

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – UFPB
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – CCEN
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – CPGF



Dissertação de Mestrado

Confinamento Geodésico clássico em espaço produto
distorcido

Lucio Fabio Pereira da Silva

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Fevereiro 2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – UFPB
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – CCEN
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – CPGF

Confinamento Geodésico clássico em espaço produto distorcido

Lucio Fabio Pereira da Silva

Dissertação de mestrado apresentada
à Coordenação do Programa de Pós-
graduação em Física da Universidade
Federal da Paraíba(UFPB) como parte
dos requisitos para a obtenção do grau de
Mestre em Física.

Orientador: Dr. Carlos Augusto Romero Filho

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Fevereiro de 2008

S586c Silva, Lucio Fabio Pereira da.
Confinamento Geodésico clássico em espaço produto distorcido / Lucio Fábio
Pereira da Silva. - - João Pessoa: [s.n.], 2008.
94 f.: il.
Orientador: Carlos Augusto Romero Filho.
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN.
1.Física. 2.Movimentos Geodésicos. 3.Equações Geodésicas..

UFPB/BC

CDU: 53(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – UFPB
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA – CCEN
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – CPGF

Confinamento Geodésico clássico em espaço
produto distorcido

Lucio Fabio Pereira da Silva

Banca Examinadora:

Dr. Carlos Augusto Romero Filho

Dr. Jorge Herbert Soares de Lira (UFC)

Dr. Valdir Barbosa Bezerra (UFPB)

Dr. Janilo Santos (Suplente-UFRN)

Dr. Joel Batista da Fonseca Neto (Suplente-UFPB)

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Fevereiro de 2008

Conteúdo

Resumo	iv
Abstract	v
Agradecimentos	vi
1 Introdução	1
2 Prolegômenos Matemáticos	7
2.1 Imersões	16
2.2 Subvariedades	17
2.3 Variedade-produto	17
2.4 Folheações	19
2.5 Variedades semi-riemannianas	22
2.5.1 Conexões afins	24
2.5.2 Geodésicas em variedades semi-riemannianas	29
2.5.3 Curvatura intrínseca	33
2.5.4 Subvariedades semi-riemannianas	36
2.5.5 Conexão induzida	37
2.5.6 A segunda forma fundamental	39
2.5.7 Subvariedades totalmente geodésicas	41

3	Produto de variedades semi-riemannianas	44
3.1	Espaço produto distorcido	45
4	Movimento no hiperespaço	51
4.1	Força extra em espaço produto distorcido	52
4.2	Confinamento do movimento no espaço-tempo tetradimensional . . .	55
4.3	Confinamento via potencial efetivo	56
4.4	A análise do movimento geodésico nas proximidades do espaço-tempo para uma co-dimensão $n = 1$	60
4.5	Análise qualitativa do movimento na quinta dimensão	61
4.5.1	Movimento geodésico pentadimensional de partículas maciças nas imediações de uma hipersuperfície tetradimensional	62
4.6	O movimento de fótons nas proximidades de uma hipersuperfície do tipo tempo	68
4.7	Movimento de partículas nas proximidades da subvariedade M^4 com $M = \mathbb{R}^n \times_F M^4$	70
5	Conclusão	73
A	Apêndices	76
A.1	Sistemas autônomos	76
A.1.1	Estabilidade de um sistema autônomo	77
A.1.2	Classificação dos pontos de equilíbrio dos sistemas autônomos no plano	77
A.2	Sistemas não lineares	80

Lista de Figuras

2.1	Ilustração da definição 1	10
2.2	Base do espaço tangente em $p \in M$	12
2.3	Folheação	20
2.4	Transporte paralelo segundo uma conexão riemanniana	27
2.5	Ilustração da segunda forma fundamental	40
3.1	Espaço produto distorcido.	46
4.1	$L = 1$ (verde) e $L = 0$ (vermelho).	59
4.2	O ponto de equilíbrio E no caso onde $f(l_0) > 0$	64
4.3	As partículas entram e saem indefinidamente da hipersuperfície $\Sigma(l = l_0)$. Isto dá origem a um mecanismo de <i>quasi-confinamento</i>	65
4.4	Quando $f''(l_0) < 0$ o ponto de equilíbrio é um ponto de sela. Neste caso o confinamento é altamente instável. A única exceção corresponde às linhas AE e BE , ao longo das quais partículas são atraídas de volta para a folha.	66
4.5	Retrato de fase do movimento de fótons em presença de simetria Z_2 com uma função $f(l)$ monotônica crescente para $l \geq 0$ e $f(l) \rightarrow \infty$ quando $l \rightarrow \infty$	69
4.6	Retrato de fase correspondente ao caso onde $f(l)$ é um função monotônica decrescente para $l \geq 0$. Nessa conjuntura $f(l) \rightarrow -\infty$ quando $l \rightarrow \infty$	70
A.1	Retratos de fase estáveis típicos	78
A.2	Retratos de fase instáveis típicos	79

Resumo

Nesta dissertação nosso objetivo principal é estudar os movimentos geodésicos clássicos de partículas-teste com massa de repouso não-nula e fótons em espaço produto distorcido penta-dimensional. Mostramos que é possível obter um quadro geral destes movimentos, utilizando o desacoplamento que acontece em tal espaço, entre os movimentos na quinta dimensão e o movimento nas hiper-superfícies. Este artifício nos permite utilizar a análise do espaço de fase para investigar o possível confinamento de partículas e fótons em hiper-superfícies em espaço produto distorcido penta-dimensional. Usando tal análise encontramos uma forma de quasi-confinamento, o qual é oscilatório e neutramente estável. A importância de um tal confinamento está no fato de ser puramente devido aos efeitos gravitacionais clássicos, sem a necessidade de mecanismos de confinamento do tipo-brana. A seguir estendemos este procedimento para estudar os movimentos geodésicos clássicos de partículas teste de massa de repouso não-nula e fótons no caso mais geral de um espaço de produto-distorcido com $(3 + 1 + n)$ -dimensões. Novamente, uma característica importante destes espaços é que eles permitem um desacoplamento natural entre os movimentos no espaço-tempo $(3 + 1)$ -dimensional e o movimento nas dimensões extras. Usando este desacoplamento mais uma vez e empregando a análise do espaço de fase, investigamos as condições para que haja confinamento de partículas e fótons para na subvariedade espaço-tempo. Além de prover informação relativa ao movimento de fótons, mostramos também, que estes movimentos não dependem do valor da curvatura extrínseca. Obtemos as condições gerais para o confinamento de geodésicas no caso de uma variedade semi-riemanniana, como também estabelecemos as condições para a estabilidade de tal confinamento.

Abstract

In this dissertation our main objective is to study the classical geodesic motions of nonzero rest mass test particles and photons in five-dimensional warped product spaces. We show that it is possible to obtain a general picture of these motions, using the natural decoupling that occurs in such spaces between the motions in the fifth dimension and the motion in the hypersurfaces. This splitting allows the use of phase space analysis in order to investigate the possible confinement of particles and photons to hypersurfaces in five-dimensional warped product spaces. Using such analysis, we find a novel form of quasi-confinement which is oscillatory and neutrally stable. The importance of such a confinement is that it is purely due to the classical gravitational effects, without requiring the presence of brane-type confinement mechanisms. We then extend this procedure to study the classical geodesic motions of nonzero rest mass test particles and photons in the more general case of a $(3 + 1 + n)$ -dimensional warped product spaces. Again, an important feature of these spaces is that they allow a natural decoupling between the motions in the $(3 + 1)$ -dimensional spacetime and those in the extra n dimensions. Using this decoupling once more and employing phase space analysis we investigate the conditions for confinement of particles and photons to the $(3 + 1)$ - spacetime submanifold. In addition to providing information regarding the motion of photons, we also show that these motions are not constrained by the value of the extrinsic curvature. We obtain the general conditions for the confinement of geodesics in the case of semi-riemannian manifolds as well as establishing the conditions for the stability of such confinement.

Agradecimentos

Agradeço a ajuda prestimosa de meu orientador Dr. Carlos Romero pela paciência e atenção com que sempre me acolheu.

Agradeço aos Professores da Pós-graduação em Física da UFPB pela valiosa aprendizagem que tive.

Ao Dr. Edgar Madriz pela oportunidade de colaboração em outros trabalhos e por sua amizade.

Aos meus amigos Ferdinand, Denis, Márcio Fablício, Jansen e Marco Aurelho agradeço a força os conselhos, ajudas, auxílios e incentivos.

Aos amigos Thiago Caramês e Weliton pelas valiosas correções e sugestões a esse trabalho.

Capítulo 1

Introdução

Não se devem admitir mais causas às coisas da natureza que aquelas que forem tanto verdadeiras quanto suficientes para explicar sua aparência.

(Sir Isaac Newton. Princípios Matemáticos da Filosofia Natural)

Certas partes da física teórica alcançaram um patamar dedutivo que possibilita uma cadeia lógica de argumentos, que partem de determinadas premissas aceitas, até conseqüências aparentemente muito remotas e abstratas, mediante deduções puramente matemáticas. Isto comparece principalmente no que diz respeito a relatividade geral, a qual, preceitua que a gravitação é uma manifestação da própria estrutura geométrica do *espaço-tempo*. Com essa teoria Einstein[2] inaugurou uma importante revolução no pensamento científico de sua época. Logo, um novo e ambicioso paradigma reverberou nas denodadas mentes de físicos e matemáticos, que não tardaram a suscitar a seguinte questão: *Será possível geometrizar as demais interações da matéria?* Isto é, serão as outras forças fundamentais da natureza conseqüências de certa estrutura geométrica existente em nosso universo? Concitados pela "perfeição estética" proporcionada pela geometrodinâmica¹, alguns teóri-

¹A geometrodinâmica remete às idéias de Clifford que, em 1870, em uma conferência na Cambridge Philosophical Society, intitulada *Sobre a teoria espacial da matéria*, afirmou que: "pequenas porções do espaço são análogas às colinas numa superfície predominantemente plana(...) e esta propriedade de curvatura ou distorção se transmite permanentemente de uma porção do espaço à outra na maneira das ondas. A variação da curvatura do espaço é o que realmente acontece quando se dá o fenômeno a que chamamos movimento da matéria. No mundo físico nada mais existe para

cos acometeram-se de outra pretensão ainda mais altiva, essa por sua vez, viria a ser denominada *teoria geométrica do tudo*. Nessa ousada teoria, a matéria também manifestar-se-ia da geometria do espaço-tempo. Frente a esse desafio, muitas foram as correntes teóricas que se destacaram em busca de tal teoria, diversas idéias ergueram-se até entusiasticamente, mas logo entibiaram-se perante as implacáveis obstâncias próprias a conciliações coerentes das teorias que descrevem as interações da natureza. Contudo, uma classe distinta de teorias proporciona importantes avanços na direção da unificação. Nessas teorias subsome-se a existência de dimensões extras como alternativa para obter a unificação.

