



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

SOBRE ALGUNS EFEITOS QUÂNTICOS
NO ESPAÇO-TEMPO DE
SCHWARZSCHILD-DE SITTER

JOSÉ CARLOS JUSTINO DA SILVA

JOÃO PESSOA
2009

SOBRE ALGUNS EFEITOS QUÂNTICOS
NO ESPAÇO-TEMPO DE
SCHWARZSCHILD-DE SITTER

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

SOBRE ALGUNS EFEITOS QUÂNTICOS
NO ESPAÇO-TEMPO DE
SCHWARZSCHILD-DE SITTER

Dissertação realizada sob orientação
do Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra,
apresentada ao Departamento
de Física, em complementação aos
requisitos para obtenção do título de
Mestre em Física.

JOSÉ CARLOS JUSTINO DA SILVA

S586s Silva, José Carlos Justino da.

Sobre alguns efeitos quânticos no espaço-tempo de
Schwarzschild-de Sitter / José Carlos Justino da Silva.- João
Pessoa, 2009.

87f. : il.

Orientador: Valdir Barbosa Bezerra

Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN

1. Física. 2. Relatividade geral. 3. Gravitação. 4. Mecânica
quântica – espaço curvo.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

SOBRE ALGUNS EFEITOS QUÂNTICOS NO ESPAÇO-TEMPO DE SCHWARZSCHILD-DE SITTER

JOSÉ CARLOS JUSTINO DA SILVA

Aprovada em: 18 de dezembro de 2009.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra—(UFPB)
Orientador

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho—(UFPB)
Examinador Interno

Profa. Dra. Geusa de Araújo Marques—(UFCG)
Examinador Externo

*Ao criador de todas as coisas
À minha família.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida e por me fazer quem sou, cheio de fraquezas mas também com algumas virtudes.

A toda a minha família pelo amor e apoio incondicional e irrestrito; por vocês e para vocês sou capaz de buscar o melhor até o fim. Tenho a esperança de que meu esforço servirá como incentivo à nunca deixar de lutar e correr atrás dos seus objetivos.

Aos meus colegas, meus fiéis parceiros, que sempre me ajudaram e incentivaram, desde a graduação até aqui. Dentre estes, um especial agradecimento ao amigo Arimateia, que me acompanhou por quase toda a vida acadêmica, sendo muito importante nesta caminhada.

Não posso deixar de agradecer aos professores que de alguma forma me ajudaram, dentre estes a professora Geusa Marques, que me apresentou à iniciação científica e tem me acompanhado desde então.

A todos os professores deste Departamento, pelo conhecimento transmitido (ou pelo menos a tentativa), e dentre estes um agradecimento especial ao professor Valdir B. Bezerra, seria necessário muito mais espaço para quantificar sua importância nesta etapa da minha vida, sempre paciente e generoso, realmente lhe agradeço.

Aos funcionários do Departamento, pelo apoio e amizade, e ao grande Mariano, figura mítica do DF.

A todos que direta ou indiretamente, por bem ou por mal, ajudaram na realização deste.

Muito Obrigado !!!

Resumo

Nesta dissertação investigamos os aspectos relacionados aos modos normais de campos escalares na presença de um buraco negro de Schwarzschild-de Sitter. A influência da constante cosmológica Λ nos coeficientes de reflexão e transmissão também é estudada e analisada. Estudamos também a densidade de energia de Casimir para um campo escalar sem massa confinado entre duas placas paralelas, descarregadas, nesse espaço-tempo, porém na aproximação de campo fraco. O papel da constante cosmológica, neste cenário, é enfatizado.

Abstract

In this dissertation we investigate some aspects related with normal modes for scalar fields perturbations of a Schwarzschild-de Sitter black hole. The role played by the cosmological constant Λ on the reflection and transmission coefficients is studied and analyzed. We also study the Casimir energy density for a massless scalar field confined between two nearby parallel plates in the spacetime of Schwarzschild-de Sitter in the weak field approximation. The role played by the cosmological constant in this scenario is emphasized.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Solução de Schwarzschild-de Sitter	3
2.1	Aspectos da Relatividade Geral	3
2.2	Equações de Einstein	4
2.3	Solução de Schwarzschild-de Sitter	8
2.4	Teste Clássico da Solução de SdS	11
2.4.1	Precessão do Periélio do Planeta Mercúrio	12
3	Modos Normais de Oscilação em Buracos Negros de SdS	16
3.1	Modos Normais em Buracos Negros	16
3.2	Perturbação do Espaço-tempo de SdS	17
3.2.1	Perturbações Escalares	18
3.2.2	Perturbações Eletromagnéticas	22
3.2.3	Perturbações Gravitacionais	24

3.3	Método WKB e o Cálculo dos Modos Normais	29
3.3.1	Condições de Contorno e Aproximação WKB	29
3.3.2	Aproximação Assintótica para a Solução Interior	33
4	Efeito Casimir no Espaço–tempo SdS	41
4.1	O Efeito Casimir	41
4.2	Efeito Casimir num Campo Escalar em $(1 + 1)$ – Dimensões	42
4.3	Campo Escalar em $(3 + 1)$ –Dimensões	48
4.4	Densidade de Energia e de Pressão no Vácuo	50
4.5	Aproximação de Campo Gravitacional Fraco	55
4.5.1	Considerações Sobre o Campo Escalar num Espaço-tempo Curvo	56
4.5.2	Energia de Casimir na Aproximação de Ordem Zero	60
4.5.3	Aproximação de Primeira Ordem	62
4.5.4	Uma Aproximação em Segunda Ordem	64
5	Conclusões e Perspectivas	70
	Bibliografia	72

Lista de Figuras

3.1	Potencial efetivo $V(r)$ para o campo escalar nos casos (a) sem constante e (b) com constante cosmológica.	21
3.2	Potencial efetivo $V(r)$ para o campo eletromagnético nos casos (a) sem constante e (b) com constante cosmológica.	23
3.3	Potencial efetivo $V(r)$ para a componente axial do campo gravitacional nos casos (a) sem constante e (b) com constante cosmológica.	29
3.4	A função $Q(x)$	31
4.1	Cavidade de Casimir no espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter.	56

Capítulo 1

Introdução

A interação gravitacional é a única das quatro interações fundamentais da natureza que ainda não foi quantizada. Para as outras três interações fundamentais, a saber, fraca, forte e eletromagnética, existem as versões quantizadas. A teoria da relatividade geral pode ser aplicada, no contexto cosmológico, para tempos superiores ao tempo de Planck, que é da ordem de $10^{-43}s$. Para tempos inferiores ao tempo de Planck, a relatividade geral não pode ser usada. Neste caso, precisaríamos de uma teoria quântica da gravitação[1]-[5].

No intervalo entre $10^{-43}s$ e $10^{-23}s$, o campo gravitacional pode ser considerado classicamente, porém os campos de matéria terão que ser considerados, necessariamente, quânticos. Este é o regime da teoria quântica de campos em espaços curvos. Um cenário onde essa abordagem pode ser aplicada corresponde ao estudo dos modos normais e quasi-normais associados a campos escalares ou eletromagnéticos, na presença de campos gravitacionais. Nesta dissertação estudamos os modos normais associados a perturbações de campos escalares na presença de um campo gravitacional associado ao espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter.

O efeito Casimir[6] na forma original consiste na atração entre duas placas condutoras descarregadas, colocadas no vácuo, e consiste em uma manifestação das flutuações da energia de ponto zero do campo eletromagnético. Este efeito aparece em diferentes áreas da física, tais como teoria quântica de campos, física atômica e molecular, física da matéria condensada,

gravitação e cosmologia. Nesta dissertação estudamos o efeito Casimir para um campo escalar sem massa confinado numa região compreendida entre duas placas paralelas colocadas no espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter, na aproximação de campo fraco. Neste cenário, mostramos a dependência da energia de Casimir com a massa do buraco negro e com a constante cosmológica.

A razão para a escolha desta solução está relacionada ao fato da constante cosmológica ter um papel importante no cenário cosmológico. Neste contexto, a constante cosmológica tem sido interpretada como a densidade de energia do vácuo de todos os campos quânticos e, de acordo com sugestões recentes, poderia ser responsável pelo atual estágio acelerado do universo[7].

Esta dissertação está dividida da seguinte forma: no capítulo 2 apresentamos uma breve revisão sobre relatividade geral, obtemos e discutimos um teste clássico da solução de Schwarzschild-de Sitter. No capítulo 3, investigamos os modos normais correspondentes a campos escalares no espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter, assim como os coeficientes de reflexão e transmissão associados a esses modos. No capítulo 4, calculamos a energia de Casimir para um campo escalar sem massa confinado a uma região entre duas placas paralelas no espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter, usando a aproximação de campo fraco. Finalmente, no capítulo 5, apresentamos as considerações finais e as conclusões.

Capítulo 2

Solução de Schwarzschild-de Sitter

2.1 Aspectos da Relatividade Geral

As teorias da relatividade especial e geral, publicadas em 1905 e 1916, respectivamente, causaram um grande impacto sobre as idéias acerca da estrutura do espaço e do tempo[1]-[3]. Dentre essas, está a mudança das noções de espaço e de tempo, que a partir de então tornam-se interdependentes, de forma que não podemos mais tratá-los isoladamente, mas tão somente em termos de uma única entidade designada *espaço-tempo*. A partir de então, ambos os conceitos perdem o caráter absoluto que tinham na Mecânica Newtoniana, e passam a depender do referencial adotado.

Uma contribuição valiosa da teoria da relatividade geral foi relacionar a geometria do espaço-tempo com a matéria (ou energia), isto é, a matéria determinará a geometria do espaço-tempo[4, 5]. Posteriormente, na tentativa de compatibilizar a teoria com a idéia de um universo estático, Einstein propôs uma modificação nas suas equações originais, com a adição de um fator cosmológico responsável por manter a estabilidade do universo ante as forças atrativas geradas pelas massas, de acordo com a teoria gravitacional. Contudo, Hubble verificou que o universo está em expansão, o que resultou no abandono deste fator, que somente veio a ser reconsiderado no fim do século passado, na tentativa de explicar a

expansão acelerada do universo.

2.2 Equações de Einstein

Vamos aqui fazer uma breve dedução das equações de Einstein da relatividade geral, ou do campo gravitacional, se assim desejarmos chamar, e cuja solução para uma distribuição esférica de massa e com a presença de um termo cosmológico, também chamada de solução de Schwarzschild-de Sitter, será utilizada neste trabalho.

Ao contrário das equações da matemática, as equações da física não necessariamente são deduzidas de maneira formal, devendo-se fazer uso de algumas hipóteses, em consonância com a realidade física do problema, para se obter a equação que descreva um dado sistema físico. Estas equações são, então, confrontadas com os resultados experimentais e, se estiverem de acordo com estes dados, serão admitidas como corretas, pelo menos até um novo teste. As equações do campo gravitacional da teoria da relatividade geral são deduzidas segundo este procedimento, levando-se em consideração as hipóteses elencadas a seguir:

1. A gravitação é descrita por uma métrica de Lorentz, $g_{\mu\nu}$, sobre uma dada variedade;
2. As equações de movimento para $g_{\mu\nu}$ devem depender somente do conteúdo de matéria, ou do tensor energia-momento de todos os campos;
3. As equações de movimento devem ser covariantes¹ gerais, e devem ser equações tensoriais;
4. O tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ é tal que $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$, ou seja, o conteúdo de energia-momento dos campos de matéria deve ser conservada localmente;

¹O princípio da covariância diz que uma equação é válida na presença de um campo gravitacional se esta for covariante geral, isto é, se ela mantiver a mesma forma por transformações gerais de coordenadas.

5. A matéria deve ter comportamento causal, isto é, nunca viaja com velocidade superior a da luz e, portanto, todos os sinais ou 4-velocidades estão dentro ou sobre o cone de luz;
6. A gravitação de Newton deve reaparecer no limite de campos fracos²;
7. As equações devem ser, no máximo, de segunda ordem nas derivadas (condição formal).

Esta última condição sendo imposta a fim de evitar infinitas escolhas de equações. Além disso, derivadas de ordem superior a 2 exigem mais condições iniciais além de posição e velocidade para determinar a evolução do sistema, o que é indesejável.

Além das hipóteses acima citadas, podemos considerar uma hipótese adicional de que “*as equações de campo devem ser obtidas de um princípio de ação mínima, na forma covariante geral*”.

Considere que $T_{\mu\nu}$ aparece no lado direito das equações de Einstein. Então, podemos nos perguntar que quantidade geométrica poderá ser colocada no lado esquerdo da equação, uma vez que tal quantidade deve ser covariante, conter derivada de, no máximo, segunda ordem, e ter divergência nula, pois

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} \equiv 0. \quad (2.1)$$

Uma possibilidade é considerar a seguinte expressão

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = a T_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

onde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ é o chamado *tensor de Einstein*, Λ é a constante cosmológica e a é uma constante a ser determinada.

O lado esquerdo da equação (2.2) tem divergência nula, pois $\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0$, o que pode ser

²No caso tridimensional isto não é necessariamente verdade.

visto usando-se a identidade de Bianchi, dada a seguir:

$$\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]} \equiv 0 .$$

Contraindo com $g^{\mu\lambda}$, teremos

$$g^{\mu\lambda}(\nabla_{\lambda} R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_{\sigma} R_{\lambda\rho\mu\nu} + \nabla_{\rho} R_{\sigma\lambda\mu\nu}) \equiv 0 ,$$

$$\nabla^{\mu} R_{\mu\nu\rho\sigma} + \nabla_{\sigma} R_{\rho\nu} - \nabla_{\rho} R_{\sigma\nu} = 0 ,$$

$$\nabla^{\mu} R_{\mu\nu\rho\sigma} = 2\nabla_{[\rho} R_{\sigma]\nu} . \quad (2.3)$$

Novamente contraindo (2.3) com o tensor $g^{\nu\sigma}$, teremos

$$\nabla^{\mu} R_{\mu\rho} = \frac{1}{2}\nabla_{\rho} R . \quad (2.4)$$

Agora, aplicando ∇^{μ} no tensor $G_{\mu\nu}$, obtemos

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = \nabla^{\mu} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\nabla_{\nu} R - \frac{1}{2}\nabla_{\nu} R = 0 ,$$

e portanto, $G_{\mu\nu}$ possui divergência nula.

De modo a compatibilizar dimensionalmente a equação (2.2), o termo Λ precisa ter dimensão $[L^{-2}]$. Como $T_{\mu\nu}$ possui dimensão $[ML^{-1}T^{-2}]$ (energia-momento por unidade de volume), a grandeza a deverá ter dimensão $[M^{-1}L^{-1}T^2]$. Sendo assim, podemos construir uma expressão dimensionalmente consistente para a usando constantes disponíveis cujas dimensões são bem definidas, como a constante gravitacional de Newton, G , e a velocidade da luz c , da seguinte forma

$$a = \frac{kG}{c^4} \quad (2.5)$$

onde k é uma constante adimensional, cujo valor³ é $k = 8\pi$. O termo constante Λ – chamado de constante cosmológica – é um parâmetro da teoria.

³Este resultado vem do fato de que a força gravitacional é independente da natureza da fonte, sendo obtido por imposição de que no limite de campo fraco a teoria da relatividade geral se reduza à teoria da gravitação de Newton.

Desta forma (2.2) pode agora ser escrita como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

conhecida como equação de Einstein com constante cosmológica, e sendo $T_{\mu\nu}$ o conteúdo de momento-energia do campo gravitacional.

Para o caso de uma região sem fonte, $T_{\mu\nu} = 0$ e assim $T = T^\mu_\mu = 0$. Neste caso, se consideramos $\Lambda \neq 0$, por meio da contração de (2.6) com $g^{\mu\nu}$ teremos

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}g_{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu},$$

$$R - 2R + 4\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T^\mu_\mu = 0,$$

$$R = 4\Lambda,$$

e portanto

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Para o caso em que $\Lambda = 0$, teremos simplesmente

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.8)$$

A constante cosmológica, introduzida de modo a obter uma solução homogênea, isotrópica e, principalmente, estática do universo, nos dias atuais reaparece com uma interpretação física de energia do vácuo, ou energia do ponto zero.

2.3 Solução de Schwarzschild-de Sitter

Desejamos obter a métrica mais geral possível e que descreva o espaço-tempo gerado por um corpo esfericamente simétrico, sem necessariamente eliminar a possibilidade dessa métrica depender também do tempo. Por uma questão de simetria do problema, admitimos que, ao menos localmente, a métrica desejada pode ser reduzida a uma família de bi-esferas S^2 . Assim, o elemento de linha terá a seguinte forma:

$$ds^2 = f(r, t)dt^2 + g(r, t)dr^2 + 2h(r, t)dtdr + k(r, t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.9)$$

Definindo uma nova coordenada r' , tal que $r'^2 = k(r, t)$, a métrica (2.9) será escrita como

$$ds^2 = f(r, t)dt^2 + g(r, t)dr^2 + 2h(r, t)dtdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.10)$$

onde desprezamos a “linha” da coordenada radial.

As equações de Einstein são invariantes por transformações de coordenadas, o que nos permite escolher um sistema de coordenadas compatível com a simetria do problema, descartando as coordenadas associadas a graus de liberdade não-físicos. Então, a única simetria possível é a esférica. Escolhendo uma mudança de coordenadas $t' = t'(r, t)$ e admitindo existir uma função arbitrária $m(t, r)$ tal que

$$m(r, t)(dt')^2 = m(r, t) \left[\left(\frac{\partial t'}{\partial r} \right)^2 dr^2 + \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)^2 dt^2 + 2 \left(\frac{\partial t'}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right) drdt \right],$$

e escolhendo

$$m(r, t) \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)^2 = f(r, t) \quad \text{e} \quad m(r, t) \left(\frac{\partial t'}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right) = h(r, t),$$

verificamos que

$$f(r, t) \left(\frac{\partial t'}{\partial r} \right) = h(r, t) \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right),$$

e portanto, a métrica será dada por

$$ds^2 = m(r, t)dt^2 + n(r, t)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.11)$$

com $m(r, t)$ e $n(r, t)$ funções arbitrárias. Como a métrica é Lorentziana, e por coerência com a escolha da assinatura da métrica, escrevemos (2.11) usualmente como

$$ds^2 = -e^{2A(r,t)} dt^2 + e^{2B(r,t)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.12)$$

Considerando a métrica dada por (2.12) usando a definição de tensor de Riemann dada por

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma},$$

onde os $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ são os símbolos de Christoffel de segunda espécie, que são definidos em termos da métrica como

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\kappa} \left(\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right),$$

obtemos que as componentes não-nulas do tensor de Riemann são

$$R^0_{101} = e^{2(B-A)} [B_{tt} + B_t^2 - A_t B_t] + [A_r B_r - A_{rr} - A_r^2],$$

$$R^0_{202} = -r e^{-2B} A_r, \quad R^0_{303} = -r e^{-2B} \sin^2 \theta A_r$$

$$R^0_{212} = -r e^{-2A} B_t, \quad R^0_{313} = -r e^{-2A} \sin^2 \theta B_t$$

$$R^1_{212} = r e^{-2B} B_r, \quad R^1_{313} = r \sin^2 \theta B_r e^{-2B}$$

$$R^2_{323} = \sin^2 \theta (1 - e^{-2B}).$$

onde os sub-índices r e t significam derivadas em relação às coordenadas radial e temporal, respectivamente.

