

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

André Alencar da Costa

*Algumas Contribuições ao Estudo do
Comportamento de Sistemas Quânticos na Presença
de um Buraco Negro com Rotação*

João Pessoa

2010

André Alencar da Costa

***Algumas Contribuições ao Estudo do
Comportamento de Sistemas Quânticos na Presença
de um Buraco Negro com Rotação***

Dissertação de mestrado apresentada à
Coordenação do Programa de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal da Paraíba
como parte dos requisitos para a obtenção do
grau de Mestre em Física.

Orientador:
Valdir Barbosa Bezerra

João Pessoa

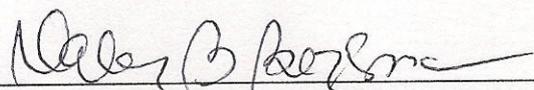
2010

C837a Costa, André Alencar da.
Algumas contribuições ao estudo do comportamento de sistemas quânticos na presença de um buraco negro com rotação / André Alencar da Costa.- João Pessoa, 2010.
77f.: il.
Orientador: Valdir Barbosa Bezerra
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Física. 2. Buraco negro com rotação. 3. Espaço-Tempo de Kerr. 4. Equação de Klein-Gordon. 5. Sistemas Quânticos – Espaços curvos.

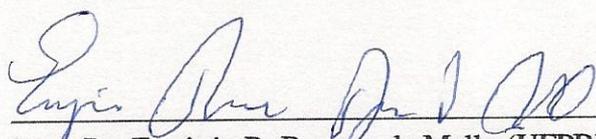
UFPB/BC

CDU: 53(043)

Dissertação de mestrado sob o título *Algumas Contribuições ao Estudo do Comportamento de Sistemas Quânticos na Presença de um Buraco Negro com Rotação*, defendida por André Alencar da Costa na Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física, e aprovada em: 24 de fevereiro de 2010.



Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra (UFPB)
Orientador



Prof. Dr. Eugênio R. Bezerra de Mello (UFPB)
Examinador Interno



Profa. Dra. Geusa de Araújo Marques
Examinadora Externa

À Alice, que sua memória permaneça viva em nossos
corações.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus que nos criou e nos deu entendimento para podermos estudar e compreender as maravilhas do Universo. Agradeço, também, à minha esposa Lidiane que esteve ao meu lado durante toda a execução deste trabalho e cujo suporte me permitiu chegar até aqui. Aos meus familiares e amigos que sempre estiveram comigo tornando os momentos difíceis mais agradáveis. Ao Prof. Valdir, que tem me acompanhado desde os meus primeiros passos na minha carreira científica e que mesmo nas minhas vacilações sempre agiu cordial e generosamente. Agradeço, também, à Universidade Federal da Paraíba e, mais especificamente, ao Departamento de Física que me forneceram o ambiente necessário à execução deste trabalho. Por fim, mas não menos importante, gostaria de agradecer à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), que me deu o suporte financeiro sem o qual se tornaria inviável a execução do meu mestrado.

“In my entire scientific life, extending over forty-five years, the most shattering experience has been the realization that an exact solution of Einstein’s equations of general relativity, discovered by the New Zealand mathematician, Roy Kerr, provides the absolutely exact representation of untold numbers of massive black holes that populate the universe. This shuddering before the beautiful, this incredible fact that a discovery motivated by a search after the beautiful in mathematics should find its exact replica in Nature, persuades me to say that beauty is that to which the human mind responds at its deepest and most profound.”

— SUBRAHMANYAN CHANDRASEKHAR

Resumo

Este trabalho trata sobre a influência do campo gravitacional produzido por um buraco negro com rotação sobre sistemas quânticos. Mais especificamente, são consideradas partículas quânticas escalares, que são descritas através da equação de Klein-Gordon. Inicialmente, é mostrado uma maneira através da qual é possível obter a métrica de Kerr, a qual caracteriza um buraco negro com rotação. Ainda sobre a métrica de Kerr, são estudadas algumas propriedades importantes deste espaço-tempo. Em seguida, foi obtida a solução exata da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Kerr, sendo esta dada em termos das funções confluentes de Heun e, no caso particular de Kerr extremo, foi obtido que a solução da equação de Klein-Gordon neste espaço-tempo é dada pelas funções duplamente confluentes de Heun. Para a equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Kerr, verificou-se que a solução obtida é compatível com resultados já conhecidos na literatura para regiões próximo ao horizonte de eventos e no infinito. Por outro lado, devido às dificuldades inerentes à métrica de Kerr, foi considerado o limite em que o buraco negro possui baixas velocidades de rotação, resultando na métrica de Lense-Thirring. Nesta situação, usando um método assintótico e um outro método em série, foram obtidas soluções aproximadas que descrevem o comportamento de partículas quânticas escalares na presença do campo gravitacional produzido por este corpo. Por fim, alguns efeitos físicos no espaço-tempo de Kerr foram considerados.

Palavras-Chave: Buraco Negro com Rotação. Espaço-Tempo de Kerr. Equação de Klein-Gordon. Sistemas Quânticos em Espaços Curvos.

Abstract

This paper deals with the influence of the gravitational field produced by a rotating black hole on quantum systems. More specifically, are considered scalar quantum particles, which are described by the Klein-Gordon equation. Initially, it was shown a way by which is possible to obtain the Kerr metric, which characterize a rotating black hole. Still on the Kerr metric, it was studied some important properties of this spacetime. Was then obtained the exact solution of the Klein-Gordon equation in the Kerr spacetime, which is given in terms of the confluent Heun's functions and, in the particular case of extreme Kerr, was obtained that the solution of the Klein-Gordon equation in this spacetime is given by the doubly confluent Heun's functions. For the Klein-Gordon equation in the Kerr spacetime, it was verified that the solution is consistent with results already known in the literature for regions near the event horizon and at infinity. Moreover, due to the difficulties inherent in the Kerr metric, was considered the limit where the black hole has low rotational speed, resulting in the metric of Lense-Thirring. In this situation, using an asymptotic method and a method in series, were obtained approximate solutions that describe the behavior of scalar quantum particles in the presence of the gravitational field produced by the body. Finally, some physical effects in Kerr spacetime were considered.

Keywords: Rotating Black Hole. Kerr Spacetime. Klein-Gordon Equation. Quantum Systems in Curved Space.

Lista de Figuras

1.1	Diagrama com as Regiões do Espaço-Tempo de Kerr	31
3.1	Gráfico mostrando a variação da função ξ em relação a x e ao parâmetro β . . .	52
3.2	Gráfico mostrando a variação da função $g_1(\xi)$ em relação a x e para alguns valores do parâmetro β	53
3.3	Gráfico mostrando a variação da função $g_2(\xi)$ em relação a x e para alguns valores do parâmetro β	54
3.4	Gráfico mostrando a variação da função $g_3(\xi)$ em relação a x e para alguns valores do parâmetro β	54
4.1	Diagrama ilustrando o processo Penrose para extração de energia de um buraco negro de Kerr.	60
A.1	Coordenadas esféricas: (a) prolata; (b) oblata.	72

Sumário

Introdução	12
1 Espaço-Tempo de Kerr	14
1.1 Equações de Einstein	15
1.2 Métricas Estacionárias Axialmente Simétricas	16
1.3 Equações de Einstein para uma Métrica com Rotação	20
1.4 Forma de Ernst	24
1.5 A Solução de Kerr	27
2 Equação de Klein-Gordon no Espaço-Tempo de Kerr	34
2.1 Equação de Klein-Gordon	34
2.2 Equação de Klein-Gordon no Espaço-Tempo de Kerr	36
2.3 Solução da Equação de Klein-Gordon no Espaço-Tempo de Kerr	39
2.4 Solução da Equação de Klein-Gordon no Espaço-Tempo de Kerr-Extremo . . .	41
2.5 Soluções Aproximadas	43
2.5.1 Solução Próximo ao Horizonte de Eventos	43
2.5.2 Solução no Infinito	45
2.5.3 Casos Especiais	47
3 Solução da Equação de Klein-Gordon na Aproximação de Lense-Thirring	49
3.1 Aproximação de Lense-Thirring	49
3.2 Solução pelo Método Assintótico	50
3.3 Solução em Série	56

3.3.1	Solução na Região Interior ao Horizonte de Eventos	56
3.3.2	Solução na Região Assintótica	57
4	Alguns Efeitos no Espaço-Tempo de Kerr	59
4.1	Efeito Penrose	59
4.2	Superradiância	60
4.3	Termodinâmica de um Buraco Negro de Kerr	61
4.4	Efeito Hawking	65
	Conclusões	70
	Apêndice A – Funções Harmônicas Esferoidais	71
	Apêndice B – Equações Confluentes e Duplamente Confluentes de Heun	74
	Referências Bibliográficas	76

Introdução

O surgimento da teoria da relatividade geral em 1915 [1], e o posterior desenvolvimento da mecânica quântica, a partir da segunda década do século passado, fez surgir a pergunta sobre a possível relação entre essas duas teorias. Qual deve ser a relação entre a teoria que descreve a gravitação e a que descreve a matéria em escala microscópica? Com o objetivo de investigar uma possível relação entre as duas teorias, foi iniciado, no final da segunda e início da terceira década do século passado [2], o estudo de sistemas quânticos em espaços-tempo curvos, quando foi obtida a generalização das equações de Schrödinger e Dirac neste contexto, e cuja principal motivação era construir uma teoria que combinasse a física quântica e a teoria da relatividade geral.

O estudo da interação entre sistemas quânticos e campos gravitacionais, tem se constituído, nas últimas décadas, numa área bastante ativa de pesquisa. Um fato decorrente desse estudo é a conclusão de que a energia de um átomo que interage com um campo gravitacional é alterada, e esta depende da curvatura do espaço-tempo, na região aonde o átomo está localizado [3], [4]. Outras investigações à respeito da influência de campos gravitacionais sobre sistemas quânticos, incluem a análise detalhada do átomo de hidrogênio no espaço-tempo de Friedmann-Robertson-Walker [3] e o estudo do comportamento de átomos tipo hidrogênio, no espaço-tempo de Schwarzschild [4].

Ainda seguindo esta linha de pesquisa, podemos destacar os estudos relacionados à determinação dos valores esperados do tensor energia-momento e à criação de partículas em um cenário cosmológico [5], bem como aqueles que consideram o comportamento de sistemas quânticos em diferentes espaços-tempo [6], [7], [8], em particular, quando estes sistemas quânticos correspondem ao átomo de hidrogênio [9], [10], [11].

O problema relacionado à alteração dos níveis de energia de um átomo, quando este está sob a influência de um campo gravitacional, possui interesse tanto do ponto de vista teórico, quanto observacional. No primeiro caso, pode-se chegar a uma melhor compreensão da interrelação entre as teorias, o que poderá ser útil para se construir uma única teoria que combine a mecânica quântica e a teoria da relatividade geral. No segundo caso, pode-se saber a ordem de grandeza do campo gravitacional em uma dada região do espaço-tempo, através da medida espectroscópica.

A primeira experiência a comprovar que um campo gravitacional exerce influências sobre um sistema quântico, foi realizada por Colella e colaboradores [12], através da medida da diferença de fase quântica de dois feixes de nêutrons.

As pesquisas concernentes à mecânica quântica em espaços-tempo curvos constituem um elemento indispensável com relação à possibilidade de se construir uma teoria que combine a física quântica e a teoria da relatividade geral, pois, estas nos fornecem a possibilidade de termos uma melhor compreensão da importância do papel dos campos gravitacionais em interação com sistemas quânticos.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no capítulo 1 fazemos uma revisão sobre a solução obtida por Kerr. No capítulo 2, obtemos a solução exata da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Kerr, particularizamos para o caso de Kerr extremo e analisamos as soluções dessa equação para a região próxima ao horizonte e muito distante deste. No capítulo 3, obtemos a solução da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Lense-Thirring, usando dois métodos distintos, a saber, um método assintótico e um outro em série. No capítulo 4, descrevemos os efeitos Penrose e superradiância e investigamos o efeito Hawking. Finalmente, apresentamos as conclusões.

1 Espaço-Tempo de Kerr

A teoria da relatividade geral foi apresentada em sua forma final por Albert Einstein em 1915 [1]. Apenas alguns meses depois, Karl Schwarzschild obteve uma solução exata das equações de Einstein que descreve o campo gravitacional gerado por uma massa pontual sem rotação [13]. Somente em 1963, quase cinquenta anos depois, Roy P. Kerr apresentou a primeira solução exata das equações de Einstein que poderia representar o campo gravitacional exterior a uma fonte limitada com rotação uniforme [14].

A razão para essa demora em se obter a solução exata para um corpo com rotação, provavelmente, está ligada ao fato de que neste caso existem no máximo duas isometrias, sendo uma a simetria axial e a outra a simetria translacional no tempo (para uma velocidade angular constante). Assim, a inexistência da simetria esférica, como na solução de Schwarzschild, tornam os cálculos mais complicados, uma vez que temos que resolver as equações de Einstein com mais funções arbitrárias.

Como é de se esperar, a solução de Kerr deve ser assintoticamente plana, uma vez que à medida que nos afastamos da fonte o campo gravitacional diminui gradativamente. Esta solução foi a primeira com uma fonte de massa não nula com rotação que possui a propriedade de ser assintoticamente plana. No entanto, devemos observar que, diferentemente das soluções com simetria esférica, não existe um teorema de Birkhoff [15] para espaços-tempos com rotação. Isto quer dizer que a geometria na região de vácuo exterior à uma estrela, ou planeta, genéricos não é parte da solução de Kerr. Tudo o que podemos dizer é que assintoticamente a geometria produzida pelo campo gravitacional desses objetos será dada por Kerr. Porém, esta solução determina de forma única a geometria na região exterior a uma estrela altamente colapsada, ou seja, um buraco negro com rotação.

Neste capítulo, seguindo o trabalho de Islam [16] sobre campos gravitacionais com rotação, mostraremos uma maneira através da qual podemos obter a geometria produzida por um corpo com rotação uniforme, que é dada pela solução de Kerr.

1.1 Equações de Einstein

Para obtermos a solução de Kerr [14] precisamos, em primeiro lugar, saber como descrever a gravitação. Na mecânica Newtoniana sabemos que a Lei de Gravitação Universal é a teoria responsável por esta descrição. Nela, dada uma partícula-teste de massa m a uma distância r de uma fonte do campo gravitacional de massa M , a partícula-teste sente o campo gravitacional gerado por essa fonte de acordo com uma lei dada matematicamente por

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1.1)$$

Através dessa equação, para cada conjunto de condições iniciais dadas, podemos determinar como será o movimento da partícula.

No entanto, sabe-se que a mecânica Newtoniana falha na descrição correta da interação gravitacional, como, por exemplo, no cálculo correto do movimento de precessão do periélio de Mercúrio e na ausência de uma dinâmica que explique a deflexão da luz por um corpo massivo. Assim, até o momento, a teoria que fornece a descrição mais acurada da gravitação é a teoria da relatividade geral. Nesta teoria os objetos físicos pertencem a um espaço-tempo quadri-dimensional Riemanniano, cujas coordenadas x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) são dadas em termos de um sistema de coordenadas geral não-inercial. O campo gravitacional gerado por uma fonte de massa M é expresso pela curvatura que esse objeto produz no espaço-tempo, o que, matematicamente, é representado pelas famosas equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico do espaço-tempo, R é o escalar de curvatura, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento associado à fonte do campo gravitacional e estamos usando unidades naturais, $c = G = 1$. Nesta equação, o lado direito representa o conteúdo de matéria-energia e o lado esquerdo representa a geometria gerada por este conteúdo energético. Assim, na teoria da relatividade geral, dada uma fonte de energia $T_{\mu\nu}$ queremos saber qual a geometria do espaço-tempo que ela produz, o que é dado através de uma quantidade invariante e que representa a distância entre dois eventos no espaço-tempo quadri-dimensional, o elemento de linha:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.3)$$

onde aqui, e por todo o texto, usamos a convenção de Einstein na qual os índices repetidos indicam soma.

O tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ é definido em termos do tensor de curvatura, ou tensor de Riemann,

$R_{\mu\nu\lambda}^\sigma$ por

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\sigma\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^\sigma, \quad (1.4)$$

onde o tensor de curvatura é obtido por

$$R_{\mu\nu\lambda}^\sigma = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\sigma}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha - \Gamma_{\alpha\lambda}^\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\alpha, \quad (1.5)$$

sendo $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ conhecidos como símbolos de Christoffel de segunda espécie. Em uma base coordenada, eles são simétricos nos índices inferiores, $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \Gamma_{\lambda\nu}^\mu$, e são definidos em termos do tensor métrico como

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\sigma} \right). \quad (1.6)$$

Temos, também, que o escalar de curvatura é, por definição, dado por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

Nas regiões exteriores à fonte, ou seja no vácuo, não há matéria ou radiação e, portanto, o tensor energia-momento é nulo e as equações de Einstein (1.2) podem ser escritas como

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.8)$$

Por fim, as equações de movimento que descrevem as trajetórias possíveis para uma partícula clássica em um campo gravitacional são dadas pelas equações geodésicas

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0, \quad (1.9)$$

onde s é o tempo-próprio da partícula.

1.2 Métricas Estacionárias Axialmente Simétricas

Na seção anterior vimos como a teoria da relatividade geral fornece as equações que descrevem o campo gravitacional gerado por uma fonte arbitrária. No entanto, resolver as equações de Einstein é uma tarefa extremamente difícil e só encontramos a solução exata em alguns casos especiais. Para isto usamos considerações sobre a simetria do problema, reduzindo o elemento de linha geral dado por (1.3) a uma classe mais específica.

Consideremos o campo gravitacional gerado por uma distribuição de massa com rotação uniforme, como uma estrela, por exemplo. A distribuição de massa e o campo à sua volta possuem simetria axial em torno do eixo de rotação que passa através do centro do corpo e que

podemos tomar como a origem do nosso sistema de coordenadas. Tomemos o eixo de rotação como sendo o eixo z . Como o corpo está em rotação uniforme, o problema apresenta independência temporal. Assim, por causa da independência temporal e da simetria axial, podemos admitir a existência de uma coordenada tipo-tempo $x^0 = t$ e uma coordenada angular azimutal $x^3 = \phi$ em relação às quais os coeficientes do tensor métrico bem como todas as quantidades materiais devem ser independentes. Dessa forma devemos ter

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^1, x^2). \quad (1.10)$$

Observamos ainda que como ϕ é a coordenada angular em torno do eixo de rotação, as coordenadas (t, x^1, x^2, ϕ) e $(t, x^1, x^2, \phi + 2\pi)$ devem corresponder ao mesmo ponto do espaço-tempo.

