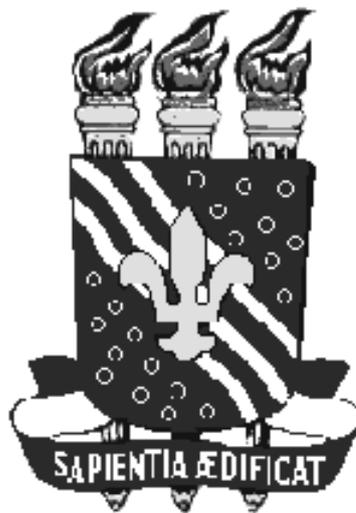


UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – UFPB
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – CCEN
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – CPGF



Dissertação de Mestrado

Indução de Cargas e Correntes via Dimensões Extras

Marco Aurélio dos Santos Cruz

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Dezembro de 2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – UFPB
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – CCEN
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – CPGF

Indução de Cargas e Correntes via Dimensões Extras

Marco Aurélio dos Santos Cruz

Dissertação de mestrado apresentada
à Coordenação do Programa de Pós-
graduação em Física da Universidade
Federal da Paraíba(UFPB) como parte
dos requisitos para a obtenção do grau de
Mestre em Física.

Orientador: Dr. Carlos Augusto Romero Filho

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Dezembro de 2008

C957i Cruz, Marco Aurélio dos Santos.
Indução de Cargas e Correntes via Dimensões Extras/
Marco Aurélio dos Santos Cruz.- João Pessoa, 2008.
52f. : il.
Orientador: Carlos Augusto Romero Filho
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1.Física. 2.Eletromagnetismo. 3.Teorias de imersão.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – UFPB
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – CCEN
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – CPGF

Indução de Cargas e Correntes via Dimensões Extras

Marco Aurélio dos Santos Cruz

Banca Examinadora:

Dr. Carlos Augusto Romero Filho (UFPB)

Dr. Valdir Barbosa Bezerra (UFPB)

Dr. Fábio de Melo Dahia (UFCEG)

Dr. Joel Batista da Fonseca Neto (Suplente-UFPB)

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Dezembro de 2008

À minha Mãe, que me deu a Vida e me ensinou a viver...

Agradecimentos

Bem, é um pouco complicado escrever aqui, pois existem tantas pessoas (e eventos!) que participaram da minha vida, de maneira boa ou ruim, que fica difícil enumerar... Mas vamos lá:

Em primeiro lugar à minha Mãe, razão de minha existência, e a minha família, porquê é minha família ora bolas... (falta de palavras para descrever.)

Em segundo aos meus amigos, que direta ou indiretamente contribuíram para me tornar a pessoa que sou hoje, e afastaram a “piema” infinita que tenho.

À Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba, pela oportunidade de cursar o mestrado.

Ao professor Dr. Carlos Augusto Romero Filho, por ter me dado a oportunidade e honra de ser seu orientando, e por ter me ensinado muito mais coisas do que apenas Relatividade Geral e Cosmologia.

Ao Seu Mariano, que pôde fornecer um café e um pastel para suportar as horas de sono, preguiça e tédio entre os estudos.

A mim mesmo também, pois se não fosse por mim eu não estaria aqui, não?

E finalmente, a todos que eu esqueci de mencionar, que direta ou indiretamente contribuíram para a formação da pessoa que sou hoje... Obrigado mesmo!

RESUMO

Neste trabalho investigamos a possibilidade de cargas e correntes serem induzidas a partir das dimensões extras em uma maneira análoga a algumas teorias de espaço-tempo de dimensão superior modernas. Porém, contrário a estas, as equações fundamentais a serem usadas são as equações de Maxwell no vácuo ao invés das equações de Einstein no vácuo. Examinamos então a capacidade das equações de Maxwell de gerar cargas e correntes no espaço-tempo quadridimensional (a brana). Concluímos então que isto é possível sob algumas condições.

ABSTRACT

In this work we investigate the possibility that charges and currents may be induced from extra dimensions in a way analogous to some modern higher-dimensional spacetime theories. However, unlike these, the fundamental equations to be used are the vacuum Maxwell equations instead of the vacuum Einstein equations. We then examine the capacity of the vacuum Maxwell equations to generate charges and currents in the four-dimensional spacetime (the brane). We conclude that this is possible under some conditions.

Sumário

1	Introdução	1
2	Teoria de Nordström da Gravitação	4
2.1	1° Teoria de Nordström	5
2.2	2° teoria de Nordström	6
2.3	formulação geométrica de Einstein-Fokker	8
2.4	Propriedades da Teoria de Nordström	10
2.5	Teorias escalares de gravitação hoje	11
2.6	Nordström e das dimensões extras.	12
3	Eletromagnetismo em dimensões extras: Caso plano	14
3.1	Teoria de Kaluza-Klein	14
3.2	Formulação do Problema	18
4	Eletromagnetismo em dimensões extras: Caso Curvo	24
4.1	Geometria da imersão: Curvatura extrínseca	24
4.2	Formulação do problema	29
5	Conclusão e perspectivas	31
A	Um pouco de Geometria (Riemanniana)	32
A.1	Variedades diferenciáveis	32

SUMÁRIO	vii
A.2 Espaço tangente e a estrutura métrica	33
A.3 Estrutura afim e a derivada covariante	36
A.4 O “Milagre”	39
Referências Bibliográficas	40

Capítulo 1

Introdução

A teoria da Relatividade Geral é uma das maiores realizações do século XX. Com ela, Albert Einstein mostrou que a gravidade é um efeito na tessitura do espaço-tempo, causada pelos objetos que residem nele. Um dos frutos dessa revolução apareceu em 1919, quando Theodor Kaluza propôs um modelo no qual a gravidade e o eletromagnetismo emergem de um cenário mais geral; o “preço” que ele pagou foi propor que vivemos em uma folha quadridimensional imersa em um espaço pentadimensional. A própria opinião de Einstein foi da euforia ao fracasso, mas a idéia persiste até os dias atuais, tornando-se mais sofisticada, pois apareceram novos problemas a serem resolvidos. Basicamente temos um espaço de dimensão maior, o *bulk*¹, cujo número total de dimensões varia com o modelo e, através de um processo de folheação o bulk é folheado em folhas quadridimensionais, e o nosso espaço-tempo é uma destas folhas. A seguir, usamos a Relatividade Geral no bulk, com uma pré-determinada geometria (os critérios de escolha ainda são um pouco obscuros) e após a projeção desta na folha obtemos um cenário no qual temos a relatividade geral na brana, mais “correções” que são interpretadas de acordo com o modelo citado.

¹Alguns autores traduzem este termo como *espaço ambiente*. Mas por falta de um termo melhor manteremos este ao longo do texto.

Exemplos destas teorias podem ser encontrados em [16, 19, 20, 21, 22, 23, 24].

Mas, antes mesmo da Relatividade Geral já se pensava em um cenário pentadimensional, bem como na idéia de unificação. A idéia é devido a Gunnar Nordström, que em 1914 propôs um modelo pentadimensional no qual unificava o eletromagnetismo e a gravitação escalar, na época a candidata mais promissora para uma teoria relativística da gravitação. Como Einstein só apresentaria a relatividade geral em 1915, a teoria que Nordström usou como fundamental no mundo pentadimensional foi o eletromagnetismo. Exatamente como a teoria de Kaluza-Klein, a gravitação escalar e o eletromagnetismo quadridimensional emergiriam deste cenário unificado. A teoria é interessante, mas acabou sendo relegada ao esquecimento, muito provavelmente devido ao aparecimento da relatividade geral em 1915, fazendo com que as teorias escalares de gravitação fossem aposentadas. Esta história é narrada com mais detalhes, por exemplo, em [1].

Mas agora podemos nos perguntar: Será que seria possível unificar a relatividade geral e o eletromagnetismo usando um modelo inspirado no de Nordström? Ou seja, será que a partir de uma teoria eletromagnética no bulk podemos derivar a relatividade geral e o eletromagnetismo em uma hipersuperfície quadridimensional? Olhando para a estrutura do eletromagnetismo, que é antissimétrica, vemos que não é possível, pois a relatividade geral possui o tensor de Einstein G_{ij} , que em princípio é simétrico. Uma resposta mais afirmativa no outro sentido seria formularmos a relatividade geral como uma teoria de gauge, mas este ainda é um problema em aberto [33]. A afirmativa aqui é que o eletromagnetismo também é uma teoria de gauge, e a teoria de Kaluza-Klein pode também ser formulada desta maneira, facilitando um pouco a compreensão de alguns de seus aspectos.

Apesar da resposta negativa, queríamos saber também se o eletromagnetismo poderia ainda ser usado sozinho neste contexto. A idéia é análoga com um modelo multidimensional particular, a teoria de matéria induzida, onde é proposto um

mecanismo clássico para o aparecimento da matéria no nosso espaço-tempo. Lá, a geometria do bulk, quando projetada na brana, gera termos que podem ser interpretados como fazendo parte de um tensor energia-momento efetivo. Um bom apanhado desta teoria pode ser encontrado em [16]. Então, temos outra pergunta: Será que a teoria eletromagnética no bulk, quando projetada na brana, é capaz de gerar cargas e correntes? A resposta a essa pergunta, o conteúdo desse manuscrito, é que é possível, mesmo pensando-se em um cenário completamente plano, o que não é possível no “análogo” gravitacional. Os resultados iniciais podem ser encontrados em [31, 32]. São resultados iniciais, visto que o problema não parece ser tão simples quanto pareceu no início. Estudos sobre a dimensionalidade do eletromagnetismo não são novos, e há alguns resultados interessantes em, por exemplo, [34, 35, 36], onde aparentemente temos sutis diferenças quando temos um espaço de dimensão par ou ímpar.