A partir desses resultados, podemos obter as componentes do tensor de Ricci, que é a contração do tensor de Riemann com a métrica da forma

$$R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu} = g^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma} R^\sigma_{\mu\sigma\nu} = R^\sigma_{\mu\sigma\nu}.$$

Obtemos, então, o seguinte resultado

$$R_{00} = -[B_{tt} + B_t^2 - A_t B_t] + e^{2(A-B)}[A_{rr} + A_r^2 - A_r B_r + \frac{2}{r}A_r], \quad (2.13)$$

$$R_{11} = -[A_{rr} + A_r^2 - A_r B_r - \frac{2}{r}B_r] + e^{2(B-A)}[B_{tt} - A_t B_t + B_t^2], \quad (2.14)$$

$$R_{22} = e^{-2B}[r(B_r - A_r) - 1] + 1, \quad (2.15)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta, \quad (2.16)$$

$$R_{01} = \frac{2}{r}B_t. \quad (2.17)$$

Se considerarmos uma região exterior ao corpo material, então $T_{\mu\nu} = 0$, e assim as equações de Einstein se reduzem a

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.18)$$

Considerando que o campo seja estático, ignoramos os termos que apresentam dependência temporal, e assim, a equação (2.18) será dada por

$$e^{2(A-B)}[A_{rr} + A_r^2 - A_r B_r + \frac{2}{r}A_r] = \Lambda e^{2A}, \quad (2.19)$$

$$- [A_{rr} + A_r^2 - A_r B_r - \frac{2}{r}B_r] = \Lambda e^{2B}, \quad (2.20)$$

$$e^{-2B}[r(B_r - A_r) - 1] + 1 = \Lambda r^2. \quad (2.21)$$

Multiplicando-se (2.20) por $e^{2(A-B)}$ e adicionando-a à (2.19), obteremos

$$\frac{\partial}{\partial r}(A + B) = 0,$$

o que implica

$$A + B = \text{constante} \quad \implies \quad A = -B + \text{constante}.$$

Da condição de contorno de que quando $r \rightarrow \infty$, a métrica deve recair na de de Sitter, e deveremos ter

$$A + B = 0 \quad \implies \quad A = -B.$$

Usando o resultado anterior em (2.21) ficamos com

$$e^{2A}[1 + 2rA_r] = 1 - \Lambda r^2 ,$$

ou

$$\frac{d}{dr}(re^{2A}) = 1 - \Lambda r^2 . \quad (2.22)$$

Integrando ambos os lados, obteremos

$$re^{2A} = \int (1 - \Lambda r^2) dr - \zeta = r - \frac{\Lambda r^3}{3} - \gamma ,$$

onde γ é uma constante de integração que tem valor⁴ $\gamma = 2m$. Assim, temos

$$e^{2A} = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) .$$

Como $A = -B$, o elemento de linha (2.12) será escrito na forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.23)$$

Esta é conhecida como solução de *Schwarzschild-de Sitter* (SdS), e será usada neste trabalho para examinar alguns sistemas quânticos.

2.4 Teste Clássico da Solução de SdS

O melhor cenário teórico para descrever a interação gravitacional é o proposto pela teoria da relatividade geral. As maiores comprovações desta teoria, que são a deflexão da luz e o desvio do periélio do planeta Mercúrio, concordam com os valores de Einstein com uma excelente precisão[8, 9].

Modificações possíveis do espaço-tempo de Schwarzschild devem também preservar a simetria esférica. Neste caso, podemos ter as seguintes soluções: com termo cosmológico

⁴Obtido a partir da análise da aproximação de campo fraco, $g_{00} \approx -(1 + 2\phi)$, onde ϕ pode ser interpretado como o potencial gravitacional Newtoniano.

Λ [10], uma carga elétrica líquida[11], e na presença de um monopolo magnético[12]. O caso com uma constante cosmológica é importante, devido a sua conexão com possíveis efeitos gravitacionais desta constante em buracos negros[13], assim como no contexto cosmológico.

Nesta seção, estudamos as órbitas de partículas com e sem massa no campo gravitacional do Sol, modificado pela presença do termo cosmológico na métrica, generalizando os resultados obtidos por Islam[15].

2.4.1 Precessão do Periélio do Planeta Mercúrio

O espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter toma a seguinte forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.24)$$

onde $M = Gm/c^2$ é a massa geométrica do corpo central e Λ é a constante cosmológica.

Neste espaço-tempo, uma partícula teste obedece as equações geodésicas que podem ser obtidas da Lagrangeana

$$L = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right) \left(\frac{cdt}{dp}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 - r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dp}\right)^2 \right] \quad (2.25)$$

onde p é um parâmetro afim.

Usando a equação de Euler-Lagrange, obtemos que as equações de movimento são dadas por

$$\frac{d}{dp} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right) \frac{dt}{dp} \right] = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{d}{dp} \left(r^2 \frac{d\theta}{dp} \right) - r^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{dp} \right)^2 = 0, \quad (2.27)$$

$$\frac{d}{dp} \left(r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{dp} \right) = 0. \quad (2.28)$$

A primeira equação geodésica nos dá o seguinte resultado

$$\frac{dt}{dp} = \frac{E}{c} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3} \right)^{-1}, \quad (2.29)$$

onde E é uma constante. Observe que no limite Newtoniano E corresponde à energia relativística da partícula.

Por simplicidade, vamos escolher as condições iniciais $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\frac{d\theta}{dp} = 0$. Então, da eq. (2.27) encontramos que $\frac{d^2\theta}{dp^2} = 0$. Isto significa que o movimento está confinado ao plano invariante $\theta = \frac{\pi}{2}$ que conserva momento angular quando tomamos o limite Newtoniano, e este fato nos permite simplificar as equações restantes considerando em todas elas $\theta = \frac{\pi}{2}$. Desta forma, a eq. (2.28) implica que

$$r^2 \frac{d\phi}{dp} = L, \quad (2.30)$$

onde L é este momento angular.

Para obtermos a solução para a coordenada radial, vamos agora considerar a equação

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = \kappa, \quad (2.31)$$

onde κ é uma constante. Podemos fixar o parâmetro p escolhendo $\kappa = -c^2$, c^2 ou 0, para curvas tipo-espaço, tipo-tempo ou tipo-luz, respectivamente. Assim, para a equação radial obtemos o seguinte resultado

$$\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3} \right) \left(\frac{cdt}{dp} \right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{dp} \right)^2 = \kappa. \quad (2.32)$$

Agora, substituindo (2.29) e (2.30) em (2.31), teremos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + V(r) = \frac{1}{2} E^2, \quad (2.33)$$

onde o potencial efetivo é

$$V(r) = \frac{1}{2} \kappa + \frac{\Lambda L^2}{6} - \frac{\kappa M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3} + \kappa \frac{\Lambda r^2}{6}.$$

Vamos agora determinar as órbitas. Para isso, vamos fazer a mudança da variável r para $u = r^{-1}$, e então $\frac{dr}{dp} = -L\frac{du}{d\phi}$. Desta forma, para órbitas não-circulares e partículas com massa ($\kappa = c^2$), a equação (2.32) fica

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{c^2M}{L^2} + 3Mu^2 + \frac{c^2\Lambda}{3L^2u^3}. \quad (2.34)$$

O primeiro termo do lado direito de (2.34) conduz a órbitas quasi-Newtonianas. De fato, se consideramos apenas este termo, a solução de (2.34) é

$$u_0 = \frac{1}{r} = \frac{c^2M}{L^2} [1 + e \cos(\phi - \phi_0)], \quad (2.35)$$

onde ϕ_0 e e são constantes de integração (de fato, e é a excentricidade da órbita).

A princípio, para obter as correções exatas das órbitas Newtonianas, a equação (2.34) deve ser integrada exatamente. Entretanto, de modo a comparar os resultados com as observações astronômicas, a forma mais simples é obtida pelo método de aproximações sucessivas. A correção de primeira ordem deve ser obtida considerando a expansão perturbativa $u \cong u_0 + u_1$ ($u_1 \ll u_0$), onde u_0 é dada pela eq. (2.35). A aplicação do procedimento perturbativo padrão neste cenário estendido é justificável porque os dois últimos termos em (2.34) são pequenos em comparação com a contribuição Newtoniana. Isto pode ser verificado comparando as magnitudes relativas de cada termo usando o fato de que Λ é muito pequena segundo os limites cosmológicos atuais[16].

Agora, considerando órbitas de pequena excentricidade, obtemos o seguinte resultado para $u_1(\phi)$

$$\frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_1 \cong \frac{6M^3c^4}{L^4} \left(1 - \frac{L^8\Lambda}{6c^8M^6}\right) e \cos(\phi - \phi_0), \quad (2.36)$$

cuja solução é dada por

$$u_1 = \frac{3M^3c^4}{L^4} \left(1 - \frac{L^8\Lambda}{6c^8M^6}\right) e\phi \sin(\phi - \phi_0). \quad (2.37)$$

Incluindo esta correção, teremos que

$$u \cong \frac{c^2 M}{L^2} \left\{ 1 + e \left[\cos(\phi - \phi_0) + \frac{3M^2 c^2}{L^2} \left(1 - \frac{L^8 \Lambda}{6c^8 M^6} \right) \phi \sin(\phi - \phi_0) \right] \right\}, \quad (2.38)$$

e definindo

$$\Delta\phi_0 = 3 \left(\frac{cM}{bL} \right)^2 \left(1 - \frac{L^8 \Lambda}{6c^8 M^6} \right) \phi, \quad (2.39)$$

a solução $u(\phi)$ pode ser escrita como

$$u = \frac{1}{r} \cong \frac{c^2 M}{L^2} \{ 1 + e \cos(\phi - \phi_0 - \Delta\phi_0) \}. \quad (2.40)$$

Decorre de (2.40) que o desvio por revolução é dado por

$$\Delta\phi = 6\pi \left(\frac{cM}{L} \right)^2 \left(1 - \frac{L^8 \Lambda}{6c^8 M^6} \right). \quad (2.41)$$

Usando o fato de que para o planeta Mercúrio o desvio do periélio é determinado com uma precisão de 5×10^{-3} [8], encontramos que

$$|\Lambda| < 10^{-42} \text{ cm}^{-2}, \quad (2.42)$$

um resultado obtido previamente em [15].

Se alguma fração do desvio do periélio é devida a outros efeitos, como o momento de quadrupolo do Sol, por exemplo, o limite superior seria modificado pelo valor correspondente. Vale ressaltar que o limite dado por (2.42) é doze ordens de grandeza maior do que o obtido por outros métodos[8].

Capítulo 3

Modos Normais de Oscilação em Buracos Negros de SdS

3.1 Modos Normais em Buracos Negros

A idéia de objetos com campos gravitacionais fortes o suficiente para impedir até mesmo a luz de escapar vem de muito antes da relatividade geral de Einstein. Esta idéia surgiu no contexto da teoria gravitacional de Newton, e foi inicialmente estudada por Laplace[17], sendo conhecida como *estrela escura*. Em 1916, Schwarzschild obteve a primeira solução exata das equações de Einstein, estática e com simetria esférica, mas que possuía duas singularidades, a primeira delas física¹, em $r = 0$, e a segunda de coordenada, em $r = 2M$. Alguns anos depois esta solução ficou conhecida como solução de Schwarzschild ou *solução do buraco negro*.

O estudo dos buracos negros e suas propriedades físicas foi e continua sendo alvo de inúmeras pesquisas. Os primeiros estudos sobre perturbações em buracos negros foram realizados em 1957 por Regge e Wheeler[18], que procuravam verificar a estabilidade destes objetos mediante pequenas perturbações considerando, inicialmente, a solução de Schwarzschild. Em seguida, foram consideradas outras soluções e perturbações de diferentes naturezas, tais como as escalares, eletromagnéticas, dentre outras[19]. Em geral, esses objetos

¹Que não pode ser removida por nenhuma mudança de coordenada.

são estáveis se considerarmos métricas esféricamente simétricas e assintoticamente planas[20].

Nos últimos anos descobriu-se que esses objetos possivelmente emitem ondas gravitacionais[21], o que motivou uma nova corrida em busca da compreensão do comportamento de buracos negros frente a perturbações do espaço-tempo, e assim ter a possibilidade, por meio de antenas gravitacionais, de detectar tais ondas, que também são previstas pela relatividade geral e carregam informações relevantes sobre as propriedades do buraco negro, uma vez que são determinadas unicamente pelos parâmetros que descrevem o buraco negro.

Por suas propriedades particulares, buracos negros possuem modos de vibração característicos, denominados *modos quase-normais*, e as frequências associadas são as *frequências quase-normais*. Ao contrário dos sistemas de modos normais, que são estacionários, estas oscilações decaem exponencialmente, devido ao fato de o buraco negro emitir radiação para o infinito, e suas frequências serem funções complexas, onde a parte real representa a verdadeira frequência de oscilação e a parte imaginária dita a taxa de amortecimento, o que significa que tais modos surgem somente num intervalo limitado do tempo.

3.2 Perturbação do Espaço-tempo de SdS

Modos quasi-normais de vibração de buracos negros foram inicialmente observados em 1970 por Vishveshwara[22], no espalhamento de ondas gravitacionais no espaço-tempo de Schwarzschild, e posteriormente foram realizados novos estudos nas métricas de Reissner-Nordström, Kerr e Kerr-Newmann, visando não somente estudar a estabilidade ou frequências características, mas também entender os mecanismos de excitação destas oscilações do campo gravitacional[23].

Estes modos podem ser estudados a partir de uma teoria de perturbação, que pode ser feita de duas maneiras distintas. Na primeira delas colocamos um campo de teste no espaço-tempo do buraco negro, e essa perturbação será descrita por uma equação dinâmica para esse campo. A segunda consiste em perturbar o próprio espaço-tempo por meio da métrica. Neste caso é preciso linearizar as equações de Einstein para encontrar a equação de evolução dessa perturbação, e além desta equação, pode-se verificar a estabilidade do buraco negro.

Veremos agora, de maneira sucinta, três perturbações de diferentes naturezas, que foram (e continuam sendo) utilizadas no estudo de modos normais, que são as perturbações escalares, eletromagnéticas e gravitacionais, e como cada uma afeta a equação dos modos.

3.2.1 Perturbações Escalares

Apesar de campos escalares sem massa não descreverem sistemas físicos, por meio de perturbações escalares pode-se obter informações sobre a estabilidade do buraco negro quando este for perturbado. Além disso, por apresentar uma forma mais simples, serve também como ferramenta inicial de estudo, uma vez que perturbações de outra natureza exigem um tratamento mais complicado.

A equação de Klein-Gordon descreve a evolução de campos escalares. No caso em que a massa do campo é nula, e é considerado o acoplamento mínimo, esta equação é dada por:

$$\square\Psi(t, r, \theta, \phi) = 0, \quad (3.1)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu)\Psi(t, r, \theta, \phi) = 0 \quad (3.2)$$

com os índices μ e ν variando de $\mu, \nu = 0, \dots, 3$ e ainda $g = \det g_{\mu\nu}$.

Considerando uma métrica esfericamente simétrica, quadridimensional, vamos escrever o

elemento de linha da seguinte forma

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.3)$$

sendo $A(r)$ e $B(r)$ funções arbitrárias.

Devido a simetria esférica do espaço-tempo, a equação de Klein-Gordon se reduz a

$$\begin{aligned} g^{00}\partial_0^2\Psi + \frac{1}{\sqrt{-g}}(\partial_1\sqrt{-g})g^{11}\partial_1\Psi + (\partial_1g^{11})\partial_1\Psi + g^{11}\partial_1^2\Psi + \\ + g^{22}\partial_2^2\Psi + \frac{1}{\sqrt{-g}}(\partial_2\sqrt{-g})g^{22}\partial_2\Psi + g^{33}\partial_3^2\Psi = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

que após as substituições dos coeficientes métricos, tomará a seguinte forma

$$\begin{aligned} g^{00}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + \left[\frac{2}{r} + \frac{1}{2A}\frac{dA}{dr} - \frac{1}{2B}\frac{dB}{dr}\right]g^{11}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + g^{11}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \\ + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}\right] = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

A solução $\Psi(t, r, \theta, \phi)$ pode ser escrita através de uma separação de variáveis da forma

$$\Psi(t, r, \theta, \phi) = Z(t, r)Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (3.6)$$

onde $Y_{lm}(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos e, portanto, soluções da equação angular

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\phi^2} + l(l+1)Y_{lm} = 0. \quad (3.7)$$

A equação para $Z(t, r)$ é dada por

$$-\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \frac{A}{B}\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \left[\frac{2}{r} + \frac{1}{2A}\frac{dA}{dr} - \frac{1}{2B}\frac{dB}{dr}\right]\frac{A}{B}\frac{\partial Z}{\partial r} = A\left(\frac{l(l+1)}{r^2}\right)Z \quad (3.8)$$

Para resolver esta equação, vamos substituir a coordenada radial r pela coordenada tartaruga² r_* .

²Coordenada radial que coloca o horizonte de eventos do buraco negro em $r = -\infty$, limitando o domínio da equação diferencial para o espaço-tempo exterior ao horizonte. À medida que $|r_*|$ se aproxima de valores infinitos, as soluções aproximam-se de ondas planas ou, mais precisamente, de uma combinação de ondas planas entrando e saindo das regiões exteriores.