Por construção a distribuição de massa que é fonte do campo gravitacional está em rotação na direção ϕ . Uma transformação $t \rightarrow -t$, produz uma reversão na direção de rotação da fonte de forma que o campo gerado não é invariante por uma reversão temporal, uma vez que ela resulta em uma geometria do espaço-tempo diferente. Da mesma forma uma transformação $\phi \rightarrow -\phi$ reverte a direção de rotação do campo e, portanto, ele também não é invariante por esta transformação. Contudo duas transformações simultâneas $t \rightarrow -t$ e $\phi \rightarrow -\phi$ mantêm inalterado o sentido de rotação do campo e dessa forma mantêm o campo invariante. Assim, como as componentes do tensor métrico só dependem das variáveis (x^1, x^2) e o elemento de linha é um invariante, devemos ter

$$g_{01} = g_{02} = g_{13} = g_{23} = 0, \quad (1.11)$$

pois, do contrário o elemento de linha não seria invariante. Logo, a métrica (1.3) pode ser escrita no caso de um espaço-tempo estacionário e axialmente simétrico como

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{03}dtd\phi + g_{33}d\phi^2 + g_{AB}dx^A dx^B, \quad (1.12)$$

onde A e B assumem os valores 1, 2. Dessa expressão podemos ver que é possível realizar uma transformação arbitrária das coordenadas (x^1, x^2) para (x'^1, x'^2)

$$x^1 = x^1(x'^1, x'^2), \quad x^2 = x^2(x'^1, x'^2), \quad (1.13)$$

sem mudar a forma da métrica. Logo, podemos escrever o elemento de linha (1.12), usando coordenadas cilíndricas, na forma

$$ds^2 = fdt^2 - 2ktdt\phi - ld\phi^2 - Ad\rho^2 - 2Bd\rho dz - Cdz^2, \quad (1.14)$$

onde f, k, l, A, B e C são funções de ρ e z . Podemos ainda realizar uma transformação de

coordenadas definidas por

$$\rho' = F(\rho, z), \quad z' = G(\rho, z). \quad (1.15)$$

Assim, tomando as diferenciais de ρ' e z' , obtemos

$$d\rho' = F_\rho d\rho + F_z dz \quad (1.16)$$

e

$$dz' = G_\rho d\rho + G_z dz, \quad (1.17)$$

onde os índices inferiores representam derivadas parciais em relação à coordenada declarada. Resolvendo (1.16) e (1.17) em termos dos diferenciais $d\rho$ e dz , resulta

$$d\rho = j^{-1} (G_z d\rho' - F_z dz') \quad (1.18)$$

e

$$dz = j^{-1} (-G_\rho d\rho' + F_\rho dz'), \quad (1.19)$$

onde j é o Jacobiano da transformação, ou seja,

$$j = \frac{\partial(F, G)}{\partial(\rho, z)} = F_\rho G_z - F_z G_\rho, \quad (1.20)$$

e admitimos que ele é não nulo, pois do contrário F seria uma função de G e a transformação dada por (1.15) não seria uma transformação própria. Substituindo (1.18) e (1.19) no elemento de linha (1.14), obtemos

$$ds^2 = f dt^2 - 2k dt d\phi - l d\phi^2 - j^{-2} \left\{ \left(AG_z^2 - 2BG_\rho G_z + CG_\rho^2 \right) d\rho'^2 + 2 \left[-AG_z F_z + B \left(G_z F_\rho + G_\rho F_z \right) - CG_\rho F_\rho \right] d\rho' dz' + \left(AF_z^2 - 2BF_\rho F_z + CF_\rho^2 \right) dz'^2 \right\}. \quad (1.21)$$

Até este momento as funções F e G que determinam a transformação de coordenadas são arbitrárias. Agora, podemos impor que elas satisfaçam ao seguinte par de equações diferenciais parciais não lineares em ρ e z :

$$AG_z^2 - 2BG_\rho G_z + CG_\rho^2 = AF_z^2 - 2BF_\rho F_z + CF_\rho^2 \quad (1.22)$$

e

$$-AG_z F_z + B \left(G_z F_\rho + G_\rho F_z \right) - CG_\rho F_\rho = 0. \quad (1.23)$$

Desta forma, admitindo que para os valores dados de A , B e C o sistema de equações acima possua solução não trivial com $j \neq 0$, os coeficientes do elemento de linha (1.21) de $d\rho'^2$ e

dz'^2 ficam iguais e o do termo cruzado $d\rho' dz'$ se anula. Por fim, podemos reescrever todas as quantidades em termos de ρ' e z' . Assim, retirando as “linhas”, obtemos a métrica

$$ds^2 = f dt^2 - 2k dt d\phi - l d\phi^2 - e^\mu (d\rho^2 + dz^2), \quad (1.24)$$

onde f , k , l e μ são funções de ρ e z , diferentes das definidas anteriormente. O elemento de linha (1.24) é o objeto básico que descreve o espaço-tempo gerado por uma distribuição limitada de matéria com rotação uniforme. Logo, para obtermos a solução de Kerr, os coeficientes f , k , l e μ são as funções que precisam ser determinadas.

Usando as coordenadas $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \rho, z, \phi)$, obtemos de (1.24) que as componentes não-nulas covariantes do tensor métrico são

$$g_{00} = f, \quad g_{03} = g_{30} = -k, \quad g_{11} = g_{22} = -e^\mu, \quad g_{33} = -l \quad (1.25)$$

e fazendo uso da identidade

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\kappa} = \delta_{\mu}^{\kappa}, \quad (1.26)$$

encontramos as componentes contravariantes do tensor métrico, que são dadas por

$$g^{00} = D^{-2}l, \quad g^{03} = g^{30} = -D^{-2}k, \quad g^{11} = g^{22} = -e^{-\mu}, \quad g^{33} = -D^{-2}f, \quad (1.27)$$

onde

$$D^2 \equiv fl + k^2. \quad (1.28)$$

Assim, usando a definição dos símbolos de Christoffel (1.6), temos que as suas componentes não-nulas são

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2} D^{-2} (lf_\rho + kk_\rho) & \Gamma_{02}^0 &= \frac{1}{2} D^{-2} (lf_z + kk_z) \\ \Gamma_{13}^0 &= \frac{1}{2} D^{-2} (kl_\rho - lk_\rho) & \Gamma_{23}^0 &= \frac{1}{2} D^{-2} (kl_z - lk_z) \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} e^{-\mu} f_\rho & \Gamma_{03}^1 &= -\frac{1}{2} e^{-\mu} k_\rho \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \mu_\rho & \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} \mu_z \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2} \mu_\rho & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{1}{2} e^{-\mu} l_\rho \\ \Gamma_{00}^2 &= \frac{1}{2} e^{-\mu} f_z & \Gamma_{03}^2 &= -\frac{1}{2} e^{-\mu} k_z \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2} \mu_z & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \mu_\rho \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}\mu_z & \Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2}e^{-\mu}l_z \\
\Gamma_{01}^3 &= \frac{1}{2}D^{-2}(fk_\rho - kf_\rho) & \Gamma_{02}^3 &= \frac{1}{2}D^{-2}(fk_z - kf_z) \\
\Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2}D^{-2}(fl_\rho + kk_\rho) & \Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2}D^{-2}(fl_z + kk_z)
\end{aligned}$$

1.3 Equações de Einstein para uma Métrica com Rotação

Até aqui analisamos como deve ser a métrica do espaço-tempo criado por uma distribuição de massa com rotação uniforme seguindo argumentos de simetria e vimos que ela deve ser da forma dada por (1.24). Contudo, para podermos ir além precisamos impor a física que essa distribuição de matéria obedece, ou seja, precisamos impor como a geometria do espaço-tempo se relaciona com a fonte gravitacional, o que é feito com o uso das equações de Einstein (1.2). Porém, como estamos interessados apenas no campo exterior à fonte devemos usar as equações de Einstein para o vácuo (1.8).

Usando as equações de Einstein para a região exterior à fonte (1.8), a definição do tensor de Ricci (1.4) e do tensor de Riemann (1.5), as equações de Einstein resultam em

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\lambda}^\nu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda\Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda = 0. \quad (1.30)$$

No caso do espaço-tempo gerado por um corpo em rotação os símbolos de Christoffel foram obtidos na seção anterior e são dados por (1.29). Logo, substituindo esses valores na equação (1.30) obtemos que as únicas componentes não-nulas do tensor de Ricci fornecem

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{e^{-\mu}}{2} \left[f_{\rho\rho} - \frac{1}{2}f_\rho D^{-2}(f_\rho l + 2kk_\rho) + f_{zz} - \frac{1}{2}f_z D^{-2}(f_z l + 2kk_z) + \right. \\
&\quad \left. fD^{-2} \left(\frac{1}{2}(f_\rho l_\rho + f_z l_z) + k_\rho^2 + k_z^2 \right) \right] = 0, \quad (1.31)
\end{aligned}$$

$$R_{03} = -\frac{e^{-\mu}}{2} \left[k_{\rho\rho} - \frac{1}{2}k_\rho D^{-2}(f_\rho l + fl_\rho) + k_{zz} - \frac{1}{2}k_z D^{-2}(f_z l + fl_z) + kD^{-2}(f_\rho l_\rho + f_z l_z) \right] = 0, \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{1}{2} \left[-\mu_{\rho\rho} - \mu_{zz} - D^{-2}lf_{\rho\rho} - 2D^{-2}kk_{\rho\rho} - D^{-2}fl_{\rho\rho} + \frac{1}{2}D^{-2}(fl_\rho + f_\rho l + 2kk_\rho)\mu_\rho + \right. \\
&\quad D^{-4}(k^2 - fl)k_\rho^2 + 2D^{-4}kk_\rho(fl_\rho + f_\rho l) - \frac{1}{2}D^{-2}(fl_z + f_z l + 2kk_z)\mu_z + \\
&\quad \left. \frac{1}{2}D^{-4}f^2l_\rho^2 + \frac{1}{2}D^{-4}f_\rho^2l^2 - D^{-4}f_\rho l_\rho k^2 \right] = 0, \quad (1.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{12} = \frac{1}{2} \left[-D^{-2} l f_{\rho z} - 2D^{-2} k k_{\rho z} - D^{-2} f l_{\rho z} + \frac{1}{2} D^{-2} (f l_z + f_z l + 2k k_z) \mu_{\rho} + \right. \\
(D^{-2} k \mu_z + D^{-4} (k^2 - fl) k_z + D^{-4} k (f l_z + f_z l)) k_{\rho} + \frac{1}{2} D^{-2} (f l_{\rho} + f_{\rho} l) \mu_z + \\
\left. D^{-4} k (f l_{\rho} + f_{\rho} l) k_z + \frac{1}{2} D^{-4} (f_z l^2 - l_z k^2) f_{\rho} + \frac{1}{2} D^{-4} (f^2 l_z - f_z k^2) l_{\rho} \right] = 0, \quad (1.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{22} = \frac{1}{2} \left[-\mu_{\rho\rho} - \mu_{zz} - D^{-2} l f_{zz} - 2D^{-2} k k_{zz} - D^{-2} f l_{zz} - \frac{1}{2} D^{-2} (f l_{\rho} + f_{\rho} l + 2k k_{\rho}) \mu_{\rho} + \right. \\
D^{-4} (k^2 - fl) k_z^2 + 2D^{-4} k k_z (f l_z + f_z l) + \frac{1}{2} D^{-2} (f l_z + f_z l + 2k k_z) \mu_z + \\
\left. \frac{1}{2} D^{-4} f^2 l_z^2 + \frac{1}{2} D^{-4} f_z^2 l^2 - D^{-4} f_z l_z k^2 \right] = 0, \quad (1.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} = -\frac{e^{-\mu}}{2} \left[l_{\rho\rho} - \frac{1}{2} l_{\rho} D^{-2} (f l_{\rho} + 2k k_{\rho}) + l_{zz} - \frac{1}{2} l_z D^{-2} (f l_z + 2k k_z) + \right. \\
\left. l D^{-2} \left(\frac{1}{2} (f_{\rho} l_{\rho} + f_z l_z) + k_{\rho}^2 + k_z^2 \right) \right] = 0. \quad (1.36)
\end{aligned}$$

Como pode ser verificado facilmente, podemos reescrever as equações (1.31), (1.32) e (1.36) da seguinte forma

$$2e^{\mu} D^{-1} R_{00} = (D^{-1} f_{\rho})_{\rho} + (D^{-1} f_z)_z + D^{-3} f (f_{\rho} l_{\rho} + f_z l_z + k_{\rho}^2 + k_z^2) = 0, \quad (1.37)$$

$$-2e^{\mu} D^{-1} R_{03} = (D^{-1} k_{\rho})_{\rho} + (D^{-1} k_z)_z + D^{-3} k (f_{\rho} l_{\rho} + f_z l_z + k_{\rho}^2 + k_z^2) = 0, \quad (1.38)$$

$$-2e^{\mu} D^{-1} R_{33} = (D^{-1} l_{\rho})_{\rho} + (D^{-1} l_z)_z + D^{-3} l (f_{\rho} l_{\rho} + f_z l_z + k_{\rho}^2 + k_z^2) = 0. \quad (1.39)$$

Agora, a partir da equação (1.28), obtemos que

$$D_{\rho} = \frac{1}{2} D^{-1} (f_{\rho} l + f l_{\rho} + 2k k_{\rho}) \quad \text{e} \quad D_z = \frac{1}{2} D^{-1} (f_z l + f l_z + 2k k_z), \quad (1.40)$$

de forma que

$$\begin{aligned}
D_{\rho\rho} &= -\frac{1}{4} D^{-3} (f_{\rho} l + f l_{\rho} + 2k k_{\rho})^2 + \frac{1}{2} D^{-1} (f_{\rho\rho} l + 2f_{\rho} l_{\rho} + f l_{\rho\rho} + 2k_{\rho}^2 + 2k k_{\rho\rho}) \\
&= \frac{1}{2} \left[l (D^{-1} f_{\rho})_{\rho} + f (D^{-1} l_{\rho})_{\rho} + 2k (D^{-1} k_{\rho})_{\rho} \right] + D^{-1} (f_{\rho} l_{\rho} + k_{\rho}^2), \quad (1.41)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
D_{zz} &= -\frac{1}{4} D^{-3} (f_z l + f l_z + 2k k_z)^2 + \frac{1}{2} D^{-1} (f_{zz} l + 2f_z l_z + f l_{zz} + 2k_z^2 + 2k k_{zz}) \\
&= \frac{1}{2} \left[l (D^{-1} f_z)_z + f (D^{-1} l_z)_z + 2k (D^{-1} k_z)_z \right] + D^{-1} (f_z l_z + k_z^2). \quad (1.42)
\end{aligned}$$

Logo, combinando as equações (1.37), (1.38) e (1.39), e comparando com os resultados acima para as derivadas parciais da função D , obtemos

$$e^{\mu} D^{-1} (l R_{00} - 2k R_{03} - f R_{33}) = D_{\rho\rho} + D_{zz} = 0. \quad (1.43)$$

Desta equação vemos que a função D satisfaz uma equação de Laplace em duas dimensões nas coordenadas ρ e z . Logo, ela pode ser considerada como a parte real de uma função analítica $\Sigma(\rho + iz)$ que depende de $\rho + iz$, ou seja

$$\Sigma(\rho + iz) = D(\rho, z) + iK(\rho, z). \quad (1.44)$$

Agora a condição de analiticidade de Cauchy-Riemann implica que

$$D_\rho = K_z \quad \text{e} \quad D_z = -K_\rho. \quad (1.45)$$

Assim, se fizermos a transformação de coordenadas

$$\bar{\rho} = D(\rho, z) \quad \text{e} \quad \bar{z} = K(\rho, z), \quad (1.46)$$

temos, usando (1.45) e (1.46), que

$$(d\bar{\rho})^2 + (d\bar{z})^2 = (D_\rho^2 + K_\rho^2) (d\rho^2 + dz^2). \quad (1.47)$$

Esta equação mostra que a forma da métrica (1.24) permanece inalterada pela transformação (1.46), uma vez que podemos definir uma nova função $\bar{\mu}$ dada por

$$e^{\bar{\mu}} = e^\mu (D_\rho^2 + K_\rho^2)^{-1}. \quad (1.48)$$

Podemos admitir que todas as funções f , k , l , $\bar{\mu}$ podem ser expressas em termos das variáveis $(\bar{\rho}, \bar{z})$, obtidas substituindo as variáveis (ρ, z) , depois de resolver (1.46) em termos das anteriores. Tendo escrito todas as variáveis em termos de $(\bar{\rho}, \bar{z})$ podemos esquecer as barras e usando (1.46) obtemos a seguinte relação para as variáveis f , k e l :

$$D^2 = fl + k^2 = \rho^2. \quad (1.49)$$

O procedimento acima foi usado pela primeira vez por Weyl em 1917 [17] para o caso de uma métrica estática com simetria axial (com $k = 0$) e generalizada para o caso presente por Lewis em 1932 [18]. Usando a relação (1.49), obtemos que suas derivadas são dadas por

$$\begin{aligned} D_\rho^2 &= f_\rho l + f l_\rho + 2kk_\rho = \frac{\partial \rho^2}{\partial \rho} = 2\rho, \\ D_z^2 &= f_z l + f l_z + 2kk_z = \frac{\partial \rho^2}{\partial z} = 0, \\ D_{\rho\rho}^2 &= l f_{\rho\rho} + 2f_\rho l_\rho + f l_{\rho\rho} + 2k_\rho^2 + 2kk_{\rho\rho} = 2, \\ D_{zz}^2 &= l f_{zz} + 2f_z l_z + f l_{zz} + 2k_z^2 + 2kk_{zz} = 0, \\ D_{\rho z}^2 &= l f_{\rho z} + f_\rho l_z + f_z l_\rho + f l_{\rho z} + 2k_z k_\rho + 2kk_{\rho z} = 0. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Assim, retirando a barra de $\bar{\mu}$, usando a relação (1.49) e suas derivadas dadas por (1.50), podemos escrever as equações de Einstein (1.33), (1.34) e (1.35) como

$$2R_{11} = -\mu_{\rho\rho} - \mu_{zz} + \rho^{-1}\mu_{\rho} + \rho^{-2}(f_{\rho}l_{\rho} + k_{\rho}^2) = 0, \quad (1.51)$$

$$2R_{12} = \rho^{-1}\mu_z + \frac{1}{2}\rho^{-2}(f_{\rho}l_z + f_zl_{\rho} + 2k_{\rho}k_z) = 0, \quad (1.52)$$

$$2R_{22} = -\mu_{\rho\rho} - \mu_{zz} - \rho^{-1}\mu_{\rho} + \rho^{-2}(f_zl_z + k_z^2) = 0. \quad (1.53)$$

Por causa de (1.49) apenas duas das equações (1.37), (1.38) e (1.39) são independentes. Dessa forma, definindo a função w

$$w = f^{-1}k, \quad (1.54)$$

e usando a relação (1.49), podemos eliminar k e l da equação (1.37) obtendo

$$f(f_{\rho\rho} + f_{zz} + \rho^{-1}f_{\rho}) - f_{\rho}^2 - f_z^2 + \rho^{-2}f^4(w_{\rho}^2 + w_z^2) = 0. \quad (1.55)$$

Da mesma forma, fazendo as substituições anteriores e usando (1.55), a equação (1.38) pode ser escrita como

$$f(w_{\rho\rho} + w_{zz} - \rho^{-1}w_{\rho}) + 2f_{\rho}w_{\rho} + 2f_zw_z = 0. \quad (1.56)$$

Agora, subtraindo (1.53) de (1.51), podemos expressar μ_{ρ} em termos de f e w como

$$\mu_{\rho} = -f^{-1}f_{\rho} + \frac{1}{2}\rho f^{-2}(f_{\rho}^2 - f_z^2) - \frac{1}{2}\rho^{-1}f^2(w_{\rho}^2 - w_z^2), \quad (1.57)$$

e a partir da equação (1.52) obtemos que μ_z é dado por

$$\mu_z = -f^{-1}f_z + \rho f^{-2}f_{\rho}f_z - \rho^{-1}f^2w_{\rho}w_z. \quad (1.58)$$

De fato, podemos verificar, com o uso das equações (1.55) e (1.56), que as expressões acima para μ_{ρ} e μ_z são consistentes, uma vez que a derivada de (1.57) em relação a z é igual a derivada de (1.58) em relação a ρ . Também, podemos verificar que a função μ obtida a partir de (1.57) e (1.58) satisfaz às equações (1.51) e (1.53). Concluimos, então, que (1.55) e (1.56) são as equações básicas que descrevem o comportamento do campo gravitacional para uma fonte estacionária e axialmente simétrica. Tendo resolvido essas equações em termos de f e w podemos obter μ integrando as equações (1.57) e (1.58).

1.4 Forma de Ernst

Para resolvermos as equações (1.55) e (1.56), vamos usar a forma de Ernst [19] dessas equações. Para isto, vamos escrever a equação (1.56) como

$$(\rho^{-1} f^2 w_\rho)_\rho + (\rho^{-1} f^2 w_z)_z = 0, \quad (1.59)$$

o que implica a existência de uma função u tal que

$$u_\rho = -\rho^{-1} f^2 w_z, \quad u_z = \rho^{-1} f^2 w_\rho. \quad (1.60)$$

Assim, em termos de f e u a equação (1.55) pode ser escrita como

$$f \nabla^2 f - f_\rho^2 - f_z^2 + u_\rho^2 + u_z^2 = 0, \quad (1.61)$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano definido por

$$\nabla^2 h = h_{\rho\rho} + h_{zz} + \rho^{-1} h_\rho. \quad (1.62)$$

Por outro lado, somando as derivadas segundas de u_ρ e u_z em relação a ρ e z respectivamente, e usando a equação (1.60) obtemos

$$f \nabla^2 u = 2f_\rho u_\rho + 2f_z u_z. \quad (1.63)$$

Em termos de f e u , (1.57) e (1.58) podem ser escritas como

$$\mu'_\rho = \frac{1}{2} \rho f^{-2} (f_\rho^2 - f_z^2) + \frac{1}{2} \rho f^{-2} (u_\rho^2 - u_z^2), \quad (1.64)$$

$$\mu'_z = \rho f^{-2} f_\rho f_z + \rho f^{-2} u_\rho u_z. \quad (1.65)$$

onde $\mu' = \mu + \ln f$.

Definamos a função complexa E :

$$E = f + iu \quad (1.66)$$

Podemos observar que (1.61) e (1.63) são as partes reais e imaginárias de uma única equação complexa

$$(ReE) \nabla^2 E = E_\rho^2 + E_z^2, \quad (1.67)$$

onde ReE é a parte real da função E . Agora, introduzindo uma nova função complexa ξ definida por

$$E = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}, \quad (1.68)$$

temos que a equação (1.67) pode ser escrita na seguinte forma

$$(\xi \xi^* - 1) \nabla^2 \xi = 2\xi^* (\xi_\rho^2 + \xi_z^2), \quad (1.69)$$

onde ξ^* é o complexo conjugado de ξ .

