propagando e quais são as fontes que podem modificar tal direção. É provável que a Eq. (2.24) também sirva para identificar campos não difrativos.

Seguindo na mesma linha de raciocínio a proposta é agora multiplicar escalarmente a Eq. (2.24) por $\mathbf{r}$, sendo $\mathbf{r}$ um vetor posição referido a algum sistema de coordenadas inercial. Depois de alguns arranjos e definindo o momento angular total do campo eletromagnético como

$$\mathbf{J}_{ele} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}_{ele}, \quad (2.26)$$

temos que a equação que determina o comportamento do mesmo é

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{ele} = \rho \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{r} \cdot (\mathbf{D} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{D}. \quad (2.27)$$

Como era de se esperar, as fontes de rotacionais do momento linear são aqui fontes de “intensidade” de momento angular. Também aqui aparece o mesmo tipo de simetria de *gauge* que no vetor de Poynting.

Como analisado até aqui, considerando apropriadamente um volume de integração na fronteira entre dois meios materiais (ver Fig. 2.1) e utilizando o teorema da divergência temos

$$(\mathbf{J}_{ele2} - \mathbf{J}_{ele1}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_{sup} \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}, \quad (2.28)$$

que nos diz que na ausência de distribuições superficiais de carga, a componente normal do momento angular eletromagnético é conservada na fronteira entre dois meios materiais.

Nos últimos anos o momento angular eletromagnético tem tido uma crescente importância

por ter sido possível desenvolver técnicas que permitem utilizar feixes de luz que possuem momento angular em pinças ópticas para interagir com partículas nanoscópicas e controlar seus movimentos [43]. Embora a crescente pesquisa nessa área, algumas questões fundamentais não foram resolvidas ainda e, portanto, serão abordadas na seguinte seção.

2.2.4 Momento angular eletromagnético: orbital e *spin*

O momento angular eletromagnético é definido segundo a Eq. (2.26). Nele estão implicitamente contidos o momento angular orbital e o de *spin*. Para visualizar isto, é comumente usado o potencial vetor $\mathbf{A}$ que surge do fato de que Eq. (2.4c) está igualada a zero. Assim temos que a indução magnética pode ser escrita como

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.29)$$

e é deste fato que surgem as teorias de *gauge* do eletromagnetismo.

Substituindo esta expressão na Eq. (2.26), supondo que temos vácuo e integrando a todo o espaço, e supondo também que os campos estão localizados no espaço, temos [44, 45]

$$\mathbf{J}_{eleT} = \epsilon_0 \int \mathbf{E} \times \mathbf{A} \, d\mathbf{r} + \epsilon_0 \int E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j \, d\mathbf{r}, \quad (2.30)$$

onde o primeiro termo do lado direito da expressão é interpretado como o momento angular de *spin* do campo eletromagnético, devido a que ele não depende da escolha do sistema de referência. O segundo termo é identificado com o momento angular orbital, já que este depende da escolha do sistema de referência e principalmente pela presença do operador momento angular orbital $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \nabla$. Assim é usualmente entendido o momento angular eletromagnético.

Outras expressões para o momento angular eletromagnético podem ser encontradas na literatura [46] sem a necessidade de apelar aos campos de *gauge*. Mas elas baseiam-se na local-

ização espaço-temporal dos campos eletromagnéticos, fato que pode não aplicar-se quando se estudam as componentes de Fourier.

Observando a Eq. (2.30) surgem algumas perguntas imediatas: são os momentos angulares de *spin* e orbital invariantes de *gauge*? Se os momentos angulares são observáveis, é razoável que se escrevam em termos do potencial vetor que não é um observável da natureza? E se os campos não estiverem localizados no espaço, ou de outra forma, se a região de interesse onde observamos o momento angular for menor que a extensão espacial dos campos em questão, quais são os efeitos de superfície do momento angular? E finalmente, a expressão anterior é válida para o vácuo, mas como é escrita na presença de densidades de cargas, correntes e/ou em meios materiais em geral?

Sobre a questão da invariância de *gauge* pode se dizer que no *gauge* de Coulomb só as componentes transversais do potencial vetor são não nulas e elas são invariantes de *gauge* [45, 47]. Mas ainda assim parece um pouco delicado pensar num observável definido em termos de não observáveis, mas essa questão pode ser resolvida pensando no momento angular de uma forma mais operacional, ou seja, pensando na média temporal do momento angular. De fato todas as observações implicam algum tipo de média temporal. Veremos, então, que dessa forma pode se evitar a questão de observar algo que não pode ser medido. Por outro lado, sobre as últimas duas questões pode se dizer que serão respondidas de forma natural no decorrer desta subseção.

Do mesmo jeito que aplicado na Subsec. 2.2.1 calculamos a média temporal da Eq. (2.26) utilizando os resultados do Apêndice I. Dessa forma escrevemos

$$\langle \mathbf{J}_{ele} \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathbf{J}(\omega) d\omega, \quad (2.31)$$

onde, com ajuda da Eq. (2.5a), temos

$$\mathbf{J}(\omega) = -\frac{1}{\omega} \mathbf{Im} \{ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times [\mathbf{D}(\omega) \times (\nabla \times \mathbf{E}^*(\omega))] \}. \quad (2.32)$$

Notar que desta forma o momento angular eletromagnético fica definido em termos de magnitudes fisicamente observáveis. A seguir, utilizando a identidade vetorial da Eq. (2.17) e o fato de que $\nabla_m(r_j - r_{0j}) = \delta_{mj}$ podemos escrever

$$\mathbf{J}(\omega) = \mathbf{J}_{O_v}(\omega) + \mathbf{J}_{O_s}(\omega) + \mathbf{J}_S(\omega), \quad (2.33)$$

como soma de três contribuições diferentes. A primeira delas é a contribuição de volume ao momento angular orbital, a segunda é a contribuição de superfície ao momento angular orbital que usualmente é desconsiderada quando o momento é integrado sobre todo o espaço e são considerados campos que se anulam no infinito, embora em meios limitados esta contribuição pode ser não desprezível. Finalmente temos a contribuição do momento angular de *spin* do campo.

Cada termo da Eq. (2.33) é escrito como

$$\mathbf{J}_{O_v}(\omega) = \frac{1}{\omega} \mathbf{Im} \left\{ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times [\mathbf{V}_{E^*(\omega)} - \rho \mathbf{E}^*(\omega)] \right\}, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{J}_{O_s}(\omega) = \frac{1}{\omega} \mathbf{Im} \left\{ \nabla_m \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{T}_m^L(\omega) \right] \right\}, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{J}_S(\omega) = \frac{1}{\omega} \mathbf{Im} \left\{ \mathbf{E}^*(\omega) \times \mathbf{D}(\omega) \right\}, \quad (2.36)$$

onde foi usado

$$\left(\mathbf{T}_m^L(\omega) \right)_k = E_k^*(\omega) D_m(\omega) - \delta_{km} \left(\mathbf{E}^*(\omega) \cdot \mathbf{D}(\omega) - \mathbf{X}_{\mathbf{E}^*(\omega)} \cdot \mathbf{Y}_{\mathbf{D}(\omega)} \right), \quad (2.37)$$

$$V_{E_i^*(\omega)} = [(\nabla_i \mathbf{D}(\omega)) \cdot \mathbf{E}^*(\omega)]_{\neq \nabla}, \quad (2.38)$$

$$\nabla_i (\mathbf{X}_{\mathbf{E}^*(\omega)} \cdot \mathbf{Y}_{\mathbf{D}(\omega)}) = [(\nabla_i \mathbf{D}(\omega)) \cdot \mathbf{E}^*(\omega)]_{=\nabla}. \quad (2.39)$$

O momento angular orbital de volume, dado pela Eq. (2.34), apresenta duas contribuições. Uma refere-se à contribuição que surge da presença de distribuições carga, através da divergên-

cia do vetor deslocamento elétrico e cuja direção é dada pelo produto vetorial entre o vetor posição e o campo elétrico. A outra contribuição provém do vetor $\mathbf{V}_{E^*(\omega)}$ e pode ser não nula ainda no vácuo e em ausência de cargas e correntes. De fato é desse termo que surge o momento angular observado em diferentes distribuições de campo elétrico e/ou feixes de luz. De forma geral um campo elétrico pode se escrever como

$$\mathbf{E}(\omega) = \left\{ \mathcal{E}_1(\mathbf{r})e^{i\phi_1(\mathbf{r})}, \mathcal{E}_2(\mathbf{r})e^{i\phi_2(\mathbf{r})}, \mathcal{E}_3(\mathbf{r})e^{i\phi_3(\mathbf{r})} \right\}, \quad (2.40)$$

supondo $\epsilon_t = cte$ e ausência de distribuições de carga temos para o momento orbital de volume

$$\mathbf{J}_{O_v}(\omega) = \frac{\epsilon_0 \epsilon_t}{\omega} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times (\nabla \phi_k(\mathbf{r})) \mathcal{E}_k^2(\mathbf{r}). \quad (2.41)$$

Desta última expressão observa-se claramente que as dependências espaciais de fase são fonte de momento angular orbital de volume. Esta observação soma-se ao fato já conhecido de que os vórtices nas distribuições espaciais de campo, isto é onde a fase do campo não está definida, são fontes de momento angular [48]. Os feixes Laguerre-Gaussianos são um bom exemplo deste último [49].

Já para o momento angular de superfície a análise não é tão simples. No vácuo, podem aparecer contribuições das componentes não diagonais do tensor $\mathbf{T}_m^L(\omega)$ se apresentarem diferenças de fase relativas e/ou contribuições através das dependências espaciais da fase dos campos.

Para o momento angular de *spin* a Eq. (2.36) diz claramente que nos meios anisotrópicos o momento angular de *spin* aparece naturalmente. Também observa-se que, em geral, todo campo com polarização elíptica possui alguma quantidade de momento angular de *spin*.

Os conceitos e pontos de vista aqui apresentados, embora alguns inéditos, ficam como matéria de futuras pesquisas, onde pretende-se aplicá-los tanto a campos em meios materiais quanto a distribuições aleatórias de campo, p.e. padrões de *speckle*, e também, porque não,

estender estes conceitos à Óptica Quântica.

O Formalismo S

Capítulo 3

Na introdução desta Tese foi destacado que, dentre os vários assuntos de pesquisa atuais, a procura de novos métodos para tratar problemas de propagação de campos eletromagnéticos é um deles. Com esse espírito é que abordamos este capítulo. Nossa análise começa descrevendo as características globais da propagação de campos eletromagnéticos em meios materiais. A seguir tomamos uma geometria específica onde vão se propagar os campos (ressonador Fabry-Perot) e procuramos analisar os aspectos gerais do problema. Na procura desses aspectos gerais tratamos o problema sem fazer aproximações nem nas equações diferenciais nem nas condições de fronteira. O custo desta exatidão e que temos que deixar de lado o conceito de onda [19], é dizer deixamos de pensar em ondas viajantes propagando-se para a “frente” e para “atrás” as quais são soluções independentes da equação de ondas e onde a constante de proporcionalidade entre a energia e o fluxo da mesma é a velocidade de propagação. Historicamente os problemas de propagação de campos eletromagnéticos são sempre tratados desde o ponto de vista das soluções ondulatórias, ainda quando os meios são não lineares e o conceito de onda deixa de ter um sentido preciso para passar a ser uma idéia “necessária” para a análise da propagação dos campos eletromagnéticos. Para poder manter o conceito de onda nos meios não lineares é necessário fazer uma análise aproximada do problema. Assim é que entra em cena a *Slowly Varying Envelope Approximation* (SVEA)¹, que supõe que a amplitude do campo tem uma dependência suave com a posição em um comprimento da ordem do comprimento de onda do campo elétrico [18]. Então, na hora de calcular as derivadas desse campo, a derivada segunda da amplitude pode ser desconsiderada quando comparada com a derivada primeira vezes o “vetor de onda” do campo. Portanto, o problema da propagação de campos eletromagnéticos dado em termos de equações diferenciais de segunda ordem com as corre-

¹também chamada de aproximação paraxial, denominação que é mais utilizada quando os campos não são ondas planas senão que têm uma distribuição transversal não uniforme da intensidade

spondentes condições de fronteira, é transformado num problema de equações diferenciais de primeira ordem com a subsequente redução do número de condições de fronteira a considerar (geralmente é desconsiderada a continuidade da componente tangencial do campo magnético). Como é sabido, essa aproximação tem uma faixa de aplicabilidade limitada e fenômenos como a bistabilidade não aparecem nas soluções nessas condições [50]. Então, nos últimos anos, tem-se um crescente interesse nas soluções onde aproximações como a SVEA não são consideradas [51]. Este último motivado porque em condições altamente não lineares a fase do campo deixa de ter uma relação linear com a coordenada de propagação de forma que a amplitude pode deixar de variar lentamente em um comprimento de onda, além disso em parte também pelo fato de que estão se conseguindo ultra-focalizar feixes de luz [52] (situação em que a SVEA não é válida) abrindo então um novo leque de problemas teóricos e experimentais para resolver. Assim é que nasce o Formalismo S [53], fazendo uma análise sem aproximações de um problema de propagação de campos eletromagnéticos, que se baseia em tratar o assunto desde um ponto de vista energético, escrevendo o problema em termos do módulo da amplitude do campo e a média temporal do vetor de Poynting. Desta forma, novos tipos de meios podem ser considerados e interpretados em termos das novas variáveis utilizadas no formalismo. Também, é desenvolvido um método que permite resolver as equações de propagação numericamente e, para um tipo particular de não linearidades, o método simplifica enormemente os cálculos (e também simplifica quando existem soluções analíticas das equações diferenciais!). Tudo isto será tratado começando pelas questões básicas da propagação de campos eletromagnéticos. Seguidamente é traçado o problema concreto a estudar, são desenvolvidas as equações de evolução e as condições de fronteira, para assim escrever as propriedades ópticas em termos do Formalismo S. Finalmente o método numérico é apresentado e analisado.

3.1 Questões básicas da propagação de campos eletromagnéticos em meios materiais

Os campos eletromagnéticos, é sabido, se propagam no vácuo. Esse fato verificado experimentalmente surge, desde um ponto de vista teórico, da possibilidade de reduzir as Equações de Maxwell Microscópicas à equação de ondas cujas soluções são ondas que se propagam em ausência de matéria. Daí que essas soluções sejam chamadas de ondas e, quando estudada a propagação de campos na matéria, também se adote o mesmo ponto de vista, ainda em situações onde o conceito de onda possa carecer de sentido. Entretanto, esse não é o único ponto de vista a adotar. A propagação de campos eletromagnéticos, será demonstrado, pode ser estudada a partir de variáveis energéticas em termos das componentes de Fourier dos campos em espaços adimensionais.

Para começar a nossa análise precisamos de fazer uma hipótese adicional. A partir daqui todos os casos estudados corresponderão a $\mu_t = 1$, quer dizer estamos considerando meios não magnéticos. Esta não é uma aproximação restritiva já que na maioria dos meios paramagnéticos e diamagnéticos, a susceptibilidade magnetica relativa é da ordem de $10^{-5} - 10^{-8}$ e portanto $\mu_{meio} \approx \mu_{vacuo}$.

O estudo da propagação de campos eletromagnéticos tanto no vácuo quanto nos meios materiais começa da mesma forma. A partir das componentes de Fourier das Equações de Maxwell Macroscópicas, calculando o rotacional da Eq. (2.5a) e substituindo na Eq. (2.5b) vezes $i\omega\mu_0$ obtemos

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\omega) = i\omega\mu_0 \mathbf{J}(\omega) + \omega^2\mu_0 \mathbf{D}(\omega). \quad (3.1)$$

Desta equação é usual calcular explicitamente o rotacional e chega-se à equação de Helmholtz (que pode ser linear ou não linear, e/ou homogênea ou inhomogênea). Tal equação é a que dá

conta da propagação das componentes de Fourier dos campos, mas, o nosso ponto de vista será diferente. Tomando o complexo conjugado desta última equação e multiplicando-a escalarmente por $\mathbf{E}$, temos para o lado esquerdo da mesma²

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}^*) &= |\nabla_j E_i|^2 - |\nabla \cdot \mathbf{E}|^2 + \nabla_i (E_i \nabla \cdot \mathbf{E}^*) - \nabla_j (E_i \nabla_j E_i^*) \\
 &= \nabla_j (E_i \nabla_i E_j^* - E_i \nabla_j E_i^*) + |\nabla_j E_i| - (\nabla_j E_i)(\nabla_i E_j^*) \\
 &= i\mu_0\omega \nabla \cdot \mathbf{S}_C + \mu_0\omega^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

A última igualdade segue a partir de

$$\begin{aligned}
 i\mu_0\omega [\mathbf{S}_C]_j = [-\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}^*)]_j &= \nabla_i (E_i E_j^*) - E_j^* \nabla \cdot \mathbf{E} - E_i \nabla_j E_i^* \\
 &= E_i \nabla_i E_j^* - E_i \nabla_j E_i^*,
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_0\omega^2 |\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*|^2 &= [|\nabla_j E_i| - \text{Re}\{\nabla_i \nabla_j (E_i E_j^*)\} + \nabla_i (E_i \nabla \cdot \mathbf{E}) - E_j^* \nabla_j (\nabla \cdot \mathbf{E})] \\
 &= [|\nabla_j E_i| - (\nabla_j E_i)(\nabla_i E_j^*)].
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Sendo então que a Eq. (3.1) pode ser transformada em

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_C + i\omega(\mathbf{D}^* \cdot \mathbf{E} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*) = -\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}, \tag{3.5}$$

que é a versão complexa do Teorema de Poynting [54]. É dizer, a questão da propagação das componentes de Fourier dos campos eletromagnéticos é equivalente a estudar o fluxo de energia das mesmas. Note-se que a parte real desta equação corresponde à média temporal do Teorema de Poynting dada pela Eq. (2.15). A parte imaginária pode-se interpretar como a conservação

²Até o final da seção será omitida a dependência explícita com a frequência ω da radiação para simplificar as expressões

da energia reativa ou armazenada. Tais variações não afetam o valor médio do fluxo de energia mas, sim, dão conta dos comportamentos de fase dos campos.

Com isto temos demonstrado a equivalência entre tratar a propagação dos campos eletromagnéticos desde um ponto de vista ondulatório (através da equação de Helmholtz) e tratá-la como o fluxo de energia dos campos (através do Teorema de Poynting Complexo). Claro está que na ausência de correntes superficiais a continuidade de S_C está garantida. O interessante deste ponto de vista, é que pode ser utilizado para resolver problemas concretos de propagação de campos eletromagnéticos como será demonstrado na próxima subseção.

Notemos no entanto, que das quatro Equações de Maxwell Macroscópicas só temos utilizado duas. Das outras, a Eq. (2.5c) é automaticamente satisfeita já que $\mathbf{B}$ é calculado a partir da Eq. (2.5a). Por outro lado da Eq. (2.5d) temos

$$\epsilon_t \nabla \cdot \mathbf{E} = -\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \nabla \epsilon_t, \quad (3.6)$$

que deve ser satisfeita conjuntamente com a Eq. (3.5).

Note-se que escrevendo explicitamente S_C , fazendo uso da Eq. (2.5a), das relações constitutivas dadas pelas Eqs. (2.9) e definindo a variável adimensional $\tilde{x}_i = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \omega x_i$ ($x_i = x, y, z$), a Eq. (3.5) escreve-se

$$\tilde{\nabla} \cdot (\mathbf{E}^* \times \tilde{\nabla} \times \mathbf{E}) - |\tilde{\nabla} \times \mathbf{E}|^2 + \epsilon_t |\mathbf{E}|^2 = -i\sigma_t |\mathbf{E}|^2, \quad (3.7)$$

onde $\tilde{\nabla}$ representa o operador diferencial tridimensional adimensional euclidiano $\tilde{\nabla} = (1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \omega)(\nabla_x \hat{i} + \nabla_y \hat{j} + \nabla_z \hat{k})$. Desta se vê claramente que uma vez suposta a existência de representação a partir das componentes de Fourier da parte temporal dos campos eletromagnéticos, a análise em termos de variáveis adimensionais aparece de forma natural. Este fato facilita o estudo da propagação dos campos onde os aspectos fundamentais da teoria adquirem principal relevância. Esta equação será a base do Formalismo S desenvolvido na

Aproximação	$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$	$\mathbf{E} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}^*)$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$
sem	$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$	$\nabla \cdot \mathbf{S}_C - i\omega \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*$	$\epsilon_t \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \epsilon_t = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$	$\nabla^2 \mathbf{E}$	$-\frac{\nabla_j (E_i \nabla_j E_i^*)}{i\mu_0 \omega} + \frac{ \nabla_j E_i ^2}{i\mu_0 \omega}$	$\mathbf{E} \cdot \nabla \epsilon_t = 0$
paraxial	$2ik e^{ikz} \nabla_z \mathbf{A} - k^2 \mathbf{E} + \nabla_T \mathbf{E}$	$\frac{k \nabla_z E ^2}{\mu_0 \omega} + \frac{k^2 E ^2}{i\mu_0 \omega}$	$\mathbf{A} \cdot \nabla \epsilon_t = 0$

Tabela 3.1 Lados direitos das Eqs. (3.1) e (3.2) e a Eq. (2.5d) para cada aproximação considerada: divergência nula e paraxial.

próxima seção.

Para finalizar esta seção, faremos uma análise sobre como ficam as equações nos diferentes pontos de vista (ondulatório e energético) para as aproximações de divergência nula e paraxial. Também calcularemos qual a quantidade conservada em cada caso e como esta se relaciona com o vetor de Poynting. Na Tabela 3.1, apresentam-se os lados direitos das Eqs. (3.1) e (3.2) e a Eq. (2.5d) para cada aproximação. Onde, no caso da aproximação paraxial se escreveu o campo como $\mathbf{E} = \mathbf{A}e^{ikz}$ e foi suposto que $\nabla_i \mathbf{A} \ll k\mathbf{A}$, $\forall i$ sendo esta a condição de paraxialidade. Ademais foi suposto que o campo satisfaz a condição de divergência nula, sendo então necessário satisfazer

$$ikA_z + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.8)$$

que implica, pela condição de paraxialidade, que $A_z \approx 0$.

Note-se da Tabela 3.1 que no caso de campos com divergência nula (na aproximação paraxial ou não), estes tem que ter uma direção ortogonal com a direção do gradiente da permissividade total do meio. Limitando assim o tipo de meios a serem considerados dentro desta aproximação. Por outro lado, se observa claramente que no caso dos campos com divergência nula o teorema de Poynting adquire uma forma um tanto complexa não obstante sob alguma condição particular pode ser utilizado e isso será explorado no Formalismo S.