Vamos introduzir as seguintes relações

$$Z(t, r) = R(t, r)b(r) \quad f(r) = \frac{A}{B} \quad r = r(r_*)$$

em (3.8), o que resultará em

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} b + \left[\frac{2}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial r_*}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r_*} (\ln f) \right] f \frac{\partial r_*}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r_*} (Rb) + \\ & + f \frac{\partial r_*}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r_*} \left[\frac{\partial r_*}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r_*} (Rb) \right] = ARb \left[\frac{l(l+1)}{r^2} \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $(')$ e $(\dot{})$ representam, respectivamente, as derivadas em relação a r_* e r . Podemos escrever (3.9) de modo mais conveniente, da forma

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + f \dot{r}_*^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r_*^2} + \frac{\partial R}{\partial r_*} \left(f \dot{r}_* \dot{r}'_* + 2f \dot{r}_*^2 \frac{b'}{b} + \left[\frac{2}{r} + \frac{\dot{r}_* f'}{2f} \right] f \dot{r}_* \right) + \\ & + R \left[f \dot{r}_* \dot{r}'_* \frac{b'}{b} + f \dot{r}_*^2 \frac{b''}{b} + \left[\frac{2}{r} + \frac{\dot{r}_* f'}{2f} \right] f \dot{r}_* \frac{b'}{b} \right] = AR \left[\frac{l(l+1)}{r^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Vamos admitir que as seguintes condições são satisfeitas

$$f \dot{r}_* \dot{r}'_* + 2f \dot{r}_*^2 \frac{b'}{b} + \left[\frac{2}{r} + \frac{\dot{r}_* f'}{2f} \right] f \dot{r}_* = 0, \quad (3.11)$$

$$f \dot{r}_*^2 = 1. \quad (3.12)$$

Então, teremos que a equação (3.10) assume a seguinte forma:

$$-\frac{\partial^2 R(t, r)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 R(t, r)}{\partial r_*^2} = V_{ef}(r)R(t, r). \quad (3.13)$$

Das duas condições anteriores, teremos que

$$\dot{r}_* = \frac{1}{\sqrt{f}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr_*} = \sqrt{f} \frac{d}{dr} \quad \Rightarrow \quad r_* = \int \frac{1}{\sqrt{f}} dr \quad (3.14)$$

e assim

$$-\frac{1}{2f} \frac{df}{dr} + \frac{2}{b} \frac{db}{dr} + \frac{2}{r} + \frac{1}{2f} \frac{df}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad b(r) = \frac{1}{r} \quad (3.15)$$

O potencial efetivo em (3.13) é dado por

$$V_{ef}(r) = A(r) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} \right] - V(r), \quad (3.16)$$

onde $V(r)$ possui a seguinte expressão

$$V(r) = \left[f\dot{r}_* \dot{r}'_* \frac{b'}{b} + f\dot{r}_*^2 \frac{b''}{b} + \left(\frac{2}{r} + \frac{\dot{r}_* f'}{2f} \right) f\dot{r}_* \frac{b'}{b} \right]. \quad (3.17)$$

Com os resultados anteriores, $V(r)$ será dado por

$$V(r) = f\dot{r}_* r \left[\frac{d}{dr} \left(\sqrt{f} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \right) + \frac{2}{r} \sqrt{f} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \right] \Rightarrow V(r) = -\frac{1}{2r} \frac{df}{dr}. \quad (3.18)$$

Com isso, a equação de perturbação devido ao campo escalar num espaço-tempo com simetria esférica será uma equação semelhante à de Schrodinger, dada por (3.13), e com um potencial efetivo $V_{ef}(r)$ dado por

$$V_{ef}(r) = A(r) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} \right] + \frac{1}{2r} \frac{df}{dr}. \quad (3.19)$$

Como, inicialmente, fizemos uma separação de variáveis, a função de onda que descreve a evolução deste campo escalar sem massa será, então,

$$\Psi(t, r, \theta, \phi) = \sum_{l,m} \frac{R(t, r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (3.20)$$

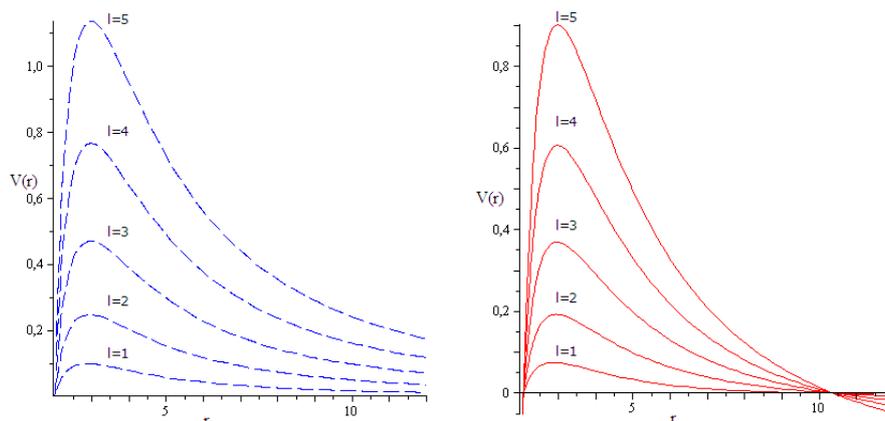


Figura 3.1: Potencial efetivo $V(r)$ para o campo escalar nos casos (a) sem constante e (b) com constante cosmológica.

3.2.2 Perturbações Eletromagnéticas

Diferentemente do caso do campo escalar sem massa, o campo eletromagnético representa um campo de matéria com sentido físico, o que o torna de grande interesse no estudo do comportamento de buracos negros mediante perturbações desta natureza. Como sabemos, um campo eletromagnético tem seu comportamento regido pelas equações de Maxwell, que podem ser representadas, na ausência de fonte, na forma

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} \quad (3.21)$$

sendo $F^{\mu\nu}$ o tensor eletromagnético e A_μ o potencial vetor associado.

Novamente, considerando um espaço-tempo esfericamente simétrico descrito pela métrica

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.22)$$

o potencial vetor A_μ pode ser expandido em termos de harmônicos esféricos vetoriais (para uma melhor compreensão ver [24, 25])

$$A_\mu(t, r, \theta, \phi) = \sum_{l,m} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a^{lm}(t,r)}{\sin\theta} \partial_\phi Y_{lm} \\ -a^{lm}(t,r) \sin\theta \partial_\theta Y_{lm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f^{lm}(t,r) Y_{lm} \\ h^{lm}(t,r) Y_{lm} \\ k^{lm}(t,r) \partial_\theta Y_{lm} \\ k^{lm}(t,r) \partial_\phi Y_{lm} \end{bmatrix} \right), \quad (3.23)$$

onde a primeira matriz da soma tem paridade $(-1)^{l+1}$ e a segunda tem paridade $(-1)^l$, e $a(t,r)$, $f(t,r)$, $h(t,r)$ e $k(t,r)$ são funções com dependência harmônica angular a determinar.

Usando esta expansão na definição acima do tensor eletromagnético F^{ij} teremos, para os elementos de paridade $(-1)^{l+1}$, as seguintes componentes não-nulas

$$\begin{aligned} F_{lm}^{t\phi} &= -\frac{g^{tt} a^{lm}{}_{,t} Y^{lm}{}_{,\theta}}{r^2 \sin\theta} & F_{lm}^{r\phi} &= -\frac{g^{rr} a^{lm}{}_{,r} Y^{lm}{}_{,\theta}}{r^2 \sin\theta} \\ F_{lm}^{t\theta} &= \frac{g^{tt} a^{lm}{}_{,t} Y^{lm}{}_{,\theta}}{r^2 \sin\theta} & F_{lm}^{r\theta} &= \frac{g^{rr} a^{lm}{}_{,r} Y^{lm}{}_{,\phi}}{r^2 \sin\theta} \\ F_{lm}^{\theta\phi} &= \frac{l(l+1) a^{lm} Y^{lm}}{r^4 \sin\theta} \end{aligned}$$

Substituindo estas componentes nas equações de Maxwell (3.21), obteremos a equação radial

$$-\frac{a^{lm},_{tt}}{A} + \frac{a^{lm},_r}{2B}(\ln A/B),_r + \frac{a^{lm},_{rr}}{B} - \frac{l(l+1)}{r^2}a^{lm} = 0. \quad (3.24)$$

Do mesmo modo que no caso escalar, podemos reescrever esta equação de forma mais compacta introduzindo a coordenada tartaruga r_* e as substituições

$$a^{lm}(t, r) = \mathcal{A}(t, r) \quad f(r) = \frac{A}{B} \quad \frac{d}{dr_*} = \sqrt{f} \frac{d}{dr} \quad (3.25)$$

Assim, a equação radial assume a forma

$$-\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial r_*^2} = V_{el}(r)\mathcal{A} \quad (3.26)$$

onde $V_{el}(r)$ é dado por

$$V_{el}(r) = A(r) \frac{l(l+1)}{r^2}, \quad (3.27)$$

que é a equação axial de uma perturbação eletromagnética num espaço-tempo que apresenta simetria esférica.

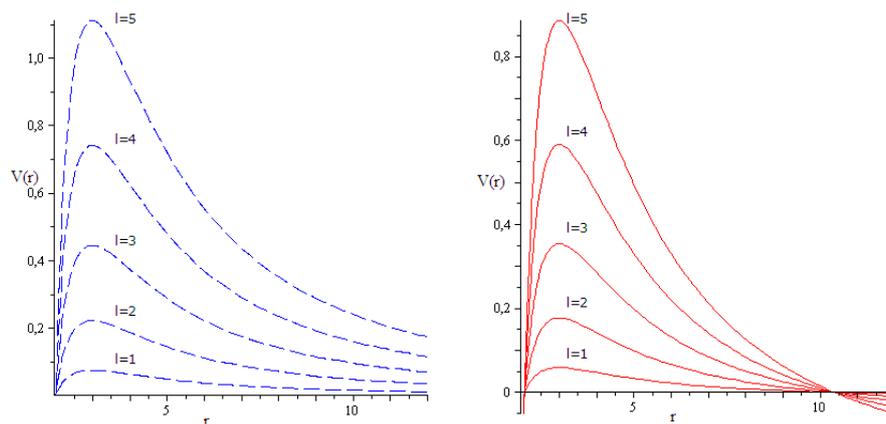


Figura 3.2: Potencial efetivo $V(r)$ para o campo eletromagnético nos casos (a) sem constante e (b) com constante cosmológica.

3.2.3 Perturbações Gravitacionais

Como já foi dito, perturbações podem ocorrer de maneiras distintas, ou por adição de um campo auxiliar ao espaço-tempo do buraco negro, como nos casos escalar e eletromagnético, ou por perturbações na métrica de fundo, que é o caso das perturbações gravitacionais, que veremos agora.

Sabemos que campos gravitacionais e sua evolução são governados pelas equações de Einstein da relatividade geral, e as perturbações gravitacionais, que modificam levemente a métrica, levam à necessidade de linearização destas equações[26]. Devido ao modo como estas perturbações se transformam frente a uma inversão espacial em ϕ , são divididas em axiais e polares. No entanto, trataremos apenas o caso axial, e consideraremos perturbações em primeira ordem na métrica não perturbada $\hat{g}_{\mu\nu}$.

Novamente, usando nossa métrica geral e esfericamente simétrica

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.28)$$

com $A(r)$ e $B(r)$ sendo funções arbitrárias, as equações de Einstein para a região exterior a um buraco negro, são

$$\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\hat{g}_{\mu\nu}\hat{R} + \Lambda\hat{g}_{\mu\nu} = \hat{T}_{\mu\nu} = 0, \quad (3.29)$$

onde estamos considerando o termo de constante cosmológica.

O escalar de Ricci, obtido da contração do tensor $\hat{R}_{\mu\nu}$ com $\hat{g}_{\mu\nu}$ será, então,

$$\hat{g}^{\mu\nu}\hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\hat{g}^{\mu\nu}\hat{g}_{\mu\nu}\hat{R} + \Lambda\hat{g}^{\mu\nu}\hat{g}_{\mu\nu} = 0, \quad (3.30)$$

$$\hat{R} = 4\Lambda.$$

Assim, a equação (3.29) tomará a seguinte forma

$$\hat{R}_{\mu\nu} = \Lambda\hat{g}_{\mu\nu}, \quad (3.31)$$

que é a equação a ser perturbada.

A nova métrica, considerando uma perturbação em primeira ordem, pode ser escrita na forma

$$g_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} = \hat{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (3.32)$$

onde $h_{\mu\nu} \ll \hat{g}_{\mu\nu}$ e desprezamos perturbações de ordens superiores à 2ª ordem.

Como a métrica foi perturbada, os símbolos de Christoffel também serão, pois estes são funções da métrica, e serão funções dos símbolos não perturbados e dos submetidos à perturbação, sendo dados por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) = \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^{\sigma} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \mathcal{O}(h^2), \quad (3.33)$$

onde o termo $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ perturbado é escrito como

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}\hat{g}^{\sigma\rho}(h_{\rho\mu,\nu} + h_{\rho\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\rho}). \quad (3.34)$$

O tensor de Ricci perturbado será, então, dado por

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma_{\mu\sigma;\nu}^{\sigma} - \delta\Gamma_{\mu\nu;\sigma}^{\sigma}. \quad (3.35)$$

Se substituirmos a nova métrica $g_{\mu\nu}$ em (3.31), teremos as seguintes equações para o campo gravitacional perturbado

$$R_{\mu\nu} = \hat{R}_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \Lambda h_{\mu\nu} \quad (3.36)$$

Esta equação governa a perturbação do campo gravitacional na região exterior ao buraco negro.

Perturbações Gravitacionais Axiais

Os trabalhos de Regge e Wheeler[18] e Chandrasekhar[27] foram pioneiros no estudo de perturbações gravitacionais no contexto da relatividade geral, tema hoje bastante estudado e que ressurge diante das novas possibilidades relacionadas à detecção de ondas gravitacionais. Aqui consideraremos apenas a componente axial das perturbações. O caso das componentes polares, caso seja de interesse, pode ser encontrado nos trabalhos [22, 27].

Conforme já foi dito, Regge e Wheeler[18] foram pioneiros no estudo de perturbações gravitacionais em buracos negros. Usaremos o método por eles desenvolvido, que consiste em decompor, quando o problema envolve simetria esférica, o tensor $h_{\mu\nu}$ em uma parte angular, dada em termos dos harmônicos esféricos tensoriais (ver [28, 29]), e outra parte com dependência em r e t . Os resultados deste trabalho consideram a métrica como sendo dada por

$$h_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{h_0(t,r)}{\text{sen}\theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} & h_0(t,r) \text{sen}\theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \\ 0 & 0 & -\frac{h_1(t,r)}{\text{sen}\theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} & h_1(t,r) \text{sen}\theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \\ \text{sim} & \text{sim} & h_2(t,r) \left[\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} - \frac{\cos\theta}{\text{sen}^2\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] Y_{lm} & \text{sim} \\ \text{sim} & \text{sim} & \frac{1}{2} h_2(t,r) \left[\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \text{sen}\theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] Y_{lm} & -h_2(t,r) \left[\text{sen}\theta \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} - \cos\theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right] Y_{lm} \end{bmatrix}$$

O termo *sim* representa a componente obtida pela simetria $h_{ij} = h_{ji}$ na matriz. Quaisquer que sejam os valores de l e m , a equação radial será a mesma. Assim, escolhemos $m = 0$ para, desta maneira, eliminarmos a dependência em ϕ dos cálculos, pois

$$L_z Y_{lm}(\theta, \phi) = m Y_{lm}(\theta, \phi) \quad \implies \quad \frac{\partial Y_{l0}(\theta, \phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (3.37)$$

Para simplificar um pouco o tensor $h_{\mu\nu}$, usamos o gauge de Regge e Wheeler para perturbações axiais. Para isso, considera-se um deslocamento infinitesimal de coordenada

e admite-se uma dependência temporal da forma $e^{-i\omega t}$, no que resulta

$$h_{ij}^{axial} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & h_0(r) \\ 0 & 0 & 0 & h_1(r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ sim & sim & 0 & 0 \end{bmatrix} \times e^{-i\omega t} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta). \quad (3.38)$$

Ao substituirmos esta nova expressão do tensor $h_{\mu\nu}^{axial}$ em (3.36), obtemos o conjunto de equações não-nulas e acopladas:

$$\delta R_{\theta\phi} = -\frac{1}{2} \left\{ i\omega \frac{h_0}{A} + \frac{1}{B} \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dr} (\ln(A/B)) h_1 + \frac{dh_1}{dr} \right] \right\} \\ \times \left(\cos \theta \frac{d}{d\theta} - \sin \theta \frac{d^2}{d\theta^2} \right) P_l(\cos \theta) e^{-i\omega t} = \Lambda h_{\theta\phi}, \quad (3.39)$$

$$\delta R_{r\phi} = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{\omega^2}{A} + \frac{1}{Br} \left(\frac{d}{dr} (\ln(B/A)) - \frac{2}{r} \right) \right] h_1 \right. \\ \left. + \frac{i\omega}{A} \left(\frac{dh_0}{dr} - \frac{2h_0}{r} \right) \right\} \times \sin \theta \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} e^{-i\omega t} = \Lambda h_{r\phi}, \quad (3.40)$$

$$\delta R_{t\phi} = - \left\{ \frac{1}{2B} \frac{d^2 h_0}{dr^2} + i\omega \left[\frac{1}{2B} \frac{dh_1}{dr} + \frac{h_1}{Br} - \frac{1}{4B} \frac{d}{dr} (\ln(AB)) h_1 \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{4B} \frac{d}{dr} (\ln(AB)) \frac{dh_0}{dr} + \left(\frac{1}{Br} \frac{d}{dr} (\ln A) - \frac{l(l+1)}{2r^2} \right) h_0 \right\} \\ \times \sin \theta \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} e^{-i\omega t} = \Lambda h_{t\phi}, \quad (3.41)$$

que podem ser desacopladas quando levamos em conta as propriedades dos polinômios de Legendre, $P_l(\cos \theta)$, analisando os índices de multipolo assim como em[22]:

Para $l = 0$, os fatores angulares serão identicamente nulos. Assim, uma perturbação com este índice de multipolo representa uma mudança na massa do buraco negro.

Para $l = 1$, a equação $\delta R_{\theta\phi}$ será identicamente nula, e isto significa que uma perturbação com índice $l = 1$ corresponde a um incremento diferencial de momento angular.

Uma vez que os casos anteriores correspondem à quantidades conservadas, nosso interesse passa a ser nos casos com $l \geq 2$, que são modos dinâmicos capazes de se propagar por um

tempo considerável, de modo a permitir sua detecção. Para estes casos, teremos sempre que $P_{l \geq 2} \neq 0$. Então, os fatores entre chaves nas equações (3.39)–(3.41) devem se anular e assim obtemos três equações radiais.

Se substituimos as equações radiais, podemos eliminar a dependência em h_0 e ficar com uma equação de segunda ordem em h_1 somente, dada por

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h_1}{dr^2} + \left[\frac{3}{2} \frac{d}{dr} \left(\ln \frac{A}{B} \right) - \frac{2}{r} \right] \frac{dh_1}{dr} + \left[\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} \left(\ln \frac{A}{B} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} \left(\ln \frac{A}{B} \right) \right)^2 \right. \\ \left. - B \frac{l(l+1)}{r^2} + \omega^2 \frac{B}{A} + \frac{2}{r^2} + 2\Lambda B \right] h_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

A partir daqui especificamos nossa métrica, que é a de Schwarzschild-de Sitter, na forma dada anteriormente por

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.43)$$

onde as funções $A(r)$ e $B(r)$ são dadas por

$$A(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) \quad B(r) = \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right)}. \quad (3.44)$$

Definindo

$$Q(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) \frac{h_1}{r}, \quad (3.45)$$

a coordenada tartaruga r_* como sendo

$$dr_* = \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right)} dr \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dr_*} = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) \frac{d}{dr}, \quad (3.46)$$

e substituindo em (3.42), vamos obter uma equação para a perturbação gravitacional axial do tipo equação de Schrödinger

$$\frac{d^2 Q(r)}{dr_*^2} + [\omega^2 - V_{ef}^{axial}(r)] Q(r) = 0, \quad (3.47)$$

que é conhecida como equação de *Regge-Wheeler*.

Este potencial efetivo axial, $V_{ef}^{axial}(r)$, dado por

$$V_{ef}^{axial}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{3}{r} \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) - 2\Lambda \right], \quad (3.48)$$

pode ser escrito como

$$V_{ef}^{axial}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right]. \quad (3.49)$$

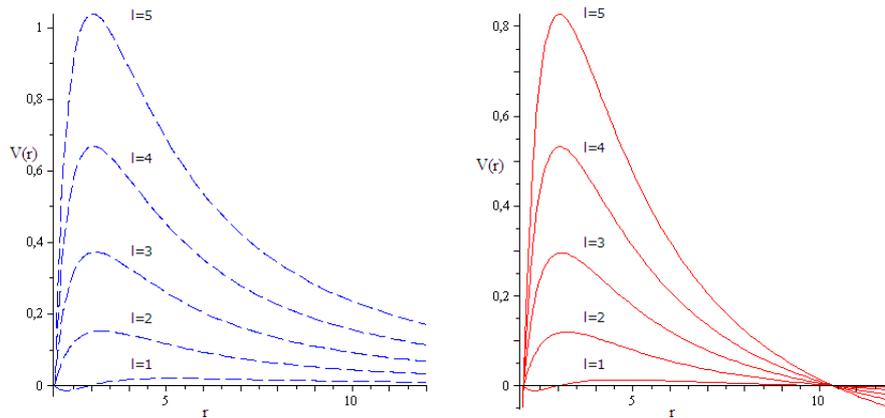


Figura 3.3: Potencial efetivo $V(r)$ para a componente axial do campo gravitacional nos casos (a) sem constante e (b) com constante cosmológica.