Ao invés das variáveis (ρ, z) , introduzimos as coordenadas esferoidais prolatas (x, y) , que são definidas por

$$\rho = (x^2 - 1)^{1/2} (1 - y^2)^{1/2}, \quad z = xy. \quad (1.70)$$

Resolvendo as expressões acima em termos de x e y , resulta

$$x = \frac{1}{2} (R^{(+)} + R^{(-)}), \quad y = \frac{1}{2} (R^{(+)} - R^{(-)}), \quad (1.71)$$

onde

$$R^{(\pm)} = [\rho^2 + (z \pm 1)^2]^{1/2}. \quad (1.72)$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} &= \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \frac{x(x^2 - 1)^{1/2} (1 - y^2)^{1/2}}{x^2 - y^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y(x^2 - 1)^{1/2} (1 - y^2)^{1/2}}{x^2 - y^2} \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \frac{y(x^2 - 1)}{x^2 - y^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x(1 - y^2)}{x^2 - y^2} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.74)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} &= \frac{x^2 (x^2 - 1) (1 - y^2)}{(x^2 - y^2)^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{y^2 (x^2 - 1) (1 - y^2)}{(x^2 - y^2)^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \\ &\quad \frac{x^3 (1 - y^2)^2 + xy^2 (x^2 - 1)^2 - 2xy^2 (x^2 - 1) (1 - y^2)}{(x^2 - y^2)^3} \frac{\partial}{\partial x} - \\ &\quad \frac{y^3 (x^2 - 1)^2 + x^2 y (1 - y^2)^2 + 2x^2 y (x^2 - 1) (1 - y^2)}{(x^2 - y^2)^3} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{2xy (x^2 - 1) (1 - y^2)}{(x^2 - y^2)^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (1.75)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \frac{y^2 (x^2 - 1)^2}{(x^2 - y^2)^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{x^2 (1 - y^2)^2}{(x^2 - y^2)^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \\ &\frac{2xy^2 (x^2 - 1) (1 - y^2) + x (x^2 - 1) (1 - y^2) (x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^3} \frac{\partial}{\partial x} - \\ &\frac{2x^2y (x^2 - 1) (1 - y^2) + y (x^2 - 1) (1 - y^2) (x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^3} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2xy (x^2 - 1) (1 - y^2)}{(x^2 - y^2)^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Assim, substituindo (1.73)–(1.76) na equação de Ernst (1.69), podemos escrevê-la em termos de x e y como

$$(\xi \xi^* - 1) [(x^2 - 1) \xi_{xx} + 2x \xi_x + (1 - y^2) \xi_{yy} - 2y \xi_y] = 2\xi^* [(x^2 - 1) \xi_x^2 + (1 - y^2) \xi_y^2]. \quad (1.77)$$

As equações (1.69) e (1.77) são as formas de Ernst das equações de Einstein (1.55) e (1.56). Também, usando a expressão para ρ , (1.73) e (1.74), obtemos a partir de (1.60) duas equações para w em termos de x e y que são

$$y(x^2 - 1) w_x + x(1 - y^2) w_y = -f^{-2} [x(x^2 - 1)(1 - y^2) u_x - y(x^2 - 1)(1 - y^2) u_y] \quad (1.78)$$

e

$$xw_x - yw_y = f^{-2} [y(x^2 - 1) u_x + x(1 - y^2) u_y]. \quad (1.79)$$

Assim, multiplicando (1.79) por $xy^{-1}(1 - y^2)$ e somando com (1.78), e, da mesma forma, multiplicando (1.79) por $-x^{-1}y(x^2 - 1)$ e somando com (1.78), resulta

$$w_x = (1 - y^2) f^{-2} u_y \quad \text{e} \quad w_y = (1 - x^2) f^{-2} u_x. \quad (1.80)$$

Também, seguindo um procedimento análogo ao anterior, podemos expressar (1.64) e (1.65) em termos das variáveis x e y como

$$\mu'_x = \frac{(1 - y^2)}{2(x^2 - y^2)} f^{-2} [x(x^2 - 1)(f_x^2 + u_x^2) + x(y^2 - 1)(f_y^2 + u_y^2) - 2y(x^2 - 1)(f_x f_y + u_x u_y)] \quad (1.81)$$

e

$$\mu'_y = \frac{(x^2 - 1)}{2(x^2 - y^2)} f^{-2} [y(x^2 - 1)(f_x^2 + u_x^2) - y(1 - y^2)(f_y^2 + u_y^2) + 2x(1 - y^2)(f_x f_y + u_x u_y)]. \quad (1.82)$$

1.5 A Solução de Kerr

A partir da equação (1.77) podemos verificar facilmente que uma de suas soluções é dada por

$$\xi = px - iqy, \quad (1.83)$$

onde p e q são constantes com $p^2 + q^2 = 1$. O feito notável da equação de Ernst (1.77) é que a solução de Kerr é obtida através da simples solução (1.83). De (1.66), (1.68) e (1.83) vemos que para esta solução

$$f = \frac{p^2x^2 + q^2y^2 - 1}{(px + 1)^2 + q^2y^2} \quad \text{e} \quad u = \frac{-2qy}{(px + 1)^2 + q^2y^2}. \quad (1.84)$$

De (1.80) e (1.84) obtemos

$$w = \frac{2qp^{-1}(1 - y^2)(px + 1)}{p^2x^2 + q^2y^2 - 1} + w_0 \quad (1.85)$$

onde w_0 é uma constante. E das equações (1.81) e (1.82) encontramos μ' dado por

$$e^{\mu'} = \frac{A(x^2p^2 + q^2y^2 - 1)}{x^2 - y^2}, \quad (1.86)$$

onde A é uma constante arbitrária. Desta equação e da definição de μ' resulta

$$e^{\mu} = \frac{A \left[(px + 1)^2 + q^2y^2 \right]}{x^2 - y^2}. \quad (1.87)$$

Desta forma, a solução de Kerr fica determinada. Ela é dada pela métrica (1.24), onde os coeficientes são definidos por (1.84), (1.85) e (1.87), com k dado por (1.54) e l é obtido através da relação (1.49). No entanto, para escrevermos esta solução na forma padrão obtida por Boyer e Lindquist [20], introduzimos as coordenadas r e θ que se relacionam com x e y da seguinte forma

$$px + 1 = pr, \quad y = \cos \theta. \quad (1.88)$$

Também introduzimos as constantes M e a dadas por

$$p^{-1} = M, \quad p^{-1}q = -a, \quad M^2 - a^2 = 1. \quad (1.89)$$

Assim, usando (1.70), (1.88) e (1.89), podemos expressar (ρ, z) em termos de (r, θ) da seguinte forma

$$\rho = (r^2 - 2Mr + a^2)^{1/2} \sin \theta, \quad z = (r - M) \cos \theta. \quad (1.90)$$

A partir de (1.84) e usando as relações (1.88) e (1.89), obtemos

$$f = \frac{r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}. \quad (1.91)$$

Temos, também, com o uso das mesmas relações acima que w dado por (1.85) pode ser escrito em termos das coordenadas r e θ como

$$w = -\frac{2Mar \sin^2 \theta}{r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta}, \quad (1.92)$$

onde tomamos $w_0 = 0$. Assim, com o uso da definição de w ($k = fw$) e das equações (1.91) e (1.92), obtemos

$$k = -\frac{2Mar \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}. \quad (1.93)$$

Para encontrarmos o valor de l nessas coordenadas, fazemos uso da relação (1.49), onde substituímos os valores de f , k e ρ dados por (1.91), (1.93) e (1.90), respectivamente, resultando em

$$l = \frac{2Ma^2 r \sin^4 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta. \quad (1.94)$$

Agora, com uso das equações (1.88) e (1.89), obtemos que e^μ será dado por

$$e^\mu = \frac{A}{M^2} \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{(r - M)^2 + (a^2 - M^2) \cos^2 \theta}, \quad (1.95)$$

e com o uso de (1.90), obtemos

$$d\rho^2 + dz^2 = \left[(r - M)^2 + (a^2 - M^2) \cos^2 \theta \right] \left[\frac{dr^2}{r^2 - 2Mr + a^2} + d\theta^2 \right]. \quad (1.96)$$

Assim, combinando (1.91)–(1.96) na métrica dada por (1.24) e tomando $A = M^2$, obtemos a solução de Kerr nas coordenadas de Boyer-Lindquist [20]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2, \quad (1.97)$$

onde

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad \text{e} \quad \Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2. \quad (1.98)$$

A partir da solução de Kerr (1.97) vemos que para r grande a métrica é dada aproximadamente por

$$ds^2 \approx \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{4Mas \sin^2 \theta}{r} dt d\phi - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.99)$$

Assim, comparando a métrica acima com o resultado obtido por Lense e Thirring [21] para o

campo gravitacional de um corpo de massa M e em rotação com momento angular J no limite de campo fraco:

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2M}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] dt^2 + \left[\frac{4J \sin^2 \theta}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] dt d\phi - \left[1 + \frac{2M}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (1.100)$$

onde usamos coordenadas apropriadas como feito em [22], vemos que na métrica de Kerr M deve ser identificado com a massa da fonte do campo gravitacional e $J = Ma$ é o momento angular dessa fonte.

Uma vez que M corresponde à massa do buraco negro e a determina o momento angular do mesmo, podemos observar, a partir da métrica de Kerr (1.97), que a aproximação de Lense-Thirring (1.99) pode ser obtida quando consideramos regiões distantes do buraco negro, ou quando consideramos que o campo gravitacional é produzido por uma fonte que gira lentamente ($a \ll 2M$). Tomando $a = 0$, ou seja, no limite quando o buraco negro não está em rotação, temos que a métrica de Kerr (1.97) se reduz à métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.101)$$

No limite assintótico $r \rightarrow \infty$ vemos de (1.97) que a métrica de Kerr se reduz à métrica do espaço plano

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.102)$$

que é o espaço-tempo de Minkowski em coordenadas esféricas. Semelhantemente, tomando o limite $M = 0$, o que significa que não temos nenhuma fonte do campo gravitacional, observamos que (1.97) se reduz a

$$ds^2 = dt^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left[\frac{dr^2}{r^2 + a^2} + d\theta^2 \right] - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.103)$$

que como pode ser verificado corresponde à métrica de Minkowski com coordenadas cartesianas dadas por

$$\begin{aligned} x &= (r^2 + a^2)^{1/2} \sin \theta \cos \phi, \\ y &= (r^2 + a^2)^{1/2} \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Observando as componentes da métrica de Kerr (1.97), vemos que elas apresentam uma singularidade quando

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0, \quad (1.105)$$

ou seja, $r = 0$ e $\theta = \pi/2$. Nesta região temos que $R_{abcd}R^{abcd} \rightarrow \infty$, logo ela corresponde a uma singularidade real da curvatura. A partir da equação (1.105) vemos que no limite de Schwarzschild, $a = 0$, a singularidade da curvatura ocorre quando $r = 0$ o que corresponde a um ponto no centro do buraco negro. No entanto, uma característica importante da métrica de Kerr é que esta singularidade é tornada mais suave, ocorrendo em um anel no plano equatorial dado por $r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$.

A métrica de Kerr também apresenta uma outra singularidade quando

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 = 0, \quad (1.106)$$

que ocorre em $r = r_{\pm} \equiv M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$. No entanto, nesta segunda possibilidade temos que $R_{abcd}R^{abcd}$ permanece finito quando $r = r_{\pm}$, logo essa região não é uma singularidade da curvatura, mas sim uma singularidade da coordenada que estamos usando. Nesta situação temos três casos a considerar que são: $M^2 < a^2$, $M^2 = a^2$ ou $M^2 > a^2$. No primeiro caso, $M^2 < a^2$, ocorrem violações da causalidade em regiões acessíveis a observadores distantes e, portanto, esta situação é considerada não-física. O caso de Kerr-extremo, $M^2 = a^2$, é uma solução intermediária entre a solução não-física e $M^2 > a^2$. Nesta situação, as duas soluções de (1.106) colapsam em uma única solução dada por $r = M$, que corresponde a um único horizonte de eventos. Por fim, se $M^2 > a^2$ temos dois horizontes de eventos localizados em $r = r_+$ e $r = r_-$.

Existe ainda um novo conceito em buracos negros com rotação que não aparece nos buracos negros sem rotação: a ergoesfera, ou ergoregião. Como já sabemos, a métrica de Kerr dada pela equação (1.97) é estacionária e axialmente simétrica. O vetor de Killing que corresponde à independência temporal é o vetor $\partial/\partial t$, ou seja, o vetor $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$, e o vetor de Killing correspondente à simetria axial é o vetor $\partial/\partial \phi$, ou $\eta^\mu = (0, 0, 0, 1)$. Agora, considerando o vetor de Killing $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$, temos que

$$\xi_\mu \xi^\mu = \frac{r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta}{\Sigma} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}. \quad (1.107)$$

Dessa equação obtemos duas superfícies dadas por $\xi_\mu \xi^\mu = 0$ que correspondem a

$$r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta = 0, \quad (1.108)$$

cujas soluções são dadas por $r = r_E^\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$. Comparando com as soluções para os horizontes de evento r_{\pm} , vemos que a superfície r_E^+ é a mais exterior dessas superfícies coincidindo com o horizonte de eventos exterior apenas nos pólos. Por outro lado a superfície r_E^- é a mais interior tendo o anel da singularidade da curvatura passando por ela e, também, coincidindo com o horizonte de eventos interior apenas nos pólos. A região entre as superfícies

r_+ e r_E^+ é conhecida como ergoesfera. Assim, temos que todas essas regiões constituintes de um buraco negro com rotação podem ser resumidas no gráfico abaixo

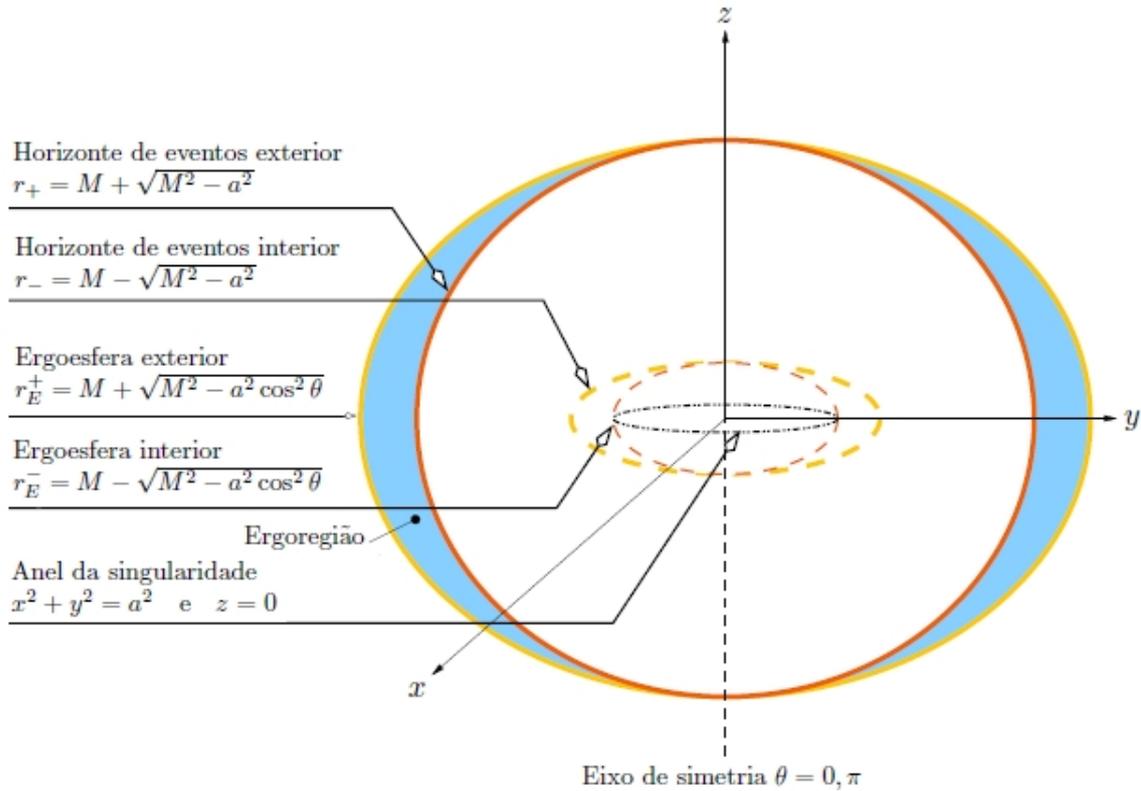


Figura 1.1: Diagrama esquemático dos horizontes, ergosuperfícies e singularidade da curvatura no espaço-tempo de Kerr.

Adaptado de: M. Visser, *The Kerr spacetime: A brief introduction*. <http://arXiv.org/abs/0706.0622v3>.

A partir da equação (1.107) vemos que na ergoesfera

$$\xi^\mu \xi_\mu < 0. \quad (1.109)$$

Fisicamente, $\xi^\mu \xi_\mu < 0$ significa que dt é um intervalo do tipo-espaço e que uma partícula não pode ter uma trajetória com $(r, \theta, \phi) = \text{const.}$. Portanto, uma partícula tem que girar com o buraco negro quando estiver dentro da ergoesfera. Logo, partículas físicas devem seguir trajetórias tais que $d\phi \neq 0$.

Em resumo temos que fora da superfície r_E^+ ou dentro da superfície r_E^- o vetor de Killing ξ^μ é tipo-tempo, entre essas duas superfícies o vetor de Killing é tipo-espaço e nas superfícies r_E^\pm ele é nulo. Assim, r_E^\pm é conhecida como superfície de limite estacionário, ou horizonte de Killing, uma vez que somente na região exterior a ela é possível para uma partícula material ou onda de luz permanecer em repouso em relação a um observador no infinito. Partículas

podem escapar dessa região para o infinito, mas não podem escapar de dentro da superfície do horizonte exterior.

O problema relativo à determinação das geodésicas em Kerr é completamente resolvido. Como discutido por Wald [23], em princípio, deveríamos resolver as equações geodésicas dadas por (1.9) o que seria muito laborioso. No entanto, devido às simetrias da solução de Kerr este trabalho pode ser quase que inteiramente eliminado. O fato é que existe uma proposição que afirma: Dado um vetor de Killing ξ^μ e um vetor tangente $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ a uma geodésica, o produto interno, $\xi_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, é uma constante ao longo da geodésica. Assim, cada simetria do problema dá origem a uma quantidade conservada, que nos permite integrar as equações geodésicas.

Como a métrica de Kerr apresenta duas isometrias temos, como já mostramos anteriormente, dois vetores de Killing associados a ela

$$\xi^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad \text{e} \quad \eta^\mu = (0, 0, 0, 1), \quad (1.110)$$

onde estamos usando as coordenadas (t, r, θ, ϕ) . Assim, usando esses vetores temos que a energia e o momento angular de uma partícula, ou onda luminosa, no espaço-tempo de Kerr são dados por

$$E = \xi_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right) + \frac{2Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right) \quad (1.111)$$

e

$$L = -\eta_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = -\frac{2Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} \left(\frac{dt}{d\lambda}\right) + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right), \quad (1.112)$$

onde para geodésicas tipo-tempo escolhemos λ como sendo o tempo próprio, e para geodésicas nulas escolhemos λ como um parâmetro afim. As outras integrais são $g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \text{const.}$ e $\xi_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \text{const.}$, onde $\xi_{\mu\nu}$ é um tensor de Killing dado por

$$\xi_{\mu\nu} = 2\Sigma l_{(\mu} \eta_{\nu)} + r^2 g_{\mu\nu}, \quad (1.113)$$

sendo

$$l^\mu = \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta}\right) \quad \text{e} \quad n^\mu = \left(\frac{r^2 + a^2}{2\Sigma}, -\frac{\Delta}{2\Sigma}, 0, \frac{a}{2\Sigma}\right), \quad (1.114)$$

que satisfazem as seguintes relações

$$l^\mu l_\mu = 0, \quad n^\mu n_\mu = 0 \quad \text{e} \quad l^\mu n_\mu = -1. \quad (1.115)$$

Vamos considerar geodésicas no plano equatorial, isto é, $\theta = \pi/2$. Para determinar essas

geodésicas, vamos considerar as equações (1.111) e (1.112) e

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = -\varepsilon, \quad (1.116)$$

onde $\varepsilon = +1, 0, -1$, para curvas tipo-espaço, tipo-luz e tipo-tempo, respectivamente. A equação radial pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V(E, L, r) = 0, \quad (1.117)$$

onde

$$V(E, L, r) = -\varepsilon \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} + \frac{1}{2} (\varepsilon - E^2) \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{M}{r^3} (L - aE)^2. \quad (1.118)$$

Quantitativamente esse resultado é semelhante ao obtido para a métrica de Schwarzschild, embora no caso de Kerr haja uma dependência não-trivial com a energia. No caso de Kerr as geodésicas equatoriais não são as mais gerais. As órbitas não necessariamente estão situadas no plano.