Como é sabido, a parte real do vetor de Poynting complexo representa a média temporal do vetor de Poynting e, no caso de ondas propagando-se em meios não absorvedores, dá conta

Aproximação	Quantidade conservada	Vetor de Poynting Complexo
sem	$\text{Re}\{\mathbf{S}_C\}$	$\mathbf{S}_C$
$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$	$\text{Im}\{E_i^* \nabla_j E_i\}$	$\frac{1}{i\mu_0\omega} [\nabla_i (E_i E_j^*) - E_i \nabla_j E_i^*]$
paraxial	$ E ^2$	$\frac{k}{\mu_0\omega} E ^2$

Tabela 3.2 Quantidade conservadas da equação de Helmholtz e o vetor de Poynting complexo para cada aproximação.

da quantidade conservada da equação de Helmholtz. Na Tabela 3.1 comparam-se a quantidade conservada que se obtém da equação de Helmholtz em cada aproximação com o correspondente vetor de Poynting complexo. Observe-se da tabela que na aproximação paraxial a quantidade conservada e o vetor de Poynting coincidem, sendo proporcionais ao módulo ao quadrado do campo, mas note-se que só nesse caso o vetor de Poynting é proporcional ao módulo ao quadrado do campo, portanto deve ser cuidadosamente calculado em outras aproximações. Em particular, para campos com divergência nula, a expressão não é trivial e ainda mais se tem que a quantidade conservada não se corresponde com a parte real do vetor de Poynting complexo, mas sim se corresponde com a sua divergência. Finalmente, caso os campos sejam linearmente polarizados a correspondência é total para todas as aproximações.

3.2 O problema da propagação da luz em meios de faces planas e paralelas: O Formalismo S

O estudo da propagação de campos eletromagnéticos em meios de faces planas e paralelas é um tópico clássico de eletromagnetismo. Estas geometrias são conhecidas como ressoadores Fabry-Perot e apresentam apenas fronteiras na direção de propagação do campo eletromagnético sendo as direções transversais consideradas como ilimitadas. Quando o meio contido em um ressoador Fabry-Perot apresenta uma resposta não linear, comumente aparece biesta-

bilidade nas propriedades ópticas [55]. Para explicar este fenômeno, o Fabry Perot não linear (FPNL) foi modelado usando uma resposta não linear do tipo Kerr [56]. Assim, quando se analisa uma componente de Fourier do campo eletromagnético que se propaga em um FPNL obtém-se, nos enfoques tradicionais, uma equação de Helmholtz não linear (EHNL). Então, para obter a refletância e a transmitância resultantes é necessário achar a amplitude do campo e a fase do mesmo a partir da EHNL com as correspondentes condições de fronteira. Porém, devido à complexidade da EHNL geralmente são utilizados métodos aproximados de solução. Muitos destes métodos consideram duas ondas contra-propagantes no meio e a análise é feita considerando separadamente os efeitos em cada onda [56, 57, 58, 50]. Mas nesta situação o princípio de superposição linear não é mais válido e a separação do campo eletromagnético em duas ondas só se consegue quando são desprezados os termos de acoplamento não lineares dos campos, embora estes possam contribuir representativamente na resposta óptica do meio. Além disso, em alguns casos é aplicada a SVEA a cada onda [56, 57, 58], embora a sua validade tenha sido questionada [50] mesmo dentro deste esquema contra-propagante. Também, alguns trabalhos não consideram as condições de fronteira rigorosamente [56, 59]. Todos estes fatos motivam a procura de métodos exatos para poder estudar a física do problema quando as aproximações perdem sua validade.

Na literatura existe um trabalho, de autoria de Chen e Mills [60], onde o problema de um FPNL é resolvido exatamente considerando um meio Kerr não absorvedor. No método de resolução desenvolvido por Chen e Mills, eles supõem um campo elétrico complexo total dentro do meio, desconsiderando o conceito de ondas contra-propagantes. Com isso, derivam um sistema de duas equações acopladas para a amplitude e a fase reais do campo juntamente com as condições de fronteira gerais. Contudo, eles obtêm uma solução analítica-transcendente para a transmitância de um FPNL. Este trabalho, deixa entrever implicitamente que nos meios não lineares existe uma diferença entre a média temporal do módulo do vetor de Poynting (a intensidade de radiação eletromagnética) e o módulo quadrado do campo elétrico. Este fato nos

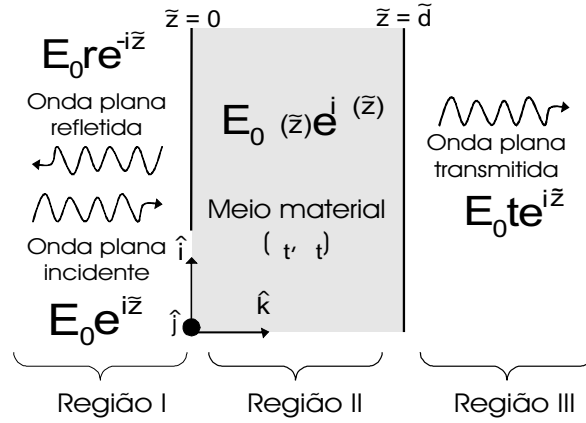


Figura 3.1 Representação esquemática do problema considerado. Uma onda plana, polarizada linearmente na direção $\hat{i}$, propagando-se desde a região I, incide normalmente em um meio material de espessura $\tilde{d}$, e cuja resposta é dada por ϵ_t e σ_t . Como consequência aparecem uma onda refletida e uma transmitida.

motivou a desenvolver o Formalismo S, que introduz uma variável de campo relacionada com a média temporal do vetor de Poynting. O Formalismo S apresenta, dentre outras, algumas vantagens importantes: permite conhecer sem passos adicionais a intensidade da radiação dentro do meio e evita aproximações como a SVEA, simplificações nas condições de fronteira, etc..

Neste ponto é válido esclarecer que o Formalismo S é complementar do método das ondas contra-propagantes sempre que seja válido o princípio de superposição linear. A vantagem do Formalismo S consiste em ser útil nas situações onde o conceito de onda perde validade, de modo que o método contra-propagante não pode ser aplicado. Todavia, o ponto de vista ondulatório tem um sentido profundo na análise da propagação de campos eletromagnéticos e portanto, no decorrer desta tese será usado sempre que possível.

3.2.1 A geometria estudada

Para entender o problema a ser tratado concentremos a nossa atenção na Fig. 3.1. Da região I, temos uma onda plana de amplitude E_0 que se propaga na direção $\hat{k}$ e incide perpendicularmente em um meio cuja resposta aos campos eletromagnéticos é dada por ϵ_t e σ_t . A espessura

do meio é $\tilde{d}$. O campo elétrico é linearmente polarizado na direção $\hat{\mathbf{i}}$. As ondas planas refletidas e transmitidas possuem amplitudes dadas por rE_0 e tE_0 , sendo r e t os coeficientes complexos de reflexão e transmissão da componente ω do espectro de Fourier do campo.

Nas regiões I e III os campos podem se escrever como

$$E_I(\omega) = E_0^\omega (e^{i\tilde{z}} + r e^{-i\tilde{z}}), \quad (3.9)$$

$$E_{III}(\omega) = E_0^\omega t e^{i\tilde{z}}. \quad (3.10)$$

Na região II, para ser absolutamente gerais e seguindo a Ref. [60], escrevemos o seguinte *ansatz* para o campo elétrico

$$E_{II}(\omega) = E_0^\omega \mathcal{E}(\tilde{z}) e^{i\phi(\tilde{z})}, \quad (3.11)$$

sendo $\mathcal{E}(\tilde{z})$ a amplitude adimensional e $\phi(\tilde{z})$ a fase do campo, ambas funções reais de $\tilde{z}$.

Desta forma fica estabelecido o problema a estudar. Na subseção seguinte deduziremos as equações de evolução dos campos desde o ponto de vista energético.

3.2.2 Equações de evolução dos campos

Antes de dedicar-nos concretamente às equações de evolução dediquemos um pouco de atenção à expressão da média temporal da componente de Fourier do vetor de Poynting em cada uma das regiões. Da Eq. (2.14), sabemos que $\langle \mathbf{S} \rangle = \text{Re}\{\mathbf{S}_C\}$, e com ajuda da Eq. (2.5a) escrevemos

$$\langle \mathbf{S} \rangle_\ell = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \text{Im} \left\{ E_\ell^*(\omega) \frac{\partial E_\ell(\omega)}{\partial \tilde{z}} \right\} \hat{\mathbf{k}}, \quad (3.12)$$

onde $\ell = I, II, III$ refere-se a cada região. Desta expressão temos que a intensidade para cada região é dada por

$$\langle S \rangle_I = I_0 (1 - |r|^2), \quad (3.13a)$$

$$\langle S \rangle_{II} = I_0 \mathcal{E}^2(\tilde{z}) \frac{\partial \phi(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}} \equiv I_0 S(\tilde{z}), \quad (3.13b)$$

$$\langle S \rangle_{III} = I_0 |t|^2, \quad (3.13c)$$

onde $I_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} E_0^2$ é a intensidade incidente. Note-se que na região II temos definido o vetor de Poynting adimensional

$$S = \mathcal{E}^2 \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{z}}, \quad (3.14)$$

que dá conta da intensidade dentro do meio e é quem caracteriza o Formalismo S. Notar que desta forma se vê explicitamente que quando ϕ não é uma função linear de $\tilde{z}$, fato que pode acontecer para meios finitos tanto lineares quanto não lineares, então S e $\mathcal{E}$ não são equivalentes.

Tendo definido a variável S , vamos agora a escrever a Eq. (3.7) para este caso em particular. Tomando por separado a parte real (vezes $\mathcal{E}^2$) e a parte imaginária, temos

$$\mathcal{E}^3 \frac{d^2 \mathcal{E}}{d\tilde{z}^2} + \epsilon_t(\tilde{z}, S, \mathcal{E}) \mathcal{E}^4 - S^2 = 0, \quad (3.15a)$$

$$\frac{dS}{d\tilde{z}} + \sigma_t(\tilde{z}, S, \mathcal{E}) \mathcal{E}^2 = 0. \quad (3.15b)$$

Destas equações claramente vemos que o problema concreto da propagação de campos eletromagnéticos em meios de faces planas e paralelas pode ser tratado inteiramente desde um ponto de vista energético sem apelar ao conceito de ondas. Como já foi dito, a Eq. (3.15b) corresponde à média temporal do teorema de Poynting, sendo σ_t a responsável pelas perdas

(em valor médio) de energia. Note-se que a Eq. (3.15a), que representa a conservação da energia armazenada no meio, é uma equação do tipo de Steen-Emarkov-Pinney [61] generalizada, devido a que o termo inhomogêneo é, na verdade, um termo não linear. Para o caso de ondas monocromáticas, linearmente polarizadas e meios inhomogêneos não absorventes já foram obtidas estas equações [62] e estudadas algumas soluções numéricas [63] mas num contexto diferente e mais restrito do que apresentado aqui. Contudo, para resolver um problema concreto é necessário ter as condições de fronteira para estas equações, e isso será feito na seguinte subseção.

3.2.3 Condições de fronteira em termos da amplitude do campo e do vetor de Poynting adimensional

Dado que no problema considerado não se tem campos longitudinais, as únicas condições de fronteira de nosso interesse são as dadas pelas Eqs. (2.10c) e (2.10d) com $\mathbf{K} = 0$ já que estamos considerando condutividades finitas. Tais condições foram cuidadosamente desenvolvidas na Ref. [60] dando

$$\left[\left(\mathcal{E} + \mathcal{E} \frac{d\phi}{d\tilde{z}} \right) \cos \phi + \frac{d\mathcal{E}}{d\tilde{z}} \sin \phi \right]_{\tilde{z}=0} = 2, \quad (3.16a)$$

$$\left[\left(\mathcal{E} + \mathcal{E} \frac{d\phi}{d\tilde{z}} \right) \sin \phi - \frac{d\mathcal{E}}{d\tilde{z}} \cos \phi \right]_{\tilde{z}=0} = 0, \quad (3.16b)$$

$$\left[\frac{d\mathcal{E}}{d\tilde{z}} \right]_{\tilde{z}=\tilde{d}} = 0, \quad (3.16c)$$

$$\left[\frac{d\phi}{d\tilde{z}} \right]_{\tilde{z}=\tilde{d}} = 1, \quad (3.16d)$$

as quais usando a definição do vetor de Poynting adimensional [Eq. (3.14)] e arranjando termos podem ser convertidas a

$$\left[(\mathcal{E}^2 + S)^2 + \left(\mathcal{E} \frac{d\mathcal{E}}{d\tilde{z}} \right)^2 - 4\mathcal{E}^2 \right]_{\tilde{z}=0} = 0, \quad (3.17a)$$

$$[S - \mathcal{E}^2]_{\tilde{z}=\tilde{d}} = 0, \quad (3.17b)$$

$$\left[\frac{d\mathcal{E}}{d\tilde{z}} \right]_{\tilde{z}=\tilde{d}} = 0, \quad (3.17c)$$

que são as condições de fronteira correspondentes às Eqs. (3.15). Notar que estas equações dizem que a igualdade entre S e $\mathcal{E}^2$ só é garantida na fronteira $\tilde{z} = \tilde{d}$ [ver Eq. (3.17b)]. Porém, isto não deve nos levar à conclusão de que são equivalentes, já que para $\tilde{z} = 0$, claramente essas quantidades são, em geral, diferentes [ver Eq. (3.17a)].

Assim, o problema da propagação dos campos é resolvido através das Eqs. (3.15) e (3.17) as quais no conjunto foram chamadas de *Formalismo S*. O destaque da função S ficará ainda mais em evidência na seguinte subseção, onde, como veremos, as propriedades ópticas resultantes do nosso problema serão todas escritas em termos de S .

3.2.4 Propriedades ópticas dos meios de faces planas e paralelas no marco do

Formalismo S

Como foi demonstrado no Cap. II, na ausência de uma densidade superficial de corrente ($\mathbf{K} = 0$), a continuidade do vetor de Poynting na fronteira entre dois meios está garantida, e portanto, também está garantida a continuidade da média temporal das componentes de Fourier do vetor de Poynting. De fato, essa é a informação importante já que a transmitância e a refletância são

definidas em função dessas quantidades. Então, das Eqs. (3.13) temos

$$R = |r|^2 = 1 - S(0), \quad (3.18a)$$

$$T = |t|^2 = S(\tilde{d}), \quad (3.18b)$$

juntando estas duas equações podemos escrever a conservação do fluxo de energia eletromagnética como

$$T + R = 1 - A, \quad (3.19)$$

onde foi definida a energia absorvida [64] como

$$A = S(0) - S(\tilde{d}). \quad (3.20)$$

Agora é que se vê claramente a relevância do vetor de Poynting adimensional, já que todas as propriedades ópticas do meio podem ser escritas através dos valores de S na fronteira do mesmo.

Quando interessam a média temporal da refletância, transmitância ou energia absorvida de campos eletromagnéticos não monocromáticos, e não de alguma de suas componentes de Fourier, pode se demonstrar que esses observáveis são dados por

$$\langle R \rangle = \frac{1}{\int |E_0^\omega|^2 dw} \int |E_0^\omega|^2 R dw, \quad (3.21a)$$

$$\langle T \rangle = \frac{1}{\int |E_0^\omega|^2 dw} \int |E_0^\omega|^2 T dw, \quad (3.21b)$$

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\int |E_0^\omega|^2 dw} \int |E_0^\omega|^2 A dw. \quad (3.21c)$$

3.3 Um método para resolver numericamente as equações do Formalismo S

Desde o ponto de vista matemático o Formalismo S produz um sistema de equações acopladas, não lineares com condições de fronteira mistas. Fato que faz com que as soluções completamente analíticas existam em poucos casos. As vezes, ainda que obtendo uma solução analítica para as equações diferenciais, as condições de fronteira ficam expressas de forma transcendente sendo necessário utilizar métodos numéricos para poder resolvê-las. Nesta seção apresentamos um método que permite resolver numericamente as equações do Formalismo S através de, por exemplo, o conhecido algoritmo de Runge-Kutta.

Para poder desenvolver o método fazemos uso das propriedades das variáveis de campo S e $\mathcal{E}$. Pela definição delas se tem que $0 < S, \mathcal{E} < 1$ portanto a condição de fronteira dada pela Eq. (3.17b) pode se escrever como

$$[S]_{\tilde{z}=\tilde{d}} = m \quad (3.22a)$$

$$[\mathcal{E}^2]_{\tilde{z}=\tilde{d}} = m \quad (3.22b)$$

para algum m , tal que $0 < m < 1$. Desta forma junto com a condição de fronteira dada pela Eq. (3.17c) poderiam se resolver numericamente as equações do Formalismo S. O método conclui com a procura do m que faz satisfazer a condição de fronteira para $\tilde{z} = 0$, Eq. (3.17a).

Com esse método, simplifica-se enormemente o esforço necessário para resolver as equações do Formalismo S, principalmente quando a resposta do meio é não linear. Além disso, existe um tipo particular de não linearidades que torna o método ainda mais interessante. Suponhamos que $\epsilon_t = f(\tilde{z}, \gamma S, \gamma \mathcal{E}^2)$ e $\sigma_t = g(\tilde{z}, \gamma S, \gamma \mathcal{E}^2)$ todas dependendo do mesmo parâmetro não linear (a dependência não necessariamente tem que ser simultânea num problema dado). Com estas não linearidades podem se definir novas variáveis de campo, $u = \sqrt{\gamma} \mathcal{E}$ e $v = \gamma S$ de

forma que as Eqs. (3.15), transformam-se em

$$u^3 \frac{d^2 u}{d\tilde{z}^2} + \epsilon_t(\tilde{z}, v, u) u^4 - v^2 = 0, \quad (3.23a)$$

$$\frac{dv}{d\tilde{z}} + \sigma_t(\tilde{z}, v, u) u^2 = 0, \quad (3.23b)$$

e as condições de fronteira ficam como

$$[v]_{\tilde{z}=\tilde{d}} = m' \quad (3.24a)$$

$$[u^2]_{\tilde{z}=\tilde{d}} = m' \quad (3.24b)$$

$$\left[\frac{du}{d\tilde{z}} \right]_{\tilde{z}=\tilde{d}} = 0, \quad (3.24c)$$

onde $0 < m' < \gamma$. De forma que as equações do Formalismo S podem ser resolvidas independentemente do parâmetro não linear. Fazendo a mesma mudança de variáveis a Eq. (3.17a) fica

$$\left[(u^2 + v)^2 + \left(u \frac{du}{d\tilde{z}} \right)^2 \right]_{\tilde{z}=0} = 4\gamma u^2, \quad (3.25)$$

que pode se utilizar para obter, por exemplo, o valor de γ se foi fixada a espessura do meio. Notar que desta forma não é necessário “procurar” um valor de m' que satisfaça a Eq. (3.25), senão que dado m' existe um γ tal que a Eq. (3.25) é satisfeita e então, tendo γ pode se recuperar $S = v/\gamma$ e obter as propriedades ópticas do meio.

Notar que o método pode se usar ainda existindo solução analítica das equações diferenciais e a Eq. (3.25) pode ser utilizada tanto para achar γ se fixada $\tilde{d}$ quanto ao inverso. No próximo capítulo este método será amplamente aplicado.

Aplicações do Formalismo S

Capítulo 4

Neste capítulo nos dedicamos a estudar as propriedades ópticas de diferentes meios mediante o Formalismo S. Grande ênfase será dada ao fato de que, ainda nos meios lineares, a média temporal do vetor de Poynting e o módulo quadrado da amplitude do campo elétrico são diferentes. Por isso começamos na Sec. 4.1 com o estudo de meios lineares [65] na procura das fontes dessas diferenças e procuramos quais são as conseqüências quando os resultados do Formalismo S são aplicados a dois casos particulares: a comparação com a Lei de Beer e o estudo de meios com permissividade negativa. Na Sec. 4.2, como conseqüência também da diferença entre S e $\mathcal{E}^2$, introduzimos um novo tipo de meio não linear: o *meio Poynting* [53]. Fazemos uma análise comparativa com os meios Kerr e estudamos as propriedades de simetria que deveria satisfazer um material que possuísse uma não linearidade tipo-Poynting. Tendo estabelecido as diferenças e aproveitando a vantagem de poder estudar não linearidades dependentes da média temporal do vetor de Poynting é que na Sec. 4.3 estudamos os meios com densidades de portadores de carga foto-induzida [66]. Finalmente, e para fechar o leque de meios considerados, na Sec. 4.4 estudamos as propriedades de meios saturáveis tipo-Kerr e tipo-Poynting [67].

4.1 Análise dos meios lineares

É um fato conhecido que quando uma onda plana se propaga através de um meio infinito, a média temporal do vetor de Poynting é equivalente (proporcional) ao módulo ao quadrado da amplitude do campo [68]. Esta afirmação é geralmente aceita inclusive se os campos estão se propagando em meios finitos. O método das ondas contra-propagantes não ressalta a possível não equivalência das anteriores quantidades devido a que utiliza amplitudes e fases como variáveis de campo. No entanto, com o Formalismo S demonstramos que a fase pode ser substituída pela média temporal do vetor de Poynting como variável de campo. Então assim, a média temporal do vetor de Poynting e o módulo ao quadrado da amplitude de campo podem ser monitorados simultaneamente dentro do meio. Desta forma, as causas que levam à não equivalência se manifestam naturalmente neste marco de estudo.

O espírito desta seção é aplicar o Formalismo S para estudar as propriedades ópticas de dielétricos e absorvedores lineares para complementar os já conhecidos resultados do método das ondas contra-propagantes. O Formalismo S apresenta, em forma direta, como a não equivalência está relacionada com a dinâmica da superposição das ondas que viajam em direções opostas, fato só possível em meios finitos. Contudo, a transmitância exata é comparada com a da Lei de Beer, comumente usada em experimentos. Na análise foram achadas diferenças apreciáveis nas propriedades ópticas para alguns valores dos parâmetros envolvidos. Também, a refletância de meios com permissividade positiva e negativa foram consideradas e aparecem resultados interessantes quando consideramos permissividades negativas e pouca absorção.

Lembrar que quando o princípio de superposição é válido o Formalismo S não substitui o método das ondas contra-propagantes. Todavia, a idéia desta seção é usar o Formalismo S como método alternativo para deixar entrever as implicações conceituais e práticas que permanecem ocultas quando o método convencional é usado.

