



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Física

TESE DE DOUTORADO

2010

VIOLAÇÃO DE LORENTZ E TEORIA DE GRAVITAÇÃO MODIFICADA

Alessandro Ferreira dos Santos

Orientador:

Prof. Dr. José Roberto Soares do Nascimento

Co-Orientador:

Prof. Dr. Albert Petrov

Alesandro Ferreira dos Santos

VIOLAÇÃO DE LORENTZ E TEORIA DE GRAVITAÇÃO MODIFICADA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador:

Prof. Dr. José Roberto Soares do Nascimento

Co-Orientador:

Prof. Dr. Albert Petrov

João Pessoa - PB

— Março de 2010 —

3237v Santos, Alesandro Ferreira dos
Violação de Lorentz e teoria de gravitação modificada / Alesandro Ferreira dos Santos . - - João Pessoa : [s.n.], 2010.
107f. : il.
Orientador: José Roberto Soares do Nascimento.
Tese (Doutorado) – UFPB /CCEN.
1.Física. 2.Simetrias de Lorentz. 3.Energia livre. 4.Gravitação modificada.
5.Métrica de Godel.

UFPB/BC

CDU: 53(043)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física



DECLARAÇÃO

A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 12 de março de 2010, na Sala de Reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, **aprova** o Sr. **Alexandro Ferreira dos Santos** na defesa de sua tese intitulada "*Violação de Lorentz e a teoria da gravitação modificada*".

João Pessoa, 12 de março de 2010

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
(UFCG)

Prof. Dr. Cláudio Benedito da Silva
Furtado
(UFPB)

Prof. Dr. Alysson Ferrari
(UFABC)

Prof. Dr. Adolfo Malbouisson
(CBPF)

Presidente (Orientador)
Prof. Dr. José Roberto Soares
Nascimento
(UFPB)



CCEN

(Co-orientador)
Albert Petrov
(UFPB)

À vida.

A vida é maravilhosa se não se tem medo dela.

Charles Chaplin

“Você ganha força, coragem e confiança a cada experiência em que enfrenta o medo. Você tem de fazer exatamente aquilo que acha que não consegue.”

Eleanor Roosevelt

Agradecimentos

- Ao professor José Roberto pela orientação, dedicação e motivação na realização deste trabalho.
- À minha esposa pelo apoio e confiança.
- Ao colega e colaborador Tiago Mariz, assim como aos demais professores que colaboraram com este trabalho, Cláudio, Albert, Marcelo e Adilson.
- Aos professores e funcionários do departamento de física da UFPB que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.
- Aos colegas e amigos do departamento de física da UFPB, em especial aos que dividiram sala comigo nesse período.
- Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta tese estudamos a quebra espontânea das simetrias de Lorentz e CPT em um modelo de quatro férmions quadridimensional em temperatura zero e em temperatura finita. Em temperatura zero encontramos que essas simetrias podem ser violadas, já em temperatura finita mostramos que pode existir uma temperatura para a qual essas mesmas simetrias que foram quebradas em temperatura zero podem ser restauradas. Mostramos que é possível obter uma equação de Friedmann em cinco dimensões na presença de termos que violam as simetrias de Lorentz, e como solução dessa equação encontramos que a evolução do universo pode ter um comportamento não usual, oscilando entre fases aceleradas e desaceleradas. Analisamos a eletrodinâmica quântica estendida no limite de altas temperaturas. Nosso objetivo é estudar as modificações que a violação de Lorentz pode causar na energia livre da eletrodinâmica quântica e com isso usar dados experimentais relacionados a energia livre para estimar um valor numérico para o parâmetro de quebra das simetrias de Lorentz. Estudamos uma proposta de modificação da gravitação, esta proposta consiste em adicionarmos o termo de Chern-Simons a gravitação usual. O assunto com maior destaque nesta nova teoria de gravitação é a busca por soluções que ocorrem na relatividade geral e que de algum modo persistem nesta teoria modificada. Mostramos que para uma determinada escolha do campo escalar que é introduzido junto ao termo de Chern-Simons na teoria, é possível termos importantes soluções da relatividade geral nesta nova teoria de gravitação, como a solução de Schwarzschild, a métrica de Gödel, entre outras. Estudamos com maior ênfase a solução de Gödel, mostrando que é possível termos essa solução na teoria modificada tanto no caso em que interpretamos o campo escalar como um campo externo, quanto no caso em que o interpretamos como um campo dinâmico, esta última interpretação nos conduz a modificações importantes em parâmetros da teoria.

Palavras-chave: violação das simetrias de Lorentz e CPT, energia livre, gravitação modificada e métrica de Gödel.

Áreas do conhecimento: teoria quântica de campos, gravitação.

Abstract

In this thesis we study the Lorentz and CPT symmetries breaking in a 4D four-fermions model at zero and at finite temperature. At zero temperature we find that these symmetries can be violated, but at finite temperature we show that there is a critical temperature at which the Lorentz and CPT symmetries are restored. We show that it is possible obtain the Friedmann equation in five dimensions in the presence of terms that violate the Lorentz symmetries , and as solution of this equation we find that the evolution of the universe is not usual, oscillating between accelerated phases and desaccelerated phases. We analyse the extension of the quantum eletrodynamics in the limit of high temperatures. Our aim is study the modifications that the Lorentz violation can cause in the free energy of the quantum eletrodynamics and with this to use experimental data related the free energy to estimate a numeric value to the parameter of Lorentz violation. We study a proposal of modification of the gravitation, this proposal consist in adding the Chern-Simons term to the usual gravitation. The issue most notable in this theory of gravitation is the search for solutions that occur in the general relativity and that somehow persist in this new theory. We show that for a given choice of scalar field that is introduced together with the Chern-Simons term, it is possible to find important solutions of the general relativity in this new theory of gravitation, as the Schwarzschild solution, the Gödel metric, among others. We study with emphasis the Gödel solution, showing that it is possible the existence this solution in the modified theory when we interpret the scalar field as a external field and when we interpret this same field as a dynamic field, this last interpretation leads the important modifications in parameter of the theory.

Keywords: violation of Lorentz symmetries and CPT, free energy, modified gravitation and Gödel metric.

Conteúdo

Lista de Figuras	x
Introdução	1
1 Quebra Espontânea de Simetria	7
1.1 Um simples exemplo de quebra espontânea de simetria	7
1.2 O mecanismo de Higgs	8
1.3 O Modelo Bumblebee	10
1.4 Quebra dinâmica da simetria de Lorentz em um modelo de quatro-férmions	12
1.5 Restauração da simetria de Lorentz em temperatura finita	20
1.6 Equação de Friedmann com quebra espontânea da simetria de Lorentz . . .	26
2 Eletrodinâmica quântica estendida	34
2.1 Modelo padrão estendido	34
2.2 Energia livre da eletrodinâmica quântica estendida em altas temperaturas .	36
2.2.1 A energia livre	40
2.2.1.1 Contribuição de um loop	41
2.2.1.2 Contribuição de dois loops	44
2.2.2 Estimativa numérica	47
3 Gravitação modificada pelo termo de Chern-Simons	50
3.1 Algumas motivações que podem levar a modificações	50
3.2 Ação de Einstein-Hilbert-Chern-Simons	53

3.3	Solução de Schwarzschild	55
4	Solução de Gödel na gravitação modificada	58
4.1	O universo de Gödel	58
4.2	Introduzindo a métrica de Gödel na gravitação de Chern-Simons	61
4.3	Campo escalar θ dinâmico	63
	Conclusões e perspectivas	69
	Apêndice A – Integrais em D dimensões	72
	Apêndice B – Algumas ferramentas da relatividade geral	73
	Apêndice C – Tensor de Cotton para a solução de Schwarzschild	75
	Apêndice D – Tensor de Cotton para a métrica de Gödel	79
	Referências	87

Lista de Figuras

1	Se $\mu^2 > 0 \Rightarrow \phi = 0$	8
2	Se $\mu^2 < 0 \Rightarrow \phi = \pm\phi_0$	8
3	Contribuições para o tadpole Π^μ	14
4	Comportamento da função $F_I(\xi)$	21
5	Comportamento da função $F_{II}(\xi)$	22
6	Comportamento da função $F_{III}(\xi)$	23
7	Comportamento da função $F_{IV}(\xi)$	24
8	Comportamento da função $F_{VI}(\xi)$	25
9	Dinâmica do fator de escala	32
10	Dinâmica da velocidade	32
11	Diagramas de um loop	41
12	Diagrama de dois loops.	44

Introdução

A simetria na natureza é um fenômeno único e fascinante. Esta idéia surge naturalmente ao espírito humano, remetendo-o para um equilíbrio e proporção, padrão e regularidade, harmonia e beleza, ordem e perfeição. Estes são alguns dos vocábulos que resumem reações que temos inerentes às simetrias que abundam na natureza, nas formas vivas e inanimadas.

Autor desconhecido

Na natureza como um todo, em particular na física, as simetrias desempenham um papel muito importante, pois elas podem nos dar informações a cerca de processos e/ou problemas que estamos interessados em estudar e/ou resolver.

O modelo padrão de física de partículas e a teoria da relatividade de Einstein são duas teorias de grande sucesso que preservam duas importantes simetrias, as simetrias de Lorentz e a simetria CPT. Podemos nos perguntar, o que significa um sistema físico ser invariante perante as simetrias de Lorentz e CPT? Antes de responder a essa pergunta é interessante e se faz necessário entendermos de maneira clara o que são as transformações de Lorentz e a transformação CPT.

As simetrias de Lorentz ou transformações de Lorentz são divididas em dois tipos, rotações e boosts. O que caracteriza cada uma dessas transformações? As rotações podem existir em três formas, uma ao longo de cada uma das três direções espaciais; um boost é uma mudança de velocidade de um sistema inercial. Há três tipos de boosts, um ao longo de cada uma das três direções espaciais.

A transformação CPT é a combinação de três transformações: conjugação de carga (C), paridade (P) e reversão temporal (T). A simetria de conjugação de carga (C) transforma uma partícula em sua antipartícula. A simetria de paridade (P) converte um objeto em sua imagem especular invertida. E a simetria de reversão temporal (T) consiste em inverter a direção do fluxo do tempo. Essas transformações isoladas ou o produto de duas delas já foram observadas que podem ser violadas na natureza, no entanto, o produto das três, CPT, é tido como uma simetria fundamental e conservada na natureza.

Assim, um sistema físico é dito invariante perante as simetrias de Lorentz e CPT se as leis físicas envolvidas permanecem inalteradas após sofrerem a ação de qualquer uma dessas transformações.

As simetrias de Lorentz e CPT são simetrias que já passaram por vários testes experimentais e possuem uma excelente precisão experimental. No entanto, no fim dos anos 80 e início dos anos 90, a partir de um trabalho realizado por Kostelecky e Samuel [1], surgiu a idéia que as simetrias de Lorentz e CPT podem ser violadas no contexto de teoria de cordas. Desde então, essa idéia foi intensamente discutida e surgiram vários grupos de pesquisadores espalhados pelo mundo estudando a possibilidade de que as simetrias fundamentais da física possam ser violadas, vários experimentos foram construídos com a intenção de se verificar tal violação, experimentos envolvendo mésons neutros, oscilações de neutrinos, entre vários outros. Contudo, se a quebra dessas simetrias realmente ocorrer na natureza, devem ser extremamente pequenas, de modo que precisamos de aparatos experimentais extremamente sensíveis para tal detecção. A detecção de algum indício de violação das simetrias de Lorentz e CPT, por menor que seja, pode ser uma forte indicação de uma nova física, que provavelmente vem da escala Planck [2].

Motivados pela possibilidade que as simetrias de Lorentz e CPT possam ser violadas, Kostelecky e Colladay [3] construíram uma extensão do modelo padrão que inclui todos os termos que violam Lorentz e CPT, uma vez que o modelo padrão usual como o conhecemos descreve todas as partículas fundamentais e suas interações não gravitacionais, porém preservando tanto as simetrias de Lorentz como a simetria CPT. Esses novos termos que surgem na extensão do modelo padrão podem violar apenas as simetrias de Lorentz ou as simetrias de Lorentz e CPT.

O mecanismo utilizado para gerar o modelo padrão estendido é a quebra espontânea de simetria, tido por muitos como o mais elegante mecanismo de quebra de simetria, no qual um campo tensorial que contém índices de Lorentz adquire um valor esperado no vácuo não nulo, $\langle T_\mu \rangle \neq 0$, que seleciona uma direção preferencial no espaço-tempo e assim, quebra espontaneamente a simetria de Lorentz.

Por construção, o modelo padrão estendido é invariante diante das transformações de Lorentz de observador. Aqui ressaltamos que as transformações de Lorentz podem ser classificadas em transformação de Lorentz de observador e transformação de Lorentz de partícula, sendo que uma transformação de Lorentz de observador é uma mudança de sistema de observação, já uma transformação de Lorentz de partícula é uma rotação ou boost realizado em um campo de partícula individual com o sistema de coordenadas fixo.

Portanto, se existe violação, a física pode ser alterada diante de uma transformação de partícula.

A extensão do modelo padrão é composta por inúmeros termos, mas para preservar algumas características importantes limita-se o modelo a um subconjunto onde a invariância de gauge usual e a renormalizabilidade da teoria são mantidas, esse subconjunto é denominado de extensão mínima do modelo padrão.

Assim como o modelo padrão é uma teoria que descreve muito bem uma grande quantidade de fenômenos físicos e por outro lado não consegue explicar alguns fenômenos, temos a teoria da relatividade geral de Einstein, que dá conta de explicar muito bem vários fenômenos gravitacionais, mas nos últimos anos tem-se notado que essa teoria não dá conta de explicar alguns dados observacionais importantes. De acordo com dados observacionais obtidos por Supernovas do tipo Ia, estrutura de grande escala, curva de rotação de galáxias, entre outros, temos um universo dominado por algo que não conhecemos e que a relatividade geral não consegue explicar. Observa-se que a matéria do universo é muito maior que a matéria bariônica que conhecemos, ou seja, a maior parte de matéria do universo é formada por uma componente chamada de matéria escura, cujo a composição não conhecemos, detecta-se a sua existência pela influência gravitacional causada pela mesma. Outro importante dado observacional é a confirmação de que o universo está se expandindo de forma acelerada, e a componente responsável por tal aceleração é denominada de energia escura, que tem como principal característica atuar como uma espécie de antigravidade com pressão negativa. Esses dados observacionais nos levam a um universo dominado por componentes escuras, as quais sabemos muito pouco, ou nada sobre sua formação. Outro ponto em aberto está relacionado a quantização da gravidade, há algumas teorias que tem tido algum desenvolvimento nesse sentido, como teoria de cordas e gravidade quântica em laço (loop quantum gravity), mas nenhuma resposta definitiva sobre uma teoria de gravitação quântica.

Diante desses problemas muitos se perguntam, seriam matéria e energia escura algum efeito quântico da gravitação ou apenas uma modificação da relatividade geral? Dada a ausência de uma teoria quântica para a gravitação, nos últimos anos houve um grande interesse em se propor alguma modificação para a teoria da relatividade geral, entre essas modificações podemos destacar as teorias $F(R)$ e a modificação causada pelo termo de Chern-Simons gravitacional. No decorrer do trabalho fizemos alguns estudos para esse último caso.

A modificação na teoria da relatividade geral causada pelo termo de Chern-Simons,

foi inicialmente motivada por modificação semelhante feita na eletrodinâmica quântica. Na eletrodinâmica quântica, tal modificação leva para violação das simetrias de Lorentz e violação de paridade. A modificação na relatividade geral consiste de adicionarmos o termo de Chern-Simons quadridimensional a ação de Einstein-Hilbert usual. Esse termo faz com que a teoria tenha violação de paridade, porém conservando as simetrias de Lorentz. Essa modificação não consiste em uma manipulação arbitrária, ela é vista como uma teoria efetiva de uma teoria de cordas. Essa teoria efetiva é motivada por cancelar anomalias em física de partículas e em teoria de cordas. O que tem se destacado nessa modificação é a possibilidade de que soluções bem determinadas na relatividade usual, como a solução de Schwarzschild, podem persistir nessa nova teoria de gravitação para a escolha de algum parâmetro específico.

Apresentaremos esta Tese da seguinte maneira: no capítulo 1 iremos estudar o mecanismo de quebra espontânea das simetrias de Lorentz. Para ilustrar esse mecanismo iniciamos com um exemplo simples, a teoria $\lambda\phi^4$, e analisamos quando a quebra de simetria ocorre. Como estamos interessados em estudar a quebra espontânea das simetrias de Lorentz nas seções seguintes, que ocorre de modo semelhante ao mecanismo de Higgs, aqui analisamos rapidamente o mecanismo de Higgs, mecanismo responsável por dar massa as partículas do modelo padrão. Em seguida estudamos o modelo bumblebee, um modelo de quebra espontânea das simetrias de Lorentz e CPT. Nesse modelo um campo vetorial B_μ adquire um valor esperado no vácuo não nulo, $\langle B_\mu \rangle = b_\mu$, que escolhe uma direção preferencial no espaço-tempo e assim as simetrias de Lorentz são quebradas espontaneamente. Na próxima seção iremos estudar a quebra dinâmica das simetrias de Lorentz e CPT em um modelo de quatro-férmions, onde induziremos dinamicamente um potencial bumblebee por correções radiativas. A equação de gap será obtida e analisada para temperatura zero e temperatura finita. Em temperatura zero observamos que a equação de gap tem uma solução não trivial que nos leva a violação das simetrias de Lorentz e CPT, já em temperatura finita surge a possibilidade de que essas simetrias possam ser restauradas para uma dada temperatura crítica. Finalizamos esse capítulo estudando a equação de Friedmann em cinco dimensões no contexto de quebra espontânea das simetrias de Lorentz com o objetivo de verificar quais os efeitos que a violação das simetrias de Lorentz podem trazer para o cenário cosmológico. Como uma primeira tentativa encontramos resultados altamente não-triviais.

No capítulo 2 fazemos uma breve discussão do modelo padrão estendido dando ênfase a eletrodinâmica quântica estendida, em seguida estudamos a energia livre da eletrodinâmica quântica estendida no limite de altas temperaturas. Notamos que os termos

que violam as simetrias de Lorentz e CPT que possuem dimensão de massa podem ser negligenciados de modo que os únicos termos interessantes para o nosso estudo são $c_{\mu\nu}$, $d_{\mu\nu}$ e $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$. Logo após, estudamos os efeitos que a violação de Lorentz pode produzir na energia livre, que é uma quantidade de grande interesse, pois nos dá informações sobre a nucleossíntese primordial, física de plasma entre outros assuntos em física. Nossos cálculos para a energia livre se estendem até a segunda ordem na constante de acoplamento, ou seja, calculamos as contribuições de um e dois loops. E por fim, fazemos uma estimativa numérica para o parâmetro de quebra das simetrias de Lorentz usando dados da abundância primordial de hélio, onde a diferença entre valores teóricos e experimentais talvez possa ser resolvido pela contribuição vinda da quebra das simetrias de Lorentz.

A teoria de gravitação modificada pelo termo de Chern-Simons é discutida no capítulo 3. Inicialmente damos algumas motivações que nos levam a idéias de modificações à teoria da relatividade de Einstein, e fazemos uma discussão de algumas aplicações dessa nova teoria. Na próxima seção estudamos a modificação em si, discutindo os novos termos que surgem na teoria ao adicionarmos o termo de Chern-Simons à ação de Einstein-Hilbert. Logo após, passamos a discutir o ponto que mais tem chamado atenção em torno dessa teoria, que é a possibilidade de soluções conhecidas na relatividade geral persistirem na teoria modificada, como exemplo, estudamos a possibilidade da solução de Schwarzschild persistir nessa nova teoria de gravitação.

No capítulo 4 introduzimos o universo Gödel, universo que tem com principal característica a possibilidade de curvas tipo-tempo fechadas, sendo o primeiro modelo cosmológico com matéria em rotação. Introduzido o modelo, mostramos que a métrica de Gödel é solução das equações de Einstein, como o próprio Kurt Gödel mostrou em 1949. Em seguida vamos verificar se a métrica de Gödel também é solução na gravitação modificada pelo termo de Chern-Simons. Em nossa primeira análise consideraremos que o campo escalar θ introduzido junto ao termo de Chern-Simons na ação é um campo externo. Com essa interpretação observamos que, se θ é uma função das coordenadas x e y a solução de Gödel é solução da teoria modificada. Nossa segunda interpretação será feita para o caso em que o campo escalar θ é um campo dinâmico. Neste caso a análise precisa ser feita com mais cuidado, pois para a métrica de Gödel ser solução das equações modificadas de Einstein, é necessário mudanças em algum parâmetro da teoria. Notamos que para termos essa solução na teoria modificada é preciso que a constante cosmológica não seja mais uma constante no estrito sentido da palavra, mas sim um parâmetro que possui certa dependência espacial.

Na conclusão, os principais resultados desenvolvidos ao longo da tese são discutidos. Em paralelo abordamos algumas perspectivas possíveis. Nos apêndices exibimos algumas relações e cálculos de grande utilidade no desenvolvimento de toda tese.

1 Quebra Espontânea de Simetria

Se minha visão estiver correta, o universo pode ter um tipo de estrutura dominante. Em uma parte do universo, você pode ter uma direção preferencial dos eixos; em outra parte, as direções dos eixos podem ser diferentes.

Y. Nambu

A natureza exibe fascinantes e exuberantes formas de simetrias. Contudo, existem vários exemplos na natureza de simetrias que são quebradas. Um simples exemplo vem da física de estado sólido. No ferromagneto os átomos interagem através da interação spin-spin que é um escalar e invariante por simetrias de rotação. No entanto, no estado fundamental todos os spins estão alinhados e a simetria sob rotação é quebrada. Existem vários fenômenos em que a teoria, a lagrangiana, é invariante diante de alguma simetria, porém apresentam soluções no vácuo que violam essa simetria, quando isso ocorre dizemos que temos uma quebra espontânea de simetria.

1.1 Um simples exemplo de quebra espontânea de simetria

Para ilustrar o fenômeno da quebra espontânea de simetria vamos considerar um campo escalar com interação do tipo $\lambda\phi^4$. Esta teoria admite a simetria $\phi \rightarrow -\phi$. A lagrangiana que descreve tal modelo é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4, \quad (1.1)$$

onde λ é positivo e μ^2 é um parâmetro que pode ser positivo ou negativo. O potencial é dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4. \quad (1.2)$$

O estado fundamental é obtido ao tomarmos o mínimo do potencial,

$$\frac{dV}{d\phi} = \mu^2\phi + \frac{1}{6}\lambda\phi^3 = 0. \quad (1.3)$$

Da equação (1.3) temos duas situações a serem analisadas:

- (i) se $\mu^2 > 0$, temos apenas a solução $\phi = 0$, que está mostrada na Figura 1 e a simetria de paridade ($\phi \rightarrow -\phi$) é mantida;
- (ii) se $\mu^2 < 0$, temos dois mínimos, $\phi = \pm\sqrt{-\frac{6\mu^2}{\lambda}} = \pm\phi_0$ e um máximo local em $\phi = 0$, que estão mostrados na Figura 2.

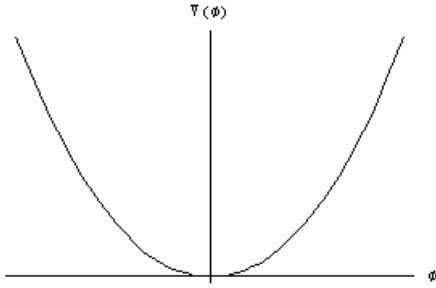


Figura 1: Se $\mu^2 > 0 \Rightarrow \phi = 0$

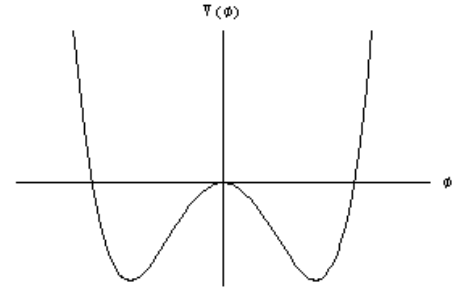


Figura 2: Se $\mu^2 < 0 \Rightarrow \phi = \pm\phi_0$

Uma vez que escolhemos um valor de ϕ_0 , a simetria é quebrada pelo vácuo da teoria. As consequências físicas são independentes dessa escolha.

Portanto, esse é um exemplo simples de uma teoria em que a quebra espontânea de simetria ocorre.

1.2 O mecanismo de Higgs

Agora vamos ver o que ocorre quando a simetria em questão é a simetria de gauge. Usando esta simetria poderemos analisar como ocorre o fenômeno de Higgs, fenômeno este que é responsável por dar massa às partículas do modelo padrão. Nosso interesse em analisar esse mecanismo consiste no fato de que a quebra espontânea das simetrias de Lorentz que veremos nas próximas seções pode ocorrer de modo análogo. Aqui vamos

estudar a eletrodinâmica quântica escalar¹ cuja lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^2 - \lambda \phi^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

onde $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ é a derivada covariante e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Esta teoria é invariante pelas transformações

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi(x), \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Do mesmo modo que vimos na seção anterior, pode-se verificar que para $\mu^2 > 0$ o potencial apresenta apenas um mínimo, ou seja, $\phi_0 = 0$. Já para $\mu^2 < 0$, ocorre o fenômeno da quebra espontânea de simetria e o potencial tem como mínimo

$$\phi_0^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{v^2}{2}. \quad (1.6)$$

Para analisarmos o espectro de partículas, podemos escolher $\phi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}}$ e o campo ϕ pode ser convenientemente parametrizado como

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{e^{\frac{i\xi}{v}}}{\sqrt{2}} (v + \eta), \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta + i\xi), \end{aligned} \quad (1.7)$$

para pequenas oscilações em torno do vácuo. Assim, podemos reescrever a lagrangiana (1.4) como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + 2\mu^2 \eta^2] + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - evA_\mu (\partial^\mu \xi) + \frac{e^2 v^2}{2} A_\mu A^\mu + \dots \quad (1.8)$$

Agora podemos fazer algumas observações sobre esta nova lagrangiana:

- O campo η é um campo massivo com massa $m_\eta^2 = -2\mu^2$;
- O campo ξ é um escalar sem massa;
- O último termo indica que o fóton adquiriu uma massa, $m_\gamma^2 = e^2 v^2$;
- O penúltimo termo indica que existe uma mistura entre os campos A_μ e ξ .

¹Aqui estudaremos uma teoria abeliana. No entanto, este estudo também pode ser feito no contexto de uma teoria não-abeliana, mas para o nosso interesse, o caso abeliano é suficiente.

É possível fazer uma escolha de gauge para a qual o espectro de partículas seja evidente. Para tal escolha é conveniente reescrevermos

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) - ev A_\mu (\partial^\mu \xi) + \frac{e^2 v^2}{2} A_\mu A^\mu = \frac{e^2 v^2}{2} \left(A_\mu - \frac{1}{ev} \partial_\mu \xi \right) \left(A^\mu - \frac{1}{ev} \partial^\mu \xi \right). \quad (1.9)$$

Como temos a liberdade de escolher um gauge qualquer, é conveniente escolher

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu - \frac{1}{ev} \partial_\mu \xi \\ \phi &\rightarrow e^{-\frac{i\xi}{v}} \phi = \frac{(v + \eta)}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Sabendo que a lagrangiana é localmente invariante de gauge, podemos usar esses campos na lagrangiana original e obtermos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + 2\mu^2 \eta^2] - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{e^2 v^2}{2} A_\mu A^\mu + \text{ctes}. \quad (1.11)$$

O gauge que usamos é chamado de *gauge unitário ou físico*. Nesse gauge notamos que:

- O campo η tem massa $m^2 = -2\mu^2$;
- Os fótons são massivos, $m_\gamma = ev$;
- O campo ξ desapareceu do espectro.

Então, o campo ξ sem massa desapareceu e o fóton tornou-se massivo². Esse fenômeno é conhecido como o *mecanismo de Higgs*. Esse é o mecanismo responsável por dar massa a todas as partículas do modelo padrão. Mais detalhes desse mecanismo podem ser encontrados em livros texto como [4, 5, 6, 7].

1.3 O Modelo Bumblebee

Vamos estudar a possibilidade da quebra espontânea das simetrias de Lorentz e CPT. A idéia de que essas simetrias possam ser espontaneamente violadas tem sido sugerida como um possível mecanismo que pode ocorrer no contexto de uma teoria fundamental na escala Planck, como teoria de cordas e teorias de gravitação quântica [1]. O mecanismo de quebra espontânea das simetrias de Lorentz tem sido intensivamente estudado na literatura [8, 9, 10, 11, 12, 13].

²Pode-se dizer que o fóton absorveu um campo escalar e adquiriu massa.

Um dos mais elegantes e interessantes mecanismos de quebra de simetria se dá através da quebra espontânea, que como já vimos, a lagrangiana respeita a simetria em questão, mas as soluções no vácuo de tal teoria não respeitam. O fenômeno da violação espontânea de simetria tem consequências bem conhecidas em teorias de campos. Quando estudamos teorias de gauge temos o teorema de Goldstone, que afirma que, quando uma simetria global é quebrada espontaneamente, podem aparecer modos Nambu-Goldstone sem massa (partículas sem massa). Por outro lado, se a simetria é local o mecanismo envolvido é o mecanismo de Higgs, responsável por dar massa aos campos de gauge. Mais informações a respeito do teorema Goldstone e do mecanismo de Higgs podem ser encontradas em [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. Esses processos também já foram estudados para o caso em que a simetria é a simetria de Lorentz [9, 21, 22, 23, 24, 25].

Um simples exemplo de uma teoria com quebra espontânea das simetrias de Lorentz é o modelo bumblebee [8, 9, 26], onde um campo vetorial adquire um valor esperado no vácuo (VEV) diferente de zero,

$$\langle B_\mu \rangle = b_\mu, \quad (1.12)$$

sendo B_μ um campo vetorial e b_μ seu valor esperado no vácuo. Assim, o vácuo da teoria escolhe uma direção preferencial no espaço-tempo.

Existem várias versões do modelo bumblebee que podem ser definidas com diferentes formas para os termos cinéticos e para o potencial. Este modelo também pode ser estudado em geometrias diferentes do espaço-tempo, tais como no espaço-tempo de Minkowski³, espaço-tempo de Riemann⁴ e no espaço-tempo de Riemann-Cartan⁵ [8, 21]. Uma versão generalizada do modelo bumblebee tem sido discutida em [27].