2 *Equação de Klein-Gordon no Espaço-Tempo de Kerr*

No capítulo anterior obtivemos a métrica que representa o espaço-tempo gerado por um corpo axialmente simétrico com rotação uniforme, que é dada pela métrica de Kerr (1.97). Vimos também que a métrica é uma quantidade fundamental que carrega informação sobre como os objetos físicos, partículas ou ondas, se comportarão na presença de um campo gravitacional, de forma que a teoria da relatividade geral vem a substituir a Lei de Gravitação Universal de Newton. No entanto, a teoria de Einstein ainda é uma teoria clássica, no sentido que com ela só podemos estudar o movimento de objetos em escalas macroscópicas.

O estudo dos fenômenos em escalas atômicas ou sub-atômicas só pôde ser feito de forma precisa com o advento da mecânica quântica. Assim, nada mais natural que tentarmos unir nossas duas melhores teorias: a relatividade geral, que é uma lei de gravitação, e a mecânica quântica, que estuda os fenômenos em escalas microscópicas, de forma a obtermos uma teoria que descreva como a gravidade atua nos sistemas quânticos. Contudo, até o momento não foi possível obter uma teoria quântica da gravitação. Deste modo, para estudarmos como a gravidade atua nos sistemas quânticos usamos uma teoria semi-clássica, onde fazemos uso da teoria clássica de Einstein para descrever a gravitação nas equações quânticas.

2.1 **Equação de Klein-Gordon**

Na mecânica quântica elementar a equação que descreve os fenômenos quânticos é a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

que corresponde à relação de conservação de energia não-relativística

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}), \quad (2.2)$$

onde fazemos a transformação canônica

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla. \quad (2.3)$$

No entanto, a equação de Schrödinger não é adequada para estudarmos fenômenos físicos que possuem energias muito maiores que a energia de repouso das partículas consideradas, uma vez que ela não é uma equação relativística.

Para obtermos uma equação de onda relativística usamos um argumento análogo ao anterior. Porém, dessa vez usamos a relação relativística entre o momento e a energia

$$\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m_0^2 c^2, \quad (2.4)$$

onde m_0 é a massa de repouso da partícula. Assim, usando as transformações canônicas (2.3), obtemos a equação de Klein-Gordon para partículas livres

$$(\square + \mu^2) \Psi = 0, \quad (2.5)$$

onde $\mu^2 = \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}$ e \square é o operador d'Alembertiano, que é dado por

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad (2.6)$$

uma vez que estamos usando unidades tais que $c = 1$.

Da definição do d'Alembertiano temos que a equação (2.5) pode ser escrita como

$$\left(\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta + \mu^2 \right) \Psi = 0, \quad (2.7)$$

sendo $\eta^{\alpha\beta}$ as componentes do tensor métrico no espaço-tempo de Minkowski, ou seja, no espaço-tempo quadri-dimensional plano. Com isto, a generalização da equação de Klein-Gordon para o espaço curvo, isto é, para uma região afetada por um campo gravitacional, é feita pela substituição de $\eta^{\alpha\beta}$ pela métrica do espaço-tempo curvo $g^{\mu\nu}$ e da derivada parcial ∂_α pela derivada covariante ∇_μ definida por

$$\nabla_\mu V^\rho = \partial_\mu V^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho V^\nu. \quad (2.8)$$

Logo, a equação de Klein-Gordon para o espaço curvo é dada por

$$(g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + \mu^2) \Psi = 0. \quad (2.9)$$

Agora, tomando a forma covariante do operador d'Alembertiano

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu), \quad (2.10)$$

onde g é o determinante do tensor métrico, podemos escrever a equação de Klein-Gordon no espaço curvo como

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) + \mu^2 \right] \Psi = 0. \quad (2.11)$$

2.2 Equação de Klein-Gordon no Espaço-Tempo de Kerr

Queremos estudar o comportamento quântico de partículas escalares, ou seja, partículas com spin nulo, no campo gravitacional de um buraco negro com rotação. Nesse sentido, devemos resolver a equação de Klein-Gordon (2.11), que é a equação que descreve o comportamento de partículas escalares, no espaço curvo dado pela métrica de Kerr (1.97). Nesse espaço, as componentes covariantes não-nulas do tensor métrico são dadas por

$$\begin{aligned} g_{00} &= \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right), & g_{03} &= g_{30} = \frac{2Mar \sin^2 \theta}{\Sigma}, & g_{11} &= -\frac{\Sigma}{\Delta}, \\ g_{22} &= -\Sigma, & g_{33} &= -\left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (2.12)$$

e usando a identidade

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\kappa} = \delta_\mu^\kappa, \quad (2.13)$$

obtemos as componentes contravariantes

$$\begin{aligned} g^{00} &= \frac{1}{\Sigma\Delta} \left[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta \right], & g^{03} &= g^{30} = \frac{2Mar}{\Sigma\Delta}, & g^{11} &= -\frac{\Delta}{\Sigma}, \\ g^{22} &= -\frac{1}{\Sigma}, & g^{33} &= -\frac{1}{\Sigma\Delta \sin^2 \theta} (\Sigma - 2Mr). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Escrevendo as componentes do tensor métrico na forma matricial,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & g_{03} \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ g_{30} & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2Mr}{\Sigma} & 0 & 0 & \frac{2Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} \\ 0 & -\frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ \frac{2Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} & 0 & 0 & -\left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

podemos calcular o determinante da métrica de Kerr nas coordenadas de Boyer e Lindquist, que será dado por

$$g = -\sin^2 \theta \Sigma^2. \quad (2.16)$$

Tendo obtido o determinante e as componentes contravariantes do tensor métrico, podemos calcular o d'Alembertiano no espaço-tempo de Kerr, que é dado por

$$\begin{aligned} \square &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \{ \partial_0 [\sqrt{-g} (g^{00} \partial_0 + g^{03} \partial_3)] + \partial_1 (\sqrt{-g} g^{11} \partial_1) + \partial_2 (\sqrt{-g} g^{22} \partial_2) + \\ &\quad \partial_3 [\sqrt{-g} (g^{30} \partial_0 + g^{33} \partial_3)] \} \end{aligned} \quad (2.17)$$

de onde, obtemos

$$\begin{aligned} \square &= \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Sigma \Delta} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \phi} - \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta \frac{\partial}{\partial r} \right) - \\ &\quad \frac{1}{\sin \theta \Sigma} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{\Sigma - 2Mr}{\Sigma \Delta \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Logo, usando a definição da equação de Klein-Gordon em um espaço curvo (2.11) e o resultado acima para o d'Alembertiano no espaço-tempo de Kerr, obtemos que a equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Kerr é dada por

$$\begin{aligned} \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \right. \\ \left. \frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\Delta \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - 2a \frac{[\Delta - (r^2 + a^2)]}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \phi} + \Sigma \mu^2 \right] \Psi = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Para resolver a equação (2.19) admitimos uma separação de variáveis Ansatz, da forma

$$\Psi(t, r, \theta, \phi) = R(r)S(\theta)e^{im\phi}e^{-i\omega t}, \quad (2.20)$$

que substituindo na equação de Klein-Gordon, resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(\Delta \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{S \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) - \frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta) m^2}{\Delta \sin^2 \theta} + \\ \frac{2a [\Delta - (r^2 + a^2)] m \omega}{\Delta} + \frac{[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta] \omega}{\Delta} - \Sigma \mu^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Esta equação pode ser separada em duas outras equações

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \left(\lambda_{lm} + c^2 \cos^2 \theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) S = 0, \quad (2.22)$$

onde $c^2 = a^2 (\omega^2 - \mu^2)$, e

$$\Delta \frac{d}{dr} \left(\Delta \frac{dR}{dr} \right) + \left[\omega^2 (r^2 + a^2)^2 - 4Ma\omega mr - \mu^2 r^2 \Delta + m^2 a^2 - (\omega^2 a^2 + \lambda_{lm}) \Delta \right] R = 0. \quad (2.23)$$

A equação (2.22) possui como soluções as funções harmônicas esferoidais oblatas $S_{lm}(ic, \cos \theta)$ com autovalores λ_{lm} onde l, m são inteiros tais que $|m| \leq l$ [24],[25]. Dessa forma, a partir da solução Ansatz (2.20), vemos que para que a solução da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Kerr esteja completa, precisamos apenas encontrar a solução radial dada por (2.23). No entanto, como pode ser observado em (2.23), a equação radial possui uma dependência complicada com a coordenada r , o que torna o nosso trabalho extremamente difícil.

Afim de resolvermos a parte radial da equação de Klein-Gordon, vamos escrever

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 = (r - r_+) (r - r_-), \quad (2.24)$$

onde

$$r_{\pm} = M \pm (M^2 - a^2)^{1/2}, \quad (2.25)$$

são as raízes de Δ e, como vimos no capítulo um, correspondem aos horizontes de eventos. Dessa forma, a equação radial (2.23) pode ser escrita como

$$(r - r_+) (r - r_-) \frac{d}{dr} \left((r - r_+) (r - r_-) \frac{dR}{dr} \right) + \left[\omega^2 (r^2 + a^2)^2 - 4Ma\omega mr - \mu^2 r^2 (r - r_+) (r - r_-) + m^2 a^2 - (\omega^2 a^2 + \lambda_{lm}) (r - r_+) (r - r_-) \right] R = 0. \quad (2.26)$$

Agora, podemos definir uma nova coordenada x e um parâmetro d dados por

$$Mx = r - r_+ \quad \text{e} \quad 2Md = r_+ - r_- = 2(M^2 - a^2)^{1/2}. \quad (2.27)$$

Nessa nova coordenada temos que quando $r \rightarrow r_+$, $x \rightarrow 0$, e quando $r \rightarrow \infty$, obtemos que $x \rightarrow \infty$. Dessa forma, como estamos interessados em estudar o comportamento de partículas escalares apenas na região exterior ao horizonte de eventos $r > r_+$, uma vez que não temos acesso à região interior, temos que a nossa região de interesse corresponde, nessa nova coordenada, à $0 \leq x < \infty$. Temos, também, da definição do parâmetro d que no caso de Kerr extremo, $a^2 = M^2$, $d = 0$.

Assim, com essas modificações, temos que a equação (2.26) resulta em

$$\frac{d}{dx} \left(x(x+2d) \frac{dR}{dx} \right) + \left(\omega^2 \frac{\left\{ M^2 \left[(x+d+1)^2 - (d^2-1) \right] \right\}^2}{M^2 x(x+2d)} - \frac{4a\omega m(x+d+1)}{x(x+2d)} - M^2 \mu^2 (x+d+1)^2 + \frac{m^2 a^2}{M^2 x(x+2d)} - (\omega^2 a^2 + \lambda_{lm}) \right) R = 0. \quad (2.28)$$

Definindo uma nova função dada por $R(x) = Z(x) [x(x+2d)]^{-1/2}$, temos que

$$\frac{dR}{dx} = \frac{1}{[x(x+2d)]^{1/2}} \frac{dZ}{dx} - \left\{ \frac{x+2d}{2[x(x+2d)]^{3/2}} + \frac{x}{2[x(x+2d)]^{3/2}} \right\}, \quad (2.29)$$

de forma que

$$\frac{d}{dx} \left(x(x+2d) \frac{dR}{dx} \right) = [x(x+2d)]^{1/2} \frac{d^2 Z}{dx^2} - \left\{ \frac{1}{2[x(x+2d)]^{1/2}} - \frac{(x+2d)^{1/2}}{4x^{3/2}} - \frac{x^{1/2}}{4(x+2d)^{3/2}} \right\} Z. \quad (2.30)$$

Com isto, podemos escrever a equação (2.28) na forma normal

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} + \left\{ M^2 (\omega^2 - \mu^2) + \frac{1}{M^2 x^2 (x+2d)^2} \left[\omega^2 M^4 \left[4(x+d+1)^2 + 4(x+d+1)x(x+2d) \right] - 4a\omega m M^2 (x+d+1) - \mu^2 M^4 \left[2x + (d+1)^2 \right] x(x+2d) + m^2 a^2 - (\omega^2 a^2 + \lambda_{lm}) M^2 (x+2d)x + M^2 d^2 \right] \right\} Z = 0. \quad (2.31)$$

2.3 Solução da Equação de Klein-Gordon no Espaço-Tempo de Kerr

Para obtermos a solução radial da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Kerr, observamos, seguindo Rowan e Stephenson [26], que podemos escrever a equação (2.31) na forma de frações parciais

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} + \left[M^2 (\omega^2 - \mu^2) + \frac{1}{M^2} \left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x+2d)^2} + \frac{D}{(x+2d)} \right) \right] Z = 0, \quad (2.32)$$

onde os coeficientes A , B , C e D são dados por

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{4d^2} \left[M^2 d^2 + m^2 a^2 - 4a\omega m M^2 (d+1) + 4\omega^2 M^4 (d+1)^2 \right], \\
B &= \frac{1}{4d^3} \left[4\omega^2 M^4 (d+1)^2 (2d-1) + 4a\omega m M^2 - 2\mu^2 M^4 (d+1)^2 d^2 - \right. \\
&\quad \left. 2d^2 (\omega^2 a^2 + \lambda_{lm}) M^2 - M^2 d^2 - m^2 a^2 \right], \\
C &= \frac{1}{4d^2} \left[4\omega^2 M^4 (d-1)^2 + 4a\omega m M^2 (d-1) + M^2 d^2 + m^2 a^2 \right], \\
D &= \frac{1}{4d^3} \left[4\omega^2 M^4 (2d+1)(d-1)^2 - 4a\omega m M^2 + 2\mu^2 M^4 d^2 (d-1)^2 + \right. \\
&\quad \left. 2d^2 (\omega^2 a^2 + \lambda_{lm}) M^2 + M^2 d^2 + m^2 a^2 \right].
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Por outro lado, dada uma equação da forma

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + p(x) \frac{dU}{dx} + q(x)U = 0, \tag{2.34}$$

temos que, fazendo a substituição

$$U(x) = Z(x)e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx}, \tag{2.35}$$

podemos escrevê-la na forma normal

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} + I(x)Z = 0, \tag{2.36}$$

onde

$$I(x) = q(x) - \frac{1}{2} \frac{dp(x)}{dx} - \frac{1}{4} [p(x)]^2. \tag{2.37}$$

Dessa forma, dada a equação confluyente de Heun [27]

$$x(x-x_0) \frac{d^2 U}{dx^2} + (B_1 + B_2 x) \frac{dU}{dx} + [B_3 - 2\eta \bar{\omega} (x-x_0) + \bar{\omega}^2 x (x-x_0)] U = 0 \quad (\bar{\omega} \neq 0) \tag{2.38}$$

e usando (2.34)–(2.37), podemos escrevê-la na forma normal como

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 Z}{dx^2} + \left[\bar{\omega}^2 - \frac{B_1^2 + 2B_1 x_0}{4x_0^2 x^2} - \frac{B_1^2 + B_1 B_2 x_0 + 2B_3 x_0^2 + 4\eta \bar{\omega} x_0^3}{2x_0^3 x} - \right. \\
\left. \frac{B_1^2 - 2B_1 x_0 + 2B_1 B_2 x_0 - 2B_2 x_0^2 + B_2^2 x_0^2}{4x_0^2 (x-x_0)^2} + \frac{B_1^2 + B_1 B_2 x_0 + 2B_3 x_0^2}{2x_0^3 (x-x_0)} \right] Z = 0.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

No entanto, como vimos a equação radial de Klein-Gordon no espaço-tempo de Kerr na região exterior ao horizonte de eventos pode ser escrita como (2.32). Logo, comparando (2.32) e (2.39), temos que a solução da equação radial na região exterior ao horizonte de eventos é dada

por

$$Z(x) = U(x)e^{\frac{1}{2} \int \frac{B_1+B_2x}{x(x+2d)} dx}, \quad (2.40)$$

onde $U(x)$ é solução da equação confluyente de Heun (2.38) com

$$x_0 = -2d, \quad \bar{\omega}^2 = M^2 (\omega^2 - \mu^2) \quad (2.41)$$

e η , B_1 , B_2 e B_3 , são obtidas a partir do seguinte sistema de equações não-lineares

$$\begin{aligned} \frac{-B_1^2 - 2B_1x_0}{4x_0^2} &= \frac{A}{M^2} \\ \frac{-B_1^2 - B_1B_2x_0 - 2B_3x_0^2 - 4\eta\bar{\omega}x_0^3}{2x_0^3} &= \frac{B}{M^2} \\ \frac{-B_1^2 + 2B_1x_0 - 2B_1B_2x_0 + 2B_2x_0^2 - B_2^2x_0^2}{4x_0^2} &= \frac{C}{M^2} \\ \frac{B_1^2 + B_1B_2x_0 + 2B_3x_0^2}{2x_0^3} &= \frac{D}{M^2}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Assim, a partir do sistema acima, encontramos que

$$\eta = -\frac{B+D}{2M^2\bar{\omega}}, \quad (2.43)$$

e temos quatro combinações possíveis para os parâmetros B_1 , B_2 e B_3 , a saber

$$\begin{aligned} B_1 &= 2 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4A}{M^2}} \right) d, & B_2 &= 2 \pm \sqrt{1 - \frac{4A}{M^2}} \mp \sqrt{1 - \frac{4C}{M^2}}, \\ B_3 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4dD}{M^2} \pm \sqrt{1 - \frac{4A}{M^2}} \mp \sqrt{1 - \frac{4C}{M^2}} - \sqrt{1 - \frac{4A}{M^2}} \sqrt{1 - \frac{4C}{M^2}} \right), \end{aligned} \quad (2.44)$$

ou

$$\begin{aligned} B_1 &= 2 \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4A}{M^2}} \right) d, & B_2 &= 2 \mp \sqrt{1 - \frac{4A}{M^2}} \mp \sqrt{1 - \frac{4C}{M^2}}, \\ B_3 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4dD}{M^2} \mp \sqrt{1 - \frac{4A}{M^2}} \mp \sqrt{1 - \frac{4C}{M^2}} + \sqrt{1 - \frac{4A}{M^2}} \sqrt{1 - \frac{4C}{M^2}} \right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

2.4 Solução da Equação de Klein-Gordon no Espaço-Tempo de Kerr-Extremo

Devemos observar que a parte radial da equação de Klein-Gordon como escrita em (2.32) não admite o caso da métrica dada por Kerr extremo $a^2 = M^2$, uma vez que neste caso $d = 0$ e, portanto, teríamos que os coeficientes A , B , C e D seriam divergentes. Assim, para estudarmos

o caso de Kerr extremo partimos da equação (2.31) e, tomando $d = 0$ e $a = M$, obtemos

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} + \left\{ M^2 (\omega^2 - \mu^2) + \frac{1}{M^2 x^4} \left[\omega^2 M^4 \left[4(x+1)^2 + 4(x+1)x^2 \right] - 4M^3 \omega m (x+1) - \mu^2 M^4 (2x+1)x^2 + m^2 M^2 - (\omega^2 M^2 + \lambda_{lm}) M^2 x^2 \right] \right\} Z = 0. \quad (2.46)$$

Portanto, expandindo os termos em potências de x , podemos escrevê-la da seguinte forma

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} + \left[M^2 (\omega^2 - \mu^2) + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} \right] Z = 0, \quad (2.47)$$

onde, desta vez, temos que os coeficientes das frações parciais são dados por

$$\begin{aligned} A &= 4\omega^2 M^2 - 2\mu^2 M^2, \\ B &= 8\omega^2 M^2 - \mu^2 M^2 - (\omega^2 M^2 + \lambda_{lm}), \\ C &= 8\omega^2 M^2 - 4M\omega m, \\ D &= 4\omega^2 M^2 - 4M\omega m + m^2. \end{aligned} \quad (2.48)$$

A equação duplamente confluyente de Heun [27] é dada por

$$x^2 \frac{d^2 U}{dx^2} + (B_1 + B_2 x) \frac{dU}{dx} + (B_3 - 2\eta \bar{\omega} x + \bar{\omega}^2 x^2) U = 0, \quad (\bar{\omega} \neq 0, B_1 \neq 0). \quad (2.49)$$

Agora, usando as equações (2.34)–(2.37) podemos escrevê-la na forma normal

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} + \left(\bar{\omega}^2 - \frac{2\eta \bar{\omega}}{x} + \frac{2B_2 - B_2^2 + 4B_3}{4x^2} + \frac{2B_1 - B_1 B_2}{2x^3} - \frac{B_1^2}{4x^4} \right) Z = 0. \quad (2.50)$$

Assim, comparando com a equação radial da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Kerr extremo (2.47), temos que

$$Z(x) = U(x) e^{\frac{1}{2} \int \frac{B_1 + B_2 x}{x^2} dx}, \quad (2.51)$$

onde $U(x)$ é solução da equação duplamente confluyente de Heun (2.49) com

$$\bar{\omega}^2 = M^2 (\omega^2 - \mu^2), \quad (2.52)$$

e, resolvendo o sistema de equações não-lineares

$$\begin{aligned} -2\eta\bar{\omega} &= A \\ \frac{2B_2 - B_2^2 + 4B_3}{4} &= B \\ \frac{2B_1 - B_1B_2}{2} &= C \\ -\frac{B_1^2}{4} &= D, \end{aligned} \quad (2.53)$$

temos que

$$\eta = -\frac{A}{2\bar{\omega}}, \quad (2.54)$$

e, obtemos duas combinações possíveis para os coeficientes B_1 , B_2 e B_3 , que são

$$B_1 = \mp 2i\sqrt{D}, \quad B_2 = \frac{\mp iC + 2\sqrt{D}}{\sqrt{D}}, \quad B_3 = \frac{-C^2 \mp 2iC\sqrt{D} + 4BD}{4D}. \quad (2.55)$$

2.5 Soluções Aproximadas

Apesar de termos encontrado a solução geral da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Kerr e Kerr extremo em termos das funções de Heun, essas funções possuem uma forma complicada e, ainda, não inteiramente estudadas. No entanto, como feito por Rowan e Stephenson [26], podemos obter soluções aproximadas, no espaço-tempo de Kerr, tomando os limites quando as partículas estão próximas a $x = 0$, ou seja, próximas ao horizonte de eventos, e no infinito.