4.1.1 Relações constitutivas e soluções das equações do Formalismo S

Os dielétricos e absorvedores lineares possuem as relações constitutivas mais simples a considerar, mas também necessariamente as primeiras a ter em conta. Matematicamente a permissividade e a condutividade se escrevem

$$\epsilon_t = \epsilon_r = cte, \quad (4.1a)$$

$$\sigma_t = \sigma_r = cte. \quad (4.1b)$$

Introduzindo então estas constantes nas Eqs. (3.15) e resolvendo com as condições de fronteira dadas pelas Eqs. (3.17) obtém-se

$$S(\tilde{z}_r) = 2 \frac{\alpha_+^2 \cosh[\alpha_- \tilde{d}(\tilde{z}_r - 1)] - \alpha_+(\xi + 1) \sinh[\alpha_- \tilde{d}(\tilde{z}_r - 1)] + \dots}{[\alpha_+^2 + (\xi + 1)^2] \cosh(\alpha_- \tilde{d}) + 2\alpha_+(\xi + 1) \sinh(\alpha_- \tilde{d}) + \dots} \\ \frac{\dots + \alpha_-^2 \cos[\alpha_+ \tilde{d}(\tilde{z}_r - 1)] - \alpha_-(\xi - 1) \sin[\alpha_+ \tilde{d}(\tilde{z}_r - 1)]}{\dots + [\alpha_-^2 - (\xi - 1)^2] \cos(\alpha_+ \tilde{d}) + 2\alpha_-(\xi - 1) \sin(\alpha_+ \tilde{d})}, \quad (4.2a)$$

$$\mathcal{E}^2(\tilde{z}_r) = 4 \frac{(1 + \xi) \cosh[\alpha_- \tilde{d}(\tilde{z}_r - 1)] - \alpha_+ \sinh[\alpha_- \tilde{d}(\tilde{z}_r - 1)] + \dots}{[\alpha_+^2 + (\xi + 1)^2] \cosh(\alpha_- \tilde{d}) + 2\alpha_+(\xi + 1) \sinh(\alpha_- \tilde{d}) + \dots} \\ \frac{\dots + (\xi - 1) \cos[\alpha_+ \tilde{d}(\tilde{z}_r - 1)] + \alpha_- \sin[\alpha_+ \tilde{d}(\tilde{z}_r - 1)]}{\dots + [\alpha_-^2 - (\xi - 1)^2] \cos(\alpha_+ \tilde{d}) + 2\alpha_-(\xi - 1) \sin(\alpha_+ \tilde{d})}, \quad (4.2b)$$

onde $\tilde{z}_r = \tilde{z}/\tilde{d}$, $\xi = |n_c^2|$, e $\alpha_{\pm} = 2_{Im}^{Re}\{n_c\}$ sendo n_c o índice de refração complexo dado por $n_c = \sqrt{\epsilon_r + i\sigma_r}$. Os detalhes do método de resolução não foram inclusos porque fogem do assunto central da presente seção. O leitor interessado pode consultar o Apêndice II.

A solução das equações para um dielétrico perfeito ($\sigma_r = 0$) pode se obter facilmente das

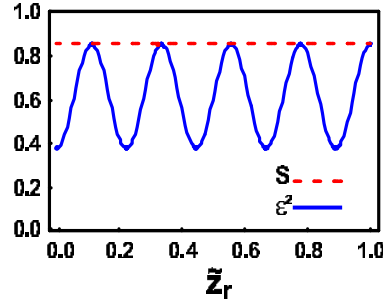


Figura 4.1 Evolução espacial do vetor de Poynting adimensional S e o módulo ao quadrado do campo $\mathcal{E}^2$ para um dielétrico linear. Claramente se observa que S é uma constante e $\mathcal{E}^2$ é uma função oscilatória. Os parâmetros utilizados são $\sqrt{\epsilon_r} = 1.5$, $\tilde{d} = 3\pi$.

anteriores expressões notando que, neste caso, $\alpha_- = 0$ e que $\xi = \epsilon_r$. Contudo se tem

$$S(\tilde{z}_r) = \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)}, \quad (4.3a)$$

$$\mathcal{E}^2(\tilde{z}_r) = \frac{1 - (4F/(\epsilon_r - 1)) \sin^2[(1 - \tilde{z}_r)\delta/2]}{1 + F \sin^2(\delta/2)}, \quad (4.3b)$$

onde $F = (\epsilon_r - 1)^2/(4\epsilon_r)$ é conhecida como coeficiente de *finesse*, e $\delta = 2\tilde{d}\sqrt{\epsilon_r}$.

Nas seções seguintes faremos a análise destas expressões tentando entender o papel que jogam as fronteiras do meio na não equivalência entre S e $\mathcal{E}^2$.

4.1.2 Análise de dielétricos perfeitos

Nesta seção nos dedicaremos brevemente à análise das Eqs. (4.3). Como era de se esperar da Eq. (3.15b), S é uma constante cujo valor é fixado pelas condições de fronteira. Como é bem sabido, esta constante representa a transmitância de um Fabry-Perot dielétrico linear com incidência normal, é dizer, a bem conhecida fórmula de Airy [69].

As Eqs. (4.3) mostram explicitamente que a intensidade é não equivalente ao módulo ao quadrado do campo. A Fig. 4.1 mostra essa não equivalência. A intensidade é uma constante dentro do meio, enquanto o módulo ao quadrado do campo é uma função oscilatória. Note-se

que $\mathcal{E}^2$ e S só são iguais quando $\tilde{z}_r = 1 - 2m\pi/\delta$ com $m \in \mathbb{N}$. Observe-se também que, quando $\tilde{d} = m'\pi/\sqrt{\epsilon_r}$ ($m' \in \mathbb{N}$), $\delta = 2m'\pi$, então $\mathcal{E}(0) = S = 1$ alcançam seus valores máximos ($T = 1$ e $R = 0$). Neste caso o meio comporta-se como uma *placa de fase* transmitindo toda a energia incidente. Quando $\delta = (2m' + 1)\pi$ o módulo ao quadrado do campo e a média temporal do vetor de Poynting adquirem seus mínimos valores dados por $\mathcal{E}(0) = [1 - 4F/(\epsilon_r - 1)]/(1 + F)$ e $S = 1/(1 + F)$. Note-se que, quando ϵ_r aumenta, F também aumenta e o mínimo de S diminui.

Por outro lado, podemos nos perguntar: quando a média temporal do vetor de Poynting e o módulo quadrado do campo são equivalentes? A resposta surge de observar a Eq. (3.15a). Ambas quantidades serão equivalentes quando $\mathcal{E}$ for uma constante. Neste caso S e $\mathcal{E}$ relacionam-se por meio de

$$S = \sqrt{\epsilon_r} \mathcal{E}^2. \quad (4.4)$$

Este caso se corresponde com uma **única** onda plana propagando-se em um meio dielétrico [68].

4.1.3 Análise de absorvedores lineares

As soluções para a transmitância do absorvedor linear podem ser encontradas na literatura. Na referência [70], por exemplo, pode-se encontrar uma rigorosa análise sobre a transmitância e refletância de um Fabry-Perot absorvedor linear. No entanto, essa referência não se concentra na equivalência ou não entre S e $\mathcal{E}$. Além disso, com o método utilizado na Ref. [70] precisam-se de passos adicionais para obter a média temporal do vetor de Poynting e o módulo ao quadrado do campo. Por isso é vantajoso usar o Formalismo S já que usa a intensidade de radiação como variável de campo, portanto seus valores em cada ponto dentro do meio podem ser diretamente conhecidos e comparados com os do módulo ao quadrado do campo.

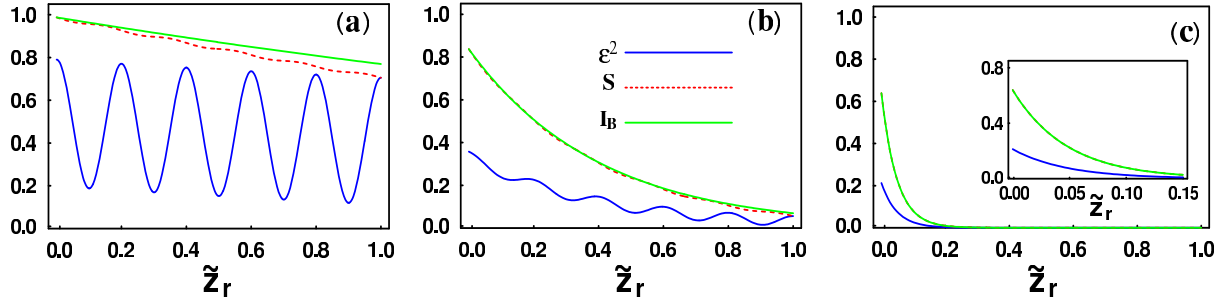


Figura 4.2 Evolução espacial do vetor de Poynting adimensional S , do módulo ao quadrado do campo $\mathcal{E}^2$, e da intensidade dada pela lei de Beer I_B para um absorvedor linear com diferentes valores da condutividade relativa: (a) $\sigma_r = 0.1$, (b) 1, (c) 10, com $\sqrt{\epsilon_r} = 2.5$, e $\tilde{d} = 2\pi$. Claramente, a não equivalência entre S e $\mathcal{E}^2$ está diretamente relacionada com o efeito da segunda fronteira.

As Eqs. (4.2) estão expostas na Fig. 4.2 para diferentes valores da condutividade relativa, confirmando que, em geral, o módulo ao quadrado do campo pode apresentar um comportamento marcadamente oscilatório, contrário com o que acontece com a intensidade. A Fig. 4.2(a) mostra a evolução espacial de ambas magnitudes para valores de condutividade σ_r relativamente baixos. Note-se que as envoltórias de S e $\mathcal{E}^2$ decrescem enquanto a coordenada espacial aumenta devido à absorção do meio. Neste caso, o campo incidente é pouco atenuado na medida que penetra no meio, fato que implica uma contribuição importante para o campo total da onda que retorna, proveniente da segunda fronteira, produzindo uma intensa superposição de ondas. Por outro lado, a Fig. 4.2(b) foi calculada para um valor intermediário de σ_r . A atenuação do campo é mais intensa que no caso anterior e a amplitude do campo adquire um valor quase nulo na fronteira $\tilde{z}_r = 1$. Mesmo assim, isto ainda permite uma superposição de ondas não desprezível, de forma que $\mathcal{E}^2$ apresenta um comportamento ligeiramente oscilatório. Portanto, a intensidade e o módulo ao quadrado do campo continuam sendo não equivalentes. Finalmente, a Fig. 4.2(c) foi representada para um valor relativamente alto de σ_r . Neste caso, a amplitude do campo é fortemente atenuada antes de alcançar a fronteira $\tilde{z}_r = 1$. Então, o meio comporta-se como se fosse semi-infinito e a média temporal do vetor de Poynting e o módulo

ao quadrado do campo devem ser equivalentes, satisfazendo [71]

$$S(\tilde{z}_r) = \frac{\alpha_+}{2} \mathcal{E}^2(\tilde{z}_r). \quad (4.5)$$

Em resumo, a Fig. 4.2 mostra que a dinâmica da superposição das ondas está diretamente relacionada com o efeito da segunda fronteira, fato que deriva na (não)equivalência entre S e $\mathcal{E}^2$.

4.1.4 Comparação da transmitância resultante do Formalismo S com a da lei de Beer

A Lei de Beer é comumente usada para calcular o coeficiente de absorção através da medida da transmitância. Esta lei dá a intensidade da radiação para $\tilde{z}_r = 1$ quando a segunda fronteira é desconsiderada [71]. Portanto, esta lei é um resultado aproximado devido a que considera só a primeira fronteira (só uma condição de fronteira) para calcular o fluxo de energia. A intensidade adimensional dada pela Lei de Beer atenua-se exponencialmente como [71]

$$I_B(\tilde{z}_r) = S(0)e^{-\alpha_- \tilde{z}_r}, \quad (4.6)$$

onde α_- caracteriza as propriedades de absorção do meio (note-se que foi usado $S(0)$ em vez de I_0 supondo que a intensidade em $z_r = 0$ é conhecida, fato que leva a diminuir as diferenças com o resultado exato). A Eq. (4.6) foi também desenhada na Fig. 4.2 com a idéia de comparar a lei de Beer e o vetor de Poynting adimensional dentro do meio. Acontece que $I_B(\tilde{z}_r)$ se afasta de $S(\tilde{z}_r)$ para uma ampla faixa de parâmetros. Assim, a transmitância exata $S(1)$ pode diferir da transmitância aproximada $I_B(1)$ usada de fato em experimentos. É claro que a diferença aparece quando a segunda fronteira medeia na dinâmica de superposição das ondas, como mostra a Fig. 4.2(a). Quando o efeito da segunda fronteira é quase desprezível [Fig. 4.2(b)] ou o meio pode ser considerado como semi-infinito [Fig. 4.2(c)], ambas intensidades $I_B(\tilde{z}_r)$ e

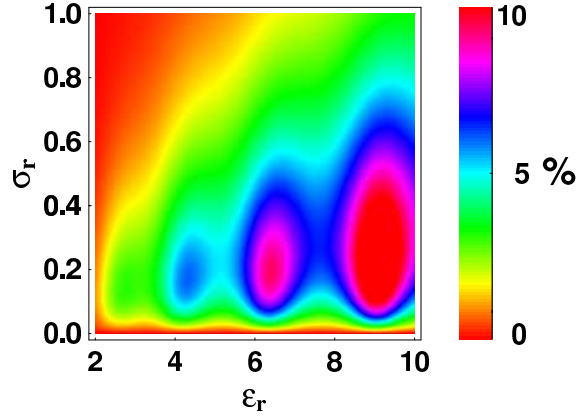


Figura 4.3 Diferencia percentual $I_B(1) - S(1)$ em função de ϵ_r e σ_r para $\tilde{d} = 2\pi$.

$S(\tilde{z}_r)$ não apresentam diferenças. Portanto, a validade desta aproximação deve ser cuidadosamente testada para cada problema em particular devido a que a diferença $S(1) - I_B(1)$ depende dos parâmetros do material: ϵ_r , σ_r e $\tilde{d}$. Na Fig. 4.3, é apresentada a diferença percentual $I_B(1) - S(1)$. Como podemos ver, existem casos onde a diferença entre as transmitâncias é de aproximadamente 10%. Esta principal diferença aparece quando o efeito da segunda fronteira é relevante, ou seja, quando a dinâmica de superposição das ondas joga um papel importante, fato que acontece para alguns valores em particular de (ϵ_r, σ_r) . Notar finalmente que a máxima diferença aparece para valores altos da permissividade e valores baixos, mas não nulos, da absorção.

4.1.5 Estudo de meios com permissividade negativa

Os meios com permissividade negativa atraíram a atenção dos cientistas faz alguns anos, quando foi indicada uma forma de construí-los [72] e isso abriu a possibilidade de também construir outros meios como os “Left-Handed Media” [73] levando a uma intensa atividade na pesquisa nessa área [74, 75, 76]. Porém, a refletância dos meios com permissividade negativa sempre foi analisada no contexto da permissividade efetiva de uma configuração microscópica dada [72, 75]. Aqui fazemos uma análise completamente macroscópica das propriedades ópticas

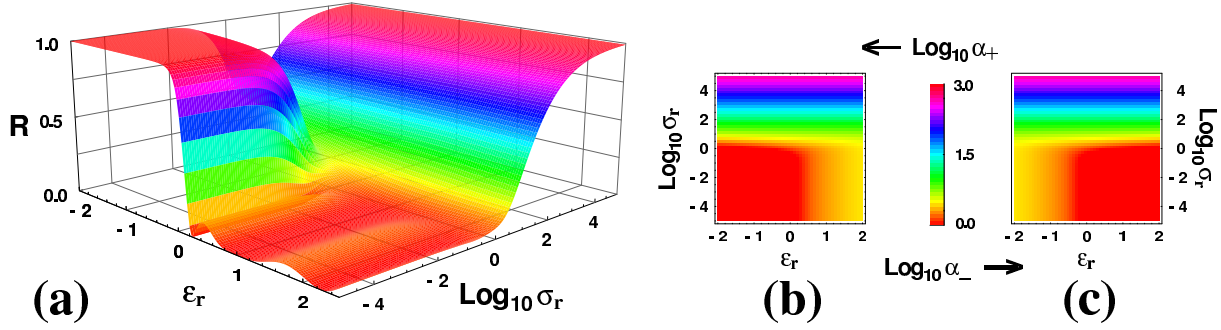


Figura 4.4 Refletância (a), $\text{Log}_{10}\alpha_+$ (b), e $\text{Log}_{10}\alpha_-$ (c) em função de ϵ_r e $\text{Log}_{10}\sigma_r$. Na refletância $\tilde{d} = 2\pi$.

de meios com permissividade positiva e negativa sem entrar nos detalhes da configuração microscópica.

Na Fig. 4.4.(a) é mostrada a refletância para valores positivos e negativos da permissividade relativa e para várias ordens de magnitude da condutividade relativa. Da observação desta figura podem se achar três regiões bem diferenciadas: (1) $\epsilon_r > 0$ e $\sigma_r < 1$; (2) $\epsilon_r < 0$ e $\sigma_r < 1$; (3) $\sigma_r > 1$. A região (1) caracteriza-se por uma refletância baixa, oscilante e cuja envolvente aumenta na medida que ϵ_r aumenta. Este é um comportamento bem conhecido [70]: a refletância de um Fabry-Perot pouco absorvedor. Por outro lado, a região (2) possui uma dependência muito particular com ϵ_r e σ_r : a refletância é praticamente um para toda a faixa de valores. Finalmente, a região (3) tem uma refletância uniforme como função de ϵ_r que cresce monotonicamente na medida que σ_r cresce, tal que no limite $\sigma_r \gg 1$, $R \approx 1$ para todo valor de ϵ_r .

Para aprofundar no entendimento do comportamento da refletância, analisamos a dependência de $\alpha_{\pm}$ com ϵ_r e σ_r . Note-se que, $\alpha_{\pm}$ dão conta das propriedades refrativas e de absorção efetiva em todas as regiões. Portanto, uma análise dessas quantidades é importante para um melhor entendimento do problema. De fato, essas quantidades determinam as características das três regiões antes mencionadas, devido a que seus valores mudam marcadamente nelas. As Fig. 4.4.(b) e 4.4.(c) apresentam α_+ e α_- , respectivamente, como função de ϵ_r e σ_r . Também, para ajudar na análise, a Tabela 4.1 apresenta os valores de $\alpha_{\pm}^2$ e R para $\sigma_r \ll (\gg) 1$. Na região

	$\epsilon_r > 0; \sigma_r \ll 1$	$\epsilon_r < 0; \sigma_r \ll 1$	$\sigma_r \gg 1$
α_+^2	$4\epsilon_r$	0	$2\sigma_r$
α_-^2	0	$4 \epsilon_r $	$2\sigma_r$
R	$\frac{F \sin^2(\delta/2)}{1+F \sin^2(\delta/2)}$	$\frac{F' \sinh^2(\delta/2)}{1+F' \sinh^2(\delta/2)}$	$1 - 2\sqrt{2}/\sigma_r$

Tabela 4.1 Valores limites para $\alpha_{\pm}^2$ e R para as três regiões mencionadas no texto. Note-se que $F' = \frac{(|\epsilon_r|+1)^2}{4|\epsilon_r|}$.

(1), $\alpha_+ \neq 0$ e $\alpha_- = 0$; na região (2) $\alpha_+ = 0$ e $\alpha_- \neq 0$; e na região (3) $\alpha_+ \approx \alpha_- \neq 0$. Então, a baixa reflexão oscilatória corresponde com a região onde α_+ predomina, é dizer, o meio comporta-se efetivamente como um dielétrico onde as oscilações são produzidas pela superposição das ondas pelo fato de existir a segunda fronteira e que resulta em um comportamento tipo Airy como mostra a Tabela 4.1. Por outro lado, é sabido que uma alta refletância é associada com altos valores de condutividade, é dizer para bons condutores. Porém, pode se ter uma alta refletância para baixos valores de σ_r quando a permissividade é negativa. Nesse caso a resposta do meio é dominada por α_- . A refletância é dada por uma função tipo Airy-hiperbólica como mostra a Tabela 4.1. Dado que $F' \sinh(\delta/2) \gg 1$ para a maioria dos valores de ϵ_r nesta região, então $R \approx 1$ e o meio possui propriedades especulares. Para a região (3), $\alpha_{\pm}$ dependem principalmente de σ_r . A resposta do meio é completamente dominada por um único parâmetro $\alpha_-^2 \approx \alpha_+^2 \approx 2\sigma_r$ com uma refletância que assintoticamente alcança a unidade. Resumindo, para a região (1) se tem uma refletância que é uma função periódica de ϵ_r , enquanto para a região (2) a refletância funcionalmente está dada por uma função tipo Airy-hiperbólica que cresce monotonicamente na medida que ϵ_r decresce, alcançando rapidamente a unidade. Note-se que, embora cada refletância tenha sido obtida calculando o limite apropriado da Eq. (4.2a), a refletância na região (2) poderia se obter daquela da região (1) trocando $\epsilon_r \rightarrow -\epsilon_r$, fato que permite dizer que o parâmetro α_+ “se faz” imaginário quando a permissividade toma valores negativos, fazendo com que o meio se comporte como um absorvedor.

Antes de finalizar esta subseção destacamos outros resultados interessantes: para $\epsilon_r = 1$,

se tem $R = 0$ devido a que o meio está “casado” com o vácuo e toda a luz é transmitida; Para $\epsilon_r = 0$ e $\sigma_r = 0$, $R = (1 + 4/\tilde{d})^{-1}$, mostrando que até mesmo neste “quase-niilismo” [77] se propaga alguma quantidade de energia eletromagnética. E finalmente, note-se que para $\epsilon_r < 0$ e $\sigma_r \approx 1$ existe uma região onde $R \approx 0.5$ mostrando que nem todo meio com permissividade negativa possui uma alta refletância, senão aqueles com $\sigma_r \ll (\gg)1$. Resultados similares para $\sigma_r \approx 1$ foram observados em meios pouco absorvedores com permeabilidade negativa [74].