Para introduzirmos o modelo bumblebee vamos considerar o caso em que o campo bumblebee B_μ está acoplado com a gravidade e com a matéria, de modo que consideramos termos quadráticos em B_μ e até segunda ordem na derivada deste campo. A densidade de lagrangiana que descreve esse modelo é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B = & \frac{1}{16\pi G}(R - 2\Lambda) - \frac{1}{4}\tau_1 B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\tau_2 D_\mu B_\nu D^\mu B^\nu + \frac{1}{2}\tau_3 D_\mu B^\mu D_\nu B^\nu \\ & + \sigma_1 B^\mu B^\nu R_{\mu\nu} + \sigma_2 B^\mu B_\mu R - V(B_\mu B^\mu \pm b^2) + \mathcal{L}_M, \end{aligned} \quad (1.13)$$

onde G é a constante gravitacional de Newton, Λ é a constante cosmológica, R é o escalar de Ricci (B.8), $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci (B.5) e D_μ é a derivada covariante. As quantidades

³Espaço-tempo plano

⁴Espaço-tempo curvo

⁵Espaço-tempo com torção

$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \sigma_1$ e σ_2 são constantes que determinam a forma dos termos cinéticos para o campo bumblebee. O tensor $B_{\mu\nu}$ é definido como

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (1.14)$$

no espaço-tempo de Riemann. Já $\mathcal{L}_M$ representa os termos de interação com a matéria ou correntes externas. O potencial $V(B_\mu B^\mu \pm b^2)$ que tem mínimos não triviais é o responsável pela violação das simetrias de Lorentz. O mínimo do potencial ocorre quando

$$B_\mu B^\mu \pm b^2 = 0. \quad (1.15)$$

Essa condição é satisfeita quando o campo vetorial adquirir um valor esperado no vácuo diferente de zero, ou seja, $\langle B_\mu \rangle = b_\mu$, logo

$$b_\mu b^\mu = \mp b^2. \quad (1.16)$$

Assim, observamos que esse resultado quebra espontaneamente a invariância de Lorentz.

Na literatura existem várias formas para o potencial, entre elas as mais estudadas são

$$V = \lambda(B_\mu B^\mu \mp b^2), \quad (1.17)$$

que envolve um campo multiplicador de Lagrange λ e é linear em $B_\mu B^\mu$,

$$V = \frac{1}{2}\lambda(B_\mu B^\mu \mp b^2)^2, \quad (1.18)$$

que também envolve λ , porém é quadrático em $B_\mu B^\mu$ e,

$$V = \frac{1}{2}\kappa(B_\mu B^\mu \mp b^2)^2, \quad (1.19)$$

também quadrático em $B_\mu B^\mu$ e com κ sendo uma constante.

1.4 Quebra dinâmica da simetria de Lorentz em um modelo de quatro-férmions

Em um modelo de quatro-férmions quadridimensional, vamos estudar a quebra espontânea das simetrias de Lorentz e CPT via o mecanismo de Coleman e Weinberg [28], isto é, induziremos um potencial bumblebee dinamicamente por correções radiativas. Iremos analisar a equação de gap para esse modelo em temperatura zero e em temperatura finita.

Consideremos uma teoria fermiônica dada por

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi - \frac{G}{2}(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi)(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi), \quad (1.20)$$

onde ψ é um campo espinorial de Dirac e $G = \frac{e^2}{g^2}$. Essa teoria é não renormalizável e pode ser entendida como uma teoria efetiva em baixas energias surgindo de uma teoria mais fundamental, como foi pensado inicialmente em [29].

Para eliminar o termo de auto-interação de (1.20), vamos introduzir um campo auxiliar B_μ de modo que podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \frac{g^2}{2} \left(B_\mu - \frac{e}{g^2} \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \right)^2 \\ &= \frac{g^2}{2} B_\mu B^\mu + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m - e\cancel{B}\gamma_5)\psi. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Para encontrarmos o potencial efetivo vamos usar o funcional gerador que é dado por

$$Z(\bar{\eta}, \eta) = \int DB_\mu D\psi D\bar{\psi} \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right]. \quad (1.22)$$

Vamos inicialmente fazer a integração sobre os férmions,

$$\int D\psi D\bar{\psi} \exp \left[\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m - e\cancel{B}\gamma_5)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta \right] = e^{\bar{\eta} M^{-1} \eta} \det M, \quad (1.23)$$

onde $M = i\cancel{\partial} - m - e\cancel{B}\gamma_5$. Dessa maneira, podemos reescrever o funcional gerador como

$$Z(\bar{\eta}, \eta) = \int DB_\mu \exp \left[i S_{\text{ef}}[B] + i \int d^4x \left(\bar{\eta} \frac{1}{i\cancel{\partial} - m - e\cancel{B}\gamma_5} \eta \right) \right], \quad (1.24)$$

onde $S_{\text{ef}}[B]$ é a ação efetiva definida como

$$S_{\text{ef}}[B] = \frac{g^2}{2} \int d^4x B_\mu B^\mu - i \text{Tr} \ln(i\cancel{\partial} - m - e\cancel{B}\gamma_5), \quad (1.25)$$

e Tr é o traço sobre as matrizes de Dirac. O potencial efetivo para este caso fica

$$V_{\text{ef}} = -\frac{g^2}{2} B_\mu B^\mu + i \text{Tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln(\not{p} - m - e\cancel{B}\gamma_5). \quad (1.26)$$

Nós estamos interessados em investigar o mínimo do potencial, e com isso verificar se há mínimos não nulos que nos levam a violação de simetrias, no caso, simetrias de Lorentz e CPT. Assim, devemos analisar as soluções da equação

$$\left. \frac{dV_{\text{ef}}}{dB_\mu} \right|_{B=\beta} = 0$$

$$= -g^2 \beta^\mu + i \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - m - e \not{\beta} \gamma_5} (-e \gamma^\mu \gamma_5) = 0. \quad (1.27)$$

Sendo $b^\mu = e \beta^\mu$, ficamos com

$$\frac{dV_{ef}}{dB_\mu} = -\frac{g^2}{e} b^\mu - i \Pi^\mu = 0, \quad (1.28)$$

onde

$$\Pi^\mu = \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} - m - \not{b} \gamma_5} (-ie) \gamma^\mu \gamma_5, \quad (1.29)$$

é a amplitude do tadpole. Para calcularmos essa integral, vamos usar as seguintes regras de Feynman:

(i) o propagador do férmion

$$\longrightarrow = \frac{i}{\not{p} - m}; \quad (1.30)$$

(ii) a inserção ao propagador do férmion

$$\longrightarrow \times \longrightarrow = -i \not{b} \gamma_5; \quad (1.31)$$

(iii) e o vértice férmion-fóton

$$\longrightarrow \text{---} \text{---} \longrightarrow = -ie \gamma^\mu \gamma_5. \quad (1.32)$$

Com essas regras de Feynman as contribuições para Π^μ são mostradas na figura abaixo.

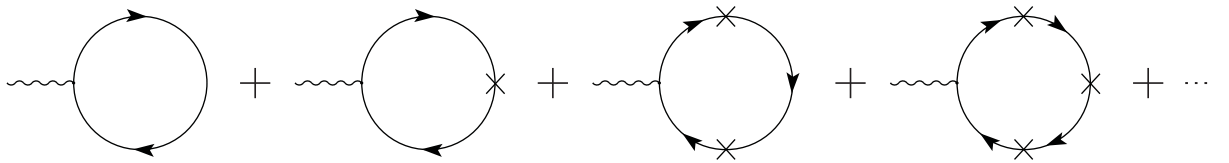


Figura 3: Contribuições para o tadpole Π^μ

Levando em conta as propriedades de simetrias ao calcular as integrais, e as propriedades do traço sobre as matrizes de Dirac, notamos que as contribuições relevantes são apenas as que tem uma e três inserções ao propagador, ou seja, o segundo e o quarto gráfico da Figura 3, sendo que as contribuições do primeiro e do terceiro gráfico, assim como dos demais gráficos com mais que três inserções se anulam. Vamos calcular as

contribuições relevantes separadamente. Para o segundo gráfico da Figura 3 temos que

$$\Pi_b^\mu = \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-ie\gamma^\mu \gamma_5) S(p) (-i\not{b}\gamma_5) S(p), \quad (1.33)$$

onde $S(p) = \frac{i}{\not{p} - m}$ é o propagador usual. Substituindo o valor de $S(p)$ ficamos com

$$\Pi_b^\mu = e \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu \gamma_5 (\not{p} - m) \not{b} \gamma_5 (\not{p} - m)}{(p^2 - m^2)^2}. \quad (1.34)$$

Calculando o traço sobre as matrizes de Dirac temos

$$\Pi_b^\mu = 4e \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{2(b \cdot p)p^\mu - (p^2 + m^2)b^\mu}{(p^2 - m^2)^2}. \quad (1.35)$$

Agora vamos mudar do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano realizando uma rotação de Wick $p_0 = ip_4$, $x_0 = -ix_4$, $b_0 = ib_4$, $b^2 = -b_E^2$, $p^2 = -p_E^2$, $p_E^2 = \vec{p}^2 + p_4^2$, $d^4 p = id^4 p_E$ e $d^4 x = -id^4 x_E$. Assim, podemos reescrever (1.35) no espaço Euclidiano como

$$\Pi_b^\mu = 4ie \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{(\vec{p}^2 + p_4^2 - m^2)b_E^\mu - 2(p_E \cdot b_E)p_E^\mu}{(\vec{p}^2 + p_4^2 + m^2)^2}. \quad (1.36)$$

Para implementar translação somente na componente espacial de $p_E^\mu = (p_4, \vec{p})$ nós decomponemos o p_E^μ como segue [30]

$$p_E^\mu = \hat{p}^\mu + p_4 \delta^{\mu 0}, \quad (1.37)$$

e como uma consequência $\hat{p}^\mu = (0, \vec{p})$. Devido a simetria da integral sob rotação espacial, nós podemos usar

$$\hat{p}^\mu \hat{p}^\nu \rightarrow \frac{\vec{p}^2}{D} (\delta^{\mu\nu} - \delta^{\mu 0} \delta^{\nu 0}). \quad (1.38)$$

Usando (1.37) e (1.38) podemos escrever

$$(p_E \cdot b_E)p_E^\mu = \frac{\vec{p}^2}{D} b_E^\mu - \frac{\vec{p}^2}{D} b_4 \delta^{\mu 0} + p_4^2 b_4 \delta^{\mu 0}. \quad (1.39)$$

Substituindo (1.39) em (1.36) nós encontramos que

$$\Pi_b^\mu = \Pi_1 b_E^\mu + \Pi_2 b_4 \delta^{\mu 0}, \quad (1.40)$$

com

$$\Pi_1 = 4ie \int \frac{dp_4}{2\pi} (\mu^2)^{\frac{3-D}{2}} \int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi)^D} \left[\frac{1}{\vec{p}^2 + p_4^2 + m^2} - \frac{\frac{2}{D}\vec{p}^2 + 2m^2}{(\vec{p}^2 + p_4^2 + m^2)^2} \right] \quad (1.41)$$

e

$$\Pi_2 = -8ie \int \frac{dp_4}{2\pi} (\mu^2)^{\frac{3-D}{2}} \int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi)^D} \left[\frac{1}{\vec{p}^2 + p_4^2 + m^2} - \frac{\frac{1+D}{D} \vec{p}^2 + m^2}{(\vec{p}^2 + p_4^2 + m^2)^2} \right], \quad (1.42)$$

onde temos transformado o espaço tridimensional para D-dimensional e introduzimos um parâmetro arbitrário μ que identifica a escala de massa. Agora, ao integrarmos em D dimensões, com auxílio das expressões dadas no APÊNDICE A, obtemos

$$\Pi_1 = -\frac{8ie(\mu^2)^{\frac{3-D}{2}}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \int \frac{dp_4}{2\pi} m^2 (p_4^2 + m^2)^{\frac{D}{2}-2} \quad (1.43)$$

e

$$\Pi_2 = \frac{4ie(\mu^2)^{\frac{3-D}{2}}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \int \frac{dp_4}{2\pi} \left[(D-1)(p_4^2 + m^2)^{\frac{D}{2}-1} - (D-2)m^2(p_4^2 + m^2)^{\frac{D}{2}-2} \right]. \quad (1.44)$$

Por fim, integrando sobre o momento p_4 encontramos

$$\Pi_1 = -\frac{8ie(\mu^2)^{\frac{3-D}{2}}}{(4\pi)^{\frac{D+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{3-D}{2}\right) m^{D-1}, \quad (1.45)$$

e $\Pi_2 = 0$. Expandindo (1.45) em torno de $D = 3$ ficamos com

$$\Pi_1 = -\frac{iem^2}{\pi^2 \epsilon} + \frac{iem^2}{2\pi^2} \ln\left(\frac{m^2}{\mu'^2}\right), \quad (1.46)$$

onde $\epsilon = 3 - D$ e $\mu'^2 = 4\pi^2 \mu^2 e^{-\gamma}$.

Portanto, a contribuição (1.40) é dada por

$$\Pi_b^\mu = \left[-\frac{iem^2}{\pi^2 \epsilon} + \frac{iem^2}{2\pi^2} \ln\left(\frac{m^2}{\mu'^2}\right) \right] b_E^\mu. \quad (1.47)$$

Nesse momento, vamos analisar o gráfico com três inserções na Figura 3. Esse gráfico nos fornece

$$\Pi_{bbb}^\mu = \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-ie\gamma^\mu \gamma^5) S(p) (-i\not{p}\gamma_5) S(p) (-i\not{p}\gamma_5) S(p) (-i\not{p}\gamma_5) S(p). \quad (1.48)$$

Substituindo o propagador ficamos com

$$\Pi_{bbb}^\mu = e \text{Tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu \gamma^5 (\not{p} - m) \not{p} \gamma_5 (\not{p} - m) \not{p} \gamma_5 (\not{p} - m) \not{p} \gamma_5 (\not{p} - m)}{(p^2 - m^2)^4} \quad (1.49)$$

e ao calcularmos o traço sobre as matrizes de Dirac

$$\begin{aligned}\Pi_{bbb}^\mu &= 4e \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{4(-p^2 - m^2)(p \cdot b)^2 + (p^4 + 6p^2m^2 + m^4)b^2}{(p^2 - m^2)^4} b^\mu + \\ &+ 16e \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(-p^2 - m^2)(p \cdot b)b^2 + 2(p \cdot b)^3}{(p^2 - m^2)^4} p^\mu.\end{aligned}\quad (1.50)$$

Transformando para o espaço Euclidiano,

$$\begin{aligned}\Pi_{bbb}^\mu &= 4ie \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{4(p_E^2 - m^2)(p_E \cdot b_E)^2 - (p_E^4 - 6p_E^2m^2 + m^4)b_E^2}{(p_E^2 + m^2)^4} b_E^\mu \\ &+ 16ie \int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4} \frac{(p_E^2 - m^2)(p_E \cdot b_E)b_E^2 - 2(p_E \cdot b_E)^3}{(p_E^2 + m^2)^4} p_E^\mu.\end{aligned}\quad (1.51)$$

Seguindo passos semelhantes ao que fizemos para Π_b^μ , usando também a simetria rotacional do integrando que justifica a troca

$$\begin{aligned}\hat{p}^\mu \hat{p}^\nu \hat{p}^\lambda \hat{p}^\rho &\rightarrow \frac{\vec{p}^4}{D(D+2)} [(\delta^{\mu\nu} - \delta^{\mu 0} \delta^{\nu 0})(\delta^{\lambda\rho} - \delta^{\lambda 0} \delta^{\rho 0}) + (\delta^{\mu\lambda} - \delta^{\mu 0} \delta^{\lambda 0})(\delta^{\nu\rho} - \delta^{\nu 0} \delta^{\rho 0}) \\ &+ (\delta^{\mu\rho} - \delta^{\mu 0} \delta^{\rho 0})(\delta^{\lambda\nu} - \delta^{\lambda 0} \delta^{\nu 0})],\end{aligned}\quad (1.52)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}(p_E \cdot b_E)^2 &= \frac{\vec{p}^2}{D} (b_E^2 - b_4^2) + p_4^2 b_4^2, \\ (p_E \cdot b_E)^3 p_E^\mu &= \frac{3\vec{p}^4}{D(D+2)} b_E^\mu b_E^2 + \left(\frac{3\vec{p}^2}{D} p_4^2 - \frac{3\vec{p}^4}{D(D+2)} \right) b_4^2 b_E^\mu + p_4^4 b_4^3 \delta^{\mu 0} \\ &+ \left(\frac{3\vec{p}^2}{D} p_4^2 - \frac{3\vec{p}^4}{D(D+2)} \right) b_E^2 b_4 \delta^{\mu 0} - \left(\frac{6\vec{p}^2}{D} p_4^2 - \frac{3\vec{p}^4}{D(D+2)} \right) b_4^3 \delta^{\mu 0}.\end{aligned}\quad (1.54)$$

Substituindo esses resultados em (1.51) obtemos que

$$\Pi_{bbb}^\mu = \Pi_3 b_E^2 b_E^\mu + \Pi_4 b_4^2 b_E^\mu + \Pi_5 b_E^2 b_4 \delta^{\mu 0} + \Pi_6 b_4^3 \delta^{\mu 0}, \quad (1.55)$$

onde

$$\begin{aligned}\Pi_3 &= 16ie \int \frac{dp_4}{2\pi} (\mu^2)^{\frac{3-D}{2}} \int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi)^D} \left[\frac{-\frac{4m^2 \vec{p}^2}{D} - \frac{6\vec{p}^4}{D(D+2)} - 2m^4}{(p_E^2 + m^2)^4} + \frac{\frac{2\vec{p}^2}{D} + 2m^2}{(p_E + m^2)^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4(p_E^2 + m^2)^2} \right],\end{aligned}\quad (1.56)$$

$$\begin{aligned}\Pi_4 &= \Pi_5 = 16ie \int \frac{dp_4}{2\pi} (\mu^2)^{\frac{3-D}{2}} \int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi)^D} \left[\frac{\frac{2D+8}{D} \vec{p}^2 m^2 + 2m^4 + \frac{6\vec{p}^4(D+3)}{D(D+2)}}{(p_E^2 + m^2)^4} - \frac{\frac{D+7}{D} \vec{p}^2 + 3m^2}{(p_E^2 + m^2)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(p_E^2 + m^2)^2} \right]\end{aligned}\quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} \Pi_6 &= 16ie \int \frac{dp_4}{2\pi} (\mu^2)^{\frac{3-D}{2}} \int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi)^D} \left[\frac{-2\vec{p}^4 - 6\frac{2D+5}{D(D+2)}\vec{p}^4 - 2m^4 - 4\frac{D+3}{D}\vec{p}^2 m^2}{(p_E^2 + m^2)^4} + \frac{4\frac{D+3}{D}\vec{p}^2 + 4m^2}{(p_E^2 + m^2)^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{(p_E^2 + m^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Calculando a integral em D dimensões, novamente usando o APÊNDICE A, ficamos com

$$\Pi_3 = \frac{8ie(\mu^2)^{\frac{3-D}{2}}}{3(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \int \frac{dp_4}{2\pi} m^2 \left[4(p_4^2 + m^2)^{\frac{D}{2}-3} + (D-6)m^2(p_4^2 + m^2)^{\frac{D}{2}-4} \right], \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} \Pi_4 &= \Pi_5 = \frac{8ie(\mu^2)^{\frac{3-D}{2}}}{3(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) \int \frac{dp_4}{2\pi} m^2 \left[(D-5)(p_4^2 + m^2)^{\frac{D}{2}-3} \right. \\ &\quad \left. - (D-6)m^2(p_4^2 + m^2)^{\frac{D}{2}-4} \right], \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} \Pi_6 &= -\frac{4ie(\mu^2)^{\frac{3-D}{2}}}{3(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \int \frac{dp_4}{2\pi} \left[(D-1)(D-3)(p_4^2 + m^2)^{\frac{D}{2}-2} \right. \\ &\quad \left. - 2(D-3)(D-4)m^2(p_4^2 + m^2)^{\frac{D}{2}-3} + (D-4)(D-6)m^4(p_4^2 + m^2)^{\frac{D}{2}-4} \right]. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Agora, ao realizarmos a integração em p_4 obtemos

$$\Pi_3 = \frac{8ie(\mu^2)^{\frac{3-D}{2}}}{3(4\pi)^{\frac{D+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{5-D}{2}\right) (D-1)m^{D-3}, \quad (1.62)$$

e

$$\Pi_4 = \Pi_5 = \Pi_6 = 0. \quad (1.63)$$

Ao expandirmos (1.62) em torno de $D = 3$ encontramos,

$$\Pi_3 = \frac{ie}{3\pi^2}. \quad (1.64)$$

Assim, a contribuição (1.55) é dada por

$$\Pi_{bbb}^\mu = \frac{ie}{3\pi^2} b_E^\mu b_E^2. \quad (1.65)$$

Portanto, a equação (1.29) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \Pi^\mu &= \Pi_b^\mu + \Pi_{bbb}^\mu \\ &= \left[-\frac{im^2 e}{\pi^2 \epsilon} + \frac{im^2 e}{2\pi^2} \ln\left(\frac{m^2}{\mu'^2}\right) + \frac{ieb_E^2}{3\pi^2} \right] b_E^\mu. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Dessa maneira, a equação de gap (1.28) se torna

$$-\frac{g^2}{e}b^\mu - i \left[-\frac{im^2}{\pi^2\epsilon} + \frac{im^2}{2\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{\mu'^2} \right) - \frac{ib^2}{3\pi^2} \right] eb^\mu = 0, \quad (1.67)$$

onde temos voltado para o espaço de Minkowski. Lembrando que $G = e^2/g^2$, podemos reescrever essa última equação como

$$\left[-\frac{1}{G} - \frac{m^2}{\pi^2\epsilon} + \frac{m^2}{2\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{\mu'^2} \right) - \frac{b^2}{3\pi^2} \right] eb^\mu = 0. \quad (1.68)$$

Introduzindo a constante de acoplamento renormalizada,

$$\frac{1}{G_R} = \frac{1}{G} + \frac{m^2}{\pi^2\epsilon}, \quad (1.69)$$

a equação de gap que iremos analisar fica

$$\left[-\frac{1}{G_R} + \frac{m^2}{2\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{\mu'^2} \right) - \frac{b^2}{3\pi^2} \right] b_\mu = 0. \quad (1.70)$$

Assim, nós observamos que uma solução não-trivial é

$$b^2 = -3\pi^2 \left[\frac{1}{G_R} - \frac{m^2}{2\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{\mu'^2} \right) \right]. \quad (1.71)$$

Dessa equação notamos que um mínimo não-trivial, para o caso em que b_μ é do tipo-tempo⁶ é possível somente se

$$\frac{1}{G_R} < \frac{m^2}{2\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{\mu'^2} \right) \implies G_R > \frac{2\pi^2}{m^2 \ln \left(\frac{m^2}{\mu'^2} \right)}, \quad (1.72)$$

e se b_μ é do tipo-espaço⁷

$$\frac{1}{G_R} > \frac{m^2}{2\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{\mu'^2} \right) \implies G_R < \frac{2\pi^2}{m^2 \ln \left(\frac{m^2}{\mu'^2} \right)}. \quad (1.73)$$

Portanto, para esse modelo de quatro-férmions quadridimensional obtivemos que o potencial tem um mínimo diferente de zero, dado pela equação (1.71), ou seja, um valor esperado no vácuo não nulo para b^2 , como consequência temos que a invariância de Lorentz é quebrada. Essa análise foi desenvolvida nos trabalhos [31, 135].

⁶Um vetor ser do tipo-tempo implica que $b_\mu b_\nu g^{\mu\nu} > 0$.

⁷Já um vetor tipo-espaço implica $b_\mu b_\nu g^{\mu\nu} < 0$.

1.5 Restauração da simetria de Lorentz em temperatura finita

Nesta seção iremos estudar o mesmo modelo que estudamos na seção anterior, quatro-férmions quadridimensional, porém, iremos estudar no contexto de temperatura finita. Nosso objetivo é investigar se há alguma possibilidade para que as simetrias de Lorentz, que foram quebradas no caso de temperatura zero (seção anterior), sejam restauradas no limite de altas temperaturas. Para tal estudo, iremos considerar que o nosso sistema esteja em equilíbrio térmico com uma dada temperatura T . Usaremos o formalismo de Matsubara, que consiste em tomarmos

$$p_4 = \left(n + \frac{1}{2}\right) 2\pi T, \quad (1.74)$$

e na seguinte mudança

$$\int \frac{dp_4}{2\pi} = T \sum_n. \quad (1.75)$$

Agora, devemos fazer tais substituições nas equações (1.43), (1.44), (1.59), (1.60) e (1.61). Analisaremos essas equações separadamente. Iniciaremos com (1.43) que se torna

$$\Pi_1 = -\frac{8ie(\mu^2)^{\frac{3-D}{2}}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) T \sum_n m^2 (p_4^2 + m^2)^{\frac{D}{2}-2}. \quad (1.76)$$

Para calcularmos esse somatório usaremos uma representação explícita sobre as frequências de Matsubara dada por [30, 33]

$$\sum_n [(n+b)^2 + a^2]^{-\lambda} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda - 1/2)}{\Gamma(\lambda) (a^2)^{\lambda-1/2}} + 4 \sin(\pi\lambda) f_\lambda(a, b), \quad (1.77)$$

onde

$$f_\lambda(a, b) = \int_{|a|}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - a^2)^\lambda} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{e^{2\pi(z+ib)} - 1} \right), \quad (1.78)$$

que é válida para $\lambda < 1$ e possui pólos em $\lambda = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots$. Usando (1.74), a equação (1.76) pode ser reescrita como

$$\Pi_1 = -\frac{8ie(\mu^2)^{\frac{3-D}{2}}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{m}{2\pi\xi}\right) \left(\frac{\xi}{m}\right)^{4-D} m^2 \sum_n \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \xi^2 \right]^{2-\frac{D}{2}}, \quad (1.79)$$

com $\xi = \frac{\beta m}{2\pi}$, onde $\beta = \frac{1}{T}$. Se tomamos $D = 3$ em nossa última equação, podemos ver que $\lambda < 1$, mas em $\lambda = \frac{1}{2}$ essa equação é singular. Tomando o limite $D \rightarrow 3$ nós encontramos

que

$$\Pi_1 = \left[-\frac{im^2}{\pi^2\epsilon} + \frac{im^2}{2\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{\mu'^2} \right) + im^2 F_I(\xi) \right] e, \quad (1.80)$$

onde

$$F_I(\xi) = \int_{|\xi|}^{\infty} dz \frac{1 - \tanh(\pi z)}{\pi^2 \sqrt{z^2 - \xi^2}}. \quad (1.81)$$

O comportamento dessa função é mostrado na Figura 4.

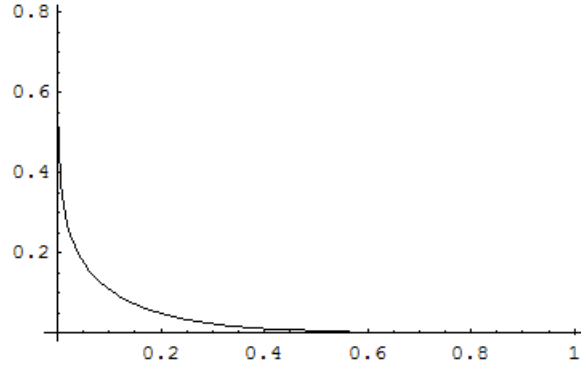


Figura 4: Comportamento da função $F_I(\xi)$

Observamos que o comportamento assintótico da função $F_I(\xi)$ em altas temperaturas é⁸ $F_I(\xi \rightarrow 0) \approx 1/2$.

Substituindo (1.74) e (1.75) na equação (1.44) obtemos que

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & \frac{4ie(\mu^2)^{\frac{3-D}{2}}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma \left(1 - \frac{D}{2} \right) \left\{ (D-1) \left(\frac{m}{2\pi\xi} \right) \left(\frac{\xi^2}{m^2} \right)^{1-\frac{D}{2}} \sum_n \left[\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + \xi^2 \right]^{1-\frac{D}{2}} \right. \\ & \left. - (D-2)m^2 \left(\frac{m}{2\pi\xi} \right) \left(\frac{\xi^2}{m^2} \right)^{2-\frac{D}{2}} \sum_n \left[\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + \xi^2 \right]^{2-\frac{D}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Como $\lambda = 1 - \frac{D}{2}$ e $\lambda = 2 - \frac{D}{2}$ satisfazem a condição $\lambda < 1$ para $D \rightarrow 3$, esses somatórios podem ser resolvidos usando (1.77) e nos fornecem

$$\Pi_2 = ieT^2 F_{II}(\xi), \quad (1.83)$$

com

$$F_{II}(\xi) = - \int_{|\xi|}^{\infty} dz \frac{4(\xi^2 - 2z^2)[\tanh(\pi z) - 1]}{\sqrt{z^2 - \xi^2}}. \quad (1.84)$$

No limite de altas temperaturas a função $F_{II}(\xi)$ tem o comportamento mostrado na Figura

⁸O limite $T \rightarrow \infty \implies \xi \rightarrow 0$.

5. Neste limite, $T \rightarrow \infty$, a função $F_{\text{II}}(\xi \rightarrow 0) = -1/3$.

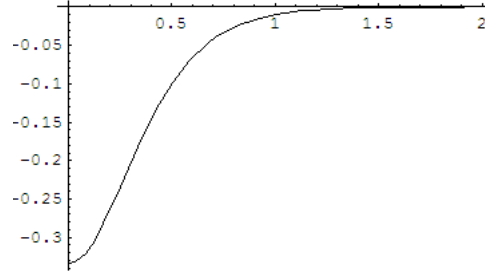


Figura 5: Comportamento da função $F_{\text{II}}(\xi)$

Com esses resultados, a equação (1.40) se torna

$$\Pi_b^\mu = \left[-\frac{im^2}{\pi^2\epsilon} + \frac{im^2}{2\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{\mu'^2} \right) + im^2 F_{\text{I}}(\xi) \right] eb_{\text{E}}^\mu + ieT^2 F_{\text{II}}(\xi) b_4 \delta^{\mu 0}. \quad (1.85)$$

Observamos que no limite $T \rightarrow 0$ recuperamos o resultado obtido em (1.40).