Em verdade, a estrutura do cosmo pode ser em sua forma "absoluta", dramaticamente dessemelhante a qualquer abstração que possamos imaginar. Nenhuma teoria física conhecida delibera que haja somente três dimensões espaciais. Então, é razoável que uma ilação científica conduzida com devida cautela, possa constituir um caminho válido para elucidar essa questão, desde que, antes de qualquer coisa, reconheçamos as dimensões extras como hipótese e não como certeza, no mais, segue-se na maneira usual do método científico.

Façamos aqui, alguns reconhecimentos de méritos. Em 1909, H. Minkowski[2] indicou, que um considerável ganho em elegância e praticidade na relatividade especial externa-se quando consideramos o tempo uma dimensão adicional, substituindo assim o conceito de *espaço newtoniano* por um novo conceito: o de *espaço-tempo*. Ressaltemos uma de suas frases:

[...], por que há de o matemático perturbar-se com a abstração um pouco maior proveniente de o número de eixos passar a quatro?

O fato é que, já se fazia 55 anos que a forma de pensar dos matemáticos havia se modificado peremptoriamente. O autor dessa proeza foi o perspicaz matemático alemão Bernhard Riemann, sucessor de Carl Gauss na Universidade de Göttingen. Riemann[3] havia não só estendido a geometria diferencial de Gauss para espaços com dimensões maiores, como também generalizado as geometrias não-euclidianas. A genial idéia de Minkowski revelou-se fundamental para outras teorias, sobretudo além de tal variação"[1].

Mais tarde essas idéias viriam a ser defendidas por Einstein, John Wheeler e outros.

para a teoria da relatividade geral, originando um novo tipo de geometria, na qual a "*distância*" entre dois pontos não é mais definitivamente positiva.

Na relatividade geral proposta por Albert Einstein, a geometria passa a ser lorentziana e a gravitação entre os corpos deixa de ser concebida como uma "*força física*", passando a ser considerada como uma propriedade geométrica do espaço-tempo.

O enredo das dimensões extras na Física avançou sob o ânimo de Gunnar Nordström em seu trabalho publicado em 1914[4], com a intenção de unificar a gravitação e o eletromagnetismo. Nordström propôs a existência de uma dimensão extra espacial; todavia ele não foi afortunado em sua tentativa, provavelmente por estar a lidar com uma teoria escalar de gravitação[5] "defeituosa", a saber, a teoria de gravitação de Mie. A "falha" de Nordström, não comprometeu, cinco anos mais tarde, a teoria de Kaluza[6] (que, decerto, possuía o mesmo fim, isto é, a unificação da gravitação e o eletromagnetismo), tendo em vista que essa teoria já estava alicerçada nas equações de Einstein, aliadas ao postulado da existência de uma dimensão extra do tipo espaço, munida de uma *condição cilíndrica*. Evidentemente, uma condição desta natureza se reveste de um caráter *ad hoc*, o que acabou por torná-la menos "aprazível" aos espíritos mais rigorosos da época.

Em 1926, Oskar Klein introduziu vários aperfeiçoamentos na teoria de Kaluza[7], declarando que a quinta dimensão estava enrolada sobre si mesma. Na terminologia matemática diz-se que essas dimensões são compactas. Reside aí a gênese da teoria de Kaluza-Klein.

A teoria original de Kaluza-Klein serviu de modelo para novas tentativas de unificação[8] ainda mais ousadas, que visavam incorporar as demais interações da Natureza, a saber, a interação nuclear forte e a interação nuclear fraca. Uma dessas tentativas, chamada de teoria da Supergravidade[9], propõe uma extensão da relatividade geral para onze dimensões²; contudo, esta teoria revelou-se insatisfatória por uma série de dificuldades matemáticas[9].

Sucederam-se, então, outras propostas de unificação. Em 1968, o físico Gabriele Veneziano implementou uma teoria, a qual foi denominada *teoria das su-*

²Uma versão posterior da supergravidade diminuiu o número de dimensões de onze para dez.

percordas, admitindo que a estrutura topológica do universo está repleta de minúsculos objetos (da ordem do comprimento de Planck($10^{-33}cm$)) chamados de cordas, cujos diferentes modos de vibração estão associados aos vários números quânticos que caracterizam as partículas elementares. Esta era uma teoria definida em 26 dimensões.

Em 1984 os físicos John Schwarz e Michael Green[10] produziram os primeiros resultados convincentes de que a teoria de supercordas poderia ser a solução para o problema da unificação, além de contemplar uma teoria quântica da gravitação[11]. No entanto, a teoria de supercordas necessita de um número de onze dimensões para o espaço-tempo, além de existirem, pelo menos, cinco formulações diferentes[12].

Em 1995, Eduard Witten mostrou que é possível considerar as diversas formulações da teoria de supercordas como aspectos diferentes de uma teoria subjacente ainda mais fundamental, e que também postula um espaço-tempo de onze dimensões. Nessa teoria, os objetos dinâmicos são chamados de *d-branas*[13], das quais as cordas são casos particulares. Witten chamou essa teoria de *Teoria M* (o "M" vem de "*membrana*") [12].

Uma das questões suscitadas pelas teorias de unificação diz respeito à razão da interação gravitacional ser tão fraca em relação às outras três. Esta questão fundamental ficou conhecida como o *problema da hierarquia*. Uma alternativa interessante para resolver essa questão, adveio de se procurarem as relações entre a intensidade da força gravitacional e as intensidades das demais forças, levando em conta as dimensões extras compactas, de tal modo que a "*constante gravitacional*" deveria levar em conta estas dimensões. Essa teoria foi proposta por Arkani-Hammed, Dimopoulos e Dvali[15] no final do século XX, e recebeu o nome de *braneworld* (mundo-brana), que por sua vez, advoga que tanto a matéria como as forças não-gravitacionais estão confinadas no espaço-tempo tetradimensional, enquanto a força gravitacional pode se propagar através de um espaço de dimensão superior conhecido na literatura como *bulk*[12]; isto significa que a gravitação é peculiarmente diferente das demais interações.

Outra possibilidade é que as dimensões extras, em vez de estarem limitadas por uma segunda brana, sejam infinitas, como no **Modelo de Randall-Sundrum**,

proposto no final do século XX por Lisa Randall, da Universidade de Princeton e Raman Sundrum, da Universidade de Boston [16], [17]. Essa teoria alvitra que nosso universo é uma hipersuperfície tetradimensional imersa em um espaço-tempo maior, de cinco dimensões (*bulk*). Aparentemente promissor, o modelo de Randall-Sundrum surgiu como alternativa, envolvendo uma única dimensão extra, que também pretende resolver o problema de hierarquia[12]. Neste modelo a constante cosmológica pentadimensional impede que a gravitação se propague livremente nas dimensões extras.

No início dos anos 90 uma nova versão não-compacta da teoria de Kaluza-Klein foi sugerida pelo físico inglês Paul Wesson, da Universidade de Waterloo, no Canadá e colaboradores. No cenário proposto por Wesson, chamado teoria **Espaço-Tempo-Matéria**(STM), matéria e campo gravitacional estão unificados na geometria do hiperespaço. Em outras palavras, essa teoria explica as propriedades e a existência da matéria em nosso mundo-brana a partir de um aparente vazio pentadimensional[12]; daí, a teoria ser freqüentemente referida na literatura como *teoria da matéria induzida*[18], [12].

A teoria de Wesson e o modelo de Randall-Sundrum são exemplos do que se convencionou chamar na literatura de *teorias de imersão*. Com efeito, para que estas teorias sejam consistentes, se faz necessário que estejam *ex leges*, isto é, que se garanta a observância dos teoremas de imersão[12]. A teoria de Wesson assenta-se sobre o Teorema de Campbell-Magaard [20],[19]. Este, por sua vez, não se aplica ao modelo de Randall-Sundrum. Para prosseguir com teorias de imersão mais gerais que a de Wesson, o teorema de Campbell não seria mais satisfatório, seria necessário generalizá-lo. Sucedeu-se então sua generalização por C. Romero e F. Dahia [21],[12].

Uma peculiaridade inerente às teorias de Wesson e ao modelo de Randall-Sundrum, é que a dinâmica das partículas no espaço pentadimensional leva ao surgimento de uma "aceleração anômala" no espaço-tempo tetradimensional, geralmente denominada *quinta força* ou *força extra* [23],[24].

As implementações do modelo de Randall-Sundrum [16][17] no mundo-brana[30], como também, na procura para soluções de supergravidade[31], costuma-se fazer uso do *warped product space* (WPS)-o *espaço produto distorcido*(EPD). O

conceito de um espaço produto distorcido foi introduzido por Bishop e O'Neill[25]. A vinculação com a relatividade geral foi feita primeiro por Beem, Ehrlich, e Powell,[26],[27] que chamaram atenção para o fato de várias soluções das equações de campo de Einstein serem EPD semi-riemannianas. Em [28] Beem e Ehrlich fizeram importantes avanços explorando este tipo de estrutura. Em [29] O'Neill levou esta linha de desenvolvimento a uma conclusão natural, elevando o EPD a um papel central. Ao longo desses anos, esse tipo especial de variedade diferenciável vem despertando um considerável interesse na literatura da Matemática e da Física.

Capítulo 2

Prolegômenos Matemáticos

A glória da geometria é que desses poucos princípios, oriundos de fora, seja capaz de produzir tantas coisas. Portanto, a geometria baseia-se na prática mecânica, e nada mais é do que aquela parte da mecânica universal que propõe com rigor a arte de medir.

(Sir Isaac Newton, Princípios Matemáticos da Filosofia Natural)

O objetivo destes prolegômenos é fornecer a base matemática necessária para que o leitor possa compreender o conceito de espaço produto distorcido. Com este fim, serão introduzidos os conceitos de variedade diferenciável, subvariedades, folheações, conexão e geodésica, bem como as definições dos tensores de torção e curvatura. A partir daí, será, então, considerada uma métrica e mostrar-se-á que a mesma induz de forma única uma conexão a ela compatível. O conceito de segunda forma fundamental também merecerá uma certa atenção, posto que em termos dele é enunciado o teorema da totalidade geodésica de uma subvariedade. Este, por sua vez, será aqui analisado para um espaço produto distorcido lorentziano.

Podemos dizer que o conceito de *variedade diferenciável* é *sine qua non*¹ para estender os métodos do cálculo diferencial a espaços mais gerais que o \mathbb{R}^n . Este conceito surge para generalizar o conceito de superfície diferenciável e apresenta-se como a designação matematicamente precisa da palavra "espaço" [32]. Essa copiosa abrangência o aloca distintamente entre os mais importantes conceitos da geometria.

¹Sem a qual não (Indispensável).

Em conseqüência de uma consideração inerente ao caráter de nossos conhecimentos da natureza, de fato, é indissolúvel a concatenação entre a física e geometria, esta primeira, apresenta-se como a ciência das relações contingentes² da natureza, a segunda, por sua vez, exprime os conectivos destas relações. Em verdade, a importância da geometria diferencial para a física teórica reside na possibilidade de estabelecer sistemas de correlação uniformes, nos termos dos quais, as relações contingentes dos fatores das teorias físicas possam ser expressas. Isso permite encontrar estruturas básicas semelhantes em áreas muito distintas da física.