Este manuscrito está dividido da seguinte maneira. O capítulo seguinte é apenas uma revisão, de caráter histórico, das teorias de Nordström, e seu modelo pentadimensional de unificação. A seguir, exploramos essa idéia em um contexto plano e obtemos alguns resultados interessantes, mostrando que o próprio campo eletromagnético pentadimensional é uma fonte para as cargas e correntes induzidas na brana. O próximo capítulo é a exploração dessa mesma idéia em um cenário curvo, mostrando que há uma contribuição extra devido a geometria, aqui a curvatura extrínseca desempenhando um papel adicional. Daí finalizamos com uma visão das perspectivas futuras de estudo para obtermos uma resposta mais clara para as nossas indagações.

Capítulo 2

Teoria de Nordström da Gravitação

Com o advento da teoria da relatividade restrita, em 1905, começou-se a busca por uma maneira de incorporar a gravitação neste esquema. Antes da relatividade geral houveram várias idéias, mas apenas uma teve a aprovação como um esquema consistente. Tal teoria se deve a Gunnar Nordström, um físico finlandês que desenvolveu um modelo de gravitação escalar, que era coerente com a relatividade especial, tanto que foi apontada por ninguém menos que A. Einstein como uma boa candidata [1]. Exporemos aqui as suas duas tentativas, mostrando os fracassos e sucessos das mesmas. Em seguida, olharemos para uma analogia que Einstein, trabalhando junto com A. Fokker, faz mostrando que a teoria de Nordström pode ser derivada de uma teoria geométrica (as que ele obteve inicialmente na colaboração com M. Grossmann), e compararemos com a solução de Schwarzschild, a mais simples da relatividade geral. E finalmente, mostrar o primeiro modelo multidimensional de unificação das forças (erroneamente, a maioria das pessoas acredita que foram Theodor Kaluza (1919) e Oskar Klein (1921) os primeiros a fazê-lo), usando sua teoria escalar e as equações de Maxwell.

2.1 1° Teoria de Nordström

A primeira idéia de Nordström foi simplesmente pegar a equação de Poisson não relativística¹

$$\nabla^2 \phi = -\rho, \quad (2.1)$$

onde ρ é a densidade de matéria, e ∇^2 o laplaciano, e converter para

$$\square \phi = \rho, \quad (2.2)$$

com $\square = \partial_i \partial^i$ sendo o D'Alembertiano². O movimento das partículas é então dado por³

$$\frac{d}{d\tau}(mu_i) = F_i = m\partial_i \phi. \quad (2.3)$$

Com isto posto, vamos extrair alguns resultados. Desenvolvendo (2.3), temos que

$$m\partial_i \phi = \dot{m}u_i + m\dot{u}_i, \quad (2.4)$$

onde o termo com \dot{m} é em princípio, inexistente na teoria Newtoniana. Lembrando que $u_i u^i = 1$ (as teorias de Nordström, ao contrário de suas “rivais”, admitiam que a velocidade da luz era uma constante universal [1]), temos que (2.4) toma a forma

$$mu^i \partial_i \phi = \dot{m}u_i u^i + m\dot{u}_i u^i \Rightarrow m\dot{\phi} = \dot{m}. \quad (2.5)$$

(pois $u_i u^i = 1 \Rightarrow \dot{u}_i u^i = 0$.) Integrando (2.5) obtemos

$$m = e^\phi, \quad (2.6)$$

e (2.4) toma a forma

$$\partial_i \phi = \dot{\phi} u_i + \dot{u}_i. \quad (2.7)$$

¹A menos que se diga o contrário, estamos usando um sistema de unidades tal que $4\pi G = c = 1$.

²Novamente, salvo menção contrária, os índices serão todos latinos, minúsculos variando de 0 até 3, maiúsculos de 0 a 4. A assinatura da métrica ao longo do trabalho é $(+ - - -)$.

³Aqui suporemos que o leitor é familiar com a teoria da relatividade restrita. Em caso negativo, podemos recomendar [2, 3, 4].

Assim, o princípio de equivalência é satisfeito, ao preço da dependência de m com o campo gravitacional (2.6). Inicialmente Nordström não viu problema nisso, pois achou que essa dependência era análoga à dependência de m com a velocidade na relatividade restrita.

Mesmo assim, a 1ª teoria foi abandonada pelas seguintes razões:

- (a) Ela não vêm de um princípio variacional. Isto é um problema porquê a teoria Newtoniana o é. Para relembrar, a lagrangiana do campo gravitacional é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} |\vec{\nabla}\phi|^2 - \rho\phi; \quad (2.8)$$

- (b) \square é um invariante frente às transformações de Lorentz, mas ρ não é, como apontou Einstein na época;
- (c) A equação (2.2) é linear. Mas o campo gravitacional transporta energia, e como Einstein mostrou que energia é proporcional a massa, esta deve gravitar. Isso exige que a equação seja não-linear.

Assim, a 1ª foi descartada, e Nordström foi para a segunda tentativa.

2.2 2ª teoria de Nordström

Como Einstein apontou, ρ não é um escalar de Lorentz. Assim, a segunda tentativa de Nordström foi propor que $\rho = f(\phi)T$ onde T é o traço do tensor energia-momento da matéria, e $f(\phi)$ uma função desconhecida do campo gravitacional. Com a ajuda de von Laue e Einstein ([5] e referências contidas lá), ele encontrou o valor $f(\phi) = 1/\phi$, e a equação (2.2) toma a forma

$$\phi\square\phi = -T, \quad (2.9)$$

que é não-linear.

Agora o movimento das partículas pode ser obtido de um princípio variacional. O movimento no campo gravitacional pode ser obtido a partir de

$$\delta \int \phi ds = 0, \quad (2.10)$$

onde $ds = \sqrt{u_i u^i} d\tau$. Temos a equação de movimento

$$\dot{\phi} u_i + \phi \dot{u}_i = \partial_i \phi, \quad (2.11)$$

que satisfaz o princípio de equivalência. Vemos que esta teoria⁴ é totalmente covariante, e é consistente. Para ver isso, vamos usar um raciocínio devido a Einstein: Suponha que estamos estudando um objeto de massa m distribuída em certo volume V . Assim, temos que

$$T^{ij} \rho \phi u^i u^j, \quad (2.12)$$

cujo traço e divergência são

$$T = \rho \phi, \quad \partial_i T^{ij} = \partial_i (\rho \phi u^i u^j) = \rho \frac{d}{d\tau} (\phi u^j), \quad (2.13)$$

onde o termo $\partial_i (\rho u^i)$ é nulo devido à conservação de matéria. com a ajuda de (2.11), a segunda igualdade de (2.13) toma a forma

$$\partial_i T^{ij} = \frac{T}{\phi} \partial^j \phi. \quad (2.14)$$

Se o campo gravitacional tem a lagrangiana

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \partial_i \phi \partial^i \phi, \quad (2.15)$$

temos o tensor energia-momento canônico

$$t_\phi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial (\partial_i \phi)} \partial^j \phi - \mathcal{L}_\phi \eta^{ij} = \partial^i \phi \partial^j \phi - \frac{1}{2} \eta^{ij} \partial_k \phi \partial^k \phi, \quad (2.16)$$

⁴A partir deste ponto, vamos nos referir à teoria de de Nordström sem mencionar que é a segunda, salvo menção contrária.

que possui divergência

$$\partial_i t_\phi^{ij} = \square \phi \partial^j \phi. \quad (2.17)$$

Somando (2.14) e (2.17), temos a conservação do sistema:

$$\partial_i T^{ij} + \partial_i t_{ij} \phi = 0, \quad (2.18)$$

onde usamos a equação de campo (2.9). Assim, a teoria é consistente, e satisfaz as leis de conservação usuais. Em particular, (2.9) vem da lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_i \phi \partial^i \phi - \rho \phi, \quad (2.19)$$

o que é facilmente verificável. A partir daí, Einstein mostra sua aprovação, e a teoria de Nordström torna-se uma boa candidata para uma teoria relativística da gravitação.

Mas agora temos outro problema: Não temos desvio da luz, ou qualquer efeito gravitacional devido a material eletromagnético! Isso se deve ao fato de termos o traço do tensor energia-momento nas equações, e sabe-se que tal material possui o tensor de traço nulo. Sua outra falha, como exporemos mais tarde, é que ela não faz previsões corretas para os chamados “testes de sistema solar”, cruciais para a aprovação da relatividade geral. Mas antes de expor como efetuar tais cálculos, mostraremos que a teoria de Nordström é “equivalente” a uma teoria geométrica, resultado mostrado por Einstein e Fokker em 1914.

2.3 formulação geométrica de Einstein-Fokker

Em 1914, A. Fokker e A. Einstein [6] perceberam o seguinte fato: se pensarmos no elemento de linha

$$ds^2 = \phi^2 \eta_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.20)$$

isto é, uma transformação conforme na métrica de Minkowski η_{ij} . Supondo que a geometria deste último espaço é riemanniana, podemos obter o escalar de curvatura⁵ \bar{R} , que é igual a

$$\bar{R} = -\frac{6}{\phi^3} \square \phi. \quad (2.21)$$

(Aqui \square é o D'Alembertiano relativo a η_{ij} .)

Agora, vamos ver como o tensor energia-momento transforma-se perante (2.20). Calcularemos apenas o traço, pois é o que nos interessa⁶. Sabemos que, dada a lagrangiana da matéria L_M , e tensor energia-momento pode ser obtido através de

$$T_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta L_M}{\delta g^{ij}}. \quad (2.22)$$

(Aqui g é o determinante da métrica g_{ij} , e δ é a derivada funcional.) Efetuando a transformação conforme

$$\bar{g}_{ij} = \phi^2 g_{ij}, \quad (2.23)$$

o novo tensor \bar{T}_{ij} é definido da mesma maneira que em (2.22), com a nova métrica \bar{g} . Usando a regra da cadeia, podemos escrever

$$\bar{T}_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{|\bar{g}|}} \frac{\delta \bar{L}_M}{\delta \bar{g}^{ij}} = -\frac{1}{\sqrt{|\bar{g}|}} \frac{\partial g^{kl}}{\partial \bar{g}^{ij}} \frac{\delta L_M}{\delta g^{kl}}, \quad (2.24)$$

com $\bar{L}_M = \bar{L}_M(\bar{g}_{ij}) = \bar{L}_M(\phi^2 g_{ij}) = L_M(g_{ij})$. Usando (2.23) chegamos a

$$\bar{T}_{ij} = \phi^{-2} T_{ij}, \quad (2.25)$$

e obtemos a relação entre os traços desejada:

$$\bar{T} = \phi^{-4} T. \quad (2.26)$$

Agora, usando (2.21) e (2.25) em (2.9), chegamos a

$$\bar{R} = 6\bar{T}, \quad (2.27)$$

⁵Para o leitor não familiarizado com geometria, temos o apêndice A.