Nosso próximo passo é verificar as contribuições com três inserções ao propagador no contexto de temperatura finita. Fazendo as substituições (1.74) e (1.75) na equação (1.59) obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_3 = & \frac{8ie(\mu^2)^{\frac{3-D}{2}}}{3(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma \left(3 - \frac{D}{2} \right) m^2 \left\{ 4 \left(\frac{m}{2\pi\xi} \right) \left(\frac{\xi^2}{m^2} \right)^{3-\frac{D}{2}} \sum_n \left[\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + \xi^2 \right]^{3-\frac{D}{2}} \right. \\ & \left. + (D-6)m^2 \left(\frac{m}{2\pi\xi} \right) \left(\frac{\xi^2}{m^2} \right)^{4-\frac{D}{2}} \sum_n \left[\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + \xi^2 \right]^{4-\frac{D}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Note que, para $D = 3$ temos $\lambda = \frac{3}{2}$ e $\lambda = \frac{5}{2}$, ou seja, $\lambda > 1$. Assim, precisaremos usar uma relação de recorrência para a integral $f_\lambda(a, b)$ da seguinte forma

$$f_\lambda(a, b) = -\frac{1}{2a^2} \frac{2\lambda - 3}{\lambda - 1} f_{\lambda-1}(a, b) - \frac{1}{4a^2} \frac{1}{(\lambda - 2)(\lambda - 1)} \frac{\partial^2}{\partial b^2} f_{\lambda-2}(a, b). \quad (1.87)$$

Usando essa relação para $\lambda = \frac{3}{2}$, voltamos a condição em que o somatório sobre as frequências de Matsubara é válido. Já quando olhamos para o caso em que $\lambda = \frac{5}{2}$, não é suficiente usarmos essa relação apenas uma vez, pois ainda teríamos $\lambda > 1$. Para resolver esse problema podemos usar esta relação de recorrência duas vezes e assim obtemos $\lambda = \frac{1}{2}$ e $\lambda = -\frac{1}{2}$ como exigido pela equação (1.77). Procedendo dessa maneira encontramos que

$$\Pi_3 = \frac{ie}{3\pi^2} + ieF_{\text{III}}(\xi), \quad (1.88)$$

onde

$$F_{\text{III}}(\xi) = \int_{|\xi|}^{\infty} dz \frac{(3\xi^2 - 2z^2) \text{sech}^2(\pi z) \tanh(\pi z)}{3\sqrt{z^2 - \xi^2}}. \quad (1.89)$$

O comportamento da função $F_{\text{III}}(\xi)$ é exibido na Figura 6. No limite de altas temperaturas $F_{\text{III}}(\xi \rightarrow 0) = -1/3\pi^2$.

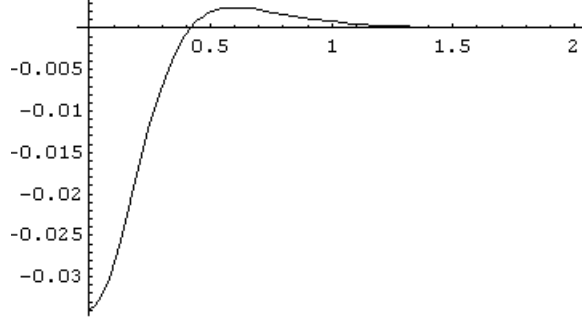


Figura 6: Comportamento da função $F_{\text{III}}(\xi)$

Agora, vamos substituir (1.74) e (1.75) na equação (1.60), fazendo isso ficamos com

$$\begin{aligned} \Pi_4 = \Pi_5 = & \frac{8ie(\mu^2)^{\frac{3-D}{2}}}{3(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) m^2 \left\{ (D-5) \left(\frac{m}{2\pi\xi}\right) \left(\frac{\xi^2}{m^2}\right)^{3-\frac{D}{2}} \sum_n \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \xi^2\right]^{3-\frac{D}{2}} \right. \\ & \left. - (D-6)m^2 \left(\frac{m}{2\pi\xi}\right) \left(\frac{\xi^2}{m^2}\right)^{4-\frac{D}{2}} \sum_n \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \xi^2\right]^{4-\frac{D}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Procedendo de maneira análoga ao que fizemos em (1.86), usando as relações de recorrência encontramos que

$$\Pi_4 = \Pi_5 = ieF_{\text{IV}}(\xi), \quad (1.91)$$

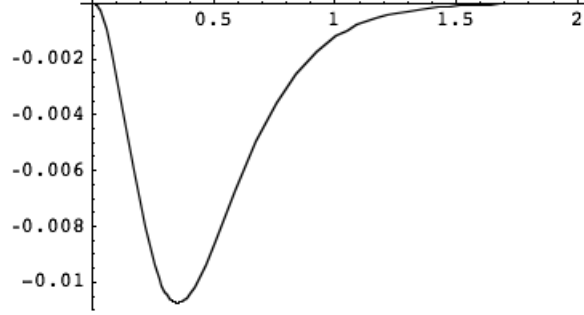
com

$$F_{\text{IV}}(\xi) = - \int_{|\xi|}^{\infty} dz \frac{\xi^2 \text{sech}^2(\pi z) \tanh(\pi z)}{3\sqrt{z^2 - \xi^2}}. \quad (1.92)$$

Na Figura 7 temos o comportamento da função $F_{\text{IV}}(\xi)$. Nesta figura observamos que no limite de altas temperaturas $F_{\text{IV}}(\xi \rightarrow 0) = 0$.

Por fim, vamos usar o formalismo de Matsubara na equação (1.61), e como resultado essa equação se torna

$$\Pi_6 = - \frac{4ie(\mu^2)^{\frac{3-D}{2}}}{3(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left\{ (D-1)(D-3) \left(\frac{m}{2\pi\xi}\right) \left(\frac{\xi^2}{m^2}\right)^{2-\frac{D}{2}} \sum_n \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \xi^2\right]^{2-\frac{D}{2}} \right.$$

Figura 7: Comportamento da função $F_{IV}(\xi)$

$$\begin{aligned}
& - 2(D-3)(D-4)m^2 \left(\frac{m}{2\pi\xi} \right) \left(\frac{\xi^2}{m^2} \right)^{3-\frac{D}{2}} \sum_n \left[\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + \xi^2 \right]^{3-\frac{D}{2}} \\
& + (D-4)(D-6)m^4 \left(\frac{m}{2\pi\xi} \right) \left(\frac{\xi^2}{m^2} \right)^{4-\frac{D}{2}} \sum_n \left[\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + \xi^2 \right]^{4-\frac{D}{2}} \Bigg\}. \quad (1.93)
\end{aligned}$$

Procedendo como fizemos para resolver os somatórios em (1.90) encontramos que

$$\Pi_6 = ieF_{VI}(\xi), \quad (1.94)$$

sendo

$$F_{VI}(\xi) = \int_{|\xi|}^{\infty} dz \frac{(2z^2 - \xi^2) \operatorname{sech}^2(\pi z) \tanh(\pi z)}{3\sqrt{z^2 - \xi^2}}, \quad (1.95)$$

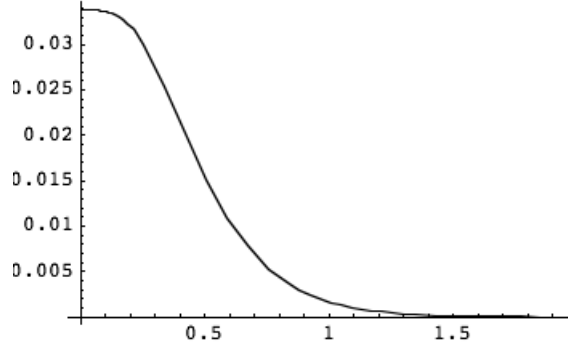
com seu comportamento mostrado na Figura 8. No limite de altas temperaturas temos que $F_{VI}(\xi \rightarrow 0) = \frac{1}{3\pi^2}$.

Usando as equações (1.88), (1.91) e (1.94) podemos reescrever a equação (1.55) no contexto de temperatura finita como

$$\Pi_{bbb}^{\mu} = \left[\frac{ib_E^2}{3\pi^2} + ib_E^2 F_{III}(\xi) + ib_4^2 F_{IV}(\xi) \right] eb_E^{\mu} + \left[ib_E^2 F_{IV}(\xi) + ib_4^2 F_{VI}(\xi) \right] eb_4 \delta^{\mu 0}. \quad (1.96)$$

Com as equações (1.85) e (1.96) podemos escrever

$$\Pi^{\mu} = \left[-\frac{im^2}{\pi^2\epsilon} + \frac{im^2}{2\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) + im^2 F_I(\xi) + \frac{ib_E^2}{3\pi^2} + ib_E^2 F_{III}(\xi) + ib_4^2 F_{IV}(\xi) \right] eb_E^{\mu}$$

Figura 8: Comportamento da função $F_{VI}(\xi)$

$$+ \left[ib_E^2 F_{IV}(\xi) + ib_4^2 F_{VI}(\xi) + iT^2 F_{II}(\xi) \right] eb_4 \delta^{\mu 0}, \quad (1.97)$$

e reescrever a equação de gap (1.28) como

$$\left[-\frac{1}{G'_R} + \frac{\vec{b}^2 + b_4^2}{3\pi^2} + m^2 F_I(\xi) + T^2 F_{II}(\xi) + \vec{b}^2 (F_{III}(\xi) + F_{IV}(\xi)) \right] b_4 \delta^{\mu 0} + \left[-\frac{1}{G'_R} + \frac{\vec{b}^2 + b_4^2}{3\pi^2} + m^2 F_I(\xi) + \vec{b}^2 F_{III}(\xi) + b_4^2 (F_{III}(\xi) + F_{IV}(\xi)) \right] \hat{b}^\mu = 0, \quad (1.98)$$

onde

$$\frac{1}{G'_R} = \frac{1}{G_R} - \frac{m^2}{2\pi^2} \ln \left(\frac{m^2}{\mu'^2} \right).$$

Analisando essa equação, encontramos as seguintes possibilidades:

1. $b_4 = b_i = 0$ é uma solução trivial onde as simetrias de Lorentz não são quebradas.
2. $b_4 \neq 0$ e $b_i \neq 0$. Neste caso b_4 e/ou b_i cresce quadraticamente com a temperatura, então, a quebra das simetrias de Lorentz cresce.
3. $b_4 \neq 0$ e $b_i = 0$. Neste caso, a equação de gap se reduz para

$$-b_4^2 = b_0^2 = 3\pi^2 \left(\frac{1}{|G'_R|} - T^2 |F_{II}(\xi)| + m^2 F_I(\xi) \right), \quad (1.99)$$

onde nós temos usado $G'_R = -|G'_R|$, porque b_μ é tipo-tempo e ambas $F_I(\xi)$ e $|F_{II}(\xi)|$ crescem monotonamente com T . Em particular, com $T \rightarrow \infty$, $F_I(\xi) \rightarrow 1/2$ e $|F_{II}(\xi)| \rightarrow 1/3$. Entretanto, em uma certa temperatura, isto é, uma temperatura

crítica, a condição $b_4 = 0$ é satisfeita e as simetrias de Lorentz serão restauradas.

4. $b_4 = 0$ and $b_i \neq 0$. Neste caso a equação de gap é

$$-\frac{1}{G'_R} + m^2 F_I(\xi) + \vec{b}^2 \left(\frac{1}{3\pi^2} + F_{III}(\xi) \right) = 0. \quad (1.100)$$

Então, como $\frac{1}{3\pi^2} + F_{III}(\xi) \geq 0$ e $F_I(\xi) \leq 1/2$ existirá uma temperatura crítica em que as simetrias de Lorentz serão restauradas somente se $\frac{1}{m^2 G'_R} \leq 1/2$. Por outro lado, para $\frac{1}{m^2 G'_R} > 1/2$, a violação das simetrias de Lorentz cresce com a temperatura.

Portanto, nosso objetivo principal foi mostrar que o modelo de quatro-férmions quadridimensional apresenta quebra espontânea das simetrias de Lorentz e CPT em temperatura zero, e no contexto de temperatura finita observamos que para $b_4 \neq 0$ e $b_i = 0$, existe uma temperatura crítica na qual as simetrias de Lorentz e CPT podem ser restauradas. E que por outro lado, para $b_4 = 0$, $b_i \neq 0$, e $\frac{1}{m^2 G'_R} > 1/2$, as simetrias de Lorentz são quebradas pelo aparecimento de um vetor tipo-espaço b^μ e não ocorre restauração para nenhuma temperatura.

1.6 Equação de Friedmann com quebra espontânea da simetria de Lorentz

Nesta seção iremos estudar quais os efeitos que a violação das simetrias de Lorentz pode trazer para o cenário cosmológico. O interesse em quebra das simetrias de Lorentz naturalmente inspira a idéia de estudar os impactos em cosmologia, onde o problema chave hoje é entender o fenômeno que está causando a expansão acelerado do universo. Algumas estimativas experimentais preliminares da quebra das simetrias de Lorentz em escala cosmológica são apresentadas em [34], alguns tópicos relevantes em violação das simetrias de Lorentz em cosmologia podem ser encontrados em [35].

É natural esperar que a presença da quebra das simetrias de Lorentz pode modificar o cenário cosmológico. Um caminho para se estudar a violação de tais simetrias em cosmologia é através da quebra espontânea dessas simetrias. Neste estudo usaremos o modelo bumblebee em um espaço tempo de cinco dimensões [36, 37]. A importância de se estudar esse modelo em cinco dimensões surge a partir do grande interesse no conceito de dimensões extras motivado por teorias de cordas e branas [38].

Nós aplicaremos esse mecanismo para implementar a modificação causada pela violação de Lorentz para uma simples solução cosmológica, a solução de Friedmann-Robertson-

Walker, e assim estudar seus impactos. Nós mostraremos que a dinâmica de expansão do universo devido à presença da quebra das simetrias de Lorentz é altamente não trivial.

Agora vamos descrever a teoria. Um teoria geral em cinco dimensões que descreve o modelo bumblebee pode ser dada por

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_B + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M), \quad (1.101)$$

onde $\mathcal{L}_G$ é o termo gravitacional de Einstein-Hilbert, $\mathcal{L}_M$ é o termo de matéria e $\mathcal{L}_B$ é o termo tipo-bumblebee:

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - V(B_\mu B^\mu \pm b^2), \quad (1.102)$$

com o tensor $B_{\mu\nu}$ definido como $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$. O $V(B_\mu B^\mu \pm b^2)$ é o potencial bumblebee que escolhemos como

$$V = \frac{1}{2}\kappa(B_\mu B^\mu \pm b^2)^2 = \frac{1}{2}\kappa(B_\mu g^{\mu\nu} B_\nu \pm b^2)^2. \quad (1.103)$$

Assim, a ação (1.101) toma a forma

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} R - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\kappa(B_\mu B^\mu \pm b^2)^2 + \mathcal{L}_M \right]. \quad (1.104)$$

Variando a ação (1.104) com respeito à métrica, obtemos as equações de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.105)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia momento composto por dois termos

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(M)} + T_{\mu\nu}^{(B)}, \quad (1.106)$$

com $T_{\mu\nu}^{(M)}$ sendo o tensor energia momento associado ao setor de matéria e $T_{\mu\nu}^{(B)}$ é o tensor energia momento associado ao campo bumblebee,

$$T_{\mu\nu}^{(B)} = T_{\mu\nu}^{(B)K} + T_{\mu\nu}^{(B)V}, \quad (1.107)$$

com $T_{\mu\nu}^{(B)K}$ gerado pela parte cinética da ação do campo bumblebee e $T_{\mu\nu}^{(B)V}$ pela parte do potencial. Usando a definição do tensor energia momento

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_B}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (1.108)$$

nós obtemos

$$T_{\mu\nu}^{(B)k} = B_{\mu\alpha}B_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}B_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta} \quad (1.109)$$

e

$$T_{\mu\nu}^{(B)V} = -Vg_{\mu\nu} + 2V'B_{\mu}B_{\nu}, \quad (1.110)$$

onde $V' = \frac{\delta V}{\delta X}$, com $X = B_{\mu}g^{\mu\nu}B_{\nu} \pm b^2$. Então, podemos escrever o tensor energia momento total para o campo bumblebee como

$$T_{\mu\nu}^{(B)} = B_{\mu\alpha}B_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}B_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta} - Vg_{\mu\nu} + 2V'B_{\mu}B_{\nu}. \quad (1.111)$$

A matéria aqui é considerada como sendo um fluido perfeito com densidade de energia ρ e pressão p , cujo tensor energia momento é dado por

$$T_{\mu\nu}^{(M)} = (\rho + p)U_{\mu}U_{\nu} + pg_{\mu\nu}, \quad (1.112)$$

onde $U_{\mu} = (1, 0, 0, 0, 0)$ é a velocidade do fluido.

Seguindo o princípio cosmológico, nós assumimos que o universo é homogêneo e isotrópico, com o elemento de linha de Friedmann-Robertson-walker (FRW) em cinco dimensões dado por [39]

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \\ &= -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] + \epsilon\Phi^2(t)dy^2, \end{aligned} \quad (1.113)$$

onde $k = -1, 0, 1$ é o parâmetro de curvatura para um universo aberto, plano e fechado, respectivamente, y é a dimensão extra e o fator ϵ é -1 ou $+1$ para uma dimensão extra tipo-tempo ou tipo-espaço, respectivamente. Em nossa análise nós sugerimos que a dimensão extra seja tipo-espaço, então $\epsilon = +1$. A assinatura para o espaço-tempo usual em quatro dimensões é escolhida como sendo $(-+++)$, $a(t)$ é o fator de escala do usual espaço tri-dimensional e $\Phi(t)$ é o fator de escala da dimensão extra.

Agora, vamos calcular as componentes do tensor energia momento correspondentes ao campo bumblebee B_{μ} . De maneira similar a [40], nós escolhemos B_{μ} na direção da dimensão extra, assim, ficamos com

$$B_0 = 0, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = B(t). \quad (1.114)$$

No vácuo o campo bumblebee deve satisfazer a condição $g^{\mu\nu}B_{\mu}B_{\nu} = b^2$, isto é, $B_4 = b\Phi(t)$

para fornecer o valor mínimo para a energia [40]. Entretanto, no caso geral o campo bumblebee pode ser diferente. As componentes não nulas para o tensor energia momento do campo bumblebee são

$$T_{00}^{(B)} = \frac{\dot{B}^2}{2\Phi^2} + \frac{1}{2}\kappa\left(\frac{B^2}{\Phi^2} - b^2\right)^2, \quad (1.115)$$

$$T_{11}^{(B)} = \frac{a^2(t)}{2(1-kr^2)}\left[\frac{\dot{B}^2}{\Phi^2} - \kappa\left(\frac{B^2}{\Phi^2} - b^2\right)^2\right], \quad (1.116)$$

$$T_{22}^{(B)} = \frac{a^2(t)r^2}{2}\left[\frac{\dot{B}^2}{\Phi^2} - \kappa\left(\frac{B^2}{\Phi^2} - b^2\right)^2\right], \quad (1.117)$$

$$T_{33}^{(B)} = \frac{a^2(t)r^2\sin^2\theta}{2}\left[\frac{\dot{B}^2}{\Phi^2} - \kappa\left(\frac{B^2}{\Phi^2} - b^2\right)^2\right], \quad (1.118)$$

$$T_{44}^{(B)} = -\frac{1}{2}\dot{B}^2 + \frac{3}{2}\kappa\frac{B^4}{\Phi^2} - \kappa B^2 b^2 - \frac{1}{2}\kappa b^4 \Phi^2. \quad (1.119)$$

Voltando para as equações de Einstein, e tomando a componente com $\mu = \nu = 0$ nós temos

$$G_{00} = 8\pi(T_{00}^M + T_{00}^B), \quad (1.120)$$

onde $T_{00}^M = \rho$ e

$$G_{00} = 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{\Phi}}{a\Phi}\right) + 3\frac{k}{a^2}. \quad (1.121)$$

Assim, a correspondente equação de Einstein toma a forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{\Phi}}{a\Phi} = \frac{8\pi}{3}\rho + \frac{4\pi}{3}\left[\frac{\dot{B}^2}{\Phi^2} + \kappa\left(\frac{B^2}{\Phi^2} - b^2\right)^2\right]. \quad (1.122)$$

Este é o análogo em cinco dimensões da equação de Friedmann envolvendo quebra espontânea das simetrias de Lorentz. Podemos verificar que no caso $b = 0$ e $B = 0$, isto é, sem violação de Lorentz, essa equação reproduz os resultados conhecidos [41, 42].

Agora, vamos resolver a equação de Friedmann com quebra espontânea das simetrias de Lorentz (1.122). Vamos considerar o caso $\Phi(t) = \text{const}$, ou seja, dimensão extra estática [42, 43]. Nesta situação o fator de escala da dimensão extra não muda, e a evolução do universo é dada pela cosmologia padrão em quatro dimensões. No entanto, os efeitos da violação de Lorentz persistem. A equação (1.122) se torna

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho + \frac{4\pi}{3}\left[\frac{\dot{B}^2}{\Phi^2} + \kappa\left(\frac{B^2}{\Phi^2} - b^2\right)^2\right]. \quad (1.123)$$

Essa equação contém três variáveis, isto é, o fator de escala, a densidade de matéria e o

campo B . Outra equação que relaciona essas variáveis é a lei de conservação de energia que pode ser encontrada a partir de

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.124)$$

Para a componente $\nu = 0$, usando as propriedades das derivadas covariantes [44], obtemos

$$\nabla_\mu T^{\mu 0} = \partial_\mu T^{\mu 0} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T^{\lambda 0} + \Gamma_{\mu\lambda}^0 T^{\mu\lambda} = 0. \quad (1.125)$$

Os símbolos de Christoffel⁹ relevantes no caso geral, ou seja, incluindo o caso Φ não constante, são

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= 0, \\ \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{30}^3 &= \frac{\dot{a}}{a}, \\ \Gamma_{40}^4 &= \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}, \\ \Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}, \\ \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2, \\ \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{44}^0 &= \Phi\dot{\Phi}. \end{aligned} \quad (1.126)$$

Assim, usando as componentes do tensor energia-momento para o campo bumblebee e os símbolos de Christoffel em (1.125), nós obtemos a equação de conservação de energia em cinco dimensões com quebra espontânea das simetrias de Lorentz

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left[\rho + p + \frac{\dot{B}^2}{\Phi^2}\right] + \frac{1}{2}\partial_0\left[\kappa\left(\frac{B^2}{\Phi^2} - b^2\right)^2 + \frac{\dot{B}^2}{\Phi^2}\right] + \frac{\dot{\Phi}}{\Phi}\left[\rho + p + 2\kappa\frac{B^4}{\Phi^4} - 2\kappa\frac{B^2b^2}{\Phi^2}\right] = 0. \quad (1.127)$$

Notamos que para $\Phi(t) = \text{const}$ e $B = 0$, temos a equação de conservação de energia usual, $\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$.

Nós podemos adicionar às equações (1.123, 1.127) a equação de movimento para o campo B dada por,

$$\ddot{B}\Phi^2 + 2\kappa B(B^2 - b^2\Phi^2) + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{B}\Phi^2 = 0. \quad (1.128)$$

O último termo nessa equação é gerado pela derivada temporal de $\sqrt{-g}$. Aqui nós já impomos a condição de dimensão extra estática, $\Phi(t) = \text{const}$. Então, vamos resolver

⁹Definição dada na equação (B.1)

o sistema formado pelas equações (1.123, 1.127, 1.128), sugerindo a equação de estado linear

$$p = (\gamma - 1)\rho, \quad (1.129)$$

onde γ é um fator numérico que nos fornece o conteúdo de matéria do universo, por exemplo, se $\gamma = 1$, temos que o universo é dominado por matéria. Por simplicidade, fazendo

$$\Sigma(t) = \kappa \left(\frac{B^2}{\Phi^2} - b^2 \right)^2 + \frac{\dot{B}^2}{\Phi^2}, \quad (1.130)$$

nosso sistema, no caso de um espaço plano ($k = 0$), toma a forma

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= \frac{8\pi}{3}\rho + \frac{4\pi}{3}\Sigma(t); \\ \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left[\gamma\rho + \frac{\dot{B}^2}{\Phi^2} \right] + \frac{1}{2}\dot{\Sigma}(t) &= 0; \\ \ddot{B}\Phi^2 + 2\kappa B(B^2 - b^2\Phi^2) + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{B}\Phi^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Diferenciando $\Sigma(t)$ nós encontramos

$$\dot{\Sigma} = \frac{2\dot{B}}{\Phi^4} [\ddot{B}\Phi^2 + 2\kappa B(B^2 - b^2\Phi^2)], \quad (1.132)$$

assim, substituindo essa expressão na última equação do nosso sistema, encontramos

$$\dot{B}^2 = -\frac{a\Phi^2}{6\dot{a}}\dot{\Sigma}. \quad (1.133)$$

Substituindo esse último resultado na segunda equação do sistema, obtemos a seguinte equação relacionando o fator de escala e a densidade de energia,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\gamma\rho = 0, \quad (1.134)$$

que é a mesma equação encontrada para o caso invariante de Lorentz.

Essa equação nos dá como a densidade de energia depende do fator de escala,

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3\gamma}, \quad (1.135)$$

onde ρ_0 é a presente densidade de energia. Como usual em cosmologia, escolhemos $a_0 = 1$.

Então, o sistema (1.131) é reduzido para

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho_0 a^{-3\gamma} + \frac{4\pi}{3}\left[\kappa\left(\frac{B^2}{\Phi^2} - b^2\right)^2 + \frac{\dot{B}^2}{\Phi^2}\right];$$

$$\ddot{B}\Phi^2 + 2\kappa B(B^2 - b^2\Phi^2) + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{B}\Phi^2 = 0. \quad (1.136)$$

Observamos que para o caso $B(t) = \pm b\Phi = \text{const.}$, a segunda equação é satisfeita e na primeira temos uma equação para o fator de escala que coincide com o caso invariante de Lorentz. Agora vamos tentar resolver esse sistema de equações para alguma condição inicial e analisar o comportamento que encontramos. Notamos ainda que esse sistema pode ser reduzido a uma única equação, que para um caso geral tem solução que não é dada em termos de funções elementares.

Como uma primeira tentativa, vamos fazer um estudo numérico desse sistema considerando o caso $\gamma = 1$ (universo dominado por matéria) e o valor inicial $B_4(0) = b\Phi$, isto é, a expansão do universo começa no estado do vácuo, onde b é o parâmetro de quebra das simetrias de Lorentz. Aqui supomos que esse parâmetro seja uma quantidade pequena de acordo com o que encontramos na literatura e ρ_0 é a densidade de energia média do universo. Consideremos por simplicidade que a constante de acoplamento que é introduzida junto ao termo de potencial do campo bumblebee seja igual à unidade, ou seja, $\kappa = 1$. Encontramos para a dinâmica do fator de escala e para a dinâmica da velocidade os resultados mostrados nas Figuras 9 e 10.

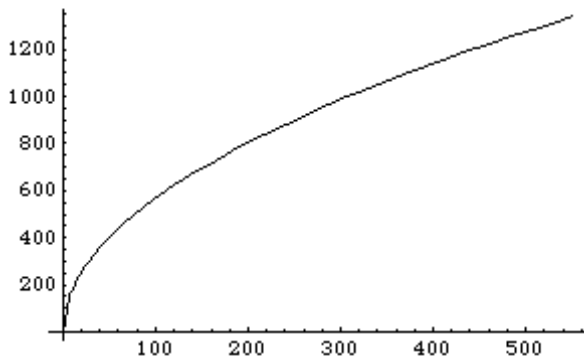


Figura 9: Dinâmica do fator de escala

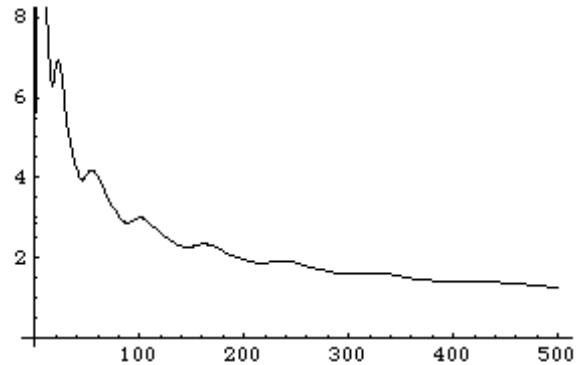


Figura 10: Dinâmica da velocidade

Essas soluções correspondem a uma expansão em um cenário não usual, o qual re-

presenta uma sequência de períodos alternando entre expansão desacelerada e acelerada. Em [45] os autores propõem modelos fenomenológicos de energia escura oscilando que implicam em um cenário no qual o universo envolve oscilações eternas entre fases acelerando e desacelerando. A possibilidade de mudar de uma fase desacelerando para uma fase acelerada e vice-versa também foi sugerida em [46]. Embora nossos primeiros cálculos seja para uma era a qual o universo já passou, lembrando que no início o universo era dominado por matéria ($\gamma = 1$), se essa situação se torna verdade no universo atual, podemos supor que vivemos em um curto período de aceleração que será seguido por uma fase de desaceleração com esse ciclo se repetindo indefinidamente.

Nossa principal conclusão consiste no fato que a quebra das simetrias de Lorentz conforme foi introduzido, nos leva a expansão acelerada do universo em certos casos e em certos intervalos de tempo, mostrando que encontramos um resultado altamente não trivial, pois para o período analisado esperávamos uma desaceleração do universo, e no entanto, tivemos um período com pequenas oscilações entre desaceleração e aceleração.

2 *Eletrodinâmica quântica estendida*

Todas as partículas fundamentais e suas interações não gravitacionais são bem descritas pelo modelo padrão. Esse modelo é invariante sob as simetrias de Lorentz e CPT. Contudo, a possibilidade de pequenas violações dessas simetrias tem sido insistentemente investigada na literatura. Motivados por tal possibilidade, Kostelecky e Colladay [3] construíram uma extensão do modelo padrão que inclui todos os possíveis termos que violam as simetrias de Lorentz e CPT.

2.1 Modelo padrão estendido

Nesta seção iremos fazer uma breve discussão do modelo padrão estendido, com ênfase na extensão proposta para a eletrodinâmica quântica, uma vez que nas próximas seções analisaremos alguns efeitos dessa teoria no limite de altas temperaturas.

Como já vimos, existe a possibilidade de que as simetrias de Lorentz e CPT sejam violadas, as primeiras motivações surgiram no contexto de teoria de cordas [1]. Dessa maneira, o modelo padrão pode ser entendido como uma teoria efetiva em baixas energias de uma teoria fundamental na escala de Planck que também fornece uma descrição quântica da gravitação.

A lagrangiana do modelo padrão estendido é composta pelo modelo padrão usual e campos gravitacionais incluindo termos que levam à violação das simetrias de Lorentz. Em princípio, existe uma infinidade de termos nessa extensão do modelo padrão, inclusive termos não renormalizáveis. Para investigar experimentos em baixas energias considera-se apenas um subconjunto do modelo estendido, que contém um número finito de termos. Este subconjunto é denominado de extensão mínima do modelo padrão, o qual restringe a teoria a termos renormalizáveis e invariantes de gauge. Recentemente, vários testes experimentais tem sido desenvolvidos com o objetivo de testar a invariância de

Lorentz, por exemplo, medidas envolvendo sistemas atômicos [47], modernos experimentos de Michelson-Morley [48], oscilações de mésons neutros [49], oscilações de neutrinos [50, 51], entre outros. Como a violação da invariância de Lorentz não tem sido observada na natureza, os coeficientes que fazem parte da extensão do modelo padrão e que violam Lorentz devem ser pequenos. Portanto, para tal observação é necessário experimentos extremamente sensíveis.