Na intenção de encontrar as equações que determinam a dinâmica de um dado fenômeno físico, como também, na busca das condições suficientes, se não necessárias, para garantir que os enunciados das teorias tenham significado independente do sistema de coordenadas, acaba-se por estatuir uma relação dicotômica substancial entre a geometria e a dinâmica que se queira analisar. E na maneira usual de se proceder, primeiramente decide-se fixar a geometria e, em conseqüência dessa escolha, o tipo de dinâmica que ela comporta. Por outro lado, também poder-se-ia partir de certos conceitos dinâmicos e verificar, com isto, se a geometria poderá ser determinada. De qualquer maneira, esta adjunção de dinâmica e geometria exige sobretudo que a natureza da estrutura geométrica do sistema físico a ser descrito, tenha que ser postulada *a priori*. De um modo ou de outro, claro está, que essa estrutura geométrica deverá ser suficientemente abastada para que assim possa albergar a dinâmica em questão. Neste contexto, decorre que a geometrização de um dado fenômeno implica, *prima facie*³, propor uma estrutura diferenciável a uma variedade.

Se faz conveniente, aqui, inserir as principais terminologias e propriedades admitidas neste estudo. No intuito de assegurar uma melhor contextualização empreenderemos neste capítulo uma conceitualização "formal" das noções básicas de geometria diferencial, mas, assumimos a despretensão de esgotar aqui esse assunto, podendo o leitor ávido por mais detalhes encontrar formidáveis asserções em [32],[33].

²Diz-se das coisas e dos acontecimentos que se concebem, sob qualquer um dos aspectos da sua existência, como podendo ser ou não ser, não trazendo em si a razão da sua existência.

³À primeira vista.

Em nosso primeiro contato, desejamos introduzir as noções básicas da geometria em variedades diferenciáveis, estas por sua vez hão de nortear às que posteriormente se fizerem necessárias ao escopo da nossa abordagem. É importante ressaltar, que em todo esse trabalho, as variedades diferenciáveis consideradas sempre serão supostas como **Hausdorff** e com base enumerável. "Diferenciável" significará "de classe C^∞ ", e quando fizermos $M^n = M$ para indicar uma variedade diferenciável, n indicará a dimensão de M . Utilizaremos também a convenção de Einstein, que implica na omissão do somatório, quando um índice é repetido duas vezes num mesmo termo de uma equação, entende-se que há uma somatória em todos os valores desses índices.

Definição 1 *Uma variedade diferenciável n -dimensional é um conjunto M munido de uma família $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tal que:*

1. Cada $\varphi_\alpha : U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um mapeamento injetor de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M , e denominado uma parametrização de M .
2. $\bigcup_{\alpha} \varphi_\alpha(U_\alpha) = M$.
3. Se $W = \varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, a aplicação $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$ é um difeomorfismo⁴ entre os abertos $\varphi_\alpha^{-1}(W)$ e $\varphi_\beta^{-1}(W)$, contidos em \mathbb{R}^n .
4. A família $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é denominada **atlas** de M e deve ser maximal em relação às condições anteriores.

O atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ também denominado *estrutura diferenciável*, induz de forma natural uma topologia em M , definindo-se que $W \subseteq M$ é aberto se $\varphi_\alpha^{-1}(W \cap \varphi_\alpha(U)) \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto para todo $\alpha \in \{0, 1, \dots, n\}$. De fato, segue de (1) que M e \emptyset são abertos. As condições relativas à união e à interseção finita de abertos decorrem das relações

$$\varphi_\alpha^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha} \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha),$$

⁴Função diferenciável com inversa diferenciável

$$\varphi_\alpha^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} U_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha} \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha),$$

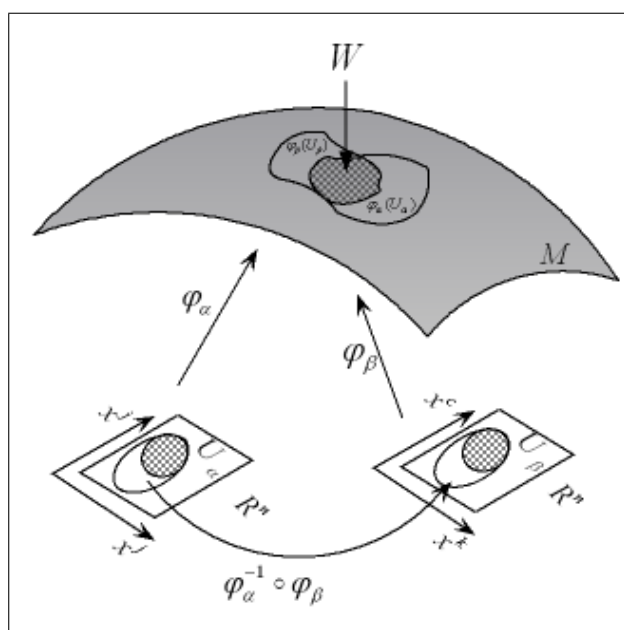


Figura 2.1: Ilustração da definição 1

A idéia por trás do conceito de variedade diferenciável é a de um espaço que pode ser curvo e possuir topologias complicadas, mas que localmente se assemelha ao \mathbb{R}^n . Dessa forma, as condições (1)-(3) da **Definição 1** garantem que toda variedade pode ser mapeada mediante cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, desde que cartas distintas possam ser transformadas uma na outra quando sobrepostas. O propósito da condição (4) é evitar que dois espaços equivalentes, munidos de atlas diferentes, figurem como variedades distintas.

De agora em diante, quando nos referirmos a uma n -variedade diferenciável, o faremos indicando por M^n , o índice n indicando a dimensão de M .

Agora faz-se necessário estender a noção de diferenciabilidade às aplicações entre variedades.

Definição 2 *Sejam M^n e B^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $f : M \rightarrow B$ é dita diferenciável em $p \in M$ se dada uma carta $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ em $f(p)$ existe uma outra carta $\psi_\beta : U_\beta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ em p tal que $f(\psi_\beta(U_\beta)) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$,*

aplicação $\varphi_\alpha^{-1} \circ f \circ \psi_\beta : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\psi_\beta^{-1}(p)$. A aplicação f é diferenciável em um aberto de M se é diferenciável em todos os pontos desse aberto.

Definição 3 *Sejam M e B duas variedades diferenciáveis e $\phi : M \rightarrow B$ uma aplicação bijetora. Diz-se que ϕ é um difeomorfismo entre M e B se ϕ e ϕ^{-1} são diferenciáveis.*

Assim, notemos que a definição de variedade diferenciável é dada de forma a independe da escolha de coordenadas locais particulares. Esse caráter inexorável, imprime uma vigorosa abrangência a este formalismo. Com efeito, comparece aqui o conceito de covariância geral ou, mais simplificadamente, podemos dizer que as leis da física, uma vez expressas neste formalismo, hão de se fazer imutáveis sob o juízo de observadores diversos.

A diferenciabilidade de uma variedade dota-a de uma estrutura suficientemente fértil para podermos definir um grande número de objetos geométricos como: curvas, funções, vetores tangentes, campos, tensores, etc.

Definição 4 *Sejam $p \in M$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ função diferenciável definida em M , com $D(M)$ sendo o conjunto de todas as funções diferenciáveis de M em \mathbb{R} . O vetor tangente a M no ponto p é uma aplicação $v : D(M) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que*

- *Condição de linearidade: $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$,*
- *Regra de Leibniz: $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$ para $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in D(M)$.*

Definição 5 *Sendo M uma variedade diferenciável, então uma aplicação $c : t \in I_\epsilon =]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$ é chamada de curva. Dizemos que a curva c é diferenciável em $0 \in I_\epsilon$ se existir uma carta local (U, φ) de M em torno de $p = c(0)$ tal que a curva $c_\varphi(t) = \varphi^{-1} \circ c : I_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}^m$ seja diferenciável na origem. O vetor tangente à curva c em $t = 0$ é a função $c'(0) : D(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$c'(0)f = \left. \frac{d(f \circ c)}{dt} \right|_{t=0}, f \in D(M).$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $c :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$ com $p = c(0)$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por $T_p M$.

Se escolhermos um sistema de coordenadas locais $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow M^n$ em $p = \varphi_\alpha(0)$, podemos exprimir a função f e a curva c nesta parametrização por

$$f \circ \varphi_\alpha(q) = f(x^1, \dots, x^n), \quad q = (x^1, \dots, x^n) \in U_\alpha,$$

e

$$\varphi^{-1} \circ c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)),$$

respectivamente. Portanto, restringimos f a c . Obtemos

$$\begin{aligned} c'(0) &= \left. \frac{d(f \circ c)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(x^1(t), \dots, x^n(t)) \right|_{t=0} = \\ &= \sum_{i=1}^n \dot{x}^i(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \left(\sum_{i=1}^n \dot{x}^i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_0 \right) f. \end{aligned} \tag{2.1}$$

É possível mostrar que o conceito de tangência entre curvas não depende da carta local escolhida, e ainda, que a noção de tangência entre curvas define uma relação de equivalência. No entanto, por ora, nos basta a definição acima[33].

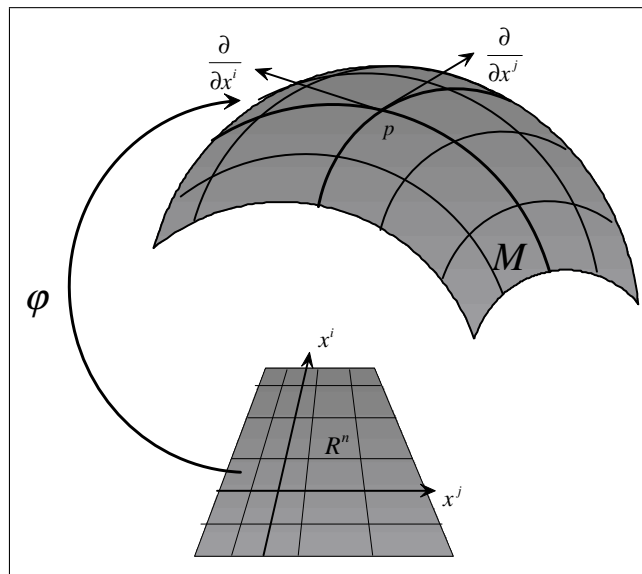


Figura 2.2: Base do espaço tangente em $p \in M$.

Definição 6 Seja M uma variedade diferenciável e $T_p(M)$ o espaço tangente em $p \in M$. O conjunto $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p(M)\}$ denomina-se **fibrado tangente** de M .

Este é o espaço de configurações no qual trabalhamos em mecânica analítica.

Uma aplicação diferenciável entre duas variedades induz uma transformação linear entre os espaços tangentes respectivos:

Definição 7 *Seja $\phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Denominamos diferencial de ϕ em $p \in M$ à transformação linear $d_p\phi : T_pM \rightarrow T_{\phi(p)}N$ definida por:*

$$d\phi_p(v)(f) \equiv v(f \circ \phi),$$

onde $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é qualquer função diferenciável definida numa vizinhança de p .