⁶Uma exposição mais elaborada de transformações conformes pode ser encontrada, por exemplo, em [7].

ou seja, a teoria de Nordström é equivalente a uma teoria geométrica (em comparação com a chamada colaboração Einstein-Grossmann).

Finalmente, podemos formular a teoria de Nordström de uma maneira totalmente geométrica. Usando o tensor de Weyl⁷ C_{ijkl} , podemos escrever as equações

$$R = 6T, \quad C_{ijkl} = 0 \quad (2.28)$$

2.4 Propriedades da Teoria de Nordström

Como falado anteriormente, a teoria de Nordström, apesar de ser uma teoria consistente, falha nos chamamos “testes de sistema solar”. Vamos mostrar como efetuar os cálculos para um corpo esfericamente simétrico de massa m , e comparar com a solução de Schwarzschild. Os cálculos são efetuados da mesma maneira que na relatividade geral, devido a equivalência mostrada anteriormente.

Neste ponto, temos que resolver (2.9) e (2.20), que são

$$\square\phi = 0, \quad ds^2 = \phi^2 \eta_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.29)$$

Como o sistema é estático e, para facilitar, vamos efetuar a mudança $\phi = e^\varphi$, ficamos com

$$\nabla^2\varphi = 0, \quad ds^2 = e^{2\varphi} \eta_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.30)$$

No limite de campo fraco, $g_{00} \approx 1 + 2\Phi$ (com Φ sendo o potencial Newtoniano) de maneira que temos

$$e^{2\varphi} \approx 1 + 2\varphi = 1 - \frac{2m}{r} \Rightarrow \varphi = -\frac{m}{r}. \quad (2.31)$$

Com isso, (2.30) toma a forma, em coordenadas esféricas,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{m}{r}\right) (dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2). \quad (2.32)$$

⁷Tal tensor aparece na chamada decomposição de Ricci da curvatura, e diz se a variedade em questão é ou não conformalmente plana.

Em princípio, podemos trabalhar com (2.32) diretamente. Mas as coordenadas não estão bem definidas, pois podemos ver que, por exemplo, as áreas das esferas $r = cte$, $t = cte$ não são iguais a $4\pi r^2$. Para remediar este problema, vamos fazer a mudança (chamada mudança de Schwarzschild)

$$\hat{r} = r \left(1 - \frac{m}{r}\right) \quad (2.33)$$

e (2.32) toma a forma

$$ds^2 = \left(1 + \frac{m}{\hat{r}}\right)^{-1} (dt^2 - d\hat{r}^2) - \hat{r}^2 d\Omega^2 \quad (2.34)$$

e \hat{r} torna-se a coordenada radial usual. Agora, o estudo é totalmente análogo ao caso de Schwarzschild, que é o estudo das geodésicas nulas e tipo-tempo. Neste ponto, vamos apenas expor os resultados, já comparando com os obtidos pela relatividade geral:

	Nordström	Relatividade Geral
Ângulo de desvio da luz	0	$\Delta\phi = \frac{4m}{R}$
Desvio para o vermelho	$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{m}{r}$	$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{m}{r}$
Atraso temporal	$\Delta t = 2m$	$\Delta t = 2m \left(1 + \log\left(4\frac{R_1 R_2}{R^2}\right)\right)$
Precessão do Periélio	$\Delta\phi_p = -\frac{\pi m}{R}\omega$	$\Delta\phi_p = 6\frac{\pi m}{R}\omega$

2.5 Teorias escalares de gravitação hoje

Apesar do fracasso da teoria de Nordström, ainda há interesse em teorias escalares, como podemos ver por exemplo em [8] (e referências lá). Por isso, vamos generalizar um pouco do exposto até agora. Com esse intuito, (2.19) toma a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_i \phi \partial^i \phi - \rho A(\phi), \quad (2.35)$$

onde agora temos a função $A(\phi)$, que deve ser tal que $A(\phi) \rightarrow \phi$ no limite de campo fraco. A equação de campo é

$$\square\phi = -A'\rho. \quad (2.36)$$

($A'(\phi) = \frac{dA}{d\phi}$.) Agora, o traço do tensor energia-momento da matéria é modificado para $T = \rho A(\phi)$, de maneira que temos

$$A(\phi)\square\phi = -A'T. \quad (2.37)$$

Como era de se esperar, nenhuma destas teorias prevê o desvio da luz nem o valor correto da precessão orbital.

2.6 Nordström e das dimensões extras.

Contrário ao pensamento corrente, não foram Theodor Kaluza e Oskar Klein os primeiros a terem idéias relativas às dimensões extras. Já em 1914, Nordström idealizou uma teoria pentadimensional um que havia uma unificação do eletromagnetismo e sua teoria escalar da gravitação. Com o advento da relatividade geral em 1915, as teorias escalares foram “banidas” do cenário, bem como (provavelmente) a idéia de unificação de Nordström. Agora, vamos ver como ela funciona.

Basicamente, ele pensava que as duas interações citadas anteriormente eram partes da teoria de Maxwell em 5 dimensões, ditada pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{AB}F^{AB} - J_B A^B, \quad (2.38)$$

com $F_{AB} = \partial_A A_B - \partial_B A_A$ o tensor eletromagnético em 5 dimensões, $A_A = (A_a, \phi)$ e $J_A = (J_a, \rho)$ os pentavetores potencial e densidade de corrente, respectivamente. As equações de campo são, após a variação de (2.38),

$$\partial_A F^{AB} = J^B, \quad (2.39)$$

equações de Maxwell no espaço pentadimensional. Para desacoplarmos as equações, Nordström postulou uma espécie de “condição de cilindridade” (análoga à da teoria de Kaluza-Klein), em que todos os campos envolvidos não dependeriam da coordenada extra (suposta tipo-espaço). Com isto, temos exatamente as equações de

Maxwell usuais e a equação (2.2). E embora essa idéia de unificação seja boa (Como Einstein apontou no primeiro exame da teoria de Kaluza-Klein [1]), ela foi sepultada junto com as teorias escalares em 1915, reaparecendo de maneira independente no trabalho inicial de Theodor Kaluza, em 1919.

Capítulo 3

Eletrromagnetismo em dimensões extras: Caso plano

Até aqui, fizemos um apanhado bem geral das idéias de Nordström. Agora, vamos olhar para o eletromagnetismo, para saber se é possível, a partir da idéia de dimensões extras, “gerar” cargas e correntes. Para formular com mais clareza a pergunta, vamos relembrar um pouco da teoria de Kaluza-Klein, e esboçar algumas das idéias das teorias modernas em dimensões extras.

3.1 Teoria de Kaluza-Klein

Como vimos, Nordström foi o primeiro a pensar em um modelo de mundo com 5 dimensões, no qual a nossa realidade é apenas uma subvariedade quadridimensional. Mas devido a vários fatores, ela acabou sendo relegada ao esquecimento, e assim conta-se como primeira a idéia de Theodor Kaluza, que em 1919¹ usou a relatividade geral em um cenário pentadimensional para unificar a gravitação e o

¹Apesar do artigo ter sido publicado em 1921, ele já mantinha contato com Einstein sobre a idéia [1].

eletromagnetismo.

Faremos apenas um breve apanhado da teoria, seguindo basicamente [15, 16], e referências lá. O nosso espaço fundamental é o \mathbb{M}^5 , com estrutura Lorentziana. Nele, escrevemos o seguinte elemento de linha

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j - \phi^2(kA_i dx^i + dl)^2, \quad (3.1)$$

onde k é uma constante de acoplamento, $\phi = \phi(x^A)$ é um campo escalar, $A_i = A_i(x^A)$ é um campo vetorial, que identificaremos mais tarde com o potencial vetor do eletromagnetismo, e $g_{ij} = g_{ij}(x^A)$ a métrica do nosso espaço-tempo, suposto uma subvariedade quadridimensional de \mathbb{M}^5 .

Uma primeira imposição que temos é a chamada *condição de cilindricidade*: Todas as funções envolvidas em (3.1) não dependem da coordenada extra $x^4 = l$. As equações de geodésica são, a partir da variação de (3.1),

$$x^4 = l \rightarrow \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{l}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l} = 0 \rightarrow \frac{\Omega'}{m} = \phi^2(\dot{l} + kA_i \dot{x}^i), \quad (3.2)$$

$$x^A = x^i \rightarrow \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0 \rightarrow \ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = \frac{\Omega'}{m} k F^i_j \dot{x}^j - \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega'}{m} \right)^2 \phi^{-3} \partial^i \phi, \quad (3.3)$$

onde (3.2) é uma constante de movimento que Klein, em seus trabalhos, compara com a carga elétrica, e $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$, que é identificado com o tensor do campo eletromagnético. Notamos que as equações de geodésica sobre \mathbb{M}^4 , (3.3), estão modificadas pela presença do tensor eletromagnético acoplado com o campo escalar ϕ . Vamos agora analisar o seguinte conjunto de transformações sobre (3.1):

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{M}^5 &\rightarrow \mathbb{M}^5, \\ x^i &\mapsto x^i, \\ l &\mapsto l + f(x^i). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Se ψ for uma isometria, ela induz as seguintes transformações em ϕ e A_i :

$$\phi \mapsto \phi, \quad (3.5)$$

$$A_i \mapsto A_i - \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (3.6)$$

Assim, vemos que (3.6) nada mais é que uma transformação de gauge do potencial A_i , que foi recuperada como uma classe de isometrias de (3.1).