2.5.1 Solução Próximo ao Horizonte de Eventos

Próximo ao horizonte de eventos $r \rightarrow r_+$, que é o mesmo que $x \rightarrow 0$. Para calcularmos este limite da solução (2.40), vamos escrever a equação confluyente de Heun da seguinte forma

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{B_1 + B_2x}{x(x-x_0)} \frac{dU}{dx} + \left[\bar{\omega}^2 - \frac{2\eta\bar{\omega}}{x} + \frac{B_3}{x(x-x_0)} \right] U = 0. \quad (2.56)$$

Como estamos interessados em $x \rightarrow 0$, podemos fazer a expansão

$$(x-x_0)^{-1} = -\frac{1}{x_0} - \frac{x}{x_0^2} - \frac{x^2}{x_0^3} + O(x^3), \quad (2.57)$$

obtendo, assim, que

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{B_1 + B_2x}{x} \left[-\frac{1}{x_0} - \frac{x}{x_0^2} - \frac{x^2}{x_0^3} + O(x^3) \right] \frac{dU}{dx} + \left[\frac{B_3}{x} \left(-\frac{1}{x_0} - \frac{x}{x_0^2} + O(x^2) \right) - \frac{2\eta\bar{\omega}}{x} + \bar{\omega}^2 \right] U = 0. \quad (2.58)$$

Agora, usando a expansão (2.57) na solução (2.40), temos que a solução da equação confluyente de Heun pode ser escrita como

$$U(x) = Z(x)e^{-\frac{1}{2} \int \frac{B_1 + B_2x}{x} \left(-\frac{1}{x_0} - \frac{x}{x_0^2} - \frac{x^2}{x_0^3} + O(x^3) \right) dx}, \quad (2.59)$$

que substituindo na equação (2.58), obtemos

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + \left[\bar{\omega}^2 + \frac{-\frac{B_1^2}{4x_0^2} - \frac{B_1}{2x_0}}{x^2} + \frac{-2\eta\bar{\omega} - \frac{B_1^2}{2x_0^3} - \frac{B_1B_2}{2x_0^2} - \frac{B_3}{x_0}}{x} - \frac{3B_1^2}{4x_0^4} + \frac{B_1}{2x_0^3} - \frac{B_1B_2}{x_0^3} + \frac{B_2}{2x_0^2} - \frac{B_2^2}{4x_0^2} - \frac{B_3}{x_0^2} + O(x) \right] Z = 0. \quad (2.60)$$

Agora, substituindo os valores das constantes como dadas por (2.41), (2.43) e (2.44) ou (2.45), obtemos

$$\frac{d^2Z}{dx^2} = \left[\left(M^2 (\mu^2 - \omega^2) - \frac{C}{4M^2d^2} - \frac{D}{2M^2d} \right) - \frac{1}{M^2} \left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} \right) + O(x) \right] Z. \quad (2.61)$$

que é o resultado obtido por Rowan e Stephenson [26].

Assim, como feito por eles, desprezando os termos de ordem $O(x)$ e fazendo a mudança de variável

$$\eta = 2\sqrt{F}x, \quad (2.62)$$

onde

$$F = \left(M^2 (\mu^2 - \omega^2) - \frac{C}{4M^2d^2} - \frac{D}{2M^2d} \right), \quad (2.63)$$

temos que

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\eta}{dx} \frac{d}{d\eta} = 2\sqrt{F} \frac{d}{d\eta} \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{dx^2} = 4F \frac{d^2}{d\eta^2}. \quad (2.64)$$

Assim, substituindo a nova variável η através das relações (2.62), (2.63) e (2.64), e desprezando os termos de ordem $O(x)$ na equação (2.61), obtemos

$$\frac{d^2Z}{d\eta^2} = \left(\frac{1}{4} - \frac{B}{2M^2\sqrt{F}} \frac{1}{\eta} - \frac{A}{M^2\eta^2} \right) Z, \quad (2.65)$$

que comparando com a equação de Whittaker

$$\frac{d^2 Z}{d\eta^2} = \left(\frac{1}{4} - \frac{\bar{k}}{\eta} + \frac{\bar{m}^2 - \frac{1}{4}}{\eta^2} \right) Z \quad (2.66)$$

segue que (2.65) tem solução em termos de funções de Whittaker com

$$\bar{k} = \frac{B}{2M^2\sqrt{F}}, \quad \bar{m}^2 = \frac{1}{4} - \frac{A}{M^2}. \quad (2.67)$$

Nas coordenadas originais as soluções são dadas por

$$R(r) \propto \begin{cases} \frac{M}{\Delta^{1/2}} M_{\bar{k}, \bar{m}} \left(\frac{2\sqrt{F}}{M} (r - r_+) \right) \\ \frac{M}{\Delta^{1/2}} M_{\bar{k}, -\bar{m}} \left(\frac{2\sqrt{F}}{M} (r - r_+) \right) \end{cases} \quad (2.68)$$

contanto que $F \neq 0$, onde \bar{k} , \bar{m} são obtidos de (2.67) e $M_{\bar{k}, \pm\bar{m}}$ são funções de Whittaker. Uma vez que $2\bar{m}$ não seja inteiro estas duas funções, $M_{\bar{k}, +\bar{m}}$ e $M_{\bar{k}, -\bar{m}}$, formam soluções independentes da equação de Whittaker. Caso contrário tomamos como segunda solução as funções de Whittaker de segunda espécie $W_{\bar{k}, \bar{m}}$. Como não há nenhuma razão física pela qual $2\bar{m}$, com \bar{m} dado por (2.67) seja inteiro, tomamos nossa solução em termos das funções $M_{\bar{k}, \pm\bar{m}}$. Neste caso, para qualquer z temos a expansão em série

$$M_{\bar{k}, \bar{m}}(z) = z^{\bar{m} + \frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z} \left(1 + \frac{(\frac{1}{2} + \bar{m} - \bar{k})}{1!(2\bar{m} + 1)!} z + \frac{(\frac{1}{2} + \bar{m} - \bar{k}) (\frac{3}{2} + \bar{m} - \bar{k})}{2!(2\bar{m} + 1)! (2\bar{m} + 2)} z^2 + \dots \right). \quad (2.69)$$

Portanto, para $r \rightarrow r_+$, temos as soluções radiais

$$R(r) \propto \begin{cases} \frac{M}{\Delta^{1/2}} e^{-(\sqrt{F}/M)(r-r_+)} \left(\frac{2\sqrt{F}}{M} (r - r_+) \right)^{\frac{1}{2} + \bar{m}} \\ \frac{M}{\Delta^{1/2}} e^{-(\sqrt{F}/M)(r-r_+)} \left(\frac{2\sqrt{F}}{M} (r - r_+) \right)^{\frac{1}{2} - \bar{m}} \end{cases} \quad (2.70)$$

2.5.2 Solução no Infinito

No infinito $r \rightarrow \infty$, temos que $x \rightarrow \infty$. Assim, expandindo $(x - x_0)^{-1}$ para $x \rightarrow \infty$, obtemos

$$(z - x_0)^{-1} = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right). \quad (2.71)$$

Assim, substituindo essa expansão na equação confluyente de Heun (2.56), resulta

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{B_1 + B_2 x}{x^2} \frac{dU}{dx} + \left(\bar{\omega}^2 - \frac{2\eta \bar{\omega}}{x} + \frac{B_3}{x^2} \right) U = 0. \quad (2.72)$$

No entanto, da solução da equação de Klein-Gordon dada por (2.40), temos, expandindo o termo $(x - x_0)$ que

$$U(x) = Z(x)e^{-\frac{1}{2} \int \frac{B_1 + B_2 x}{x^2} dx}, \quad (2.73)$$

logo, podemos escrever a equação de Heun como

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} + \left[\bar{\omega}^2 + \frac{\frac{B_2}{2} - \frac{B_2^2}{4} + B_3}{x^2} - \frac{2\eta \bar{\omega}}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \right] Z = 0. \quad (2.74)$$

Assim, usando os valores das constantes $\bar{\omega}^2$, η , x_0 , B_1 , B_2 e B_3 obtemos

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} = \left[M^2 (\mu^2 - \omega^2) - \frac{1}{M^2} \left(\frac{A + C - 2dD}{x^2} + \frac{B + D}{x} \right) - O\left(\frac{1}{x^3}\right) \right] Z. \quad (2.75)$$

que, também, é um resultado obtido por [26].

Fazendo a mudança de variável

$$\xi = 2M (\mu^2 - \omega^2)^{1/2} x, \quad (2.76)$$

temos que

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} = 2M (\mu^2 - \omega^2)^{1/2} \frac{d}{d\xi} \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{dx^2} = 4M^2 (\mu^2 - \omega^2) \frac{d^2}{d\xi^2}. \quad (2.77)$$

Logo, usando (2.76) e (2.77), e desprezando os termos de ordem $O\left(\frac{1}{x^3}\right)$ na equação (2.75), temos que

$$\frac{d^2 Z}{d\xi^2} = \left[\frac{1}{4} - \frac{B + D}{2M^3 (\mu^2 - \omega^2)^{1/2} \xi} - \frac{A + C - 2dD}{M^2 \xi^2} \right] Z. \quad (2.78)$$

Dessa forma, comparando com a equação de Whittaker dada por (2.66), vemos que a solução de (2.78) é dada em termos de funções de Whittaker com

$$\bar{k} = \frac{B + D}{2M^3 (\mu^2 - \omega^2)^{1/2}}, \quad \bar{m}^2 = \frac{1}{4} - \frac{A + C - 2dD}{M^2}. \quad (2.79)$$

Voltando as coordenadas originais, temos que as soluções são dadas assintoticamente por

$$R(r) \propto \begin{cases} \frac{M}{\Delta^{1/2}} W_{\bar{k}, \bar{m}} \left(2 (\mu^2 - \omega^2)^{1/2} (r - r_+) \right) \\ \frac{M}{\Delta^{1/2}} W_{-\bar{k}, \bar{m}} \left(-2 (\mu^2 - \omega^2)^{1/2} (r - r_+) \right) \end{cases} \quad (2.80)$$

onde usamos as funções $W_{\bar{k}, \bar{m}}$ ao invés de $M_{\bar{k}, \bar{m}}$ devido ao seu comportamento assintótico mais simples. As funções, $W_{\bar{k}, \bar{m}}(z)$ e $W_{-\bar{k}, \bar{m}}(-z)$, formam duas soluções independentes da equação de Whittaker, de forma que a solução assintótica de (2.26) é dada pela equação acima com \bar{k} , \bar{m}

dados por (2.79). Agora, para $|z|$ grande, podemos fazer a expansão em série

$$W_{\bar{k},\bar{m}}(z) \propto e^{-\frac{1}{2}z} z^{\bar{k}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\bar{m}^2 - (\bar{k} - \frac{1}{2})^2] [\bar{m}^2 - (\bar{k} - \frac{3}{2})^2] \cdots [\bar{m}^2 - (\bar{k} - \bar{m} - \frac{1}{2})^2]}{n! z^n} \right), \quad (2.81)$$

de forma que as soluções radiais, quando $r \rightarrow \infty$ são dadas por

$$R(r) \propto \begin{cases} \frac{M}{\Delta^{1/2}} e^{-[(\mu^2 - \omega^2)^{1/2}(r-r_+)]} [2(\mu^2 - \omega^2)^{1/2}(r-r_+)]^{\bar{k}} \\ \frac{M}{\Delta^{1/2}} e^{+[(\mu^2 - \omega^2)^{1/2}(r-r_+)]} [-2(\mu^2 - \omega^2)^{1/2}(r-r_+)]^{-\bar{k}} \end{cases} \quad (2.82)$$

contanto que $\mu^2 - \omega^2 \neq 0$.

2.5.3 Casos Especiais

As expansões em série das funções $M_{\bar{k},\bar{m}}$ e $W_{\bar{k},\bar{m}}$ dadas por (2.69) e (2.81) não são apropriadas nos casos em que $F \rightarrow 0$ em (2.67) ou $\mu^2 \rightarrow \omega^2$ em (2.79). Em tais casos $|\bar{k}|$ se torna muito grande de forma que as expansões apropriadas para x pequeno ou para x grande são dadas por Slater [28] ou Olver [29], respectivamente.

Nossos resultados também falham quando para $x \rightarrow 0$ temos $F = 0$, ou quando para $x \rightarrow \infty$ temos $\mu^2 = \omega^2$. Essas situações devem ser analisadas em separado, que é o que faremos agora.

1° Caso: $F = 0$

Tomando $F = 0$ na equação (2.61), resulta

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} = \left[-\frac{1}{M^2} \left(\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} \right) + O(x) \right] Z. \quad (2.83)$$

Desprezando termos de ordem $O(x)$ e comparando com a equação

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} = \left(\frac{\alpha^2 - 1}{4x^2} + \frac{\beta^2}{4x} \right) Z, \quad (2.84)$$

que possui como soluções

$$Z = \begin{cases} x^{1/2} I_{\alpha}(\beta x^{1/2}) \\ x^{1/2} K_{\alpha}(\beta x^{1/2}) \end{cases}, \quad (2.85)$$

onde I_{α} e K_{α} são funções de Bessel modificadas de ordem α do primeiro e segundo tipo, respectivamente, temos que

$$\alpha^2 = 1 - \frac{4A}{M^2} \quad \text{e} \quad \beta^2 = -\frac{4B}{M^2}. \quad (2.86)$$

Portanto, no caso em que $x \rightarrow 0$ e $F = 0$, as soluções radiais serão dadas por

$$R(r) \propto \begin{cases} \frac{M^{1/2}}{\Delta^{1/2}} (r - r_+)^{1/2} I_\alpha \left(\frac{\beta}{M^{1/2}} (r - r_+)^{1/2} \right) \\ \frac{M^{1/2}}{\Delta^{1/2}} (r - r_+)^{1/2} K_\alpha \left(\frac{\beta}{M^{1/2}} (r - r_+)^{1/2} \right) \end{cases}. \quad (2.87)$$

2° Caso: $\mu^2 = \omega^2$

Fazendo $\mu^2 = \omega^2$ em (2.75), obtemos

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} + \left[\frac{1}{M^2} \left(\frac{A + C - 2dD}{x^2} + \frac{B + D}{x} \right) + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \right] Z = 0. \quad (2.88)$$

Logo, desprezando os termos de ordem $O(1/x^3)$, temos

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} = - \left(\frac{A + C - 2dD}{M^2 x^2} + \frac{B + D}{M^2 x} \right) Z, \quad (2.89)$$

que comparando com (2.84) resulta que a equação acima possui soluções em termos das funções modificadas de Bessel, I_α e K_α , com

$$\alpha^2 = 1 - \frac{4}{M^2} (A + C - 2dD) \quad \text{e} \quad \beta^2 = -\frac{4}{M^2} (B + D). \quad (2.90)$$

Assim, no caso em que $x \rightarrow \infty$ e $\mu^2 = \omega^2$, as soluções radiais são dadas por (2.87) com α e β dados pelo resultado acima.

Neste capítulo foi resolvida a equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Kerr, e particularizada para o caso Kerr extremo. A solução é dada em termos das funções de Heun, e é válida no intervalo $0 < x < \infty$. Neste sentido, a solução obtida generaliza o resultado encontrado por Rowan e Stephenson [26] que afirmam não conhecer uma solução geral para a equação de Klein-Gordon no buraco negro de Kerr no intervalo $0 < x < \infty$, razão pela qual eles obtêm a solução somente próximo do horizonte de eventos, $x = 0$, e distante do buraco negro, $x \rightarrow \infty$.

3 *Solução da Equação de Klein-Gordon na Aproximação de Lense-Thirring*

Usando uma teoria semi-clássica, conseguimos obter a solução geral da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Kerr na região exterior ao horizonte de eventos do campo gravitacional. Obtivemos que nesta região a solução é dada em termos das funções confluyente e duplamente confluyente de Heun. Além disso, reobtivemos soluções aproximadas nas regiões próxima ao horizonte de eventos e no infinito. Contudo, uma vez que as funções de Heun ainda não foram completamente estudadas e são suficientemente complicadas, e devido às próprias complicações inerentes à métrica de Kerr, as soluções obtidas são difíceis de ser analisadas.

Uma maneira mais fácil de estudar os efeitos do campo gravitacional gerado por um corpo com rotação, consiste em usar o limite de baixas rotações. Dessa forma, ainda podemos analisar os efeitos da rotação, trabalhando com uma métrica mais simples, sem as complicações da métrica de Kerr. Assim, neste capítulo, usando o limite de baixas rotações procuramos obter soluções da equação de Klein-Gordon através de duas abordagens diferentes: usando o método assintótico desenvolvido por Green e Liouville, e adotado por Rowan e Stephenson [30, 31] e usando uma expansão em série como feito por Elizalde [32], ambos para o caso de um buraco negro de Schwarzschild. A partir destes trabalhos, fazemos uma generalização destes, levando em conta a métrica de Lense-Thirring.

3.1 *Aproximação de Lense-Thirring*

A partir da métrica de Kerr (1.97), podemos obter a métrica gerada por um corpo no limite de baixas rotações, se desprezarmos os termos de ordem quadrática no momento angular. Dessa forma, tomando $a^2 \approx 0$, obtemos

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{4Ma \sin^2 \theta}{r} dt d\phi, \quad (3.1)$$

que como vimos no capítulo 1, corresponde à métrica de Lense-Thirring. Neste caso, a equação de Klein-Gordon será dada por

$$\left[\frac{r^4}{r^2 - 2Mr} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left((r^2 - 2Mr) \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{4Mar}{r^2 - 2Mr} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \phi} + r^2 \mu^2 \right] \Psi = 0. \quad (3.2)$$

Assim, usando o método de separação de variáveis como feito no capítulo anterior, a solução da equação acima fica restrita à encontrarmos as soluções de uma equação angular e uma radial, dadas por

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \left(\lambda_{lm} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) S = 0 \quad (3.3)$$

e

$$(r^2 - 2Mr) \frac{d}{dr} \left[(r^2 - 2Mr) \frac{dR}{dr} \right] + [\omega^2 r^4 - 4Ma\omega m r - \mu^2 r^2 (r^2 - 2Mr) - \lambda_{lm} (r^2 - 2Mr)] R = 0. \quad (3.4)$$

Contudo, a equação angular já é conhecida, e tem como solução as funções associadas de Legendre. Nos falta, então, resolver a equação radial, o que faremos usando dois métodos distintos que serão discutidos nas próximas seções.