Se (U, x^1, \dots, x^n) é um sistema de coordenadas em p e (V, y^1, \dots, y^m) é um sistema de coordenadas em $\phi(p)$, obtemos $d\phi_p \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_{j=1}^m \frac{\partial(y^j \circ \phi)}{\partial x^i} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{\phi(p)}$. À matriz das derivadas parciais $\frac{\partial(y^j \circ \phi)}{\partial x^i}$ chamamos *matriz jacobiana* da transformação ϕ em relação aos sistemas de coordenadas escolhidos.

Uma classe de entidades geométricas importantes definidas em M é a dos campos vetoriais. Este conceito está implicitamente ligado à diferenciabilidade de M , sendo, um campo vetorial um operador diferencial. Podemos assim usar este fato para definir um campo vetorial de um modo independente das coordenadas.

Definição 8 *Um campo vetorial X em uma variedade diferenciável M é uma aplicação do tipo*

$$p \in M \longmapsto X_p \in T_pM.$$

Um campo vetorial X atua nas funções $D(M)$ da seguinte maneira: $(Xf)(p) = X_p f$. Dizemos que X é diferenciável se $Xf \in D(M)$ para todo $f \in D(M)$. Denotaremos por $\mathcal{L}(M)$ o espaço dos campos vetoriais diferenciáveis em M . Cada campo vetorial é uma aplicação \mathbb{R} -linear de $D(M)$ em $D(M)$, isto é:

$$X(fg) = gXf + fXg.$$

Inversamente, toda aplicação com esta propriedade é um campo vetorial diferenciável. Denotemos por $\mathcal{L}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais diferenciáveis em M . De certo pode-se escrever em um dado sistema de coordenadas locais

$$X(p) = \sum_{i=1}^n X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.2}$$

onde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ é a base associada a φ_α , $i = 1, \dots, n$.

Lema 1 *Dados dois campos vetoriais X e Y em M , existe um único campo de vetores de M , denotado por $[X, Y]$ e chamado colchete, tal que para todo $f \in D(M)$ temos $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$.*

Prova. Basta determinar uma (única) expressão local de um campo com esta propriedade. De fato, se $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ são expressões locais de X e Y num sistema de coordenadas (U, φ) de M , temos:

$$X(Yf) = X\left(\sum_j Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) = \sum_{ij} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}. \quad (2.3)$$

Por outro lado,

$$Y(Xf) = Y\left(\sum_i X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \sum_{ij} Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Portanto,

$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (2.4)$$

define um campo sobre M . ■

Definição 9 *Seja M uma variedade diferenciável e $p \in M$. O espaço $T_p M$ denomina-se espaço tangente a M em p . O dual $T_p^* M$ é denominado espaço cotangente a M em p e seus elementos são chamados de 1-formas.*

Teorema 1 *Seja M uma variedade n -dimensional. Os conjuntos $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i} : i = 1, \dots, n\right\}$ (via isomorfismo) e $\{dx^j : j = 1, \dots, n\}$ são bases duais para $T_p M$ e $T_p^* M$, respectivamente, denominadas bases locais de coordenadas (ou canônicas).*

Prova. Da Definição 4 decorre que o conjunto $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i} : i = 1, \dots, n\right\}$ é base para $T_p M$. Seja agora $df \in T_p^* M$. Definido por

$$df(v) = vf$$

$\in \mathbb{R}$ Como a dimensão de $T_p M$ é finita, a afirmação de que o conjunto $\{dx^j : j = 1, \dots, n\}$ é uma base de $T_p^* M$ decorre da equação (2.1), fazendo-se $f = x^j$ e $v = \frac{\partial}{\partial x^i}$. ■

O dual $T_p^* M$ é denominado espaço cotangente a M em p e seus elementos são denominados 1-formas. Decorre, também, daí que:

Teorema 2 *Seja M uma variedade diferenciável. Existe, associada a cada ponto $p \in M$, uma única álgebra linear, gerada pelos espaços $T_p M$ e $T_p^* M$.*

Prova. A existência e unicidade de uma álgebra gerada por um espaço linear é demonstrada de forma construtiva no Capítulo 4 da referência [38]. A álgebra assinalada acima denomina-se álgebra tensorial e cada elemento seu, de grau (r, s) , denominado tensor de ordem (r, s) , corresponde a uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{T_p^* M \times \dots \times T_p^* M}_r \times \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_s \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

O Conjunto dos tensores de ordem (r, s) será denotado por $T_s^r(M)$. Dados os tensores $T \in T_s^r(M)$ e $S \in T_q^p(M)$, o produto de T por S na álgebra tensorial, denominado produto tensorial, é o tensor $T \otimes S \in T_{s+q}^{r+p}(M)$ dado por

$$\begin{aligned} T \otimes S(w^1, \dots, w^r, \dots, w^{r+p}, X_1, \dots, X_s, \dots, X_{s+q}) &= \\ &= T(w^1, \dots, w^r, X_1, \dots, X_s) S(w^{r+1}, \dots, w^{r+p}, X_{s+1}, \dots, X_{s+q}), \end{aligned}$$

onde $w^i \in T_p M^*$, $i = 1, \dots, r + p$, e $X_j \in T_p M$, $j = 1, \dots, s + q$.

■

Teorema 3 *O conjunto dos elementos de grau (r, s) constitui um espaço linear de dimensão n^{r+s} , cuja base é dada por elementos da forma $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$, onde $\{e_{i_k} : i_k = 1, \dots, n\}$ é base de $T_p M$ e $\{e^{j_l} : j_l = 1, \dots, n\}$ é base de $T_p M^*$. Em particular, $D \equiv T_0^0(M)$, $T_p M \equiv T_0^1(M)$ e $T_p M^* \equiv T_1^0(M)$.*

Decorre da definição de variedade que todos os tensores estão definidos a menos de mudança de coordenadas, ou seja, difeomorfismos que transformam as componentes quando a base coordenada de $T_s^r(M)$ muda.

O teorema acima garante que tensores são objetos pontuais, mas todo tensor pode ser estendido a uma vizinhança de um ponto. Com efeito, é consequência da **topologia induzida** pelas cartas que toda variedade é localmente conexa, pois sempre existe uma vizinhança aberta em $p \in M$ homeomorfa a um aberto do \mathbb{R}^n .

2.1 Imersões

As propriedades da diferencial de uma aplicação entre variedades caracterizam os predicados locais da aplicação. A seguinte definição distingue os tipos principais de aplicações diferenciáveis:

Definição 10 *Seja $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável.*

- (a) ϕ diz-se uma **imersão** se $d_p\phi : T_pM_1 \rightarrow T_{\phi(p)}M_2$ é injetiva, para todo o $p \in M_1$;
- (b) se ϕ é uma imersão e além disso, é um homeomorfismo sobre $\phi(M_1) \subset M_2$, onde $\phi(M_1)$ tem a topologia induzida por M_2 , diz-se que ϕ é um **mergulho**.
- (c) ϕ diz-se uma **submersão** se $d_p\phi : T_pM_1 \rightarrow T_{\phi(p)}M_2$ é sobrejetiva, para todo o $p \in M_1$;
- (d) ϕ diz-se um **étale**⁵ se $d_p\phi : T_pM_1 \rightarrow T_{\phi(p)}M_2$ é um isomorfismo para todo o $p \in M_1$.

As imersões, submersões e étales possuem formas canônicas locais. Todas elas são casos particulares de um teorema geral denominado **teorema do posto**. O posto de uma transformação linear T entre dois espaços vetoriais A e B é a dimensão de sua imagem, isto é, o número máximo de vetores de sua base, ou, equivalentemente, o número máximo de colunas linearmente independentes de uma matriz dessa transformação T . Enunciaremos agora o teorema do posto:

Teorema 4 *Seja $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável e $p \in M_1$. Se a aplicação $d_p\phi : T_pM_1 \rightarrow T_{\phi(p)}M_2$ tem posto constante r , para todo o ponto q na vizinhança de p , então existem coordenadas locais $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ centradas em p e coordenadas locais $(V, \xi_\beta) = (V, y^1, \dots, y^m)$ centradas em $\phi(p)$, tais que:*

$$\xi_\beta \circ \phi \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0).$$

Aqui omitiremos a prova deste teorema, para não onerar desnecessariamente nossa exposição. Para maiores esclarecimentos consultar [34].

⁵Visto que uma *etale* não é mais que uma aplicação que é, simultaneamente, uma imersão e uma submersão, basicamente uma *etale* é a mesma coisa que um difeomorfismo local.

2.2 Subvariedades

Definição 11 Sendo $\psi : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+m}$ uma imersão. Então, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $\psi(U) \subset \bar{M}$ é uma **subvariedade** de \bar{M} .

Definição 12 Sendo $\psi : \bar{M}^{n+m} \rightarrow M^n$ uma submersão. Então para todo $p \in M$, a **fibra** $\psi^{-1}(p) = \psi_p$ é uma **subvariedade** de \bar{M} e um vetor tangente de \bar{M} a alguma ψ_p , $p \in M$, é chamado vetor vertical da submersão.

Para simplificar a notação, quando nos referirmos a subvariedade o faremos identificando U com $\psi(U)$ e cada vetor $v \in T_p M$, $q \in U$, com $d\psi_q(v) \in T_{\psi(q)} \bar{M}$.

2.3 Variedade-produto

Em primeira instância, trataremos aqui de saber, se o produto cartesiano de duas ou mais variedades diferenciáveis é, por sua vez, uma variedade diferenciável. Iniciemos por analisar a seguinte proposição:

Proposição 1 Sejam M_1 e M_2 duas variedades diferenciáveis, e $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ e $B = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ seus respectivos atlas. Temos que $M_1 \times M_2$ é uma variedade, com atlas dado por $A \times B = \{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$

Tal resultado decorre imediatamente do fato do produto cartesiano de conjuntos abertos de um espaço euclidiano ser um conjunto aberto, e do produto cartesiano de aplicações diferenciáveis ser diferenciável. Com efeito, chamemos por **variedade-produto** a variedade resultante do produto de uma ou mais variedades, atendendo é claro, ao enunciado da proposição acima.

Utilizando um sistema de coordenadas produto em $(p, q) \in M_1 \times M_2$ com $p \in M_1$ e $q \in M_2$ não é difícil conferir que:

(a) As projeções naturais:

$$\pi : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1 \text{ enviando } (p, q) \text{ para } p,$$

$$\sigma : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2 \text{ enviando } (p, q) \text{ para } q,$$

são submersões.

(b) Para cada $(p, q) \in M_1 \times M_2$ fixo, as folhas

$$\begin{aligned} M_1 \times q &= \{(r, q) \in M_1 \times M_2 : r \in M_1\}, \text{ folha vertical,} \\ p \times M_2 &= \{(p, b) \in M_1 \times M_2 : b \in M_2\}, \text{ folha horizontal,} \end{aligned}$$

são subvariedade de $M_1 \times M_2$.

(c) Para cada (p, q)

$$\begin{aligned} \pi|(M_1 \times q) &\text{ é um difeomorfismo de } M_1 \times q \text{ em } M_1. \\ \sigma|(p \times M_2) &\text{ é um difeomorfismo de } p \times M_2 \text{ em } M_2 \end{aligned}$$

Os espaços tangentes

$$T_{(p,q)}M_1 \equiv T_{(p,q)}(M_1 \times q) \quad \text{e} \quad T_{(p,q)}M_2 \equiv T_{(p,q)}(p \times M_2)$$

são subespaços do espaço tangente de $M_1 \times M_2$ em (p, q) .