3.3 Método WKB e o Cálculo dos Modos Normais

3.3.1 Condições de Contorno e Aproximação WKB

Conforme vimos na seção anterior, as equações fundamentais que descrevem as perturbações de buracos negros se reduzem à equações de segunda ordem semelhantes à equação de Schrödinger unidimensional para uma partícula na presença de um potencial barreira. No entanto, devido a natureza do potencial efetivo V_{ef} ao qual o campo está submetido, não é possível a obtenção de uma solução analítica. Assim, faz-se necessário adotar diversas aproximações para estudar os modos normais, tais como integração numérica

direta de equações diferenciais[27]–[30], uso de soluções na representação de séries infinitas, ou métodos semianalíticos baseados em aproximações[31].

Matematicamente, um modo normal é uma solução para a equação diferencial de perturbação com uma frequência complexa, satisfazendo as condições de contorno de ondas puramente emergentes, ou seja, propagando-se para longe da barreira nas direções $r_* \rightarrow +\infty$ e $r_* \rightarrow -\infty$. Em outras palavras, ondas entrando no infinito espacial e ondas entrando no horizonte de eventos, respectivamente, de modo a considerar unicamente a resposta da métrica fora do buraco negro, sem a interferência de nenhuma outra onda vinda do infinito.

O estudo numérico de modos normais em buracos negros consiste, de maneira geral, em escolher um valor para a frequência complexa, integrar a equação de perturbação e verificar se as condições de contorno são satisfeitas. Se estas, em geral, não são satisfeitas, deve-se analisar as frequências complexas para valores discretos que levam aos modos normais. No entanto, esta técnica é onerosa e lenta, não permitindo assim um estudo mais sistemático desses modos, e é neste panorama que a aproximação WKB³ surge como uma boa alternativa, uma vez que é sabidamente precisa, pode ser estendida até altas ordens, e ainda permite um estudo mais sistemático do que pelo método numérico.

A motivação para usar WKB é a já comentada semelhança entre as equações de perturbação e a equação de Schrödinger unidimensional para um potencial barreira. Este aspecto foi enfatizado e explorado por[27], por exemplo. Em ambos os casos, temos uma equação da forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + Q(x)\psi(x) = 0, \quad (3.50)$$

onde a função ψ geral representa a parte radial da equação de perturbação, quando se assume uma dependência temporal harmônica $e^{-i\omega t}$. A coordenada x é associada à coordenada

³Técnica desenvolvida por Wentzel, Kramers e Brillouin para obter soluções aproximadas da equação de Schrödinger independente do tempo, particularmente usada em cálculos de tunelamento através de potenciais barreira.

tartaruga r_* , que delimita o espaço de $-\infty$, no horizonte de eventos, até $+\infty$, no infinito espacial.

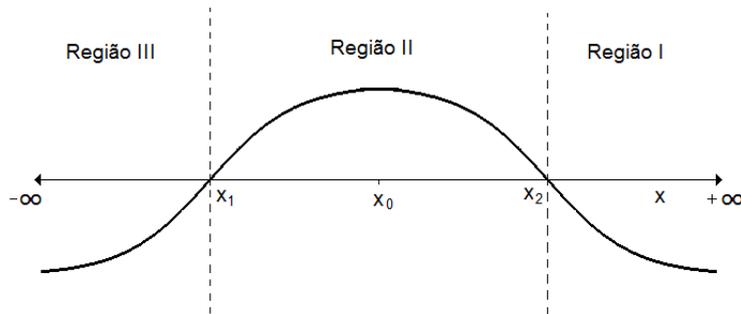


Figura 3.4: A função $Q(x)$.

O ‘potencial’ $Q(x)$, visto na figura (3.4), depende da natureza da perturbação à qual o buraco negro foi submetido, assim como dos parâmetros que descrevem o mesmo, tais como massa, carga, momento angular, índice de harmônico angular ou frequência.

Analogamente ao caso quântico, o campo ψ nas regiões I e III será dado por uma combinação linear de funções de onda propagando-se para dentro do horizonte e para o infinito espacial, sendo estas funções coladas através da região II , onde ocorre um máximo do potencial efetivo no ponto x_0 [21]. Fazemos uma expansão em torno de seu máximo $x = x_0$ incluindo termos até ordem $(x - x_0)^6$, e que nos permite uma aproximação assintótica para a solução interior que é posteriormente usada para conectar as duas outras soluções.

As condições de contorno são aplicadas à função ψ quando $r_* \rightarrow \pm\infty$. No infinito espacial, um observador pode detectar ondas imergentes (ψ_{im}) e ondas emergentes (ψ_{em}). Portanto, uma solução geral neste limite será

$$\psi = Z_{im}\psi_{im} + Z_{em}\psi_{em} \quad \text{quando} \quad r_* \rightarrow +\infty, \quad (3.51)$$

onde Z representa a amplitude complexa das ondas em cada regime.

Próximo ao horizonte de eventos, o mesmo observador perceberá somente ondas imergentes, ou seja, entrando no horizonte. Então, a solução geral será

$$\psi = Z_{im}\psi_{im} \quad \text{quando} \quad r_* \rightarrow -\infty. \quad (3.52)$$

O procedimento utilizado segue o método desenvolvido por Bender[32], onde se reescreve a equação geral na forma

$$\epsilon^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} + Q(x)\psi(x) = 0, \quad (3.53)$$

onde o parâmetro ϵ é introduzido de modo a indicar as ordens na aproximação. Admitimos, então, que $\psi(x)$ é dada assintoticamente por

$$\psi \sim e^{S(x)/\epsilon} \quad (3.54)$$

onde a função $S(x)$ pode ser escrita em termos de potências do parâmetro ϵ da seguinte forma:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n S_n(x) \quad (3.55)$$

Quando realizamos esta expansão até terceira ordem e substituímos em (3.53), encontramos[32]

$$S_0(x) = \pm i \int^x [Q(\eta)]^{1/2} d\eta \quad (3.56a)$$

$$S_1(x) = -\frac{1}{4} \ln Q(x) \quad (3.56b)$$

$$S_2(x) = \mp \frac{i}{8} \int^x \left[\frac{Q''}{Q^{3/2}} - \frac{5}{4} \frac{Q'^2}{Q^{5/2}} \right] d\eta \quad (3.56c)$$

$$S_3(x) = \frac{1}{16} \left[\frac{Q'''}{Q^2} - \frac{5}{4} \frac{Q'' Q'}{Q^3} \right] \quad (3.56d)$$

Convencionando que ondas vindo em direção ao horizonte tem sinal positivo e afastando-se rumo ao infinito tem sinal negativo, as soluções gerais de (3.53) assumem as formas

$$\psi \sim Z_{im}^I \psi_-^I + Z_{em}^I \psi_+^I, \quad \text{em } I \quad (3.57a)$$

$$\psi \sim Z_{im}^{III} \psi_+^{III} + Z_{em}^{III} \psi_-^{III}, \quad \text{em } III \quad (3.57b)$$

no caso que estamos considerando $Z_{im}^{III} = 0$.

É preciso determinar as fórmulas que conectam as amplitudes das ondas emergentes com as amplitudes imergentes, ou seja, determinar os coeficientes da relação linear dada por

$$\begin{bmatrix} Z_{em}^{III} \\ Z_{im}^{III} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{em}^I \\ Z_{im}^I \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

e para isso é necessário considerar a solução na região II .

3.3.2 Aproximação Assintótica para a Solução Interior

Para obtermos a solução na região II , expandimos a função $Q(x)$ em série de Taylor até a sua derivada de sexta ordem, em torno de seu máximo, numa aproximação baseada nos métodos desenvolvidos em[32]. Assim, teremos o seguinte resultado

$$Q(x) = Q_0 + \frac{1}{2}Q_0''z^2 + \frac{1}{6}Q_0'''z^3 + \frac{1}{24}Q_0^{(4)}z^4 + \frac{1}{120}Q_0^{(5)}z^5 + \frac{1}{720}Q_0^{(6)}z^6, \quad (3.59)$$

onde definimos $z \equiv x - x_0$.

A equação (3.53) poderá ser escrita como

$$\epsilon^2 \frac{d^2\psi}{dz^2} + k(-z_0^2 + z^2 + bz^3 + cz^4 + dz^5 + fz^6)\psi = 0, \quad (3.60)$$

com as seguintes identificações:

$$\begin{aligned} k &\equiv \frac{1}{2}Q_0'' & z_0^2 &\equiv -2\frac{Q_0}{Q_0''} \\ b &\equiv \frac{1}{3}\frac{Q_0'''}{Q_0''} & c &\equiv \frac{1}{12}\frac{Q_0^{(4)}}{Q_0''} \\ d &\equiv \frac{1}{60}\frac{Q_0^{(5)}}{Q_0''} & f &\equiv \frac{1}{360}\frac{Q_0^{(6)}}{Q_0''}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Definindo uma nova variável $t \propto z/\epsilon^{1/2}$, que expresse a solução assintótica interior, e também as constantes ν , λ e Ω , além de reescalar os parâmetros (3.61), da forma[21]

$$t \equiv \frac{(4k)^{1/4} e^{-i\pi/4} z}{\epsilon^{1/2}}, \quad \nu + \frac{1}{2} \equiv -\frac{ik^{1/2} z_0^2}{2\epsilon} - \epsilon\lambda - \epsilon^2\Omega, \quad (3.62a)$$

$$\bar{b} \equiv \frac{1}{4} b(4k)^{-1/4} e^{i\pi/4}, \quad \bar{c} \equiv \frac{1}{4} c(4k)^{-1/2} e^{i\pi/2}, \quad (3.62b)$$

$$\bar{d} \equiv \frac{1}{4} d(4k)^{-3/4} e^{3i\pi/4}, \quad \bar{f} \equiv \frac{1}{4} f(4k)^{-1} e^{i\pi}, \quad (3.62c)$$

a equação (3.60) toma a seguinte forma

$$\ddot{\psi} + \left[\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} t^2 - \epsilon^{1/2} \bar{b} t^3 + \epsilon(\lambda - \bar{c} t^4) - \epsilon^{3/2} \bar{d} t^5 + \epsilon^2(\Omega - \bar{f} t^6) \right] \psi = 0, \quad (3.63)$$

com $(\dot{})$ representando derivada com relação à variável t . Verificamos que, sem a presença dos termos proporcionais às potências de ϵ , (3.63) terá soluções em termos das funções cilíndricas parabólicas $D_\nu(t)$ e $D_{-\nu-1}(t)$ [32]. Na presença destes termos de ϵ , procuramos uma solução na forma geral $f(t)D_\nu(t)$ assim como em[33].

Substituindo esta forma geral em (3.63), e chamando o polinômio dentro dos colchetes de $Q(t)$, teremos

$$\left[-f\dot{g}^2 \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} g^2 \right) + \ddot{f} + Qf \right] D_\nu + \left(2\dot{f}\dot{g} + f\ddot{g} \right) \dot{D}_\nu = 0. \quad (3.64)$$

Podemos eliminar a primeira derivada de D_ν se escolhermos $f = \dot{g}^{-1/2}$, e teremos a equação diferencial seguinte para $g(t)$:

$$\dot{g}^2 \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} g^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{g}^2}{\dot{g}^2} - \frac{3}{4} \frac{\ddot{g}^2}{\dot{g}^2} - Q(t) = 0. \quad (3.65)$$

Vamos admitir que $Q(t)$ pode ser escrita como uma expansão em ϵ da forma[21]

$$Q(t) = \nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} t^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n/2} Q_n(t), \quad (3.66)$$

onde $Q_n(t)$ é um polinômio. Assim, podemos admitir uma expansão análoga para a função $g(t)$ que, na mais baixa ordem, seja igual a t , e dada por

$$g(t) = t + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n/2} A_n(t), \quad (3.67)$$

onde $A_n(t)$ é um polinômio em t .

Quando substituimos esta expansão de $g(t)$ na equação (3.65), igualamos os coeficientes de cada termo de ordem $\epsilon^{1/2}$ a zero, e definimos o operador L_t por

$$L_t = \frac{d^3}{dt^3} + 4 \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} t^2 \right) \frac{d}{dt} - t, \quad (3.68)$$

obtemos um conjunto de equações para $A_n(t)$ que, devido a forma destas expressões e a natureza do operador L_t , cada polinômio deve ser do tipo

$$A_n(t) = \sum_{i=0}^n a_{2i}^n t^{n+1-2i}, \quad \text{para} \quad n+1-2i \geq 0. \quad (3.69)$$

Para n ímpar, o número de potências de t será igual ao número de coeficientes a_{2i}^n a serem determinados. Logo, podemos obter estes coeficientes fazendo com que os coeficientes de cada potência de t sejam nulos. Quando n é par, teremos mais potências de t do que coeficientes a serem determinados, o que torna o sistema “excessivamente determinado”. Neste ponto, usamos as constantes anteriormente definidas λ e Ω , de modo a serem escolhidas convenientemente com uma solução consistente, e com isso obtemos

$$\lambda = \frac{1}{2} (3\bar{c} - 7\bar{b}^2) + \left(\nu + \frac{1}{2} \right)^2 (6\bar{c} - 30\bar{b}^2), \quad (3.70a)$$

$$\begin{aligned} \Omega = & - \left(\nu + \frac{1}{2} \right) (1155\bar{b}^4 - 918\bar{b}^2\bar{c} + 67\bar{c}^2 + 190\bar{b}\bar{d} - 25\bar{f}) \\ & - \left(\nu + \frac{1}{2} \right)^3 (2820\bar{b}^4 - 1800\bar{b}^2\bar{c} + 68\bar{c}^2 + 280\bar{b}\bar{d} - 20\bar{f}). \end{aligned} \quad (3.70b)$$

Estas constantes serão posteriormente utilizadas na obtenção das frequências quasi-normais do buraco negro.

A solução geral para a região *II* tem a forma[21]

$$\psi \sim \dot{g}^{-1/2} [AD_\nu(g(t)) + BD_{-\nu-1}(ig(t))] . \quad (3.71)$$

Usando a forma assintótica apropriada das funções cilíndricas parabólicas[32], para $x/\epsilon^{1/2} \rightarrow \infty$ e para $x/\epsilon^{1/2} \rightarrow -\infty$, a equação (3.71) toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} \psi \sim \dot{g}^{-1/2} \left\{ Ag^\nu e^{-g^2/4} \left[1 - \frac{\nu(\nu-1)}{2g^2} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{8g^4} - \dots \right. \right. \\ \left. \left. + B(ig)^{-\nu-1} e^{g^2/4} \left[1 + \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2g^2} + \frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)}{8g^4} + \dots \right] \right\} \quad (3.72a) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi \sim \dot{g}^{-1/2} \left\{ \left[A + B \frac{(2\pi)^{1/2} e^{-i\pi\nu/2}}{\Gamma(\nu+1)} \right] g^\nu e^{-g^2/4} \left[1 - \frac{\nu(\nu-1)}{2g^2} + \dots \right] \right. \\ \left. + \left[B e^{3i\pi(\nu+1)/2} - A \frac{(2\pi)^{1/2} e^{i\pi\nu}}{\Gamma(-\nu)} \right] g^{-\nu-1} e^{g^2/4} \left[1 + \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2g^2} + \dots \right] \right\} \quad (3.72b) \end{aligned}$$

onde $\Gamma(x)$ é a função gama.

Desejamos conectar a solução interior da região *II* com as regiões vizinhas, nas proximidades de $z \sim \pm z_0$. Para isso, será necessário estabelecer os zeros \bar{z} da função⁴ $Q(z)$, que são[21]

$$\begin{aligned} \bar{z} = \pm z_0 - \frac{1}{2} b z_0^2 \pm \frac{1}{8} (5b^2 - 4c) z_0^3 - \frac{1}{2} (2b^3 - 3bc + d) z_0^4 \\ \pm \frac{1}{128} (231b^4 - 504b^2c + 224bd + 112c^2 - 64f) z_0^5 , \quad (3.73) \end{aligned}$$

de forma tal que podemos reescrever

$$Q(z) = k [(z^2 - \bar{z}^2) + b(z^3 - \bar{z}^3) + c(z^4 - \bar{z}^4) + d(z^5 - \bar{z}^5) + f(z^6 - \bar{z}^6)] . \quad (3.74)$$

⁴Aqui vale lembrar que existe uma relação direta entre t e z , e portanto, podemos considerar $Q(z)$ ao invés de $Q(t)$.

Na mais baixa ordem de aproximação, nas proximidades de $z = \pm z_0$, podemos adotar as seguintes aproximações: $\bar{z} = z_0$ e $Q(z) \approx k(z^2 - z_0^2)$. Então, nas vizinhanças dos zeros de $Q(z)$ teremos

$$\frac{S_0}{\epsilon} \sim \pm \frac{ik^{1/2}z^2}{2\epsilon} \pm \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \pm \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{2z}{z_0} \right) \quad S_1 \sim -\frac{1}{4} \ln(kz^2), \quad z \geq z_0 \quad (3.75)$$

e

$$\frac{S_0}{\epsilon} \sim \mp \frac{ik^{1/2}z^2}{2\epsilon} \mp \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \mp \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \ln \left(-\frac{2z}{z_0} \right) \quad S_1 \sim -\frac{1}{4} \ln(kz^2), \quad z \leq -z_0 \quad (3.76)$$

Usando este resultado em (3.54)–(3.57), teremos

$$\begin{aligned} \psi \sim & \left[Z_{im}^I e^{-ik^{1/2}z^2/2\epsilon} \left(\frac{z}{\epsilon^{1/2}} \right)^{-(\nu+1)} (4k)^{-(\nu+1)/4} e^{i\pi(\nu+1)/4} R \right. \\ & \left. + Z_{em}^I e^{ik^{1/2}z^2/2\epsilon} \left(\frac{z}{\epsilon^{1/2}} \right)^\nu (4k)^{\nu/4} e^{-i\pi\nu/4} R^{-1} \right] \left(\frac{4}{\epsilon^2 k e^{i\pi}} \right)^{1/8} \quad \text{em } z \geq z_0 \quad (3.77a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi \sim & \left[Z_{im}^{III} e^{-ik^{1/2}z^2/2\epsilon} \left(-\frac{z}{\epsilon^{1/2}} \right)^{-(\nu+1)} (4k)^{-(\nu+1)/4} e^{i\pi(\nu+1)/4} R \right. \\ & \left. + Z_{em}^{III} e^{ik^{1/2}z^2/2\epsilon} \left(-\frac{z}{\epsilon^{1/2}} \right)^\nu (4k)^{\nu/4} e^{-i\pi\nu/4} R^{-1} \right] \left(\frac{4}{\epsilon^2 k e^{i\pi}} \right)^{1/8} \quad \text{em } z \leq -z_0 \quad (3.77b) \end{aligned}$$

onde escolhemos

$$R = \left(\nu + \frac{1}{2} \right)^{(\nu+1/2)/2} e^{-(\nu+1/2)/2}. \quad (3.78)$$

Se agora substituirmos $g(t)$ em uma ordem mais baixa em (3.72), e considerarmos somente os termos dominantes, teremos para $z \geq z_0$ que

$$\begin{aligned} \psi \sim & A e^{ik^{1/2}z^2/2\epsilon} \left(-\frac{z}{\epsilon^{1/2}} \right)^\nu (4k)^{\nu/4} e^{-i\pi\nu/4} \\ & + B e^{-ik^{1/2}z^2/2\epsilon} \left(-\frac{z}{\epsilon^{1/2}} \right)^{-(\nu+1)} (4k)^{-(\nu+1)/4} e^{i\pi(\nu+1)/4}. \quad (3.79a) \end{aligned}$$

Para $z \leq -z_0$, ficamos com

$$\begin{aligned} \psi \sim & \left[A + B \frac{(2\pi)^{1/2} e^{-i\pi\nu/2}}{\Gamma(\nu+1)} \right] e^{ik^{1/2}z^2/2\epsilon} \left(-\frac{z}{\epsilon^{1/2}} \right)^\nu (4k)^{\nu/4} e^{3i\pi\nu/4} \\ & + \left[B e^{3i\pi(\nu+1)/2} - A \frac{(2\pi)^{1/2} e^{i\pi\nu}}{\Gamma(-\nu)} \right] e^{-ik^{1/2}z^2/2\epsilon} \left(-\frac{z}{\epsilon^{1/2}} \right)^{-(\nu+1)} (4k)^{-(\nu+1)/4} e^{-3i\pi(\nu+1)/4}. \end{aligned} \quad (3.79b)$$

Agora, se igualarmos os coeficientes das equações (3.77) e (3.79), poderemos obter os termos A e B e assim teremos as equações de conexão entre as regiões I e III dadas por

$$\begin{bmatrix} Z_{em}^{III} \\ Z_{im}^{III} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} e^{i\pi\nu} & \frac{iR^2 e^{i\pi\nu} (2\pi)^{1/2}}{\Gamma(\nu+1)} \\ \frac{R^{-2} (2\pi)^{1/2}}{\Gamma(-\nu)} & -e^{i\pi\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{em}^I \\ Z_{im}^I \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Isto significa que a equação (3.80) conecta as amplitudes das soluções WKB em cada lado da barreira, corretamente até terceira ordem da expansão.