3.2 Solução pelo Método Assintótico

O primeiro método que usaremos na solução da parte radial da equação de Klein-Gordon (3.4), consiste num método assintótico desenvolvido por Green e Liouville. Para isto, vamos escrever a equação radial como

$$\frac{d}{dr} \left(r(r - 2M) \frac{dR}{dr} \right) - \left(\lambda_{lm} - \frac{\omega^2 r^3}{r - 2M} + \frac{4Ma\omega m}{r - 2M} + \mu^2 r^2 \right) R = 0. \quad (3.5)$$

Dessa forma, usando a mudança de coordenada dada por

$$x = \frac{r - 2M}{M}, \quad (3.6)$$

obtemos

$$\frac{d}{dx} \left(x(x + 2) \frac{dR}{dx} \right) - \left(\lambda_{lm} + M^2 \mu^2 (x + 2)^2 + \frac{4a\omega m}{x} - \frac{M^2 \omega^2 (x + 2)^3}{x} \right) R = 0. \quad (3.7)$$

Agora, definindo $R(x) = Z(x)[x(x+2)]^{-1/2}$, obtemos a seguinte equação para $Z(x)$:

$$\frac{d^2Z}{dx^2} - \left[M^2\mu^2 \left(\frac{2+x}{x} \right) + \frac{\lambda_{lm}}{x(x+2)} - M^2\omega^2 \left(\frac{2+x}{x} \right)^2 + \frac{4a\omega m}{x^2(x+2)} - \frac{1}{x^2(x+2)^2} \right] Z = 0. \quad (3.8)$$

Vamos mudar a variável independente de x para ξ pela transformação $x = x(\xi)$, e tomar $G = (\xi')^{1/2}Z$, onde a linha denota derivada em relação a x . Assim, resulta

$$\frac{d^2G}{d\xi^2} = \left\{ \left[M^2\mu^2 \left(\frac{2+x}{x} \right) + \frac{\lambda_{lm}}{x(x+2)} - M^2\omega^2 \left(\frac{2+x}{x} \right)^2 + \frac{4a\omega m}{x^2(x+2)} - \frac{1}{x^2(x+2)^2} \right] \frac{1}{\xi'^2} + \frac{\xi'''}{2\xi'^3} - \frac{3}{4} \frac{\xi''^2}{\xi'^4} \right\} G. \quad (3.9)$$

Podemos, ainda, definir $k^2 = \mu^2 M^2 + \lambda_{lm}$, $\alpha^2 = \frac{\lambda_{lm}}{k^2}$ e $\beta^2 = \frac{\mu^2 M^2}{k^2}$, de tal forma que $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$ e $\alpha^2 = 1 - \beta^2$. Com estas definições, obtemos que (3.9) pode ser escrita como

$$\frac{d^2G}{d\xi^2} = \left\{ \left[k^2 \left[\beta^2 \left(\frac{2+x}{x} \right) + \frac{\alpha^2}{x(x+2)} \right] - M^2\omega^2 \left(\frac{2+x}{x} \right)^2 + \frac{4a\omega m}{x^2(x+2)} - \frac{1}{x^2(x+2)^2} \right] \frac{1}{\xi'^2} + \frac{\xi'''}{2\xi'^3} - \frac{3}{4} \frac{\xi''^2}{\xi'^4} \right\} G. \quad (3.10)$$

Observamos, que até este momento, a relação entre as variáveis x e ξ não foi definida, estando, ainda, à nossa disposição. Assim, escolhendo

$$\xi'^2 = \left[\beta^2 \left(\frac{2+x}{x} \right) + \frac{\alpha^2}{x(x+2)} \right], \quad (3.11)$$

temos que

$$\xi = \int_0^x \left[\beta^2 \left(\frac{2+x}{x} \right) + \frac{\alpha^2}{x(x+2)} \right]^{1/2} dx. \quad (3.12)$$

Como pode ser verificado, a relação acima pode ser expressa em termos de uma soma de integrais elípticas e, observando o gráfico abaixo, vemos que, independentemente, do valor de β , a função ξ cresce com o valor de x de forma que quando $x \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 0$, e quando $x \rightarrow \infty$, $\xi \rightarrow \infty$. Com esta escolha da função ξ , a equação (3.9) pode ser escrita na forma

$$\frac{d^2G}{d\xi^2} = \left[k^2 - M^2\omega^2 \left(\frac{2+x}{x} \right)^2 \right] \frac{1}{\xi'^2} + \frac{4a\omega m}{x^2(x+2)} \frac{1}{\xi'^2} - \frac{1}{x^2(x+2)^2} \frac{1}{\xi'^2} + \frac{\xi'''}{2\xi'^3} - \frac{3}{4} \frac{\xi''^2}{\xi'^4} \right] G. \quad (3.13)$$

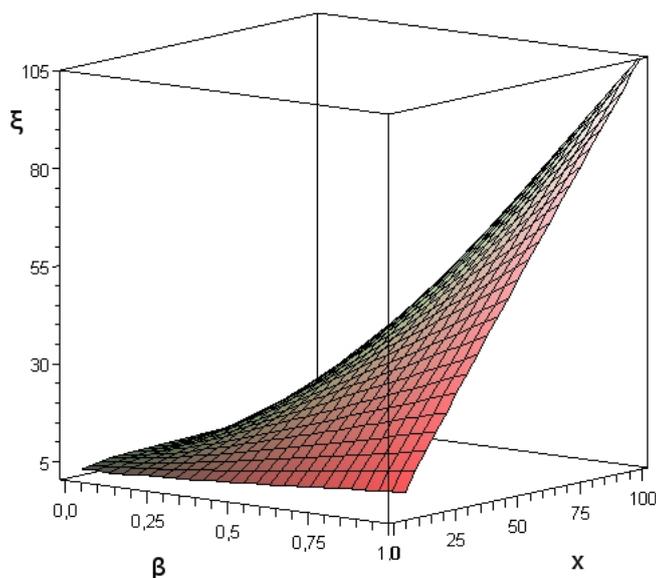


Figura 3.1: Gráfico mostrando a variação da função ξ em relação a x e ao parâmetro β .

Como discutido no artigo de Rowan e Stephenson [30], o termo

$$-\frac{1}{x^2(x+2)^2} \frac{1}{\xi'^2} + \frac{\xi'''}{2\xi'^3} - \frac{3}{4} \frac{\xi''^2}{\xi'^4}, \quad (3.14)$$

pode ser escrito como $-\frac{1}{4\xi^2} + g_1(\xi)$, onde

$$\begin{aligned} g_1(\xi) &= \left[\frac{\xi'''}{2\xi'^3} - \frac{3}{4} \frac{\xi''^2}{\xi'^4} - \frac{1}{x^2(x+2)^2} \frac{1}{\xi'^2} \right] + \frac{1}{4\xi^2} \\ &= \frac{\beta^4(x+2)^4(4x-1) + 2\alpha^2\beta^2(x+2)^2(3x^2+3x-1) + \alpha^2(x^2+2x-1)}{4[\beta^2(x+2)^2 + \alpha^2]^3 x(x+2)} + \frac{1}{4\xi^2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

A função $g_1(\xi)$, é uma função que varia lentamente, é limitada e possui valores menores que 1, como pode ser observado no gráfico. Na verdade, vemos que para $x < 0$ a função $g_1(\xi)$ apresenta divergência, no entanto, como estamos interessados apenas nos valores de x positivos ($x < 0$) corresponde a uma região dentro do horizonte de eventos), nessa região a função é bem comportada.

Os outros termos além de k^2 são

$$-M^2\omega^2 \left(\frac{2+x}{x} \right)^2 \frac{1}{\xi'^2} + \frac{4a\omega m}{x^2(x+2)} \frac{1}{\xi'^2} = -M^2\omega^2 \left(\frac{2+x}{x} \right)^2 \frac{x(x+2)}{\beta^2(x+2)^2 + \alpha^2} + \quad (3.16)$$

$$\frac{4a\omega m}{x^2(x+2)} \frac{x(x+2)}{\beta^2(x+2)^2 + \alpha^2}. \quad (3.17)$$

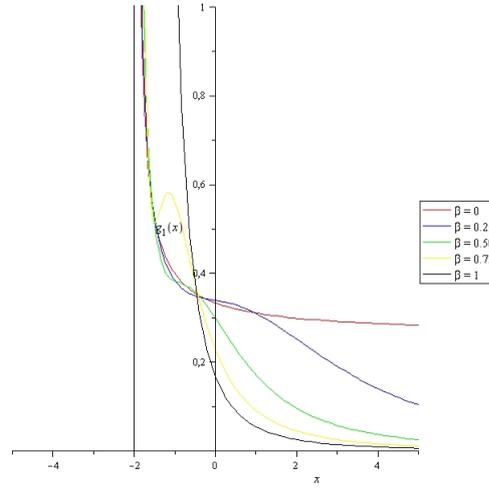


Figura 3.2: Gráfico mostrando a variação da função $g_1(\xi)$ em relação a x e para alguns valores do parâmetro β .

Para x pequeno, temos de (3.11) que

$$\xi \approx \sqrt{2x} (4\beta^2 + \alpha^2)^{1/2}, \quad (3.18)$$

e, portanto, o termo (3.16) se comporta como

$$\begin{aligned} -\frac{8M^2\omega^2}{x(4\beta^2 + \alpha^2)} + \frac{4a\omega m}{x(4\beta^2 + \alpha^2)} &= -\frac{16M^2\omega^2}{\xi^2} + \frac{8a\omega m}{\xi^2} \\ &= -\frac{16M^2\omega^2 - 8a\omega m}{\xi^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Logo, a equação (3.13) pode ser escrita como

$$\frac{d^2G}{d\xi^2} = \left(k^2 - \frac{1}{4\xi^2} - \frac{16M^2\omega^2 - 8a\omega m}{\xi^2} + g_1(\xi) + g_2(\xi) + g_3(\xi) \right) G, \quad (3.20)$$

onde

$$g_2(\xi) = \frac{16M^2\omega^2}{\xi^2} - \frac{M^2\omega^2(x+2)^3}{x(\beta^2(x+2)^2 + \alpha^2)} \quad (3.21)$$

e

$$g_3(\xi) = -\frac{8a\omega m}{\xi^2} + \frac{4a\omega m}{x(\beta^2(x+2)^2 + \alpha^2)}. \quad (3.22)$$

A função $g_2(\xi)$, também, já foi estudada por Rowan e Stephenson [31], e eles obtiveram que, contanto que a energia da partícula escalar seja muito menor que o inverso do seu comprimento de onda Compton ($\omega \ll \mu$), a função $g_2(\xi)$ será muito menor que k^2 . De fato, podemos verificar essas propriedades da função $g_2(\xi)$ através do gráfico abaixo.

Por fim, temos que $g_3(\xi)$, também, é uma função que varia lentamente, limitada e des-

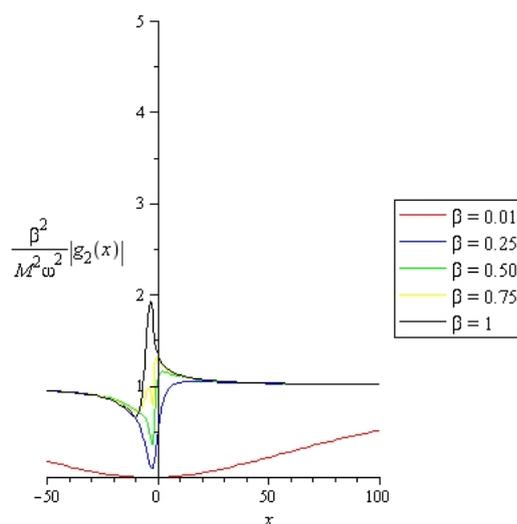


Figura 3.3: Gráfico mostrando a variação da função $g_2(\xi)$ em relação a x e para alguns valores do parâmetro β .

prezível em comparação com k^2 , contanto que o fator $a\omega m$ seja pequeno. Na verdade, como estamos considerando o limite de um buraco negro com baixa velocidade de rotação, o valor de a deve ser pequeno, além disso, para que a função $g_2(\xi)$ fosse pequena em comparação com k^2 , consideramos que $\omega \ll \mu$. Assim, para que $a\omega m$ seja pequeno, devemos ter, apenas, que a componente m do momento angular da partícula escalar seja desprezível em comparação com k^2 . Devemos observar, ainda, como apresentado por Rowan e Stephenson, que para um objeto com uma massa igual à massa Solar e com um raio de Schwarzschild $2M$ da ordem de $10^5 cm$, $\mu M \leq k$ é da ordem de 10^{18} , considerando um campo de mesons, que possui $\mu \approx 10^{13} cm^{-1}$.

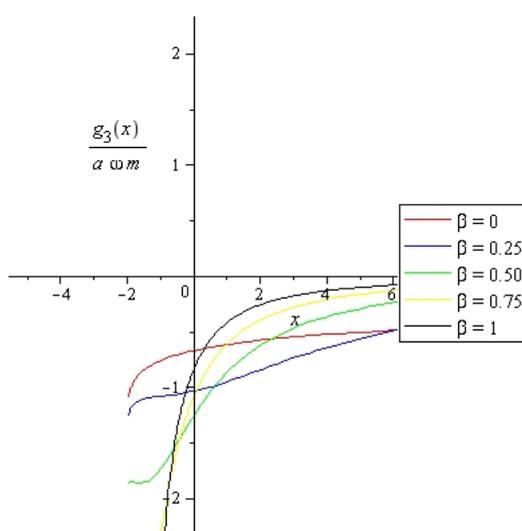


Figura 3.4: Gráfico mostrando a variação da função $g_3(\xi)$ em relação a x e para alguns valores do parâmetro β .

Assim, diante dessa considerações, podemos desprezar os termos $g_1(\xi)$, $g_2(\xi)$ e $g_3(\xi)$ em

(3.20), obtendo

$$\frac{d^2G}{d\xi^2} = \left(k^2 - \frac{\frac{1}{4} + 16M^2\omega^2 - 8a\omega m}{\xi^2} \right) G. \quad (3.23)$$

Fazendo $u = 2k\xi$, temos

$$\frac{d^2G}{du^2} = \left(\frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{4} + 16M^2\omega^2 - 8a\omega m}{u^2} \right) G, \quad (3.24)$$

que possui a estrutura formal da equação de Whittaker, escrita na forma

$$\frac{d^2G}{du^2} = \left(\frac{1}{4} - \frac{\bar{k}}{u} + \frac{\bar{m}^2 - \frac{1}{4}}{u^2} \right) G. \quad (3.25)$$

A solução da equação acima é a função de Whittaker dada por [33]

$$G(u) = AM_{\bar{k}, \bar{m}}(u) + BM_{\bar{k}, -\bar{m}}(u), \quad (3.26)$$

no caso em que $2\bar{m}$ não é um inteiro negativo, podemos escrever

$$M_{\bar{k}, \bar{m}}(z) = z^{\bar{m} + \frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z} \left(1 + \frac{(\frac{1}{2} + \bar{m} - \bar{k})}{1!(2\bar{m} + 1)!} z + \frac{(\frac{1}{2} + \bar{m} - \bar{k}) (\frac{3}{2} + \bar{m} - \bar{k})}{2!(2\bar{m} + 1)! (2\bar{m} + 2)} z^2 + \dots \right). \quad (3.27)$$

A solução de (3.24) é, portanto,

$$G(u) = AM_{0, \bar{m}}(u) + BM_{0, -\bar{m}}(u) \quad (3.28)$$

onde A e B são constantes, e $\bar{m} = \sqrt{8a\omega m - 16M^2\omega^2}$.

Uma representação conveniente para $M_{\bar{k}, \bar{m}}$, quando, na equação de Whittaker, temos $\bar{k} = 0$ é a série de Kummer

$$M_{0, \bar{m}}(u) = u^{\bar{m} + \frac{1}{2}} \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{u^{2p}}{2^{4p} p! (\bar{m} + 1) \dots (\bar{m} + p)} \right). \quad (3.29)$$

Além disso, $M_{0, \bar{m}}$ pode ser expressa em termos de funções de Bessel

$$M_{0, i\bar{m}}(u) = \Gamma(1 + i\bar{m}) 2^{2i\bar{m}} u^{1/2} I_{i\bar{m}}\left(\frac{u}{2}\right), \quad (3.30)$$

na qual $I_{i\bar{m}}$ é a função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem $i\bar{m}$, e Γ é a função Gama.

A solução final para a função radial $R(x)$ será, portanto, dada por

$$R(x) = \frac{1}{[x(x+2)]^{1/2}} \frac{[x(x+2)]^{1/4}}{[\beta^2(x+2)^2 + \alpha^2]^{1/4}} \begin{cases} M_{0,\bar{m}}(2k\xi) \\ M_{0,-\bar{m}}(2k\xi) \end{cases}, \quad (3.31)$$

onde $\bar{m} = \sqrt{8a\omega m - 16M^2\omega^2}$ e ξ é dado por

$$\xi = \int_0^x \left[\beta^2 \left(\frac{2+x}{x} \right) + \frac{\alpha^2}{x(x+2)} \right]^{1/2} dx. \quad (3.32)$$

Assim, observamos que a solução obtida possui informação sobre o momento angular da fonte.

3.3 Solução em Série

Nesta seção, vamos obter a solução da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Lense-Thirring, usando a expansão em série. Para isto, escrevemos a equação radial como

$$\Delta \frac{d}{dr} \left(\Delta \frac{dR}{dr} \right) + (\omega^2 r^4 - 4Ma\omega mr - \mu^2 r^2 \Delta - \lambda_{lm} \Delta) R = 0, \quad (3.33)$$

onde $\Delta = r^2 - 2Mr$. Fazendo a transformação de coordenadas

$$dr_* = \frac{r^2}{\Delta} dr \quad (3.34)$$

e a substituição

$$R(r) = \frac{U}{r}, \quad (3.35)$$

podemos escrever a equação radial da seguinte forma

$$\frac{d^2 U}{dr_*^2} + \left[(\omega^2 - \mu^2) + \frac{2M\mu^2}{r} - \frac{\lambda_{lm}}{r^2} + \frac{2M\lambda_{lm} - 2M - 4Ma\omega m}{r^3} + \frac{4M^2}{r^4} \right] U = 0. \quad (3.36)$$

3.3.1 Solução na Região Interior ao Horizonte de Eventos

Para obtermos a solução da equação de Klein-Gordon na região $0 < r < 2M$, usamos o Ansatz

$$U(r_*) = A \exp \left\{ \pm i \left[(\omega^2 - \mu^2)^{1/2} r_* + a_0 \ln \left(\frac{r}{2M} \right) + a_1 \frac{r}{2M} + a_2 \left(\frac{r}{2M} \right)^2 + a_3 \left(\frac{r}{2M} \right)^3 + \dots \right] \right\}, \quad (3.37)$$

onde a_s são constantes adimensionais. Substituindo a expressão acima na equação radial, agrupando as potências de r e igualando seus coeficientes a zero, obtemos

$$\begin{aligned}
a_0 &= \mp i \\
a_1 &= \pm i \lambda_{lm} \mp 2a\omega m i = \pm i (\lambda_{lm} - 2a\omega m) \\
a_2 &= kM \pm \frac{i}{4} [\lambda_{lm}(\lambda_{lm} + 2) - 4a\omega m \lambda_{lm} - 6a\omega m + 4a^2 \omega^2 m^2] \\
a_3 &= \frac{2}{3} kM \pm i \left[\frac{4}{9} \mu^2 M^2 + \frac{\lambda_{lm}}{9} \left(3 + \frac{5}{2} \lambda_{lm} + \lambda_{lm}^2 \right) - \frac{a\omega m}{9} (11 + 12\lambda_{lm} + 6\lambda_{lm}^2 - 14a\omega m - \right. \\
&\quad \left. 12a\omega m \lambda_{lm} + 8a^2 \omega^2 m^2) \right]
\end{aligned} \tag{3.38}$$

onde $k = (\omega^2 - \mu^2)^{1/2}$. Após alguns cálculos, obtemos a seguinte relação de recorrência para o termo geral dos coeficientes a_s :

$$\begin{aligned}
a_{s+4} &= \frac{1}{(s+4)^2} \left\{ (s+3)(2s+7)a_{s+3} + [-(s+3) \pm 4kMi](s+2)a_{s+2} \pm \right. \\
&\quad i \left[-4kM(s+1)a_{s+1} - \sum_{j=1}^{s+1} j(s-j+2)a_j a_{s-j+2} + 2 \sum_{j=1}^{s+2} j(s-j+3)a_j a_{s-j+3} - \right. \\
&\quad \left. \left. \sum_{j=1}^{s+3} j(s-j+4)a_j a_{s-j+4} \right] \right\}. \quad \text{para } s \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Portanto, uma vez determinados os coeficientes da expansão dada por (3.37), através das equações (3.38) e (3.39), e substituindo esses resultados, obtemos a solução da equação de Klein-Gordon, no espaço-tempo de Lense-Thirring, na região $0 < r < 2M$.