A seguir, podemos obter as equações de campo, considerando a seguinte ação de Einstein-Hilbert em \mathbb{M}^5 :

$$S = -\frac{1}{k^2 L} \int_{\mathbb{M}^5} \tilde{R} \sqrt{|\tilde{g}|} d^5 x, \quad (3.7)$$

onde $\tilde{R} = g^{AB} R_{AB}$ é o escalar de curvatura em \mathbb{M}^5 , e \tilde{g} é o determinante da métrica (3.1). A idéia que ajuda aqui é a condição que Klein sugere, que é postular que l seja periódica, ou seja, $0 \leq l \leq 2\pi r = L$ (em outras palavras, $l \notin \mathbb{R}$, e sim $l \in S^1$), de maneira que podemos fazer a decomposição $\mathbb{M}^5 = \mathbb{M}^4 \times S^1$. Com isto em mãos, podemos fazer

$$\sqrt{|\tilde{g}|} d^5 x = \sqrt{|g|} \phi^{-1/2} d^4 x dl, \quad (3.8)$$

com $g = \det(g_{ij})$. Então, em (3.7), efetuando a integral em S^1 ,

$$S = \int_{\mathbb{M}^4} \left(\frac{1}{k^2} R + \frac{1}{4} \phi^3 F_{ij} F^{ij} - \frac{3}{2k^2 \phi^2} (\nabla \phi)^2 \right) \phi^{-1/2} \sqrt{|g|} d^4 x. \quad (3.9)$$

E temos que, comparando com a ação de Einstein-Hilbert usual, $k^2 = 16\pi G$. Tomando variações relativas a g_{ij}^2 , A_i , e ϕ , encontramos as equações de campo:

$$G_{ij} = \frac{(k\phi)^2}{2} T_{ij} - \frac{1}{\phi} (\nabla_i \nabla_j \phi - g_{ij} \square \phi), \quad (3.10)$$

$$\nabla_i F^{ij} = -3 \frac{\nabla_i \phi}{\phi} F^{ij}, \quad (3.11)$$

$$\square \phi = -\frac{(k\phi)^2}{4} \phi F_{ij} F^{ij}, \quad (3.12)$$

²Aqui estamos supondo uma conexão de Levi-Civita, que depende somente da métrica.

com T_{ij} o tensor energia-momento associado ao campo eletromagnético F_{ij} , ∇ a derivada covariante e \square o D'Alembertiano em \mathbb{M}^4 , e G_{ij} o tensor de Einstein. Podemos ver que o campo eletromagnético aparece acoplado com o campo escalar ϕ , algo intrínseco da teoria. O limite $\phi \rightarrow 1$ é simples de ser tomado, basta refazermos as variações com $\phi = 1$, e chegamos à famosa unificação da gravitação com o eletromagnetismo proposta inicialmente por Kaluza.

Daí vieram várias idéias, como por exemplo a teoria de Klein (1938), de interações fracas, até o aparecimento das teorias de Yang-Mills, onde temos S^1 substituído por um grupo de Lie \mathcal{G} compacto, e uma formulação em termos de fibrados. Não as exporemos aqui, mas o leitor interessado pode encontrar exposições em [17, 15, 18, 26].

Como idéias mais recentes, temos:

(a) **Teoria de branas:** Aqui a idéia é que moramos em uma subvariedade \mathbb{M}^4 imersa em um espaço de cinco (ou mais) dimensões. Chamados de modelos de Randall-Sundrum, mundos-brana (*braneworlds*), ou simplesmente teorias de branas, eles afirmam que a matéria vive confinada na subvariedade, e somente a gravidade (e as vezes nem ela) pode “escapar” da brana. Estes modelos apareceram na tentativa de resolver o chamado *problema da hierarquia*³, e gozam de relativo sucesso e interesse no cenário atual de pesquisa. Para uma leitura detalhada, temos [21, 22].

(b) **Matéria Induzida:** Aqui, a idéia é semelhante a Kaluza-Klein, com o diferencial de que há “criação” de matéria além da eletromagnética, devido a geometria. Basicamente, a imersão de M^4 em M^5 gera, através de um processo análogo ao de Kaluza-Klein, termos que podem ser identificados como “fontes”,

³Muito por alto, trata do porquê a intensidade da interação gravitacional é tão pequena, quando comparada com as outras interações fundamentais.

i. é, um tensor energia-momento efetivo. Em miúdos,

$$R_{AB} = 0 \Rightarrow G_{ij} = kT_{ij}, \quad (3.13)$$

onde T_{ij} depende, basicamente, da curvatura extrínseca e das componentes extras da métrica pentadimensional g_{AB} . Tal processo de criação é sempre possível devido ao teorema de Campbell-Magaard, que garante a imersão. Depois deste modelo inicial, várias classes de \mathbb{M}^5 (o primeiro foi no qual \mathbb{M}^5 tenha curvatura de Ricci nula) foram estudadas, dando a teoria a diversidade e sucesso que também goza hoje (para mais detalhes, veja por exemplo [16, 27, 28] e referências nestes).

3.2 Formulação do Problema

Bem, com isto exposto, podemos reformular melhor o nosso problema. Vamos iniciar com \mathbb{M}^5 , um espaço pseudo-euclidiano com cinco dimensões e coordenadas $x^A = (x^a, x^4 = l)^4$, folheado por um conjunto de hipersuperfícies Σ isometricamente imersas. Vamos tomar uma dessas folhas Σ_0 em particular, situada em $l = l_0$, e de coordenadas x^a , e imaginar que essa folha é precisamente o nosso espaço-tempo. Agora, temos o pentavetor $A^A = (A^a, A^4 = \phi)$, e o “campo eletromagnético” $F^{AB} = \partial^A A^B - \partial^B A^A$, de tal maneira que as equações de Maxwell

$$\partial_A F^{AB} = 0 \quad (3.14)$$

dão a dinâmica de A^A em \mathbb{M}^5 .

Vamos olhar (3.14) com mais calma. Em termos de (A^a, ϕ) , temos o conjunto de equações⁵:

$$\partial_A F^{Ab} = \partial_a F^{ab} + \partial_4 F^{4b} = 0 \Rightarrow \partial_a F^{ab} = \frac{\partial^2 A^b}{\partial l^2} + \partial^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial l} \right), \quad (3.15)$$

$$\partial_A F^{A4} = \partial_a F^{a4} = 0 \Rightarrow \square \phi = -\frac{\partial}{\partial l} (\partial_a A^a), \quad (3.16)$$

⁴Uma temporal e quatro espaciais. A dimensão extra aqui é tipo espaço.

⁵Lembrando que os índices são levantados (baixados) com η^{AB} (η_{AB}), ou com η^{ab} (η_{ab}).

com $\square = \partial_a \partial^a$ sendo o D'Alembertiano em Σ . Assim, procedendo de maneira análoga à Kaluza-Klein, tomamos o valor $l = l_0$ e temos que (3.15) são as equações de Maxwell usuais, com o lado direito sendo identificado com a densidade de corrente $j^a(x^b)$. E a equação (3.16) é um vínculo adicional que A^A deve satisfazer.

Agora, vem o cerne da questão: É possível induzir qualquer corrente $j^a(x^b)$, de maneira análoga ao processo de matéria induzida? Sabemos que lá o problema pe resolvido com o uso do teorema de Campbell-Magaard. Aqui, podemos resolver o problema da seguinte maneira: Olhando para (3.15) e (3.16), o que temos que fazer é resolver o sistema de maneira a obter (A^a, ϕ) , dada uma certa corrente $j^a(x^b)$. Dito de outra maneira, temos que resolver, sob Σ_0 , o sistema:

$$\frac{\partial^2 A^b}{\partial l^2} = \partial_a F^{ab} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^b \partial l}, \quad (3.17)$$

$$\square \phi = -\frac{\partial}{\partial l}(\partial_a A^a), \quad (3.18)$$

com a restrição $\partial_a F^{ab}|_{l=l_0} = j^b(x^c)$. Podemos ver que há um pequeno problema aqui: temos 5 incógnitas (os A^A), mas apenas 4 equações, (3.17). A equação (3.18) não é da mesma ordem que as anteriores, portanto é um vínculo entre as derivadas primeiras em l . Podemos resolver este problema de duas maneiras:

- i) Usando a liberdade das transformações de gauge de A^A . De fato, indo para um gauge de “Lorentz’’ pentadimensional,

$$\partial_A A^A = 0, \quad (3.19)$$

podemos reescrever o sistema (3.17, 3.18) da forma

$$\frac{\partial^2 A^b}{\partial l^2} = \partial_a F^{ab} + \partial^b(\partial_a A^a), \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial l^2} = \square \phi, \quad (3.21)$$

que agora não tem problema. Claro que estamos “trocando seis por meia dúzia’’, pois estamos apenas trocando o vínculo (3.18) por (3.19). Mas é

possível mostrar que esse vínculo é satisfeito, e portanto podemos resolver sem problema algum. Como sabemos qual transformação foi efetuada, basta apenas “desfazer” a transformação e obter a solução final.

- ii) Especificando ϕ , que é quem não podemos determinar. Assim, resolvemos diretamente (3.17), com (3.18) sendo um vínculo a ser satisfeito.

Independente do método, temos que resolver um sistema de equações diferenciais parciais. A solução é garantida com o uso do seguinte teorema:

Teorema 1 (Cauchy-Kovalevskaya) *Sejam (x^a, l) coordenadas de \mathbb{M}^5 , e considere o sistema de equações diferenciais parciais para o conjunto de funções desconhecidas $f^A(x^a, l)$, da forma*

$$\frac{\partial^2 f^A}{\partial l^2} = F^A \left(l, x^a, \frac{\partial f^B}{\partial l}, \frac{\partial f^B}{\partial x^a}, \frac{\partial^2 f^B}{\partial l \partial x^a}, \frac{\partial^2 f^B}{\partial x^a \partial x^b} \right). \quad (3.22)$$

Se F^A é uma função analítica, e são dadas as condições iniciais (também analíticas), em torno de um dado $l = l_0$,

$$h^A(x^a) = f^A(x^a, l_0), \quad g^A(x^a) = \frac{\partial f^A}{\partial l}(x^a, l_0). \quad (3.23)$$

(Uma prova deste teorema pode ser encontrada em [29, 30].)