Analogamente ao caso quântico, onde pode ocorrer o tunelamento da região I para a região III , temos que os coeficientes de reflexão e de transmissão, definidos como

$$T \equiv \frac{|Z_{em}^{III}|^2}{|Z_{im}^I|^2} \quad \text{e} \quad R \equiv 1 - T \quad (3.81)$$

onde

$$T = \left(1 + e^{2i\pi(\nu+1/2)} \right)^{-1} \quad (3.82a)$$

$$R = \left(1 + e^{-2i\pi(\nu+1/2)} \right)^{-1} \quad (3.82b)$$

A Equação para as Frequências Normais

Uma vez obtida a relação de conexão (3.80), poderemos agora obter as frequências normais mediante análise dessa equação, juntamente com as condições de contorno previamente impostas. Para o buraco negro, a condição de termos apenas ondas imergentes nas proximidades do horizonte nos dá $Z_{im}^{III} = 0$. Para um modo normal deveremos ter $Z_{im}^I = 0$.

Então, pela relação (3.80), a única maneira de satisfazer esta condição é termos $\Gamma(-\infty) \rightarrow \infty$, o que significa que ν deverá admitir números inteiros não-negativos, aplicando-se à parte real positiva das frequências.

Quando desejamos tratar da parte imaginária das frequências, precisamos inverter as identificações das ondas imergentes e emergentes, o que representa, em termos das condições de contorno, que $Z_{em}^{III} = Z_{em}^I = 0$, que somente será satisfeita se $\Gamma(\nu + 1) \rightarrow \infty$, e conseqüentemente ν somente admitirá valores inteiros negativos.

Estas considerações deverão ser válidas para (3.62), ou mais especificamente para

$$n + \frac{1}{2} = -\frac{ik^{1/2}z_0^2}{2\epsilon} - \epsilon\lambda - \epsilon^2\Omega \quad (3.83)$$

com as restrições seguintes

$$n = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, & \text{Re } \omega > 0 \\ -1, -2, \dots, & \text{Re } \omega < 0 \end{cases} \quad (3.84)$$

A partir das definições de (3.61) e (3.62), juntamente com (3.70), e fixando o parâmetro $\epsilon = 1$, teremos

$$\frac{iQ_0}{(2Q_0'')^{1/2}} - \lambda(n) - \Omega(n) = n + \frac{1}{2}. \quad (3.85)$$

Para uma função Q do tipo $Q_0 = \omega^2 - V_0$, teremos

$$\frac{i(\omega^2 - V_0)}{[-2V_0'']^{1/2}} - \lambda(n) - \Omega(n) = n + \frac{1}{2},$$

$$\omega^2 = V_0 - i(-2V_0'')^{1/2} \left[\lambda(n) + \Omega(n) + \left(n + \frac{1}{2} \right) \right].$$

Escrevendo

$$\tilde{\lambda}(n) = \frac{\lambda(n)}{i} \quad \text{e} \quad \tilde{\Omega}(n) = \frac{\Omega(n)}{n + \frac{1}{2}},$$

teremos a expressão para as frequências normais complexas, que é dada por

$$\omega^2 = \left[V_0 + (-2V_0'')^{1/2} \tilde{\lambda}(n) \right] - i \left(n + \frac{1}{2} \right) (-2V_0'')^{1/2} \left[1 + \tilde{\Omega}(n) \right], \quad (3.86)$$

onde as constantes $\lambda(n)$ e $\Omega(n)$ podem ser escritas na forma

$$\lambda(n) = \frac{1}{(2Q_0'')^{1/2}} \left\{ \frac{1}{8} \left[\frac{Q_0^{(4)}}{Q_0''} \right] \left(\frac{1}{4} + \alpha^2 \right) - \frac{1}{288} \left[\frac{Q_0'''}{Q_0''} \right]^2 (7 + 60\alpha^2) \right\} \quad (3.87)$$

e

$$\begin{aligned} \Omega(n) = & \frac{\alpha}{2Q_0''} \left\{ \frac{5}{6912} \left[\frac{Q_0'''}{Q_0''} \right]^4 (77 + 188\alpha^2) - \frac{1}{384} \left[\frac{Q_0'''^2 Q_0^{(4)}}{Q_0''^3} \right] (51 + 100\alpha^2) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2304} \left[\frac{Q_0^{(4)}}{Q_0''} \right]^2 (67 + 68\alpha^2) + \frac{1}{288} \left[\frac{Q_0'' Q_0^{(5)}}{Q_0''^2} \right] (19 + 28\alpha^2) - \frac{1}{288} \left[\frac{Q_0^{(6)}}{Q_0''} \right] (5 + 4\alpha^2) \right\}, \end{aligned} \quad (3.88)$$

onde definimos $\alpha \equiv n + \frac{1}{2}$.

Conforme comentamos, as frequências normais complexas dadas por (3.86), diferentemente das frequências ditas *normais*, decaem com o tempo devido a sua parte imaginária, e correspondem às contribuições em baixas ordens da aproximação WKB. Já os termos $\lambda(n)$ e $\Omega(n)$ representam as correções superiores as segunda e terceira ordens, respectivamente, na aproximação WKB, e são por vezes utilizados em problemas físicos semelhantes aos da mecânica quântica próximos de picos de potenciais barreira.

Capítulo 4

Efeito Casimir no Espaço–tempo SdS

4.1 O Efeito Casimir

A primeira previsão acerca da existência de uma força atrativa entre duas placas planas metálicas, e portanto, condutoras, porém descarregadas e separadas por uma distância a , foi feita por Casimir[6]. Esta força é de origem puramente quântica, e pode ser entendida como uma consequência das flutuações da energia de ponto zero (vácuo) do campo eletromagnético.

No eletromagnetismo clássico, podemos ter regiões do espaço onde o campo eletromagnético é nulo em todos os pontos. Neste caso, a energia associada ao campo é nula, e conseqüentemente não há forças atuando sobre corpos colocados nessas regiões.

Por outro lado, na eletrodinâmica quântica, não podemos deixar de levar em conta a energia do ponto zero, $\frac{\hbar\omega}{2}$, de cada modo normal do campo. Neste caso, os modos e, portanto, a energia do ponto zero, dependem das condições de contorno impostas aos campos. Assim, no contexto da eletrodinâmica quântica podem existir forças entre corpos descarregados. A origem da força de Casimir é explicada pela existência das flutuações da energia de ponto zero do campo eletromagnético quantizado.

O efeito Casimir resulta da modificação do espectro de frequências do campo

eletromagnético, em consequência da imposição de condições de contorno, como por exemplo através da presença de placas metálicas. Esta modificação se manifesta mesmo quando as placas estão no vácuo, em virtude da existência da energia de ponto zero.

No contexto da gravitação, o efeito Casimir pode ser visto como uma polarização do vácuo induzida pela presença de um campo gravitacional externo. Nesse caso, o efeito Casimir pode aparecer em razão da topologia não-trivial do espaço-tempo, bem como através de condições de contorno impostas ao campo, pela presença de fronteiras materiais.

Vários trabalhos[34, 35] consideraram, recentemente, a influência do campo gravitacional sobre a energia do vácuo de um campo confinado a uma determinada região do espaço-tempo, com diferentes topologias[36].

4.2 Efeito Casimir num Campo Escalar em $(1 + 1)$ – Dimensões

Vamos considerar um campo escalar real $\phi(t, x)$, definido no intervalo $0 < x < a$ e que obedeça as condições de contorno de Dirichlet, que são

$$\phi(t, 0) = \phi(t, a) = 0 . \quad (4.1)$$

A equação diferencial para este campo escalar será dada por

$$\frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial x^2} + m^2 \phi(t, x) = 0 , \quad (4.2)$$

com m representando a massa desse campo.

As soluções de $\phi(t, x)$ devem formar um conjunto completo e ortonormal, ou seja

$$\int \phi_k \phi_{k'}^* dV = \frac{1}{2\omega} \delta_{kk'} . \quad (4.3)$$

Para obter a solução de (4.2), utilizamos uma separação de variáveis da forma

$$\phi(t, x) = T(t)X(x), \quad (4.4)$$

o que resulta nas soluções independentes

$$T(t) = Ae^{\pm i\omega t}, \quad X(x) = Be^{\pm ikx}. \quad (4.5)$$

Quando aplicamos as condições de contorno de Dirichlet, dadas por (4.1), obtemos

$$\phi_n^{(\pm)}(t, x) = \left(\frac{1}{a\omega_n}\right)^{1/2} e^{\pm i\omega_n t} \sin(k_n x), \quad (4.6)$$

onde já utilizamos a condição de ortonormalização (4.3) e usamos as relações $\omega_n^2 = m^2 + k_n^2$ e $k_n = \frac{n\pi}{a}$, com $n = 1, 2, 3, \dots$

A quantização deste campo escalar, segundo o método canônico padrão, se dá através da expansão

$$\phi(t, x) = \sum_n [\phi_n^{(-)}(t, x)a_n + \phi_n^{(+)}(t, x)a_n^+] , \quad (4.7)$$

onde a_n e a_n^+ representam, respectivamente, os operadores de destruição e criação do campo, que obedecem às relações de comutação

$$[a_n, a_{n'}^+] = \delta_{nn'}, \quad [a_n, a_{n'}] = 0, \quad [a_n^+, a_{n'}^+] = 0, \quad (4.8)$$

sendo o vácuo definido, na presença das condições de contorno, como

$$a_n |0\rangle = 0. \quad (4.9)$$

Estamos interessados em comparar a densidade de energia de um estado $\rho(a)$, submetido à condições de contorno, com a densidade $\rho(\infty)$ de um campo escalar sem fronteiras, ou seja, no intervalo $-\infty < x < \infty$. Esta diferença entre densidades de energia é o que define a densidade de energia de Casimir. Esta definição tem problemas, pois essa diferença é uma quantidade divergente.

No entanto, essa diferença entre as densidades de energia pode ser tratada com uma técnica de *regularização*, na qual se pode contornar o problema da diferença de quantidades infinitas. Para regularizar a quantidade divergente $\rho(a)$, define-se uma nova quantidade $\rho(a, \delta)$ que é função de um parâmetro de regularização δ , de forma que no limite $\delta \rightarrow 0$ a quantidade $\rho(a, \delta) \rightarrow \rho(a)$ e que $\rho(a, \delta)$ seja bem definida em $\delta \neq 0$.

Em seguida, realiza-se o procedimento de *renormalização*, que nos permite obter um resultado finito e com significado físico, quando subtraímos da expressão regularizada a quantidade $\rho(\infty, \delta)$, desse modo a diferença $\rho(a, \delta) - \rho(\infty, \delta)$ é finita quando tomamos o limite $\delta \rightarrow 0$. Essa diferença de energia regularizada pode, então, ser interpretada como a energia necessária para introduzir as placas no vácuo[37].

A densidade de energia é dada pela componente-00 do tensor energia-momento, que é obtido pela variação da ação S com relação ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$, que para o caso de um campo escalar no espaço-tempo plano, bi-dimensional, e minimamente acoplado será dado por

$$T_{00} = \frac{1}{2} [(\partial_t \phi)^2 + (\partial_x \phi)^2] . \quad (4.10)$$

Ao utilizarmos a expressão (4.7), que quantiza o campo, o tensor energia-momento será quadrático com relação aos operadores de criação e destruição a_n^+ e a_n^- . Quando tomarmos o valor esperado do vácuo, $\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle$, eliminamos os termos da forma $\langle 0 | a_n^\pm a_n^\pm | 0 \rangle$ ou $\langle 0 | a_n^+ a_n^- | 0 \rangle$, restando apenas aqueles da forma $\langle 0 | a_n^- a_n^+ | 0 \rangle$.

Isto nos leva ao valor esperado

$$\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle = \frac{1}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n - \frac{m^2}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2k_n x}{\omega_n} . \quad (4.11)$$

A energia total do vácuo no intervalo $0 < x < a$ será, então:

$$\mathcal{E}_0(a) = \int_0^a \langle 0 | T_{00} | 0 \rangle dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n . \quad (4.12)$$

pois a contribuição do termo oscilante é nula.

Esta energia dada por (4.12) é o ponto de partida para a construção da teoria do efeito Casimir. Percebemos, claramente, que esta energia é divergente, então este é o momento de utilizar os métodos de *regularização* e *renormalização* anteriormente comentados, disponíveis em diversos trabalhos como [38, 39], dentre outros.

Neste capítulo, utilizaremos o chamado *método do corte* através da introdução de um fator $e^{-\delta\omega}$ no termo do somatório, que será removido quando tomarmos o limite $\delta \rightarrow 0$. Para o caso de um campo escalar sem massa, ($m = 0$), a energia total será

$$\mathcal{E}_0(a, \delta) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n e^{-\delta\omega_n} = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\delta} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta\omega_n}. \quad (4.13)$$

Sabendo que, em uma progressão geométrica com $|q| < 1$, temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}.$$

Se considerarmos $q = e^{-\delta\pi/a}$, ficaremos com

$$\mathcal{E}_0(a, \delta) = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\delta} \left[\frac{e^{-\delta\pi/a}}{1 - e^{-\delta\pi/a}} \right], \quad (4.14)$$

que pode ser reescrita em termos dos polinômios de Bernoulli, $B_k(x)$, cuja definição é dada em [40] da forma

$$\frac{e^{xt}}{e^t - 1} = \sum_k B_k(x) \frac{t^{k-1}}{k!}.$$

Assim, a relação (4.13) fica

$$\mathcal{E}_0(a, \delta) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(1)}{k!} \left[-\frac{\delta\pi}{a} \right]^{k-1}, \quad (4.15)$$

$$\mathcal{E}_0(a, \delta) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\delta} \left[-\frac{B_0(1)}{0!} \frac{a}{\delta\pi} + \frac{B_1(1)}{1!} - \frac{B_2(1)}{2!} \frac{\delta\pi}{a} \right] + \mathcal{O}(\delta^3). \quad (4.16)$$

Os valores destes polinômios de Bernoulli são conhecidos[40], sendo $B_0(1) = 1$, $B_1(1) = -1/2$ e $B_2(1) = 1/6$. Inserindo estes valores em (4.16), teremos

$$\mathcal{E}_0(a, \delta) = \frac{1}{2\pi} \frac{a}{\delta^2} - \frac{\pi}{24a} + \mathcal{O}(\delta^2), \quad (4.17)$$

ou seja, temos agora a energia do vácuo dada pela soma de um termo com singularidade em $\delta \rightarrow 0$ e uma quantidade finita, o que significa que esta expressão para a energia está regularizada.

Para obtermos a energia renormalizada, devemos comparar o resultado (4.17) com o caso sem fronteiras. A equação que descreve a evolução do campo escalar, dada por (4.2), sem as condições de contorno de Dirichlet (4.1) tem agora solução da forma

$$\phi_k^\pm(t, x) = \left(\frac{1}{4\pi\omega} \right)^{1/2} e^{\pm i(\omega t - kx)}, \quad (4.18)$$

com $\omega = (m^2 + k^2)^{1/2}$, e $-\infty < k < \infty$.

A quantização do campo será realizada agora por meio da relação

$$\phi(t, x) = \int [\phi_k^-(t, x)a_k^- + \phi_k^+(t, x)a_k^+] dk, \quad (4.19)$$

e as relações de comutação serão agora dadas em termos de funções delta de Dirac $\delta(k - k')$:

$$[a_k, a_{k'}^+] = \delta(k - k'), \quad [a_k, a_{k'}] = 0, \quad [a_k^+, a_{k'}^+] = 0. \quad (4.20)$$

Finalmente, o estado de vácuo será redefinido como

$$a_k |0_M\rangle = 0, \quad (4.21)$$

onde $|0_M\rangle$ representa o estado de vácuo no espaço-tempo de Minkowski.

Num procedimento análogo ao caso com fronteiras, a densidade de energia do vácuo no espaço-tempo de Minkowski será

$$\langle 0_M | T_{00}(x) | 0_M \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \omega dk \quad (4.22)$$

e a energia do vácuo será obtida da relação

$$\mathcal{E}_{0M}(-\infty, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \omega L dk, \quad (4.23)$$

onde $L \rightarrow \infty$ é um parâmetro de renormalização, de maneira que podemos separar o intervalo $(0, a)$ do intervalo total, e então, comparar essa energia com a relação (4.12), obtida anteriormente. Teremos, portanto,

$$\mathcal{E}_{0M}(a) = \frac{\mathcal{E}_{0M}(-\infty, \infty)}{L} a = \frac{a}{2\pi} \int_0^\infty \omega dk. \quad (4.24)$$

Novamente, utilizaremos o procedimento de regularização, assim como no caso com fronteiras, introduzindo uma exponencial de corte na integral. Para o caso sem massa, teremos a relação

$$\mathcal{E}_{0M}(a) = \frac{a}{2\pi} \int_0^\infty k e^{-\delta k} dk = \frac{a}{2\pi} \left[- (1 + \delta k) \frac{e^{-\delta k}}{\delta^2} \right]_0^\infty, \quad (4.25)$$

e considerando o termo dominante teremos

$$\mathcal{E}_{0M}(a) = \frac{a}{2\pi\delta^2}. \quad (4.26)$$

Por fim, definimos a energia renormalizada no intervalo $(0, a)$ na presença de fronteiras como sendo

$$\mathcal{E}_0^{ren}(a) \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} [\mathcal{E}_0(a, \delta) - \mathcal{E}_{0M}(a, \delta)]. \quad (4.27)$$

Então, a energia de Casimir será

$$\mathcal{E}_0(a) = -\frac{\pi}{24a}. \quad (4.28)$$

E a força de Casimir será, por definição

$$\mathcal{F}(a) = -\frac{\partial \mathcal{E}_0(a)}{\partial a} = -\frac{\pi}{24a^2}, \quad (4.29)$$

com o sinal negativo indicando que a força existente entre as fronteiras é atrativa.