Embora essa extensão do modelo padrão¹ tenha sua motivação inicial em teoria de cordas, envolvendo a idéia de quebra espontânea de simetria, nada nesse modelo requer que seus coeficientes que violam a invariância de Lorentz tenham origem em processos de quebra espontânea de simetria, ou seja, os coeficientes desse modelo também podem ser vistos como uma violação explícita das simetrias de Lorentz ou algum outro mecanismo ainda não conhecido. Para uma revisão do modelo padrão estendido e algumas implicações podemos ver [52, 53, 54, 55, 56, 57], onde o mecanismo usado para gerar esses termos é a quebra espontânea de simetria.

Muitos testes das simetrias de Lorentz e CPT tem sido feitos com fótons ou com partículas onde as interações dominantes são descritas pela eletrodinâmica quântica. Para investigar sinais da quebra dessas simetrias vários trabalhos foram desenvolvidos considerando uma parte da lagrangiana do modelo padrão estendido, a eletrodinâmica quântica estendida.

A lagrangiana que descreve a eletrodinâmica quântica estendida é composta pelos termos usuais invariantes de Lorentz, descrevendo fótons, férmions massivos carregados e seus acoplamentos, mais termos violando a invariância de Lorentz. Assim, essa lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\Gamma^\mu D_\mu - M) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} (k_F)_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} + \frac{1}{2} (k_{AF})^\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} A^\nu F^{\lambda\rho}, \quad (2.1)$$

onde $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Gamma_1^\mu$, $M = m + M_1$, com

$$\Gamma_1^\mu \equiv c^{\mu\nu} \gamma_\nu + d^{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\nu + e^\mu + i f^\mu \gamma_5 + \frac{1}{2} g^{\lambda\nu\mu} \sigma_{\lambda\nu}, \quad (2.2)$$

$$M_1 \equiv a_\mu \gamma^\mu + b_\mu \gamma_5 \gamma^\mu + \frac{1}{2} H_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

De maneira usual, $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ é a derivada covariante e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor eletromagnético.

Os parâmetros que quebram a invariância de Lorentz a_μ , b_μ , $H_{\mu\nu}$, e $(k_{AF})_\mu$ tem di-

¹Sempre que nos referirmos ao modelo padrão estendido, estaremos considerando a extensão mínima que preserva a renormalizabilidade e a invariância de gauge da teoria.

mensão de massa, enquanto $c_{\mu\nu}$, $d_{\mu\nu}$, e_μ , f_μ , $g_{\lambda\nu\mu}$, e $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$ são adimensionais. Temos que a quebra da simetria CPT implica em quebra das simetrias de Lorentz [58], então, esses coeficientes podem violar apenas as simetrias de Lorentz ou as simetrias de Lorentz e CPT. Os coeficientes que possuem um número par de índices de Lorentz quebram apenas as simetrias de Lorentz, já os que possuem um número ímpar de índices de Lorentz violam CPT e Lorentz. No setor de fótons violando Lorentz temos o termo de Chern-Simons quadridimensional, $(k_{AF})^\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} A^\nu F^{\lambda\rho}$, que viola as simetrias de Lorentz e CPT (CPT-ímpar) e um outro termo, $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho}$, que viola somente as simetrias de Lorentz (CPT-par). Em [59, 60] foram estudadas a estabilidade, a causalidade e a renormalizabilidade da eletrodinâmica quântica estendida.

A idéia de modificar a eletrodinâmica quântica já havia sido proposta por Carroll, Field e Jackiw em [61], anteriormente à construção do modelo padrão estendido. A modificação formulada por eles consiste em adicionar à lagrangiana de Maxwell usual o termo de Chern-Simons quadridimensional. Desse modo, a lagrangiana modificada fica

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}p_\mu A_\nu \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

onde $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ é o tensor eletromagnético dual. Esta modificação acopla o campo eletromagnético com o quadrivetor p_μ .

Algumas consequências físicas da teoria modificada são, os fótons tem dois modos de polarização que viajam no vácuo com velocidades diferentes da velocidade da luz (a invariância de boost de Lorentz é perdida) e diferentes uma da outra (violação de paridade).

Após essa construção, e nos últimos anos, foi intensamente investigado se esse termo seria induzido por correções radiativas quando adiciona-se o termo CPT-ímpar, $b_\mu \gamma^\mu \gamma_5$, ao setor fermiônico da eletrodinâmica quântica usual. Essa questão foi tratada em diferentes contextos e esquemas de regularização. Alguns resultados sobre a indução do termo de Chern-Simons podem ser encontrados em [3, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 30, 68, 69, 70].

2.2 Energia livre da eletrodinâmica quântica estendida em altas temperaturas

Nesta seção iremos estudar correções para a energia livre em um e dois loops (segunda ordem na constante de acoplamento e) da eletrodinâmica quântica na presença de termos que quebram a invariância de Lorentz em temperatura finita. A nossa análise ocorrerá a

partir de um termo CPT-par que preserva a simetria CPT, porém, quebra a simetria de Lorentz. Veremos que no regime de altas temperaturas surge uma contribuição linear no parâmetro de quebra e assim, analisaremos o efeito desse parâmetro na energia livre [71].

Podemos reescrever a lagrangiana (2.1) como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\Gamma^\mu D_\mu - M) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} (k_F)_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho} + \frac{1}{2} (k_{AF})^\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} A^\nu F^{\lambda\rho} + \mathcal{L}_{\text{gf}} + \mathcal{L}_{\text{gh}}, \quad (2.5)$$

onde $\mathcal{L}_{\text{gf}}$ é o termo de fixação de gauge e $\mathcal{L}_{\text{gh}}$ é o termo associado ao campo de ghost², que desacoplam do resto da lagrangiana.

Os dois termos que violam Lorentz no setor dos fótons, o termo de Chern-Simons $(k_{AF})^\mu \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} A^\nu F^{\lambda\rho}$ e o termo $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\mu\nu} F^{\lambda\rho}$ podem ser induzidos por correções radiativas dos termos com coeficientes b_μ e $c_{\mu\nu}$ do setor fermiônico, respectivamente [60, 63], tais que

$$(k_{AF})_\mu \propto b_\mu \quad (2.6)$$

e

$$(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho} \propto \frac{1}{2} g_{\mu\lambda} (c_{\nu\rho} + c_{\rho\nu}) + \frac{1}{2} g_{\nu\rho} (c_{\mu\lambda} + c_{\lambda\mu}) - \frac{1}{2} g_{\mu\rho} (c_{\nu\lambda} + c_{\lambda\nu}) - \frac{1}{2} g_{\nu\lambda} (c_{\mu\rho} + c_{\rho\mu}). \quad (2.7)$$

No regime de altas temperaturas ($T \gg M$) os coeficientes que possuem dimensão de massa podem ser desprezados. Por exemplo, observamos que a correção de b_μ para a energia livre é proporcional a $b^2 T^2$; algo similar ocorre ao se analisar correções para o termo de Chern-Simons, como foi feito em [72], $k_{AF}^2 T^2$. Então, ambos podem ser desprezados em altas temperaturas com o mesmo ocorrendo para os coeficientes a_μ e $H_{\mu\nu}$.

Os coeficientes sem dimensão e_μ , f_μ e $g_{\lambda\nu\mu}$ são considerados como sendo muito menores que os outros, isso porque esses termos não podem ser obtidos diretamente do modelo padrão estendido [3] (para mais detalhes, veja também [55]). Contudo, se nós queremos que a teoria em altas temperaturas seja invariante sob transformações quirais esses termos devem ser removidos, desde que $\{\gamma_5, e^\mu + i f^\mu \gamma_5 + \frac{1}{2} g^{\lambda\nu\mu} \sigma_{\lambda\nu}\} \neq 0$.

Portanto, os coeficientes que permanecem são $c_{\mu\nu}$, $d_{\mu\nu}$ e $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$. Agora, para tomar a álgebra de Clifford com $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + c^{\mu\nu} \gamma_\nu + d^{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\nu$, nós podemos escolher $d_{\mu\nu} = Q(\delta_{\mu\nu} + c_{\mu\nu})$,

²Campo de ghost ou campo de fantasma.

onde Q é uma constante [73]. Com tais considerações a teoria (2.5) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho} + \bar{\psi} [i\partial_\mu(g^{\mu\nu} + c^{\mu\nu})\tilde{\gamma}_\nu - e A_\mu(g^{\mu\nu} + c^{\mu\nu})\tilde{\gamma}_\nu] \psi \\ & + \mathcal{L}_{\text{gf}} + \mathcal{L}_{\text{gh}}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $\tilde{\gamma}_\mu = (1 + Q\gamma_5)\gamma_\mu$.

Agora vamos supor invariância rotacional, tal que os coeficientes acima podem ser reduzidos a produtos de um vetor unitário tipo-tempo u_μ ; mais detalhes dessa escolha podem ser vistos em [55, 57]. Procedendo nesse caminho, nós escrevemos $c_{\mu\nu} = \kappa u_\mu u_\nu$ e da equação (2.7) obtemos,

$$(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho} = \tilde{\kappa} (g_{\mu\lambda}u_\nu u_\rho + g_{\nu\rho}u_\mu u_\lambda - g_{\mu\rho}u_\nu u_\lambda - g_{\nu\lambda}u_\mu u_\rho), \quad (2.9)$$

onde $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$ e a partir de agora κ e $\tilde{\kappa}$ são os coeficientes que determinam a escala da violação de Lorentz. Sendo assim, devemos verificar como fica a equação (2.8) aplicando a invariância rotacional em cada termo. O primeiro termo no setor dos férmions fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\psi 1} &= \bar{\psi} [i\partial_\mu(g^{\mu\nu} + c^{\mu\nu})\tilde{\gamma}_\nu] \psi \\ &= \bar{\psi} [i\partial_\mu(g^{\mu\nu} + \kappa u^\mu u^\nu)\tilde{\gamma}_\nu] \psi \\ &= \bar{\psi} [i\partial_\mu(g^{\mu\nu} + \kappa \delta^{\mu 0} \delta^{\nu 0})\tilde{\gamma}_\nu] \psi \\ &= i\bar{\psi}\partial_\mu\tilde{\gamma}^\mu\psi + i\kappa\bar{\psi}\partial_0\tilde{\gamma}^0\psi \\ &= i\bar{\psi}\partial_0\tilde{\gamma}^0(1 + \kappa)\psi + i\bar{\psi}\partial_i\tilde{\gamma}^i\psi \\ &= i\bar{\psi}\tilde{\partial}_\mu\tilde{\gamma}^\mu\psi, \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde $\tilde{\partial}_\mu = (\partial_0(1 + \kappa), \partial_i)$. O segundo termo desse setor se torna

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\psi 2} &= \bar{\psi} [e A_\mu(g^{\mu\nu} + c^{\mu\nu})\tilde{\gamma}_\nu] \psi \\ &= \bar{\psi} [e A_\mu(g^{\mu\nu} + \kappa u^\mu u^\nu)\tilde{\gamma}_\nu] \psi \\ &= \bar{\psi} [e A_\mu(g^{\mu\nu} + \kappa \delta^{\mu 0} \delta^{\nu 0})\tilde{\gamma}_\nu] \psi \\ &= e\bar{\psi}A_\mu\tilde{\gamma}^\mu\psi + e\bar{\psi}\kappa A_0\tilde{\gamma}^0\psi \\ &= e\bar{\psi}A_0\tilde{\gamma}^0(1 + \kappa)\psi + e\bar{\psi}A_i\tilde{\gamma}^i\psi \\ &= e\bar{\psi}\tilde{A}_\mu\tilde{\gamma}^\mu\psi, \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde $\tilde{A}_\mu = (A_0(1 + \kappa), A_i)$. Os termos do setor dos fótons podem ser reescritos da seguinte

maneira,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\gamma &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho} \\ &= -\frac{1}{4}\left[g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} + \tilde{\kappa}(g_{\mu\lambda}u_\nu u_\rho + g_{\nu\rho}u_\mu u_\lambda - g_{\mu\rho}u_\nu u_\lambda - g_{\nu\lambda}u_\mu u_\rho)\right]F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}.\end{aligned}\quad (2.12)$$

Usando o fato que o tensor $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$ tem as mesmas simetrias do tensor de Riemann (B.4), isto é,

$$(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho} = -(k_F)_{\mu\nu\rho\lambda} = -(k_F)_{\nu\mu\lambda\rho} = (k_F)_{\lambda\rho\mu\nu}, \quad (2.13)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\gamma &= -\frac{1}{4}\left[g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} + 2\tilde{\kappa}g_{\mu\lambda}u_\nu u_\rho + 2\tilde{\kappa}g_{\nu\rho}u_\mu u_\lambda\right]F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho} \\ &= -\frac{1}{4}\left[g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} + 2\tilde{\kappa}g_{\mu\lambda}\delta_{\nu 0}\delta_{\rho 0} + 2\tilde{\kappa}g_{\nu\rho}\delta_{\mu 0}\delta_{\lambda 0}\right]F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho} \\ &= -\frac{1}{4}\left[(1 + 2\tilde{\kappa})g_{\mu\lambda}g_{00}F^{\mu 0}F^{\lambda 0} + g_{\mu\lambda}g_{ii}F^{\mu i}F^{\lambda i} + 2\tilde{\kappa}g_{\nu\rho}g_{00}F^{0\nu}F^{0\rho}\right].\end{aligned}\quad (2.14)$$

Escolhendo $\tilde{\kappa} = \left(1 + \frac{\kappa}{2}\right)\kappa$ convenientemente, temos que $(1 + 2\tilde{\kappa}) = (1 + \kappa)^2$ e assim,

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4}\left[g_{\mu\lambda}g_{\tilde{\nu}\tilde{\rho}}F^{\mu\tilde{\nu}}F^{\lambda\tilde{\rho}} + 2\tilde{\kappa}g_{\nu\rho}g_{00}F^{0\nu}F^{0\rho}\right], \quad (2.15)$$

onde $F^{\mu\tilde{\nu}} = \partial^\mu \tilde{A}^\nu - \tilde{\partial}^\nu A^\mu$. Podemos ainda reescrever essa última equação como

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4}\left[g_{\mu\lambda}g_{\tilde{\nu}\tilde{\rho}}F^{\mu\tilde{\nu}}F^{\lambda\tilde{\rho}} + 2\tilde{\kappa}g_{00}g_{00}F^{00}F^{00} + 2\tilde{\kappa}g_{ii}g_{00}F^{0i}F^{0i}\right]. \quad (2.16)$$

Notamos que o segundo termo da equação (2.16) é identicamente nulo, portanto, qualquer fator multiplicativo que acrescentarmos a esse termo em nada mudará a equação. Assim podemos escrevê-la como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\gamma &= -\frac{1}{4}\left[g_{\mu\lambda}g_{\tilde{\nu}\tilde{\rho}}F^{\mu\tilde{\nu}}F^{\lambda\tilde{\rho}} + 2\tilde{\kappa}g_{00}g_{\tilde{0}\tilde{0}}F^{\tilde{0}\tilde{0}}F^{\tilde{0}\tilde{0}} + 2\tilde{\kappa}g_{ii}g_{00}F^{0i}F^{0i}\right] \\ &= -\frac{1}{4}\left[g_{\mu\lambda}g_{\tilde{\nu}\tilde{\rho}}F^{\mu\tilde{\nu}}F^{\lambda\tilde{\rho}} + 2\tilde{\kappa}g_{00}g_{\tilde{\nu}\tilde{\rho}}F^{0\tilde{\nu}}F^{0\tilde{\rho}}\right] \\ &= -\frac{1}{4}\left[(1 + 2\tilde{\kappa})g_{00}g_{\tilde{\nu}\tilde{\rho}}F^{0\tilde{\nu}}F^{0\tilde{\rho}} + g_{ii}g_{\tilde{\nu}\tilde{\rho}}F^{i\tilde{\nu}}F^{i\tilde{\rho}}\right].\end{aligned}\quad (2.17)$$

Usando o valor de $\tilde{\kappa}$ que escolhemos de modo conveniente, ficamos com

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\gamma &= -\frac{1}{4}\left[g_{\tilde{0}\tilde{0}}g_{\tilde{\nu}\tilde{\rho}}F^{\tilde{0}\tilde{\nu}}F^{\tilde{0}\tilde{\rho}} + g_{ii}g_{\tilde{\nu}\tilde{\rho}}F^{i\tilde{\nu}}F^{i\tilde{\rho}}\right] \\ &= -\frac{1}{4}g_{\tilde{\mu}\tilde{\lambda}}g_{\tilde{\nu}\tilde{\rho}}F^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}F^{\tilde{\lambda}\tilde{\rho}} = -\frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu},\end{aligned}\quad (2.18)$$

onde $\tilde{F}_{\mu\nu} = \tilde{\partial}_\mu \tilde{A}_\nu - \tilde{\partial}_\nu \tilde{A}_\mu$. Os termos de fixação de gauge e de ghost também passam a

ter a componente temporal reescalada. Portanto, a lagrangiana (2.8) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\tilde{\partial}_\mu\tilde{\gamma}^\mu\psi - e\bar{\psi}\tilde{A}_\mu\tilde{\gamma}^\mu\psi + \frac{1}{2}(\tilde{\partial}_\mu\tilde{A}^\mu)^2 + (\tilde{\partial}_\mu\tilde{C})(\tilde{\partial}^\mu C). \quad (2.19)$$

Assim, as regras de Feynman para essa teoria são dadas por

$$\longrightarrow = \frac{i}{\tilde{p}}, \quad (2.20)$$

$$\sim = -\frac{i}{\tilde{p}^2}g_{\mu\nu}, \quad (2.21)$$

para os propagadores dos férmions e dos fótons, respectivamente, e

$$---\blacktriangleright--- = \frac{i}{\tilde{p}^2} \quad (2.22)$$

para o propagador dos ghosts, onde $\tilde{p}^\mu = (p^0(1+\kappa), p^i)$. A regra de Feynman para o vértice férmion-fóton é a usual

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \text{wavy line} \\ \updownarrow \end{array} \longrightarrow = -ie\tilde{\gamma}^\mu. \quad (2.23)$$

Agora podemos estudar a contribuição da violação de Lorentz para a energia livre.

2.2.1 A energia livre

A energia livre é conhecida por fornecer importantes informações a respeito de vários assuntos em física, como nucleossíntese primordial, física de plasma e interior solar. Devido a tais motivações, correções para a energia livre foram estudadas em vários contextos, como em teorias de campos não comutativas no regime de altas temperaturas [74] e em teorias usuais sem violação de Lorentz como em [75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84].

Nosso objetivo principal é obter a energia livre por unidade de volume (pressão) como uma função da temperatura T e da constante de acoplamento e no regime de altas temperaturas. Calcularemos a expressão para a pressão até a segunda ordem na constante de acoplamento e^2 , que tem a forma

$$P = \frac{T \ln Z}{V} = P_0 + P_2 + \mathcal{O}(e^3), \quad (2.24)$$

onde P_0 é a contribuição de ordem zero na constante de acoplamento e P_2 é de segunda ordem. A densidade de energia é o negativo da expressão dada acima. Temos também que Z é a função de partição e pode ser escrita como uma integral de trajetória, que no

formalismo do tempo imaginário é dada por

$$Z = \int D\bar{C} DC DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L} \right], \quad (2.25)$$

onde $\beta = \frac{1}{T}$ e $\mathcal{L}$ é a lagrangiana da eletrodinâmica estendida em nosso caso.

2.2.1.1 Contribuição de um loop

As contribuições de mais baixa ordem são dadas por três diagramas de um loop conforme mostrado na Figura 11.

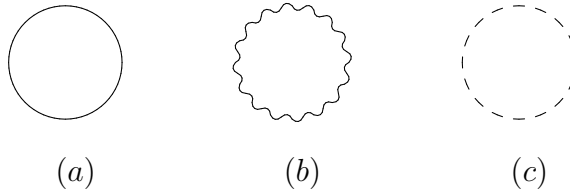


Figura 11: Diagramas de um loop

No formalismo do tempo imaginário essas contribuições são escritas como

$$P_0 = \text{Tr} \oint \{d\tilde{p}\} \ln \not{\tilde{p}} + 4(-\tfrac{1}{2}) \oint d\tilde{p} \ln \tilde{p}^2 + 2(\tfrac{1}{2}) \oint d\tilde{p} \ln \tilde{p}^2, \quad (2.26)$$

respectivamente, onde introduzimos a seguinte notação

$$\oint \{d\tilde{p}\} = T \sum_{p_0=2\pi(n+\frac{1}{2})(1+\kappa)T} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \quad (2.27)$$

para o momento fermiônico e

$$\oint d\tilde{p} = T \sum_{p_0=2\pi n(1+\kappa)T} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \quad (2.28)$$

para o momento bosônico e $\not{\tilde{p}} = \tilde{p}_\mu \tilde{\gamma}_\mu$.

Como usual, as contribuições bosônicas da equação (2.26) tem quatro graus de liberdade para o campo de gauge (Figura 11(b)) e dois graus de liberdade para o campo de ghost (Figura 11(c)). A contribuição fermiônica da equação (2.26)

$$P_0^f = \text{Tr} \oint \{d\tilde{p}\} \ln \not{\tilde{p}}, \quad (2.29)$$

após calcularmos o traço se torna

$$P_0^f = 2 \oint \{d\tilde{p}\} \ln[(1 - Q^2)(p_0^2(1 + \kappa)^2 + \mathbf{p}^2)], \quad (2.30)$$

que tem a mesma forma da contribuição bosônica,

$$P_0^b = -\oint d\tilde{p} \ln(p_0^2(1 + \kappa)^2 + \mathbf{p}^2). \quad (2.31)$$

Para calcularmos o somatório nas equações (2.30) e (2.31) vamos proceder de maneira similar ao cálculo desenvolvido em [85]. Na equação (2.30) vamos fazer

$$v_f = \sum_n \ln \left[(1 - Q^2)(p_0^2(1 + \kappa)^2 + \mathbf{p}^2) \right], \quad (2.32)$$

derivando essa expressão em relação a $\mathbf{p}$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dv_f}{d\mathbf{p}} &= \sum_n \frac{2\mathbf{p}(1 - Q^2)}{(1 - Q^2)(p_0^2(1 + \kappa)^2 + \mathbf{p}^2)} \\ &= \sum_n \frac{2\mathbf{p}}{4\pi^2 T^2 (n + \frac{1}{2})^2 (1 + \kappa)^2 + \mathbf{p}^2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Calculando o somatório ficamos com

$$\frac{dv_f}{d\mathbf{p}} = \frac{\tanh\left(\frac{\mathbf{p}}{2T(1+\kappa)}\right)}{T(1+\kappa)}. \quad (2.34)$$

Agora, integrando essa equação podemos reescrever v_f da seguinte maneira

$$v_f = 2 \ln \left[\cosh \left(\frac{\mathbf{p}}{2T(1+\kappa)} \right) \right]. \quad (2.35)$$

Sabendo que $\cosh(x) = e^x + e^{-x}$ ficamos com

$$\begin{aligned} v_f &= 2 \ln \left[e^{\frac{\mathbf{p}}{2T(1+\kappa)}} + e^{-\frac{\mathbf{p}}{2T(1+\kappa)}} \right] \\ &= 2 \ln \left[e^{\frac{\mathbf{p}}{2T(1+\kappa)}} \left(1 + e^{-\frac{\mathbf{p}}{T(1+\kappa)}} \right) \right] \\ &= 2 \left[\ln e^{\frac{\mathbf{p}}{2T(1+\kappa)}} + \ln \left(1 + e^{-\frac{\mathbf{p}}{T(1+\kappa)}} \right) \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[\frac{\mathbf{p}}{2(1+\kappa)} + T \ln \left(1 + e^{-\frac{\mathbf{p}}{T(1+\kappa)}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Dessa maneira, a contribuição fermiônica pode ser reescrita como

$$P_0^f = 4 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{\mathbf{p}}{2(1+\kappa)} + T \ln \left(1 + e^{-\frac{\mathbf{p}}{T(1+\kappa)}} \right) \right], \quad (2.37)$$

que é independente do parâmetro Q .

Procederemos de maneira similar com a contribuição bosônica. Assim,

$$v_b = \sum_n \ln \left[p_0^2(1 + \kappa)^2 + \mathbf{p}^2 \right], \quad (2.38)$$

que ao derivarmos em relação a $\mathbf{p}$ obtemos

$$\frac{dv_b}{d\mathbf{p}} = \sum_n \frac{2\mathbf{p}}{4\pi^2 n^2 T^2 (1 + \kappa)^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (2.39)$$

Após calcularmos o somatório encontramos

$$\frac{dv_b}{d\mathbf{p}} = \frac{\coth\left(\frac{\mathbf{p}}{2T(1+\kappa)}\right)}{T(1+\kappa)}. \quad (2.40)$$

Ao integrarmos, v_b se torna

$$v_b = 2 \ln \left[\sinh \left(\frac{\mathbf{p}}{2T(1+\kappa)} \right) \right]. \quad (2.41)$$

Usando que $\sinh(x) = e^x - e^{-x}$ temos que

$$v_b = \frac{2}{T} \left[\frac{\mathbf{p}}{2(1+\kappa)} + T \ln \left(1 - e^{-\frac{\mathbf{p}}{T(1+\kappa)}} \right) \right]. \quad (2.42)$$

Assim, a contribuição bosônica se torna

$$P_0^b = -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{\mathbf{p}}{2(1+\kappa)} + T \ln \left(1 - e^{-\frac{\mathbf{p}}{T(1+\kappa)}} \right) \right]. \quad (2.43)$$

Portanto, a contribuição de mais baixa ordem é escrita como

$$\begin{aligned} P_0 &= P_0^f + P_0^b \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{\mathbf{p}}{1+\kappa} + 4T \ln \left(1 + e^{-\frac{\mathbf{p}}{T(1+\kappa)}} \right) - 2T \ln \left(1 - e^{-\frac{\mathbf{p}}{T(1+\kappa)}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Como estamos interessados na variação da pressão com a temperatura, vamos considerar apenas os termos que dependem da temperatura³. Então,

$$\begin{aligned} P_0^{(T)} &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[4T \ln \left(1 + e^{-\frac{\mathbf{p}}{T(1+\kappa)}} \right) - 2T \ln \left(1 - e^{-\frac{\mathbf{p}}{T(1+\kappa)}} \right) \right], \\ &= \frac{2T}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \ln \left(1 + e^{-\frac{\mathbf{p}}{T(1+\kappa)}} \right) - \frac{T}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \ln \left(1 - e^{-\frac{\mathbf{p}}{T(1+\kappa)}} \right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Fazendo uma integração por partes encontramos que

$$P_0^{(T)} = \frac{2}{3\pi^2(1+\kappa)} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{\frac{\mathbf{p}}{T(1+\kappa)}} + 1} + \frac{1}{3\pi^2(1+\kappa)} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{\frac{\mathbf{p}}{T(1+\kappa)}} - 1}. \quad (2.46)$$

³A parte de temperatura zero (divergente) é absorvida em uma renormalização da energia do vácuo [75].

Por simplicidade, vamos fazer a seguinte mudança de variável

$$x = \frac{\mathbf{p}}{T(1 + \kappa)}, \quad (2.47)$$

e assim,

$$P_0^{(T)} = \frac{T^4(1 + \kappa)^3}{3\pi^2} \left[2 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x + 1} dx + \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \right]. \quad (2.48)$$

Usando as fórmulas⁴ [81]

$$\int_0^\infty dx \frac{x^\alpha}{e^x - 1} = \Gamma(\alpha + 1)\zeta(\alpha + 1), \quad (2.49)$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^\alpha}{e^x + 1} = (1 - 2^{-\alpha})\Gamma(\alpha + 1)\zeta(\alpha + 1), \quad (2.50)$$

para resolvermos as integrais em (2.48), encontramos que a contribuição de mais baixa ordem para a energia livre se torna

$$P_0^{(T)} = \frac{11\pi^2}{180} T^4 (1 + \kappa)^3. \quad (2.51)$$

Portanto, podemos concluir que o impacto da quebra das simetrias de Lorentz no caso em que o parâmetro de quebra consiste no termo CPT-par é apenas um fator constante, uma vez que o resultado clássico para a energia livre sem violação de Lorentz ($\kappa \rightarrow 0$) é $P_0^{(T)} = \frac{11\pi^2}{180} T^4$.

2.2.1.2 Contribuição de dois loops

Iremos estudar as contribuições de dois loops para a energia livre. A contribuição de dois loops para a energia livre violando as simetrias de Lorentz, que corresponde a segunda ordem em e é dada pela Figura 12.

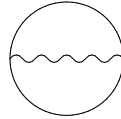


Figura 12: Diagrama de dois loops.

Da Figura 12 podemos escrever essa contribuição como,

$$P_2 = \frac{1}{2} e^2 \oint \{d\tilde{p}\} \oint \{d\tilde{q}\} \text{Tr} \left[\tilde{\gamma}^\mu \frac{1}{\tilde{p}} \tilde{\gamma}_\mu \frac{1}{\tilde{q}} \frac{1}{(\tilde{p} + \tilde{q})^2} \right]. \quad (2.52)$$

⁴Onde $\Gamma(\alpha + 1)$ é a função gamma e $\zeta(\alpha + 1)$ é a função zeta de Riemann.