4.1.6 Conclusões

O Formalismo S foi usado para estudar a propagação de ondas em meios lineares finitos. A análise claramente mostra que a não equivalência entre S e $\mathcal{E}^2$ acontece em meios finitos como consequência da segunda fronteira. O papel desta é favorecer a superposição entre as ondas que se propagam em uma e outra direção dentro do meio, fato que causa um comportamento oscilatório no módulo ao quadrado da amplitude do campo, ao contrário do que acontece com a intensidade. Quando a segunda fronteira pode ser desconsiderada, o meio pode ser tratado como semi-infinito com uma única onda se propagando tal que S e $\mathcal{E}^2$ são equivalentes. A análise também mostra que a bem conhecida intensidade dada pela lei de Beer, comumente usada para calcular a transmitância nos experimentos, poderia afastar-se significativamente do resultado exato e esta diferença é de fato produzida pelo efeito da segunda fronteira. Em consequência, a validade da aproximação deveria ser rigorosamente testada para cada problema em particular. Ademais, foram analisados meios com permissividade positiva e negativa e foram achados comportamentos bem diferenciados segundo os valores da permissividade e condutividade. Foi observado que, para baixas condutividades, meios com permissividade positiva têm um comportamento bem diferente daqueles com permissividade negativa (tendo uma refletância um pouco oscilante os primeiros e quase um para os segundos) enquanto que para altas condutividades a refletância não depende do valor da permissividade. Para valores intermediários da condutividade, a refletância pode tomar valores em torno de 0.5, mostrando que

nem todo meio com permissividade negativa possui uma alta refletância.

Ambos métodos, o contra-propagativo e o Formalismo S, deveriam ser usados complementarmente já que isso pode ajudar para ter um entendimento completo da física do problema da propagação de ondas em meios lineares finitos. Os resultados para ondas com largura de banda finita podem ser facilmente obtidos dos resultados das componentes de Fourier através das Eqs. (3.21).

4.2 Análise dos meios Poynting

Como foi mostrado através do Formalismo S e na seção anterior, a média temporal do vetor de Poynting não é, em geral, equivalente ao módulo ao quadrado do campo. Fato que implica que uma não linearidade do tipo Kerr não seria proporcional à intensidade, o que parece estar em contradição com o que se pensava até hoje. Esta afirmação conduz à seguinte questão: em um FPNL, a não linearidade é do tipo Kerr, ou é proporcional à intensidade? Devido a que esta pergunta não tem uma resposta definitiva, a última possibilidade não pode ser negada. Então, nós definimos o *meio Poynting* como aquele meio onde a não linearidade é proporcional à intensidade. Portanto, o objetivo desta seção é estudar a transmitância de um FPNL tipo-Poynting por meio do Formalismo S e compará-la com a que se tem para um FPNL tipo-Kerr. Com isto ressaltaremos a não equivalência entre a intensidade da radiação e o módulo ao quadrado do campo. Finalmente, faremos uma breve discussão sobre as propriedades de simetria dos meios Poynting visando achar possíveis materiais que possam possuir uma não linearidade desse tipo.

4.2.1 Relações constitutivas e soluções das equações do Formalismo S

4.2.1.1 Meios Kerr

O problema da propagação de campos eletromagnéticos em meios Kerr foi resolvido por Chen e Mills há quase 20 anos [60]. Nesse trabalho as propriedades ópticas dos meios Kerr foram obtidas sem aproximações por um método que foi a semente do Formalismo S. Aqui simplesmente reescreveremos a permissividade total, a condutividade total, e as soluções do Formalismo S que se obtém com elas. Portanto as características do meio Kerr não absorvedor são expressas

através das seguintes relações

$$\epsilon_t^K = \epsilon_r + \gamma \mathcal{E}^2, \quad (4.7a)$$

$$\sigma_t^K = 0, \quad (4.7b)$$

sendo ϵ_r a permitividade linear do meio e γ o coeficiente não linear. Como vemos, com o meio Kerr pode se aplicar o método descrito na Sec. 3.3. Assim, a solução das equações do Formalismo S podem se escrever

$$v(\tilde{z}_r) = v_0, \quad (4.8)$$

$$u^2(\tilde{z}_r) = I_1 + (v_0 - I_1)cn^2 \left[\frac{\tilde{d}}{\sqrt{2}}(v_0 - I_2)(1 - \tilde{z}_r) \middle| \frac{v_0 - I_1}{v_0 - I_2} \right], \quad (4.9)$$

onde $cn[a|b]$ é a função elíptica de Jacobi, e

$$I_2 = \pm \left\{ \left[\left(\epsilon_r + \frac{v_0}{2} \right)^2 + 2v_0 \right]^{1/2} \mp \left(\epsilon_r + \frac{v_0}{2} \right) \right\}. \quad (4.10)$$

Então, o método diz que fixada $\tilde{d}$, para cada v_0 dado, existe um γ que pode se obter da condição de fronteira em $\tilde{z} = 0$. Neste caso a expressão resultante para a constante não linear é¹

$$\gamma = \frac{1}{8} \left\{ [v_0^2 - u^4(0)] + 2(\epsilon_r - 1) [v_0 - u^2(0)] + 8v_0 \right\}. \quad (4.11)$$

Com este resultado pode-se então calcular a transmitância, lembrando da definição em ter-

¹Caso fixemos γ e queiramos variar $\tilde{d}$ o método tem que se pensar assim: dado $\tilde{d}$, existe um (ou vários) v_0 que pode se achar da Eq. 4.11. Nesse caso faz-se necessário utilizar métodos numéricos de resolução de equações transcendentais.

mos do vetor de Poynting adimensional $S(\tilde{z})$ [Eq.(3.18b)], temos

$$T = \frac{v_0}{\gamma}. \quad (4.12)$$

4.2.1.2 Meios Poynting

Devido à diferença observada entre a média temporal do vetor de Poynting e o módulo ao quadrado do campo é que introduzimos os meios Poynting [53] através das seguintes relações constitutivas

$$\epsilon_t^P = \epsilon_r + \gamma S, \quad (4.13a)$$

$$\sigma_t^P = 0, \quad (4.13b)$$

onde as constantes possuem o mesmo significado que para o meio Kerr.

A solução das equações do Formalismo S é simples de encontrar já que o sistema de equações diferenciais é o correspondente a um dielétrico linear, mas com a diferença de que neste caso a transmitância fica definida de forma transcendente (ver Eq. 20 em Ref. [53]). Portanto aproveitaremos o fato de que neste caso também pode se aplicar o método introduzido na Sec. 3.3 obtendo-se

$$v(\tilde{z}_r) = v_0, \quad (4.14)$$

$$u^2(\tilde{z}_r) = v_0 \left\{ 1 - \frac{\epsilon_t^P - 1}{\epsilon_t^P} \sin \left[\sqrt{\epsilon_t^P} \tilde{d}(1 - \tilde{z}_r) \right] \right\}, \quad (4.15)$$

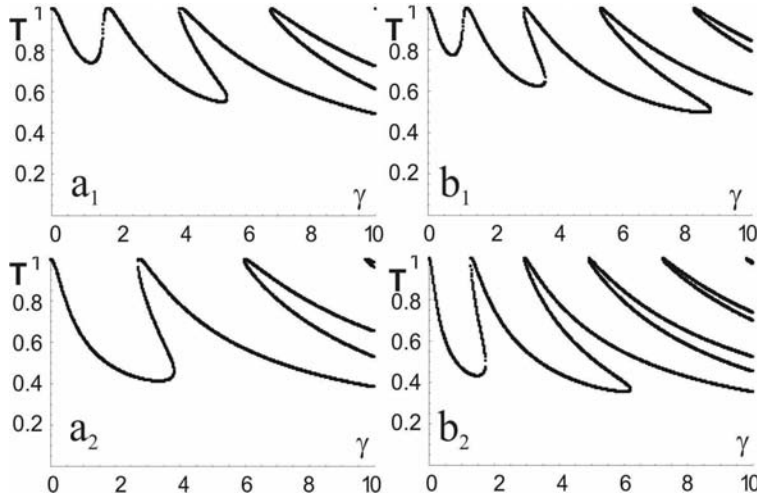


Figura 4.5 Transmitância como função do coeficiente não linear γ , para (a_i) meio Poynting, (b_i) meio Kerr com $\tilde{d} = 2\pi$. Onde para $i = 1$, $\sqrt{\epsilon_r} = 1.5$; e $i = 2$, $\sqrt{\epsilon_r} = 2.5$.

de onde γ e T podem se calcular das seguintes expressões²

$$\gamma = v_0 \left[1 + \frac{(\epsilon_t^P - 1)^2}{4\epsilon_t^P} \sin \left(\sqrt{\epsilon_t^P} \tilde{d} \right) \right], \quad (4.16)$$

$$T = \frac{v_0}{\gamma}. \quad (4.17)$$

4.2.2 Comparação das propriedades ópticas dos meios Kerr e Poynting

Nesta seção fazemos uma análise comparativa entre os meios Kerr e os Poynting, concentrando a nossa atenção na transmitância.

A Fig. 4.5 mostra T como função do coeficiente não linear γ para dois valores diferentes da permissividade linear ϵ_r . As Fig. 4.5.a_i correspondem ao meio Poynting, enquanto as Fig. 4.5.b_i ao meio Kerr. Das figuras é evidente que a transmitância de ambos meios é multiestável. À medida que ϵ_r aumenta a separação entre os picos de transmitância diminui para o meio Kerr enquanto aumenta para o Poynting. Além disso, a multiestabilidade do meio Kerr aparece para valores menores do coeficiente não linear γ . Portanto, já podemos afirmar que as diferenças

²Vale um comentário similar ao caso dos meios Kerr, caso queira se fixar γ e variar $\tilde{d}$.

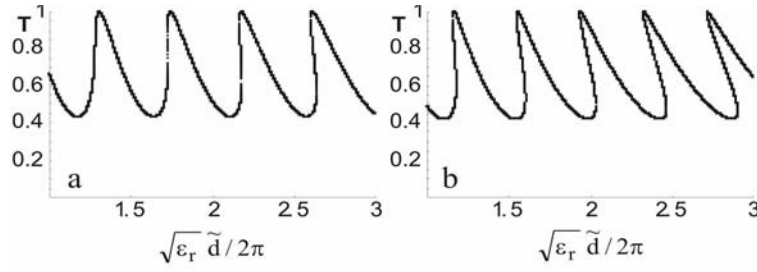


Figura 4.6 Transmitância em função de $\sqrt{\epsilon_r} \tilde{d}/2\pi$ para (a) meio Poynting, (b) meio Kerr com $\sqrt{\epsilon_r} = 2.5$ e $\gamma = 2$.

na transmitância entre ambos meios ressaltam a não equivalência entre a média temporal do vetor de Poynting e o módulo ao quadrado do campo. Também, na Fig. 4.6 apresenta-se a transmitância em função do parâmetro $\sqrt{\epsilon_r} \tilde{d}/2\pi$ para o meio Poynting (a) e o meio Kerr (b). Note-se que o desvio com relação à função tipo-Airy é mais pronunciado para o meio Kerr do que para o meio Poynting.

Apesar das diferenças apresentadas nas figuras anteriores, estes meios têm características similares (bistabilidade) o que pode levar a confusão e a uma difícil diferenciação entre um e outro. Portanto, faz-se necessário achar uma diferença significativa entre eles. Observemos então a Fig 4.7 que mostra a resposta não linear dos meios $\epsilon_t - \epsilon_r$. Dela, pode se ver que o meio Poynting tem uma resposta constante, enquanto o meio Kerr possui uma dependência periódica com a coordenada espacial relativa. Este fato implica a formação de uma rede de fase no meio

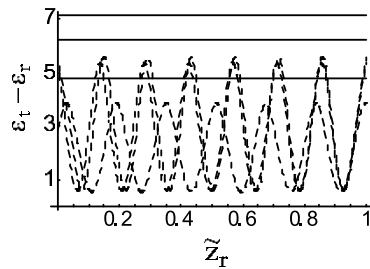


Figura 4.7 Resposta não linear do meio em função da coordenada espacial relativa para cada uma das três soluções compatíveis com as condições de fronteira. — meio Poynting; - - - meio Kerr. Os Parâmetros usados foram $\gamma = 9$, $\sqrt{\epsilon_r} = 1.5$, e $\tilde{d} = 2\pi$.

Kerr contrariamente ao que acontece no meio Poynting. Quiçá esta sutil diferença possa ser medida, e sirva como ponto de partida para diferenciar experimentalmente um meio do outro.

4.2.3 Sobre as propriedades de simetria espacial e temporal dos meios Poynting

É um fato conhecido que vários tipos de não linearidades foram preditas antes mesmo de serem observadas experimentalmente, como foi destacado, por exemplo, no trabalho pioneiro de Baranova *et al.* [78]. Naquele, com o objetivo de elucidar os requerimentos de isotropia do meio para observar novos fenômenos, os autores apontaram à necessidade de uma análise das propriedades de transformação das quantidades eletromagnéticas sob rotações, inversão espacial e temporal. Portanto, uma análise das simetrias faz-se necessária também para o meio Poynting afim de poder inferir qual material poderia possuir esta não linearidade.

A quantidade que caracteriza a resposta eletromagnética de um meio Poynting é a sua permissividade não linear ϵ_{NL}^P que tem uma dependência linear com a média temporal do vetor de Poynting $\langle \mathbf{S} \rangle$, como se vê da relação constitutiva dada pela Eq. (4.13). De uma forma geral, esta pode se escrever como

$$\epsilon_{NL_{ij}}^P = \Gamma_{ijk} \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle_k, \quad (4.18)$$

sendo $i, j, k = x, y, z$ e, explicitamente,

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle_k = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t')]_k dt', \quad (4.19)$$

onde a média temporal é tomada sobre um intervalo temporal muito maior que os tempos característicos (digamos τ) de variação dos campos eletromagnéticos, isto é $T \gg \tau$. Dado que o vetor deslocamento elétrico e o vetor de campo elétrico transformam ímpar ante inversões espaciais ($r \rightarrow -r$) e par ante inversões temporais ($t \rightarrow -t$) [79] é que necessariamente a per-

missividade (tanto linear quanto não linear) tem que transformar par ante inversões espaciais e temporais. Por outro lado a média temporal do vetor de Poynting transforma ímpar ante inversões espaciais e temporais [79], ou seja $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle \rightarrow -\langle \mathbf{S}(-\mathbf{r}, t) \rangle$ e $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle \rightarrow -\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, -t) \rangle$, respectivamente. Então, um meio que possua uma conexão linear entre ϵ_{NL}^P e $\langle \mathbf{S} \rangle_z$ deve transformar também ímpar ante inversões espaciais e temporais para manter a paridade de ϵ_{NL}^P , senão estariam violando-se as simetrias espaço-temporais na relação constitutiva [Eq. (4.18)].

Neste ponto temos que lembrar do Princípio de Neumann enunciado na Sec. 2.1.2. Ele estabelece que uma propriedade física (como Γ_{ijk} por exemplo) deve incluir todos os elementos de simetria do material onde está definida. Portanto, negando isto temos que se uma propriedade física não possui tais elementos de simetria, então o material tampouco tem de possuí-los. Então, a perda de simetria par na inversão espacial para Γ_{ijk} implica que temos que considerar materiais sem centro de inversão, ou seja a não linearidade tipo-Poynting só pode existir em materiais *não centro simétricos*. Tem-se vários materiais candidatos a possuir uma não linearidade tipo-Poynting, como por exemplo os cristais cúbicos com estrutura “zincblended” tais como GaAs, InSb entre outros. Nesses materiais foi observada uma transmissão que dependia com a intensidade e de fato biestabilidade foi observada experimentalmente [80]. Também, líquidos isotrópicos formados por soluções de moléculas especularmente assimétricas (quirais) com grandes permissividades não lineares, consequência de vários processos não lineares, podem ser candidatos para possuir uma não linearidade tipo-Poynting [81]. Ademais, a paridade frente a inversões temporais deve ser violada nos meios Poynting, portanto é necessário que o material que seja hospedeiro deste tipo de meio possua algum tipo de processo dissipativo, que por exemplo transforme energia eletromagnética em calor. Então, uma leve absorção ou um fluxo de corrente dado por uma fonte externa quase estática, que basicamente não modifique a propagação dos campos a altas frequências, pode assegurar que o material não possua simetria par ante inversões temporais.

Até aqui, podemos dizer que, apesar de precisar-se de experimentos para poder confirmar

nossas previsões, a anterior análise dá uma base para aprofundar nas discussões sobre a existência do meio Poynting.

4.2.4 Conclusões

O Formalismo S mostra explicitamente que a intensidade e o módulo ao quadrado do campo são equivalentes somente para uma única onda se propagando num meio linear infinito ou semi-infinito. Em outro caso não são equivalentes. Para realçar essa não equivalência introduzimos o meio Poynting, cuja não linearidade é proporcional à intensidade ao invés de sê-lo do módulo ao quadrado do campo como nos meios Kerr. Foram achadas consideráveis diferenças na transmitância entre os dois meios, fato que suporta a diferença entre I e $|E|^2$. Também, foi feita uma análise das simetrias espaço-temporais achando que os meios Poynting só poderiam existir em materiais não centro simétricos.

Finalmente, temos que deixar aberta a possibilidade de pensar que algumas técnicas experimentais, baseadas em mudanças de fase dependentes da intensidade, por exemplo a técnica de Z-scan [82], poderia não estar medindo realmente uma não linearidade do tipo Kerr, pelo contrário poderia medir não linearidades do tipo Poynting.

4.3 Análise de meios com portadores de carga foto-induzidos

“Meios com portadores de carga foto-induzidos” é uma denominação geral usada para materiais nos quais uma iluminação apropriada produz elétrons livres, buracos livres ou ambos. As características dessas densidades induzidas dependem tanto da estrutura das bandas de energia do material quanto da energia dos fótons incidentes. O estudo desses materiais cresceu consideravelmente nas últimas décadas devido a sua ampla faixa de aplicabilidade em optoeletrônica, por exemplo, como limitadores ópticos passivos [83, 84, 85], em processos xerográficos [86, 87, 88], e como detectores do visível e o infra-vermelho [89, 90, 91, 92, 93], com materiais indo de semicondutores [83, 84, 92, 93] até isolantes [85, 94, 95, 96, 97, 98] passando também por materiais orgânicos [99, 100].

A geração de portadores de carga foto-induzidos implica também processos como recombinação, interação dos portadores com fótons e com outras partículas e quase-partículas. Estes processos no conjunto produzem uma modificação na resposta óptica do meio. Esta resposta pode se dividir em duas partes: a absorção induzida por luz e a foto-refração. Ambos fenômenos dependem fortemente da densidade de portadores de carga foto-induzidos em todo o volume do material, e esta densidade, de fato, depende da distribuição da intensidade dentro dele. Portanto, desde o ponto de vista eletromagnético, estes fenômenos são não lineares.

Para uma análise apropriada da absorção induzida por luz e a foto-refração, precisa-se de usar, por exemplo, uma teoria semi-clássica microscópica para a evolução dos portadores de carga através de equações de equilíbrio junto com as Equações de Maxwell Macroscópicas para os campos eletromagnéticos. Para estas últimas, devem ter-se em conta as condições de fronteira e as relações constitutivas adequadas. Assim, o conjunto de equações microscópicas-macroscópicas constitui um enfoque adequado para descrever as propriedades ópticas do material. No entanto, este conjunto pode resultar em um problema matemático muito complexo devido a que existe uma forte dependência entre a densidade de portadores de carga e a intensi-

dade da radiação dentro do meio. Para evitar essa dificuldade, em alguns casos a intensidade é substituída por uma intensidade média e as equações são também simplificadas pela aplicação da SVEA [101]. Em outras situações, os processos microscópicos são prioritários e em consequência coloca-se a excitação óptica como um parâmetro [86, 87, 91, 92, 100] ou, pelo contrário em outros casos, as propriedades ópticas são mais importantes e os processos microscópicos são simplificados [96, 102, 103].

Dado que os meios com portadores de carga foto-induzidos, definitivamente, são meios não lineares onde a não linearidade depende da média temporal do vetor de Poynting, parece apropriado então estudar estes meios com o Formalismo S. Já foi mostrado, na seção anterior, que o Formalismo S permite tratar problemas onde a não linearidade é proporcional à média temporal do vetor de Poynting. Então, as propriedades ópticas dos meios com portadores de carga foto-induzidos podem ser estudadas em termos da intensidade de excitação e a espessura do meio através do Formalismo S. Antecipando-nos aos resultados, comentamos que nestes meios observaremos comportamentos biestáveis do tipo observado nos meios Poynting e Kerr [53, 60], e comportamentos especulares. As condições nas quais são observados esses fenômenos serão analisadas em detalhe na Subsec. 4.3.2.

4.3.1 Relações constitutivas e modelo microscópico

A seguir, daremos as relações constitutivas e o modelo microscópico para descrever os meios com portadores de carga foto-induzidos. As relações constitutivas serão o nexó entre o modelo microscópico e as Equações de Maxwell Macroscópicas.

4.3.1.1 Relações constitutivas

Como já foi dito, as relações constitutivas são relações fenomenológicas que dão conta da resposta do meio aos campos eletromagnéticos através das funcionais adimensionais ϵ_t e σ_t .

Estas funcionais possuem uma parte linear ϵ_r e σ_r , e uma parte não linear relacionada com a geração dos portadores de carga foto-induzidos que, segundo o modelo microscópico de Drude-Lorentz [104], são lineares com a densidade de portadores de carga n e se escrevem da seguinte forma

$$\epsilon_t = \epsilon_r + \gamma n_0 \frac{n(\tilde{z}; S)}{n_0}, \quad (4.20a)$$

$$\sigma_t = \sigma_r + \delta n_0 \frac{n(\tilde{z}; S)}{n_0}, \quad (4.20b)$$

onde n_0 é a densidade de centros termicamente excitados. A conveniência da introdução deste parâmetro ficará evidente mais adiante. Ademais, γ e δ são os coeficientes da permissividade e condutividade não linear do meio que dão conta da foto-refração e da absorção induzida por luz, respectivamente. As expressões de γ e δ em termos dos parâmetros microscópicos do material para a absorção de um fóton podem ser achadas na Ref. [105]. Note-se que, δ é sempre positivo enquanto γ pode ser negativo ou positivo conforme o sinal de $\omega - \omega_g$, sendo ω_g a frequência angular correspondente ao *gap* direto do material. Deve ser destacado que não existe um modelo definitivo para tratar as propriedades das transições interbanda não lineares. O modelo de Drude-Lorentz, por exemplo, dá as características mais importantes deste tipo de processos mas é muito restritivo para dar conta das transições não ressonantes devido a sua largura de banda estreita. Outros modelos com larguras de banda maiores obtém-se incluindo um termo de atenuação na expressão de Drude-Lorentz junto com uma correção de campo médio, ambas necessárias para descrever meios densos.