Lema 2 $T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ é a soma direta dos subespaços $T_{(p,q)}M_1$ e $T_{(p,q)}M_2$. Isso quer dizer, que cada elemento z de $T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ tem uma expressão única, tal que:

$$z = u + v \text{ onde } u \in T_{(p,q)}M_1 \text{ e } v \in T_{(p,q)}M_2.$$

Prova. Como $\pi|p \times M_2$ é constante, $d\pi_{(p,q)} : T_{(p,q)}M_2 \rightarrow T_p(M_1)$ é uma aplicação nula. Entretanto, $d\pi_{(p,q)} : T_{(p,q)}(M_1)$ é um isomorfismo de $T_{(p,q)}M_1$ em $T_p(M_1)$. Assim $T_{(p,q)}(M_1) \cap T_{(p,q)}(M_2) = \emptyset$. O resultado segue então como $T_{(p,q)}(M_1)$ de dimensão m e $T_{(p,q)}(M_2)$ de dimensão n são subespaços de $T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ de dimensão $m + n$, então:

$$T_{(p,q)}(M_1 \times M_2) = T_pM_1 \times T_qM_2.$$

■

Definição 13 Se $f \in D(M_1)$, o levantamento de f para $M_1 \times M_2$ é:

$$\tilde{f} = f \circ \pi \in D(M_1 \times M_2).$$

Definição 14 Se $v \in T_p M_1$ e $q \in M_2$, então a levantamento \tilde{v} de v em p para (p, q) é o único vetor em $T_{(p,q)} M_1$ tal que

$$d\pi(\tilde{v}) = v.$$

Definição 15 Se $X \in \mathcal{L}(M_1)$ a levantamento de X para $\mathcal{L}(M_1 \times M_2)$ é o campo vetorial \tilde{X} denominado **levantamento vertical** de X , cujo valor em cada (p, q) é o levantamento de X_p para (p, q) . Assim o levantamento de $X \in \mathcal{L}(M_1)$ para $M_1 \times M_2$ é o único elemento de $\mathcal{L}(M_1 \times M_2)$ que se π -relaciona com X e se σ -relaciona com o campo vetorial nulo em M_2 .

Definição 16 Se $V \in \mathcal{L}(M_2)$ a levantamento de V para $M_1 \times M_2$ é o campo vetorial \tilde{V} denominado **levantamento horizontal** de V , cujo valor em cada (p, q) é o levantamento de V_q para (p, q) . Assim o levantamento de $V \in \mathcal{L}(M_2)$ para $M_1 \times M_2$ é o único elemento de $\mathcal{L}(M_1 \times M_2)$ que se σ -relaciona com V e se π -relaciona com o campo vetorial nulo em M_1 .

Denominaremos por $\mathcal{L}(M_1)$ o conjunto dos levantamentos horizontais e por $\mathcal{L}(M_2)$ o conjunto dos levantamentos verticais.

Corolário 1 1. Se $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{L}(M_1)$, então, $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]} \in \mathcal{L}(M_1)$, e similarmente para $\mathcal{L}(M_2)$.

2. Se $\tilde{X} \in \mathcal{L}(M_1)$ e $\tilde{V} \in \mathcal{L}(M_2)$, o $[\tilde{X}, \tilde{V}] = [X, V] = 0$.

Prova. (1) Decorre diretamente da linearidade da operação levantamento (\sim). (2) Pode ser facilmente demonstrada usando-se uma base coordenada. ■

Mais adiante mostraremos outras propriedades importantes desse tipo especial de variedade.

2.4 Folheações

A ideia intuitiva de folheação corresponde à decomposição de uma variedade numa união de subvariedades conexas, disjuntas, de mesma dimensão chamadas folhas, as quais se acumulam localmente como as folhas de um livro.

Definição 17 A família $F = \{L_\alpha : \alpha \in I \in \mathbb{R} \text{ de subconjuntos conexos de uma variedade } M^n \text{ é uma folheação de dimensão } k \text{ se:}$

- $\bigcup_\alpha L_\alpha = M^n,$
- $\alpha \neq \beta \implies L_\alpha \cap L_\beta = \emptyset,$
- para qualquer ponto $p \in M$ existe um sistema de coordenadas local $(U_p, \varphi_p),$ tal que $p \in U_p$ e $\varphi(U_p) \cap L_\alpha \neq \emptyset,$ para algum $L_\alpha,$ de tal forma que $\varphi^{-1}(U_p \cap L_\alpha)$ é da forma

$$A_c = \{(x^1, \dots, x^k) \in \varphi^{-1}(U_p) : x^{v+1} = c^{v+1}, \dots, x^k = c^k\} \quad (2.6)$$

e $c_i \in \mathbb{R}$ é constante.

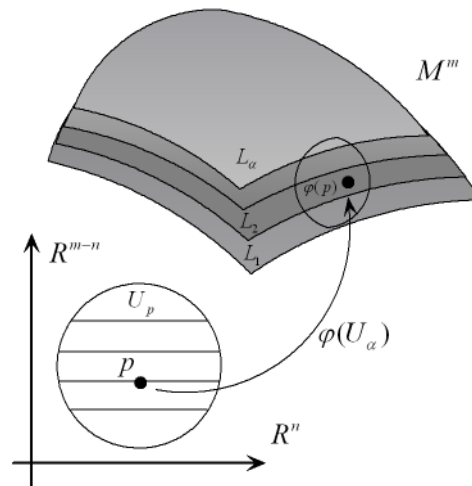


Figura 2.3: Folheação

Portanto, uma folheação n -dimensional de uma variedade diferenciável M^n é, a grosso modo, uma decomposição de M em subvariedades conexas de dimensão k chamadas folhas, as quais se aglomeram localmente como os subconjuntos de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k,$ com as coordenadas (x^{k+1}, \dots, x^n) constantes.

Em geral, as folhas não são mergulhadas, pois, uma folha pode intersectar um número infinito de vezes um domínio de coordenadas $\varphi(U_p)$ e acumular-se sobre si própria.

Seja $\phi : M \rightarrow B$ uma submersão. Pela forma local das submersões, as componentes conexas de $\phi^{-1}(q)$, onde $q \in B$, formam uma folheação de M . Esta folheação tem codimensão igual à dimensão de B . Neste caso, as folhas são todas variedades mergulhadas.

2.5 Variedades semi-riemannianas

A primeira coisa que um habitante de uma variedade semi-riemanniana, com alguma curiosidade pela geometria, talvez queira saber é como medir a distância entre dois pontos em seu mundo-variedade.

Evidentemente, ao tentar medir distâncias em seu *habitat* o faria de maneira não necessariamente igual a um habitante do \mathbb{R}^n . Tal discrepância decorre da noção de métrica que caracteriza sua variedade.

Definição 18 *Uma métrica semi-riemanniana g de classe C^k em uma variedade diferenciável M de dimensão n é definida como sendo um campo tensorial de classe C^k , do tipo $(0,2)$, simétrica e não-degenerada, isto é, uma correspondência que associa à cada ponto p de M uma forma bilinear g tal que: $g : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

- $g(v, w) = g(w, v), \forall v, w \in T_pM$;
- se $g(v, w) = 0, \forall w \in T_pM$, então v é um vetor nulo.

Seja $\varphi_\alpha : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $\varphi_\alpha(x_1, \dots, x_n) = p \in \varphi_\alpha(U)$ e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_p$ uma base coordenada em T_pM . Estão

$$g(v, w) = g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}(p), \frac{\partial}{\partial x^j}(p) \right) v^i w^j \Big|_p = g_{ij} v^i w^j \Big|_p$$

com $v, w \in T_pM$.

Pode-se mostrar que $g_{ij}(x^1, \dots, x^n)$ são funções diferenciáveis em U . Vemos que $g(\cdot, \cdot)$ é o produto interno usual a menos da condição de ser positivamente definido.

As funções g_{ij} são as componentes do campo tensorial g , em um dado sistema de coordenadas locais $\varphi_\alpha : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$.

A existência de uma métrica semi-riemanniana desse tipo é sempre possível em uma variedade, porto que variedade satisfaz o axioma de Hausdorff e o axioma da base enumerável.

Definição 19 Dizemos que a **assinatura** de uma métrica g semi-riemanniana é o número s ($0 \leq s \leq n$) de autovalores positivos da matriz g_{ij} .

Definição 20 Uma métrica g é dita riemanniana se $n = s$.

Notemos que essa definição equivale a dizer que a mesma é positiva-definida.

Definição 21 Uma métrica g semi-riemanniana é dita lorentziana se $n = 1$.

Definição 22 Seja $v \in T_pM$ vetor não-nulo. Então v pertence a uma das três classes distintas:

- $g(v, v) > 0$; v é do tipo "tempo".
- $g(v, v) < 0$; v é do tipo "espaço".
- $g(v, v) = 0$; v é do tipo "luz".

Se a métrica é não-degenerada e contínua, os vetores do tipo luz de T_pM formam em cada ponto de M um duplo "cone" (o cone de luz) o qual separa os vetores do tipo tempo dos do tipo espaço. Esta separação provê a “**estrutura causal**” nessa variedade.

Uma variedade diferenciável é dita semi-riemanniana se nela está definida uma métrica semi-riemanniana.

2.5.1 Conexões afins

Numa variedade diferenciável inexiste intrinsecamente a noção de paralelismo⁶ entre vetores definidos em pontos diferentes. Para suplantar esta deficiência, podemos lançar mão do conceito de conexão afim e a partir dela construir uma regra que permita estabelecer uma certa noção de paralelismo.

A conexão afim em uma variedade diferenciável corresponde à introdução de uma estrutura adicional que independe conceitualmente da métrica. Com efeito, se a variedade dispõe de uma conexão afim, possui uma estrutura potencialmente fértil que lhe confere a possibilidade de estabelecer a noção de derivada covariante, que por sua vez, será o substrato de várias das definições posteriores, como geodésicas e curvatura.

Definição 23 *Seja uma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ denominamos gradiente de f um campo vetorial $\text{grad } f$ em M definido por:*

$$g(\text{grad } f(p), v) = df_p(v) \quad (2.7)$$

Com $p \in M$, $v \in T_pM$.

Definição 24 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{L}(M) \times \mathcal{L}(M) \rightarrow \mathcal{L}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

- $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$, onde $f, g \in D(M)$

⁶Foi Levi Civita, em 1926, quem transpôs o conceito de "campo de vetores paralelos", ao longo de uma curva mergulhada no espaço no espaço euclidiano, para o caso generalizado de uma variedade diferenciável n -dimensional. Contudo, o fez admitindo *a priori* uma métrica riemanniana e uma derivada covariante.