Notamos que,

$$\tilde{\gamma}^\mu \frac{1}{\tilde{p}_\alpha \tilde{\gamma}^\alpha} = \gamma^\mu \frac{1}{\tilde{p}_\alpha \gamma^\alpha}, \quad (2.53)$$

e assim, a contribuição de segunda ordem para a energia livre também é independente do parâmetro Q . Então, podemos reescrever (2.52) como

$$P_2 = \frac{1}{2} e^2 \oint \{d\tilde{p}\} \oint \{d\tilde{q}\} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{\tilde{p}_\alpha \gamma^\alpha}{\tilde{p}^2} \gamma_\mu \frac{\tilde{q}_\beta \gamma^\beta}{\tilde{q}^2} \frac{1}{(\tilde{p} + \tilde{q})^2} \right]. \quad (2.54)$$

Ao calcularmos o traço obtemos que

$$P_2 = -4e^2 \oint \{d\tilde{p}\} \oint \{d\tilde{q}\} \frac{\tilde{p} \cdot \tilde{q}}{\tilde{p}^2 \tilde{q}^2 (\tilde{p} + \tilde{q})^2}. \quad (2.55)$$

Mas,

$$\tilde{p} \cdot \tilde{q} = \frac{1}{2} \left[(\tilde{p} + \tilde{q})^2 - \tilde{p}^2 - \tilde{q}^2 \right], \quad (2.56)$$

então

$$P_2 = 2e^2 \oint \{d\tilde{p}\} \oint \{d\tilde{q}\} \left[-\frac{1}{\tilde{p}^2 \tilde{q}^2} + \frac{1}{\tilde{q}^2 (\tilde{p} + \tilde{q})^2} + \frac{1}{\tilde{p}^2 (\tilde{p} + \tilde{q})^2} \right]. \quad (2.57)$$

Agora devemos resolver essas integrais e os respectivos somatórios. Vamos trabalhar com esses termos separadamente.

$$\begin{aligned} I_1 &= \oint \{d\tilde{p}\} \oint \{d\tilde{q}\} \frac{1}{\tilde{p}^2 \tilde{q}^2} \\ &= \oint \{d\tilde{p}\} \frac{1}{\tilde{p}^2} \oint \{d\tilde{q}\} \frac{1}{\tilde{q}^2} \\ &= T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\left[2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) T(1 + \kappa) \right]^2 + \mathbf{p}^2} \\ &\times T \sum_{n'} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\left[2\pi \left(n' + \frac{1}{2} \right) T(1 + \kappa) \right]^2 + \mathbf{q}^2}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Calculando a integral em D dimensões e introduzindo um parâmetro arbitrário μ obtemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{4} \pi^{-2(1-\frac{D}{2})} \frac{D}{2} T \left[T^2(1 + \kappa)^2 \right]^{\frac{D}{2}-1} \mu^{3-D} \Gamma \left(1 - \frac{D}{2} \right) \sum_n \left[\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{\frac{D}{2}-1} \\ &\times \frac{1}{4} \pi^{-2(1-\frac{D}{2})} \frac{D}{2} T \left[T^2(1 + \kappa)^2 \right]^{\frac{D}{2}-1} \mu^{3-D} \Gamma \left(1 - \frac{D}{2} \right) \sum_{n'} \left[\left(n' + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{\frac{D}{2}-1}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Ao resolvermos os somatórios e expandir em torno de $D = 3$ encontramos

$$I_1 = \left(-\frac{T^2}{24}(1 + \kappa) \right) \left(-\frac{T^2}{24}(1 + \kappa) \right), \quad (2.60)$$

então,

$$\oint \{d\tilde{p}\} \oint \{d\tilde{q}\} \frac{1}{\tilde{p}^2 \tilde{q}^2} = \frac{T^4}{576} (1 + \kappa)^2. \quad (2.61)$$

Nos outros termos da equação (2.57) devemos desacoplar os somatórios. Vamos escrever

$$\begin{aligned} I_2 &= \oint \{d\tilde{p}\} \oint \{d\tilde{q}\} \frac{1}{\tilde{q}^2 (\tilde{p} + \tilde{q})^2} \\ &= \oint \{d\tilde{p}\} \oint \{d\tilde{q}\} \frac{1}{\left[2\pi \left(n' + \frac{1}{2} \right) T(1 + \kappa) \right]^2 + \mathbf{q}^2} \\ &\times \frac{1}{\left[2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) T(1 + \kappa) + 2\pi \left(n' + \frac{1}{2} \right) T(1 + \kappa) \right]^2 + (\mathbf{q} + \mathbf{p})^2}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

e fazer

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \mathbf{q} \quad (2.63)$$

$$n \rightarrow n - n'. \quad (2.64)$$

Assim,

$$I_2 = \oint \{d\tilde{p}\} \frac{1}{\left[2\pi (n + 1) T(1 + \kappa) \right]^2 + \mathbf{p}^2} \oint \{d\tilde{q}\} \frac{1}{\left[2\pi \left(n' + \frac{1}{2} \right) T(1 + \kappa) \right]^2 + \mathbf{q}^2}. \quad (2.65)$$

Se novamente resolvemos a integral em D dimensões encontramos

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{4} \pi^{-2(1-\frac{D}{2})\frac{D}{2}} T \left[T^2(1 + \kappa)^2 \right]^{\frac{D}{2}-1} \mu^{3-D} \Gamma \left(1 - \frac{D}{2} \right) \sum_n \left[(n + 1)^2 \right]^{\frac{D}{2}-1} \\ &\times \frac{1}{4} \pi^{-2(1-\frac{D}{2})\frac{D}{2}} T \left[T^2(1 + \kappa)^2 \right]^{\frac{D}{2}-1} \mu^{3-D} \Gamma \left(1 - \frac{D}{2} \right) \sum_{n'} \left[\left(n' + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{\frac{D}{2}-1}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Por fim, resolvendo os somatórios e expandindo para $D = 3$ ficamos com

$$\oint \{d\tilde{p}\} \oint \{d\tilde{q}\} \frac{1}{\tilde{q}^2 (\tilde{p} + \tilde{q})^2} = -\frac{T^4}{288} (1 + \kappa)^2. \quad (2.67)$$

Da mesma maneira

$$\oint \{d\tilde{p}\} \oint \{d\tilde{q}\} \frac{1}{\tilde{p}^2(\tilde{p} + \tilde{q})^2} = -\frac{T^4}{288}(1 + \kappa)^2. \quad (2.68)$$

Portanto, substituindo esses resultados na equação (2.57) encontramos que a contribuição de dois loops para a energia livre com violação de Lorentz se torna

$$P_2 = -\frac{5e^2}{288}T^4(1 + \kappa)^2. \quad (2.69)$$

Assim, a modificação na energia livre devida ao parâmetro de violação das simetrias de Lorentz para ordem de dois loops consiste apenas na adição de um fator constante, do mesmo modo que vimos para a ordem de um loop. Dessa maneira, para $\kappa \rightarrow 0$ ficamos com o resultado padrão (sem violação da invariância de Lorentz) $P_2 = -\frac{5e^2}{288}T^4$.

Podemos escrever a expressão para a pressão até a ordem e^2 na presença de quebra da invariância de Lorentz da seguinte forma

$$P = \frac{\pi^2 T^4}{9} \left[\frac{11}{20}(1 + \kappa)^3 - \frac{5e^2}{32\pi^2}(1 + \kappa)^2 + \mathcal{O}(e^3) \right]. \quad (2.70)$$

2.2.2 Estimativa numérica

Para estimar limites para o parâmetro de violação de Lorentz κ usaremos informações da nucleossíntese primordial (ou nucleossíntese do Big Bang), que é um dos pilares observacionais do modelo padrão da cosmologia. A nucleossíntese primordial é o processo que explica a formação dos núcleos atômicos em nosso universo. Esse processo se inicia em torno de um segundo após a expansão inicial (Big Bang) e termina em aproximadamente três minutos. É importante ressaltar que esse processo pelo qual o universo passou é previsto pela teoria do Big Bang. Portanto, a concordância entre teoria e dados observacionais pode ser considerada como um excelente êxito da teoria do Big Bang.

Com o objetivo de avaliar limites para o parâmetro κ , usaremos previsões teóricas da abundância primordial de hélio Y desenvolvida nas referências [86, 87, 88].

Um caminho para determinar Y consiste em analisar mudanças em quantidades termodinâmicas como a densidade de energia ρ , a pressão P e a temperatura dos neutrinos T_ν . Aqui, iremos estudar essas mudanças quando a violação da invariância de Lorentz é considerada.

A contribuição para a densidade de energia pode ser encontrada da relação termo-

dinâmica padrão

$$\rho = -P + T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right), \quad (2.71)$$

que seguindo o desenvolvimento mostrado em [87] torna-se

$$\rho = \frac{\pi^2 T^4}{15} (N + \delta N), \quad (2.72)$$

onde $N = \frac{11}{4}$ e $\delta N \approx -0.007 + 8.236\kappa$. Assim, obtemos que

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = -\frac{0.007(1 + 2\kappa)}{2.743 + 8.236\kappa}. \quad (2.73)$$

A fração ΔY , que é a abundância primordial de hélio, pode ser afetada pela eletrodinâmica quântica em vários caminhos como é mostrado em [87]. O efeito total é aproximadamente,

$$\Delta Y \approx 2.9 \times 10^{-4} + 0.15 \frac{\Delta T_\nu}{T_\nu} + (0.1 - 0.03) \frac{\Delta \rho}{\rho}, \quad (2.74)$$

onde T_ν é a temperatura dos neutrinos dada por

$$T_\nu = \left(\frac{1}{\frac{11}{4} + \delta N} \right)^{1/3} T_\gamma \left[\mathcal{S} \left(\frac{m_e}{T_\gamma} \right) + \mathcal{S}' \left(\frac{m_e}{T_\gamma} \right) \right]^{1/3}, \quad (2.75)$$

com T_γ sendo a temperatura dos fótons e m_e a massa dos elétrons. De acordo com [89] $\mathcal{S} \left(\frac{m_e}{T_\gamma} \right)$ e $\mathcal{S}' \left(\frac{m_e}{T_\gamma} \right)$ são dados por

$$\mathcal{S}' \left(\frac{m_e}{T_\gamma} \right) = \frac{15}{\pi^2 T^4} [\rho_2 + P_2], \quad (2.76)$$

$$\mathcal{S} \left(\frac{m_e}{T_\gamma} \right) = 1 + \frac{45}{2\pi^4} \int_0^\infty y^2 dy \left[\sqrt{\left(\frac{m_e}{T_\gamma} \right)^2 + y^2} + \frac{y^2}{3\sqrt{\left(\frac{m_e}{T_\gamma} \right)^2 + y^2}} \right] \left[e^{\sqrt{\left(\frac{m_e}{T_\gamma} \right)^2 + y^2}} + 1 \right]^{-1}. \quad (2.77)$$

O resultado teórico usual, sem o parâmetro κ , é $\Delta Y \approx 2.10^{-4}$, enquanto o resultado experimental é $\Delta Y \approx 2.10^{-3}$ [90]. Portanto, a estimativa necessária para κ , para que os resultados experimentais e teóricos coincidam pode ser $\kappa \approx 10^{-2}$. Esse resultado para o parâmetro de quebra concorda com os resultados encontrados em [91, 92]. Dessa maneira, o parâmetro de violação de Lorentz pode ser entendido como uma contribuição para a abundância primordial de hélio.

Nesse capítulo calculamos as contribuições para a energia livre na eletrodinâmica quântica com violação das simetrias de Lorentz em um loop e em dois loops no regime de altas temperaturas. Encontramos que a contribuição da quebra das simetrias de Lorentz aparece como um fator constante aditivo ao resultado usual.

Também observamos que o parâmetro de violação pode ser usado para explicar, ou ajudar, a entender a diferença entre predições teóricas e experimentais da abundância primordial de hélio. Nesse contexto estimamos que $\kappa \approx 10^{-2}$, que está de acordo com o resultado obtido em [92].

3 *Gravitação modificada pelo termo de Chern-Simons*

Nos últimos anos, houve um grande interesse por teorias que propõem modificações à teoria da relatividade geral, isso porque há algumas questões importantes que a teoria usual de Einstein não consegue explicar. Neste capítulo iremos discutir uma proposta de modificação da gravitação que vem sendo intensamente discutida na literatura, a gravitação modificada pelo termo de Chern-Simons.

3.1 Algumas motivações que podem levar a modificações

A teoria da relatividade geral desenvolvida por Albert Einstein por volta de 1915 é uma teoria com excelentes resultados observacionais e que tem passado por testes cada vez mais sensíveis. Mesmo assim, existem algumas questões fundamentais que ela não consegue explicar; entre essas se destacam uma teoria quântica para a gravitação e o problema das componentes escuras do universo, matéria e energia escura.

A teoria de cordas [93] tem se mostrado um candidato promissor para uma teoria quântica da gravidade. Várias tentativas para se quantizar a gravidade foram realizadas, no entanto, nenhuma bem sucedida até o presente momento.

Já o problema relacionando matéria e energia escura é reforçado cada vez mais por uma grande quantidade de dados observacionais que indicam que o universo atualmente é dominado por essas duas componentes, ditas exóticas. De acordo com dados observacionais, aproximadamente 24% da densidade do universo é composta de matéria, sendo que apenas 4% dessa quantidade é constituída de matéria bariônica como conhecemos, sendo o restante formada por alguma forma de matéria exótica que não conhecemos e que ainda não foi observada de forma direta. Toda essa quantidade de matéria cuja composição não sabemos é denominada de matéria escura. Embora esse tipo de matéria não emita luz,

ela exerce influências gravitacionais assim como a matéria bariônica. A matéria escura hoje tem tido grande destaque nas discussões entre físicos pelo mundo, porém, esse não é um problema novo, já por volta de 1933 o astrônomo Fritz Zwicky fez as primeiras observações que indicavam que deveria existir mais matéria no universo que a quantidade estimada pela razão massa/luminosidade de galáxias individuais. Entretanto, só em meados da década de 1970 a matéria escura se tornou formalmente um problema dominante em física com medidas da velocidade de rotação de algumas galáxias.

Hoje existem cosmólogos, astrônomos, físicos de partículas, entre outros empenhados em encaminhar uma solução para o problema da matéria escura e assim descobrir as partículas que devem compor tal matéria. Apesar de todo o desenvolvimento em torno desse assunto há apenas alguns candidatos a matéria escura, mas nada em definitivo até o momento. Na verdade, há apenas uma certeza em relação a essa matéria exótica, ela existe e influencia gravitacionalmente todo o universo, supondo que a teoria da relatividade geral esteja correta.

Hoje sabemos que o universo está em expansão e o primeiro a fazer tal observação foi E. Hubble por volta de 1929; porém em 1998, usando dados observacionais de Supernova do tipo Ia, dois grupos independentes [94, 95] observaram que a expansão do universo está ocorrendo de maneira acelerada. Com base nesses dados observacionais o universo hoje deve ser dominado por uma componente exótica responsável por tal aceleração denominada energia escura. Essa componente é chamada de exótica porque ela deve exercer em todo o universo uma pressão negativa, ou seja, um tipo de antigravidade. Estimativas atuais indicam que aproximadamente 76% da densidade total do universo é de energia escura. Existem atualmente alguns candidatos a energia escura, mas assim como para a matéria escura nada em definitivo.

Segundo dados observacionais, a energia escura tem predominado no universo e causado tal aceleração, somente nesta última fase na qual nos encontramos. A nucleossíntese primordial garante que essa componente não pode ter dominado no início do universo; se isso tivesse ocorrido ela poderia ter prejudicado a formação dos elementos leves no universo primordial e consequentemente todo o desenvolvimento estrutural do nosso universo.

Portanto, os dados observacionais nos indicam que vivemos em um universo praticamente desconhecido, uma vez que as componentes escuras, matéria e energia escura, são responsáveis por aproximadamente 96% de tudo que existe nele e não conhecemos a composição de ambas.

Diante do exposto, surge uma pergunta que muitos estão procurando responder:

matéria e energia escura podem ser simplesmente um efeito gravitacional quântico ou ocorrem devido a alguma modificação na relatividade geral? Na tentativa de resolver essa questão um caminho alternativo é supor que a teoria de gravitação proposta por Einstein pode ser modificada. Recentemente, teorias de gravidade modificadas tem recebido considerável atenção na literatura motivadas por alguns problemas em aberto, como matéria e energia escura que discutimos rapidamente nessa seção, para mais detalhes podemos ver [96, 123]. Entre as modificações propostas para a teoria da relatividade geral, uma que tem despertado interesse de muitos pesquisadores é a teoria de gravitação modificada pelo termo de Chern-Simons quadridimensional, à qual iremos nos focar neste instante.

A idéia de modificar a gravitação pelo termo de Chern-Simons quadridimensional foi inicialmente desenvolvida por Jackiw e Pi [98]. A motivação inicial era fazer uma construção semelhante ao que Jackiw e colaboradores fizeram para a eletrodinâmica quântica [61] ao adicionarem o termo de Chern-Simons à lagrangiana usual de Maxwell e observarem que tal modificação leva à violação das simetrias de Lorentz e paridade, como discutimos no capítulo 2. Essa modificação na gravitação consiste na adição do termo de Chern-Simons quadridimensional à ação de Einstein-Hilbert usual, introduzindo uma função escalar que pode ser interpretada como uma quantidade externa ou uma variável dinâmica. Este novo termo na ação de Einstein-Hilbert introduz violação de paridade, isto é, as ondas gravitacionais possuem dois modos de polarização que viajam com a mesma velocidade, a velocidade da luz, mas com diferentes intensidades, no entanto, sem violar a invariância de Lorentz. Tal modificação da gravidade não é uma extensão aleatória ou arbitrária da relatividade geral, mas tem raízes em física de partículas e em teorias de cordas.

A gravidade modificada pelo termo de Chern-Simons surge em teoria de cordas como um termo essencial para cancelar anomalias e no modelo padrão pode surgir no contexto de anomalias quirais. Essa gravitação modificada é vista como uma teoria efetiva em teoria de cordas, embora muitos argumentam que talvez não seja útil estudar uma teoria efetiva derivada de teoria de cordas, pois se tal correção realmente existisse na natureza seria quanticamente suprimida. De fato, essa teoria sugere que tal correção poderia ser suprimida na escala eletrofraca ou mesmo na escala de Planck e assim tal correção não seria observável. Contudo, existem modelos que argumentam que a correção de Chern-Simons gravitacional pode ser reforçada devido a vários efeitos como, interações com férmions [99], grandes curvaturas intrínsecas [100], entre outros. Weinberg em [101] mostra que correções de ordem superior violando paridade em uma teoria efetiva para inflação também fornece a gravidade de Chern-Simons.

Um dos mais importantes assuntos relacionados à gravidade modificada de Chern-Simons é a busca por soluções das equações de movimento com tal modificação. A solução de Schwarzschild que é uma solução clássica na relatividade geral, também ocorre na gravitação modificada pelo termo de Chern-Simons como mostrado inicialmente em [98]. Em [102] foi mostrado que outras soluções clássicas da relatividade geral como, Friedmann-Robertson-Walker e Reissner-Nordström também persistem na teoria modificada para uma escolha específica do campo escalar que é introduzido junto ao termo de Chern-Simons. Contudo, uma importante métrica, a métrica de Kerr, não é uma solução da teoria modificada. Para essa métrica se tornar solução da teoria modificada é necessário que alterações sejam feitas na métrica. Em um caminho perturbativo, algumas aproximações foram desenvolvidas em [103, 104].

A gravidade modificada pelo termo de Chern-Simons tem sido estudada em vários contextos, como cosmologia, astrofísica e ondas gravitacionais. Alguns resultados interessantes foram obtidos para essa teoria; por exemplo, efeitos dessa modificação para corpos em órbita em torno da terra foram descritos por [105], a expansão pós-newtoniana foi estudada em [100], e alguns efeitos cosmológicos foram discutidos em [106, 107]. Um tensor energia-momento simétrico para a gravidade de Chern-Simons foi construído em [108], em [109] foi mostrado que a invariância de Poincaré ocorre para essa nova teoria, curvas de rotação de galáxia foi estudada em [110], um termo análogo ao termo de Gibbons-Hawking-York requerido para obter uma condição de Dirichlet bem definida na relatividade geral é obtido em [111] para a gravitação modificada e em [112] a geração dinâmica deste termo via correções perturbativas foi realizada. Como podemos notar, essa modificação na gravitação tem sido intensamente estudada na literatura. Para uma revisão da modificação causada pelo termo de Chern-Simons quadridimensional na relatividade geral podemos ver [113].

3.2 Ação de Einstein-Hilbert-Chern-Simons

Nesta seção vamos discutir os principais aspectos da gravitação modificada pelo termo de Chern-Simons. A ação dessa teoria é composta pela ação de Einstein-Hilbert usual adicionada do termo de Chern-Simons quadridimensional. De maneira análoga ao modelo construído para a eletrodinâmica, a ação para a gravitação é dada por

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[\sqrt{-g}R + \frac{1}{4}\theta^* RR \right] + S_{Mat}, \quad (3.1)$$

onde R é o escalar de Ricci, S_{Mat} é a ação de matéria e *RR é o termo de Pontryagin cuja definição explícita é

$${}^*RR \equiv {}^*R^a{}_b{}^{cd}R^b{}_{acd}, \quad (3.2)$$

com $R^b{}_{acd}$ sendo o tensor de Riemann, cuja fórmula explícita é dada em (B.3), e ${}^*R^a{}_b{}^{cd}$ o tensor de Riemann dual dado por

$${}^*R^a{}_b{}^{cd} = \frac{1}{2}\epsilon^{cdef}R^a{}_{bef}, \quad (3.3)$$

onde ϵ^{cdef} é o tensor de Levi-Civita quadridimensional. A função θ é um campo escalar que pode ser interpretado como uma quantidade externa ou como uma quantidade dinâmica. Nessa seção iremos considerar o campo θ como um campo externo. O termo de Pontryagin também pode ser expresso como a divergência

$$\partial_a J^a = \frac{1}{2} {}^*RR, \quad (3.4)$$

onde J^a é a corrente topológica de Chern-Simons dada por

$$J^a = \epsilon^{abcd}\Gamma_{bm}^n \left(\partial_c \Gamma_{dn}^m + \frac{2}{3} \Gamma_{cl}^m \Gamma_{dn}^l \right), \quad (3.5)$$

com Γ sendo o símbolo de Christoffel usual.

Variando a ação (3.1) com respeito à métrica $g_{\mu\nu}$, nós obtemos as equações modificadas de Einstein dadas por

$$G^{\mu\nu} + C^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

onde $G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$ é o tensor de Einstein, $T^{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento associado ao conteúdo de matéria e $C^{\mu\nu}$ é o tensor de Cotton que surge devido à variação do termo de Chern-Simons, isto é,

$$\delta \frac{1}{4} \int d^4x \theta {}^*RR = \int d^4x \sqrt{-g} C^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

A forma explícita do tensor de Cotton é dada por (para mais detalhes veja [98])

$$C^{\mu\nu} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma\mu\alpha\beta} D_\alpha R^\nu{}_\beta + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma\nu\alpha\beta} R^\tau{}_\mu{}^\alpha{}_\beta \right] + (\mu \longleftrightarrow \nu), \quad (3.8)$$

com $v_\sigma \equiv \partial_\sigma \theta$ e $v_{\sigma\tau} \equiv D_\sigma v_\tau = \partial_\sigma v_\tau - \Gamma_{\sigma\tau}^\lambda v_\lambda$. Em [98] é mostrado que a divergência do tensor de Cotton é dada por

$$D_\mu C^{\mu\nu} = \frac{1}{8\sqrt{-g}} v^{\nu*} {}^*RR. \quad (3.9)$$

Ao tomarmos a divergência das equações de Einstein, equação (3.6)

$$D_\mu(G^{\mu\nu} + C^{\mu\nu}) = 8\pi G D_\mu T^{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

usarmos a identidade de Bianchi, que nos fornece $D_\mu G^{\mu\nu} = 0$, e sugerirmos que os termos de matéria são invariantes de difeomorfismo¹, isto é, $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$, a solução das equações de Einstein modificadas requer uma condição de consistência,

$${}^*RR = 0. \quad (3.11)$$

Esta condição de consistência implica que a quebra da simetria do termo de Chern-Simons é suprimida na ação [109].

3.3 Solução de Schwarzschild

Nesta seção vamos analisar quais as condições necessárias para que essa importante solução da relatividade geral, a solução de Schwarzschild, ocorra também na gravitação modificada pelo termo de Chern-Simons.

Verificando as equações modificadas de Einstein (3.6), notamos que, se de alguma maneira obtermos que as componentes do tensor de Cotton $C^{\mu\nu}$ sejam nulas, teremos uma solução que ocorre tanto na relatividade geral quanto na gravitação modificada pelo termo de Chern-Simons.

A solução de Schwarzschild que é dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\phi^2), \quad (3.12)$$

é solução das equações de Einstein no vácuo, ou seja, essa métrica satisfaz

$$R^{\mu\nu} = 0. \quad (3.13)$$

Agora, vamos verificar se ela também é solução das equações modificadas no vácuo,

$$R^{\mu\nu} + C^{\mu\nu} = 0. \quad (3.14)$$

Para realizarmos essa verificação devemos calcular as componentes do tensor de Cotton e analisar se há alguma possibilidade de termos todas essas componentes iguais a zero. Se tal possibilidade existe, podemos dizer que temos um espaço de soluções onde essas

¹Em termos simples, um difeomorfismo mapeia um ponto no espaço-tempo a outro.

soluções seriam uma intersecção entre o espaço composto por soluções das equações de Einstein usual e o espaço formado por soluções da gravitação modificada de Chern-Simons.

Os símbolos de Christoffel não nulos para a métrica de Schwarzschild são dados por

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^0 &= \frac{M}{r(r-2M)}, \\
\Gamma_{00}^1 &= \frac{M(r-2M)}{r^3}, \\
\Gamma_{11}^1 &= -\frac{M}{r(r-2M)}, \\
\Gamma_{22}^1 &= -r+2M, \\
\Gamma_{33}^1 &= -(r-2M)\text{sen}^2\Theta, \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, \\
\Gamma_{33}^2 &= -\text{sen}\Theta\cos\Theta, \\
\Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, \\
\Gamma_{23}^3 &= \frac{\cos\Theta}{\text{sen}\Theta}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

As componentes não nulas do tensor de Riemann são

$$\begin{aligned}
R_{0101} &= \frac{2M}{r^3}, \\
R_{0202} &= -\frac{(r-2M)M}{r^2}, \\
R_{0303} &= -\frac{(r-2M)M\text{sen}^2\Theta}{r^2}, \\
R_{1212} &= \frac{M}{r-2M}, \\
R_{1313} &= \frac{M\text{sen}^2\Theta}{r-2M}, \\
R_{2323} &= -2Mr\text{sen}^2\Theta.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

As componentes do tensor de Ricci são todas identicamente nulas e assim, podemos reescrever o tensor de Cotton (3.8) como

$$\begin{aligned}
C^{\mu\nu} &= -\frac{v_{\sigma\tau}}{4\sqrt{-g}} \left[\epsilon^{\sigma\nu\alpha\beta} R^{\tau\mu}{}_{\alpha\beta} + \epsilon^{\sigma\mu\alpha\beta} R^{\tau\nu}{}_{\alpha\beta} \right] \\
&= -\frac{v_{\sigma\tau}}{4\sqrt{-g}} \left[\epsilon^{\sigma\nu\alpha\beta} g^{\lambda\tau} g^{\rho\mu} R_{\lambda\rho\alpha\beta} + \epsilon^{\sigma\mu\alpha\beta} g^{\omega\tau} g^{\gamma\nu} R_{\omega\gamma\alpha\beta} \right].
\end{aligned} \tag{3.17}$$

As componentes do tensor de Cotton são calculadas no APÊNDICE C. Aqui colocamos

de forma resumida os resultados obtidos neste apêndice,

$$\begin{aligned}
C^{02} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{3M}{r^3} v_{31}, \\
C^{03} &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{2M}{r^3} v_{21}, \\
C^{12} &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{3M}{r^3} v_{30}, \\
C^{13} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{3M}{r^3} v_{20}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

As demais componentes, $C^{00}, C^{01}, C^{11}, C^{22}, C^{23}$ e C^{33} são identicamente nulas.

Para termos todas as componentes do tensor de Cotton (3.18) iguais a zero, devemos seguir a escolha feita em [98] para o campo escalar θ , isto é,

$$\theta = \frac{t}{\mu} \longrightarrow v_\mu = \left(\frac{1}{\mu}, 0, 0, 0 \right), \tag{3.19}$$

onde $\frac{1}{\mu}$ é uma constante. Com essa escolha, e usando a definição de $v_{\sigma\tau} = \partial_\sigma \partial_\tau \theta - \Gamma_{\sigma\tau}^\lambda v_\lambda$, obtemos que todas as componentes do tensor de Cotton se anulam. Dessa maneira, a solução de Schwarzschild também é solução da gravidade modificada pelo termo de Chern-Simons para uma escolha específica do campo escalar θ . Assim, podemos concluir que essa teoria de gravitação modificada passa por um teste clássico da relatividade geral. Em [102] é mostrado que outras soluções importantes da relatividade geral também ocorrem na teoria estendida de Chern-Simons, tais como métricas esfericamente simétricas, soluções axissimétricas estáticas e estacionárias, sendo que o campo escalar θ deve ser escolhido de forma específica para cada solução, ou seja, a existência dessas soluções da relatividade geral na gravitação modificada depende de uma escolha específica para o campo externo θ .

4 *Solução de Gödel na gravitação modificada*

Neste capítulo iremos discutir a possibilidade de que mais uma importante solução da relatividade geral, a solução de Gödel, possa ocorrer na teoria de gravitação modificada pelo termo de Chern-Simons. Nosso estudo será realizado para o caso em que o campo escalar θ que é introduzido junto ao termo de Chern-Simons é interpretado como uma quantidade externa e para o caso em que esse mesmo campo é interpretado como uma quantidade dinâmica.

4.1 O universo de Gödel

Em 1949 Kurt Gödel apresentou a primeira solução cosmológica das equações de Einstein com matéria em rotação [114]. Esta solução é estacionária, espacialmente homogênea e exibe certa simetria cilíndrica. A matéria nesse universo gira com velocidade angular dada por $\omega = 2\sqrt{\pi G\rho}$, onde G é a constante gravitacional de Newton e ρ é a densidade de matéria. A característica que mais tem chamado atenção na solução de Gödel é a possibilidade de existirem curvas tipo-tempo fechadas, as chamadas CTC's (do inglês, Closed Timelike Curves). Essas permitiriam, ao menos em teoria, as viagens no tempo e desse modo teríamos violação de causalidade. Entretanto, há muitos que afirmam que tal solução não é fisicamente aceitável, por exemplo, Hawking em [115] conjectura que a presença de curvas tipo-tempo fechadas são fisicamente inconsistentes. Já em [116, 117] a métrica de Gödel foi generalizada em coordenadas cilíndricas e o problema da causalidade foi estudado com mais detalhes, onde mostraram que é possível distinguir três classes diferentes de soluções. Essas soluções são caracterizadas pelas seguintes propriedades: (i) regiões onde não existem curvas tipo-tempo fechadas; (ii) existe uma sequência infinita de regiões alternando entre regiões causais e não causais; (iii) existe somente uma região não causal. A condição de homogeneidade para espaço-tempo tipo Gödel foi discutido em [119, 139].

Devido a essas peculiaridades, o universo de Gödel ou soluções do tipo Gödel tem sido estudada em vários contextos, por exemplo, em [120] as quantidades chamadas de superenergia e supermomento, que podem ser usadas como critério para possibilidade da existência de CTC's, foram introduzidas. Já em [121] as soluções de curvas tipo-tempo fechadas no espaço de Gödel são discutidas no contexto de teoria de cordas. Um modelo supersimétrico em teoria de cordas foi construído em [122]. Para uma revisão de diferentes aspectos de curvas tipo-tempo fechadas podemos ver [123]. Outra razão de interesse na solução proposta por Gödel consiste no fato que este tipo de solução também pode ser estudada no contexto de buracos negros [124, 125], no contexto de teoria de matéria induzida [126], outras discussões relacionadas a métrica de Gödel também podem ser vistas em [127, 128, 129, 130, 131].