3.3.2 Solução na Região Assintótica

Na região assintótica, $r \rightarrow \infty$, o que equivale a afirmar que $r \gg 2M$, vamos resolver a equação de Klein-Gordon usando o seguinte Ansatz [32]

$$U(r_*) = A \exp \left\{ \pm i \left[(\omega^2 - \mu^2)^{1/2} r_* + b_0 \ln \left(\frac{r}{2M} \right) + b_1 \left(\frac{2M}{r} \right) + b_2 \left(\frac{2M}{r} \right)^2 + b_3 \left(\frac{2M}{r} \right)^3 + \dots \right] \right\}, \tag{3.40}$$

onde b_s ($s = 0, 1, 2, \dots$) são constantes adimensionais. Substituindo a equação (3.40 em (3.36), e igualando os coeficientes, obtemos

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{M\mu^2}{k} \\
b_1 &= \frac{\mu^2}{4k} \left[M \left(\frac{\mu^2}{k} - 4 \right) + \frac{\lambda_{lm}}{M\mu^2} \pm \frac{i}{k} \right] \\
b_2 &= \frac{\mu^2}{16k} \left\{ -2M \left[\frac{\mu^4}{2k^4} - \frac{\mu^2}{k^2} + 4 \right] - \frac{\lambda_{lm} - 1}{Mk^2} + \frac{2}{M\mu^2} + \right. \\
&\quad \left. \frac{4a\omega m}{M\mu^2} \mp i \left[\frac{2\mu^2}{k^3} + \frac{\lambda_{lm}}{kM^2\mu^2} \right] \right\} \\
b_3 &= \frac{1}{3} \left[2 \left(1 - \frac{b_0}{2kM} \right) b_2 + \frac{b_1}{4kM} (b_1 + 4b_0) - \frac{1}{4kM} + \right. \\
&\quad \left. \frac{b_0^2}{4kM} \pm \frac{i}{2kM} \left(-3b_2 + \frac{5}{2}b_1 + b_0 \right) \right],
\end{aligned} \tag{3.41}$$

e assim por diante. A generalização dos termos dados em (3.41), nos permite escrever a expressão correspondente ao termo geral da série, na forma

$$\begin{aligned}
b_{s-1} &= \frac{1}{s-1} \left\{ \left(1 - \frac{\mu^2}{2k^2} \right) (s-2) b_{s-2} + \frac{\mu^2}{k^2} (s-3) b_{s-3} - \frac{\mu^2}{2k^2} (s-4) b_{s-4} + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{4kM} \left[\sum_{j=1}^{s-3} j(s-j-2) b_j b_{s-j-2} - 2 \sum_{j=1}^{s-4} j(s-j-3) b_j b_{s-j-3} + \sum_{j=1}^{s-5} j(s-j-4) b_j b_{s-j-4} \right] \pm \right. \\
&\quad \left. \frac{i}{4kM} [-(s-1)(s-2) b_{s-2} + (2s-3)(s-3) b_{s-3} - (s-2)(s-4) b_{s-4}] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Do resultado obtido, podemos concluir que a solução depende do momento angular da fonte, que está codificado nos coeficientes da série. Um ponto importante a ser considerado nessa solução é que ela possui singularidade para $k = 0$, ou seja, $\omega^2 = \mu^2$. No caso de partículas sem massa, $\mu = 0$ este problema não se coloca.

4 *Alguns Efeitos no Espaço-Tempo de Kerr*

Neste capítulo, apresentamos alguns efeitos físicos no espaço-tempo de Kerr. Seguindo o trabalho de Wald [23] consideramos o efeito Penrose, superradiância e discutimos alguns aspectos sobre a termodinâmica de buracos negros. Também, a partir de [34] estudamos o efeito Hawking e mostramos como a probabilidade de que haja irradiação de partículas através do horizonte de eventos se relaciona com a entropia do buraco negro de Kerr.

4.1 Efeito Penrose

Admitamos que uma partícula esteja situada distante de um buraco negro com rotação e caia em queda livre penetrando a ergoesfera. Sejam E_0 e L_0 as integrais de movimento associadas com os vetores de Killing tipo-tempo e axial, respectivamente. Agora, suponhamos que junto com essa partícula colocamos uma bomba que será detonada quando a partícula estiver dentro da ergoesfera. Seja $p_{0,\mu}$ o 4-momento da partícula antes da bomba ser detonada e admitamos que a bomba, ao ser detonada, divide a partícula em dois fragmentos, cujos 4-momentos são $p_{1,\mu}$ e $p_{2,\mu}$. Assim, usando a conservação do momento, temos

$$p_{0,\mu} = p_{1,\mu} + p_{2,\mu}. \quad (4.1)$$

Uma vez que o vetor de Killing ξ^μ é tipo-espaço dentro da ergoesfera, podemos ter a seguinte relação

$$E_1 = p_{1,\mu} \xi^\mu < 0. \quad (4.2)$$

Notemos que se ξ^μ é um vetor que aponta para o futuro e é tipo-tempo, então, $\xi^\mu p_\mu > 0$, para todos os vetores orientados para o futuro e tipo-tempo p_μ (para $g_{00} > 0$).

O 4-momento p_μ é definido da seguinte forma:

$$p_\mu = m_0 g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (4.3)$$

onde m_0 é a massa de repouso. Consideremos o produto de (4.1) por ξ^μ . Neste caso temos

$$E_0 = E_1 + E_2, \quad \text{com } E_1 < 0, \quad (4.4)$$

o que implica que $E_2 > E_0$.

Se $E_1 < 0$, então, o fragmento é sempre capturado pelo buraco negro. Por outro lado, com a fragmentação, a partícula com momento $p_{2,\mu}$ pode escapar para o infinito. A segunda partícula sai com uma energia maior do que a inicial, em virtude de uma partícula com energia negativa ter caído no buraco negro. Este é um processo de extração de energia e é chamado processo Penrose. O que acontece, neste caso, é que a partícula que cai no buraco negro, gira com ele. O primeiro fragmento, que é engolido pelo buraco negro tem energia negativa e momento angular negativo, em comparação com o buraco negro. Portanto, a partícula que escapa retira energia

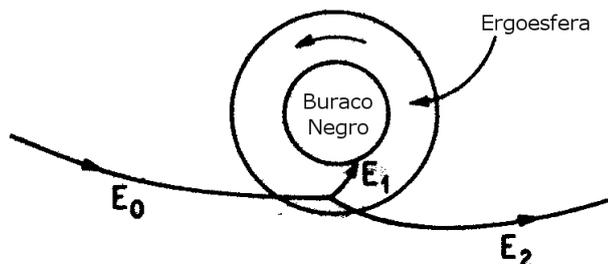


Figura 4.1: Diagrama ilustrando o processo Penrose para extração de energia de um buraco negro de Kerr.

do buraco negro e, em conseqüência, este tem sua rotação diminuída.

4.2 Superradiância

Um outro fenômeno que está relacionado com o processo de Penrose é chamado de superradiância. Consideremos um campo escalar sem massa, Φ , na presença de um buraco negro estacionário. Devido ao fato de termos dois vetores de Killing $\xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial t}$ e $\eta^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial \phi}$, podemos decompor os auto-estados de Φ da seguinte forma:

$$\Phi(x) = R(r, \theta) e^{-i\omega t} e^{im\phi}. \quad (4.5)$$

O espalhamento dessa onda pelo buraco negro, produz uma componente que é transmitida e outra que é refletida. A analogia com o processo de Penrose está associada ao fato de que para uma certa faixa de frequências, a parte transmitida terá energia negativa e a parte refletida terá mais energia do que a onda incidente. Para ver isto, consideremos a corrente conservada de

energia

$$J_\mu \equiv T_{\mu\nu} \xi^\mu. \quad (4.6)$$

Esta expressão corresponde à energia no infinito. Lembremos que no infinito $ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ e $\xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial t}$. O feixe de energia através do horizonte é

$$F = \int_{\text{Hor.}} J_\mu dS^\mu, \quad (4.7)$$

onde J_μ é dado por (4.6) e $J_\mu \chi^\mu = T_{\mu\nu} \chi^\mu \xi^\nu$. Para um campo escalar sem massa, temos

$$T_{\mu\nu} = (\nabla_\mu \Phi)(\nabla_\nu \Phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [g^{\rho\sigma} (\nabla_\rho \Phi)(\nabla_\sigma \Phi)]. \quad (4.8)$$

Notamos que no horizonte temos $g_{\mu\nu} \chi^\mu \xi^\nu = 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned} F &\propto (\chi^\mu \nabla_\mu \Phi)(\xi^\nu \nabla_\nu \Phi) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi + \Omega_+ \frac{\partial}{\partial \phi} \Phi \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi \right) \\ &= |R(r, \theta)|^2 \omega (\omega - m\Omega_+), \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde $\Omega_+ = \frac{a}{r_+^2 + a^2}$, para a métrica de Kerr, e pode ser considerada a velocidade angular do horizonte de eventos (qualquer partícula física tem que ter velocidade angular, no mínimo, igual a Ω_+ , quando estiver sobre o horizonte).

Para ω grande (ou $\Omega_+ = 0 \Leftrightarrow a = 0$), o fluxo de energia é positivo e, portanto, uma quantidade positiva de energia é absorvida pelo buraco negro. Contudo, para

$$0 < \omega < \Omega_+, \quad (4.10)$$

o fluxo de energia é negativo. Então, a onda refletida tem mais energia do que a incidente. Este fenômeno é conhecido como superradiância. Portanto, partículas escalares exibem superradiância, em outras palavras, um buraco negro com rotação cria partículas escalares no modo superradiante, para certos valores do momento angular.

4.3 Termodinâmica de um Buraco Negro de Kerr

Como vimos, o momento angular, J , de um buraco negro com rotação é definido por

$$J = Ma. \quad (4.11)$$

Para a métrica de Kerr definimos

$$\Omega_+ = \frac{a}{r_+^2 + a^2}, \quad (4.12)$$

onde r_+ é o raio do horizonte exterior. Considere o vetor de Killing

$$\chi^\mu = \xi^\mu + \Omega_+ \eta^\mu. \quad (4.13)$$

Este vetor de Killing é o gerador de geodésicas nulas do horizonte exterior de eventos, isto é, χ^μ é um vetor nulo sobre $r = r_+$. Os vetores de Killing ξ^μ e η^μ são definidos de modo a coincidir com as variações infinitesimais de t e ϕ no infinito, de modo que Ω_+ é definido por (4.12). A quantidade Ω_+ pode ser pensada como sendo a velocidade angular do horizonte de eventos, uma vez que qualquer partícula física deve ter velocidade angular dada no mínimo por Ω_+ , quando está sobre o horizonte.

Consideremos, agora, a trajetória de uma partícula com 4-momento $p_{1,\mu}$. Podemos verificar que

$$p_{1,\mu} \chi^\mu < 0, \quad (4.14)$$

o que implica

$$p_{1,\mu} (\xi^\mu + \Omega_+ \eta^\mu) < 0, \quad (4.15)$$

e, portanto,

$$-E_1 + \Omega_+ L_1 < 0, \quad (4.16)$$

ou seja,

$$L_1 < \frac{E_1}{\Omega_+}. \quad (4.17)$$

Como a partícula tem energia negativa e como $\Omega_+ > 0$, então, o momento angular da partícula também deve ser negativo. Considerando $E_1 = \delta M$ e $L_1 = \delta J$, sendo δM e δJ as mudanças na massa e no momento angular do buraco negro, então, temos o seguinte resultado

$$\delta J < \frac{\delta M}{\Omega_+}. \quad (4.18)$$

Portanto, temos uma relação na variação dos parâmetros que caracterizam o buraco negro. Notemos que para um processo ideal, no qual a partícula com momento $p_{1,\mu}$ somente cruza o horizonte, podemos combinar (4.13) e (4.18) de modo a termos, praticamente, uma igualdade.

Para um processo ideal, temos

$$\delta J = \frac{\delta M}{\Omega_+}. \quad (4.19)$$

A razão para considerar essa igualdade como o limite ideal é devido ao fato que, fisicamente, ela corresponde a jogar fragmentos no interior do buraco negro, de modo que $p_{1,\mu}$ é proporcional

a χ^μ .

Consideremos a solução de Kerr e, portanto,

$$\Omega_+ = \frac{a}{r_+^2 + a^2}, \quad (4.20)$$

onde $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$ e $J = Ma$. Portanto,

$$\Omega_+^{-1} = \frac{r_+^2 + a^2}{a} = \frac{2M}{a} \left(M + \sqrt{M^2 - a^2} \right). \quad (4.21)$$

Vamos considerar a seguinte quantidade

$$M_{ir}^2 = \frac{1}{2} \left[M^2 + (M^4 - J^2)^{1/2} \right]. \quad (4.22)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 2M_{ir}\delta M_{ir} &= M\delta M + \frac{1}{4} (M^4 - J^2)^{-1/2} (4M^3\delta M - 2J\delta J) \\ &= (M^4 - J^2)^{-1/2} M \left[\delta M (M^3 + M(M^4 - J^2)^{1/2}) - \frac{1}{2} J\delta J \right] \\ &= (M^2 - a^2)^{-1/2} M \left[\delta M (M + (M^2 - a^2)^{1/2}) - \frac{a}{2M} \delta J \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Podemos escrever a expressão acima de outra forma como

$$\delta M_{ir} = \frac{a}{4(M^2 - a^2)^{1/2} M_{ir}} [\delta M \Omega_+^{-1} - \delta J]. \quad (4.24)$$

Usando a equação (4.18), concluímos que no processo de Penrose

$$\delta M_{ir} > 0 \quad (4.25)$$

e em um processo ideal

$$\delta M_{ir} = 0. \quad (4.26)$$

A quantidade máxima de energia que pode ser extraída é

$$M - M_{ir} = M - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[M^2 + (M^4 - J^2)^{1/2} \right]^{1/2}. \quad (4.27)$$

Se o processo de extração de energia for o ideal, quando a rotação cessar teremos um buraco negro de Schwarzschild com massa M_{ir} .

Consideremos, agora, a “área” do horizonte de eventos em $r = r_+$. Esta “área” representa a

projeção da métrica no horizonte, e é dada por

$$A = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta (\sqrt{g}), \quad (4.28)$$

onde g é o determinante da parte angular da métrica, dado por $g = (r_+^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta$, em $r = r_+$. Substituindo o valor do determinante na área, obtemos

$$A = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta [(r_+^2 + a^2) \sin \theta], \quad (4.29)$$

e, portanto,

$$A = 4\pi (r_+^2 + a^2) = 16\pi M_{ir}^2. \quad (4.30)$$

Portanto, no processo de Penrose, e de modo geral em qualquer processo físico onde a matéria cruza o horizonte exterior, temos

$$\delta A > 0. \quad (4.31)$$

Notemos que no processo ideal $\delta A = 0$.

Usando (4.24), temos

$$\delta A = 8\pi \left\{ \left[\frac{a}{(M^2 - a^2)^{1/2}} \right] \frac{1}{\Omega_+} (\delta M - \Omega_+ \delta J) \right\} \quad (4.32)$$

e, portanto,

$$dM = \frac{k}{8\pi} dA + \Omega_+ dJ, \quad (4.33)$$

onde

$$k = \frac{(M^2 - a^2)^{1/2}}{2M [M + (M^2 - a^2)^{1/2}]}. \quad (4.34)$$

A equação (4.33) pode ser identificada com a equação da termodinâmica

$$dU = T dS + \text{termos de trabalho}, \quad (4.35)$$

o que sugere a identificação

$$\text{Temperatura: } T \propto k \quad (4.36)$$

e

$$\text{Entropia: } S \propto A (\text{área do horizonte exterior}). \quad (4.37)$$

Em um processo físico que envolve o buraco negro temos $dA \geq 0$, e $dA > 0$ para um processo irreversível correspondente à queda de matéria no buraco negro. No entanto, para um processo ideal, no qual a matéria, ou pelo menos fótons, não caem no buraco negro, mas se

movem ao longo da superfície do horizonte de eventos, temos que $dA = 0$. Estes fatos nos permitem identificar a área do horizonte de eventos com a entropia.

Resumindo, podemos escrever as leis da termodinâmica de buracos negros da seguinte forma:

Lei zero: Buracos negros estacionários possuem k constante em todo o horizonte.

Primeira lei:

$$dM = \frac{k}{8\pi} dA + \Omega_+ dJ + \text{termos de trabalho.} \quad (4.38)$$

Segunda lei: $dA \geq 0$, onde $dA > 0$ corresponde a um processo irreversível.

Terceira lei: É impossível k ter valor nulo em qualquer processo físico.

4.4 Efeito Hawking

Usando as leis da termodinâmica de buracos negros, temos que a massa da solução de Kerr pode ser expressa como

$$E = M = \frac{r_+^2 + a^2}{2r_+}, \quad (4.39)$$

a temperatura de Hawking do horizonte do buraco negro é dada por

$$\begin{aligned} T_+ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta'(r_+)}{r_+^2 + a^2} \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{2r_+ - 2M}{r_+^2 + a^2} \\ &= \frac{r_+^2 - a^2}{4\pi r_+ (r_+^2 + a^2)} \end{aligned} \quad (4.40)$$

e a entropia associada com o horizonte do buraco negro pode ser escrita como

$$S_+ = \pi (r_+^2 + a^2). \quad (4.41)$$

Também, como temos visto, a velocidade angular do horizonte de eventos é dada por

$$\Omega_+ = \frac{a}{r_+^2 + a^2} \quad (4.42)$$

e o momento angular J é

$$J = Ma. \quad (4.43)$$

As quantidades obtidas acima satisfazem a primeira lei da termodinâmica

$$dE = T_+ dS_+ + \Omega_+ dJ. \quad (4.44)$$

Como vimos a equação de Klein-Gordon é dada por 2.19) e usando a separação de variáveis (2.20), obtemos

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) - \left[\left(\omega a \sin \theta - \frac{m}{\sin \theta} \right)^2 + \mu^2 a^2 \cos^2 \theta - \lambda_{lm} \right] S = 0 \quad (4.45)$$

e

$$\frac{d}{dr} \left(\Delta \frac{dR}{dr} \right) - \left[\lambda_{lm} + \mu^2 r^2 - \frac{1}{\Delta} [\omega (r^2 + a^2) - am]^2 \right] R = 0, \quad (4.46)$$

onde λ_{lm} é a constante de separação de variáveis, ω é a energia de radiação das partículas e m é a projeção do momento angular da partícula radiada no eixo de rotação. Seja $K = (r^2 + a^2) \omega - am$, assim, (4.46) pode ser escrita como

$$\Delta \frac{d^2 R}{dr^2} + 2(r - M) \frac{dR}{dr} - \left[\lambda_{lm} + \mu^2 r^2 - \frac{K^2}{\Delta} \right] R = 0. \quad (4.47)$$

Agora, introduzindo a coordenada r_* ,

$$dr_* = \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} dr, \quad (4.48)$$

temos que

$$\frac{d}{dr} = \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} \frac{d}{dr_*} \quad (4.49)$$

e

$$\frac{d^2}{dr^2} = \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta} \right)^2 \frac{d^2}{dr_*^2} + \frac{2M(a^2 - r^2)}{\Delta^2} \frac{d}{dr_*}. \quad (4.50)$$

Substituindo as equações acima em (4.47), temos

$$\Delta \left[\left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta} \right)^2 \frac{d^2 R}{dr_*^2} + 2M \frac{(a^2 - r^2)}{\Delta^2} \frac{dR}{dr_*} \right] + 2(r - M) \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} \frac{dR}{dr_*} - \left(\lambda_{lm} + \mu^2 r^2 - \frac{K^2}{\Delta} \right) R = 0, \quad (4.51)$$

de onde resulta

$$(r^2 + a^2)^2 \frac{d^2 R(r)}{dr_*^2} + 2r\Delta \frac{dR(r)}{dr_*} - [\Delta (\lambda_{lm} + \mu^2 r^2) - K^2] R(r) = 0. \quad (4.52)$$

Próximo ao horizonte do buraco negro, $\Delta(r_+) \rightarrow 0$, logo da equação acima, temos

$$\frac{d^2 R(r)}{dr_*^2} + \frac{[(r_+^2 + a^2) \omega - am]^2}{(r_+^2 + a^2)^2} R(r) = 0, \quad (4.53)$$

que pode ser escrita como

$$\frac{d^2 R}{dr_*^2} + \left[\omega^2 - \frac{2a\omega m}{(r_+^2 + a^2)} + \frac{a^2 m^2}{(r_+^2 + a^2)^2} \right] R = 0 \quad (4.54)$$

que, por fim, pode ser posta na forma

$$\frac{d^2 R}{dr_*^2} + (\omega - \omega_0)^2 R = 0, \quad (4.55)$$

onde $\omega_0 = m\Omega_+$. A solução de (4.55) é

$$R = e^{\pm i(\omega - \omega_0)r_*}. \quad (4.56)$$

Considerando o fator do tempo, próximo ao horizonte do buraco negro a solução é

$$\psi = e^{-i\omega t \pm i(\omega - \omega_0)r_*}. \quad (4.57)$$

Fazendo $\hat{r} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega} r_*$, derivamos a solução da onda de entrada no horizonte

$$\Psi_{in} = e^{-i\omega(t + \hat{r})} = e^{-i\omega v} \quad (4.58)$$

e a solução de saída

$$\Psi_{out}(r > r_+) = e^{-i\omega(t - \hat{r})} = e^{-i\omega v} e^{2i\omega \hat{r}} = e^{-i\omega v} e^{2i(\omega - \omega_0)r_*}, \quad (4.59)$$

onde $v = t + \hat{r}$ é a coordenada de Eddington–Finkelstein. Como $\frac{dr}{\Delta} = \frac{dr_*}{r^2 + a^2}$, próximo ao horizonte, temos

$$\begin{aligned} \Delta &\approx \Delta(r_+) + \frac{d\Delta}{dr} \Big|_{r=r_+} (r - r_+) \\ &= \frac{d\Delta}{dr} \Big|_{r=r_+} (r - r_+), \end{aligned} \quad (4.60)$$

logo,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{\Delta} &= \frac{dr_*}{r^2 + a^2} \\ \frac{dr}{(r - r_+)} &= \frac{1}{r_+^2 + a^2} \frac{d\Delta}{dr} \Big|_{r=r_+} dr_*, \end{aligned} \quad (4.61)$$

de onde obtemos

$$\ln(r - r_+) = \frac{1}{r_+^2 + a^2} \frac{d\Delta}{dr} \Big|_{r=r_+} r_* = 2k_+ r_*, \quad (4.62)$$

onde

$$k_+ = \frac{r_+^2 - a^2}{r_+(r_+^2 + a^2)}. \quad (4.63)$$

Sendo k_+ a aceleração gravitacional na superfície do horizonte do buraco negro r_+ . De (4.62),

temos

$$(r - r_+) = e^{2k_+ r_*} \quad (4.64)$$

e a onda de saída é reescrita como

$$\Psi_{out}(r > r_+) = e^{-i\omega v} (r - r_+)^{\frac{i}{k_+}(\omega - \omega_0)}. \quad (4.65)$$

Obviamente há uma singularidade na superfície r_+ e, portanto, só podemos descrever partículas de saída fora do horizonte. Não podemos descrever partículas de saída no horizonte.