Aqui vamos usar a segunda opção, por simplicidade. Fixando $\phi = 0$, temos as equações:

$$\frac{\partial^2 A^b}{\partial l^2} = \partial_a F^{ab}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial l}(\partial_a A^a) = 0. \quad (3.25)$$

Usando o teorema de Cauchy-Kovalevskaya, podemos escrever as componentes restantes do campo na forma analítica em torno de $l = l_0$,

$$A^b(x^a, l) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{A}_n^b(x^a) (l - l_0)^n, \quad (3.26)$$

onde os coeficientes $\mathcal{A}_n^b(x^a)$ vamos determinar pro iteração direta. Como queremos induzir as equações de Maxwell na brana Σ_0 , temos que

$$\left. \frac{\partial^2 A^b}{\partial l^2} \right|_{l=l_0} = \partial_a F^{ab}|_{l=l_0} = \frac{4\pi}{c} j^b(x^i) = \mathcal{A}_2^b(x^i); \quad (3.27)$$

derivando (3.24) obtemos, novamente em $l = l_0$,

$$\left. \frac{\partial^3 A^b}{\partial l^3} \right|_{l=l_0} = \partial_a \left(\left. \partial^a \frac{\partial A^b}{\partial l} \right|_{l=l_0} - \left. \partial^b \frac{\partial A^a}{\partial l} \right|_{l=l_0} \right) = \mathcal{A}_3^b(x^i). \quad (3.28)$$

Esta derivada é um termo adicional, e deve satisfazer (3.25). Podemos escrevê-lo usando os outros coeficientes. O primeiro termo é

$$\left. \frac{\partial A^b}{\partial l} \right|_{l=l_0} = v^b(x^a) = \mathcal{A}_1^b(x^a), \quad (3.29)$$

e a condição (3.25) é equivalente a exigência de quadridivergência nula de v^b . Com isto, podemos escrever (3.28) como

$$\left. \frac{\partial^3 A^b}{\partial l^3} \right|_{l=l_0} = \square v^b(x^a). \quad (3.30)$$

A quarta derivada, por outro lado, tem a forma:

$$\left. \frac{\partial^4 A^b}{\partial l^4} \right|_{l=l_0} = \partial_a \left(\left. \partial^a \frac{\partial^2 A^b}{\partial l^2} \right|_{l=l_0} - \left. \partial^b \frac{\partial^2 A^a}{\partial l^2} \right|_{l=l_0} \right) = \mathcal{A}_4^b(x^i). \quad (3.31)$$

Usando (3.27) e lembrando que, como $j^a(x^i)$ é uma quadricorrente, tem quadridivergência nula. Este termo é então

$$\left. \frac{\partial^4 A^b}{\partial l^4} \right|_{l=l_0} = \frac{4\pi}{c} \square j^b(x^i). \quad (3.32)$$

E assim sucessivamente, podemos calcular todos os termos da série em termos de v^a e j^a . A forma final dessa série é

$$A^b(x^i, l) = \mathcal{A}_0^b(x^i) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\square^k v^b(x^i)}{(2k+1)!} (l-l_0)^{2k+1} + \frac{4\pi}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\square^{k-1} j^b(x^i)}{(2k)!} (l-l_0)^{2k}. \quad (3.33)$$

(\square^n significa que o D'Alembertiano foi aplicado n vezes.)

Agora podemos tirar informações importantes: O valor $\mathcal{A}_0^b(x^i)$ nada mais é o que o potencial eletromagnético que é induzido na brana, e ele satisfaz as equações de Maxwell sobre a mesma com uma fonte de corrente $j^b(x^i)$, e que a liberdade de gauge também é induzida em sua totalidade na brana. Para ver isto, basta lembrarmos que o tensor eletromagnético induzido é da forma

$$\mathcal{F}^{ab}(x^i) = \partial^a \mathcal{A}_0^b(x^i) - \partial^b \mathcal{A}_0^a(x^i), \quad (3.34)$$

que é claramente invariante por transformações do tipo $\mathcal{A}^a(x^i) \rightarrow \mathcal{A}^a(x^i) + \partial^a f(x^i)$.

Finalmente, temos uma “restrição” adicional: Usualmente, espera-se que as teorias de imersão tenham uma certa simetria de reflexão, a famosa simetria \mathbb{Z}_2 , que intuitivamente quer dizer que não faz diferença de que “lado” da brana nos encontramos. Podemos ver que o potencial compartilha desta, se $v_b = 0$. Esta escolha é uma das escolhas possíveis, pois o valor de v^b é um valor a ser precisado, de acordo com o teorema de Cauchy-Kovalevskaya. A nossa solução toma a forma:

$$A^b(x^i, l) = \mathcal{A}_0^b(x^i) + \frac{4\pi}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\square^{k-1} j^b(x^i)}{(2k)!} (l - l_0)^{2k}. \quad (3.35)$$

Para finalizar, mostramos que, dada uma corrente $j^a(x^i)$, que descreve fisicamente certa configuração de cargas e correntes, gera os potenciais $A^A(x^i, l) = (A^a(x^i, l)\phi(x^i, l))$. Aqui escolhemos o potencial particular $\phi = 0$, o que, como exposto, não tira a generalidade do método. E vemos que estes potenciais obtidos são tais que, quando nos restringimos à brana, obtemos exatamente as equações de Maxwell, suportada pela fonte $j^a(x^i)$. Assim respondemos à nossa pergunta inicial, mostrando que existe a possibilidade, de maneira totalmente análoga ao cenário de Matéria Induzida, gerar cargas e correntes em uma brana a partir da dimensionalidade extra do espaço. A beleza do resultado é que, ao contrário dos modelos de dimensões extras, não temos nenhuma geometria excepcional; o nosso espaço é

totalmente de Minkowski, e a geração é devido única e exclusivamente aos campos envolvidos [31].

Capítulo 4

Eletrromagnetismo em dimensões extras: Caso Curvo

Até aqui, induzimos cargas e correntes em um cenário plano com sucesso. Agora, podemos nos perguntar se isso também é possível se as variedades envolvidas forem curvas. Para fazer isso, vamos falar antes de imersões, bem como a relação entre as geometrias das variedades, supostas Riemannianas. Assumiremos que o leitor é familiar com a chamada “geometria intrínseca”, e a notação usada é padrão¹.

4.1 Geometria da imersão: Curvatura extrínseca

Aqui, sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensão m e n . Uma aplicação diferenciável $\phi : M \rightarrow N$ é dita uma *imersão*² se:

- (i) A diferencial $d\phi : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N$ é injetiva (em particular, o posto de $d\phi$ é m ,

¹Para o leitor desfamiliarizado com tais conceitos, recomendamos a leitura prévia do Apêndice A, ou referências contidas lá.

²Imersão ou Mergulho? A rigor, o que estamos fazendo é definir um mergulho (*embedding*), não uma imersão (*immersion*), que é apenas o cumprimento de (i). Esta “confusão” é apenas uma divergência de convenção entre matemáticos e físicos.

e $m < n$);

- (ii) A aplicação ϕ é um homeomorfismo entre M e $\phi(M)$, a última com a topologia induzida de N .

A vantagem de termos uma imersão é que M e $\phi(M)$ são equivalentes (tanto diferencial quanto topologicamente). Por isso, podemos identificar p e $\phi(p)$, bem como os vetores $V \in T_p M$ e $d\phi(V) \in T_{\phi(p)} N$, coisa que será feita daqui por diante. Esta identificação é usada, por exemplo, para estender vetores $V \in T_p M$ para campos $\bar{V} \in T_p N$. Só para recordar, se (x^i, U_i) e (y^A, V_A) são cartas locais³ de M e N em torno de p , a relação entre as respectivas bases coordenadas é:

$$\partial_i = d\phi(\partial_i) = \frac{\partial y^A}{\partial x^i} \partial_A = e^A{}_i \partial_A. \quad (4.1)$$

Uma outra propriedade desejada é a da isometria: ϕ é dita uma isometria se, dadas as métricas g e \tilde{g} , de M e N respectivamente, tivermos a relação

$$g(V, W) = \tilde{g}(d\phi(V), d\phi(W)), \quad (4.2)$$

ou em componentes,

$$g_{ij} = e^A{}_i e^B{}_j \tilde{g}_{AB}. \quad (4.3)$$

A vantagem aqui é que a distância fica inalterada pela imersão. Sob estas condições, ϕ é chamada de imersão isométrica.

A existência de uma métrica no espaço tangente de N faz com que o mesmo seja decomposto da seguinte maneira:

$$T_p N = T_p M \oplus T_p^\perp M, \quad (4.4)$$

com $T_p^\perp M$ sendo o complemento ortogonal de $T_p M$. Em outras palavras, um vetor $\tilde{V} \in T_p N$ pode ser decomposto da forma:

$$\tilde{V} = V + V^\perp, \quad (4.5)$$

³Lembrando que índices minúsculos variam de 0 a 3, enquanto maiúsculos de 0 a 4.

com $V \in T_p M$, $V^\perp \in T_p^\perp M$. As projeções

$$\Pi : \tilde{V} \mapsto V, \quad \Pi^\perp : \tilde{V} \mapsto V^\perp, \quad (4.6)$$

são diferenciáveis. Em particular, temos que, para a base coordenada $\{\partial_A\}$, temos as projeções

$$\Pi(\partial_A) = e^i{}_A \partial_i \quad (4.7)$$

e usando a isometria de ϕ , temos a relação adicional

$$e^i{}_A = g^{ij} \tilde{g}_{AB} e^B{}_j, \quad (4.8)$$

e com isto podemos construir a base $\{\partial_i, n_s\}$, com os vetores tangentes de $T_p M$ e os vetores normais a M , n_s , que são em quantidade de $s = n - m$, isomorfa à base $\{\partial_A\}$. E temos que

$$\partial_A = e^i{}_A \partial_i + (n_s)_A n_s. \quad (4.9)$$

Outra propriedade importante é que, dada uma conexão métrica $\tilde{\nabla}$ em N , ela induz naturalmente uma conexão em M , através da relação

$$\nabla_V W = \Pi(\tilde{\nabla}_{\bar{V}} \bar{W}), \quad (4.10)$$

com $V, W \in T_p M$, e \bar{V}, \bar{W} extensões dos mesmos. Não é difícil ver que ∇ é de fato uma conexão em $T_p M$, e exatamente a conexão métrica obtida com a métrica induzida em M , e independente da extensão usada. Intuitivamente, ∇ nada mais é que a parte tangente de $\tilde{\nabla}$ sobre M .