Podemos expressar uma conexão afim via uma carta (U, φ_α) de M . Mais precisamente, se $X, Y \in \mathcal{L}(M)$, então, usando esse sistema de coordenadas; $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Se denotarmos $\frac{\partial}{\partial x^i}$ por ∂_i e se ∇ é uma conexão afim sobre M , teremos $\nabla_X Y$ escrito na seguinte forma:

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i \partial_i} Y = X^i \nabla_{\partial_i} (Y^j \partial_j) = X^i Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j + X^i \partial_j (Y^j) \partial_j.$$

Se escrevermos ainda $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$ (onde as funções Γ_{ij}^k devem ser diferenciáveis), teremos a expressão

$$\nabla_X Y = \{X^i Y^j \Gamma_{ij}^k + X(Y^k)\} \partial_k \tag{2.8}$$

o que significa que $\nabla_X Y$ em um ponto p de M depende de $X^i(p)$, $Y^j(p)$ e das derivadas $X(Y^k)$ de Y^k na direção de X .

A noção de conexão fornece, portanto, uma maneira de derivar vetores na direção de vetores.

Precisamos, agora, introduzir o conceito de *derivada covariante* de um campo vetorial $X \in \mathcal{L}(M)$ ao longo de uma curva em particular. Para esse fim, consideremos, então, a seguinte proposição:

Definição 25 *Estando M^n munida de uma conexão afim ∇ , existe então uma única correspondência que associa a um campo vetorial X definido ao longo de uma curva $\gamma(t)$ um outro campo vetorial $\frac{DX}{dt}$ ao longo de $\gamma(t)$, denominado derivada covariante de X ao longo de $\gamma(t)$, tal que:*

- $\frac{D}{dt}(X + Y) = \frac{DX}{dt} + \frac{DY}{dt}$
- $\frac{D}{dt}(fX) = \frac{df}{dt}X + f \frac{DX}{dt}$, onde $X = X(t)$ é uma campo vetorial definido em $\gamma(t)$ e $f \in D(M)$ restrita ao longo de $\gamma(t)$;
- Se $Y \in \mathcal{L}(M)$, isto é $Y(t) = Y(\gamma(t))$, então $\frac{DY}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} Y$.

Aqui introduzimos esses atributos inerentes à derivada covariante via uma definição. No entanto, os mesmos podem ser alcançados via uma proposição, demonstrável a partir das propriedades da conexão afim. Em verdade, toda essa demonstração encontra-se translúcida em [33]

Definição 26 Dizemos que X definido ao longo de $\gamma(t)$ é paralelo se a derivada covariante $\frac{DX}{dt}$ de X ao longo de γ , for nula.

Proposição 2 Ou ainda pode-se dizer que X foi transportado paralelamente ao longo de γ .

Seja o segmento $\gamma([t_0, t_1])$, onde $t_0, t_1 \in I$. Tomamos então uma vizinhança coordenada $\varphi_\alpha(U)$ de um sistema de coordenadas $\varphi_\alpha : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ em torno de $\gamma(I)$. Seja $\varphi_\alpha^{-1}(\gamma(t)) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ a expressão local de $\gamma(t)$ e seja $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t_0)}$.

Da definição de derivada covariante temos:

$$\frac{DX}{dt} = \frac{D}{dt} (X^i \partial_i) = \frac{dX^i}{dt} \partial_i + X^i \frac{D\partial_i}{dt}. \quad (2.9)$$

e ainda que:

$$\frac{D\partial_i}{dt} = \nabla_{\frac{dx^j}{dt} \partial_j} \partial_i = \nabla_{\left(\frac{dx^i}{dt} \partial_i\right)} \partial_j = \frac{dx^i}{dt} \nabla_{\partial_i} \partial_j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

portanto,

$$\frac{DX}{dt} = \frac{dX^i}{dt} \partial_i + X^i \frac{dx^i}{dt} \nabla_{\partial_i} \partial_j. \quad (2.11)$$

Convenientemente escrevemos $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$, e, trocando j por k na primeira soma, obtemos

$$\frac{DX}{dt} = \left\{ \frac{dX^k}{dt} + X^j \frac{dx^i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right\} \partial_k = 0 \quad (2.12)$$

As equações (2.12) nos levam a um sistema de n equações diferenciais para $X^k(t)$,

$$\frac{dX^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k X^j \frac{dx^i}{dt} = 0 \quad (2.13)$$

Da teoria das equações diferenciais sabemos que (2.13) por ser uma EDO linear, possui uma única solução satisfazendo a condição inicial $X^k(t_0) = X_0^k$.

Conexão de Levi-Civita

Mesmo após termos definido o conceito de conexão afim em uma variedade diferenciável, notamos a existência de certa arbitrariedade quanto a esse conceito. Em uma variedade semi-riemanaiana que está munida de um conceito de métrica,

que por sua vez nos permite medir o comprimento de vetores. Ainda necessitamos estabelecer a maneira pela qual se darão as relações entre estes dois conceitos. Se optarmos por uma conexão tal que o produto escalar dos campos vetoriais X e Y definido por $g(X, Y)$ se mantenha constante ao transportarmos os vetores paralelamente ($\nabla_{\dot{\gamma}}X = 0, \nabla_{\dot{\gamma}}Y = 0$), ao longo de uma curva γ , esta é denominada conexão de Levi-Civita ou Riemanniana. Também decorrerá daí que a conexão de Levi-Civita estará completamente determinada em virtude do extraordinário teorema de Levi-Civita.

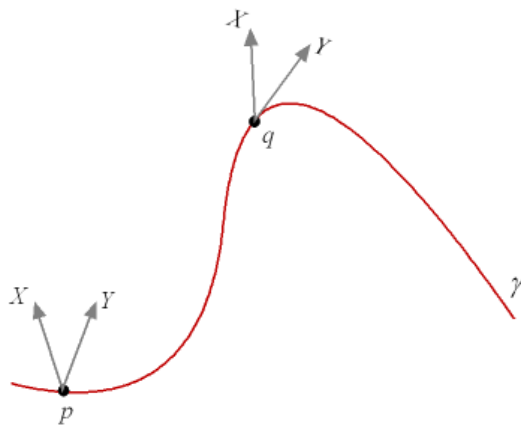


Figura 2.4: Transporte paralelo segundo uma conexão riemanniana

Definição 27 *Seja M uma variedade semi-riemanniana munida de uma conexão afim ∇ e uma métrica g . ∇ é dita compatível com g , se*

$$\nabla_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \text{ para todo } X, Y, Z \in \mathcal{L}(M). \quad (2.14)$$

Definição 28 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . A aplicação $T : \mathcal{L}(M) \times \mathcal{L}(M) \rightarrow \mathcal{L}(M)$ dada por: $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$, é chamada de torsão.*

Teorema 5 (Levi-Civita) *Dada uma variedade semi-riemanniana (M, g) existe uma única conexão ∇ , chamada de conexão de Levi-Civita, tal que:*

Proposição 3 • *A torsão T é identicamente nula (∇ é simétrica).*

- ∇ é compatível com a métrica.

Prova. Usando (2.14) podemos escrever as seguintes igualdades:

$$X[g(Y, Z)] = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad (2.15)$$

$$Y[g(Z, X)] = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X), \quad (2.16)$$

$$Z[g(X, Y)] = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y), \quad (2.17)$$

Somando (2.15) com (2.16) e subtraindo o resultado de (2.17) chegamos à seguinte equação:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X[g(Y, Z)] + Y[g(X, Z)] - Z[g(X, Y)] + \quad (2.18)$$

$$+g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X). \quad (2.19)$$

Essa é a equação de Koszul, que indica que ∇ está unicamente determinada por g .

■

Também podemos escrever convenientemente

$$2g(\nabla_X Y, Z) = F(X, Y, Z) \quad (2.20)$$

onde

$$F(X, Y, Z) = X[g(Y, Z)] + Y[g(X, Z)] - Z[g(X, Y)] + \\ +g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X).$$

A conexão determinada pelo teorema acima é denominada *conexão de Levi-Civita*.

Por fim, podemos expressar a equação acima em um sistema de coordenadas (U, φ_α) .

Substituindo (2.4) e (2.8) em (2.18) após algumas manipulações segue-se que:

$$\Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \right\} \quad (2.21)$$

que é exatamente a expressão dos *símbolos de Christoffel de primeira espécie*.

Ou ainda, tendo em vista que a matriz (g_{lk}) admite uma inversa (g^{lk}) , temos:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}g^{km} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j}g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k}g_{ij} \right\} \quad (2.22)$$

A equação (2.22) é a expressão já bem conhecida dos *símbolos de Christoffel de segunda espécie*.

2.5.2 Geodésicas em variedades semi-riemannianas

A importância das geodésicas surge através da lei segundo a qual uma partícula que não esteja sujeita a restrições move-se em uma geodésica. Precisamente geodésicas são as curvas nas quais o *transporte paralelo* mantém o vetor constantemente tangente à curva durante todo o deslocamento paralelo.

Definição 29 *Uma curva $\gamma : I \in \mathbb{R} \rightarrow M$ em uma variedade diferenciável M munida de uma conexão afim ∇ é dita uma geodésica, se para todo $t \in I$ temos*

$$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0 \quad (2.23)$$

Vamos agora determinar a expressão da equação $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0$ em um sistema de coordenadas. Para isto, tomemos um sistema de coordenadas locais (U, φ_α) em torno de $\gamma(t_0)$ em U . Assim,

$$\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)).$$

Agora, façamos uso da definição de geodésica, isto é,

$$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^k}{dt} \right) + \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \Gamma_{ij}^k \right\} \partial_k = 0$$

Portanto, temos:

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0. \quad (2.24)$$

A equação (2.24) constitui um problema de valor inicial, com dados iniciais

$$\varphi_p(0) = p, \quad \dot{\gamma}(0) = v \in T_pM, \quad (2.25)$$

em princípio solúvel, posto que o teorema da existência e da unicidade da teoria de equações diferenciais ordinárias assim o garante. Intuitivamente podemos dizer que quando nos deslocamos sobre uma geodésica caminhamos ao longo da "mesma direção". Neste sentido, as geodésicas são generalizações das linhas retas do espaço euclidiano.

Devido ao carácter lorentziano de M , podemos fazer uma distinção entre três classes de geodésicas. São elas as geodésicas **temporais**, **nulas** e **espaciais**. Contudo, devido à "estrutura causal", somente as duas primeiras poderão servir para a descrição do movimento de partículas.

Podemos então caracterizar um caminho num espaço-tempo como sendo uma geodésica se existe uma parametrização, tal que os vetores tangentes à curva correspondente constituem um campo de vetores paralelos ao longo da curva.

Proposição 4 *Seja uma reparametrização $\gamma(s)$ da geodésica $\tilde{\gamma}(t(s))$ pelo parâmetro afim $t = as + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Então $\gamma(s)$ é uma geodésica.*

Prova. Suponhamos que definimos $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(s)$ com $t = as + b$ e a, b constantes. Expressando a equação de geodésica num sistema de coordenadas $\{x^k\}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} &= \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} \left(\frac{dx^k}{ds} \frac{ds}{dt} \right) + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \\ &= a^2 \left(\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \right) = 0, \end{aligned}$$

o que implica

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0. \quad (2.26)$$

■

Outra propriedade interessante é a seguinte, como o vetor tangente a uma geodésica $\gamma(t)$, $v = \dot{\gamma}$, é transportado paralelamente a si próprio, tem-se que: $\nabla_v v = 0$. Logo temos:

$$\begin{aligned} \nabla_v g(v, v) &= \\ &= g(\nabla_v v, v) + g(v, \nabla_v v) = 0 \\ &\Rightarrow g(v, v) = K = \text{constante} \end{aligned}$$

Todavia, o valor da contante K pode alterar-se por reparametrização da geodésica. De fato, fazendo $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(at + b)$, decorre que $\tilde{v} = \frac{v}{a}$ e, portanto, $g(\tilde{v}, \tilde{v}) = \frac{K}{a^2}$. Toda curva regular α em M para a qual o transporte paralelo de seu vetor tangente em relação a se próprio, admite uma reparametrização que o torna compatível com (2.23) denomina-se *pregeodésica*. Em verdade, prova-se [36] que toda curva regular α em M tal que

$$\nabla_{\frac{d\alpha}{ds}} \frac{d\alpha}{ds} = f(s) \frac{d\alpha}{ds}, \quad (2.27)$$

é uma pregeodésica.