4.3.1.2 Modelo microscópico

A densidade de portadores de carga foto-induzidos n depende do fluxo de energia em cada ponto $\tilde{z}$ do meio. A dependência funcional pode ser derivada por meio de um modelo semi-clássico, considerando a estrutura das bandas de energia do meio e os processos dinâmi-

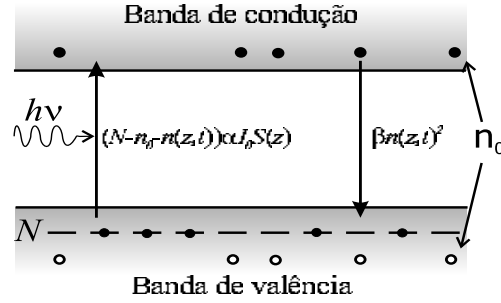


Figura 4.8 Representação esquemática do problema das transições intrínsecas interbanda. Os elétrons são excitados da banda de valência para a banda de condução formando então um par elétron-buraco.

cos que acontecem nele devido à interação com a radiação eletromagnética. Os processos microscópicos considerados aqui correspondem com os de transições intrínsecas interbanda [86, 87, 88, 106] e estão esquematizados na Fig. 4.8. Mesmo sendo um modelo simples, ele apresenta as principais características deste tipo de meios. Extensões para modelos mais complicados são simples de desenvolver, por exemplo, o caso das transições extrínsecas é incluso no Apêndice III. Os processos considerados para transições intrínsecas interbanda são: (1) a geração de pares elétron-buraco (com probabilidade α) a partir de um número finito de centros ($N - n_0$), sendo N a densidade total de centros capazes de ser excitados e n_0 os excitados termicamente; e (2) a recombinação de pares elétron-buraco através da *recombinação bimolecular* [87, 88] com probabilidade β . Estes processos são descritos pela seguinte equação de equilíbrio

$$\frac{dn(\tilde{z}, S)}{dt} = [N - n_0 - n(\tilde{z}, S)] \alpha I_0 S(\tilde{z}) - \beta n^2(\tilde{z}, S). \quad (4.21)$$

Esta equação representa a média temporal da equação de equilíbrio. O promediado justifica-se por duas razões: (1) não estamos levando em conta o ruído térmico [91], ou seja não consideramos as variações termicamente induzidas dos pares elétron-buraco que podem gerar variações de alta frequência na densidade de portadores de carga foto-induzidos n (n_0 é uma constante na nossa análise); e (2) estamos interessados nas variações médias de n e não nas suas

flutuações [86, 107]. Ademais, o modelo descrito pela Eq. (4.21) só considera transições intrínsecas interbanda produzidas pela absorção de um fóton. Aquelas relacionadas com “elétrons quentes” [93] e absorção de dois fótons [84, 85, 103] não são tratados aqui. Também, a difusão de cargas poderia ser considerada incluindo na Eq. (4.21) o termo $k_0 D \partial^2 n / \partial \tilde{z}^2$ onde D , é a constante de difusão. Mas será mostrado que a difusão é desprezível quando comparada com o termo de recombinação dentro da faixa de valores dos parâmetros analisados. Portanto, será desconsiderada na nossa análise. No estado estacionário tem-se $d/dt = 0$, de forma que da Eq. (4.21) temos

$$\frac{n(\tilde{z})}{n_0} = \xi S(\tilde{z}) \left(\sqrt{1 + \frac{2(N_0 - 1)}{\xi S(\tilde{z})}} - 1 \right), \quad (4.22)$$

onde $\xi = \alpha I_o / (2\beta n_0)$ é a *intensidade de excitação adimensional* e $N_0 = N/n_0$ é a densidade relativa de centros foto-excitáveis. Então, a densidade relativa de pares foto-induzidos pode ser estudada através de dois parâmetros adimensionais: ξ e N_0 .

4.3.2 Análise das propriedades ópticas

Para estudar as propriedades ópticas dos meios com portadores de carga foto-induzidos, resolvemos numericamente as equações de evolução dos campos [Eqs. (3.15)], com as relações constitutivas dadas pelas Eqs. (4.20) onde a densidade de portadores foto-induzidos é dada pela Eq. (4.22). Para a resolução numérica das equações, foi utilizado o método descrito na Sec. 3.3 e, no caso em que $\tilde{d}$ é fixada, tiramos vantagem do fato de que a não linearidade é da forma descrita naquela seção. Ao longo de toda a análise foi suposto que o meio é isolante em condições de escuridão, portanto $\sigma_r = 0$. Também, foi suposto que $N_0 = 10^{12}$ e $|n_0 \gamma| = 0, 10^{-3}$ o que, em geral, se correspondem com as condições experimentais usuais. Finalmente, e para poder

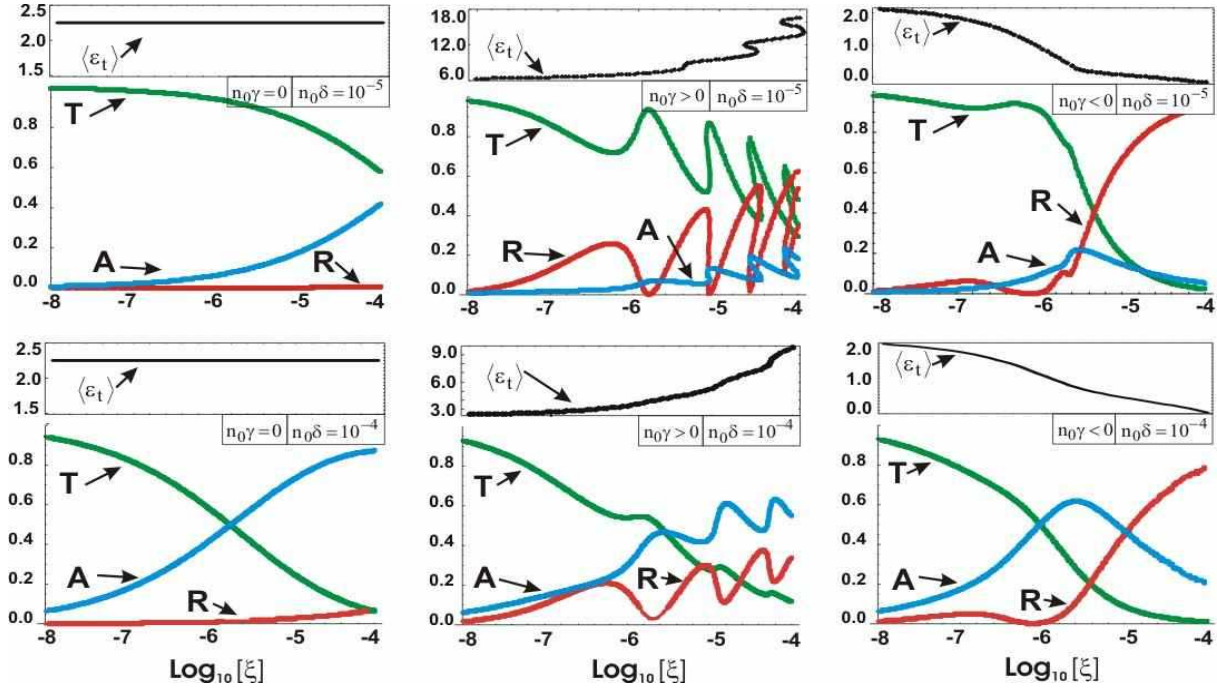


Figura 4.9 Transmitância T , refletância R , energia absorvida A , e média espacial da permissividade total $\langle \epsilon_t \rangle$, como função da intensidade excitação adimensional ξ para vários valores de $(n_0\gamma, n_0\delta)$, como indicado em cada subfigura. Todas as figuras foram calculadas com $\sqrt{\epsilon_r} = 1.5$ e $\tilde{d} = 2\pi$.

aprofundar na análise, definimos a média espacial da permissividade total através de

$$\langle \epsilon_t \rangle = \frac{1}{\tilde{d}} \int_0^{\tilde{d}} \epsilon_t d\tilde{z}. \quad (4.23)$$

Esta quantidade representa a permissividade *efetiva* e tem uma relação direta com as propriedades ópticas R , T e A do meio.

Primeiramente, analisamos a dependência das propriedades ópticas e a permissividade efetiva com a intensidade de excitação adimensional. A análise é feita para valores fixos da permissividade linear ($\sqrt{\epsilon_r} = 1.5$), da espessura adimensional ($\tilde{d} = 2\pi$) e para vários valores dos coeficientes não lineares $n_0\gamma$ e $n_0\delta$. Os resultados estão sintetizados na Fig. 4.9 a qual deve ser lida como uma matriz (i, j) onde cada par ordenado representa um par de valores de $(n_0\delta, n_0\gamma)$. Para $i = 1, 2$ temos $n_0\delta = 10^{-5}$ e $n_0\delta = 10^{-4}$, respectivamente; e também

$j = 1, 2, 3$ representa $n_0\gamma = 0$, $n_0\gamma > 0$, e $n_0\gamma < 0$, respectivamente.

Para $n_0\gamma = 0$ [Figs. (4.9)_{i,1}], a média espacial da permissividade se corresponde com o valor linear $\langle \epsilon_t \rangle = \epsilon_r$. Este é um caso limite já que é suposto que a geração de portadores de carga não produz variações na permissividade total do meio. Da figura, se observa um comportamento puramente bijetivo de R , T e A em termos de ξ . Neste caso, onde só se tem absorção induzida por luz, a transmitância decresce monotonicamente na medida que ξ é incrementada para os dois valores de $n_0\delta$ considerados. Quando $n_0\delta$ aumenta a diminuição da transmitância acontece com uma inclinação mais pronunciada. Embora, em ambos casos, a refletância mantém um valor quase desprezível para toda a faixa de valores de ξ considerados, de forma que a diminuição da transmitância é produzida por uma transferência irreversível de energia eletromagnética para o meio, como se observa da curva de A . A densidade de portadores de carga foto-induzidos é uma função da média temporal do vetor de Poynting e, neste caso, desenvolvendo em series de Taylor a primeira ordem, a Eq. (4.22) é proporcional a $\sqrt{S(z)}$ e portanto é de esperar-se que a condutividade se comporte de uma forma similar. Este comportamento foi observado em medidas da foto-condutividade para transições interbanda em materiais fotorefrativos [98].

Um comportamento completamente diferente é observado quando $n_0\gamma \neq 0$, ou seja, quando a média espacial da permissividade total é alterada pela variação da densidade de portadores de carga foto-induzidos. Quando $n_0\gamma > 0$ [Figs. (4.9)_{i,2}], note-se que para os menores valores de ξ , dentro da faixa de valores considerados, a transmitância decresce monotonicamente, como se vê da Fig (4.9)_{1,2}. Conforme a intensidade de excitação adimensional aumenta, a média espacial da permissividade total aumenta produzindo uma diferença importante entre a permissividade efetiva do meio e a do entorno. Então, a refletância aumenta na medida que T decresce e a energia absorvida permanece quase zero. No entanto, quando ξ continua incrementando-se, as propriedades ópticas tornam-se oscilatórias e biestáveis. Isto está correlacionado com a aparição de biestabilidade na média espacial da permissividade total. Bistabilidade óptica

produzida por portadores de carga foto-induzidos foi observada experimentalmente em, por exemplo InSb [80] e InAs [108]. Em ambos casos foi usada radiação com energia acima do *gap* do material. Este tipo de transições são macroscopicamente descritas por $\gamma n_0 > 0$, fato que é consistente com os resultados da presente análise. É um fato conhecido, desde um ponto de vista teórico, que a biestabilidade óptica acontece pela combinação das não linearidades do meio com uma realimentação adicional [101]. Comportamentos biestáveis similares foram obtidos para os meios Pointing e Kerr [53, 60] sem absorção. Contrariamente com o que acontece naqueles meios, na Fig. (4.9)_{1,2}, os picos em T não alcançam a unidade quando ξ é incrementada devido à energia absorvida. Neste caso, o comportamento biestável pode ser entendido lembrando que a não linearidade na permissividade é proporcional a $\sqrt{S(z)}$, então o fenômeno aparece como o produzido por um “meio Poynting fracionário” [53]. Também, o efeito de realimentação produzido pelo Fabry-Pérot é essencial para que se produza a biestabilidade. Foi mostrado, por exemplo na Ref. [60], que a biestabilidade desaparece quando o meio se torna semi-infinito ($\tilde{d} \rightarrow \infty$) ainda para não linearidades muito intensas. Observando a Fig (4.9)_{2,2}, é evidente que as propriedades ópticas mudam em relação a aquelas mostradas na Fig (4.9)_{1,2}. A biestabilidade desaparece em toda a faixa de ξ e, mesmo amortecidas, as oscilações mantêm-se tanto para R e T quanto para A . Quando $n_0\delta$ aumenta, o desaparecimento da biestabilidade e o amortecimento das oscilações em R , T e A mostram que esses efeitos são inerentes às propriedades refrativas do meio e não tem a ver com os processos de absorção. Esta é uma característica importante deste tipo de meios que deve ser levada em conta na hora de desenvolver aplicações, como por exemplo chaves ópticas. Nossos resultados predizem que a absorção induzida por luz deve ser controlada para poder manter a biestabilidade.

Outro caso interessante é aquele onde $n_0\gamma < 0$ [Fig. (4.9)_{i,3}], já que as propriedades ópticas comportam-se de uma forma completamente diferente aos casos anteriores. Neste caso, a resposta do meio está em “quadratura” com a excitação óptica e o valor da polarizabilidade do meio resulta negativa. Como se mostra nas Figs. (4.9)_{i,3}, a transmitância começa diminuindo

em uma forma similar à do caso $n_0\gamma = 0$. Assim como nas Figs. (4.9)_{i,1}, não se observam comportamentos biestáveis nem oscilatórios para nenhuma das propriedades ópticas R , T e A nem para $\langle\epsilon_t\rangle$, e tampouco, esses comportamentos são observados nas Figs. (4.9)_{i,3}. No entanto, nossas simulações confirmam que o comportamento oscilatório aparece e se faz importante quando a permissividade linear aumenta. Por outro lado, a biestabilidade não aparece confirmando que esse fenômeno não está relacionado com os valores negativos de $n_0\gamma$. Da comparação das duas figuras, é claro que qualquer comportamento oscilatório que pudesse aparecer em R , T e A , se aumentarmos $n_0\delta$, seria amortecido como no caso $n_0\gamma > 0$. Por outro lado, note-se que, para valores baixos da intensidade adimensional de excitação, T possui seu máximo valor (no intervalo estudado), e decresce na medida que ξ aumenta, enquanto R e A estão perto de zero. Todavia, o comportamento das propriedades ópticas muda radicalmente na região onde $\langle\epsilon_t\rangle \approx 1$. A energia absorvida apresenta um pico cuja altura aumenta quando $n_0\delta$ aumenta. Além disso, na região de *transição*, a transmitância e a refletância se comportam de maneira oposta, aumentando a primeira e diminuindo a segunda. Mesmo aumentando ξ , a refletância tende a um e T e A tendem para zero. Portanto, o meio tem um comportamento *especular* para valores elevados da intensidade adimensional de excitação. Remarquemos que, não se tem absorção no meio e toda a radiação eletromagnética é refletida. Este resultado, por demais interessante, pode levar à construção de espelhos induzidos por luz. Esses espelhos poderiam ser induzidos através de uma variação da intensidade incidente ou incrementando a temperatura do meio e, portanto, modificando a probabilidade de recombinação. Note-se que os resultados da Fig. (4.9)_{i,3} indicam que o comportamento especular é mais eficiente para menores condutividades não lineares. Tem-se alguns resultados experimentais na literatura que poderiam ser explicados por uma permissividade não linear negativa, fato que abre a possibilidade de construir espelhos induzidos por luz. Esses experimentos se concentraram na capacidade de usar como limitadores ópticos o Si [109] e o GaP [110] quando iluminados por pulsos laser de alguns pico-segundos com $\lambda = 1064$ nm e $\lambda = 532$ nm, respectivamente. É interessante notar

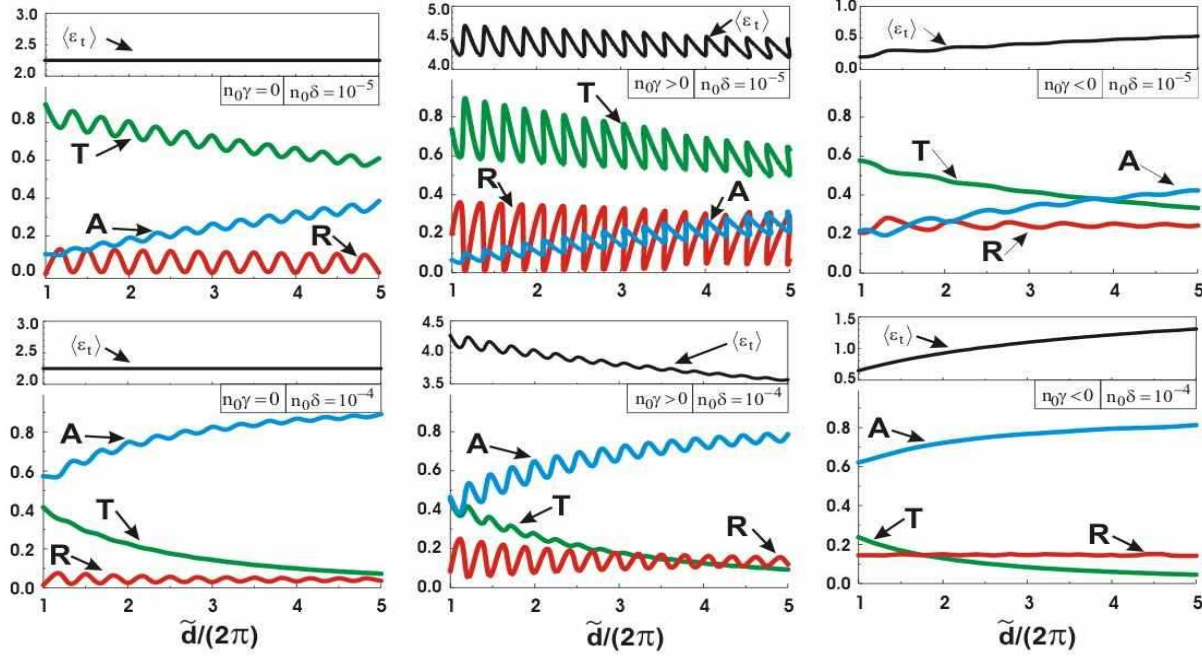


Figura 4.10 Transmitância T , refletância R , energia absorvida A , e média espacial da permissividade total $\langle \epsilon_t \rangle$, como função da espessura adimensional $\tilde{d}$ para vários valores de $(n_0\gamma, n_0\delta)$, como indicado em cada subfigura. Todas as figuras foram calculadas com $\sqrt{\epsilon_r} = 1.5$ e $\text{Log}_{10}\xi = -5.5$.

que, para cada material, a energia da radiação usada situa-se acima do limiar para transições interbanda indiretas, mas abaixo da energia necessária para que uma transição direta aconteça. Então, as transições interbanda nestes comprimentos de onda acontecem com $\gamma n_0 < 0$ devido a que $\omega < \omega_g$. Ademais, a absorção não linear observada nesses trabalhos poderia ser mesmo um efeito do processo de refração negativa [observar a semelhança na transmitância entre as Figs. (4.9)_{1,i} e (4.9)_{3,i}] mas a única forma de discriminar ambos efeitos é medindo R e T simultaneamente. Infelizmente, nesses artigos somente a transmitância foi informada, fato que faz difícil ter uma conclusão definitiva. Portanto, Si e GaP poderiam ser apropriados para construir espelhos induzidos por luz, embora mais pesquisa nesta direção é necessária.

Para complementar a análise prévia, estudamos agora a dependência de $\langle \epsilon_t \rangle$, R , T e A com a espessura adimensional $\tilde{d}$. Os resultados se apresentam na Fig. 4.10, organizada da mesma forma matricial que a Fig. 4.9. Primeiramente, analisamos o caso limite $n_0\gamma = 0$ onde os porta-

dores de carga foto-induzidos não modificam a permissividade efetiva, de modo que $\langle \epsilon_t \rangle = \epsilon_r$. Este caso está mostrado nas Figs. (4.10)_{i,1}. A Fig. (4.10)_{1,1} evidencia uma oscilação atenuada para T exibindo uma diminuição em média quando a espessura adimensional aumenta devido a uma maior energia absorvida pelo meio. Esta energia absorvida aumenta pelo fato de que o caminho médio do fóton dentro do meio também aumenta. Por outro lado, R apresenta um comportamento oscilatório mas praticamente sem mudanças na amplitude da oscilação nem na média para toda a faixa de $\tilde{d}$ considerada. Este fato indica que a energia incidente somente é distribuída entre T e A . O comportamento oscilatório é uma consequência do processo de superposição de “ondas” contra-propagantes dentro do Fabry-Perot, ou seja pode se pensar como um *padrão de Airy modificado*. Foi verificado que a amplitude da oscilação se incrementa com o aumento de ϵ_r . O aumento da condutividade não linear $n_0\delta$ salienta a diminuição (aumento) na média de T (A) no intervalo de espessuras consideradas amortecendo fortemente as oscilações. Também, neste caso, a média de R não é afetada pelo aumento da espessura do meio, mostrando que a troca de energia acontece principalmente entre T e A . As Fig (4.10)_{i,2} mostram o comportamento para $n_0\gamma > 0$. Nelas é observado um marcado comportamento oscilatório em $\langle \epsilon_t \rangle$, que conduz a marcadas oscilações em R , T , e A . Também, na média T (A) diminui (aumenta) enquanto R mantém-se constante sendo, no entanto, suas oscilações um pouco atenuadas. Na Fig. (4.10)_{1,2}, as oscilações em $\langle \epsilon_t \rangle$, R , T e A tornam-se biestáveis na medida que $\tilde{d}$ aumenta. Além disso, foi verificado que ainda com valores pequenos de ξ pode se obter comportamentos biestáveis desde que seja aumentada a espessura adimensional do meio. Mais ainda, quando $\tilde{d} \ll 2\pi$, não aparece biestabilidade. Por outro lado, quando $n_0\delta$ aumenta, as oscilações são atenuadas e a bistabilidade desaparece como mostra a Fig. (4.10)_{2,2}. Como esperado, as oscilações de R , T e A são marcadamente amortecidas neste caso. É interessante notar que, em média, o comportamento de R , T e A é mantido para $n_0\gamma < 0$ mesmo observando que $\langle \epsilon_t \rangle$ aumenta como função de $\tilde{d}$ como mostram as Figs. (4.10)_{i,3}. No entanto, note-se que as oscilações desapareceram quase por completo e, portanto, a biestabilidade não aparece

mesmo aumentando a espessura e a excitação adimensionais. O comportamento monótono de R , T e A é mais marcado quando $n_0\delta$ aumenta.