Vamos agora falar da curvatura extrínseca, ou segunda forma fundamental. Temos a definição:

Definição 1 A curvatura extrínseca relativa ao vetor normal $n \in T_p^\perp M$ é o operador $K_n : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}^\perp(M)$, dado através da seguinte relação:

$$K_n(V, W) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\bar{V}} \bar{W}, n) = -\tilde{g}(W, \tilde{\nabla}_{\bar{V}} n). \quad (4.11)$$

É fácil ver que K é bilinear, simétrico, e independente da extensão usada.

Basicamente, K é a parte normal (na direção de n) de $\tilde{\nabla}^4$. A derivada total de vetores estendidos \bar{V}, \bar{W} em T_pM pode ser decomposta da forma

$$\tilde{\nabla}_{\bar{V}}\bar{W} = \nabla_V W + K(V, W). \quad (4.12)$$

Agora, para obter explicitamente os resultados que utilizaremos em nosso estudo, vamos fixar as dimensões dos espaços envolvidos. M será o nosso espaço-tempo quadridimensional, imerso em N pentadimensional. Ambas possuem uma estrutura Lorentziana, e a dimensão extra de N é tipo-espaço. Dadas as cartas (x^i, U_i) e (y^A, V_A) de M e N , e a imersão $\phi : M \rightarrow N$, obtemos um vetor normal n tal que

$$\tilde{g}(n, n) = \epsilon = -1, \quad \tilde{g}(d\phi(\partial_i), n) = 0 \Rightarrow e^A_{;i} n_A = 0, \quad (4.13)$$

e a curvatura extrínseca é o operador

$$K(V, W) = (K_n(V, W))n. \quad (4.14)$$

Temos as bases $\{\partial_A\}, \{\partial_i, n\}$, relacionadas por

$$\partial_A = e^i_{;A} \partial_i + n_{A;n}, \quad (4.15)$$

de tal maneira que obtemos expressões para a decomposição dos vetores T_pN , de acordo com as projeções (4.6)

$$\tilde{V} = V + V^\perp \Rightarrow \tilde{V}^A = e^A_{;i} V^i + n^A V_n. \quad (4.16)$$

Podemos obter também expressões para as derivadas, usando um processo análogo.

Por exemplo,

$$\tilde{\nabla}_{\partial_A} \tilde{V} = \tilde{\nabla}_A \tilde{V} = \tilde{\nabla}_{e^i_{;A} \partial_i} \tilde{V} + n_A \tilde{\nabla}_n \tilde{V}, \quad (4.17)$$

⁴Com esta definição, é possível associar uma forma bilinear, auto-adjunta, exclusivamente de T_pM :

$$S_n : T_pM \rightarrow T_pM$$

$$g(S_n(V), W) = K_n(V, W).$$

Tal operador é chamado Operador de Weingarten.

onde fizemos uso de (4.15). O primeiro termo ainda pode ser decomposto em, usando (4.15), (4.14),

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_i \bar{V} &= \tilde{\nabla}_i (\bar{V} + V_n n) \\ &= (\nabla_i V^j - V_n) \partial_j + (K_{ij} V^j + \tilde{\nabla}_i V_n) n,\end{aligned}\quad (4.18)$$

e assim temos, em componentes,

$$\tilde{\nabla}_A V^B = e^i_A e^B_j (\nabla_i V^j - V_n \delta^A_B) + e^i_A n^B (K_{ij} V^j + \tilde{\nabla}_i V_n) + n_A \tilde{\nabla}_n V^B. \quad (4.19)$$

Com estas projeções, podemos decompor tensores de qualquer posto sobre M . Como estamos interessados nas equações de Maxwell, vamos considerar somente o espaço dos tensores completamente antissimétricos de segunda ordem, $\Lambda^2 N$, dotada no produto exterior \wedge (como em [25, 18]). Eles são escritos da maneira, dada a base $\{\partial_A\}$ de $T_p N$,

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} T^{AB} \partial_A \wedge \partial_B, \quad (4.20)$$

e, levando em conta (4.15), chegamos a

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} ((T^{AB} e^i_A e^j_B) \partial_i \wedge \partial_j + T^{AB} (e^i_A n_B - e^i_B n_A) \partial_i \wedge n), \quad (4.21)$$

$$= \frac{1}{2} (T^{ij} \partial_i \wedge \partial_j + \psi^i \partial_i \wedge n), \quad (4.22)$$

onde temos definidas as quantidades

$$T^{ij} = T^{AB} e^i_A e^j_B, \quad (4.23)$$

$$\psi^i = 2T^{AB} e^i_A n_B. \quad (4.24)$$

Vamos precisar também das derivadas de T . Seguindo o mesmo procedimento mostrado em (4.17), temos

$$\tilde{\nabla}_A \tilde{T} = e^i_A \tilde{\nabla}_i \tilde{T} + n_A \tilde{\nabla}_n \tilde{T}, \quad (4.25)$$

e usando novamente (4.15) e (4.22), vemos que o primeiro termo toma a forma

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_i \tilde{T} &= \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_i (T^{jm} \partial_j \wedge \partial_m + \psi^j \partial_j \wedge n) \\ &= \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_i (T^{jm} \partial_j \wedge \partial_m) + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_i (\psi^j \partial_j \wedge n),\end{aligned}$$

e olhando para cada termo em separado, obtemos

$$\tilde{\nabla}_i \tilde{T} = \tilde{\nabla}_i (T^{jm} \partial_j \wedge \partial_m) + T^{jm} K_{ji} n \wedge \partial_m + T^{jm} K_{mi} \partial_j \wedge n \quad (4.26)$$

$$= \tilde{\nabla}_i (T^{jm} \partial_j \wedge \partial_m) + 2T^{jm} K_{mi} \partial_j \wedge n, \quad (4.27)$$

$$\tilde{\nabla}_i (\psi^j \partial_j \wedge n) = \nabla_i (\psi^j \partial_j) \wedge n - \psi^j K_i^m \partial_j \wedge \partial_m, \quad (4.28)$$

e temos, em componentes,

$$\tilde{\nabla}_A T^{BC} = e^i_A \{ e^B_j e^C_m (\nabla_i T^{jm} - \psi^j K_i^m) + e^B_j n^C (\nabla_i \psi^j + 2T^{jm} K_{mi}) \} + n_A \tilde{\nabla}_n T^{BC}. \quad (4.29)$$

E a quadridivergência toma a forma

$$\tilde{\nabla}_A T^{AC} = e^C_m (\nabla_i T^{im} - \psi^j K_i^m) + n^C (\nabla_i \psi^i + 2T^{im} K_{mi}) + n_A \tilde{\nabla}_n T^{AC}, \quad (4.30)$$

de tal maneira que as componentes tangente e normal são

$$e^m_C (\tilde{\nabla}_A T^{AC}) = \nabla_i T^{im} - \psi^i K_i^m + n_A e^m_C \tilde{\nabla}_n T^{AC}, \quad (4.31)$$

$$n_C (\tilde{\nabla}_A T^{AC}) = \nabla_i \psi^i + 2T^{im} K_{im}. \quad (4.32)$$

4.2 Formulação do problema

Agora, vamos descrever o nosso problema. De maneira análoga ao capítulo anterior, queremos projetar a teoria eletromagnética do bulk, que aqui é a variedade N , em M , que é vista como uma hipersuperfície de N . Os potenciais pentadimensionais \mathcal{A}^B , definidos em N , podem ser projetados sobre M , gerando os potenciais quadridimensionais A^i . Estes são relacionados por, lembrando de (4.6),

$$A^i = e^i_B \mathcal{A}^B, \quad (4.33)$$

e podemos ver que essa projeção não afeta as transformações de gauge dos potenciais \mathcal{A}^B . De fato, a projeção induz as seguintes transformações de gauge

$$\mathcal{A}^B \rightarrow \mathcal{A}^B + \tilde{g}^{BC} \partial_B f \Rightarrow A^i \rightarrow A^i + g^{ij} \partial_j f. \quad (4.34)$$

Em N , o tensor eletromagnético é dado por $\mathcal{F}_{AB} = \tilde{\nabla}_A \mathcal{A}_B - \tilde{\nabla}_B \mathcal{A}_A$, e ele pode ser relacionado com o seu análogo em M através de

$$\mathcal{F}^{AB} = e^A{}_i e^B{}_j F^{ij}, \quad (4.35)$$

onde $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$.

Finalmente, temos as equações de Maxwell em N ,

$$\tilde{\nabla}_A \mathcal{F}^{AC} = 0, \quad (4.36)$$

e quando projetadas em M temos as duas equações

$$\text{componente tangente} \rightarrow \nabla_i F^{im} = \psi^i K_i{}^m - n_A e^m{}_C \tilde{\nabla}_n \mathcal{F}^{AC} \quad (4.37)$$

$$\text{componente normal} \rightarrow \nabla_i \psi^i + 2T^{im} K_{im} = 0, \quad (4.38)$$

e assim, a componente tangente representa as equações de Maxwell induzidas na brana, e a componente normal são vínculos que devem ser satisfeitos. Novamente, a solução desse sistema é garantida pelo teorema de Cauchy-Kovalevskaya, e podemos identificar formalmente o lado direito de (4.37) com a quadricorrente j^i . Mais uma vez, mostramos que é possível induzir cargas e correntes a partir do eletromagnetismo no bulk, e essa quadricorrente agora têm uma influência da geometria dos espaços envolvidos, aqui representado pela curvatura extrínseca K , como está exposto em [32].