Estamos interessados em ondas que saem quando radiação é emitida por buracos negros. De (4.65), a onda de saída é singular em $r = r_+$ e podemos estender Ψ_{out} do lado de fora do buraco negro para dentro do buraco negro. Podemos tomar a singularidade $r = r_+$ como o centro do círculo e tomar $|r - r_+|$ como o raio. Por continuação analítica, fazendo uma rotação de $-\pi$ através da metade inferior do plano complexo r , temos

$$(r - r_+) \rightarrow |r - r_+| e^{-i\pi} = (r_+ - r) e^{-i\pi}. \quad (4.66)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Psi_{out}(r < r_+) &= e^{-i\omega v} (r_+ - r)^{\frac{i}{k_+}(\omega - \omega_0)} e^{\frac{\pi}{k_+}(\omega - \omega_0)} \\ &= e^{\pi(\omega - \omega_0)/k_+} e^{-i\omega v} e^{2i(\omega - \omega_0)r_*}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

As equações (4.59) e (4.67) descrevem a onda de saída do lado de fora e do lado de dentro do buraco negro. Então, para uma onda saindo do horizonte buraco negro com energia ω e momento angular m , a taxa extração de energia e momento angular através do horizonte é

$$\Gamma_+ = \left| \frac{\Psi_{out}(r > r_+)}{\Psi_{out}(r < r_+)} \right|^2 = e^{-2\pi(\omega - \omega_0)/k_+}. \quad (4.68)$$

Conforme vimos anteriormente, antes do buraco negro emitir radiação, sua energia e seu momento angular são $M + \omega$ e $J + m$, respectivamente. Após a emissão de radiação, o estado do buraco negro passa a ter energia e momento angular dados por M e J , respectivamente. Portanto, temos, as seguintes variações na energia e no momento angular do buraco negro

$$\Delta E = -\omega \quad \text{e} \quad \Delta J = -m. \quad (4.69)$$

Agora, substituindo (4.69) e (4.44) em (4.68), obtemos o seguinte resultado

$$\Gamma_+ = e^{\Delta S_+}, \quad (4.70)$$

o que representa a probabilidade de que o buraco negro irradie partículas com energia ω e

momento angular m . Esta radiação ocorre no horizonte de eventos e depende da entropia do buraco negro, que por sua vez, está associada ao parâmetro de rotação.

Conclusões

Esta dissertação trata do interessante problema relacionado com o efeito do campo gravitacional associado ao buraco negro de Kerr, bem como a particularização desta para $a \ll 2M$, que corresponde à solução de Lense-Thirring, sobre um sistema quântico, a saber, partículas escalares quânticas relativísticas.

A solução exata da equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de um buraco negro com rotação a , que corresponde ao espaço-tempo de Kerr foi obtida. No caso do espaço-tempo de Kerr, e examinamos os casos de Kerr extremo e os limites correspondentes a regiões próximas ao horizonte de eventos e muito distante deste. No caso em que $a \ll 2M$, que corresponde ao espaço-tempo de Lense-Thirring, foram obtidas as soluções aproximadas através de dois métodos: um assintótico e o outro em série.

No último capítulo foi estudada a radiação Hawking devido a um buraco negro de Kerr, e foi mostrado que a probabilidade de que o buraco negro irradie uma partícula com energia ω e momento angular m , é proporcional à variação de entropia do buraco negro, a qual depende de sua rotação.

Vale salientar que a importância dos estudos feitos nesta dissertação se prende ao fato de que o estudo do comportamento de partículas nas vizinhanças de um buraco negro pode nos fornecer informações relevantes sobre a física deste. Por outro lado, esse conhecimento também é relevante em vista da possibilidade de se construir uma teoria que combine a mecânica quântica e a teoria da relatividade geral.

Uma possível continuação desta dissertação pode ser a obtenção da solução exata da equação de Dirac, e a particularização para o caso de Kerr extremo. Com relação à radiação Hawking, podemos generalizar os resultados para o espaço-tempo de Kerr-Newmann usando o método de Hamilton-Jacobi.

APÊNDICE A – Funções Harmônicas Esferoidais

Como discutido por Thompson [35], funções de onda esferoidais são generalizações das funções de Legendre e de Bessel esférica para coordenadas esferoidais, ao invés de coordenadas polares esféricas. As coordenadas esferoidais, d , ξ , η e ϕ , onde d é um parâmetro que provê um fator de escala, são relacionadas com as coordenadas cartesianas, x , y e z , como

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{2} \sqrt{(1 - \eta^2)(\xi^2 - 1)} \cos \phi, \\ y &= \frac{d}{2} \sqrt{(1 - \eta^2)(\xi^2 - 1)} \sin \phi, \\ z &= \frac{d}{2} \eta \xi, \end{aligned} \tag{A.1}$$

onde $-1 \leq \eta \leq 1$, $\xi \geq 1$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$ no caso de coordenadas prolatas. E, para coordenadas oblatas, temos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{2} \sqrt{(1 - \eta^2)(\xi^2 + 1)} \cos \phi, \\ y &= \frac{d}{2} \sqrt{(1 - \eta^2)(\xi^2 + 1)} \sin \phi, \\ z &= \frac{d}{2} \eta \xi, \end{aligned} \tag{A.2}$$

onde $-1 \leq \eta \leq 1$, $\xi \geq 0$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

No limite em que $\xi \rightarrow \infty$, $d \rightarrow 0$, de tal forma que $\frac{d\xi}{2} = r$ e $\eta = \cos \theta$ obtemos as coordenadas polares esféricas. A figura abaixo ilustra algumas superfícies correspondendo a valores constantes de ξ , η ou ϕ .

No caso de uma equação de onda escalar com número de onda k , $\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0$, nas coordenadas esferoidais prolatas ela pode ser separada como

$$\Psi_{lm} = S_{lm}(c, \eta) R_{lm}(c, \xi) \begin{cases} \cos m\phi \\ \sin m\phi, \end{cases} \tag{A.3}$$

onde m é um inteiro se a coordenada possui período 2π e se l for um inteiro. A função S_{lm} é a

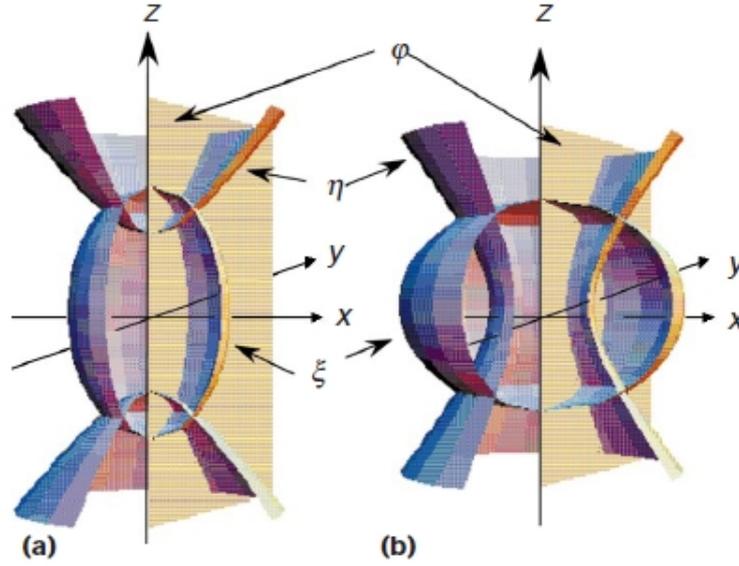


Figura A.1: Coordenadas esféricas: (a) prolata; (b) oblata. As curvas correspondem a valores em que os parâmetros ξ , η ou ϕ são constantes. Para η constante temos hiperboloides de revolução e para ϕ constante temos semi-planos.

Fonte: W. J. Thompson, *Spheroidal Wave Function*. Computing in Science and Engineering, Maio-Junho 1999 p. 85.

função angular esférica prolata, para k real, e satisfaz a equação

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dS_{lm}(c, \eta)}{d\eta} \right] + \left[\lambda_{lm} - c^2 \eta^2 - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right] S_{lm}(c, \eta) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Nesta equação, $\lambda_{lm}(c)$ é o autovalor esférico prolato, com $\lambda_{lm}(0) = l(l + 1)$.

As coordenadas esféricas oblatas possuem uma separação de variáveis análoga, e podemos fazer a transição para esta coordenada a partir das coordenadas prolatas, fazendo a substituição $c \leftrightarrow \pm ic$ e $c^2 \leftrightarrow -c^2$.

Como pode ser mostrado, podemos determinar o valor dos autovalores λ_{lm} definindo duas funções que dependem de l , m e c , mas que não dependem do autovalor, a saber

$$\gamma_r^m \equiv (m + r)(m + r + 1) + \frac{c^2}{2} \left[1 - \frac{4m^2 - 1}{(2m + 2r - 1)(2m + 2r + 3)} \right] \quad (\text{A.5})$$

e

$$\beta_r^m \equiv \frac{r(r - 1)(2m + r)(2m + r - 1)c^4}{(2m + 2r - 1)^2(2m + 2r - 3)(2m + 2r + 1)}. \quad (\text{A.6})$$

Em seguida, combinando essas funções, definimos duas funções de λ_{lm} :

$$U_1(\lambda_{lm}) \equiv \gamma_{l-m}^m - \lambda_{lm} - \frac{\beta_{l-m}^m}{\gamma_{l-m-2}^m - \lambda_{lm} - \frac{\beta_{l-m-2}^m}{\gamma_{l-m-4}^m - \lambda_{lm} - \dots}} \quad (\text{A.7})$$

e

$$U_2(\lambda_{lm}) \equiv -\frac{\beta_{l-m+2}^m}{\gamma_{l-m+2}^m - \lambda_{lm} - \frac{\beta_{l-m+4}^m}{\gamma_{l-m+4}^m - \lambda_{lm} - \dots}}. \quad (\text{A.8})$$

O autovalor λ_{lm} é a raiz da equação transcendental $U(\lambda_{lm}) \equiv U_1(\lambda_{lm}) + U_2(\lambda_{lm}) = 0$. Esta equação não possui uma forma fechada, exceto quando $c = 0$ quando $\lambda_{lm} = l(l+1)$ ou quando a deformação é grande.

Normalmente, as funções de onda esferoidais angular são expandidas em termos das funções esféricas de Legendre de primeiro tipo, $P_{m+r}^m(\eta)$, ou de segundo tipo, $Q_{m+r}^m(\eta)$. Para funções do primeiro tipo, que são regulares em $\eta = \pm 1$, temos

$$S_{lm}^{(1)}(c, \eta) = \sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{lm}(c) P_{m+r}^m(\eta), \quad (\text{A.9})$$

onde a soma inicia em $r = 0$ se $l - m$ for par, ou em $r = 1$ se $l - m$ for ímpar. Em ambos os casos r cresce em passos de 2. Para funções do segundo tipo, que são irregulares em $\eta = \pm 1$, temos

$$S_{lm}^{(2)}(c, \eta) = \sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{lm}(c) Q_{m+r}^m(\eta). \quad (\text{A.10})$$

Os coeficientes d_r^{lm} são obtidos através da relação de recorrência

$$\alpha_r d_{r+2}^{lm} + (\beta_r - \lambda_{lm}) d_r^{lm} + \gamma_r d_{r-2}^{lm} = 0, \quad (\text{A.11})$$

onde

$$\alpha_r = \frac{(2m+r+2)(2m+r+1)c^2}{(2m+2r+3)(2m+2r+5)} \quad (\text{A.12})$$

e

$$\gamma_r = \frac{r(r-1)c^2}{(2m+2r-3)(2m+2r-1)}. \quad (\text{A.13})$$

APÊNDICE B – Equações Confluente e Duplamente Confluente de Heun

A equação confluyente de Heun, na versão adotada por Leaver [36], pode ser escrita como

$$x(x-x_0) \frac{d^2U}{dx^2} + (B_1 + B_2x) \frac{dU}{dx} + [B_3 - 2\omega\eta(x-x_0) + \omega^2x(x-x_0)] U = 0, \quad (\text{B.1})$$

que também é conhecida como equação de onda esferoidal generalizada. Temos que x_0 , B_i , η e ω são constantes. No caso particular em que $\eta = 0$ e $x_0 \neq 0$, reobtemos a equação de onda esferoidal ordinária. Por outro lado, se admitirmos que

$$B_1 = -\frac{x_0}{2}, \quad B_2 = 1, \quad x = x_0 \cos^2(u), \quad (\text{B.2})$$

obtemos

$$\frac{d^2U}{du^2} + [-4B_3 - 4\eta\omega x_0 + 4\eta\omega x_0 \cos(2u) + \omega^2x^2 \sin^2(2u)] U = 0, \quad (\text{B.3})$$

que é a equação de Whittaker-Hill [37]. Outro caso particular ocorre quando $x_0 = 0$

$$x^2 \frac{d^2U}{dx^2} + (B_1 + B_2x) \frac{dU}{dx} + [B_3 - 2\omega\eta x + \omega^2x^2] U = 0, \quad (\text{B.4})$$

que é conhecido como equação de onda esferoidal generalizada confluyente, ou equação de Heun duplamente confluyente.

Na equação confluyente de Heun (B.1), os pontos $x = 0$ e $x = x_0$ correspondem a singularidades regulares, enquanto que o infinito é uma singularidade irregular no qual o comportamento da solução $U(x)$ é dado por

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) \approx e^{\pm i\omega x} x^{\mp i\eta - (B_2/2)}. \quad (\text{B.5})$$

Por outro lado, a equação duplamente confluyente de Heun (B.4) possui duas singularidades irregular nos pontos $x = 0$ e $x = \infty$. No infinito, o comportamento de (B.4) ainda é dado por (B.5), enquanto que em $x = 0$ encontramos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} U(x) \approx 1 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow 0} U(x) \approx e^{B_1/x} x^{2-B_2}. \quad (\text{B.6})$$

As equações confluentes e duplamente confluentes de Heun admitem ainda um limite que muda a natureza da singularidade irregular $x = \infty$, mantendo inalteradas as outras singularidades. Este limite é obtido fazendo

$$\omega \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \eta \rightarrow \infty, \quad (\text{B.7})$$

de tal forma que

$$2\eta\omega = -q, \quad (\text{B.8})$$

onde q é uma constante. Este limite é conhecido como limite de Whittaker-Ince e resulta em

$$x(x-x_0)\frac{d^2U}{dx^2} + (B_1 + B_2x)\frac{dU}{dx} + [B_3 + q(x-x_0)]U = 0 \quad (q \neq 0) \quad (\text{B.9})$$

e

$$x^2\frac{d^2U}{dx^2} + (B_1 + B_2x)\frac{dU}{dx} + (B_3 + qx)U = 0, \quad (q \neq 0, B_1 \neq 0) \quad (\text{B.10})$$

para as funções confluentes e duplamente confluentes, respectivamente. No caso em que $q = 0$ (B.9) pode ser transformada em uma equação hipergeométrica, enquanto que para $q = 0$ e/ou $B_1 = 0$ (B.10) se degenera em uma equação hipergeométrica confluyente. As equações (B.9) e (B.10) diferem das equações confluentes e duplamente confluentes de Heun por seus comportamentos no ponto irregular $x = \infty$, que agora é dado por

$$\lim_{z \rightarrow \infty} U(x) \approx e^{\pm 2i\sqrt{qx}} x^{1/4 - B_2/2}. \quad (\text{B.11})$$

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, Zur allgemeinen relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1915).
- [2] H. Tetrode, *Z. Phys.* **50**, 36 (1928); V. Fock, *ibid.* **53**, 592 (1928); E. Schrödinger, *Physica (Amsterdam)* **6**, 899 (1932); W. Pauli, *Ann. Phys. (Leipzig)* **18**, 337 (1933).
- [3] J. Audretsch e G. Schäfer, *Gen. Rel. Grav.* **9**, 243 (1978); *ibid.* **9**, 498 (1978).
- [4] L. Parker, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1559 (1980).
- [5] L. H. Ford, *Phys. Rev. D* **14**, 3304 (1976); J. Audretsch e G. Schäfer, *J. Phys. A* **11**, 1583 (1978); M. Castagnino et al., *J. Math. Phys.* **25**, 360 (1984).
- [6] A. O. Barut e I. H. Duru, *Phys. Rev. D* **36**, 3705 (1987); V. M. Villalba e U. Percoco, *J. Math. Phys.* **31**, 715 (1990).
- [7] V. B. Bezerra, *J. Math. Phys.* **38**, 2553 (1997).
- [8] I. Sakalli e M. Halilsoy, *Phys. Rev. D* **69**, 124012 (2004).
- [9] T. K. Len, L. Parker e L. O. Pimentel, *Gen. Rel. Grav.* **15**, 761 (1983).
- [10] E. Fishbach e B. S. Freeman, *Phys. Rev. D* **23**, 2157 (1981).
- [11] L. Parker, *Phys. Rev. D* **25**, 3180 (1982).
- [12] A. W. Overhauss e R. Colella, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1237 (1974); R. Colella, A. W. Overhauss e S. A. Werner, *ibid.* **34**, 1472 (1975).
- [13] K. Schwarzschild, Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* **1**, 189 (1916).
- [14] R. P. Kerr, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 237 (1963).
- [15] G. Birkhoff, *Relativity and Modern Physics*. Harvard University Press, Cambridge (1923).
- [16] J. N. Islam, *Rotating fields in general relativity*. Cambridge University Press, Cambridge (1985).
- [17] H. Weyl, *Ann. Physik* **54**, 117 (1917).
- [18] T. Lewis, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A136**, 176 (1932).
- [19] F. J. Ernst, *Phys. Rev.* **167**, 1175 (1968).

- [20] R. H. Boyer e R. W. Lindquist, *J. Math. Phys.* **8**, 265 (1967).
- [21] H. Thirring e J. Lense, *Physikalische Zeitschrift* **19**, 156 (1918).
- [22] M. Visser, *arXiv:0706.0622v3 [gr-qc]* (2008).
- [23] R. M. Wald, *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago (1984).
- [24] L. H. Ford, *Phys. Rev. D* **12**, 2963 (1975).
- [25] P. M. Morse e H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics, Part II*. McGraw Hill, New York (1953).
- [26] D. J. Rowan e G. Stephenson, *J. Phys. A: Math. Gen.* **10**, 15 (1977).
- [27] L. J. El-Jaick e B. D. B. Figueiredo, *J. Math. Phys.* **49**, 083508 (2008).
- [28] L. J. Slater, *Confluent Hypergeometric Functions*. Cambridge University Press, Cambridge (1960).
- [29] F. W. J. Olver, *Introduction to Asymptotics and Special Functions*. Academic, New York (1974).
- [30] D. J. Rowan e G. Stephenson, *J. Phys. A: Math. Gen.* **9**, 1261 (1976).
- [31] D. J. Rowan e G. Stephenson, *J. Phys. A: Math. Gen.* **9**, 1631 (1976).
- [32] E. Elizalde, *Phys. Rev. D* **36**, 1269 (1987).
- [33] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, New York (1980).
- [34] L. Huaifan et al., *Eur. Phys. J. C.* **63**, 133 (2009).
- [35] W. J. Thompson, *Spheroidal Wave Function*. Computing in Science and Engineering, 84 Maio-Junho (1999).
- [36] E. W. Leaver, *J. Math. Phys.* **27**, 1238 (1986).
- [37] F. M. Arscott, *Proc. R. Soc. Edinb. A* **67**, 265 (1967).