4.3.3 Análise da validade do modelo microscópico-macroscópico utilizado

Finalmente, fazemos uma análise da validade do modelo macroscópico-microscópico considerado. Nas situações experimentais relacionadas com meios com portadores de carga foto-induzidos, observa-se que, em geral, as constantes macroscópicas ϵ_t e σ_t apresentam uma dependência linear com n . Portanto, as relações constitutivas dadas pelas Eqs. (4.20) são gerais e capazes de suportar a maioria das situações experimentais. No entanto, como a permissividade e a condutividade não linear são muito dependentes do modelo microscópico escolhido, uma descrição particular foge do assunto desta tese. O leitor interessado nessas questões pode consultar a Ref. [111]. Na nossa análise, tratamos basicamente a resposta macroscópica destes meios. Por outro lado, a dependência de n com a intensidade de excitação adimensional foi considerada através dos processos microscópicos relacionadas com transições intrínsecas interbanda de um fóton. Estes processos foram escolhidos porque possuem as principais características deste tipo de meios. Note-se que extensões para considerar outros processos são simples de levar em conta, por exemplo, o caso de transições extrínsecas é desenvolvido no Apêndice III e as semelhanças com o caso intrínseco são destacadas. Outros processos como transições interbanda de dois fótons ou transições intrabanda não lineares não foram considerados mas podem ser facilmente incluídos. No caso estudado, as flutuações foram desconsideradas e a Eq. (4.21) deve ser vista como a equação para o valor mais provável de n [91]. Por esta razão n_0 tem um valor fixo e não foi incluída a excitação térmica. Este fato justifica-se porque, na maioria das situações experimentais, a excitação óptica supera em várias ordens de grandeza à excitação térmica. Por outro lado, para o relaxamento, foi usada a recombinação bimolecular. Esta situação aplica-se para casos onde a densidade de portadores de carga foto-induzidos é alta e são gerados ao longo do todo o meio em materiais com baixa mobilidade [88]. Este é

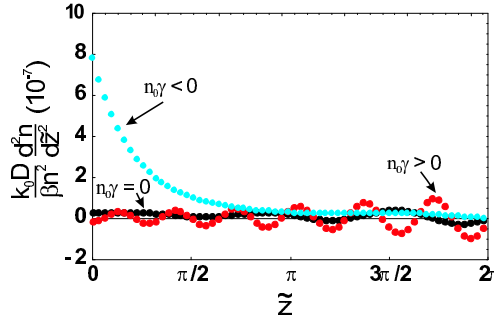


Figura 4.11 Razão entre os termos de difusão e recombinação como função da coordenada espacial adimensional para $n_0\gamma = 0$, $n_0\gamma > 0$, e $n_0\gamma < 0$, como indicado na figura, com $\sqrt{\epsilon_r} = 1.5$, $n_0\delta = 10^{-4}$, $\xi = 10^9$ e $\tilde{d} = 2\pi$.

o caso das situações experimentais comumente achadas quando são medidas as propriedades ópticas de meios com portadores de carga foto-induzidos. Finalmente, desconsideramos a difusão dos portadores de carga foto-induzidos na coordenada $\tilde{z}$ devido a que, nas situações experimentais usuais, ela só contribui fortemente quando são usados padrões interferométricos com variações espaciais transversais sub-micrométricas. Em nosso caso, as variações longitudinais são suficientemente suaves como para não interferir no resultado final. Para mostrar que a difusão é desprezível no caso estudado, comparamos o termo de recombinação na Eq. (4.21), $\beta n^2(\tilde{z})$ com o termo de difusão $k_0 D d^2 n / d\tilde{z}^2$. A Fig. 4.11 mostra a razão entre ambos termos como função da coordenada espacial adimensional $\tilde{z}$. Esta razão deve ser comparada com a unidade para saber quando a difusão é importante. Se consideramos uma constante de recombinação do tipo-Langevin [87], então $\beta = \theta \mu e / \epsilon_1$ com e a carga do elétron, μ a soma das mobilidades dos portadores de carga e θ uma constante que controla os desvios do regime de Langevin, $\theta \approx 1$. Ademais, se a relação de Einstein é válida, $D = \mu k T$ onde k é a constante de Boltzman e T a temperatura absoluta, então à temperatura ambiente, é de se esperar que $k_0 D d^2 n / d\tilde{z}^2 / (\beta n^2) \approx \mathcal{O}[10^{-7}] \ll 1$ para todos os valores de $n_0\gamma$ considerados e $\tilde{d} = 2\pi$ como mostra a Fig. 4.11. Este resultado foi verificado para espessuras maiores. Portanto, a difusão é desprezível no modelo estudado e por isso pode ser desconsiderada na equação de equilíbrio [Eq. (4.21)].

4.3.4 Conclusões

Foi estudada a propagação de campos eletromagnéticos e as propriedades ópticas de meios com portadores de carga foto-induzidos combinando os modelos microscópico e macroscópico para uma geometria do tipo Fabry-Pérot. A variável que relaciona ambos modelos é a média temporal do vetor de Poynting que pode ser monitorada diretamente dentro do meio através do Formalismo S. O conjunto de equações microscópico-macroscópico foi resolvido numericamente obtendo-se as propriedades ópticas e a média espacial de permissividade como função da intensidade de excitação adimensional e a espessura adimensional. Os principais resultados podem ser resumidos como segue: (1) No caso limite de um fotocondutor puro, caracterizado por $n_0\gamma = 0$ e $\langle\epsilon_t\rangle = \epsilon_1$, a transmitância decresce monotonicamente como função da intensidade de excitação adimensional e quase toda a energia incidente é absorvida. Este comportamento é mais marcado para maiores valores do coeficiente de condutividade não linear. Por outro lado, em termos da espessura adimensional, T decresce e A cresce ambos com comportamentos oscilantes. Este fato acontece devido à superposição construtiva e destrutiva das “ondas” que se propagam em uma e outra direção dentro do meio. Esta oscilação é amortecida quando o coeficiente de condutividade não linear é aumentado. (2) Para $n_0\gamma > 0$, o comportamento de T , R e A é muito diferente. Na medida que a intensidade de excitação aumenta, T e R deenem oscilatórias e para valores elevados de ξ as oscilações tornam-se biestáveis, como consequência do comportamento biestável da permissividade efetiva. No entanto, o aumento do coeficiente de condutividade não linear produz um apagamento da biestabilidade e as oscilações também são fortemente amortecidas. Por outro lado, como função da espessura adimensional, o padrão tipo Airy que apresenta T , mesmo atenuado pela condutividade não linear, torna-se biestável quando a espessura do meio aumenta. No entanto, a envoltória da refletância não muda com o aumento do parâmetro. Isto implica que a energia da radiação é só distribuída entre T e A sem mudanças, em média, na refletância. Como esperado, o aumento da condutividade não linear atenua as oscilações e elimina a biestabilidade. (3) Para $n_0\gamma < 0$, as oscilações são

fortemente reduzidas ou eliminadas dependendo do valor de ϵ_r e portanto a biestabilidade desaparece. Existe um valor da intensidade de excitação adimensional para o qual a média espacial da permissividade começa a ser menor do que a unidade produzindo uma diminuição na energia absorvida e a transmitância, enquanto a refletância experimenta um rápido crescimento. Assim, aumentando mais o valor de ξ , a refletância aproxima-se da unidade $R \approx 1$. Por outro lado, a refletância também permanece quase invariante quando a espessura adimensional é aumentada. Estes resultados abrem a possibilidade de construir espelhos induzidos por luz que podem ser usados como componentes fotônicos ou opto-eletrônicos em circuitos ópticos integrados, e também como limitadores ópticos. Finalmente, deixamos claro que não é suficiente analisar o comportamento da transmitância para caracterizar uma não linearidade. Esta única análise não é suficiente para distinguir entre alguns tipos de não linearidades, por exemplo, absorção puramente não linear ($\gamma n_0 = 0$) e permissividade não linear negativa ($\gamma n_0 < 0$). Portanto algumas técnicas baseadas em análise da transmitância, por exemplo Z-scan [82], poderiam não ser suficientes para caracterização de materiais absorvedores.

4.4 Análise dos meios não-lineares saturáveis

Os meios não-lineares saturáveis têm um importante papel em óptica devido a que desde um ponto de vista teórico-experimental, somente uma não linearidade saturável pode suportar a propagação de um sóliton estável em $(2+1)D$ [112].

A característica de um meio saturável é que a sua permissividade não-linear varia até algum valor da intensidade incidente. Quando este valor é superado, a não linearidade satura, isto é, a permissividade não linear passa a ser independente da intensidade. Para alguns materiais, esta permissividade não linear é descrita fenomenologicamente devido à ausência de modelos microscópicos que levem a este comportamento. Neste sentido, quando se observa que a resposta de um material se desvia em relação à de um meio Kerr para altas intensidades, a permissividade não linear é modelada por uma competição entre não linearidades cúbicas-quínticas cujos coeficientes não lineares têm sinal oposto, ou seja uma competição entre auto-desfocalização (focalização), a baixas intensidade, e auto-focalização (desfocalização) a altas intensidades. Na medida que a intensidade aumenta, mais coeficientes não lineares na permissividade não linear são “ativados” de forma que ela é fixada num valor constante. Então, esses meios são descritos por uma não-linearidade fenomenológica [113].

O estudo da propagação de campos eletromagnéticos em meios não lineares saturáveis finitos tem duas motivações: tratar estes meios tendo em conta as fronteiras; e por outro lado, estudar as diferenças (semelhanças) de considerar a permissividade não-linear como função da intensidade no meio, ou seja a média temporal do vetor de Poynting, e compará-la com a dependência com o módulo ao quadrado do campo. Isto último devido a que, como sabemos, é comum confundir um com o outro, e porque, como foi mostrado na Sec. 4.2, os meios Poynting possuem propriedades ópticas diferentes dos Kerr. Em virtude disto, consideraremos ambos tipos de meios que serão referidos como tipo-Kerr e tipo-Poynting. No entanto, antecipando os resultados, nós encontramos que os meios tipo-Kerr e os tipo-Poynting apresentam

transmitâncias similares dentro da faixa dos parâmetros estudada. Então terminamos fazendo um estudo detalhado dos meios tipo-Poynting tirando vantagem da solução analítica simples que possuem.

4.4.1 Relações constitutivas dos meios não lineares saturáveis

A permissividade total dá a resposta macroscópica do meio aos campos eletromagnéticos. Para meios não lineares saturáveis, existe uma expressão fenomenológica, que escrita em termos de parâmetros adimensionais (para a menor ordem), fica [113]

$$\epsilon_t^\psi = \epsilon_r + \delta \frac{\gamma \psi}{1 + \gamma \psi}, \quad (4.24)$$

onde ϵ_r é a permissividade linear, $\delta = \epsilon_\infty$ é o coeficiente não linear adimensional, e $\gamma = I_0/I_{sat}$ é a excitação adimensional, com ϵ_∞ o valor limite da não-linearidade quando $I_0 \rightarrow \infty$ e I_{sat} é a intensidade de saturação do meio. Também, ψ representa $\mathcal{E}^2$ ou S para meios tipo-Kerr ou tipo-Poynting, respectivamente. Devemos comentar que existe na literatura uma permissividade similar, referida a um tipo particular de resposta dos meios fotorefractivos [114] que coincide com a Eq. (4.24). Sem embargo, a natureza dessas permissividades é bem diferente de modo que quiçá os resultados apresentados na seguinte seção possam ser também válidos para tais meios.

4.4.2 Propriedades ópticas dos meios não lineares saturáveis

Nesta subseção apresentaremos resultados para a transmitância dos meios não lineares saturáveis tipo-Kerr e tipo-Poynting. Para ambos tipos de meios, as equações do Formalismo S foram resolvidas utilizando o método descrito na Sec. 3.3. No caso dos meios tipo-Kerr, foram resolvidas numericamente por meio do método de Runge-Kutta de quarta ordem. Para os meios

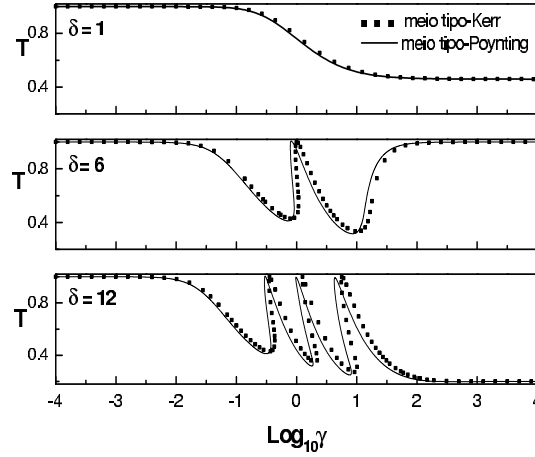


Figura 4.12 Transmitância T como função da excitação adimensional γ para meios tipo-Kerr e tipo-Poynting. Todas as figuras com $\tilde{d} = 2\pi$.

tipo-Poynting a transmitância pode ser resolvida analiticamente e expressa como

$$T(\gamma) = \frac{1}{1 + F \sin^2 \left(\sqrt{\epsilon_t^S} \tilde{d} \right)} \quad \text{para } \gamma = \beta/T, \quad (4.25)$$

onde $F = (1 - \sqrt{\epsilon_t^S})^2 / (4\sqrt{\epsilon_t^S})$ e $\beta = \gamma S$ é um parâmetro que varia entre zero e o valor máximo da excitação adimensional. Em todos os casos, foi fixado $\sqrt{\epsilon_r} = 2.5$. Os valores de δ e γ usados foram escolhidos para abarcar todas as possíveis situações de forma tal que T exiba as principais características deste tipo de meios.

A Figura 4.12 mostra a transmitância para os meios tipo-Kerr e tipo-Poynting como função da excitação adimensional para uma espessura adimensional fixa $\tilde{d} = 2\pi$. Os valores de δ estão indicados em cada subfigura. Da figura, pode-se observar que, para a faixa de parâmetros considerada, não se têm diferenças marcantes entre os meios tipo-Kerr e os tipo-Poynting. Para $\delta = 1$ a coincidência é completa, enquanto que para $\delta = 6$ e $\delta = 12$ existe um pequeno afastamento de uma curva em relação a outra, mas que talvez não possam ser apreciadas experimentalmente. Este comportamento pode ser entendido considerando $\gamma \ll 1$ de forma que o denominador na Eq. (4.24) possa ser desconsiderado e, conseqüentemente, os meios tipo-Kerr

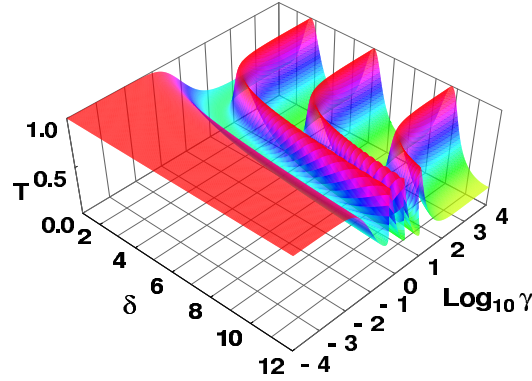


Figura 4.13 Transmitância T em função do coeficiente não linear adimensional δ e da excitação adimensional γ para um meio tipo-Poynting com $\tilde{d} = 2\pi$.

e tipo-Poynting se comportam como meios Kerr e Poynting puros, respectivamente. Então, para $\gamma \ll 1$ e para os valores do coeficiente não-linear adimensional δ considerados suas transmitâncias são comparáveis. Na medida que γ aumenta o denominador pode ser considerado termo a termo através de uma série de Taylor, mas como cada termo tem um sinal oposto ao prévio, isso faz com que a semelhança seja mantida. Note-se que, os resultados aqui obtidos são não triviais e de muita importância prática. O primeiro porque, em geral, é considerado $|E|^2$ para dar conta de $I_0 S$, e o último porque considerando oportunamente $I_0 S$ o problema se simplifica consideravelmente como foi comentado no início da presente subseção. Então, tiraremos vantagem dos resultados analisados e, daqui para a frente, só analisaremos os meios tipo-Poynting.

A Fig. 4.13 mostra a transmitância T como função do coeficiente não linear adimensional δ e a excitação adimensional γ para o meio tipo-Poynting. Da figura se observam três regiões com comportamentos bem diferenciados: $\gamma \ll 1$, $\gamma \approx 1$ e $\gamma \gg 1$. Para $\gamma \ll 1$ tem-se que os valores de T são os mesmos independentemente do valor de δ . Isto se corresponde com o fato de que o termo não-linear em ϵ_t^S não contribui consideravelmente quando $\gamma \ll 1$, fazendo com que $\epsilon_t^S \approx \epsilon_r$ nesta região. Por outro lado, para $\gamma \gg 1$, a transmitância depende com δ de uma forma muito simples. Neste caso, $\epsilon_t^S \approx \epsilon_r + \delta$, e a transmitância reproduz um padrão de Airy para

uma permissividade variável. Por outro lado, para $\gamma \approx 1$ a transmitância apresenta um comportamento mais complicado. Como se observa da Fig. 4.13, para $\delta \approx 1$ a transmitância tem um comportamento monótono na medida que a excitação adimensional aumenta. Quando o coeficiente não linear adimensional δ aumenta, T começa a ter picos de transmissão cujo número se incrementa na medida que δ também aumenta, sendo que estes picos devem ser biestáveis. Desde um ponto de vista geral, pode-se dizer que: os picos de transmitância que provêm da região de alta excitação são desviados para, e apanhados na, região central $\gamma \approx 1$ pela barreira da região de baixa excitação. Quando δ aumenta, mais picos são apanhados na região central limitando então, a capacidade do meio de ser biestável. Neste ponto, devaneamos um pouco sobre a possibilidade de que nossos resultados possam ser extrapolados a (2+1)D. Supondo que é o caso, poderiam existir sólitons biestáveis para excitações adimensionais intermediárias $\gamma \approx 1$, e valores moderados de δ . Estes sólitons biestáveis apareceriam da biestabilidade na transmitância que surge da não-linearidade do meio e da realimentação adicional introduzida pela geometria considerada onde se propagam os campos. Então, seria desnecessário considerar não-linearidades mais complicadas como aquelas introduzidas por Kaplan [115] e Enns e Mulder [116]. No entanto, estes sólitons poderiam ter uma desvantagem: na medida que a espessura do meio aumenta, faz-se mais difícil de observar a bistabilidade, como será analisado a seguir.

A Fig. 4.14 mostra a transmitância T como função da excitação adimensional γ para um δ fixo. Os valores de $\tilde{d}$ estão indicados em cada subfigura. Aqui pode-se observar que também os picos concentram-se na região central quando $\tilde{d}$ aumenta, similarmente ao que foi observado na Fig. 4.12. Esta concentração de picos faz com que a capacidade de serem biestáveis diminua quando $\tilde{d}$ aumenta, fazendo difícil de ser observado este fenômeno.

Resumindo, a biestabilidade em meios não lineares saturáveis tipo-Kerr e tipo-Poynting poderia ser observada (em termos de parâmetros adimensionais) para excitações perto da unidade, coeficientes não-lineares adimensionais moderados, e espessuras pequenas.

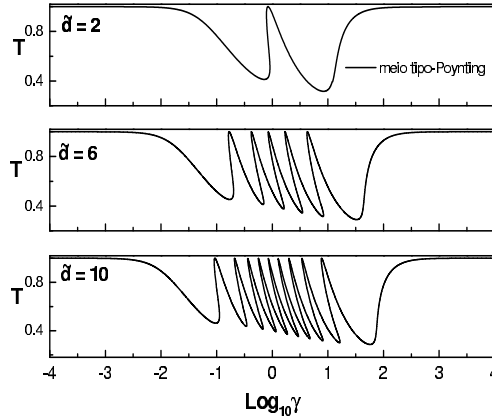


Figura 4.14 Transmitância T em função da excitação adimensional γ para um meio tipo-Poynting com $\delta = 6$.

4.4.3 Conclusões

Nesta seção foi estudada a transmitância de meios não lineares saturáveis com fronteiras planas e paralelas excitados por ondas planas. Os meios não lineares saturáveis considerados foram descritos através de uma permissividade não linear fenomenológica. O interesse da análise concentrou-se em levar em conta corretamente as fronteiras do meio e na resposta destes meios quando considerados como função da média temporal do vetor de Poynting, ou como função do módulo ao quadrado da amplitude do campo. Na análise foi observado que, para a faixa de parâmetros utilizada, os meios tipo-Kerr e tipo-Poynting se comportam em forma similar. Além disso, foi achado que estes meios têm resposta bistável a qual surge, não só da não linearidade do meio, senão também pela realimentação que provê a geometria considerada. A bistabilidade pode ser observada para intensidades ópticas de excitação comparáveis com a intensidade de saturação do material, para valores de saturação da permissividade moderados e espessuras comparáveis com o comprimento de onda da excitação. Neste caso, e se nossos resultados podem ser de utilidade em (2+1)D, sólitons biestáveis poderiam ser observados. Todavia, precisa-se de mais pesquisa nesta direção para confirmar ou refutar esta hipótese.

Conclusões gerais

Capítulo 5

Porque a ciência constrói-se através da troca de dúvidas e idéias, e porque esta tese foi feita através da troca de dúvidas e idéias entre muitas pessoas é que achei certo escrevê-la em primeira pessoa do plural. Do mesmo jeito, sabendo que nestas conclusões tenho que refletir o que tenho aprendido, desenvolvido, e concluído nestes quatro anos e em que direção pretendo seguir, mas dado que não fui o único que aprendeu neste tempo e que não penso continuar sozinho nas minhas pesquisas, é que vou continuar escrevendo no plural. Portanto, meu caro leitor, convido você a nos acompanhar nestas últimas linhas que darão conta do que fizemos e queremos fazer.