Capítulo 5

Conclusão e perspectivas

Como mostramos ao longo desses capítulos, vimos que uma fração significativa das nossas indagações sobre a indução do eletromagnetismo via dimensões extras foi respondida. Claro que falamos uma fração pois, ao longo deste estudo, novos desdobramentos surgiram, e estes serão o nosso alvo em trabalhos futuros.

Como essa indução é algo independente de algum modelo particular (a única premissa aqui é que estamos em um cenário pentadimensional), seria interessante mostrar possíveis interpretações para os termos induzidos. Claro que continuariam sendo cargas e correntes induzidas, mas a idéia seria dar mais suporte para o modelo de indução.

Outro ponto a se considerar seria a dinâmica desses campos induzidos, em particular procurar soluções explícitas via funções de Green. Esse seria um ponto interessante, pois em [34] há o resultado interessante de que o eletromagnetismo em dimensões ímpares não suporta cargas e correntes. Provavelmente há uma conexão entre esses resultados, o que daria mais suporte a nossa abordagem.

Apêndice A

Um pouco de Geometria (Riemanniana)

Aqui, faremos uma breve exposição sobre os conceitos básicos de geometria, focando mais em geometria Riemanniana. A idéia aqui é apenas a de fixação de idéias e fórmulas, e não a de ser um tratado no assunto (e nem poderia, pois temos ótimos livros sobre o assunto, como por exemplo [9, 10, 11]).

A.1 Variedades diferenciáveis

O conceito central da Geometria (Riemanniana) é o de variedade diferenciável, pois é justamente aqui que definimos o espaço em que trabalharemos. Basicamente, temos:

Definição 2 *Seja M um espaço topológico de dimensão n . Agora, dado um conjunto de aplicações homeomorfas $\phi_i : U_i \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, tais que*

(a) $\bigcup_i \phi_i(U_i) = M$;

(b) *Dadas ϕ_i e ϕ_j , com $i \neq j$ e $U_i \cap U_j = W \neq \emptyset$, as aplicações $\phi_i^{-1} \circ \phi_j : W \rightarrow W$*

são difeomorfismos;

(c) O conjunto $\{(\phi_i, U_i)\}$ é maximal quanto a (a) e (b).

Tal estrutura é chamada de variedade diferenciável de dimensão n .

Basicamente, o que fizemos foi dotar a variedade topológica M de uma estrutura diferenciável, tratando-a localmente como sendo "equivalente" (no sentido de diferenciável) ao \mathbb{R}^n . Se a topologia de M não for explicitada, podemos induzir com esta estrutura a topologia usual do \mathbb{R}^n . Os pares (ϕ_i, U_i) são chamadas parametrizações de M , enquanto que o conjunto $\{(\phi_i, U_i)\}$ é dito ser apenas um atlas de M .

A.2 Espaço tangente e a estrutura métrica

Agora, vamos ao conceito do espaço tangente. Há várias formas de introduzi-lo, e aqui será usada a mais "intuitiva". Para tal, precisaremos de algumas definições preliminares. Uma curva α é a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} &\rightarrow M, \\ t &\mapsto \alpha(t), \end{aligned} \tag{A.1}$$

que nada mais é que a extensão do conceito usual. Também temos as funções

$$\begin{aligned} f : U \subset M &\rightarrow \mathbb{R}, \\ p &\mapsto f(p), \end{aligned} \tag{A.2}$$

que tomam valores em conjuntos de \mathbb{R} e formam, em sua totalidade, o conjunto $\mathcal{D}(M)$. agora podemos pensar em vetores tangentes em um ponto $p \in M$. Como ponto de partida, vamos pegar uma curva α tal que $\alpha(t_0) = p$, $t_0 \in (a, b)$. Do cálculo usual, sabemos que os vetores tangentes são derivadas de curvas imersas no \mathbb{R}^n . Aqui, vamos usar o seguinte artifício: Dada uma função arbitrária como em (A.2), vamos compô-la com (A.1), obtendo $f \circ \alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Agora temos uma

função que podemos derivar¹ livremente. Em uma carta (ϕ_i, U_i) temos, com o uso da regra da cadeia, em $p = \alpha(t_0)$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{df}(f \circ \alpha)(f) \right|_{t=t_0} &= \left. \frac{d}{dt}(f(x^i(t))) \right|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^n \left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=t_0} \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_{x=p} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=t_0} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{x=p} \right) f = V_p(f). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Aqui, temos associado a uma curva α passando por p o operador diferencial (pois vemos acima que ele atua sobre f como uma derivada) $V : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathbb{R}$, que atua em cada ponto $p \in M$ como exposto em (A.3). São estes operadores que chamaremos de vetores² e o espaço onde eles "residem" (que é um espaço vetorial) de espaço tangente, $T_p M$, definido a cada ponto $p \in M$. Devemos ter cuidado com esta definição pois podemos ter mais de uma curva passando por p , digamos α_1 e α_2 , cujos vetores tangentes coincidam. Assim, um vetor tangente é uma classe de equivalência que associa a uma classe de curvas que satisfazem (A.3) um vetor tangente $V_p \in T_p M$. Podemos ver que $T_p M$ é um espaço vetorial de dimensão n e, dada uma parametrização (ϕ_i, U_i) , temos associada a base coordenada $\{\partial/\partial x^i\} = \{\partial_i\}$ que gera $T_p M$. Aqui, devemos ter em mente que $\{\partial_i\}$ são tratados apenas como símbolos para designar vetores, tendo sentido como derivadas apenas quando atuam em funções de $\mathcal{D}(M)$.

A reunião de todos os espaços tangentes de uma variedade M é chamada de fibrado tangente TM :

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M = \{(p, V_p), \text{ com } p \in M, V_p \in T_p M\}, \quad (\text{A.4})$$

e os campos vetoriais são seções deste fibrado, *i.é.*, aplicações $V : M \rightarrow TM$, que associam a cada ponto $p \in M$ um vetor $V_p \in T_p M$. Dizemos que um campo vetorial

¹claro está que f e α o são.

²Daqui por diante, omitiremos o índice relativo ao ponto p , e usaremos a chamada convenção da soma de Einstein, que omite a somatória, deixando subentendido a soma nos índices repetidos.

V é gerado por uma curva $\alpha(t)$ se o campo de vetores tangentes a α é exatamente V . O campo é dito diferenciável se a aplicação V o for. O conjunto de campos diferenciáveis será denotado por $\mathcal{X}(M)$ e, daqui pra frente, falaremos de vetores subentendendo campos vetoriais, salvo menção contrária.

Agora, vamos dotar a nossa variedade de uma estrutura métrica. Para isso, dotaremos os espaços tangentes T_pM de um produto interno. Assim, temos a definição:

Definição 3 *Uma métrica (Riemanniana) é a associação, a cada ponto $p \in M$, um produto interno (ou seja, uma forma quadrática bilinear, simétrica, e não degenerada) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (ou $g(\cdot, \cdot)$) em T_pM , da seguinte maneira: Dada uma carta (ϕ_i, U_i) , temos a base coordenada $\{\partial_i\}$ e a métrica são as funções*

$$\langle \partial_i, \partial_j \rangle = g(\partial_i, \partial_j) = g_{ij}(x), \quad (\text{A.5})$$

que são diferenciáveis em cada $p \in M$. Claro está que esta definição não depende de uma parametrização particular.

(O caso riemanniano é quando a métrica é positivo-definida.)

Uma métrica serve, por exemplo, para medir comprimentos de curvas. De uma maneira pouco rigorosa, temos a definição:

Definição 4 *Dada uma curva $\alpha : (a, b) \rightarrow M$, e uma parametrização (ϕ_i, U_i) , seu comprimento $\ell(\alpha)$ é dado por*

$$\ell(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt. \quad (\text{A.6})$$

Podemos ver também que esta definição não depende de uma parametrização em particular. Com isto, dotamos a nossa variedade M de uma estrutura métrica, que basicamente serve para medir comprimentos, áreas, e enfim, serve para a integração. Vamos agora à segunda estrutura de nossa variedade.

A.3 Estrutura afim e a derivada covariante

Já sabemos como derivar funções de $\mathcal{D}(M)$. Mas para derivar outros objetos, como os vetores, precisamos de um outro recurso, pois a idéia intuitiva de derivada,

$$\frac{dV}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{V_{t+\epsilon} - V_t}{\epsilon} \quad (\text{A.7})$$

não tem algum sentido, já que os vetores envolvidos na subtração pertencem a espaços tangentes distintos. (o caso do \mathbb{R}^n é especial, pois temos uma noção implícita de transporte rígido.) Para que isso faça sentido, precisamos de uma operação que ‘transporte’ um vetor de um espaço tangente $T_p M$ para outros espaços tangentes, diferentes do primeiro. Para isto serve a noção da conexão afim:

Definição 5 *Uma conexão afim (ou simplesmente conexão) é o operador $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ que associa a cada par (U, V) de vetores um terceiro, $W = \nabla_U V$, de tal maneira que, dada $f \in \mathcal{D}(M)$:*

(a) $\nabla_{fU+V} W = f\nabla_U W + \nabla_V W;$

(b) $\nabla_U (V + W) = \nabla_U V + \nabla_U W;$

(c) $\nabla_U (fV) = f\nabla_U V + U(f)V$ (regra de Leibniz);

(d) se V é um campo vetorial gerado por uma curva $\alpha(t)$, então $\nabla_V U = \frac{DU}{dt}$.

O último item na verdade pode ser demonstrado, mas aqui aparece como uma propriedade por conveniência. Esta definição é tal que a derivada covariante de funções coincide com a derivada usual. Podemos expressar explicitamente as componentes da derivada covariante. Para tal sejam $V = V^i \partial_i$ e $U = U^j \partial_j$ vetores de $\mathcal{X}(M)$, V gerado por $\alpha(t)$. temos então, das propriedades da conexão

$$\frac{DU}{dt} = \nabla_V U = \nabla_{V^i \partial_i} (U^j \partial_j) = V^i \nabla_{\partial_i} (U^j \partial_j) = V^i (\partial_i (U^j) \partial_j + U^j \nabla_{\partial_i} \partial_j). \quad (\text{A.8})$$

Escrevendo os símbolos da conexão na base $\{\nabla_i\}$ como³ $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k$, temos

$$\frac{DU}{dt} = (V^i\partial_i(U^k) + \Gamma^K_{ij}V^iU^j)\partial_k = (V^iU^k_{;i})\partial_k, \quad (\text{A.9})$$

exatamente a definição de derivada covariante da análise tensorial clássica (como por exemplo em [2, 12]), aqui representada pelo ponto e vírgula (;).