Nos últimos anos, tem-se notado que, embora o espaço-tempo de Gödel não seja um modelo realístico para o nosso universo, ele é um importante laboratório teórico para investigar uma classe de propriedades globais da estrutura do espaço-tempo em diferentes teorias de gravidade, por exemplo, em [125] foi mostrado que generalizações supersimétricas do universo de Gödel em quatro dimensões são soluções da supergravidade mínima em cinco dimensões. Teoria de gravitação modificada, como $F(R)$, também tem sido analisada no contexto do universo de Gödel [132] e aspectos fenomenológicos de holografia tem sido discutido neste contexto em [133].

Neste capítulo nosso foco será analisar se a solução de Gödel ocorre na gravitação modificada pelo termo de Chern-Simons. Para isto, veremos se há a necessidade de alguma escolha específica para o campo escalar θ , assim como vimos para a solução de Schwarzschild que necessita de uma escolha particular (específica) para esse campo escalar.

Nós iniciaremos nosso estudo introduzindo a métrica de Gödel como o próprio K. Gödel introduziu em seu trabalho de 1949 [114],

$$ds^2 = a^2 \left[dt^2 - dx^2 + \frac{1}{2} e^{2x} dy^2 - dz^2 + 2e^x dt dy \right], \quad (4.1)$$

onde a é um número positivo¹. Antes de trabalharmos na gravitação modificada pelo termo de Chern-Simons, vamos verificar como essa solução ocorre na gravitação usual. Para essa métrica encontramos,

¹Observação: Nessa métrica o fator a não deve ser confundido com o fator de escala que aparece na métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), uma vez que, a não é uma função do tempo nessa métrica como é na métrica FRW. No entanto, em [134] é introduzido a cosmologia de Gödel-Friedmann, onde o presente universo de Friedmann é originado do universo de Gödel primordial e assim, esse modelo cosmológico dá uma nova conjectura a cerca da evolução do universo.

(i) símbolos de Christoffel não-nulos:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{01}^0 &= 1, \\
 \Gamma_{12}^0 &= \frac{1}{2}e^x, \\
 \Gamma_{02}^1 &= \frac{1}{2}e^x, \\
 \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}e^{2x}, \\
 \Gamma_{01}^2 &= -e^{-x};
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

(ii) componentes não-nulas do tensor de Riemann:

$$\begin{aligned}
 R_{0101} &= -\frac{1}{2}a^2, \\
 R_{0112} &= \frac{1}{2}a^2e^x, \\
 R_{0202} &= -\frac{1}{4}a^2e^{2x}, \\
 R_{1212} &= -\frac{3}{4}a^2e^{2x};
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

(iii) componentes diferentes de zero do tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= 1, \\
 R_{02} &= R_{20} = e^x, \\
 R_{22} &= e^{2x};
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

(iv) e o escalar de Ricci tem a seguinte forma

$$R = \frac{1}{a^2}. \tag{4.5}$$

Agora, vamos verificar em quais condições essa métrica resolve as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\rho u_\mu u_\nu + \Lambda g_{\mu\nu}, \tag{4.6}$$

onde u é um vetor tipo-tempo com componentes contravariantes dadas por $u^\mu = (\frac{1}{a}, 0, 0, 0)$, as correspondentes componentes covariantes são $u_\mu = (a, 0, ae^x, 0)$ e Λ é a constante cosmológica. Analisando as equações de Einstein obtemos as seguintes componentes não-triviais

(i) Componente 00:

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R &= 8\pi G\rho u_0 u_0 + \Lambda g_{00}, \\ \frac{1}{2} &= 8\pi G\rho a^2 + \Lambda a^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

(ii) Componente 02:

$$\begin{aligned} R_{02} - \frac{1}{2}g_{02}R &= 8\pi G\rho u_0 u_2 + \Lambda g_{02}, \\ \frac{1}{2} &= 8\pi G\rho a^2 + \Lambda a^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

(iii) Componente 11:

$$\begin{aligned} R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R &= 8\pi G\rho u_1 u_1 + \Lambda g_{11}, \\ \frac{1}{2} &= -\Lambda a^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

(iv) Componente 22:

$$\begin{aligned} R_{22} - \frac{1}{2}g_{22}R &= 8\pi G\rho u_2 u_2 + \Lambda g_{22}, \\ \frac{3}{4} &= 8\pi G\rho a^2 + \Lambda \frac{a^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Portanto, a métrica de Gödel resolve as equações (4.7), (4.8), (4.9) e (4.10) somente se

$$\Lambda = -\frac{1}{2a^2}, \quad 8\pi G\rho = \frac{1}{a^2}, \quad (4.11)$$

ou $\Lambda = -4\pi G\rho$, ou seja, a métrica de Gödel é solução das equações de Einstein se e somente se essa condição, (4.11), é satisfeita. Esse resultado foi obtido pela primeira vez em [114].

4.2 Introduzindo a métrica de Gödel na gravitação de Chern-Simons

A partir desse ponto, vamos estudar a solução de Gödel na gravitação modificada. Já vimos que as equações de Einstein se tornam

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + C^{\mu\nu} = 8\pi G\rho u^\mu u^\nu + \Lambda g^{\mu\nu}, \quad (4.12)$$

onde $C^{\mu\nu}$ é o tensor de Cotton definido em (3.8). Analisamos que se a condição (4.11) é satisfeita, a métrica de Gödel é solução da gravitação usual de Einstein, porém se queremos verificar se essa solução persiste na gravitação modificada, o caminho mais direto é verificarmos se as componentes do tensor de Cotton se anulam, pois se isto ocorre, voltamos às equações usuais e logo tal métrica persiste como solução. Para esta análise vamos calcular todas as componentes do tensor de Cotton, e assim verificar se são identicamente nulas ou se existe alguma condição que as anulem. Todas as componentes são cuidadosamente calculadas no APÊNDICE D.

Para simplificar nossa análise, vamos reescrever todas as componentes não nulas do tensor de Cotton que foram obtidas no APÊNDICE D escrevendo-as como

$$\begin{aligned}
C^{00} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{e^x}{a^2} [2v_3 + v_{31}], \\
C^{01} &= \frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{1}{a^2} [v_{32} - e^x v_{30}], \\
C^{02} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{1}{a^2} [2v_3 + v_{31}], \\
C^{03} &= \frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{1}{a^2} [v_2 - 2e^x v_0 - e^x v_{01}], \\
C^{11} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{e^x}{2a^2} v_3, \\
C^{13} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{1}{2a^2} [e^x v_1 + v_{20} - 2e^x v_{00} + v_{02}], \\
C^{22} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{e^{-x}}{a^2} v_3, \\
C^{23} &= \frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{1}{2a^2} [-2e^{-x} v_2 + 2v_0 + v_{10} + v_{01}].
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Usando as definições

$$v_\sigma = \partial_\sigma \theta \tag{4.14}$$

e

$$v_{\sigma\tau} = \partial_\sigma \partial_\tau \theta - \Gamma_{\sigma\tau}^\lambda v_\lambda, \tag{4.15}$$

nós podemos expressar as componentes do tensor de Cotton como

$$\begin{aligned}
C^{00} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{e^x}{a^2} [2\partial_3 \theta + \partial_3 \partial_1 \theta], \\
C^{01} &= \frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{1}{a^2} [\partial_3 \partial_2 \theta - e^x \partial_3 \partial_0 \theta],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^{02} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{1}{a^2}\left[2\partial_3\theta + \partial_3\partial_1\theta\right], \\
C^{03} &= \frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{1}{a^2}\left[-e^x\partial_0\theta - e^x\partial_0\partial_1\theta\right], \\
C^{11} &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{e^x}{2a^2}\partial_3\theta, \\
C^{13} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{1}{2a^2}\left[-2e^x\partial_0\partial_0\theta + \partial_0\partial_2\theta + \partial_2\partial_0\theta\right], \\
C^{22} &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{e^{-x}}{a^2}\partial_3\theta, \\
C^{23} &= \frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{1}{2a^2}\left[\partial_1\partial_0\theta + \partial_0\partial_1\theta\right].
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Agora, analisando esses resultados, nós notamos que a métrica de Gödel pode resolver as equações modificadas da gravitação somente para uma forma específica do campo externo θ , isto é,

$$\theta = F(x, y), \tag{4.17}$$

que, neste caso particular, pode ser reescrita como $\theta = F(x) + xG(y)$, como uma estrutura remanescente da usada em [102] para os casos esfericamente simétricos. Na verdade, nesse caso todas as componentes do tensor de Cotton se anulam, fazendo assim a métrica de Gödel uma solução das equações modificadas de Einstein. Portanto, para esta escolha específica da função θ , nós encontramos que a métrica de Gödel é compatível com a gravidade modificada pelo termo de Chern-Simons. Como uma consequência, a propriedade altamente não trivial da métrica de Gödel, isto é, a possibilidade de curvas tipo-tempo fechadas existirem na gravidade modificada pelo termo de Chern-Simons no caso em que o campo externo θ tem a forma (4.17) não difere do caso usual da gravidade de Einstein, e a discussão realizada em [116, 120] é aplicável na gravidade modificada bem como no caso usual.

4.3 Campo escalar θ dinâmico

Como já vimos no capítulo 3 e até aqui nesse capítulo, importantes métricas que são soluções na gravidade usual de Einstein também ocorrem na gravitação modificada pelo termo de Chern-Simons para uma escolha específica do campo escalar θ que é introduzido junto a esse termo na ação da teoria, uma exceção é a métrica de Kerr. Como também comentamos no capítulo 3, recentemente, surgiram na literatura algumas propostas ([103, 104]) para incluir a métrica de Kerr nesta classe de soluções, no entanto, essas

propostas além de considerarem alguma aproximação perturbativa, vem interpretando o campo escalar θ como uma variável dinâmica e não mais como um campo externo como fizemos na seção anterior para a métrica de Gödel e no capítulo anterior para a métrica de Schwarzschild. Assim, foi mostrado que a métrica de Kerr pode ser adequadamente modificada para satisfazer as novas equações de movimento modificadas envolvendo a dinâmica do campo θ . Uma questão que surge quase naturalmente é se outras métricas conhecidas podem ser soluções das novas equações de movimento, ou se é necessário modificar algum parâmetro da teoria.

Nesta seção iremos estudar a possibilidade de termos a métrica de Gödel também como uma solução para gravitação modificada pelo termo de Chern-Simons quando o campo θ é entendido como uma quantidade dinâmica. Ao longo desta seção veremos que se faz necessário modificar algum parâmetro da teoria para que a métrica de Gödel possa ocorrer nesta nova teoria de gravitação.

A ação da gravitação modificada pelo termo de Chern-Simons quando o campo escalar θ é interpretado como uma variável dinâmica é dada por

$$S = S_{EH} + S_{CS} + S_{\theta} + S_{mat}, \quad (4.18)$$

a qual podemos reescrever como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} R + \frac{l}{4} \theta^* R R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_{\mu} \theta) (\partial_{\nu} \theta) + \mathcal{L}_{mat} \right], \quad (4.19)$$

onde l é uma constante de acoplamento. Aqui nós estamos negligenciando o termo de potencial para o campo escalar θ na ação. Por conveniência, associamos a possível inclusão do termo cosmológico com a ação da matéria S_{mat} , pois assim teremos equações de movimento de forma similar às obtidas em [114].

Variando a ação (4.19) com respeito à métrica e ao campo escalar θ , nós obtemos as seguintes equações de movimento:

$$G_{\mu\nu} + l C_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad (4.20)$$

$$g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \theta = -\frac{l}{4} {}^* R R, \quad (4.21)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $C_{\mu\nu}$ é o tensor de Cotton definido em (3.8) e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento que nesta teoria é composto de dois termos,

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^m + T_{\mu\nu}^{\theta}, \quad (4.22)$$

onde $T_{\mu\nu}^m$ é o tensor energia-momento associado ao conteúdo de matéria. Nós sugerimos que este tensor energia-momento é o mesmo que produz a solução de Gödel na gravidade usual de Einstein [114] bem como na gravidade modificada de Chern-Simons com o campo escalar θ sendo uma quantidade externa [135], isto é,

$$T_{\mu\nu}^m = 8\pi G\rho u_\mu u_\nu + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (4.23)$$

Já $T_{\mu\nu}^\theta$ é o tensor energia-momento associado ao campo escalar θ que tem a seguinte forma

$$T_{\mu\nu}^\theta = (\partial_\mu \theta)(\partial_\nu \theta) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial^\lambda \theta)(\partial_\lambda \theta), \quad (4.24)$$

isto é, ele reproduz a forma usual do tensor energia-momento para o campo escalar em um espaço curvo.

No trabalho [135], nós mostramos que para a escolha $\theta = \theta(x, y)$, onde esse campo é interpretado como um campo externo, obtemos que todas as componentes do tensor de Cotton se anulam. Agora vamos verificar a compatibilidade da métrica de Gödel com as equações de movimento para o campo escalar dinâmico justamente neste caso. Para o campo θ dependente apenas de x e y , as componentes não-nulas do tensor energia-momento associado ao campo escalar $T_{\mu\nu}^\theta$ são

$$\begin{aligned} T_{00}^\theta &= \frac{1}{2}(\partial_1 \theta)^2 + e^{-2x}(\partial_2 \theta)^2, \\ T_{02}^\theta &= \frac{1}{2}e^x(\partial_1 \theta)^2 + e^{-x}(\partial_2 \theta)^2, \\ T_{11}^\theta &= \frac{1}{2}(\partial_1 \theta)^2 - e^{-2x}(\partial_2 \theta)^2, \\ T_{12}^\theta &= (\partial_1 \theta)(\partial_2 \theta), \\ T_{22}^\theta &= \frac{1}{4}e^{2x}(\partial_1 \theta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_2 \theta)^2, \\ T_{33}^\theta &= -\frac{1}{2}(\partial_1 \theta)^2 - e^{-2x}(\partial_2 \theta)^2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Calculando as componentes do tensor de Einstein para a métrica de Gödel encontramos que

$$G_{00} = \frac{1}{2}, \quad G_{11} = \frac{1}{2}, \quad G_{20} = \frac{1}{2}e^x, \quad G_{22} = \frac{3}{4}e^{2x}, \quad G_{33} = \frac{1}{2}. \quad (4.26)$$

Assim, podemos escrever as componentes das equações de Einstein, 00, 11, 22 e 33 respectivamente como

$$\frac{1}{2} = 8\pi G\rho a^2 + \Lambda a^2 + \left[\frac{1}{2}(\partial_1 \theta)^2 + e^{-2x}(\partial_2 \theta)^2 \right], \quad (4.27)$$

$$\frac{1}{2} = -\Lambda a^2 + \left[\frac{1}{2} (\partial_1 \theta)^2 - e^{-2x} (\partial_2 \theta)^2 \right], \quad (4.28)$$

$$\frac{3}{2} = 16\pi G \rho a^2 + \Lambda a^2 + \left[\frac{1}{2} (\partial_1 \theta)^2 + e^{-2x} (\partial_2 \theta)^2 \right], \quad (4.29)$$

$$\frac{1}{2} = -\Lambda a^2 - \left[\frac{1}{2} (\partial_1 \theta)^2 + e^{-2x} (\partial_2 \theta)^2 \right]. \quad (4.30)$$

As equações para as componentes 00 e 02 são exatamente iguais. Além dessas equações temos também a componente 12 que tem a seguinte forma

$$(\partial_1 \theta)(\partial_2 \theta) = 0. \quad (4.31)$$

Uma inspeção direta dessas componentes nos leva a concluir que uma solução para as componentes 00, 02, 22 e 33 pode ser formalmente escrita como

$$8\pi G \rho = \frac{1}{a^2}; \quad \Lambda = -\frac{1}{2a^2} - \frac{\Theta}{a^2}, \quad (4.32)$$

onde

$$\Theta = \frac{1}{2} (\partial_1 \theta)^2 + e^{-2x} (\partial_2 \theta)^2. \quad (4.33)$$

Entretanto, nós concluímos que essas soluções correspondem ao caso em que a constante cosmológica não é uma constante, mas um campo dependente das coordenadas do espaço-tempo. Contudo, isto não modifica a derivação dos correspondentes termos das equações de Einstein desde que a função Θ não depende do tensor métrico, então a estrutura formal das equações de Einstein é a mesma com uma única diferença, o termo cosmológico não é agora uma constante mas uma função das coordenadas.

É fácil ver que no limite $\Theta \rightarrow 0$ nós recuperamos a solução usual para o universo de Gödel [114]. Contudo, para procedermos nessa análise, é necessário levarmos em conta que a condição (4.32) não resolve a equação (4.28) para a componente 11. Voltando para a equação (4.31) nós encontramos que podemos escolher $(\partial_1 \theta) = 0$ ou $(\partial_2 \theta) = 0$. Se, por exemplo, escolhermos $(\partial_1 \theta) = 0$, nós concluímos que $\theta = \theta(y)$. Assim, a função Θ é reduzida para

$$\Theta \rightarrow \bar{\Theta} = e^{-2x} (\partial_2 \theta)^2. \quad (4.34)$$

Nós notamos que a escolha $(\partial_2 \theta) = 0$ implica somente no caso trivial $\theta = \text{constante}$.

Como resultado, nós concluímos que a métrica de Gödel pode ser solução das equações de movimento na gravidade modificada pelo termo de Chern-Simons com o campo θ

dinâmico se a constante cosmológica é realmente um campo variando da forma

$$\Lambda = -\frac{1}{2a^2}(1 + 2\bar{\Theta}). \quad (4.35)$$

Para atingir a completa consistência das equações de movimento, nós podemos resolver também a equação (4.21) que nos ajuda a encontrar uma forma explícita para o campo escalar. Para a métrica de Gödel temos que

$$\begin{aligned} {}^*RR &= {}^*R^a{}_b{}^{cd}R^b{}_{acd} = \frac{1}{2}\epsilon^{cdef}R^a{}_{bef}R^b{}_{acd} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon^{cdef}g^{a\alpha}g^{b\beta}R_{\alpha bef}R_{\beta acd} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.36)$$

e então, a equação (4.21) é reduzida para

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\theta = 0. \quad (4.37)$$

Levando em conta que, como nós temos concluído, o campo θ depende somente da coordenada y , nós temos

$$\partial_y^2\theta(y) = 0, \quad (4.38)$$

que produz a seguinte solução

$$\theta(y) = c_1 + c_2y, \quad (4.39)$$

onde c_1 e c_2 são constantes.

Substituindo essa expressão para θ na equação (4.35), nós obtemos o seguinte resultado para Λ ,

$$\Lambda = -\frac{1}{2a^2} \left[1 + C e^{-2x} \right], \quad (4.40)$$

com C sendo uma constante. Portanto, o termo chamado antes de “constante” cosmológica é uma função da coordenada espacial, ou seja, $\Lambda = \Lambda(x)$.

Agora vamos interpretar nosso resultado. A conclusão chave que nós obtemos, sem dúvida, é o fato que a gravidade de Einstein modificada com um coeficiente de Chern-Simons (campo escalar) dinâmico admite a solução de Gödel, bem como a teoria onde o campo escalar θ é interpretado como um campo externo. No entanto, nós encontramos que a estrutura do campo escalar compatível com a métrica de Gödel é fortemente

restrita, isto é, ela é linear na coordenada y , e para satisfazer as equações modificadas de Einstein, a constante cosmológica não pode ser constante no verdadeiro sentido da palavra, ela depende de alguma coordenada em que as componentes da métrica depende. Devemos lembrar que a idéia de termos a constante cosmológica variando é tratada como uma das possíveis explicações para a expansão acelerada do universo [136, 137], porém a grande maioria das aplicações dessa idéia foram baseadas na hipótese de que a constante cosmológica deve depender somente do tempo, essa sugestão é razoável quando se está interessado apenas em uma estrutura cosmológica. Apesar disso, a dependência espacial da constante cosmológica pode implicar em modificações altamente não triviais da topologia do espaço, assim, o espaço acaba por ser fechado sobre si mesmo em torno de um objeto massivo [138]. O problema natural que segue desse fato é se as curvas tipo-tempo fechadas que são características marcantes da métrica de Gödel podem surgir. Outra possível consequência da dependência espacial da constante cosmológica são as profundas relações entre eletromagnetismo e interações gravitacionais implicando nos chamados modelos eletromagnéticos massivos [139, 140] e a existência das soluções com topologias não triviais, tais como corda cósmica e buracos de minhocas, como exemplo podemos ver [141, 142]. Como resultado, podemos concluir que a consistência do modelo de gravidade modificada com o termo de Chern-Simons dinâmico e a variabilidade da “constante” cosmológica são ainda problemas em aberto em gravitação.

Conclusões e perspectivas

Estudamos nesta tese alguns efeitos causados pela violação das simetrias de Lorentz e CPT. Estudamos também um modelo de modificação da gravitação que tem sido intensamente discutido na literatura nos últimos anos, a gravitação modificada pelo termo de Chern-Simons.

No capítulo 1 fizemos uma rápida revisão da quebra espontânea de simetria para um campo escalar com interação do tipo $\lambda\phi^4$ e do mecanismo de Higgs. Discutimos um exemplo simples de quebra espontânea das simetrias de Lorentz, o modelo bumblebee, onde um campo vetorial adquire um valor esperado no vácuo diferente de zero. Em seguida passamos a estudar um modelo de quatro férmions quadridimensional. Nesse modelo mostramos que em temperatura zero as simetrias de Lorentz podem ser quebradas, já em temperatura finita ao analisarmos o mesmo modelo encontramos que é possível para uma determinada temperatura restaurarmos as simetrias de Lorentz.

Ainda no contexto de quebra espontânea de simetrias, verificamos os efeitos que a violação de Lorentz pode trazer para a evolução do universo. Para tal análise mostramos ser possível construir uma equação de Friedmann a partir do modelo bumblebee em cinco dimensões. Para resolver a equação de Friedmann e assim encontrarmos a evolução do fator de escala, tomamos um caso particular que consiste em fazer a quinta dimensão estática. Como uma primeira tentativa tomamos algumas condições iniciais e encontramos que a evolução do universo com violação de Lorentz demonstra um comportamento não usual, ou seja, o universo pode estar intercalando fases de expansão acelerada com fases de expansão desacelerada. Esse trabalho nos desperta algumas perspectivas, como verificar se esse comportamento não trivial do universo ocorre sempre, em todas as fases, ou se é apenas para algumas casos particulares como fizemos até agora.

No capítulo 2 começamos discutindo o modelo padrão estendido, dando destaque a extensão proposta para a eletrodinâmica quântica. Nosso objetivo foi estudar a energia livre na eletrodinâmica quântica violando as simetrias de Lorentz em altas temperaturas. Encontramos que o efeito causado pela quebra das simetrias de Lorentz na energia livre é a adição de um fator constante ao termo usual da energia livre, mostramos também que

esse resultado ocorre de modo semelhante para os cálculos de um e dois loops. Dada a importância da energia livre no estudo da abundância primordial de hélio, usamos dados experimentais dessa quantidade para estimar um valor numérico para o parâmetro de violação e assim, propomos que os efeitos causados pela quebra das simetrias de Lorentz podem ser usados para resolver o problema, ou ao menos indicar um caminho, que existe entre dados experimentais e teóricos. O valor que encontramos para o parâmetro de violação usando esses dados está de acordo com valores propostos na literatura. Uma perspectiva em torno desse trabalho seria fazer o mesmo estudo para o limite de baixas temperaturas e assim verificar se os efeitos da violação na energia livre seriam diferentes.

Uma proposta para uma teoria de gravitação modificada pelo termo de Chern-Simons, foi abordada no capítulo 3. Mostramos algumas motivações que tem intensificado a procura por uma nova teoria de gravitação e em seguida estudamos a modificação causada pelo termo de Chern-Simons adicionado a teoria usual de Einstein-Hilbert. Mostramos também que uma das mais importantes soluções da relatividade geral, a solução de Schwarzschild, é solução dessa nova teoria de gravitação para uma escolha específica do campo escalar θ .

No capítulo 4 nos propomos a verificar se a métrica de Gödel, com todas as suas características não triviais, persiste na gravitação modificada pelo termo de Chern-Simons. Mostramos que ao considerarmos o campo escalar θ como uma quantidade externa precisamos que este seja uma função apenas das coordenadas x e y , se isto ocorre, a solução de Gödel faz parte de uma classe de solução que ocorre na relatividade usual e na teoria de gravitação modificada. Já quando interpretamos o campo θ como um campo dinâmico, encontramos que para a solução de Gödel ocorrer nessa nova teoria é necessário que a constante cosmológica deixa de ser puramente uma constante e passe a ser um novo parâmetro que depende da coordenada espacial. Nessa última análise, ainda encontramos que o campo escalar deve ser apenas uma função da coordenada y . Nosso principal resultado é que a métrica de Gödel pode ser solução da gravitação modificada para algumas escolhas específicas e que suas principais características, como curvas tipo-tempo fechadas, também podem ocorrer nessa nova teoria de gravitação.

Esse trabalho na gravitação modificada nos dá algumas perspectivas para trabalhos futuros, pois a questão de gravitação modificada, constante cosmológica não sendo uma constante no sentido estrito da palavra são questões em aberto hoje que nos despertam grandes interesses. Outra questão que podemos estudar é a métrica de Kerr, que precisa ser modificada de alguma maneira para ser solução dessa nova teoria. Podemos partir de

alguma modificação proposta para essa métrica e estudar as influências que tais modificações podem trazer. Outro ponto que pretendemos estudar é a métrica de Friedmann-Robertson-Walker na gravitação modificada para o caso em que θ é um campo dinâmico e depende apenas da coordenada temporal. Dada a importância cosmológica desse modelo podemos encontrar resultados importantes nesta abordagem.

APÊNDICE A – Integrais em D dimensões

Neste apêndice iremos apresentar algumas integrais em D dimensões no esquema da regularização dimensional, no espaço euclidiano, que nos ajudará ao longo da tese. As principais integrais são:

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + m^2)^\alpha} = \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right)}{\Gamma(\alpha) [m^2]^{\alpha - \frac{D}{2}}}, \quad (\text{A.1})$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^2}{(p^2 + m^2)^\alpha} = \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{D}{2} \frac{\Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{D}{2}\right)}{\Gamma(\alpha) [m^2]^{\alpha - 1 - \frac{D}{2}}}, \quad (\text{A.2})$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^4}{(p^2 + m^2)^\alpha} = \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{D(D+2)}{4} \frac{\Gamma\left(\alpha - 2 - \frac{D}{2}\right)}{\Gamma(\alpha) [m^2]^{\alpha - 2 - \frac{D}{2}}}, \quad (\text{A.3})$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 + m^2)^\alpha} = \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{g_{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{D}{2}\right)}{\Gamma(\alpha) [m^2]^{\alpha - 1 - \frac{D}{2}}}, \quad (\text{A.4})$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu p_\nu p_\beta p_\theta}{(p^2 + m^2)^\alpha} = \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{(g_{\mu\nu}g_{\beta\theta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\theta} + g_{\mu\theta}g_{\nu\beta})}{4} \frac{\Gamma\left(\alpha - 2 - \frac{D}{2}\right)}{\Gamma(\alpha) [m^2]^{\alpha - 2 - \frac{D}{2}}}. \quad (\text{A.5})$$

APÊNDICE B – Algumas ferramentas da relatividade geral

Neste apêndice iremos apresentar algumas ferramentas (fórmulas) da relatividade geral que nos serão úteis no desenvolvimento da tese. Primeiro apresentamos o símbolo de Christoffel que tem a seguinte forma

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} (\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}), \quad (\text{B.1})$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico. Essa quantidade é simétrica na troca dos índices inferiores, ou seja,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}. \quad (\text{B.2})$$

O tensor de Riemann ou simplesmente tensor curvatura é dado por

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}. \quad (\text{B.3})$$

O tensor de Riemann demonstra a seguinte simetria na troca dos seus índices

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (\text{B.4})$$

Contraindo o tensor de Riemann obtemos o tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} = g^{\lambda\rho}R_{\rho\mu\lambda\nu}, \quad (\text{B.5})$$

o qual pode ser escrito como

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\rho}\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\rho\mu}^{\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\rho\mu}^{\lambda}. \quad (\text{B.6})$$

A simetria exibida pelo tensor de Ricci é

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (\text{B.7})$$

Fazendo uma nova contração, porém agora no tensor de Ricci, encontramos o escalar de Ricci ou o escalar curvatura,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (\text{B.8})$$

Combinando essas duas últimas quantidades obtemos o tensor de Einstein, dado por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (\text{B.9})$$

Uma outra fórmula de grande utilidade para nós é a derivada covariante de um tensor. Ao calcularmos as componentes do tensor de Cotton usaremos estas fórmulas que são dadas por

$$D_\sigma T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k} = \partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T^{\lambda\mu_2\ldots\mu_k} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2} T^{\mu_1\lambda\ldots\mu_k} + \ldots, \quad (\text{B.10})$$

e

$$D_\sigma T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} = \partial_\sigma T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_l} - \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T_{\lambda\nu_2\ldots\nu_l} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^\lambda T_{\nu_1\lambda\ldots\nu_l} - \ldots \quad (\text{B.11})$$

Uma propriedade importante é que a derivada covariante se reduz a uma derivada parcial quando atua em um escalar, por exemplo,

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi, \quad (\text{B.12})$$

onde ϕ é um campo escalar.

APÊNDICE C – Tensor de Cotton para a solução de Schwarzschild

Aqui estamos interessados em calcular as componentes do tensor de Cotton para a métrica de Schwarzschild. Uma vez que as componentes do tensor de Ricci para essa métrica são todas nulas, podemos escrever o tensor de Cotton da seguinte maneira,

$$C^{\mu\nu} = -\frac{v_{\sigma\tau}}{4\sqrt{-g}} \left[\epsilon^{\sigma\nu\alpha\beta} R^{\tau\mu}{}_{\alpha\beta} + \epsilon^{\sigma\mu\alpha\beta} R^{\tau\nu}{}_{\alpha\beta} \right]. \quad (\text{C.1})$$

Agora, iremos encontrar todas as componentes desse tensor.