A gênese desta tese foi a proposta de realizar uma *Formulação Eletrodinâmica do Efeito Fotorefrativo* expressando as relações constitutivas correspondentes a tal efeito. O interesse surgia da grande importância destes materiais em diversas aplicações. Tendo as relações constitutivas pretendia-se estudar a mistura de ondas nos meios fotorrefrativos resolvendo as Equações Macroscópicas de Maxwell mas evitando aproximações sobre o vetor de Poynting, a SVEA e tratando corretamente as condições de fronteira. Nessa direção foi que começamos a trabalhar e já em meados do ano de 2003 obtínhamos os nossos primeiros resultados [119]. Todavia, dada a complexidade matemática do problema da mistura de ondas e da necessidade de caracterizar o meio particular a utilizar (devido à grande divergência na qualidade óptica dos cristais fotorrefrativos) é que decidimos primeiro estudar um caso simples. Nesse sentido foi escolhido trabalhar com uma geometria do tipo Fabry-Pérot onde o problema reduzia-se a estudar a transmitância de um meio fotocondutor, ou seja, finalmente era estudar a transmitância de um meio não-linear.

No estudo do Fabry-Perot não-linear, foi observado que se ao invés de estudar o problema em termos de duas ondas contra-propagantes (fato que conseqüentemente leva à necessidade

de desconsiderar os termos de acoplamento entre as ondas), era estudado em termos de um campo geral dentro do meio, então as Equações de Maxwell Macroscópicas podiam ser transformadas em um sistema de duas equações não-lineares acopladas em termos do módulo da amplitude do campo e a média temporal do vetor de Poynting. Então, daí foi observado que existe uma não equivalência entre este último e o módulo ao quadrado do campo dentro de um meio material (relacionada com a dependência espacial da fase do campo) e que tal diferença pode ser colocada explicitamente nas equações a resolver. Também foi notado que uma dessas duas equações representava a média temporal do teorema de Poynting. Portanto, dado que estas duas equações junto com as condições de fronteira (também escritas em termos do módulo da amplitude do campo e a média temporal do vetor de Poynting) permitiam resolver o problema de propagação de campos eletromagnéticos em meios finitos desde um ponto de vista não abordado anteriormente, é que elas adquiriram entidade em si mesmas e o método foi chamado de *Formalismo S* [53]. Paralelamente, o fato da não equivalência entre o módulo ao quadrado do campo e a média temporal do vetor de Poynting, nos permitiu a introdução de um novo tipo de meio chamado de *meio Poynting* [53] cuja resposta não linear aos campos eletromagnéticos é dada através da média temporal do vetor de Poynting. Dada a riqueza deste tipo de problema, é que decidimos dedicar-nos mais profundamente a ele. Então, estudamos as fontes da não equivalência nos meios lineares e suas conseqüências [65]. Contudo, e dada a importância do estudo de meios não lineares pela aplicação que encontram em várias áreas, fizemos a análise das propriedades ópticas dos meios com portadores de carga foto-induzidos [66] e da transmitância dos meios não lineares saturáveis [67]. Finalmente, uma análise macroscópica do momento linear, a força, e o momento angular, junto com uma dedução mais rigorosa do Formalismo S, permitiu dar uma base teórico-conceitual sólida aos nossos desenvolvimentos. Portanto, deixando que a razão ordene nossas idéias, escrevemos:

O nosso estudo baseou-se na suposição de que as Equações de Maxwell Macroscópicas são válidas para descrever os processos eletromagnéticos nos meios materiais e limitou-se aos

campos cuja transformada de Fourier temporal exista. A partir disso, foi demonstrado que, desde um ponto de vista macroscópico, o momento linear pode ser deduzido inequivocamente das Equações de Maxwell Macroscópicas, e que coincide com a expressão dada por Minkowski há mais de noventa anos, desde que seja considerada a correspondente modificação à força de Lorentz e o tensor de esforços seja escrito apropriadamente. Como suporte dessa definição, foi deduzida, também a partir das Equações de Maxwell Macroscópicas, uma equação que descreve o comportamento do momento linear frente a campos espacialmente não uniformes e distribuições de carga, e que dá conta da continuidade dele na fronteira entre dois meios. A partir desse momento linear, o correspondente momento angular, foi calculado e também foi achada uma equação que dá conta do comportamento e a continuidade dele. Calculando a média temporal do momento angular, foi demonstrado que suas contribuições orbital e de *spin* podem ser estudadas sem a necessidade de apelar aos campos de *gauge*. A propagação de campos eletromagnéticos em meios materiais, como é sabido, pode ser estudada desde um ponto de vista ondulatório a partir das suas componentes de Fourier através da equação de Helmholtz. No entanto, foi demonstrado que também a propagação dos campos pode ser estudada desde um ponto de vista energético já que existe uma relação direta entre a equação de Helmholtz e o Teorema de Poynting complexo. Essa relação foi estudada para a aproximação de campos com divergência nula e campos paraxiais. Também a quantidade conservada da equação de Helmholtz foi comparada com o vetor de Poynting complexo em cada aproximação. Foi demonstrado que a parte real do Teorema de Poynting complexo se corresponde com a média temporal do teorema de Poynting. A partir da versão complexa deste último para campos com divergência nula, foi estudada a propagação de campos eletromagnéticos em meios de faces planas e paralelas excitados por ondas planas. As equações de propagação correspondentes, junto com as condições de fronteira, foram escritas em termos do módulo da amplitude do campo e a média temporal do vetor de Poynting. Dado que a propagação de campos eletromagnéticos em meios de faces planas e paralelas poderia ser estudada diretamente a partir

desse conjunto de equações diferenciais e condições de fronteira, é que elas tomam relevância em si mesmas e, portanto, o conjunto foi chamado de *Formalismo S*. Este formalismo deixa entrever que quando a fase do campo apresenta uma dependência espacial não linear, o módulo ao quadrado dele e a média temporal do vetor de Poynting não são equivalentes. Então, com o intuito de desvendar as causas dessa não equivalência, foram estudadas as soluções do Formalismo S nos meios lineares e as conseqüências foram apontadas. A não equivalência permitiu a introdução teórica de um novo tipo de meio cuja não linearidade é proporcional à média temporal do vetor de Poynting. Este meio, chamado de *meio Poynting* apresenta diferenças relevantes com relação ao meio Kerr, onde a não-linearidade é proporcional ao módulo ao quadrado do campo. As condições de simetria dos meios Poynting foram estudadas e alguns materiais possíveis hospedeiros desses meios foram indicados. A possibilidade de lidar com não-linearidades dependentes da média temporal do vetor de Poynting, através do Formalismo S, permitiu estudar meios com portadores de carga foto-induzidos e interessantes resultados foram obtidos. Finalmente, os meios não lineares saturáveis foram analisados achando comportamentos similares para os meios tipo-Kerr e os tipo-Poynting. A origem dessa similaridade foi discutida e, aproveitando o fato de ter solução analítica simples para a transmitância, o comportamento geral dos meios tipo-Poynting foi estudado. Com isto fecham-se as pesquisas originais desenvolvidas nesta tese.

No futuro, pretende-se estender o Formalismo S a campos com distribuições de intensidade não uniforme nas coordenadas transversais à direção de propagação. O objetivo é estudar os efeitos das fronteiras em técnicas de caracterização de meios não lineares e a possível aparição de sólitons biestáveis em meios finitos. Em relação ao momento linear, pretende-se estudar experimentalmente a equação que determina seu comportamento frente a distribuições de carga através da propagação de campos eletromagnéticos na vizinhança de plasmas gerados por um pulso laser. Finalmente, do momento angular, pretendem-se abordar várias questões: as contribuições magnéticas ao momento angular e o torque magnético; a distribuição de momento

angular em padrões de *speckle* sua modificação/controle via efeito fotorrefrativo e a introdução destas distribuições em pinças ópticas para utilizá-las como agitadores ópticos de nanopartículas; a extensão da média temporal do momento angular total e suas contribuições orbital e de *spin* à Óptica Quântica, as analogias clássicas e o efeito de estados emaranhados.

Apêndice I

Transformada de Fourier e média temporal dos campos eletromagnéticos

Neste apêndice revisaremos brevemente alguns conceitos sobre transformadas de Fourier e suas propriedades. Consideremos um campo escalar $A(t)$, real e definido para todo tempo $t \in (-\infty, \infty)$ ¹. Supondo que $A(t)$ satisfaz as seguintes condições:

1. $|A(t)|$ deve ser integrável em $t \in (-\infty, \infty)$,
2. $A(t)$ deve ter um número finito de descontinuidades e um número finito de máximos e mínimos em qualquer intervalo de tempo finito,
3. $A(t)$ deve ter um número finito (ou infinito numerável) de descontinuidades,

então pode ser expandido em termos de uma transformada de Fourier dada por²

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (\text{I.1})$$

sendo $\omega \in (-\infty, \infty)$ a variável conjugada do tempo e representa a frequência angular do campo monocromático $A(\omega)$, sendo que este último é um campo escalar complexo que, dado que $A(t)$ é real, satisfaz $A(-\omega) = A^*(\omega)$.

Supondo que temos outro campo escalar real $B(t)$ que também pode ser escrito em termos uma transformada de Fourier, escrevemos as seguintes propriedades:

¹Dado que o tempo é uniforme, a escolha do tempo t_0 referida a algum evento particular é arbitrária e todos os tempos podem ser medidos em relação a t_0 . Definindo-se então $t_0 = 0$, é possível ter tempos negativos sem entrar em nenhuma contradição.

²Na verdade alguma destas condições pode ser relaxada mantendo as outras duas, mas essas considerações ficam fora do espírito deste apêndice. Portanto, fiquemos com as palavras de Bracewell [117], “a possibilidade física é uma condição suficiente para a existência da transformada”.

Prop. I.1: O produto entre os dois campos reais é igual a um quarto da transformada de Fourier da convolução das transformadas. Matematicamente:

$$A(t)B(t) = \frac{1}{4}\mathbb{F}[A(\omega) * B(\omega)], \quad (\text{I.2})$$

sendo que $*$ representa convolução.

Demonstração:

$$\begin{aligned} A(t)B(t) &= \frac{1}{4} \int \int A(\omega)B(\omega')e^{i(\omega+\omega')t}d\omega d\omega' = \\ &= \frac{1}{4} \int \int A(\omega)B(\omega'' - \omega)e^{i\omega''t}d\omega d\omega'' = \frac{1}{4}\mathbb{F}[A(\omega) * B(\omega)], \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

onde, da primeira para a segunda linha foi definida $\omega'' = \omega + \omega'$ e foi usado que $d\omega'' = d\omega'$.

Prop. I.2: A média temporal do produto entre os dois campos reais é igual a um meio da integral, no domínio das frequências angulares positivas, da parte real do produto de um campo complexo pelo conjugado do outro. Matematicamente:

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\infty \text{Re}\{A(\omega)B^*(\omega)\}d\omega. \quad (\text{I.4})$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \langle A(t)B(t) \rangle &= \frac{1}{4} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int \int A(\omega)B(\omega')e^{i(\omega+\omega')t}d\omega d\omega' dt = \\ &= \frac{1}{4} \int \int A(\omega)B(\omega')\delta(\omega + \omega')d\omega d\omega' = \frac{1}{4} \int A(\omega)B(-\omega)d\omega = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^0 A(\omega)B^*(\omega)d\omega + \frac{1}{4} \int_0^\infty A(\omega)B^*(\omega)d\omega = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{-1}{4} \int_{-\infty}^0 A(-\omega) B^*(-\omega) d\omega + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} A(\omega) B^*(\omega) d\omega = \\
& \frac{1}{4} \int_0^{\infty} A^*(\omega) B(\omega) d\omega + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} A(\omega) B^*(\omega) d\omega = \\
& \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}\{A(\omega) B^*(\omega)\} d\omega,
\end{aligned}$$

onde $\delta(x)$ é a função delta de Dirac.

Apêndice II

Solução das Eqs. (3.15) para os meios lineares

Neste apêndice apresentamos em detalhe a solução das Eqs. (3.15) quando as propriedades do meio referem-se ao absorvedor linear caracterizado por ϵ_t e σ_t constantes. O caso do dielétrico, além de ficar dado pela solução da equação de Steen-Emarkov-Pinney [61], pode-se obter dos resultados aqui apresentados tomando o limite $\sigma_r \rightarrow 0$.

As Eqs (3.15) podem ser reescritas como

$$2\frac{d^2u}{d\tilde{z}^2}u - \left(\frac{du}{d\tilde{z}}\right)^2 + 4\epsilon_r u^2 = 4S^2, \quad (\text{II.1a})$$

$$\frac{dS}{d\tilde{z}} = -\sigma_r u, \quad (\text{II.1b})$$

com $u = \mathcal{E}^2$ e as condições de fronteira ficam

$$\left[\frac{du}{d\tilde{z}}\right]_{\tilde{z}=\tilde{d}} = 0, \quad (\text{II.2a})$$

$$[S - u]_{\tilde{z}=\tilde{d}} = 0, \quad (\text{II.2b})$$

$$\left[(u + S)^2 + \frac{1}{4}\frac{du}{d\tilde{z}} - 4u\right]_{\tilde{z}=\tilde{d}} = 0. \quad (\text{II.2c})$$

Pela *homogeneidade* das Eqs. (II.1), escrevemos o seguinte *ansatz*:

$$u = A \exp(a\tilde{z}), \quad (\text{II.3a})$$

$$v = B \exp(a\tilde{z}). \quad (\text{II.3b})$$

Substituindo na Eq. (II.1), temos

$$a^2 = \pm \alpha_{\mp}. \quad (\text{II.4})$$

Então, a solução geral pode ser escrita (pela *homogeneidade* das Eqs. (II.1)) como uma combinação linear das quatro possíveis soluções de a :

$$u = A_1 \exp(\alpha_- \tilde{z}) + A_2 \exp(-\alpha_- \tilde{z}) + A_3 \exp(i\alpha_+ \tilde{z}) + A_4 \exp(-i\alpha_+ \tilde{z}) \quad (\text{II.5a})$$

$$v = \frac{\alpha_+ \alpha_-}{2} \left[-\frac{A_1}{\alpha_-} \exp(\alpha_- \tilde{z}) + \frac{A_2}{\alpha_-} \exp(-\alpha_- \tilde{z}) + i \frac{A_3}{\alpha_+} \exp(ik_0 \alpha_+ \tilde{z}) - i \frac{A_4}{\alpha_+} \exp(-i\alpha_+ \tilde{z}) \right] \quad (\text{II.5b})$$

As condições de fronteira fixam três das quatro constantes que aparecem na solução, a quarta é fixada por autoconsistência. Substituindo a Eq. (II.5a) na Eq. (II.1a), resulta

$$A_1 A_2 = A_3 A_4. \quad (\text{II.6})$$

Aplicando as condições de fronteira em $\tilde{z} = \tilde{d}$ e definindo $B = A_1/A_3$, $C = A_2/A_3$, e $BC = A_4/A_3$, temos

$$B = \left[\frac{2i\xi - (\alpha_- + i\alpha_+)}{2i\xi + (\alpha_- + i\alpha_+)} \right] \exp \left[(-\alpha_- + i\alpha_+) \tilde{d} \right], \quad (\text{II.7a})$$

$$C = \left[\frac{2i\xi - (\alpha_- - i\alpha_+)}{2i\xi + (\alpha_- - i\alpha_+)} \right] \exp \left[(\alpha_- + i\alpha_+) \tilde{d} \right], \quad (\text{II.7b})$$

e com a condição de fronteira em $\tilde{z} = 0$

$$A_3 = 4 \left[B(1 + \xi - \alpha_+) + C(1 + \xi + \alpha_+) + BC(1 - \xi - i\alpha_-) + (1 - \xi + i\alpha_-) \right]^{-1}. \quad (\text{II.8})$$

Substituindo estas expressões na Eq. (II.5a), fica

$$u = 4 \frac{(1 + \xi - \alpha_+) \exp [\alpha_- (\tilde{z}_r - 1)] + (1 + \xi + \alpha_+) \exp [-\alpha_- (\tilde{z}_r - 1)] +}{(1 + \xi - \alpha_+)^2 \exp [-\alpha_- \tilde{d}] + (1 + \xi + \alpha_+)^2 \exp [\alpha_- \tilde{d}] -} \\ + \frac{(\xi - 1 + i\alpha_-) \exp [-i\alpha_+ (\tilde{z}_r - 1)] + (\xi - 1 - i\alpha_-) \exp [i\alpha_+ (\tilde{z}_r - 1)]}{-(\xi - 1 + i\alpha_-)^2 \exp [i\alpha_+ \tilde{d}] - (\xi - 1 - i\alpha_-)^2 \exp [-i\alpha_+ \tilde{d}]}, \quad (\text{II.9a})$$

e

$$v = 2 \frac{(1 + \xi + \alpha_+) \alpha_+ \exp [-\alpha_- (\tilde{z}_r - 1)] - (1 + \xi - \alpha_+) \alpha_+ \exp [\alpha_- (\tilde{z}_r - 1)] +}{(1 + \xi - \alpha_+)^2 \exp [-\alpha_- \tilde{d}] + (1 + \xi + \alpha_+)^2 \exp [\alpha_- \tilde{d}] -} \\ + \frac{i(\xi - 1 - i\alpha_-) \alpha_- \exp [i\alpha_+ (\tilde{z}_r - 1)] - i(\xi - 1 + i\alpha_-) \alpha_- \exp [-i\alpha_+ (\tilde{z}_r - 1)]}{-(\xi - 1 + i\alpha_-)^2 \exp [i\alpha_+ \tilde{d}] - (\xi - 1 - i\alpha_-)^2 \exp [-i\alpha_+ \tilde{d}]}. \quad (\text{II.9b})$$

Destas equações as Eqs. (4.2) podem obter-se agrupando os termos exponenciais.

Apêndice III

Processos microscópicos das transições extrínsecas

Neste apêndice, revemos brevemente os processos microscópicos que aparecem em transições extrínsecas tipo-n e calculamos a forma da densidade de portadores de carga foto-induzidos. Com relação à Fig. III.1 vemos que existe uma densidade de centros doadores N_D os quais, na ausência de excitação óptica podem se encontrar igualmente excitados termicamente (N_{D+}) tanto na banda de condução dando uma densidade de portadores livres n_0 ou apanhados em centros aceitadores N_A que não interagem com a luz. Sob excitação óptica, alguns dos centros disponíveis ($N_D - N_{D+}$) cedem elétrons para a banda de condução com probabilidade α , então, eles podem se recombinar através da recombinação bimolecular $N_{D+}n_0$ com probabilidade β . Por conseguinte, a equação de taxa que descreve estes processos é

$$\frac{dn}{dt} = (N - N_{D+})\alpha I_o S - \beta N_{D+}n, \quad (\text{III.1})$$

onde a dependência espacial e temporal das funções foi omitida por simplicidade. A neutralidade do meio impõe a condição

$$N_{D+} = n + n_0 + N_A. \quad (\text{III.2})$$

Então, para $d/dt = 0$, a Eq. (III.1) (com a condição anterior) tem como solução:

$$\frac{n(z)}{(n_0 + N_A)} = \frac{\xi' S(z) + 1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4(N_{0A} - 1)\xi' S(z)}{(\xi' S(z) + 1)^2}} - 1 \right), \quad (\text{III.3})$$

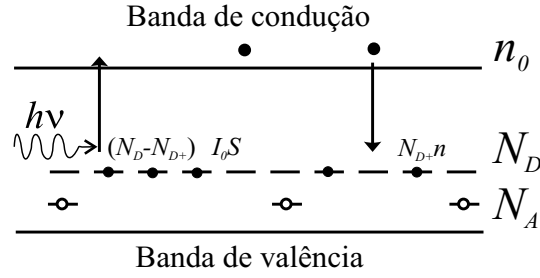


Figura III.1 Representação esquemática das transições extrínsecas tipo-n. Os elétrons são excitados desde centros dadores N_D para a banda de condução e nela podem se recombinar.

onde, $\xi' = \alpha I_o / (\beta(n_0 + N_A))$ é o coeficiente de excitação extrínseco e $N_{0A} = N / (n_0 + N_A)$ é a densidade relativa extrínseca de átomos. Esta expressão é conhecida para materiais fotorefrativos [118] e em geral para semicondutores extrínsecos [91]. Então, para transições extrínsecas também a densidade relativa de portadores de carga foto-induzidos pode ser estudada em termos de só dois parâmetros adimensionais: ξ' e N_{0A} . Dado que desde um ponto de vista prático, sempre $\xi' \gg 1$ a dependência funcional da Eq. (III.3) é a mesma que a da Eq. (4.22). Então, os resultados obtidos para transições interbanda intrínsecas podem ser também aplicados para transições extrínsecas.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, *On the Electrodynamics of Moving Bodies*, Ann. Phys. **17**, 891 (1905).
- [2] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th Ed., (Oxford University Press, New York, 1999), pp.276-280.
- [3] A. Czarnecki e W.J. Marciano, *Electrons are not ambidextrous*, Nature **435**, 437 (2005); A. Gumberidze *et al*, *Quantum Electrodynamics in Strong Electric Fields: The Ground-State Lamb Shift in Hydrogenlike Uranium*, Phys. Rev. Lett. **94**, 223001 (2005).
- [4] K.J. van Vlaenderen e A. Waser, *Generalisation of classical electrodynamics to admit a scalar field and longitudinal waves*, Hadronic Journal 24, 609 (2001); K.J. van Vlaenderen, *A generalisation of classical electrodynamics for the prediction of scalar field effects*, arXiv:physics/0305098.
- [5] J. C. Maxwell, *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, Phil. Trans. Roy. Soc. of London **155**, 459 (1865). (Este artigo complementa uma apresentação à Royal Society do 8 de Dezembro de 1864).
- [6] A F. Kip, *Fundamentos de Electricidad y Magnetismo*, (McGraw-Hill, México, 1972), p. 123.
- [7] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd. ed., (Jhon Wiley & Sons Inc., New York, 1999), pp.248-258.
- [8] M. Hillery e L.D. Mlodinow, *Quantization of electrodynamics in nonlinear dielectric media*, Phys. Rev. A **30**, 1860 (1984); S.M. Dutra e K. Furuya, *Macroscopic averages in QED in material media*, Phys. Rev. A **55**, 3832 (1997); M. Hillery e L. Mlodinow, *Quantized fields in a nonlinear dielectric medium: A microscopic approach*, Phys. Rev. A **55**, 678 (1997);

- M. E. Crenshaw, *Microscopic foundation of macroscopic quantum optics*, Phys. Rev. A **67**, 033805 (2003); S. Scheel e Dirk-Gunnar Welsch, *Quantum Theory of Light and Noise Polarization in Nonlinear Optics*, Phys. Rev. Lett. **96**, 073601 (2006).
- [9] A. Lakhtakia e W.S. Weiglhofer, *Constraint on linear, spatiotemporally nonlocal, spatiotemporally nonhomogeneous constitutive relations*, Int. J. Infr. Millim. Waves **17**, 1867 (1996); A. Lakhtakia e W.S. Weiglhofer, *Are Field Derivatives Needed in Linear Constitutive Relations?*, Int. J. Infr. Millim. Waves **19**, 1073 (1998); R.E. Raab e O.L. de Lange, *Symmetry constraints for electromagnetic constitutive relations*, J. Opt. A: Pure Appl. Opt. **3**, 446 (2001); A. Lakhtakia, *On the genesis of Post constraint in modern electromagnetism*, Optik **115**, 151 (2004).
- [10] W.S. Weiglhofer e A. Lakhtakia, *A brief review of a new development for constitutive relations of linear bi-anisotropic media*, IEEE Antennas and Propagation Magazine **37**, 32 (1995); O.L. de Lange e R.E. Raab, *Traceless multipole moment densities and transformations in macroscopic electromagnetism*, Phys. Rev. E **71**, 036620 (2005); A. Morra e M. Fabrizio, *Electromagnetism of Continuous Media: Mathematical Modelling and Applications*, (Oxford University Press, New York, 2003).
- [11] G. Muñoz, *Effective Lagrangians and nonlinear electromagnetism*, Am. J. Phys. **64**, 1285 (1996); M. Novello, V.A. De Lorenci, J.M. Salim, e R. Klippert, *Geometrical aspects of light propagation in nonlinear electrodynamics*, Phys. Rev. D **61**, 045001 (2000). M. Novello, S.E. Perez Bergliaffa, *Effective Geometry*, arXiv:gr-qc/0302052.
- [12] R. Schützhold, G. Plunien, e G. Soff, *Dielectric Black Hole Analogs*, Phys. Rev. Lett. **88**, 061101 (2002); R. da Rocha e Igor Leite Freire, *Spacetime Deformations and Electromagnetism in Material Media*, arXiv:physics/0502012; R.W. Tucker, *A spacetime description of relativistic media*, Phil. Mag. **85**, 3911 (2005).