Esta noção de derivada covariante pode ser estendida para outros tensores, usando um análogo da regra de Leibniz. Para exemplificar, vamos calcular a derivada covariante da métrica. Sabemos que ela é uma aplicação (um tensor) $g : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$. Assim, podemos fazer, lembrando que $g(U, W)$ é uma função:

$$\frac{d}{df}(g(U, W)) = V(g(U, W)) = g\left(\frac{DU}{dt}, W\right) + g\left(U, \frac{DW}{dt}\right) + \left(\frac{Dg}{dt}\right)(U, W). \quad (\text{A.10})$$

Após um pouco de álgebra, chegamos a

$$g_{ij;k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{lj}\Gamma^l_{ki} - g_{il}\Gamma^l_{kj}, \quad (\text{A.11})$$

que mais uma vez coincide com a definição clássica. Agora temos o desejado transporte paralelo. Um vetor V é dito transportado paralelamente ao longo de uma curva $\alpha(t)$ se

$$\frac{DV}{dt} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Esta definição generaliza o transporte rígido de vetores no \mathbb{R}^n . Daí temos a proposição:

Proposição 1 *Dado um vetor $V_0 \in T_pM$, seu transporte paralelo ao longo de uma curva $\alpha : (a, b) \rightarrow M$, com $\alpha(t_0) = p$, $t_0 \in (a, b)$, é o campo vetorial V , que é solução de (A.12) com $V(t_0) = V_0$.*

Um objeto que aparece quando temos uma estrutura afim é a curvatura, que pode ser definida da seguinte maneira:

³Há outras definições para a posição dos índices, como pode ser visto em [3, 4].

Definição 6 A curvatura relativa à conexão ∇ é o operador $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ definido da seguinte maneira⁴:

$$R(U, V)W = [\nabla_U, \nabla_V]W - \nabla_{[U, V]}W, \quad (\text{A.13})$$

ou, em uma base coordenada $\{\partial_i\}$,

$$R^s_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^s_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^s_{il} \Gamma^l_{jk} - \Gamma^l_{ik} \Gamma^s_{jl}. \quad (\text{A.14})$$

Intuitivamente a curvatura é uma maneira de medir a não comutatividade da derivada covariante, sendo o análogo da curvatura de Gauss da geometria diferencial clássica. É fácil ver que R é um tensor.

Outro objeto que podemos definir quando temos uma estrutura afim é:

Definição 7 A torção $T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ relativa à conexão ∇ é o operador:

$$T(U, V) = \nabla_U V - \nabla_V U - [U, V]. \quad (\text{A.15})$$

Basicamente, a torção mede também a não-comutatividade da derivada covariante, e o não-fechamento de paralelogramos “infinitesimais”. Claramente, T é um tensor, cuja forma em uma base coordenada $\{\partial_i\}$ é

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}. \quad (\text{A.16})$$

Quando a geometria não é Riemanniana (o motivo dessa distinção será explicado mais tarde), podemos definir o tensor de não-metricidade S como

$$S(U, V, W) = (\nabla_W g)(U, V) \Rightarrow S_{ijk} = g_{ij;k}, \quad (\text{A.17})$$

que basicamente mede a não-constância da métrica frente a derivada covariante.

⁴Onde $[U, V]$ é o colchete de Lie usual.

A.4 O ‘Milagre’

Bem, dotamos a nossa variedade M de duas estruturas: a métrica e a afim. Mas agora podemos nos perguntar: Será possível unificar as duas estruturas? Ou, posto de outra maneira, será que na realidade isso é apenas uma só estrutura? A resposta vem na forma do seguinte teorema:

Teorema 2 *Seja M uma variedade diferenciável com uma estrutura métrica dada por g e afim dada por ∇ . Se forem conhecidas a torção T , e o tensor de não-metricidade S , podemos relacionar g e ∇ através da expressão (em componentes)*

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}(g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}) + \frac{1}{2}(S^i_{jk} - S_{jk}^i - S_k^i{}_j) + \frac{1}{2}(T^i_{jk} + T_j^i{}_k - T_{jk}^i). \quad (\text{A.18})$$

A prova desse resultado é simples. Usando (A.10), e permutando entre V , U , e W , temos as equações

$$V(g(U, W)) = g(\nabla_V U, W) + g(U, \nabla_V W) + (\nabla_V g)(U, W), \quad (\text{A.19})$$

$$U(g(W, V)) = g(\nabla_U W, V) + g(W, \nabla_U V) + (\nabla_U g)(W, V), \quad (\text{A.20})$$

$$W(g(V, U)) = g(\nabla_W V, U) + g(V, \nabla_W U) + (\nabla_W g)(V, U). \quad (\text{A.21})$$

Lembrando de (A.17) e (A.15), e fazendo a soma (A.19)+(A.20)-(A.21), chega-se facilmente ao resultado⁵ (A.18). O dito ‘milagre’ é devido justamente a essa relação, que foi provada pela primeira vez por Levi-Civita no caso mais simples (com $S = T = 0$), sendo refinada até o que está enunciado aqui (para detalhes, veja por exemplo [13, 14]). No caso de Levi-Civita, os símbolos de conexão obtidos são os famosos símbolos de Christoffel, e a geometria com essa conexão (dita compatível com a métrica) é a chamada geometria riemanniana.

⁵A expressão independente de coordenadas é chamada de relação de Koszul.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Pais, *Sutil é o Senhor - A Ciência e a Vida de Albert Einstein*, Editora Nova Fronteira, 1996.
- [2] L. Landau, E Lifchitz, *Teoria do Campo*, Editora Hemus, 2004.
- [3] R. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, 1984.
- [4] H. Stephani, *Relativity, an Introduction to Special and General Relativity*, Cambridge University Press, 2004.
- [5] J. Norton, *Einstein, Nordström and the Early Demise of Scalar, Lorentz Covariant Theories of Gravitation*, Archive for History of Exact Sciences, **45**, 17 (2002).
- [6] A. Einstein, A. Fokker, *Nordström's Theory of Gravitation from the Point of View of the Absolute Calculus*, Ann. d. Phys., **44**, 321 (1914).
- [7] Y. Fujii, K. Maeda, *Scalar-Tensor Theories of Gravitation*, Cambridge University Press, 2003.
- [8] F. Ravndal, *Scalar Gravitation and Extra Dimensions*, arXiv:gr-qc/0405030v1.
- [9] M. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Terceira edição, IMPA.
- [10] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Volume 1, John Wiley & Sons Inc., 1963.

-
- [11] L. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, 1949.
- [12] I. Sokolnikoff, *Tensor Analysis - Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*, 2nd Edition, John Wiley & Sons Inc., 1964.
- [13] M. Berger, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer, 2002.
- [14] D. Sen, J. Vanstone, *On wey and Lyra Manifolds*, J. Math. Phys., **13**, 990 (1972).
- [15] L. O’Raifeartaigh, N. Straumann, *Gauge Theory: Historical Origins and Some Modern Developments*, R. Mod. Phys., **72**, 1 (2000).
- [16] P. Wesson, *Space-Time-Matter, Modern Kaluza-Klein Theory*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd (1990); *Five Dimensional Physics - Classical and Quantum Consequences of Kaluza-Klein Cosmology*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (2006).
- [17] C. Yang, R. Mills, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).
- [18] M. Gockeler, T. Schucker, *Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity*, Cambridge University Press, 1987.
- [19] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, *the Hierarchy Problem and New Dimensions at a Milimeter*, Phys. Lett. B **429**, 263 (1998).
- [20] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, *New Dimensions at a Milimeter to a Fermi and Superstrings at a TeV*, Phys. Lett. B **436**, 257 (1998).
- [21] L. Randall, R. Sundrum, *Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999).

- [22] L. Randall, R. Sundrum, *An Alternative to Compactification*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999).
- [23] T. Shiromizu, K. Maeda, M. Sasaki, *the Einstein Equation on the 3-Brane World*, Phys. Rev. D, **62** (2000).
- [24] G. Dvali, G. Gabadadze, M. Porrati, *4-D Gravity on a Brane in 5-D Minkowski Space*, Phys. Lett. B **485**, 208 (2000).
- [25] E. Lima, *Álgebra Exterior*, IMPA.
- [26] D. Bleecker, *Gauge Theory and Variational Principles*, Dover, 1981.
- [27] M. Maia, *Hypersurfaces of Five-dimensional Vacuum Space-times*, gr-qc/9512002.
- [28] F. Dahia, C. Romero, *On the Embedding of Branes in five-dimensional Spaces*, Class. Quant. Grav. **21**, 927 (2004).
- [29] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Volume 2, Wiley, New York, 1989.
- [30] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I - Distribution theory and Fourier Analysis*, Springer-Verlag, 1983.
- [31] C. Romero, F. Dahia, M. Cruz, *Inducing charges and Currents from Extra Dimensions*, Mod. Phys. Lett. A **23**, 197 (2008).
- [32] C. Romero, F. Dahia, M. Cruz, *Effective Field Equations of Brane-Induced Electromagnetism*, J. Math. Phys. **49** (2008).
- [33] F. Hehl, J. McCrea, E. Mielke, Y. Ne'eman, Phys. Rep. **258**, 1171 (1995).

-
- [34] B. Kosyakov, *On Classical Electrodynamics in Odd-dimensional Worlds*, hep-th/0208170.
- [35] B. Kosyakov, *Exact Solutions of Classical Electrodynamics and the Yang-Mills-Wong Theory in Even-dimensional Spacetime*, Theor. & Math. Phys. **119**, (1999).
- [36] B. Kosyakov, *Electromagnetic Radiation in Even-dimensional Spacetimes*, hep-th/0803.3304.