1. Componente C^{00} :

$$\begin{aligned} C^{00} &= -\frac{v_{\sigma\tau}}{2\sqrt{-g}} \epsilon^{\sigma 0 \alpha \beta} R^{\tau 0}{}_{\alpha \beta} = -\frac{v_{\sigma\tau}}{2\sqrt{-g}} \epsilon^{\sigma 0 \alpha \beta} g^{\lambda\tau} g^{00} R_{\lambda 0 \alpha \beta} \\ &= -\frac{v_{\sigma\tau}}{2\sqrt{-g}} g^{00} \left[\epsilon^{\sigma 0 1 \beta} \left(g^{1\tau} R_{101\beta} + g^{2\tau} R_{201\beta} + g^{3\tau} R_{301\beta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^{\sigma 0 2 \beta} \left(g^{1\tau} R_{102\beta} + g^{2\tau} R_{202\beta} + g^{3\tau} R_{302\beta} \right) + \epsilon^{\sigma 0 3 \beta} \left(g^{1\tau} R_{103\beta} + g^{2\tau} R_{203\beta} + g^{3\tau} R_{303\beta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Usando as componentes do tensor de Riemann que estão descritas no capítulo 3 e que $\epsilon^{0123} = 1$, obtemos que

$$C^{00} = 0. \quad (\text{C.3})$$

2. Componente C^{01} :

$$\begin{aligned} C^{01} &= -\frac{v_{\sigma\tau}}{4\sqrt{-g}} \left[\epsilon^{\sigma 1 \alpha \beta} g^{\lambda\tau} g^{00} R_{\lambda 0 \alpha \beta} + \epsilon^{\sigma 0 \alpha \beta} g^{\lambda\tau} g^{11} R_{\lambda 1 \alpha \beta} \right] \\ &= -\frac{v_{32}}{4\sqrt{-g}} \left[g^{00} g^{22} \left(\epsilon^{3102} R_{2002} + \epsilon^{3120} R_{2020} \right) + g^{00} g^{33} \left(\epsilon^{2103} R_{3003} + \epsilon^{2130} R_{3030} \right) \right. \\ &\quad \left. + g^{11} g^{22} \left(\epsilon^{3012} R_{2112} + \epsilon^{3021} R_{2121} \right) + g^{11} g^{33} \left(\epsilon^{2013} R_{3113} + \epsilon^{2031} R_{3131} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= -\frac{v_{32}}{4\sqrt{-g}} \left[2g^{00} \left(-g^{22} R_{0202} + g^{33} R_{0303} \right) + 2g^{11} \left(g^{22} R_{1212} - g^{33} R_{1313} \right) \right]. \quad (\text{C.4})$$

Usando as componentes do tensor de Riemann encontramos

$$C^{01} = 0. \quad (\text{C.5})$$

3. Componente C^{02} :

$$\begin{aligned} C^{02} &= -\frac{v_{\sigma\tau}}{4\sqrt{-g}} \left[\epsilon^{\sigma 2\alpha\beta} g^{\lambda\tau} g^{00} R_{\lambda 0\alpha\beta} + \epsilon^{\sigma 0\alpha\beta} g^{\lambda\tau} g^{22} R_{\lambda 2\alpha\beta} \right] \\ &= -\frac{v_{31}}{4\sqrt{-g}} \left[2g^{00} \left(g^{11} R_{0101} - g^{33} R_{0303} \right) - 2g^{22} \left(g^{11} R_{1212} - g^{33} R_{2323} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Substituindo as componentes da métrica e do tensor de Riemann obtemos

$$C^{02} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{3M}{r^3} v_{31}. \quad (\text{C.7})$$

4. Componente C^{03} :

$$\begin{aligned} C^{03} &= -\frac{v_{\sigma\tau}}{4\sqrt{-g}} \left[\epsilon^{\sigma 3\alpha\beta} g^{\lambda\tau} g^{00} R_{\lambda 0\alpha\beta} + \epsilon^{\sigma 0\alpha\beta} g^{\lambda\tau} g^{33} R_{\lambda 3\alpha\beta} \right] \\ &= -\frac{v_{21}}{4\sqrt{-g}} \left[-2g^{00} \left(g^{11} R_{0101} - g^{22} R_{0202} \right) + 2g^{33} \left(g^{11} R_{1313} - g^{22} R_{2323} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Ao fazermos as substituições encontramos que

$$C^{03} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{2M}{r^3} v_{21}. \quad (\text{C.9})$$

5. Componente C^{11} :

$$\begin{aligned} C^{11} &= -\frac{v_{\sigma\tau}}{2\sqrt{-g}} \epsilon^{\sigma 1\alpha\beta} g^{\lambda\tau} g^{11} R_{\lambda 1\alpha\beta} \\ &= -\frac{v_{\sigma\tau}}{2\sqrt{-g}} g^{11} \left[\epsilon^{\sigma 10\beta} \left(g^{0\tau} R_{010\beta} + g^{2\tau} R_{210\beta} + g^{3\tau} R_{310\beta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^{\sigma 12\beta} \left(g^{0\tau} R_{012\beta} + g^{2\tau} R_{212\beta} + g^{3\tau} R_{312\beta} \right) + \epsilon^{\sigma 13\beta} \left(g^{0\tau} R_{013\beta} + g^{2\tau} R_{213\beta} + g^{3\tau} R_{313\beta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Analisando termo a termo encontramos que

$$C^{11} = 0. \quad (\text{C.11})$$

6. Componente C^{12} :

$$\begin{aligned} C^{12} &= -\frac{v_{\sigma\tau}}{4\sqrt{-g}} \left[\epsilon^{\sigma 2\alpha\beta} g^{\lambda\tau} g^{11} R_{\lambda 1\alpha\beta} + \epsilon^{\sigma 1\alpha\beta} g^{\lambda\tau} g^{22} R_{\lambda 2\alpha\beta} \right] \\ &= -\frac{v_{30}}{4\sqrt{-g}} \left[-2g^{00} (g^{11} R_{0101} - g^{22} R_{0202}) + 2g^{33} (g^{11} R_{1313} - g^{22} R_{2323}) \right]. \end{aligned} \quad (C.12)$$

Usando as componentes da métrica e do tensor de Riemann teremos que

$$C^{12} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{3M}{r^3} v_{30}. \quad (C.13)$$

7. Componente C^{13} :

$$\begin{aligned} C^{13} &= -\frac{v_{\sigma\tau}}{4\sqrt{-g}} \left[\epsilon^{\sigma 3\alpha\beta} g^{\lambda\tau} g^{11} R_{\lambda 1\alpha\beta} + \epsilon^{\sigma 1\alpha\beta} g^{\lambda\tau} g^{33} R_{\lambda 3\alpha\beta} \right] \\ &= -\frac{v_{20}}{4\sqrt{-g}} \left[g^{11} (2g^{00} R_{0101} - 2g^{22} R_{2121}) + g^{33} (-2g^{00} R_{0303} + 2g^{22} R_{2323}) \right]. \end{aligned} \quad (C.14)$$

Fazendo as devidas substituições ficamos com

$$C^{13} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{3M}{r^3} v_{20}. \quad (C.15)$$

8. Componente C^{22} :

$$\begin{aligned} C^{22} &= -\frac{v_{\sigma\tau}}{2\sqrt{-g}} \epsilon^{\sigma 2\alpha\beta} g^{\lambda\tau} g^{22} R_{\lambda 2\alpha\beta} \\ &= -\frac{v_{\sigma\tau}}{2\sqrt{-g}} g^{22} \left[\epsilon^{\sigma 20\beta} (g^{0\tau} R_{020\beta} + g^{1\tau} R_{120\beta} + g^{3\tau} R_{320\beta}) \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^{\sigma 21\beta} (g^{0\tau} R_{021\beta} + g^{1\tau} R_{121\beta} + g^{3\tau} R_{321\beta}) + \epsilon^{\sigma 23\beta} (g^{0\tau} R_{023\beta} + g^{1\tau} R_{123\beta} + g^{3\tau} R_{323\beta}) \right]. \end{aligned} \quad (C.16)$$

Aqui obtemos

$$C^{22} = 0. \quad (C.17)$$

9. Componente C^{23} :

$$\begin{aligned} C^{23} &= -\frac{v_{\sigma\tau}}{4\sqrt{-g}} \left[\epsilon^{\sigma 3\alpha\beta} g^{\lambda\tau} g^{22} R_{\lambda 2\alpha\beta} + \epsilon^{\sigma 2\alpha\beta} g^{\lambda\tau} g^{33} R_{\lambda 3\alpha\beta} \right] \\ &= -\frac{v_{01}}{4\sqrt{-g}} \left[g^{22} (-2g^{00} R_{0202} + 2g^{11} R_{1212}) + g^{33} (2g^{00} R_{0303} - 2g^{11} R_{1313}) \right]. \end{aligned} \quad (C.18)$$

Substituindo as componentes da métrica e do tensor de Riemann obtemos

$$C^{23} = 0. \quad (C.19)$$

10. Componente C^{33} :

$$\begin{aligned}
 C^{33} &= -\frac{v_{\sigma\tau}}{2\sqrt{-g}} \epsilon^{\sigma 3\alpha\beta} g^{\lambda\tau} g^{33} R_{\lambda 3\alpha\beta} \\
 &= -\frac{v_{\sigma\tau}}{2\sqrt{-g}} g^{33} \left[\epsilon^{\sigma 30\beta} \left(g^{0\tau} R_{030\beta} + g^{1\tau} R_{130\beta} + g^{2\tau} R_{230\beta} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \epsilon^{\sigma 31\beta} \left(g^{0\tau} R_{031\beta} + g^{1\tau} R_{131\beta} + g^{2\tau} R_{231\beta} \right) + \epsilon^{\sigma 32\beta} \left(g^{0\tau} R_{032\beta} + g^{1\tau} R_{132\beta} + g^{2\tau} R_{232\beta} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{C.20}$$

Por fim, encontramos que

$$C^{33} = 0. \tag{C.21}$$

APÊNDICE D – Tensor de Cotton para a métrica de Gödel

Neste apêndice iremos calcular todas as componentes do tensor de Cotton,

$$C^{\mu\nu} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma\mu\alpha\beta} D_\alpha R_\beta^\nu + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma\nu\alpha\beta} R^{\tau\mu}{}_{\alpha\beta} \right] + (\mu \longleftrightarrow \nu), \quad (\text{D.1})$$

para a métrica de Gödel, as quais iremos usar no capítulo 4.

1. Componente C^{00} :

$$\begin{aligned} C^{00} &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma 0\alpha\beta} D_\alpha R_\beta^0 + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 0\alpha\beta} R^{\tau 0}{}_{\alpha\beta} \right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma 012} D_1 R_2^0 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 013} D_1 R_3^0 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 021} D_2 R_1^0 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 023} D_2 R_3^0 \right. \\ &\quad \left. + v_\sigma \epsilon^{\sigma 031} D_1 R_1^0 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 032} D_3 R_2^0 + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 012} D_1 R^{\sigma 0}{}_{12} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 021} D_1 R^{\sigma 0}{}_{21} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Usando (B.11) temos que,

$$\begin{aligned} D_1 R_1^0 &= g^{00} D_1 R_{01} + g^{02} D_1 R_{21} \\ &= g^{00} [\partial_1 R_{01} - \Gamma_{10}^\lambda R_{\lambda 1} - \Gamma_{11}^\lambda R_{\lambda 0}] + g^{02} [\partial_1 R_{21} - \Gamma_{12}^\lambda R_{\lambda 1} - \Gamma_{11}^\lambda R_{\lambda 1}] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{aligned} D_1 R_2^0 &= g^{00} D_1 R_{02} + g^{02} D_1 R_{22} \\ &= g^{00} [\partial_1 R_{02} - \Gamma_{10}^\lambda R_{\lambda 2} - \Gamma_{12}^\lambda R_{\lambda 0}] + g^{02} [\partial_1 R_{22} - 2\Gamma_{12}^\lambda R_{\lambda 2}] \\ &= \frac{3e^x}{2a^2}, \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

$$\begin{aligned} D_1 R_3^0 &= g^{00} D_1 R_{03} + g^{02} D_1 R_{23} \\ &= g^{00} [\partial_1 R_{03} - \Gamma_{10}^\lambda R_{\lambda 3} - \Gamma_{13}^\lambda R_{\lambda 0}] + g^{02} [\partial_1 R_{23} - \Gamma_{12}^\lambda R_{\lambda 3} - \Gamma_{13}^\lambda R_{\lambda 2}] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

$$D_2 R_1^0 = g^{00} D_2 R_{01} + g^{02} D_2 R_{21}$$

$$\begin{aligned}
 &= g^{00} [\partial_2 R_{01} - \Gamma_{20}^\lambda R_{\lambda 1} - \Gamma_{21}^\lambda R_{\lambda 0}] + g^{02} [\partial_2 R_{21} - \Gamma_{22}^\lambda R_{\lambda 1} - \Gamma_{21}^\lambda R_{\lambda 2}] \\
 &= -\frac{e^x}{2a^2},
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

$$\begin{aligned}
 D_2 R_3^0 &= g^{00} D_2 R_{03} + g^{02} D_2 R_{23} \\
 &= g^{00} [\partial_2 R_{03} - \Gamma_{20}^\lambda R_{\lambda 3} - \Gamma_{23}^\lambda R_{\lambda 0}] + g^{02} [\partial_2 R_{23} - \Gamma_{22}^\lambda R_{\lambda 3} - \Gamma_{23}^\lambda R_{\lambda 2}] \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

$$\begin{aligned}
 D_3 R_2^0 &= g^{00} D_3 R_{02} + g^{02} D_3 R_{22} \\
 &= g^{00} [\partial_3 R_{02} - \Gamma_{30}^\lambda R_{\lambda 2} - \Gamma_{32}^\lambda R_{\lambda 0}] + g^{02} [\partial_3 R_{22} - \Gamma_{32}^\lambda R_{\lambda 2} - \Gamma_{32}^\lambda R_{\lambda 2}] \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{D.8}$$

Usando os resultados acima e o fato que $\epsilon^{0123} = 1$, podemos reescrever (D.2) como

$$C^{00} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\frac{2e^x}{a^2} v_3 + v_{31} R^{10}{}_{12} \right]. \tag{D.9}$$

Para a métrica de Gödel encontramos que

$$\begin{aligned}
 R^{10}{}_{12} &= g^{11} g^{00} R_{1012} + g^{11} g^{02} R_{1212} \\
 &= \frac{e^x}{a^2}.
 \end{aligned} \tag{D.10}$$

Então,

$$C^{00} = \frac{e^x}{a^2 \sqrt{-g}} [2v_3 + v_{31}]. \tag{D.11}$$

2. Componente C^{01} :

$$\begin{aligned}
 C^{01} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 \alpha \beta} D_\alpha R_\beta^1 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 1 \alpha \beta} D_\alpha R_\beta^0 + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 1 \alpha \beta} R^{\tau 0}{}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 0 \alpha \beta} R^{\tau 1}{}_{\alpha\beta} \right] \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 12} D_1 R_2^1 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 13} D_1 R_3^1 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 21} D_2 R_1^1 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 23} D_2 R_3^1 \right. \\
 &\quad + v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 31} D_3 R_1^1 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 32} D_3 R_2^1 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 1 02} D_0 R_2^0 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 1 03} D_0 R_3^0 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 1 20} D_2 R_0^0 \\
 &\quad + v_\sigma \epsilon^{\sigma 1 23} D_2 R_3^0 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 1 30} D_3 R_0^0 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 1 32} D_3 R_2^0 + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 1 02} R^{\tau 0}{}_{02} \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 1 20} R^{\tau 0}{}_{20} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 0 12} R^{\tau 1}{}_{12} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 0 21} R^{\tau 1}{}_{21} \right].
 \end{aligned} \tag{D.12}$$

Calculando as derivadas covariantes encontramos que

$$\begin{aligned}
 D_0 R_2^0 &= 0, & D_0 R_3^0 &= 0, & D_1 R_2^1 &= 0, & D_1 R_3^1 &= 0, \\
 D_2 R_0^0 &= 0, & D_2 R_3^0 &= 0, & D_2 R_1^1 &= 0, & D_2 R_3^1 &= 0, \\
 D_3 R_0^0 &= 0, & D_3 R_2^1 &= 0, & D_3 R_1^1 &= 0,
 \end{aligned} \tag{D.13}$$

e ficamos com

$$C^{01} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[v_{32} R^{20}_{02} - v_{32} R^{21}_{12} - v_{30} R^{01}_{12} \right]. \quad (\text{D.14})$$

Mas,

$$R^{20}_{02} = g^{22} g^{00} R_{2002} + g^{20} g^{20} R_{0202} = -\frac{1}{2a^2}, \quad (\text{D.15})$$

$$R^{21}_{12} = g^{22} g^{11} R_{2112} + g^{20} g^{11} R_{0112} = \frac{1}{2a^2}, \quad (\text{D.16})$$

$$R^{01}_{12} = g^{00} g^{11} R_{0112} + g^{20} g^{11} R_{2112} = -\frac{e^x}{a^2}. \quad (\text{D.17})$$

Assim,

$$C^{01} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{1}{a^2} [v_{32} - v_{30} e^x]. \quad (\text{D.18})$$

3. Componente C^{02} :

$$\begin{aligned} C^{02} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 \alpha \beta} D_\alpha R_\beta^2 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 2 \alpha \beta} D_\alpha R_\beta^0 + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 2 \alpha \beta} R^{\tau 0}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 0 \alpha \beta} R^{\tau 2}_{\alpha\beta} \right] \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 12} D_1 R_2^2 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 13} D_1 R_3^2 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 21} D_2 R_1^2 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 23} D_2 R_3^2 \right. \\ &\quad + v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 31} D_3 R_1^2 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 32} D_3 R_2^2 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 2 01} D_0 R_1^0 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 2 03} D_0 R_3^0 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 2 10} D_1 R_0^0 \\ &\quad + v_\sigma \epsilon^{\sigma 2 13} D_1 R_3^0 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 2 30} D_3 R_0^0 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 2 31} D_3 R_1^0 + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 0 12} R^{\tau 0}_{01} \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 2 10} R^{\tau 0}_{10} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 0 12} R^{\tau 2}_{12} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 0 21} R^{\tau 2}_{21} \right]. \quad (\text{D.19}) \end{aligned}$$

Verificando as derivadas covariantes encontramos que

$$\begin{aligned} D_1 R_0^0 &= g^{00} D_1 R_{00} + g^{02} D_1 R_{20} \\ &= g^{00} [\partial_1 R_{00} - 2\Gamma_{10}^\lambda R_{\lambda 0}] + g^{02} [\partial_1 R_{20} - \Gamma_{12}^\lambda R_{\lambda 0} - \Gamma_{10}^\lambda R_{\lambda 2}] \\ &= \frac{1}{a^2}, \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

$$\begin{aligned} D_1 R_2^2 &= g^{22} D_1 R_{22} + g^{02} D_1 R_{02} \\ &= g^{22} [\partial_1 R_{22} - 2\Gamma_{12}^\lambda R_{\lambda 2}] + g^{02} [\partial_1 R_{02} - \Gamma_{10}^\lambda R_{\lambda 2} - \Gamma_{12}^\lambda R_{\lambda 0}] \\ &= -\frac{1}{a^2}, \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

$$\begin{aligned} D_0 R_1^0 &= 0, & D_0 R_3^0 &= 0, & D_1 R_3^2 &= 0, & D_2 R_1^2 &= 0, \\ D_2 R_3^2 &= 0, & D_3 R_1^0 &= 0, & D_3 R_1^2 &= 0, & D_3 R_2^2 &= 0, \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

e que $D_1 R_3^0$ e $D_3 R_0^0$ foram calculadas em (D.5) e (D.13) respectivamente. Assim,

podemos reescrever essa componente como

$$C^{02} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[\frac{2}{a^2} v_3 - v_{31} R^{10}_{01} - v_{31} R^{12}_{12} \right]. \quad (D.23)$$

As componentes do tensor de Riemann expressas nessa última equação são

$$R^{10}_{01} = g^{11} g^{00} R_{1001} + g^{11} g^{02} R_{1201} = -\frac{1}{2a^2}, \quad (D.24)$$

$$R^{12}_{12} = g^{11} g^{22} R_{1212} + g^{11} g^{02} R_{1012} = -\frac{1}{2a^2}, \quad (D.25)$$

logo,

$$C^{02} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{1}{a^2} [2v_3 + v_{31}]. \quad (D.26)$$

4. Componente C^{03} :

$$\begin{aligned} C^{03} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 \alpha \beta} D_\alpha R_\beta^3 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 3 \alpha \beta} D_\alpha R_\beta^0 + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 3 \alpha \beta} R^{\tau 0}_{\alpha\beta} \right] \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 12} D_1 R_2^3 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 13} D_1 R_3^3 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 21} D_2 R_1^3 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 23} D_2 R_3^3 \right. \\ &\quad + v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 31} D_3 R_1^3 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 0 32} D_3 R_2^3 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 3 01} D_0 R_1^0 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 3 02} D_0 R_2^0 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 3 10} D_1 R_0^0 \\ &\quad + v_\sigma \epsilon^{\sigma 3 12} D_1 R_2^0 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 3 20} D_2 R_0^0 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 3 21} D_2 R_1^0 + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 3 01} R^{\tau 0}_{01} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 3 02} R^{\tau 0}_{02} \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 3 10} R^{\tau 0}_{10} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 3 12} R^{\tau 0}_{12} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 3 20} R^{\tau 0}_{20} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 3 21} R^{\tau 0}_{21} \right]. \quad (D.27) \end{aligned}$$

Analisando as derivadas covariantes envolvidas nessa componente encontramos

$$\begin{aligned} D_1 R_2^3 &= 0, & D_1 R_3^3 &= 0, & D_2 R_1^3 &= 0, \\ D_2 R_3^3 &= 0, & D_3 R_1^3 &= 0, & D_3 R_2^3 &= 0, \end{aligned} \quad (D.28)$$

e as demais, $D_0 R_1^0$, $D_0 R_2^0$, $D_1 R_0^0$, $D_1 R_2^0$, $D_2 R_0^0$ e $D_2 R_1^0$ foram encontradas respectivamente nas equações (D.22), (D.13), (D.20), (D.4), (D.13) e (D.6). Fazendo tais substituições ficamos com

$$C^{03} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[-\frac{1}{a^2} v_2 + \frac{2e^x}{a^2} v_0 + v_{21} R^{10}_{01} - v_{12} R^{20}_{02} + v_{01} R^{10}_{12} \right], \quad (D.29)$$

usando as equações (D.15), (D.17) e (D.24) para as componentes do tensor de Riemann, podemos reescrever essa componente como

$$C^{03} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{1}{a^2} [v_2 - 2e^x v_0 - e^x v_{01}]. \quad (D.30)$$

5. Componente C^{11} :

$$\begin{aligned}
 C^{11} &= - \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma 1 \alpha \beta} D_\alpha R_\beta^1 + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 1 \alpha \beta} R^{\tau 1}{}_{\alpha\beta} \right] \\
 &= - \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma 102} D_0 R_2^1 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 103} D_0 R_3^1 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 120} D_2 R_0^1 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 123} D_2 R_3^1 \right. \\
 &\quad \left. + v_\sigma \epsilon^{\sigma 130} D_3 R_0^1 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 132} D_3 R_2^1 + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 102} R^{\tau 1}{}_{02} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 120} R^{\tau 1}{}_{20} \right].
 \end{aligned} \tag{D.31}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
 D_2 R_0^1 &= g^{11} D_2 R_{10} = g^{11} \left[\partial_2 R_{10} - \Gamma_{12}^\lambda R_{\lambda 0} - \Gamma_{20}^\lambda R_{\lambda 1} \right] \\
 &= \frac{e^x}{2a^2},
 \end{aligned} \tag{D.32}$$

$$D_0 R_2^1 = 0, \quad D_0 R_3^1 = 0, \quad D_2 R_3^1 = 0, \quad D_3 R_0^1 = 0, \tag{D.33}$$

e $D_3 R_2^1$ é dado em (D.13). As componentes do tensor de Riemann que aparecem em (D.31), $R^{\tau 1}{}_{20}$, são nulas. Assim, essa componente se torna,

$$C^{11} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{e^x}{2a^2} v_3. \tag{D.34}$$

6. Componente C^{12} :

$$\begin{aligned}
 C^{12} &= - \frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma 1 \alpha \beta} D_\alpha R_\beta^2 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 2 \alpha \beta} D_\alpha R_\beta^1 + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 2 \alpha \beta} R^{\tau 1}{}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 1 \alpha \beta} R^{\tau 2}{}_{\alpha\beta} \right] \\
 &= - \frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma 102} D_0 R_2^2 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 103} D_0 R_3^2 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 120} D_2 R_0^2 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 123} D_2 R_3^2 \right. \\
 &\quad + v_\sigma \epsilon^{\sigma 130} D_3 R_0^2 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 132} D_3 R_2^2 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 201} D_0 R_1^1 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 203} D_0 R_3^1 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 210} D_1 R_0^1 \\
 &\quad + v_\sigma \epsilon^{\sigma 213} D_1 R_3^1 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 230} D_3 R_0^1 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 231} D_3 R_1^1 + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 201} R^{\tau 1}{}_{01} \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 210} R^{\tau 1}{}_{10} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 102} R^{\tau 2}{}_{02} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 120} R^{\tau 2}{}_{20} \right].
 \end{aligned} \tag{D.35}$$

Aqui encontramos que

$$\begin{aligned}
 D_0 R_1^1 &= 0, \quad D_0 R_2^2 = 0, \quad D_0 R_3^2 = 0, \\
 D_1 R_0^1 &= 0, \quad D_2 R_0^2 = 0, \quad D_3 R_0^2 = 0,
 \end{aligned} \tag{D.36}$$

e as demais, $D_0 R_3^1$, $D_1 R_3^1$, $D_2 R_3^2$, $D_3 R_0^1$, $D_3 R_1^1$ e $D_3 R_2^2$, foram dadas nas equações (D.13), (D.22) e (D.33). Substituindo esses resultados, a componente C^{12} fica sendo

$$C^{12} = - \frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[-v_{30} R^{01}{}_{01} - v_{32} R^{21}{}_{01} + v_{30} R^{02}{}_{02} \right]. \tag{D.37}$$

Obtemos ainda que

$$R^{01}{}_{01} = g^{00}g^{11}R_{0101} + g^{02}g^{11}R_{2101} = \frac{1}{2a^2}, \quad (\text{D.38})$$

$$R^{21}{}_{01} = g^{22}g^{11}R_{2101} + g^{20}g^{11}R_{0101} = 0, \quad (\text{D.39})$$

$$R^{02}{}_{02} = g^{00}g^{22}R_{0202} + g^{02}g^{02}R_{2002} = \frac{1}{2a^2}. \quad (\text{D.40})$$

Logo,

$$C^{12} = 0. \quad (\text{D.41})$$

7. Componente C^{13} :

$$\begin{aligned} C^{13} &= - \frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma 1 \alpha \beta} D_\alpha R_\beta^3 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 3 \alpha \beta} D_\alpha R_\beta^1 + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 3 \alpha \beta} R^{\tau 1}{}_{\alpha\beta} \right] \\ &= - \frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma 102} D_0 R_2^3 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 103} D_0 R_3^3 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 120} D_2 R_0^3 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 123} D_2 R_3^3 \right. \\ &\quad + v_\sigma \epsilon^{\sigma 130} D_3 R_0^3 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 132} D_3 R_2^3 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 301} D_0 R_1^1 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 302} D_0 R_2^1 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 310} D_1 R_0^1 \\ &\quad + v_\sigma \epsilon^{\sigma 312} D_1 R_2^1 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 320} D_2 R_0^1 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 321} D_2 R_1^1 + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 301} R^{\tau 1}{}_{01} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 302} R^{\tau 1}{}_{02} \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 310} R^{\tau 1}{}_{10} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 312} R^{\tau 1}{}_{12} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 320} R^{\tau 1}{}_{20} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 321} R^{\tau 1}{}_{21} \right]. \quad (\text{D.42}) \end{aligned}$$

As derivadas covariantes que iremos precisar aqui são

$$D_0 R_2^3 = 0, \quad D_0 R_3^3 = 0, \quad D_2 R_0^3 = 0, \quad D_3 R_0^3 = 0, \quad D_3 R_2^3 = 0, \quad (\text{D.43})$$

as outras derivadas, $D_0 R_2^1$, $D_0 R_1^1$, $D_1 R_0^1$, $D_1 R_2^1$, $D_2 R_0^1$, $D_2 R_1^1$ e $D_2 R_3^3$, já foram dadas nas equações (D.3), (D.13), (D.28), (D.32), (D.33) e (D.36). Assim,

$$C^{13} = - \frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[\frac{e^x}{2a^2} v_1 + v_{20} R^{01}{}_{01} + v_{22} R^{21}{}_{01} + v_{00} R^{01}{}_{12} + v_{02} R^{21}{}_{12} \right]. \quad (\text{D.44})$$

Usando os resultados, (D.17), (D.25), (D.38) e (D.39), reescrevemos essa componente como

$$C^{13} = - \frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{1}{2a^2} [e^x v_1 + v_{20} - 2e^x v_{00} + v_{02}]. \quad (\text{D.45})$$

8. Componente C^{22} :

$$\begin{aligned} C^{22} &= - \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma 2 \alpha \beta} D_\alpha R_\beta^2 + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 2 \alpha \beta} R^{\tau 2}{}_{\alpha\beta} \right] \\ &= - \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma 201} D_0 R_1^2 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 203} D_0 R_3^2 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 210} D_1 R_0^2 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 213} D_1 R_3^2 \right. \end{aligned}$$

$$+ v_\sigma \epsilon^{\sigma 230} D_3 R_0^2 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 231} D_3 R_1^2 + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 201} R^{\tau 2}_{01} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 210} R^{\tau 2}_{10} \Big]. \quad (\text{D.46})$$

Temos que

$$D_0 R_1^2 = 0, \quad (\text{D.47})$$

$$\begin{aligned} D_1 R_0^2 &= g^{22} D_1 R_{20} + g^{20} D_1 R_{00} \\ &= g^{22} [\partial_1 R_{20} - \Gamma_{12}^\lambda R_{\lambda 0} - \Gamma_{10}^\lambda R_{\lambda 2}] + g^{20} [\partial_1 R_{00} - 2\Gamma_{10}^\lambda R_{\lambda 0}] \\ &= -\frac{e^{-x}}{a^2}, \end{aligned} \quad (\text{D.48})$$

e que, $D_0 R_3^2$, $D_1 R_3^2$, $D_3 R_0^2$ e $D_3 R_1^2$ foram dadas em (D.22) e em (D.36). Fazendo essas substituições ficamos com

$$C^{22} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[-\frac{e^{-x}}{a^2} v_3 - v_{31} R^{12}_{01} \right]. \quad (\text{D.49})$$

Mas, de (D.39) sabemos que $R^{12}_{01} = 0$, então

$$C^{22} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{e^{-x}}{a^2} v_3. \quad (\text{D.50})$$

9. Componente C^{23} :

$$\begin{aligned} C^{23} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma 2\alpha\beta} D_\alpha R_\beta^3 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 3\alpha\beta} D_\alpha R_\beta^2 + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 3\alpha\beta} R^{\tau 2}_{\alpha\beta} \right] \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma 201} D_0 R_1^3 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 203} D_0 R_3^3 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 210} D_1 R_0^3 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 213} D_1 R_3^3 \right. \\ &\quad + v_\sigma \epsilon^{\sigma 230} D_3 R_0^3 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 231} D_3 R_1^3 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 301} D_0 R_1^2 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 302} D_0 R_2^2 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 310} D_1 R_0^2 \\ &\quad + v_\sigma \epsilon^{\sigma 312} D_1 R_2^2 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 320} D_2 R_0^2 + v_\sigma \epsilon^{\sigma 321} D_2 R_1^2 + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 301} R^{\tau 2}_{01} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 302} R^{\tau 2}_{02} \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 310} R^{\tau 2}_{10} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 312} R^{\tau 2}_{12} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 320} R^{\tau 2}_{20} + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 321} R^{\tau 2}_{21} \right]. \quad (\text{D.51}) \end{aligned}$$