De sorte que em um sistema de coordenadas locais $\varphi_\alpha(x^1, \dots, x^n)$ em M a primeira integral de (2.23) é:

$$g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = K, \quad (2.28)$$

Em uma variedade M lorentziana as geodésicas são classificadas segundo a seguinte definição:

Definição 30 *Quanto às geodésicas em uma variedade lorentziana, distinguimos três situações:*

1. *Quando $K > 0$ γ é uma geodésica temporal e existe uma parametrização tal que*

$$g(v, v) = g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 1;$$

2. *Quando $K = 0$ γ é uma geodésica nula ou tipo luz e existe uma parametrização tal que*

$$g(v, v) = g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0;$$

3. *Finalmente, quando $K < 0$ γ é uma geodésica espacial e existe uma parametrização tal que*

$$g(v, v) = g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = -1;$$

De forma resumida podemos dizer, que sempre é possível reparametrizar uma geodésica de modo a termos

$$g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = K, \quad (2.29)$$

onde $K = 0, \pm 1$.

Partículas materiais (massa de repouso não nula) descrevem trajetórias de tipo tempo, isto é, com $K = 1$, enquanto que as partículas sem massa (isto é, fótons, grávitons) descrevem trajetórias de tipo-luz, isto é, com $K = 0$. Trajetórias com $K = -1$ não têm realidade física, uma vez que um movimento repretado por elas violaria a casualidade.

É interessante notar que o comprimento de arco das geodésicas do tipo-tempo é interpretado como o tempo próprio medido no referencial da partícula. Geodésicas do tipo-luz não podem ser parametrizadas pelo comprimento de arco, mas admitem parâmetros afins.

Usando os métodos variacionais as equações de geodésica podem ser conseguidas de maneira diferente.

Definição 31 *Sejam (M, g) variedade semi-riemanniana e uma **função potencial** r -diferenciável ($r \geq 2$) $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}$. Denominamos **Lagrangiana** uma aplicação $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $L|_{(p,v)} = \frac{1}{2}g(v, v)|_p - \Phi(p)$ ou seja, $dL = 0$.*

Seja $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$, uma função diferenciável no fibrado tangente de M . A curva α em M é um extremo de L contanto que, para uma quantidade suficiente de sistemas de coordenadas $(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$ que cubram TM a seguinte equação é válida:

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(\alpha') = \frac{\partial L}{\partial x^i}(\alpha') \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \quad (2.30)$$

Para variedade semi-riemanniana M , consideremos $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo $L(v) = \frac{1}{2}g(v, v)$. Em termos das coordenadas, $L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + \Phi(x)$.

As equações de Euler resultantes são:

$$\frac{d}{ds} \left[g_{ij} \frac{dx^j}{ds} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \quad \text{para } k = 1, \dots, n.$$

$$g_{ij} \frac{d^2 x^j}{ds^2} + \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}. \quad (2.31)$$

Notemos agora que, usando propriedades de simetria nos índices j e k , o segundo termo em (2.31) também pode ser escrito como

$$\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}$$

conseqüentemente

$$g_{ij} \frac{d^2 x^j}{ds^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \quad (2.32)$$

aplicando g^{li} em toda equação (2.32) teremos

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \frac{1}{2} g^{li} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = -g^{li} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$$

e tendo em conta (2.22), finalmente

$$\frac{d^2 x^l}{ds^2} + \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^l \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = -g^{li} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$$

Assim, quando $\Phi(x) = 0$ recuperamos a equação (2.24), isso é:

$$\frac{d^2 x^l}{ds^2} + \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^l \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

2.5.3 Curvatura intrínseca

Consideremos uma curva $\gamma(t) \subset M$ e suponhamos que partimos de um ponto p e transportamos paralelamente o vetor X ao longo dessa curva, regressando ao ponto inicial. Então obteremos o vetor \bar{X} que, em geral, será diferente do campo inicial. Se consideramos, agora, outra curva $\alpha(s) \subset M$ que passe também por p e transportarmos X ao longo da nova curva, obteremos \tilde{X} , que, em geral, será diferente de X e \bar{X} . Esta não-integrabilidade do transporte paralelo corresponde ao fato de que, em geral, as derivadas covariantes não comutam. O tensor curvatura de Riemann nos dá uma “medida” desta não-comutatividade, estando assim definido:

Definição 32 A curvatura R de uma variedade semi-riemanniana M é uma aplicação $R : \mathcal{L}(M) \times \mathcal{L}(M) \times \mathcal{L}(M) \rightarrow \mathcal{L}(M)$ dada por :

$$R(X, Y, Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (2.33)$$

Uma vez fixados $X, Y \in \mathcal{L}(M)$, podemos considerar o operador curvatura $R(X, Y)$ dado por $R(X, Y) : \mathcal{L}(M) \rightarrow \mathcal{L}(M)$, tal que $R(X, Y)Z = R(X, Y, Z)$.

Seja $M = \mathbb{R}^n$, e indiquemos por $Z^i = (z^1, \dots, z^n)$, as componentes do campo Z nas coordenadas naturais do \mathbb{R}^n . Obteremos assim $(\nabla_X Z)^i = (Xz^1, \dots, Xz^n)$, $(\nabla_Y \nabla_X Z)^i = (YXz^1, \dots, YXz^1)$, o que implica que

$$R(X, Y, Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z = 0. \quad (2.34)$$

Podemos, portanto, pensar em R como uma maneira de medir o quanto M deixa de ser euclidiana.

Lema 3 O tensor de curvatura R satisfaz as igualdades abaixo para todos $X, Y, Z, W \in \mathcal{L}(M)$ e $f, h \in D(M)$

$$R(fX + hY, Z) = fR(X, Z) + hR(Y, Z)$$

$$R(X, fY + hZ) = fR(X, Y) + hR(X, Z)$$

$$R(X, Y)(fZ + hW) = fR(X, Y)Z + hR(X, Y)W$$

Prova. A demonstração do lema acima é uma aplicação imediata da definição e das propriedades da conexão afim. ■

Proposição 5 Seja (M, g) uma variedade semi-riemanniana com uma conexão ∇ de Levi-Civita um sistema de coordenadas locais em $p \in M$. Então $R_{ijkl} \equiv g(R(X_i, X_j)X_k, X_l)$ tem a forma:

$$R_{ijkl} = g_{si} \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^s}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x_j} + \{ \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ir}^s - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^s \} \right).$$

Prova. Usando a base coordenada $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, decorre da comutatividade das derivadas parciais que $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Portanto decorre que:

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k - \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k$$

$$\begin{aligned}
 &= \nabla_{\partial_j}(\Gamma_{ik}^l \partial_l) - \nabla_{\partial_i}(\Gamma_{jk}^l \partial_l) \\
 &= \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} \partial_l + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^r \partial_r - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} \partial_l - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^r \partial_r \right) \\
 &= \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} + (\Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l - \Gamma_{jk}^r \Gamma_{ir}^l) \right) \partial_l.
 \end{aligned}$$

■

Vejam, agora, dois resultados importantes, para os quais, entretanto, apresentaremos demonstrações:

Proposição 6 Para todo $X, Y, Z \in \mathcal{L}(M)$, temos ,

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$$

(Primeira identidade de Bianchi).

Proposição 7 Para todo $T, W, X, Y, Z \in \mathcal{L}(M)$

$$\nabla_T g(R(X, Y)Z, W) + \nabla_Z g(R(X, Y)W, T) + \nabla_W g(R(X, Y)T, Z) = 0$$

(Segunda identidade de Bianchi).

Da contração não-nula do tensor curvatura de Riemann decorre de sua um outro tensor denominado *tensor de Ricci*, que definiremos a seguir.

Definição 33 Seja R a curvatura de Riemann definida em uma variedade semi-riemanniana (M, g) , com uma $\{E_m\}$ uma base ortonormal de $T_p M$. Teremos que:

1. O tensor de Ricci em $p \in M$ está definido como

$$Ric_p(X) = \sum_m R(X, E_m)E_m \tag{2.35}$$

2. A curvatura de Ricci em $p \in M$ está definida como

$$Ric_p(X, Y) = \sum_m g(R(X, E_m)Y, E_m), \tag{2.36}$$

3. O escalar de curvatura R_p está definido como

$$R_p(X, X) = \sum_m Ric_p(X, X) \tag{2.37}$$

2.5.4 Subvariedades semi-riemannianas

Nesta seção, definiremos alguns conceitos e obteremos resultados necessários à investigação da imersão de uma variedade diferenciável M , de dimensão n , em uma variedade Riemanniana \bar{M} , de dimensão $n + m$. Em virtude do que já foi dito, sabemos que ao ser imersa em \bar{M} , a variedade M herda de maneira natural sua métrica semi-riemanniana. Em seguida, estudaremos as relações entre as geometrias de M e de \bar{M} .

Definição 34 *Suponhamos que $(\bar{M}, \bar{g}, \bar{\nabla})$ é uma variedade semi-riemanniana. Suponhamos que M é uma variedade diferenciável e que $\psi : M \rightarrow \bar{M}$ é uma imersão, ou seja, dado $p \in M$ a derivada $d\psi_p : T_p M \rightarrow T_{\psi(p)} \bar{M}$ é injetora. Nestas condições, podemos munir a variedade M de uma métrica semi-riemanniana através da definição*

$$g(u, v)_p = \bar{g}(d\psi_p(u), d\psi_p(v))_{\psi(p)}, \quad u, v \in T_p M$$

Dizemos então que a variedade M tem a métrica induzida pela variedade semi-riemanniana \bar{M} e, portanto, $\psi(M)$ é denominada subvariedade semi-riemanniana de \bar{M} . A aplicação ψ é dita uma imersão isométrica.

Sabemos que, dado $p \in M$, existe um aberto $U_\alpha \subset M$ contendo p tal que $\psi(U_\alpha) \subset \bar{M}$ é uma subvariedade mergulhada em \bar{M} . Identificamos, então, U_α com $\psi(U_\alpha)$ e cada vetor $v \in T_p M$, onde $p \in U_\alpha$, com o vetor $d\psi(v) \in T_{\psi(p)} \bar{M}$.