A Fórmula de Abel Plana de Regularização

Quando há a necessidade de considerar casos mais complexos, como outras configurações de espaço-tempo ou de campo, por exemplo, o procedimento realizado anteriormente pode se tornar bastante trabalhoso. Nestes casos, é muito útil o uso da relação:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) = -\frac{1}{2}F(0) + \int_0^{\infty} F(x)dx + i \int_0^{\infty} \frac{F(it) - F(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt, \quad (4.30)$$

que é conhecida como *fórmula de Abel Plana*[41], que nos possibilita transformar um somatório divergente em uma integral convergente, quando consideramos funções analíticas que vão para o infinito mais lentamente que $e^{(2\pi-\alpha)|x|}$, com $\alpha > 0$.

Quando aplicamos esta relação na energia (4.12), a primeira integral de (4.30) coincide com a integral em (4.24). Sendo assim, a parte renormalizada da relação (4.30) será

$$\text{reg} \sum_{n=1}^{\infty} F(n) = -\frac{1}{2}F(0) + i \int_0^{\infty} \frac{F(it) - F(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt, \quad (4.31)$$

expressão esta que usaremos no cálculo das aproximações deste capítulo.

4.3 Campo Escalar em $(3 + 1)$ –Dimensões

Nesta seção consideramos um campo escalar sem massa, com acoplamento conforme $\xi = 1/6$, no espaço-tempo de Minkowski[42]. Investigaremos a energia de Casimir para esta configuração quando são satisfeitas as condições de contorno de Robin na superfície de duas placas paralelas.

As condições de Robin, cujos modos satisfazem tanto as condições de Dirichlet quanto as de Neumann separadamente, são dadas por

$$(1 + \beta_m n^\mu \partial_\mu) \phi(t, \vec{x}) = (1 + \beta_m (-1)^{m-1} \partial_\mu) \phi(t, \vec{x}) = 0, \quad (4.32)$$

nos pontos $x = a_1$ e $x = a_2$, onde as placas estão localizadas.

A equação de Klein-Gordon no espaço-tempo curvo é dada por

$$(\nabla_\alpha \nabla^\alpha + \xi R) \phi(t, x) = 0. \quad (4.33)$$

Fazendo $\xi = 1/6$ e considerando o espaço-tempo plano, para o qual $R = 0$, a equação (4.33) reduz-se a

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha \phi = \partial_0^2 \phi - \partial_i^2 \phi = 0. \quad (4.34)$$

A solução da função $\phi(t, x)$ é análoga à obtida a partir de (4.4), com a diferença de que o espaço é agora tri-dimensional. Se convencionarmos que as placas paralelas estão perpendicularmente colocadas ao eixo x , devemos ter $\omega^2 = k^2 + k_{\perp y}^2 + k_{\perp z}^2$. Aplicando as condições de contorno (4.32) no eixo x , obtemos que

$$X(x) = B (\cos(kx) \pm i \sin(kx)), \quad (4.35)$$

e consequentemente

$$\partial_x X(x) = B (-k \sin(kx) \pm ik \cos(kx)). \quad (4.36)$$

Deste modo, as relações

$$\sin \alpha_m = \frac{1}{\sqrt{k^2 \beta_m^2 + 1}} \quad \text{e} \quad \cos \alpha_m = \frac{k \beta_m}{\sqrt{k^2 \beta_m^2 + 1}} \quad (4.37)$$

são satisfeitas.

A solução de (4.33) terá, usando as condições (4.32), a forma

$$\phi_k(t, \vec{x}) = A e^{ik_{\perp} x' - i\omega t} \cos(k|x - a_m| + \alpha_m), \quad (4.38)$$

sendo a constante A determinada com o uso da condição de ortonormalização, na região entre as placas, dada por

$$\int \phi_k \phi_{k'}^* dV = \frac{1}{2\omega} \delta(k_{\perp} - k'_{\perp}).$$

Neste caso, obteremos o resultado

$$\phi_k(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2\omega a}} \frac{e^{ik_{\perp}x' - i\omega t} \cos(k|x - a_m| + \alpha_m)}{\sqrt{1 + \frac{1}{ka} \sin(ka) \cos(ka + 2\alpha_m)}}, \quad (4.39)$$

onde $\omega^2 = k^2 + k_{\perp}^2$ e $\alpha_m = ka_m$.

4.4 Densidade de Energia e de Pressão no Vácuo

No espaço-tempo curvo o tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$, que descreve o conteúdo de matéria-energia do campo gravitacional, é obtido através da variação da ação clássica com relação ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$ da forma

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \quad (4.40)$$

sendo $S = \int \mathcal{L}(x) d^4x$ a ação clássica e $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi + m^2\phi^2 + \xi R\phi)$ a densidade Lagrangeana associada. O tensor energia-momento deve ser covariantemente conservado, ou seja,

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0. \quad (4.41)$$

Considerando o caso do campo escalar sem massa, com acoplamento conforme $\xi = 1/6$ e no espaço plano, as componentes do tensor energia-momento são

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{1}{2}\partial_0\phi\partial_0\phi + \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial_1\phi + \frac{1}{2}\partial_2\phi\partial_2\phi + \frac{1}{2}\partial_3\phi\partial_3\phi \\ &+ \frac{1}{6}\partial_1\partial_1\phi^2 + \frac{1}{6}\partial_2\partial_2\phi^2 + \frac{1}{6}\partial_3\partial_3\phi^2; \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{1}{2}\partial_0\phi\partial_0\phi + \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial_1\phi - \frac{1}{2}\partial_2\phi\partial_2\phi - \frac{1}{2}\partial_3\phi\partial_3\phi \\ &- \frac{1}{6}\partial_0\partial_0\phi^2 + \frac{1}{6}\partial_2\partial_2\phi^2 + \frac{1}{6}\partial_3\partial_3\phi^2; \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$T_{22} = \frac{1}{2}\partial_0\phi\partial_0\phi - \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial_1\phi + \frac{1}{2}\partial_2\phi\partial_2\phi - \frac{1}{2}\partial_3\phi\partial_3\phi \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{6} \partial_0 \partial_0 \phi^2 + \frac{1}{6} \partial_1 \partial_1 \phi^2 + \frac{1}{6} \partial_3 \partial_3 \phi^2 ; \\
T_{33} &= \frac{1}{2} \partial_0 \phi \partial_0 \phi - \frac{1}{2} \partial_1 \phi \partial_1 \phi - \frac{1}{2} \partial_2 \phi \partial_2 \phi + \frac{1}{2} \partial_3 \phi \partial_3 \phi \\
& - \frac{1}{6} \partial_0 \partial_0 \phi^2 + \frac{1}{6} \partial_1 \partial_1 \phi^2 + \frac{1}{6} \partial_2 \partial_2 \phi^2 .
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Como o tensor energia-momento possui apenas componentes diagonais, seu valor esperado tem a forma

$$\langle 0 | T_{\mu}^{\nu} | 0 \rangle = \text{diag}(\rho, -p, -p_{\perp}, -p_{\perp}) . \tag{4.46}$$

A densidade de energia ρ e as pressões efetivas p e p_{\perp} são calculadas com o uso da expressão

$$\langle 0 | T_{\mu\nu}(x) | 0 \rangle = \sum_{\mu} \{ \phi_{\mu}(x), \phi_{\mu}^{*}(x) \} , \tag{4.47}$$

com $\phi_{\mu}(x) = (\phi_k, \phi_{k_{\perp}})$ sendo um conjunto completo de soluções da equação de campo[43], considerando a forma bi-linear de $T_{\mu\nu}$.

Valor Esperado das Componentes do TEM

Para o caso do vácuo, o valor esperado do tensor energia-momento pode ser calculado através da soma (4.47). Inicialmente, vamos calcular o valor esperado da componente T_{00} , dada por (4.42) considerando a solução (4.39). Para isto, é necessário o cálculo de cada termo, que são dados por

$$\langle 0 | \partial_0 \phi \partial_0 \phi | 0 \rangle = \sum_k \int \frac{d^2 k_{\perp}}{4\pi^2} \frac{\omega^2 \cos^2(k|x - a_m| + \alpha_m)}{\omega a [1 + \frac{1}{ka} \sin(ka) \cos(ka + 2\alpha_m)]} ; \tag{4.48}$$

$$\langle 0 | \partial_1 \phi \partial_1 \phi | 0 \rangle = \sum_k \int \frac{d^2 k_{\perp}}{4\pi^2} \frac{k^2 \sin^2(k|x - a_m| + \alpha_m)}{\omega a [1 + \frac{1}{ka} \sin(ka) \cos(ka + 2\alpha_m)]} ; \tag{4.49}$$

$$\langle 0 | \partial_2 \phi \partial_2 \phi | 0 \rangle = \sum_k \int \frac{d^2 k_{\perp}}{4\pi^2} \frac{k_{\perp 2}^2 \cos^2(k|x - a_m| + \alpha_m)}{\omega a [1 + \frac{1}{ka} \sin(ka) \cos(ka + 2\alpha_m)]} ; \tag{4.50}$$

$$\langle 0 | \partial_3 \phi \partial_3 \phi | 0 \rangle = \sum_k \int \frac{d^2 k_\perp}{4\pi^2} \frac{k_{\perp 3}^2 \cos^2(k|x - a_m| + \alpha_m)}{\omega a \left[1 + \frac{1}{ka} \sin(ka) \cos(ka + 2\alpha_m)\right]}; \quad (4.51)$$

$$\langle 0 | \partial_1 \partial_1 \phi^2 | 0 \rangle = \sum_k \int \frac{d^2 k_\perp}{4\pi^2} \frac{2k^2 \cos(2k|x - a_m| + 2\alpha_m)}{\omega a \left[1 + \frac{1}{ka} \sin(ka) \cos(ka + 2\alpha_m)\right]}; \quad (4.52)$$

$$\langle 0 | \partial_0 \partial_0 \phi^2 | 0 \rangle = \langle 0 | \partial_2 \partial_2 \phi^2 | 0 \rangle = \langle 0 | \partial_3 \partial_3 \phi^2 | 0 \rangle = 0. \quad (4.53)$$

onde $k_\perp^2 = k_{\perp 2}^2 + k_{\perp 3}^2$.

Quando somarmos os termos (4.48)–(4.53), a componente do tensor pode ser escrita como

$$\langle 0 | T_{00}(x) | 0 \rangle = \sum_k \int \frac{d^2 k_\perp}{8\pi^2} \frac{\omega^2 + \left(\frac{2}{3}k^2 + k_\perp^2\right) \cos(2k|x - a_m| + 2\alpha_m)}{\omega a \left[1 + \frac{1}{ka} \sin(ka) \cos(ka + 2\alpha_m)\right]}, \quad (4.54)$$

com $\omega^2 = k^2 + k_\perp^2$.

Usando as relações (4.37) devemos ter

$$\cos(2k|x - a_m| + 2\alpha_m) = \frac{k^2 a^2 b_m^2 - 1}{k^2 a^2 b_m^2 + 1} \cos(2k|x - a_m|) - \frac{2kab_m}{k^2 a^2 b_m^2 + 1} \sin(2k|x - a_m|) \quad (4.55)$$

e também

$$\int d^2 k_\perp g(k_\perp) = 2\pi \int_0^\infty k_\perp g(k_\perp) dk_\perp. \quad (4.56)$$

Dessa forma, usando (4.55) e (4.56) na expressão (4.54), obteremos

$$\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \sum_k \int_0^\infty dk_\perp \frac{k_\perp/k}{a \sqrt{k_\perp^2/k^2 + 1} \left[1 + \frac{1}{ka} \sin(ka) \cos(ka + 2\alpha_m)\right]} \times \dots \quad (4.57)$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis:

$$\gamma = \frac{k_\perp}{k} \quad \Rightarrow \quad d\gamma = \frac{dk_\perp}{k},$$

podemos reescrever o valor esperado como

$$\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \sum_k \frac{k^3}{a \left[1 + \frac{1}{ka} \sin(ka) \cos(ka + 2\alpha_m)\right]} \times \quad (4.58)$$

$$\left\{ \int_0^\infty d\gamma \left[\frac{\gamma^3}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \right] + \int_0^\infty d\gamma \left[\frac{2\gamma}{3\sqrt{\gamma^2 + 1}} + \frac{\gamma^3}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \right] \right\} \times$$

$$\left[\frac{k^2 a^2 b_m^2 - 1}{k^2 a^2 b_m^2 + 1} \cos(2k|x - a_m|) - \frac{2kab_m}{k^2 a^2 b_m^2 + 1} \sin(2k|x - a_m|) \right].$$

Observamos, neste ponto, que as integrais entre chaves são divergentes. No entanto, podemos usar algumas condições de renormalização bastante conhecidas na literatura, como as obtidas em [44], por exemplo, onde temos

$$\text{reg} \int_0^\infty \frac{y^n dy}{\sqrt{y^2 + 1}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(-\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad (4.59)$$

como sendo o resultado da regularização das integrais em (4.58), que conseqüentemente poderá ser reescrita na forma

$$\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \sum_k \frac{k^3}{a \left[1 + \frac{1}{ka} \sin(ka) \cos(ka + 2\alpha_m) \right]} D(ka) \times \quad (4.60)$$

$$\left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) \Gamma(2) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \Gamma(1) + \left[\frac{1}{3\sqrt{\pi}} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \Gamma(1) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) \Gamma(2) \right] \right\},$$

onde o colchete final em (4.58) está representado por $D(ka)$. Os valores das funções Gama são conhecidos[40], dados por $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$, e $\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$, o que resulta em

$$\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle = -\frac{1}{12\pi^2} \sum_k \frac{k^3}{a \left[1 + \frac{1}{ka} \sin(ka) \cos(ka + 2\alpha_m) \right]}. \quad (4.61)$$

Como o valor esperado da densidade de energia ainda depende de um somatório divergente, usamos aqui a fórmula de Abel-Plana (4.30) discutida em [41], e portanto a soma em (4.61) será dada por

$$\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle = -\frac{1}{12\pi^2 a^4} \left\{ 0 + \int_0^\infty z^3 dz + i \int_0^\infty \frac{[(it)^3 - (-it)^3] dt}{\frac{(b_1 t - 1)(b_2 t - 1)}{(b_1 t + 1)(b_2 t + 1)} e^{2t} - 1} \right\}, \quad (4.62)$$

onde escolhemos inicialmente $z = ka$. Então, a parte regularizada da expressão acima é

$$\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle = -\frac{1}{6\pi^2 a^4} \int_0^\infty \frac{t^3 dt}{\frac{(b_1 t - 1)(b_2 t - 1)}{(b_1 t + 1)(b_2 t + 1)} e^{2t} - 1}. \quad (4.63)$$

Se escolhermos $b_1 = -b_2$, a equação (4.63) tomará a seguinte forma

$$\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle = -\frac{1}{6\pi^2 a^4} \int_0^\infty \frac{t^3 dt}{e^{2t} - 1}, \quad (4.64)$$

que é uma integral conhecida na literatura[44]. Então, temos que a densidade de energia no vácuo é

$$\rho = \langle 0 | T_{00} | 0 \rangle = -\frac{\pi^2}{1440a^4}. \quad (4.65)$$

Observamos aqui que este valor é o mesmo que o obtido para os casos de condições de contorno de Dirichlet e Neumann[45].

A pressão no vácuo será obtida através do cálculo das demais componentes do tensor energia-momento. Para a componente T_{11} , seguindo o mesmo procedimento usado no cálculo anterior para a densidade de energia no vácuo, teremos que seu valor esperado é

$$\langle 0 | T_{11} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_k \int \frac{d^2 k_\perp}{4\pi^2} \frac{k^2}{\omega a \left[1 + \frac{1}{ka} \sin(ka) \cos(ka + 2\alpha_m) \right]}, \quad (4.66)$$

que após a mudança de variáveis

$$\gamma = \frac{k_\perp}{k} \quad \Rightarrow \quad d\gamma = \frac{dk_\perp}{k}$$

é reescrita na forma

$$\langle 0 | T_{11} | 0 \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \sum_k \frac{k^3}{a \left[1 + \frac{1}{ka} \sin(ka) \cos(ka + 2\alpha_m) \right]} \int_0^\infty d\gamma \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}}. \quad (4.67)$$

Feita a renormalização, teremos

$$\langle 0 | T_{11} | 0 \rangle = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_k \frac{k^3}{a \left[1 + \frac{1}{ka} \sin(ka) \cos(ka + 2\alpha_m) \right]}, \quad (4.68)$$

e novamente usando a fórmula de Abel-Plana, obtemos

$$\langle 0 | T_{11} | 0 \rangle = -\frac{1}{2\pi^2 a^4} \int_0^\infty \frac{t^3 dt}{\frac{(b_1 t - 1)(b_2 t - 1)}{(b_1 t + 1)(b_2 t + 1)} e^{2t} - 1}, \quad (4.69)$$

que com a escolha $b_1 = -b_2$ resultará

$$p = \langle 0 | T_{11} | 0 \rangle = -\frac{\pi^2}{480a^4}, \quad (4.70)$$

ou seja, $p = 3\rho$.

Finalmente, o mesmo desenvolvimento pode ser feito para os valores esperados $\langle 0 | T_{22} | 0 \rangle$ e $\langle 0 | T_{33} | 0 \rangle$, que serão dados por

$$\langle 0 | T_{22} | 0 \rangle = \frac{1}{12\pi^2} \sum_k \frac{k^3}{a \left[1 + \frac{1}{ka} \sin(ka) \cos(ka + 2\alpha_m) \right]}, \quad (4.71)$$

ou seja, $\langle 0 | T_{22} | 0 \rangle = -\langle 0 | T_{00} | 0 \rangle$, e o mesmo vale para $\langle 0 | T_{33} | 0 \rangle$.

4.5 Aproximação de Campo Gravitacional Fraco

Conforme dito anteriormente, o efeito Casimir pode ser entendido, de maneira geral, como a pressão sobre as superfícies de uma cavidade quando um campo quântico é confinado em um volume finito do espaço. Este efeito deve ter um papel importante em investigações que vão desde o confinamento de partículas até a estrutura do universo em larga escala[34], por isso nas últimas décadas tem sido alvo de inúmeros estudos e verificações experimentais[45].

As investigações atuais sobre o efeito Casimir estão voltadas, também, para a influência de campos gravitacionais na densidade de energia do vácuo de campos quânticos[36], pois acredita-se que as modificações na densidade de energia induzidas pela gravidade tenham um papel importante na dinâmica do universo, afetando a constante cosmológica Λ , por exemplo, ou ainda a questão da validade da teoria da relatividade geral no limite de pequenas distâncias[46].