As derivadas nos fornecem

$$D_0 R_1^3 = 0, \quad D_1 R_0^3 = 0, \quad (\text{D.52})$$

e as demais, $D_0 R_1^2$, $D_0 R_2^2$, $D_0 R_3^3$, $D_1 R_0^2$, $D_1 R_2^2$, $D_1 R_3^3$, $D_2 R_0^2$, $D_2 R_1^2$, $D_3 R_0^3$ e $D_3 R_1^3$, já foram dadas em (D.21), (D.22), (D.28), (D.33), (D.36), (D.43) e (D.48). Usando esses resultados encontramos

$$C^{23} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \left[\frac{e^{-x}}{a^2} v_2 - \frac{1}{a^2} v_0 + v_{21} R^{12}_{01} - v_{10} R^{02}_{02} + v_{01} R^{12}_{12} \right]. \quad (\text{D.53})$$

Com os resultados obtidos em (D.25), (D.39) e (D.40) para as componentes do tensor de Riemann, nós podemos reescrever essa componente como

$$C^{23} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{1}{2a^2} \left[-2e^{-x}v_2 + 2v_0 + v_{10} + v_{01} \right]. \quad (\text{D.54})$$

10. Componente C^{33} :

$$C^{33} = - \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[v_\sigma \epsilon^{\sigma 3 \alpha \beta} D_\alpha R_\beta^3 + \frac{1}{2} v_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma 3 \alpha \beta} R^{\tau 3}{}_{\alpha\beta} \right]. \quad (\text{D.55})$$

Analisando os termos envolvidos nessa componente observamos que

$$D_\alpha R_\beta^3 = g^{33} D_\alpha R_{3\beta} = g^{33} \left[\partial_\alpha R_{3\beta} - \Gamma_{\alpha 3}^\lambda R_{\lambda\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda R_{3\lambda} \right] = 0, \quad (\text{D.56})$$

e

$$R^{\tau 3}{}_{\alpha\beta} = g^{33} R^\tau{}_{3\alpha\beta} = 0. \quad (\text{D.57})$$

Portanto,

$$C^{33} = 0. \quad (\text{D.58})$$

Referências

- [1] V. A. Kostelecký e S. Samuel, *Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry in String Theory*, Phys. Rev. D **39**, 683 (1989); *Phenomenological Gravitational Constraints on Strings and Higher Dimensional Theories*, Phys. Rev. Lett. **63**, 224 (1989); *Gravitational Phenomenology in Higher Dimensional Theories and Strings*, Phys. Rev. D **40**, 1886 (1989).
- [2] F. W. Stecker, *Gamma-ray and cosmic-ray tests of Lorentz invariance violation and quantum gravity models and their implications*, arXiv: 0912.0500 [hep-ph].
- [3] D. Colladay e V. A. Kostelecký, *CPT violation and the standard model*, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997), hep-ph/9703464; *Lorentz violating extension of the standard model*, Phys. Rev. D **58** 116002 (1998), hep-ph/9809521.
- [4] L. H. Ryder, *Quantum field theory*, Cambridge University Press, 1996.
- [5] C. Quigg, *Gauge theories of the strong, weak and electromagnetic interactions*, Westview Press, 1997.
- [6] M. Kaku, *Quantum field theory - A modern introduction*, Oxford University Press, 1993.
- [7] S. Coleman, *Aspects of symmetry*, Cambridge University Press, 1985.
- [8] V. A. Kostelecký, *Gravity, Lorentz violation, and the standard model*, Phys. Rev. D **69**, 105009 (2004), hep-th/0312310.
- [9] R. Bluhm, *Overview of the SME: Implications and phenomenology of Lorentz violation*, Lect. Notes Phys. **702**, 191 (2006), hep-ph/0506054.
- [10] D. Colladay, *Possible spontaneous breaking of Lorentz and CPT symmetry*, Phys. Atomic Nuclei **63**, 1097 (2000), hep-ph/9907565.
- [11] D. Colladay, *Spontaneous violation of Lorentz and CPT symmetry*, hep-th/0103021.
- [12] O. Bertolami, *On the spontaneous breaking of lorentz invariance*, Nucl. Phys. B **88**, 49 (2000).
- [13] A. Jenkins, *Spontaneous breaking of Lorentz invariance*, Phys. Rev. D **69**, 105007 (2004), hep-th/0311127.
- [14] J. Goldstone, A. Salam e S. Weinberg, *Broken Symmetries*, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).
- [15] W. Gilbert, *Broken symmetries and massless particles*, Phys. Rev. Lett. **12**, 713 (1964).

- [16] A. Klein e B. W. Lee, *Does spontaneous breakdown of symmetry imply zero-mass particles?*, Phys. Rev. Lett **12**, 266 (1964).
- [17] P. W. Higgs, *Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons*, Phys. Rev. **145**, 1156 (1966).
- [18] P. R. Phillips, *Is the graviton a Goldstone boson?*, Phys. Rev. **146**, 966 (1966).
- [19] H. C. Ohanian, *Gravitons as Goldstone bosons*, Phys. Rev. **184**, 1305 (1969).
- [20] J. Bjorken, *Emergent gauge bosons*, hep-th/0111196.
- [21] R. Bluhm e V. A. Kostelecky, *Spontaneous Lorentz violation, Nambu-Goldstone modes, and gravity*, Phys. Rev. D **71**, 065008 (2005), hep-th/0412320.
- [22] R. Bluhm, *Spontaneous Lorentz violation, gravity and Nambu-Goldstone modes*, arXiv: 0704.2994 [gr-qc].
- [23] R. Bluhm, *Nambu-Goldstone and massive modes in gravitational theories with spontaneous Lorentz breaking*, arXiv: 0801.1711 [gr-qc].
- [24] R. Bluhm, *Nambu-goldstone modes in gravitational theories with spontaneous Lorentz breaking*, Int. J. Mod. Phys. D **16**, 2357 (2008), hep-th/0607127.
- [25] R. Bluhm, *Effects of Spontaneous Lorentz Violation in Gravity*, PoS QG-PH, **009** (2007), arXiv: 0801.0141 [gr-qc].
- [26] R. Bluhm, S-H Fung e V. A. Kostelecky, *Spontaneous Lorentz and Diffeomorphism Violation, Massive Modes, and Gravity*, Phys. Rev. D **77**, 065020 (2008), arXiv: 0712.4119 [hep-th].
- [27] M. D. Seifert, *Generalized bumblebee models and Lorentz-violating electrodynamics*, arXiv: 0909.3118 [hep-ph].
- [28] S. R. Coleman e E. Weinberg, *Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking*, Phys. Rev. D **7**, 1888 (1973).
- [29] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, *Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity*, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
- [30] L. Cervi, L. Griguolo e D. Seminara, *The Structure of radiatively induced Lorentz and CPT violation in QED at finite temperature*, Phys. Rev. D **64**, 105003 (2001), hep-th/0104022.
- [31] M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento e A. J. da Silva, *Dynamical Lorentz and CPT symmetry breaking in a 4D four-fermion model*, Phys. Rev. D **77**, 105002 (2008), arXiv: 0709.2904 [hep-th].
- [32] M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento, A. F. Santos, A. Yu. Petrov e A. J. da Silva, *Dynamical Lorentz symmetry breaking in a 4D four-fermion model at finite temperature*, arXiv: 0812.4394 [hep-th].
- [33] L. H. Ford, *Vacuum polarization in a nonsimply connected space-time*, Phys. Rev. D **21**, 933 (1980).

- [34] O. Bertolami, R. Lehnert, R. Potting e A. Ribeiro, *Cosmological acceleration, varying couplings, and Lorentz breaking*, Phys. Rev. D **69**, 083513 (2004), astro-ph/0310344.
- [35] O. Bertolami, *Lorentz invariance and the cosmological constant*, Class. Quant. Grav. **14**, 2785 (1997), gr-qc/9706012; P. G. Ferreira, B. M. Gripaios, R. Saffari e T. G. Zlosnik, *The Cosmology of a Universe with Spontaneously-Broken Lorentz Symmetry*, Phys. Rev. D **75**, 044014 (2007), astro-ph/0610125; S. M. Carroll e E. A. Lim, *Lorentz-violating vector fields slow the universe down*, Phys. Rev. D **70**, 123525 (2004), hep-th/0407149; J. W. Moffat e V. T. Toth, *Modified Gravity: Cosmology without dark matter or Einstein's cosmological constant*, arXiv: 0710.0364 [astro-ph]; L. Grisa, *Lorentz-violating massive gravity in curved space*, arXiv: 0803.1137 [hep-th].
- [36] S. M. Carroll, *Aether compactification*, Phys. Rev. D **78**, 044047 (2008), arXiv: 0802.0521 [hep-ph].
- [37] R. Obousy e G. Cleaver, *Radius destabilization in five dimensional orbifolds from Lorentz violating fields*, Mod. Phys. Lett. A **24**, 1495 (2009), arXiv: 0805.0019 [gr-qc].
- [38] T. G. Rizzo, *Pedagogical introduction to extra dimensions*, hep-ph/0409309.
- [39] J. Ponce de Leon, *FLRW universes from wave-like cosmologies in 5D*, Int. J. Mod. Phys. D **12**, 1053 (2003), gr-qc/0212036; F. Darabi, *Accelerating universe in a 5D cosmology*, arXiv: 0708.3835 [gr-qc]; C. W. Zhang, H. X. Lui, L. H. Xu e P. S. Wesson, *Universe evolution in a 5D Ricci-flat cosmology*, Mod. Phys. Lett. A **21**, 571 (2006), astro-ph/0602414.
- [40] L. Ackerman, S. M. Carroll e M. B. Wise, *Imprints of a primordial preferred direction on the microwave background*, Phys. Rev. D **75**, 083502 (2007), astro-ph/0701357.
- [41] E. Alvarez e M. B. Gavela, *Entropy from extra dimensions*, Phys. Rev. Lett. **51**, 931 (1983).
- [42] J. A. Gu e W. Y. P. Hwang, *Accelerating universe from the evolution of extra dimensions*, Phys. Rev. D **66**, 024003 (2002), astro-ph/0112565.
- [43] T. Bringmann, M. Eriksson e M. Gustafsson, *Cosmological evolution of homogeneous universal extra dimensions*, Phys. Rev. D **68**, 063516 (2003), astro-ph/0303497.
- [44] S. M. Carroll, *An introduction to general relativity spacetime and geometry*, Addison-Wesley, 2004.
- [45] D. Jain, A. Dev e J. S. Alcaniz, *Cosmological bounds on oscillating dark energy models*, Phys. Lett. B **656**, 15 (2007), arXiv: 0709.4234 [astro-ph].
- [46] E. Komatsu, et. al., *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation*, Astrophys. J. Suppl. **180**, 330 (2009), arXiv: 0803.0547 [astro-ph].

- [47] R. S. van Dyck, P. B. Schwinberg e H. G. Dehmelt, *New high-precision comparison of electron and positron g factors*, Phys. Rev. Lett. **59**, 26 (1987); R. Bluhm, V. A. Kostelecký e N. Russel, *Testing CPT with anomalous magnetic moments*, Phys. Rev. Lett. **79**, 1432 (1997), hep-ph/9707364.
- [48] P. L. Stanwix *et al.*, *Test of Lorentz invariance in electrodynamics using rotating cryogenic sapphire microwave oscillators*, Phys. Rev. Lett. **95**, 040404 (2005), hep-ph/0506074; S. Herrmann *et al.*, *Test of the isotropy of the speed of light using a continuously rotating optical resonator*, Phys. Rev. Lett. **95**, 150401 (2005), physics/0508097.
- [49] B. Schwingenheuer *et al.*, *CPT tests in the neutral kaon system*, Phys. Rev. Lett. **74**, 4376 (1995); L. K. Gibbons *et al.*, *CP and CPT symmetry test from the two pion decays of the neutral kaon with the Fermilab E731 detector*, Phys. Rev. D **55**, 6625 (1997).
- [50] J. S. Dias, V. A. Kostelecký e M. Mewes, *Perturbative Lorentz and CPT violation for neutrino and antineutrino oscillations*, Phys. Rev. D **80**, 076007 (2009), arXiv: 0908.1401 [hep-ph].
- [51] J. S. Díaz, *Long-baseline neutrino experiments as tests for Lorentz violation*, arXiv: 0909.5360 [hep-ph].
- [52] V. A. Kostelecký, *CPT and Lorentz Symmetry*, (World Scientific, Singapore 1999); V. A. Kostelecký, *CPT and Lorentz Symmetry II*, (World Scientific, Singapore 2002); V. A. Kostelecký, *CPT and Lorentz Symmetry III*, (World Scientific, Singapore 2005); V. A. Kostelecký, *CPT and Lorentz Symmetry IV*, (World Scientific, Singapore 2008).
- [53] R. Bluhm, *Overview of the SME: Implications and phenomenology of Lorentz violation*, Lect. Notes Phys. **702**, 191 (2006), hep-th/0506054.
- [54] W. Bietenholz, *Cosmic Rays and the Search for a Lorentz Invariance Violation*, arXiv: 0806.3713 [hep-ph].
- [55] D. Mattingly, *Modern tests of Lorentz invariance*, Living Rev. Relativity **8**, 5 (2005), gr-qc/0502097.
- [56] R. Lehnert, *CPT and Lorentz-symmetry breaking: A Review*, hep-ph/0611177.
- [57] T. Jacobson, S. Liberati e D. Mattingly, *Lorentz violation at high energy: Concepts, phenomena and astrophysical constraints*, Annals Phys. **321**, 150 (2006), astro-ph/0505267.
- [58] O. W. Greenberg, *CPT violation implies violation of Lorentz invariance*, Phys. Rev. Lett. **89**, 231602 (2002), hep-ph/0201258.
- [59] V. A. Kostelecký e Lehnert, *Stability, causality, and Lorentz and CPT violation*, Phys. Rev. D **63**, 065008 (2001), hep-th/0012060.
- [60] V. A. Kostelecký, C. D. Lane e A. G. M. Pickering, *One loop renormalization of Lorentz violating electrodynamics*, Phys. Rev. D **65**, 056006 (2002), hep-th/0111123.

- [61] S. Carroll, G. Field e R. Jackiw, *Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics*, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).
- [62] S. Coleman e S. L. Glashow, *High-energy tests of Lorentz invariance*, Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999), hep-ph/9812418.
- [63] R. Jackiw e V.A. Kostelecky, *Radiatively induced Lorentz and CPT violation in electrodynamics*, Phys. Rev. Lett. **82**, 3572 (1999), hep-ph/9901358.
- [64] M. Pérez-Victoria, *Exact calculation of the radiatively induced Lorentz and CPT violation in QED*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2518 (1999), hep-th/9905061; *Physical (ir)relevance of ambiguities to Lorentz and CPT violation in QED*, J. High Energy Phys. **0104**, 032 (2001), hep-th/0102021.
- [65] D. Bazeia, T. Mariz, J. R. Nascimento, E. Passos e R. F. Ribeiro, *Lorentz and CPT symmetries in commutative and noncommutative space-time*, J. Phys. A **36**, 4937 (2003), hep-th/0303122.
- [66] R. Jackiw, *When radiative corrections are finite but undetermined*, Int. J. Mod. Phys. B **14**, 2011 (2000), hep-th/9903044.
- [67] J. R. Nascimento, R. F. Ribeiro e N. F. Svaiter, *Radiatively induced Lorentz and CPT violation in QED at finite temperature*, hep-th/0012039.
- [68] D. Ebert, V. C. Zhukovsky e A. S. Razumovsky, *Chern-Simons - like term generation in an extended model of QED under external conditions*, Phys. Rev. D **70**, 025003 (2004), hep-th/0401241.
- [69] T. Mariz, J. R. Nascimento, E. Passos, R. F. Ribeiro e F. A. Brito, *A Remark on Lorentz violation at finite temperature*, J. High Energy Phys. **10**, 019 (2005), hep-th/0509008.
- [70] T. Mariz, J. R. Nascimento e E. Passos, *Remarks on Lorentz and CPT violation in field theory*, Braz. J. Phys. **36**, 1171 (2006), hep-th/0609021.
- [71] M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A. F. Santos e A. J. da Silva, *Free energy of Lorentz-violating QED at high temperature*, Phys. Rev. D **81**, 045013 (2010), arXiv: 0910.4560 [hep-th].
- [72] R. Casana, M. M. Ferreira e J. S. Rodrigues, *Lorentz-violating contributions of the Carroll-Field-Jackiw model to the CMB anisotropy*, Phys. Rev. D **78**, 125013 (2008), arXiv: 0810.0306 [hep-th].
- [73] P. Arias, H. Falomir, J. Gamboa, F. Mendes e F. A. Schaposnik, *Chiral Anomaly Beyond Lorentz Invariance*, Phys. Rev. D **76**, 025019 (2007), arXiv: 0705.3263 [hep-th].
- [74] F. T. Brandt, J. Frenkel e C. Muramoto, *On the free energy of noncommutative quantum electrodynamics at high temperature*, Nucl. Phys. B **754**, 146 (2006), hep-th/0605240; *Fermionic Contributions to the Free Energy of Noncommutative Quantum Electrodynamics at High Temperature*, Phys. Lett. B **649**, 483 (2007), hep-th/0703242.

- [75] J. Kapusta, *Finite-temperature field theory*, Cambridge University Press, 1989.
- [76] J. O. Andersen, *Thermal effects in low temperature QED*, Phys. Rev. D **65**, 025014 (2001), hep-ph/0103285; *The free energy of high temperature QED to order e^{*5} from effective field theory*, Phys. Rev. D **53**, 7286 (1996), hep-ph/9509409.
- [77] J. O. Andersen, *On effective field theories at finite temperature*, hep-ph/9709331.
- [78] P. Arnold e C. Zhai, *The Three loop free energy for pure gauge QCD*, Phys. Rev. D **50**, 7603 (1994), hep-ph/9408276; *The Three loop free energy for high temperature QED and QCD with fermions*, Phys. Rev. D **51**, 1906 (1995), hep-ph/9410360.
- [79] C. Coriano e R. R. Parwani, *The Three loop equation of state of QED at high temperature*, Phys. Rev. Lett. **73**, 2398 (1994), hep-ph/9405343.
- [80] C. Zhai e B. M. Kastening, *The Free energy of hot gauge theories with fermions through g^{*5}* , Phys. Rev. D **52**, 7232 (1995), hep-ph/9507380.
- [81] R. R. Parwani e C. Coriano, *Higher order corrections to the equation of state of QED at high temperature*, Nucl. Phys. B **434**, 56 (1995), hep-ph/9409269.
- [82] E. Braaten e A. Nieto, *Effective field theory approach to high temperature thermodynamics*, Phys. Rev D **51**, 6990 (1995), hep-ph/9501375; *Free energy of QCD at high temperature*, Phys. Rev. D **53**, 3421 (1996), hep-ph/9510408.
- [83] A. Vuorinen, *The Pressure of QCD at finite temperatures and chemical potentials*, Phys. Rev D **68**, 054017 (2003), hep-ph/0305183.
- [84] J. O. Andersen, M. Strickland e N. Sun, *Three-loop HTL Free Energy for QED*, Phys. Rev. D **80**, 085015 (2009), arXiv: 0906.2936 [hep-ph].
- [85] L. Dolan e R. Jackiw, *Symmetry Behavior at Finite Temperature*, Phys. Rev. D **9**, 3320 (1974).
- [86] D. A. Dicus, E. W. Kolb, A. M. Gleeson, E. C. G. Sudarshan, V. L. Teplitz e M. S. Turner, *Primordial Nucleosynthesis Including Radiative, Coulomb, and Finite Temperature Corrections to Weak Rates*, Phys. Rev. D **26**, 2694 (1982).
- [87] A. Heckler, *Astrophysical applications of quantum corrections to the equation of state of a plasma*, Phys. Rev. D **49**, 611 (1994).
- [88] R. E. Lopez e M. S. Turner, *An Accurate calculation of the big bang prediction for the abundance of primordial helium*, Phys. Rev. D **59**, 103502 (1999), astro-ph/9807279.
- [89] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, J. Wiley, New York, 1972.
- [90] F. Iocco, G. Mangano, G. Miele, O. Pisanti e P. D. Serpico, *Primordial Nucleosynthesis: from precision cosmology to fundamental physics*, Phys. Rept. **472**, 1 (2009), arXiv: 0809.0631 [astro-ph].
- [91] V. A. Kostelecky e N. Russell, *Data tables for lorentz and CPT violation*, arXiv: 0801.0287 [hep-ph].

- [92] C. D. Lane, *Probing Lorentz violation with Doppler-shift experiments*, Phys. Rev. D **72**, 016005 (2005), hep-ph/0505130.
- [93] J. Polchinski, *String theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [94] S. Perlmutter, et. al., *Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999), astro-ph/9812133.
- [95] A. G. Riess, et. al., *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astron. J. **116**, 1009 (1998), astro-ph/9805201.
- [96] T. P. Sotiriou e V. Faraoni, *F(R) theories of gravity*, arXiv: 0805.1726 [gr-qc].
- [97] F. S. N. Lobo, *The dark side of gravity: Modified theories of gravity*, arXiv: 0807.1640 [gr-qc].
- [98] R. Jackiw e S.-Y. Pi, *Chern-Simons modification of general relativity*, Phys. Rev. D **68**, 104012 (2003), gr-qc/0308071.
- [99] S. Alexander e N. Yunes, *Chern-Simons Modified Gravity as a Torsion Theory and its Interaction with Fermions*, Phys. Rev. D **77**, 124040 (2008), arXiv: 0804.1797 [gr-qc].
- [100] S. Alexander e N. Yunes, *Parametrized post-Newtonian expansion of Chern-Simons gravity*, Phys. Rev. D **75**, 124022 (2007), arXiv: 0704.0299 [hep-th].
- [101] S. Weinberg, *Effective Field Theory for Inflation*, Phys. Rev. D **77**, 123541 (2008), arXiv: 0804.4291 [hep-th].
- [102] D. Grumiller e N. Yunes, *How do Black Holes Spin in Chern-Simons Modified Gravity?*, Phys. Rev. D **77**, 044015 (2008), arXiv: 0711.1868 [gr-qc] .
- [103] N. Yunes e F. Pretorius, *Dynamical Chern-Simons Modified Gravity. I. Spinning Black Holes in the Slow-Rotation Approximation*, Phys. Rev. D **79**, 084043 (2009), arXiv: 0902.4669 [gr-qc].
- [104] K. Konno, T. Matsuyama e S. Tanda, *Rotating black hole in extended Chern-Simons modified gravity*, Prog. Theor. Phys. **122**, 561 (2009), arXiv: 0902.4767 [gr-qc].
- [105] T. L. Smith, A. L. Erickcek, R. R. Caldwell e M. Kamionkowski, *The Effects of Chern-Simons gravity on bodies orbiting the Earth*, Phys. Rev. D **77**, 024015 (2008), astro-ph/0708.0001.
- [106] A. Lue, L. Wang e M. Kamionkowski, *Cosmological signature of new parity violating interactions*, Phys. Rev. Lett. **83**, 1506 (1999), astro-ph/9812088.
- [107] S. Alexander, *Is cosmic parity violation responsible for the anomalies in the WMAP data?*, Phys. Rev. Lett. B **660**, 444 (2008), hep-th/0601034.
- [108] D. Guarrera e A. J. Hariton, *Papapetrou Energy-Momentum Tensor for Chern-Simons Modified Gravity*, Phys. Rev. D **76**, 044011 (2007), gr-qc/0702029.
- [109] R. Jackiw, *Lorentz violation in a diffeomorphism-invariant theory*, arXiv: 0709.2348 [hep-th].

- [110] K. Konno, T. Matsuyama, Y. Asano e S. Tanda, *Flat rotation curves in Chern-Simons modified gravity*, Phys. Rev. D **78**, 024037 (2008), arXiv: 0807.0679 [gr-qc].
- [111] D. Grumiller, R. Mann e R. McNees, *Dirichlet boundary value problem for Chern-Simons modified gravity*, Phys. Rev. D **78**, 081502 (2008), arXiv: 0803.1485 [gr-qc].
- [112] T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, L. Y. Santos e A. J. da Silva, *Lorentz violation and the proper-time method*, Phys. Lett. B **661**, 312 (2008), arXiv: 0708.3348 [hep-th]; M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, E. Passos e A. J. da Silva, *On the ambiguities in the effective action in Lorentz-violating gravity*, Phys. Rev. D **78**, 025029 (2008), arXiv: 0805.4409 [hep-th].
- [113] S. Alexander e N. Yunes, *Chern-Simons modified general relativity*, Phys. Rept. **480**, 1 (2009), arXiv: 0907.2562 [hep-th].
- [114] K. Gödel, *An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation*, Rev. Mod. Phys. **21**, 447 (1949).
- [115] S. Hawking, *The chronology protection conjecture*, Phys. Rev. D **46**, 603 (1992).
- [116] M. Rebouças e J. Tiomno, *On the homogeneity of riemannian space-times of Gödel type*, Phys. Rev. D **28**, 1251 (1983); M. Rebouças, M. Aman e A. F. F. Teixeira, *A note on Gödel type space-times*, J. Math. Phys. **27**, 1370 (1985); M. O. Galvão, M. Rebouças, A. F. F. Teixeira e W. M. Silva Jr., *Notes on a class of homogeneous space-times*, J. Math. Phys. **29**, 1127 (1988).
- [117] M. Novello e M. J. Rebouças, *Rotating universe with successive causal and noncausal regions*, Phys. Rev. D **19**, 2850 (1979).
- [118] A. K. Raychaudhuri e S. N. G. Thakurta, *Homogeneous space-times of the Gödel type*, Phys. Rev. D **22**, 802 (1980).
- [119] F. C. Sousa, J. B. Fonseca e C. Romero, *Equivalence of three-dimensional spacetimes*, arXiv: 0705.0758 [gr-qc].
- [120] M. Dabrowski e J. Garecki, *Superenergy and supermomentum of Gödel universes*, Class. Quant. Grav. **19**, 1 (2002), gr-qc/0102092.
- [121] J. Barrow e M. Dabrowski, *Gödel universes in string theory*, Phys. Rev. D **58**, 103502 (1998), gr-qc/9803048; P. Kanti, C. E. Vayonakis, *Gödel type universes in string inspired charged gravity*, Phys. Rev. D **60**, 103519 (1999), gr-qc/9905032.
- [122] T. Harmark e T. Takayanagi, *Supersymmetric Gödel Universes in String Theory*, Nucl. Phys. B **662**, 3 (2003), hep-th/0301206.
- [123] O. Bertolami e F. Lobo, *Time and causation*, NeuroQuantol. **7**, 1 (2009), arXiv: 0902.0559 [gr-qc].
- [124] X. He, B. Wang e S. Chen, *Quasinormal modes of charged squashed Kaluza-Klein black holes in the Gödel Universe*, Phys. Rev. D **79**, 084005 (2009), arXiv: 0811.2322 [gr-qc].

- [125] D. Brecher, U. H. Danielsson, J. P. Gregory e M. E. Olsson, *Rotating Black Holes in a Gödel Universe*, J. High Energy Phys. **0311**, 033 (2003), arXiv: hep-th/0309058.
- [126] J. B. F. Neto, C. Romero e F. Dahia, *Gödel's universe and induced-matter theory*, Braz. journal of Phys. **35**, 1067 (2005).
- [127] K. Gödel, Gen. Rel. and Grav. **32**, 1419 (2000).
- [128] J. D. Barrow e C. Tsagas, *Dynamics and stability of the Gödel universe*, Class. Quant. Grav. **21**, 1773 (2004), gr-qc/0308067; *The Gödel brane*, Phys. Rev. D **69**, 064007 (2004), gr-qc/0309030; T. Clifton e J. Barrow, *The Existence of Gödel, Einstein and de Sitter universes*, Phys. Rev. D **72**, 123003 (2005), gr-qc/0511076.
- [129] M. Gurses, A. Karasu e O. Sarioglu, *Gödel-type metrics in various dimensions*, Class. Quant. Grav. **22**, 1527 (2005), hep-th/0312290.
- [130] H. M. Raval e P. C. Vaidya, *On generalizations of Gödel's universe*, Annales De L'I.H. P. Section A **1**, 21 (1966).
- [131] N. Drukker, B. Fiol e J. Simón, *Gödel's universe in a supertube shroud*, Phys. Rev. Lett. **91**, 231601 (2003), hep-th/0306057.
- [132] M. J. Rebouças e J. Santos, *Gödel-type universes in $f(R)$ gravity*, Phys. Rev. D **80**, 063009 (2009), arXiv: 0906.5354 [astro-ph].
- [133] E. K. Boyda, S. Ganguli, P. Horava e U. Varadarajan, *Holographic Protection of Chronology in Universes of the Gödel Type*, Phys. Rev. D **67**, 106003 (2003), hep-th/0212087.
- [134] S. Carneiro, *A Gödel-Friedman cosmology?*, Phys. Rev. D **61**, 083506 (2006), gr-qc/9809043.
- [135] C. Furtado, T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov e A. F. Santos, *The Gödel solution in modified gravity*, Phys. Rev. D **79**, 124039 (2009), arXiv: 0906.0554 [hep-th].
- [136] J. A. S. Lima, *Alternative dark energy models: An Overview*, Braz. J. Phys. **34**, 194 (2004), astro-ph/0402109.
- [137] J. S. Alcaniz, *Dark energy and some alternatives: a brief overview*, Braz. J. Phys. **36**, 1109 (2006), astro-ph/0608631.
- [138] J. V. Narlikar, J.-C. Pecker e J.-P. Vigiér, *Some consequences of a spatially varying cosmological constant in a spherically symmetric distribution of matter*, J. Astrophys. Astr. **12**, 7 (1991).
- [139] S. Ray e S. Bhadra, *Energy density in general relativity: A Possible role of cosmological constant*, Phys. Lett. A **322**, 150 (2004), gr-qc/0212119.
- [140] S. Ray, S. Bhadra e A. Sengupta, *Relativistic anisotropic charged fluid spheres with varying cosmological constant*, Astrophys. Space Sci. **315**, 341 (2008), gr-qc/0310133.
- [141] S. Ray, F. Rahaman e U. Mukhopadhyay, *Scenarios of cosmic string with variable cosmological constant*, Int. J. Mod. Phys. D **18**, 781 (2009), astro-ph/0610519.

-
- [142] F. Rahaman, M. Kalam, M. Sarker, A. Ghosh e B. Raychaudhuri, *Wormhole with varying cosmological constant*, Gen. Rel. Grav. **39**, 145 (2007), gr-qc/0611133.