- [13] J.A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing, e P.S. Pershan, *Interactions between Light Waves in a Nonlinear Dielectric*, Phys. Rev. **127**, 1918 (1962).
- [14] D.L. Mills, *Nonlinear Optics*, (Springer-Verlag, Berlin, 1991), p.167.
- [15] M. Sheik-Bahae, A.A. Said, T.-H. Wei, D.J. Hagan, e E.W. Van Stryland, *Sensitive measurement of optical nonlinearities using a single beam*, IEEE J. Quantum Electron. **26**, 760 (1990).
- [16] R. Tao, Z. Chen, e P. Sheng, *First-principles Fourier approach for the calculation of the effective dielectric constant of periodic composites*, Phys. Rev. B **41**, 2417 (1990); K. Sakoda e K. Ohtaka, *Optical response of three-dimensional photonic lattices: Solutions of inhomogeneous Maxwell's equations and their applications*, Phys. Rev. B **54**, 5732 (1996).
- [17] M. J. Grote e C. Kirsch, *Dirichlet-to-Neumann boundary conditions for multiple scattering problems*, J. Comp. Phys. **201**, 630 (2004); A. Lakhtakia, *Boundary value problems and the validity of the Post constraint in modern electromagnetism*, arXiv:physics/0506096.
- [18] Y.R. Shen, *The principles of Nonlinear Optics*, (Jhon Wiley & Sons, New york, 1984), p.47.
- [19] B. Jancewicz, *Plane electromagnetic wave propagating parallel to the gradient of the refractive index*, J. Opt. Soc. Am. A **8**, 1529 (1991).
- [20] J.S. Kole, M.T. Figge e H. De Raedt, *Unconditionally stable algorithms to solve the Time-Dependent Maxwell Equations*, Phys. Rev. E **64**, 066705 (2001); H. Bachiri e L. Vazquez, *Finite difference method to solve Maxwell's equations for soliton propagation*, Appl. Math. Comp. **126**, 213 (2002).
- [21] Ref. [7], p.608

- [22] I. Brevik, *Experiments in phenomenological electrodynamics and the electromagnetic energy-momentum tensor*, Phys. Rep. **52**, 133 (1979).
- [23] D.F. Nelson, *Generalizing the Poynting Vector*, Phys. Rev. Lett. **76**, 4713 (1996).
- [24] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm, e S. Chu, *Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles*, Opt. Lett. **11**, 288 (1986); D. G. Grier, *A revolution in optical manipulation*, Nature **424**, 810 (2003).
- [25] L. Allen, S. M. Barnett e M. J. Padgett, *Optical Angular Momentum*, (Intitut of Physics Publishing, London,2003); J. Courtial, R. Zambrini, M. R. Dennis e M. Vasnetsov, *Angular momentum of optical vortex arrays*, Opt. Express **14**, 938 (2006).
- [26] L. Marrucci, C. Manzo, e D. Paparo, *Optical Spin-to-Orbital Angular Momentum Conversion in Inhomogeneous Anisotropic Media*, Phys. Rev. Lett. **96**, 163905 (2006).
- [27] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media*, (Pergamosn Press, New York, 1975), p.337.
- [28] Ref. [18], pp.86-140.
- [29] A. Yariv, *Optical Electronics*, 4th Ed., (Saunders College Publishing, New York, 1991), pp.258-308.
- [30] J.M. Cabrera, F.J. López e F. Agulló López, *Óptica electromagnética, fundamentos*, (Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1993), p.146, p.150.
- [31] J. F. Nye, *Physical properties of crystals*, (Oxford University Press, New York, 2000), p.20.
- [32] P. Ewald, *Zur Begründung der Kristalloptik*, Munich, 1912 (uma tradução ao ingles por L.M. Hollingsworth está disponível como U.S. Air Force Report AFCRL-70-0580); Ann. Phys. **354**, 1 (1916).

- [33] C.W. Osen, *Über die Wechselwirkung zwischen zwei elektrischen Dipolen und über die Drehung der Polarisationssebene in Kristallen und Flüssigkeiten*, Ann. Phys. **353**, 1 (1915).
- [34] Ref. [7], p.16
- [35] Ref. [7], p.19.
- [36] I. Campos e J.L. Jiménez, *About Poynting's theorem*, Eur. J. Phys. **13**, 117 (1992).
- [37] J.H. Poynting, Phil. Trans. Roy. Soc. London A **175**, 343 (1884).
- [38] J.M. Carcione, *On the energy in electromagnetism: An analogy with viscoelasticity*, J. Acoust. Soc. Am. **105**, 626 (1999).
- [39] Ref. [30], p.154.
- [40] M. Fernández Guasti, *The Poynting theorem for complex fields*, Rev. Mex. Fis. **47**, 105 (2001).
- [41] R. Horák, Z. Bouchal, e J. Bajar, *Nondiffracting stationary electromagnetic field*, Opt. Commun. **133**, 315 (1997).
- [42] Z. Bouchal, R. Horák, e J. Wagner, *Propagation-invariant electromagnetic fields: theory and experiment*, J. Mod. Opt. **43**, 1905 (1996).
- [43] A. T. O'Neil, I. Mac Vicar, L. Allen e M.J. Padgett, *Intrinsic and extrinsic nature of the orbital angular momentum of a light beam*, Phys. Rev. Lett. **88**, 053601 (2002)
- [44] Ref. [7], p.350
- [45] C. Cohen-Tannoudji et al, *Photons and Atoms*, (Wiley, 1988), pp. 46-47.
- [46] A.M. Stewart, *Angular momentum of light*, J. Mod. Opt. **52**, 1145 (2005);
- [47] K. Gottfried, *Quantum Mechanics*, (Benjamin/Cummings, 1966), p.413.

- [48] M. Berry, *Paraxial beams of spinning light*, Proc. SPIE **3487**, 6 (1998).
- [49] L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw e J.P. Woerdman, *Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes*, Phys. Rev. A **45**, 8185 (1992).
- [50] B. Biran, *Perturbational self-consistent stationary approach to a nonlinear Fabry-Perot*, Opt. Commun. **78**, 183 (1990).
- [51] B. Crosignani, P. Di Porto, e A. Yariv, *Nonparaxial equation for linear and nonlinear optical propagation*, Opt. Lett. **22**, 778 (1997); A. Ciattoni, P. Di Porto, B. Crosignani e A. Yariv, *Vectorial nonparaxial propagation equation in the presence of a tensorial refractive-index perturbation*, J. Opt. Soc. Am. B **17**, 809 (2000); P. Chamorro-Posada, G.S. McDonald, e G.H.C. New, *Non-paraxial beam propagation*, Opt. Commun. **192**, 1 (2001); P. Chamorro-Posada, e G.S. McDonald, *Helmholtz dark solitons*, Opt. Lett. **28**, 825 (2003); A. Ciattoni, B. Crosignani, P. Di Porto, J. Scheuer e A. Yariv, *On the limits of validity of nonparaxial propagation equations in Kerr media*, Opt. Exp. **14**, 5517 (2006).
- [52] R. Dorn, S. Quabis and G. Leuchs, *Sharper focus for a radially polarized light beam*, Phys. Rev. Lett. **91**, 233901 (2003).
- [53] A. Lencina e P. Vaveliuk, *Squared-field amplitude modulus and radiation intensity nonequivalence within nonlinear slabs*, Phys. Rev. E **71**, 056614 (2005).
- [54] Ref. [7], p. 265.
- [55] H.M. Gibbs, S.L. McCall e T.N.C. Venkatesan, *Differential Gain and Bistability Using a Sodium-Filled Fabry-Perot Interferometer*, Phys. Rev. Lett **36**, 1135 (1976).
- [56] J.H. Marburger e F.S. Felber, *Theory of a lossless nonlinear Fabry-Perot interferometer*, Phys. Rev. A **17**, 335 (1978).

- [57] D.A.B. Miller, *Refractive Fabry-Perot bistability with linear absorption: Theory of operation and cavity optimization*, IEEE J. Quantum Electron. **QE-17**, 306 (1981).
- [58] J. Danckaert *et al.*, *Self-consistent stationary description of a nonlinear fabry-perot*, Opt. Commun. **71**, 317 (1989).
- [59] K. Fobelets e K. Thielemans, *Optical media with an imaginary third-order nonlinearity analyzed by Hamiltonian systems*, Phys. Rev. A **53**, 4400 (1996).
- [60] W. Chen e D.L. Mills, *Optical response of a nonlinear dielectric film*, Phys. Rev. B **35**, 524 (1987); *Optical behavior of a nonlinear thin film with oblique S-polarized incident wave*, *ibid.* **38**, 12814 (1988).
- [61] R. Redheffer, Aequationes Math. **58**, 60 (1999).
- [62] M. Fernández-Guasti, J.I. Jiménez, F. Granados-Agustín e A. Cornejo-Rodríguez, *Amplitude and phase representation of monochromatic fields in physical optics*, J. Opt. Soc. Am. **20**, 1629 (2003).
- [63] M. Fernández-Guasti, R. Diamant e A. Gil Villegas, *Markov equation arising from electromagnetic fields propagating in 1D inhomogeneous media*, Rev. Mex. Fis. **46**, 530 (2000).
- [64] M. Born e E. Wolf, *Principles of Optics*, (Cambridge University Press, New York, 2003), 7th. ed. (reprinted), p. 747.
- [65] A. Lencina, B. Ruiz e P. Vaveliuk, *Alternative method for wave propagation analysis within bounded linear media: conceptual and practical implications*, ArXiv: physics/0411243v2 (2004).
- [66] A. Lencina, P. Vaveliuk, B. Ruiz, M. Tebaldi e N. Bolognini, *Wave propagation and optical properties in slabs with light-induced free-charge-carriers*, Phys. Rev. E **74**(3), xxxxxx (2006).

- [67] A. Lencina e P. Vaveliuk, *Optical transmittance of plane-parallel-faces saturable media*, submetido para publicação.
- [68] Ref. [7], pp.295-298.
- [69] Ref. [64], pp. 60-62.
- [70] J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, (McGraw-Hill, New York , 1941), pp. 511-516.
- [71] Ref. [30], pp. 158-162.
- [72] J.B. Pendry, A.J. Holden, W.J. Stewart, e I. Youngs, *Extremely Low Frequency Plasmons in Metallic Mesostructures*, Phys. Rev. Lett. **76**, 4773 (1996).
- [73] D.R. Smith, W.J. Padilla, D.C. Vier, S.C. Nemat-Nasser, e S. Schultz, *Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity*, Phys. Rev. Lett. **84**, 4184 (2000); R.A. Shelby, D.R. Smith, e S. Schultz, *Experimental Verification of a Negative Index of Refraction*, Science **292**, 77 (2001).
- [74] S. O'Brien e J.B. Pendry, *Photonic band-gap effects and magnetic activity in dielectric composites*, J. Phys.: Cond. Matt. **14**,4035 (2002).
- [75] Ping Xu e Zhen-Ya Li, *Study of frequency band gaps in metal-dielectric composite materials*, J. Phys. D: Appl. Phys. **37**, 1718 (2004).
- [76] V.A. Podolskiy, A.K. Sarychev, E.E. Narimanov e V.M. Shalaev, *Resonant light interaction with plasmonic nanowire systems*, J. Opt. A **7**, S32 (2005); V. Yannopapas, e A. Moroz, *Negative refractive index metamaterials from inherently non-magnetic materials for deep infrared to terahertz frequency ranges*, J. Phys.: Cond. Matt. **17**, 3717 (2005); Yi-Fan Chen, P. Fischer, e F.W. Wise, *Sign of the refractive index in a gain medium with negative permittivity and permeability* , J. Opt. Soc. Am. B **23**, 45 (2006).

- [77] A. Lakhtakia, *An Electromagnetic Trinity from “Negative Permittivity” and “Negative Permeability”*, Int. J. Infrared Millim. Waves **23**, 813 (2002).
- [78] N.B. Baranova, Yu. V. Bogdanov e B. Ya. Zel’dovich, *Electrical analog of the Faraday effect and other new optical effects in liquids*, Opt. Commun. **22**, 243 (1977).
- [79] Ref. [7], p. 271.
- [80] D.A.B. Miller, S.D. Smith e A. Johnston, *Optical bistability and signal amplification in a semiconductor crystal: applications of new low-power nonlinear effects in InSb*, Appl. Phys. Lett. **35**, 658 (1979).
- [81] N.I. Koroteev, Kvantovaya Elektron. **21**, 1063 (1994).
- [82] M. Sheik-Bahae, A.A. Said, T.-H. Wei, D.J. Hagan, E.W. Van Stryland, *Sensitive measurement of optical nonlinearities using a single beam*, IEEE J. Quantum Electron. **QE-26**, 760 (1990).
- [83] T.F. Boggess, S.C. Moss, I.W. Boyd, e A.L. Smirl, *Nonlinear-optical energy regulation by nonlinear refraction and absorption in silicon*, Opt. Lett. **9**, 291 (1984).
- [84] T.F. Boggess Jr., A.L. Smirl, S.C. Moss, I.W. Boyd, e E.W. Van Stryland, *Optical limiting in GaAs*, IEEE J. Quantum. Electron. **QE-21**, 488 (1985).
- [85] A. I. Ryasnyanskiy, *Nonlinear refraction, nonlinear absorption, and optical limiting in BSO and BGO photorefractive crystals*, Proc. SPIE **5460**, 179 (2004).
- [86] D.L. Smith, *Theory of generation-recombination noise in intrinsic photoconductors*, J. Appl. Phys. **53**, 7051 (1982).
- [87] R.H. Young, *Analytic modeling of the discharge of a unipolar photoconductor*, J. Appl. Phys. **60**, 272 (1988).

- [88] I. Chen, *Effects of bimolecular recombination on photocurrent and photoinduced discharge*, J. Appl. Phys. **49**, 1162 (1978).
- [89] E. Theocharous, J. Ishii e N.P. Fox, *Absolute Linearity Measurements on HgCdTe Detectors in the Infrared Region*, Appl. Opt. **43**, 4182 (2004).
- [90] R.A. Smith, *Detectors for ultraviolet, visible, and infrared radiation*, Appl. Opt. **4**, 631 (1965).
- [91] T.J. Brukilacchio, M.D. Skeldon, e R.W. Boyd, *Generation-recombination noise in extrinsic photoconductive detectors*, J. Opt. Soc. Am. B **1**, 354 (1984).
- [92] M. di Domenico Jr., W.M. Sharpless, e J.J. Mc Nicol, *High speed photodetection in germanium and silicon cartridge-type point-contact photodiodes*, Appl. Opt. **4**, 677 (1965).
- [93] E.H. Putley, *Indium antimonide submillimeter photoconductive detectors*, Appl. Opt. **4**, 649 (1965).
- [94] M. Gao, S. Kaplan, R. Pankrath, X. Feng, Y. Tang, e V. Vikhnin, *Light-induced VIS-absorption and light-induced charge transfer in pure and doped SBN crystals*, J. Phys. Chem. Solids **61**, 1775 (2000).
- [95] L. Mosquera, I. de Oliveira, J. Frejlich, A.C. Hernandez, S. Lafrendi, e J.F. Carvalho, *Dark conductivity, photoconductivity, and light-induced absorption in photorefractive silenite crystals*, J. Appl. Phys. **90**, 2635 (2001).
- [96] K. Takizawa, M. Okada, H. Kikuchiand, e T. Aida, *Bistable spatial light modulator using liquid crystal and $Bi_{12}SiO_{20}$ crystal layers*, Appl. Phys. Lett. **53**, 2359 (1988).
- [97] A.E. Attard, *Photoconductive and photorefractive effects in BSO*, Appl. Opt. **28**, 5169 (1989); R.C. Hughes e R.J. Sokel, *Computation of photoconductivity in insulators in the*

- space charge and recombination regime: Application to PbO films*, J. Appl. Phys. **52**, 6743 (1981).
- [98] P. Dittrich, B. Koziarska-Glinka, G. Montemezzani, P. Günter, S. Takekawa, K. Kitamura, e Y. Furukawa, *Deep-ultraviolet interband photorefraction in lithium tantalate*, J. Opt. Soc. Am. B **21**, 632 (2004).
- [99] H. Zeng, C. Liu, S. Tokura, M. Kira, e Y. Segawa, *Optical limiting and bistability of a s-p photoconductive copolymer*, Chem. Phys. Lett. **331**, 71 (2000).
- [100] R.C. Hughes, *Bulk recombination of charge carriers in polymer films: poly-N-vinylcarbazole complexed with trinitrofluorenone*, Appl. Phys. Lett. **21**, 196 (1972).
- [101] H. Haug e S.W. Koch, *Quantum theory of the optical and electronic properties of semiconductors*, 3rd ed. (World Scientific, Singapore, 1998) pp. 274.
- [102] R.H. Bube, *"Photoconductivity of Solids"* 2ed., (Jhon Wiley & Sons, New York, 1967) p.326.
- [103] L.W. Tutt e T.F. Boggess, *A review of optical limiting mechanisms and devices using organics, fullerenes, semiconductors and other materials*, Prog. Quantum. Electron. **17**, 299 (1993).
- [104] See, for example, Ref. [101], pp. 1-16.
- [105] D.H. Auston, S. Mc Afee, C.V. Shank, E.P. Ippen, e O. Teschke, *Picosecond spectroscopy of semiconductors*, Solid-State Eletron. **21**, 147 (1978).
- [106] R.S. Hansen, *Modeling of the Nonlinear Response of the Intrinsic HgCdTe Photoconductor by a Two-Level Rate Equation with a Finite Number of Carriers Available for Photoexcitation*, Appl. Opt. **42**, 4819 (2003).

- [107] A. Carbone e P. Mazetti, *Current noise in barrier photoconducting devices. I. Theory*, Phys. Rev. B **49**, 7592 (1994).
- [108] C.D. Poole e E. Garmire, *Optical bistability at the band gap in InAs*, Appl. Phys. Lett. **44**, 363 (1984).
- [109] T.F. Boggess, S.C. Moss, I.W. Boyd, e A.L. Smirl, *Nonlinear-optical energy regulation by nonlinear refraction and absorption in silicon*, Opt. Lett. **9**, 291 (1984).
- [110] S.J. Rychnovsky, G.R. Allan, C.H. Venzke, A.L. Smirl, e T.F. Boggess, *Optical nonlinearities and optical limiting in GaP at 532 nm*, Proc. SPIE 1692, 191 (1992).
- [111] See, for example, Ref. [101], Chap. 5.
- [112] E.L. Dawes e J.H. Marburger, *Computer Studies in Self-Focusing*, Phys. Rev. **179**, 862 (1969) .
- [113] Y.S. Kivshar, e B. Luther-Davies, *Dark optical solitons: physics and applications*, Phys. Rep. **298**, 81 (1998).
- [114] G.C. Valley, M. Segev, B. Crosignani, A. Yariv, M.M. Fejer e M. Bashaw, *Dark and bright photovoltaic spatial solitons*, Phys. Rev. A **50**, R4457 (1994).
- [115] A.E. Kaplan, *Bistable Solitons*, Phys. Rev. Lett. **55**, 1291 (1985).
- [116] R.H. Enns, L.J. Mulder, *Bistable holes in nonlinear optical fibers*, Opt. Lett. **14**, 509 (1989).
- [117] R.N. Bracewell, *The Fourier transforms and its applications*, (McGraw-Hill Book Company, New York, 1965).
- [118] P. Vaveliuk, B. Ruiz, e N. Bolognini, *Analysis of the steady-state photorefractive harmonic gratings*, Phys. Rev. B **59**, 10985 (1999); P. Vaveliuk, B. Ruiz, O. Martinez Matos,

- G. A. Torchia, e N. Bolognini, *An electron-hole transport model for the analysis of the photorefractive harmonic gratings*, IEEE J. Quantum Eletron. **37**, 1040 (2001).
- [119] A. Lencina, *Formulação Eletrodinâmica do Efeito Fotorrefrativo*, seminário apresentado ao Grupo de Óptica, Departamento de Física da Matéria Condensada, Universidade Estadual de Campinas, 12/05/2004; A. Lencina e P. Vaveliuk, *Electrodynamics formulation of photorefractive effect*, V REUNIÓN IBEROAMERICANA DE ÓPTICA - VIII ENCUENTRO LATINOAMERICANO DE ÓPTICA, LÁSERES Y SUS APLICACIONES, Porlamar, Venezuela. Septiembre de 2004.