Nesta seção, consideramos o problema de duas placas paralelas muito próximas, que podem ser interpretadas como uma cavidade¹, na presença de um campo gravitacional gerado por um objeto massivo esfericamente simétrico, como um buraco negro, num universo de *de Sitter*, ou seja, com $\Lambda > 0$. A figura (4.1) esboça esta configuração:

¹Neste contexto, significa que mesmo sob uma força externa não será deformada.

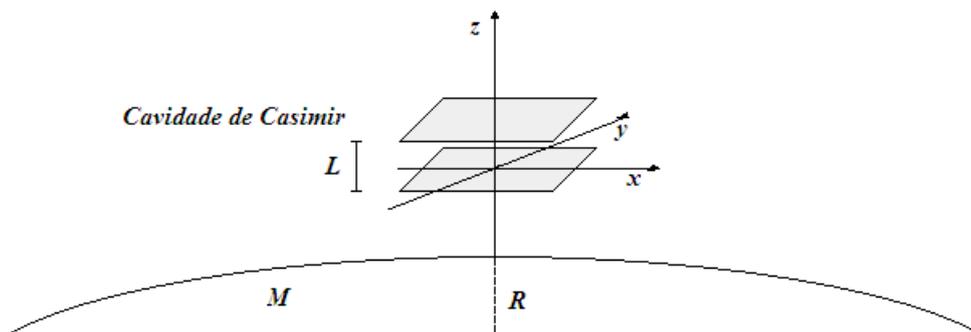


Figura 4.1: Cavidade de Casimir no espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter.

Se admitimos a relação entre a massa M , a distância R do centro do buraco negro e a distância L de separação das placas como sendo $R \gg M \gg L$, nas regiões muito próximas desse corpo o espaço pode ser considerado localmente plano. De forma geral, fazemos o cálculo perturbativo ordem à ordem das correções gravitacionais da densidade de energia do vácuo para o campo confinado entre as placas, num espaço-tempo estático e levemente curvo, o que equivale a dizer que estamos na aproximação de *campo fraco*.

4.5.1 Considerações Sobre o Campo Escalar num Espaço-tempo Curvo

No caso em consideração, a métrica que descreve o espaço-tempo curvo quadri-dimensional é dada por

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 + 2\Phi)^{-1}\delta_{ij}dx^i dx^j ,$$

que na aproximação de campo fraco pode ser escrita na forma

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j , \quad (4.72)$$

que recai no caso de Minkowski quando $\Phi = 0$.

Estamos lidando com um campo quântico confinado em uma cavidade formada por duas

placas paralelas de área A , separadas por uma distância L , e localizadas a uma distância radial R do centro da distribuição de massa. Se considerarmos que estas placas estão colocadas perpendicularmente à direção \hat{u}_R , e introduzirmos um sistema de referência cartesiano $\{x, y, z\}$ em que o eixo- z coincide com a direção \hat{u}_R , podemos representar a distância entre o centro do buraco negro e as placas (cavidade) como sendo

$$r \rightarrow R + z. \quad (4.73)$$

O potencial associado ao campo gravitacional é dado por

$$\Phi(r) = -\frac{M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \quad (4.74)$$

e considerando a separação L entre as placas assim como sua área A sendo muito pequenas comparadas com a distância R , poderemos expandir o potencial gravitacional $\Phi(r)$ em torno da direção z , de maneira que

$$\Phi(r) = -\frac{M}{R} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-1} - \frac{\Lambda}{3} (R+z)^2 \simeq -\frac{M}{R} \left(1 - \frac{z}{R}\right) - \frac{\Lambda}{3} (R^2 + 2Rz + z^2) \quad (4.75)$$

$$\Phi(r) \simeq -\frac{M}{R} + \frac{M}{R^2}z - \frac{\Lambda R^2}{3} + \frac{2\Lambda}{3}Rz - \frac{\Lambda}{3}z^2, \quad 0 \leq z \leq L, \quad (4.76)$$

lembrando que substituímos (4.73) na expressão do potencial gravitacional antes de realizarmos a expansão.

Podemos ainda separar esta expressão para o potencial gravitacional em função dos termos que dependem ou não das coordenadas cartesianas, da seguinte forma

$$\Phi(R) = \phi_0(R) + \gamma z, \quad (4.77)$$

onde impusemos que cada termo em $\phi_0(R)$ e em γ devem ser da mesma ordem, sendo dados por

$$\phi_0(R) \simeq -\frac{M}{R} - \frac{\Lambda}{3}R^2 \quad \text{e} \quad \gamma \simeq \frac{M}{R^2} + \frac{2\Lambda}{3}R + \mathcal{O}(M/R)^3. \quad (4.78)$$

Substituindo $\Phi(R)$ dada por (4.77) na métrica, teremos

$$ds^2 = -(1 + 2\phi_0 + 2\gamma z) dt^2 + (1 - 2\phi_0 - 2\gamma z) \delta_{ij} dx^i dx^j . \quad (4.79)$$

Para prosseguirmos nos cálculos, vamos considerar um observador estático \mathbf{w} , cuja quadri-velocidade w^μ é definida como

$$w^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta_\mu^t . \quad (4.80)$$

Com relação a este observador serão feitas as medidas.

Algumas Ferramentas Básicas da Teoria de Campos

Se consideramos um campo escalar não-massivo $\Psi(x)$ como objeto de estudo, este deve obedecer a equação de Klein-Gordon, que no caso sem massa será, quando considerado um espaço-tempo curvo, dada por

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi(x)] - \xi \mathcal{R} \Psi(x) = 0 , \quad (4.81)$$

onde ξ é um parâmetro de acoplamento e \mathcal{R} o escalar de curvatura, que no caso do vácuo (nosso caso, por exemplo) é igual a zero.

Usando a métrica (4.79) na equação de Klein-Gordon, obteremos a equação

$$-\partial_t^2 \Psi + (1 + 2\phi_0 + 2\gamma z)^2 \delta^{ij} \partial_i \partial_j \Psi = 0 , \quad (4.82)$$

a partir da qual, para cada ordem de aproximação, obteremos as soluções dos modos que descrevem o campo escalar dentro da cavidade.

De acordo com a teoria quântica de campos em espaços curvos[43], pode-se obter um conjunto ortonormal de soluções dos modos $\psi_n(\vec{k})$ a partir da definição de produto escalar dada por

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = i \int_\Sigma [(\partial_\mu \psi_m) \psi_n^* - \psi_m (\partial_\mu \psi_n^*)]^{1/2} \sqrt{^{(3)}g} n^\mu d^3x , \quad (4.83)$$

sendo Σ uma hipersuperfície de Cauchy tipo-espaço, ${}^{(3)}g$ o determinante da métrica induzida (projetada) nessa hipersuperfície e \mathbf{n} um vetor unitário tipo-tempo ortogonal a Σ , onde poderemos convenientemente identificar $n^\mu = w^\mu$ e também $d^3x = dx dy dz$.

Ainda segundo esta construção, o tensor energia-momento do campo será

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \psi \partial_\sigma \psi . \quad (4.84)$$

A densidade de energia de Casimir, na qual estamos interessados, tem seu valor médio (próprio) escrito como

$$\bar{\mathcal{E}}_{vac} = \frac{1}{V_p} \int dx dy dz \sqrt{{}^{(3)}g} \mathcal{E}_{vac} , \quad (4.85)$$

com V_p sendo o volume próprio da cavidade, definido por

$$V_p = \int dx dy dz \sqrt{{}^{(3)}g} . \quad (4.86)$$

Como a medida é feita pelo observador (4.80), a densidade de energia será dada por

$$\mathcal{E}_{vac} = w^\mu w^\nu \langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle = (-g_{tt})^{-1} \langle 0 | T_{tt} | 0 \rangle$$

que pode ser reescrita na forma

$$\mathcal{E}_{vac} = (-g_{tt})^{-1} \sum_n \int dk_x dk_y T_{tt} [\Psi_n(k), \Psi_n^*(k)] , \quad (4.87)$$

onde a forma bilinear do tensor T_{tt} é definida, para qualquer $\psi(k)$, como

$$T_{tt} [\psi(k), \psi^*(k)] = \partial_t \psi \partial_t \psi^* - \frac{1}{2} g_{tt} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \psi \partial_\sigma \psi^* . \quad (4.88)$$

Com isso, estamos aptos a determinar as correções na densidade de energia do vácuo de um campo escalar quântico induzidas pela gravidade em uma pequena cavidade de Casimir, adotando uma aproximação perturbativa ordem à ordem, partindo da ordem zero, o caso trivial que recai no espaço-tempo plano, indo até ordens mais altas de correção.

4.5.2 Energia de Casimir na Aproximação de Ordem Zero

Neste caso $\phi_0 = \gamma = 0$, ou seja, esta situação corresponde ao espaço-tempo de Minkowski. Para essa aproximação, não é necessária uma riqueza maior de detalhes, uma vez que para o espaço plano já obtivemos, com uma abordagem um pouco diferente, a densidade de energia de Casimir. Neste caso, temos que as soluções dos modos da equação de Klein-Gordon (4.82) que satisfazem as condições de contorno de Dirichlet (4.1) em três dimensões são

$$\psi_{0,n}(\vec{k}_\perp) = \left[\frac{1}{(2\pi)^2 \omega_{0,n} L} \right]^{1/2} e^{-i\omega_{0,n} t} e^{i(k_x x + k_y y)} \sin\left(\frac{n\pi}{L} z\right), \quad (4.89)$$

com n sendo um inteiro e $\vec{k}_\perp \equiv (k_x, k_y)$. Temos também que

$$\omega_{0,n}^2 = \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right] \quad (4.90)$$

são as frequências dos modos permitidos dentro da cavidade.

Em ordem zero, temos que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, assim o tensor T_{tt} obtido da substituição de (4.89) na definição (4.88) é

$$T_{tt} = \frac{1}{(2\pi)^2 \omega_{0,n} L} \left[(k_x^2 + k_y^2) \sin^2\left(\frac{n\pi}{L} z\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]. \quad (4.91)$$

Inserindo esta relação em (4.87) e posteriormente em (4.85), como $\sqrt{{}^{(3)}g} = 1$ e $(-g_{tt}) = 1$, a energia média será obtida da relação

$$\bar{\mathcal{E}}_{vac,0} = \frac{1}{2} \sum_n \int dk_x dk_y \frac{1}{(2\pi)^2 L \omega_{0,n}} \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]. \quad (4.92)$$

Usando a definição das frequências (4.90), reescrevemos a fórmula como

$$\bar{\mathcal{E}}_{vac,0} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2 L} \sum_n \int d^2 k_\perp \omega_{0,n}(k_\perp). \quad (4.93)$$

Neste ponto relembremos os procedimentos de *regularização* e *renormalização* realizados anteriormente, que vão desde (4.58) até (4.65). Se reescrevemos

$$\omega_{0,n}(k_\perp) = [k_\perp^2 + \eta^2]^{1/2}$$

e considerarmos a relação (4.56), ficaremos com

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{E}}_{vac,0} &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2 L} \sum_n 2\pi \int_0^\infty k_\perp dk_\perp \sqrt{k_\perp^2 + \eta^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2 L} \sum_n 2\pi \int_0^\infty dk_\perp k_\perp \frac{k_\perp^2 + \eta^2}{\sqrt{k_\perp^2 + \eta^2}}.\end{aligned}\quad (4.94)$$

Isto é o mesmo que

$$\bar{\mathcal{E}}_{vac,0} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2 L} \sum_n 2\pi \int_0^\infty \frac{dk_\perp}{\eta} \left\{ \frac{k_\perp^3}{\sqrt{\frac{k_\perp^2}{\eta^2} + 1}} + \frac{k_\perp \eta^2}{\sqrt{\frac{k_\perp^2}{\eta^2} + 1}} \right\}.\quad (4.95)$$

Fazendo a mudança de variável:

$$\gamma = \frac{k_\perp}{\eta} \quad \Rightarrow \quad d\gamma = \frac{dk_\perp}{\eta},$$

teremos

$$\bar{\mathcal{E}}_{vac,0} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2 L} \sum_n 2\pi \eta^3 \int_0^\infty d\gamma \left[\frac{\gamma^3}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 1}} \right],\quad (4.96)$$

onde vemos nitidamente que estas integrais divergem para $\gamma \rightarrow \infty$. Usando a regularização dada na literatura[44], teremos que

$$\bar{\mathcal{E}}_{vac,0} = -\frac{1}{3} \frac{1}{(2\pi)^2 L} \sum_n \pi \eta^3.\quad (4.97)$$

Como o somatório é divergente, devemos usar a fórmula de Abel-Plana (4.31), o que resultará em

$$\bar{\mathcal{E}}_{vac,0} = -\frac{1}{6\pi^2 L^4} \int_0^\infty \frac{t^3}{e^{2t} - 1} dt.\quad (4.98)$$

Usando o resultado desta integral[44], obtemos que a densidade média renormalizada da energia de Casimir, nesta aproximação de ordem zero, é dada por

$$(\bar{\mathcal{E}}_{vac,0})_{ren} = -\frac{\pi^2}{1440L^4},\quad (4.99)$$

resultado igual ao obtido na seção anterior para o espaço plano.

4.5.3 Aproximação de Primeira Ordem

Agora, nesta ordem de aproximação, admitimos que $R \gg z$, de modo a podermos desprezar os termos em γ na equação de Klein-Gordon (4.82), que são da ordem de $\mathcal{O}(M/R)^2$. Com isso, teremos

$$-\partial_t^2 \Psi + (1 + 2\phi_0)^2 \delta^{ij} \partial_i \partial_j \Psi = 0, \quad (4.100)$$

que pode ser escrita na forma

$$-(1 - 4\phi_0) \partial_t^2 \Psi + \delta^{ij} \partial_i \partial_j \Psi = 0. \quad (4.101)$$

Quando impomos as condições de contorno de Dirichlet (4.1) às placas, obtemos o conjunto de soluções dadas por

$$\psi_n(\vec{k}_\perp) = N_n e^{-i\omega_{1,n} t} e^{i(k_x x + k_y y)} \sin\left(\frac{n\pi}{L} z\right), \quad (4.102)$$

com N_n sendo uma constante de normalização que será calculada mais adiante. Substituindo a solução (4.102) na equação de Klein-Gordon (4.101), obtemos que os modos de frequência correspondentes a esta aproximação são

$$\omega_{1,n}^2 = (1 + 4\phi_0) \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]. \quad (4.103)$$

Os modos ψ_n são ortonormais com relação ao produto escalar (4.83), ou seja

$$\langle \psi_m(k_{1x}, k_{1y}), \psi_n(k_{2x}, k_{2y}) \rangle = \delta(k_{1x} - k_{2x}) \delta(k_{1y} - k_{2y}) \delta_{mn}. \quad (4.104)$$

Assim, usando a solução dos modos na definição de produto escalar (4.83) podemos obter a constante de normalização N_n , que é

$$N_n = \left[\frac{1}{(1 - 4\phi_0)(2\pi)^2 \omega_{1,n} L} \right]^{1/2}. \quad (4.105)$$

Usando a solução (4.102) na expressão para a componente T_{tt} do tensor energia momento, dada em (4.88), obtemos

$$T_{tt} = N_n^2 (1 + 4\phi_0) \left[(k_x^2 + k_y^2) \sin^2\left(\frac{n\pi}{L} z\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]. \quad (4.106)$$

Em primeira ordem de aproximação, o volume próprio de integração V_p será calculado tomando $\Phi = \phi_0 = \text{constante}$. Portanto, teremos o seguinte resultado

$$V_p = \int dx dy dz \sqrt{{}^{(3)}g} = \int dx dy dz (1 - 2\phi_0)^{3/2} \simeq (1 - 3\phi_0)LA.$$

Repetindo o procedimento, a densidade média de energia será

$$\bar{\mathcal{E}}_{vac,1} = \frac{1}{V_p} \sum_n \int dx dy dz \sqrt{{}^{(3)}g} (-g_{tt})^{-1} \int d^2 k_{\perp} T_{tt} [\Psi_n(k), \Psi_n^*(k)], \quad (4.107)$$

que após a substituição de (4.105) em (4.106) e a utilização na equação (4.107), resulta na seguinte expressão

$$\bar{\mathcal{E}}_{vac,1} = (1 + 2\phi_0) \frac{1}{2} \sum_n \int dk_x dk_y \frac{1}{(1 - 4\phi_0)(2\pi)^2 L \omega_{1,n}} \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right]. \quad (4.108)$$

Agora, usando a definição das frequências possíveis (4.103), reescrevemos a expressão anterior como

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_{vac,1} &= (1 + 4\phi_0) \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2 L} \sum_n \int dk_x dk_y \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right]^{1/2}, \\ &= (1 + 2\phi_0) \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2 L} \sum_n \int d^2 k_{\perp} \omega_{1,n}(k_{\perp}), \end{aligned} \quad (4.109)$$

que é igual à obtida na aproximação anterior, a menos de um fator multiplicativo $(1 + 4\phi_0)$.

Dessa forma, a densidade média de energia renormalizada em primeira ordem será

$$(\bar{\mathcal{E}}_{vac,1})_{ren} = -(1 + 4\phi_0) \frac{\pi^2}{1440L^4}. \quad (4.110)$$

No entanto, a coordenada L de separação entre as placas deve ser expressa em termos da distância própria L_p , medida pelo observador \mathbf{w} , que é

$$L_p = \sqrt{g_{zz}}L \simeq (1 - \phi_0)L. \quad (4.111)$$

Usando o resultado dado por (4.111) (distância própria), obtemos que a densidade de energia será dada por

$$(\bar{\mathcal{E}}_{vac,1})_{ren} = -\frac{\pi^2}{1440L_p^4}, \quad (4.112)$$

que é o resultado análogo ao do caso plano, mas lembrando que agora $\phi_0 = -\frac{M}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3}$, o que significa dizer que esta distância própria L_p carrega consigo o incremento devido à presença do termo em Λ associado ao espaço-tempo em consideração.

4.5.4 Uma Aproximação em Segunda Ordem

Até o caso anterior, estávamos considerando apenas termos da ordem $\mathcal{O}(M/R)$, onde não foram verificadas modificações notáveis devido à presença do campo gravitacional, o que se esperava acontecer, mas o mesmo não deve ocorrer quando considerarmos a segunda ordem de aproximação e superiores, caso que iremos tratar nesta seção.

Por meio das relações (4.78) para os termos ϕ_0 e γ que compõem o potencial gravitacional na métrica (4.79), observamos que nos limites assintóticos $R \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ teremos divergências. Assim sendo, assumimos que R possa ter qualquer valor intermediário, onde os termos dependentes de Λ são pequenos para R 's pequenos e dominam os termos em M para R 's grandes.

Como não assumimos $\phi_0 = 0$ ou $\gamma = 0$, a equação de Klein-Gordon será

$$-\partial_t^2 \Psi + (1 + 2\phi_0 + 2\gamma z)^2 \delta^{ij} \partial_i \partial_j \Psi = 0, \quad (4.113)$$

da qual obteremos uma solução do tipo

$$\Psi_n = N_n e^{-i\omega_n t} e^{i(k_x x + k_y y)} \chi(z). \quad (4.114)$$

Por conveniência, vamos redefinir:

$$x'^\alpha = (1 + \phi_0) x^\alpha, \quad (4.115)$$

com $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Assim teremos

$$t' = (1 + \phi_0)t \quad \text{e} \quad x'_i = (1 + \phi_0)x_i.$$

Nossa métrica ficará, então,

$$ds^2 = - \left[(1 + \phi_0) \left(1 + \frac{\gamma z}{1 + \phi_0} \right) \right]^2 dt^2 + \left[(1 + \phi_0) \left(1 + \frac{\gamma z}{1 + \phi_0} \right) \right]^{-2} \delta^{ij} dx_i dx_j. \quad (4.116)$$

Reescrevendo também o γ como

$$\bar{\gamma} = \gamma(1 - \phi_0), \quad (4.117)$$

teremos

$$ds^2 = -(1 + 2\bar{\gamma}z)dt'^2 + (1 - 2\bar{\gamma}z)\delta^{ij} dx'_i dx'_j, \quad (4.118)$$

onde $g^{ij} = -g_{tt}$ e assim $g = -(g^{tt})^2$.

A equação de Klein-Gordon no espaço-tempo dado por (4.118) será dada por

$$-\partial_t^2 \Psi + (1 + 2\bar{\gamma}z)^2 \delta^{ij} \partial_i \partial_j \Psi = 0. \quad (4.119)$$

Inserindo a solução de Ψ dada por (4.114) em (4.119), encontramos

$$\partial_z^2 \chi(z) - 4\bar{\gamma}\omega^2 z \chi(z) + [\omega^2 - k_\perp^2] \chi(z) = 0. \quad (4.120)$$

Fazendo as escolhas seguintes

$$a = 4\bar{\gamma}\omega^2, \quad b = \omega^2 - k_\perp^2, \quad u = u(z) = - \left(z - \frac{b}{a} \right) a^{1/3}, \quad (4.121)$$

obteremos

$$\frac{du}{dz} = -a^{1/3} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dz} = -a^{1/3} \frac{d}{du} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dz^2} = a^{2/3} \frac{d^2}{du^2},$$

e com isso (4.120) é reescrita na forma

$$\partial_u^2 \chi(u) + u \chi(u) = 0, \quad (4.122)$$

que identificamos como sendo uma equação diferencial de Airy (cilíndrica parabólica), cuja solução pode ser expressa em termos de funções de Bessel como

$$\chi(u) = \sqrt{u} \left[A J_{1/3} \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \right) + B J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \right) \right], \quad (4.123)$$

onde a função $u(z)$ é dada por

$$u(z) = \frac{b - az}{a^{2/3}}. \quad (4.124)$$

Note que a depende de $\bar{\gamma}$, que tem a forma $\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{1+\phi_0}$. Nesse caso, para pequenos valores de $\bar{\gamma}$, ou seja, quando a contribuição de γ for muito menor que a de ϕ_0 , a função $u(z)$ será muito grande e a solução de $\chi(u)$ poderá ser expressa na forma assintótica[34]

$$\chi(u) = \sqrt{\frac{3}{\pi u^{1/2}}} \mathcal{A} \sin\left(\frac{2}{3}u^{3/2} + \varphi\right), \quad (4.125)$$

com \mathcal{A} e φ constantes.

Impondo as condições de contorno de Dirichlet às placas, teremos

$$\chi(u)_{z=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}u^{3/2}(0) + \varphi = p\pi, \quad (4.126)$$

$$\chi(u)_{z=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}u^{3/2}(L) + \varphi = q\pi. \quad (4.127)$$

Fazendo $p - q = n = \text{inteiro}$, vem

$$\frac{2}{3} [u^{3/2}(0) - u^{3/2}(L)] = n\pi. \quad (4.128)$$

Substituindo (4.124) na expressão anterior, e realizando uma expansão até terceira ordem em torno do parâmetro $\frac{aL}{b}$, chegamos ao seguinte resultado

$$b - \frac{aL}{2} \simeq \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad (4.129)$$

e ao inserirmos os valores de a e de b , chegamos à uma relação que associa as frequências dos modos permitidos na cavidade (entre as placas) com a frequência da aproximação de ordem zero, ou seja, do espaço plano:

$$\omega_n^2 \left(1 - \frac{4\bar{\gamma}L}{2}\right) \simeq k_{\perp}^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \simeq (1 + 2\bar{\gamma}L) \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right], \quad (4.130)$$

$$\omega_n^2 \simeq (1 + 2\bar{\gamma}L)\omega_0^2. \quad (4.131)$$

Agora, estamos aptos a calcular a densidade média de energia do vácuo, $\bar{\mathcal{E}}_{vac,2}$, porém ao invés de usar a forma completa de T_{tt} vamos expandi-la em termos de uma expressão assintótica de $\Psi_n(k)$:

$$\Psi_n = \psi + \delta\psi + \mathcal{O}(M/R)^3 \quad (4.132)$$

com $\delta\psi \sim \mathcal{O}(M/R)^2$ e $\psi \sim \mathcal{O}(M/R)$, condizente com a solução dos modos que já obtivemos na aproximação anterior.

Feito isto, a forma bilinear de T_{tt} será expandida da seguinte maneira

$$T_{tt}[\Psi_n(k), \Psi_n^*(k)] = T_{tt}[\psi_n(k), \psi_n^*(k)] + \{T_{tt}[\psi_n(k), \delta\psi_n^*(k)] + \dots\} + \mathcal{O}(M/R)^3, \quad (4.133)$$

e assim a densidade média será

$$\bar{\mathcal{E}}_{vac,2} = \bar{\mathcal{E}}_{vac} + \delta\bar{\mathcal{E}}_{vac}. \quad (4.134)$$

Como $\sqrt{{}^{(3)}g} = (1 - 3\bar{\gamma}z)$ e $(-g_{tt})^{-1} = (1 - 2\bar{\gamma}z)$, a densidade média de energia será

$$\bar{\mathcal{E}}_{vac,2} = \frac{1}{V_p} \sum_n \int d^2k_\perp \int dx dy dz (1 - 3\bar{\gamma}z)(1 - 2\bar{\gamma}z) T_{tt}[\psi_n(k), \psi_n^*(k)], \quad (4.135)$$

pois consideramos apenas o primeiro termo da expansão bilinear (4.133), equivalente ao termo em primeira ordem, mas com a constante de normalização modificada para

$$N_n^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 L (1 - 2\bar{\gamma}L) \omega_n}.$$

Introduzindo N_n^2 na expressão bilinear de primeira ordem e usando a relação de frequências (4.131), ficamos

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_{vac,2} &= \frac{1}{V_p} \sum_n \int d^2k_\perp \frac{1}{(1 - \bar{\gamma}L)(2\pi)^2 \omega_0 L} \int dx dy dz (1 - 5\bar{\gamma}z) \left[k_\perp^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}z\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right], \\ &= \frac{AL}{2V_p} \sum_n \int d^2k_\perp \frac{1}{(1 - \bar{\gamma}L)(2\pi)^2 \omega_0 L} \left(1 - \frac{5}{2}\bar{\gamma}L\right) \left[(k_x^2 + k_y^2) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right] \\ &= \frac{AL}{2V_p} \sum_n \int d^2k_\perp \frac{1}{(2\pi)^2 L} \left(1 - \frac{3}{2}\bar{\gamma}L\right) \left[(k_x^2 + k_y^2) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.136)$$

Mas como $V_p = \int dx dy dz \sqrt{{}^{(3)}g} = AL(1 - 3/2 \bar{\gamma}L)$, teremos

$$\bar{\mathcal{E}}_{vac} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2 L} \sum_n \int d^2 k_{\perp} \left[k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (4.137)$$

que tem como resultado, segundo os cálculos realizados para as aproximações anteriores

$$(\bar{\mathcal{E}}_{vac.})_{ren} = -\frac{\pi^2}{1440L^4}. \quad (4.138)$$

Mudando para a coordenada própria L_p da cavidade, teremos:

$$L_p = \int_0^L dz (g_{zz})^{1/2} = \int_0^L dz (1 - 2\bar{\gamma}z)^{1/2} = \int_0^L dz (1 - 2\bar{\gamma}z) = L \left(1 - \frac{\bar{\gamma}L}{2} \right), \quad (4.139)$$

com $\bar{\gamma}L \sim \mathcal{O}(M/R)^2$ ou menor, obtendo que

$$L_p \simeq L \left(1 - \frac{1}{2} \bar{\gamma}L_p \right) \quad \Rightarrow \quad L_p \simeq L_p \left(1 - \frac{1}{2} \bar{\gamma}L_p \right),$$

e a energia média é portanto

$$(\bar{\mathcal{E}}_{vac.})_{ren} = -\frac{\pi^2}{1440L_p^4} (1 - 2\bar{\gamma}L_p). \quad (4.140)$$

Resta agora obter a correção de ordem $\bar{\gamma}L_p$, que pode ser vista quando comparamos a densidade média de energia na aproximação zero (4.93) com a relação de frequências (4.131), lembrando

$$\bar{\mathcal{E}}_{vac,0} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2 L} \sum_n \int d^2 k_{\perp} \omega_{0,n}(k_{\perp}) \quad \text{e} \quad \omega_n^2 \simeq (1 + 2\bar{\gamma}L) \omega_0^2.$$

Isto indica que o termo de correção será $\bar{\gamma}L$ vezes o resultado do espaço plano, ou seja,

$$(\delta\bar{\mathcal{E}}_{vac})_{ren} = \bar{\gamma}L_p \left(-\frac{\pi^2}{1440L_p^4} \right), \quad (4.141)$$

e então, teremos

$$(\bar{\mathcal{E}}_{vac.})_{ren,2} = - \left[(1 - 2\bar{\gamma}L_p) + (\bar{\gamma}L_p) \right] \frac{\pi^2}{1440L_p^4} \quad (4.142)$$

$$(\bar{\mathcal{E}}_{vac.})_{ren,2} = -\frac{\pi^2}{1440L_p^4} (1 - \bar{\gamma}L_p). \quad (4.143)$$

Finalmente, podemos recuperar o sistema de coordenadas inicial e o γ , obtendo

$$(\bar{\mathcal{E}}_{vac.})_{ren,2} = -\frac{\pi^2}{1440L_p^4}(1 - \phi_0 - \gamma L_p). \quad (4.144)$$

Do resultado (4.144), vemos que mesmo considerando a coordenada própria haverá, nesta ordem de aproximação, um fator de correção γL_p que reduz o valor da densidade de energia como consequência do campo gravitacional. Consequentemente, a energia de Casimir entre as placas, definida como

$$E_{Cas} = (\bar{\mathcal{E}}_{vac.})_{ren,2} V_p, \quad (4.145)$$

também será diminuída. Assim, a força de Casimir será

$$F_{Cas} = -\frac{\partial E_{Cas}}{\partial L_p} = -\left[1 - \phi_0 - \frac{2}{3}\gamma L_p\right] \frac{\pi^2 A_p}{480L_p^4}. \quad (4.146)$$

Isto significa que a força de atração entre as placas devido ao efeito Casimir será enfraquecida, com relação ao caso do espaço plano[45], por uma pequena quantidade da ordem de γL_p , já que estamos considerando $\gamma \sim \mathcal{O}(M/R)^2$. Vale lembrar que, de acordo com o princípio da equivalência, fenômenos ocorridos na presença de um campo gravitacional são equivalentes àqueles ocorridos em referenciais acelerados, e isto significa esperar que essa diminuição da energia do vácuo também ocorra para fronteiras aceleradas, como no caso do já conhecido efeito Fulling-Davies-Unruh[47], tornando-se desta maneira num possível meio de medição (observação).

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação tratamos de fenômenos quânticos associados a campos escalares colocados no espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter. O primeiro fenômeno estudado foi a dinâmica do buraco negro, na região exterior à massa central, e sua relação com os modos normais de perturbações escalares, eletromagnéticas e gravitacionais. Estes modos surgem quando colocamos um desses campos para evoluir na região exterior à massa central do buraco negro, e esses campos perturbam o espaço ao seu redor. Mostramos como é essa perturbação e qual é a dependência dos coeficientes de transmissão e de reflexão com a constante cosmológica.

O efeito Casimir foi estudado no espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter, na aproximação de campo fraco. Nesse caso, consideramos um campo escalar sem massa confinado em uma região entre duas placas paralelas. Mostramos que a energia é dada pelo produto de dois termos: o primeiro corresponde, formalmente, ao resultado do espaço-tempo de Minkowski, com a diferença que a separação entre as placas é corrigida pelas grandezas massa e constante cosmológica; o segundo termo tem uma forma diferente do primeiro, mas também depende da massa e da constante cosmológica.

Os dois fenômenos estudados, a saber, os modos normais associados a campos externos (escalar, eletromagnético ou gravitacional) e a energia de Casimir, dependem da constante

cosmológica, assim como da massa do corpo central (buraco negro). Este resultado mostra de maneira clara como o campo gravitacional pode alterar a força de Casimir entre duas placas planas paralelas e descarregadas, mais especificamente, como esta depende da presença da constante cosmológica.

Trabalhos futuros podem tratar do efeito Casimir produzido por outros campos gravitacionais, tais como Kerr. Soluções cosmológicas também poderão ser consideradas, tais como Friedmann-Robertson-Walker, com diferentes topologias da seção espacial. Com relação aos modos normais, estes podem ser investigados também em outros cenários, como em buracos negros com rotação e em espaços-tempo gerados por defeitos topológicos.

Bibliografia

- [1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, Canada (1976).
- [2] A. Einstein, *Ann. Physik.* **49**, 769 (1916).
- [3] B.F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge (1985).
- [4] Robert M. Wald, *General Relativity*, Chicago University Press, Chicago (1984).
- [5] R. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, Oxford (1983).
- [6] H. B. G. Casimir, *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **51**, 793 (1948).
- [7] S. Perlmutter *et al.*, *Discovery of a Supernova Explosion at Half the Age of the Universe*, *Nature* **391**, 51 (1998).
- [8] C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Cambridge University Press, Cambridge (1985).
- [9] W. H. C. Freire, V. B. Bezerra and J. A. S. Lima, *Cosmological Constant, Conical Defect and Classical Tests of General Relativity*, ArXiv:gr-qc/0201036 (2002).
- [10] F. Kottler, *Ann. der Phys.* **56**, 410 (1918).
- [11] H. Reissner, *Ann. der Phys.* **50**, 106 (1916); G. Nordström, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* **20**, 1238 (1918).

- [12] R. Adler, *Phys. Rev. D* **14**, 392 (1976).
- [13] S. A. Hayward, T. Shiromizu and K. Nakao, *Phys. Rev. D* **49**, 5080 (1994).
- [14] R. H. Dicke and H. M. Goldberg, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 313 (1987).
- [15] J. N. Islam, *Phys. Lett. A* **97**, 239(1983).
- [16] Perlmutter, S. et al., *Nature* **391**, 51 (1998); Riess, A. G. et al. *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [17] Michel J., *On the Means of Discovering of Distance, Magnitude, etc. of the Fixed Stars*, impresso em *Black Holes: Selected Reprints*, pg.8, American Assoc. Physics Teachers, (1982).
- [18] T. Regge and J. A. Wheeler, *Stability of a Schwarzschild Singularity*, *Phys. Rev.* **108**, 1063 (1957).
- [19] K. D. Kokkotas and D. G. Schmidt, *Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes*, *Liv. Rev. Rel.* **2**, (1999).
- [20] V. Cardoso and J. P. S. Lemos, *Quasinormal Modes of $SadS$ Black Holes: Electromagnetic and Gravitational Perturbations*, *Phys. Rev. D* **64**, 084017 (2001).
- [21] S. Iyer and C. M. Will, *Phys. Rev. D* **12**, 3621 (1987).
- [22] L. A. Edelstein and C. V. Vishveshwara, *Phys.Rev. D* **12**, 3514 (1970).
- [23] W. H. Press, *Long Wave Trains of Gravitational Waves from a Vibrating Black Hole*, *Astrophys. J.* **170**, L105 (1971).
- [24] R. Ruffini, J.Tiommo and C. V. Vishveshwara, *Electromagnetic Field of a Particle Moving in Spherically Symmetric Black Hole Background*, *Nuovo Cimento* vol. 3, n. 5 (1972).

- [25] R. Ruffini, *Black Holes: les Astres Occlus*, Gordon & Breach, New York (1973).
- [26] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman & Company, San Francisco (1973).
- [27] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University, New York (1983).
- [28] F. Zerilli, *J. Math. Phys.* **11**, 2203 (1970).
- [29] J. Mathews, *J. Soc. Ind. Appl. Math.* **10**, 768 (1962).
- [30] S. L. Detweiler, *Sources of Gravitational Radiation*, Cambridge University Press, Cambridge (1979).
- [31] E. Leaver *J. Math. Phys.* **27**, 1238 (1986).
- [32] C. M. Bender and S. A. Orzsag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill, New York (1978).
- [33] S. C. Miller and R.H. Good, *Phys. Rev* **91**, 174 (1953).
- [34] F. Sorge, *Casimir Effect in a Weak Gravitational Field*, *Class. Quantum Grav.* **22**, 5109 (2005); A.A. Saharian and T. A. Vardanyan, *Casimir Densities for a Plate in de Sitter Spacetime*, *Class. Quantum Grav.* **26**, 195004 (2009).
- [35] A. N. Aliev, *Casimir Effect in the Spacetime of Multiple Cosmic Strings*, *Phys. Rev.* **D55**, 3903 (1997); R. Garattini, *Class. Quantum Grav.* **18**, 571 (2001).
- [36] M. R. Setare, *Casimir Effect for Scalat Fields with Robin Boundary Conditions in Schwarzschild Background*, *Class. Quantum Grav.* **20**, 441 (2005); A. A. Saharian and M. R. Setare, *Casimir Effect in de Sitter Spacetime with Compactified Dimension*, *Phys. Lett.* **B659**, 367 (2008).

- [37] C. Farina, M. V. Cougo-Pinto and A. C. Tort, *O Efeito Casimir*, Rev. Bras. Ens. Fís. **22**, 122 (2000).
- [38] M. Bordag, U. Mohideen and V. M. Mostepanenko, *New Developments in the Casimir Effect*, Phys. Rep. **353**, 1 (2001).
- [39] J. J. P. Sobrinho and A. C. Tort, *Uma Introdução aos Métodos de Cálculo da Energia de Casimir*, Rev. Bras. Ens. Fís. **23**, 401 (2001).
- [40] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Washington D. C. (1964).
- [41] A. A. Saharian, *The Generalized Abel-Plana Formula. Applications to Bessel Functions and the Casimir Effect*, ArXiv:hep-th/0002239 (2000).
- [42] D. Deutsch and P. Candelas, *Boundary Effects in Quantum Field Theory*, Phys. Rev. **D 20**, 3063 (1979).
- [43] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge (1982).
- [44] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York (1994).
- [45] K. A. Milton, *The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy*, World Scientific, River Edge, (2001); K. A. Milton, *Recent Developments in the Casimir Effect*, ArXiv:hep-th/08092564 (2008).
- [46] V. M. Mostepanenko and N. N. Trunov, *The Casimir Effect and its Applications*, Oxford University Press, Oxford (1997).
- [47] S. A. Fulling, *Nonuniqueness of Canonical Field Quantization in Riemannian Spacetime*, Phys. Rev. **D 7**, 2850 (1973); P. C. Davies, *Scalar Production in Schwarzschild and*

Rindler Metrics, J. Phys. A: Gen. Phys. **8**, 609 (1975); W. G. Unruh, *Notes on Black Hole Evaporation*, Phys. Rev. **D 14**, 870 (1976).