Observemos que dados $p \in M$ e $v \in T_p \bar{M}$, em razão de \bar{g} , dispomos de uma decomposição natural dada por $T_p \bar{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$, onde $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \bar{M}$. Podemos assim escrever $v \in T_p \bar{M}$ da seguinte forma

$$v = v^T + v^\perp, \quad v^T \in T_p M, \quad v^\perp \in (T_p \bar{M})^\perp$$

Os vetores em $(T_p M)^\perp$ são ditos **normais** a M em p e naturalmente $v \in T_p M$ é dito **tangente** a M em p . Desta forma, um campo de vetores $X \in \mathcal{L}(\bar{M})$ é dito **normal a M** , se $W_p \in (T_p M)^\perp$ para todo $p \in M$ e denotamos o conjunto de tais campos por $\mathcal{L}(\bar{M})^\perp$. Temos portanto uma decomposição natural em soma direta:

$$\mathcal{L}(\bar{M}) = \mathcal{L}(M) \oplus \mathcal{L}(\bar{M})^\perp$$

Proposição 8 *Sejam $\bar{f} \in D(\bar{M})$ e $\bar{X} \in \mathcal{L}(\bar{M})$. Temos que $\bar{X}(\bar{f})|_M = X(f) \in \mathbb{R}$, sendo $f \in D(M)$ e $X \in \mathcal{L}(M)$.*

Prova. *Se \bar{X} é a extensão de X e \bar{f} é a extensão de f , esse resultado é consequência imediata da própria definição de extensão. ■*

A proposição acima tem imediatas consequências, tais como: Sejam $X, Y \in \mathcal{L}(M)$ e $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathcal{L}(\bar{M})$ suas respectivas extensões, então:

- i $[\bar{X}, \bar{Y}]|_M = [X, Y], X, Y \in \mathcal{L}(M)$,
- ii $\bar{g}(\bar{X}, \bar{Y})|_M = g(X, Y)$.

2.5.5 Conexão induzida

Se M é uma subvariedade semi-riemanniana de \bar{M} , a conexão afim $\bar{\nabla}$ de \bar{M} induz naturalmente uma aplicação de $\nabla : \mathcal{L}(M) \times \mathcal{L}(M) \rightarrow \mathcal{L}(M)$ denominada *conexão induzida* em $M \subset \bar{M}$.

Se $Y \in \mathcal{L}(M)$ e $X \in \mathcal{L}(M)$, $\bar{\nabla}_Y X$ não tem significado imediato, posto que Y e X não estão em $\mathcal{L}(\bar{M})$. Porém para cada $p \in M$ sendo \bar{Y} e \bar{X} extensões locais suaves de Y e X respectivamente em uma vizinhança coordenada U_α de p em \bar{M} . Define-se $\bar{\nabla}_Y X$ em $U_\alpha \cap M$ como sendo a restrição de $\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}$ a $U_\alpha \cap M$.

Lema 4 $\bar{\nabla}_Y X$ é um campo vetorial bem definido em M

Prova. Como a restrição de um campo de vetorial, $\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}|_{U_\alpha \cap M}$ é suave, basta mostrar que a mesma independe da escolha de extensões. Em termos de um sistema de coordenada em U_α escrevemos $\bar{X} = \bar{X}^i \bar{\partial}_i$. Então

$$\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X} = \bar{Y}(\bar{X}^i) \bar{\partial}_i + \bar{X}^i \bar{\nabla}_{\bar{Y}}(\bar{\partial}_i). \quad (2.38)$$

Mas em

$$p \in U_\alpha \cap M, (\bar{Y} \bar{X}^i)(p) = \bar{Y}_p(\bar{X}^i) = Y_p(X^i) \quad (2.39)$$

e

$$\bar{\nabla}_{\bar{Y}}(\bar{\partial}_i)|_p = \bar{\nabla}_{\bar{Y}^j \bar{\partial}_j}(\bar{\partial}_i)|_p = \bar{Y}^j(p) \bar{\nabla}_{\bar{\partial}_j}(\bar{\partial}_i)|_p = \quad (2.40)$$

$$= Y^j(p) \bar{\Gamma}_{ji}^k(p) \bar{\partial}_k = Y^j(p) \Gamma_{ji}^k(p) \partial_k. \quad (2.41)$$

Assim a restrição $\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X}|_{U_\alpha \cap M}$ depende apenas de Y e X . ■

Definição 35 *Sejam $X, Y \in \mathcal{L}(M)$ e $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathcal{L}(\bar{M})$ suas respectivas extensões. Então definimos a conexão induzida ∇ em M por \bar{M} como*

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^T \tag{2.42}$$

Assim definida, a candidata à conexão de M deve mostrar-se capaz de gozar das propriedades de uma conexão de Levi-Civita. Portanto, para este fim são importantes os seguintes resultados:

Corolário 2 *Se ∇ a conexão induzida de $M \subset \bar{M}$. Se $X, Y, Z \in \mathcal{L}(M)$, temos:*

1. $\nabla_Y X$ é $D(M)$ -linear em Y .
2. $\nabla_Y X$ é \mathbb{R} -linear em X .
3. $\nabla_Y(fX) = (Yf)X + f\nabla_Y X$ para $f \in D(M)$.
4. $[Y, X] = \nabla_Y X - \nabla_X Y$.
5. $Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$.

Prova. Para todo ponto $p \in M$, estendamos a \bar{M} campos vetoriais e funções a uma vizinhança de p em \bar{M} . As cinco propriedades acima descritas, correspondem as propriedades da conexão de Levi-Civita em $p \in \bar{M}$. Portanto, a restrição a M dá os resultados acima, pois:

- (a) $\bar{\nabla}_Y X = \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X}|_M$
- (b) $\bar{X}(\bar{f}) = X(f)|_M$
- (c) $g(\bar{X}, \bar{Y})|_M = g(X, Y)$
- (d) $[\bar{X}, \bar{Y}]|_M = [X, Y]$.

■

Um fato básico aqui é que para X, Y ambos tangentes a M , a derivada covariante $\bar{\nabla}_Y X$ não necessita ser tangente a M . Então é natural perguntar o que são $(\bar{\nabla}_Y X)^\perp$ e $(\bar{\nabla}_Y X)^T$.

2.5.6 A segunda forma fundamental

Para ilustrar o conceito que apresentaremos nessa seção, imaginemos criaturas bidimensionais que vivam em uma folha de papel amassada. Essas criaturas certamente iriam concluir que seu mundo é perfeitamente plano, posto que os seus corpos também estão amassados, todavia. Se tentassem se mover pela folha, iriam sentir uma *força* misteriosa, invisível, que os impediria de se deslocarem em linha reta. Obviamente para um observador externo, quando estes seres movem-se sobre a folha de papel não o fazem em linha reta [37].

O quadro acima proposto refere-se ao seguinte fato: estando albergada em um espaço de dimensão maior, a subvariedade pode empenar-se nas dimensões extras. Isto acontece por que uma subvariedade está dotada em cada ponto de um tensor denominado segunda forma fundamental.

Definição 36 *A segunda forma fundamental de M é definida como sendo a aplicação $\Pi : \mathcal{L}(M) \times \mathcal{L}(M) \longrightarrow \mathcal{L}(M)^\perp$ dada por*

$$\Pi(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y. \quad (2.43)$$

que é um campo local de \bar{M} normal a M .

A segunda forma fundamental $\Pi(X, Y)$ não depende das extensões \bar{X}, \bar{Y} . Pelo **Lema 4** e pelo fato de $\nabla_X Y$ não depender das extensões, \bar{X} e \bar{Y} vemos que $\Pi(X, Y)$ também não depende das extensões \bar{X} e \bar{Y} .

Proposição 9 *A segunda forma fundamental Π de uma imersão isométrica é $D(M)$ -bilinear e simétrica.*

Prova. De fato, se $f \in D(M)$, $X, Y \in \mathcal{L}(M)$ e $\bar{f} \in D(\bar{M})$ uma extensão local de f , levando em conta as propriedades de linearidade de uma conexão, conclui-se de facilmente que Π é aditiva em X e Y .

Quanto à simetria, observemos que usando a simetria de ambas as conexões ∇ e $\bar{\nabla}$ temos

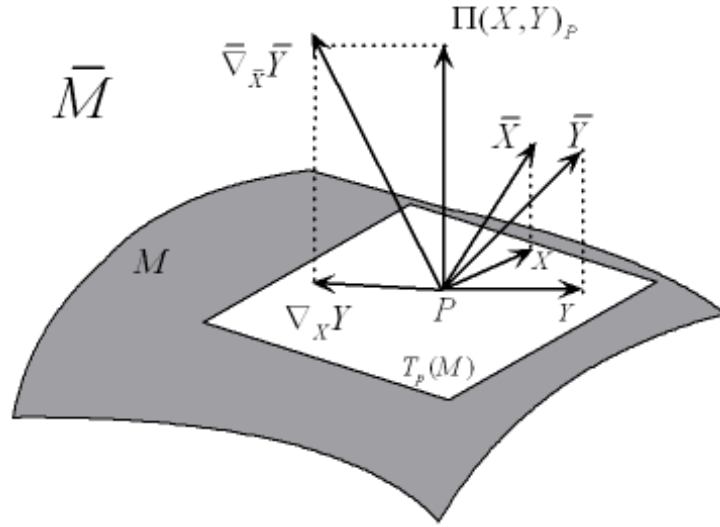


Figura 2.5: Ilustração da segunda forma fundamental

$$\Pi(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y = \tag{2.44}$$

$$= \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y + \underbrace{[\bar{X}, \bar{Y}]|_M - [X, Y]}_{=0} = \tag{2.45}$$

$$= \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X} - \nabla_Y X = \Pi(Y, X). \tag{2.46}$$

Quanto a $\Pi(fX, Y) = f\Pi(X, Y)$

$$\begin{aligned} \Pi(X, fY) &= \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{f} \bar{Y} - \nabla_X (fY) = \\ &= \bar{f} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - f \nabla_X Y + \underbrace{\bar{X}(\bar{f})|_M Y - X(f)Y}_{=0} = f\Pi(X, Y) \end{aligned}$$

Similarmente temos que $\Pi(X, fY) = f\Pi(X, Y)$. ■

Agora podemos definir a uma aplicação H_η , a qual expressa o valor da projeção normal de $\Pi(X, Y)$ em $p \in M$.

Definição 37 *Seja $p \in M$ e $N \in (T_p M)^\perp$. A aplicação $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$H_\eta(X, Y) = \bar{g}(\Pi(X, Y), N), \quad X, Y \in T_p M \tag{2.47}$$

denominamos por curvatura extrínseca de M .

Observemos que à aplicação bilinear H_η que pode associar-se com uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_pM \rightarrow T_pM$ denominada *aplicação de Weingarten na direção N* definida por

$$g(S_\eta(X), Y) = H_\eta(X, Y) = g(\Pi(X, Y), N)_p. \quad (2.48)$$

A proposição seguinte guiar-nos-á até uma expressão de S_η em termos da derivada covariante da normal N .

Proposição 10 *Sejam $p \in M$, $X \in T_pM$ e $N \in (T_pM)^\perp$. Seja \bar{N} uma extensão local de N normal a M . Então*

$$S_\eta(X) = -(\bar{\nabla}_{\bar{X}} N)^T. \quad (2.49)$$

Prova. *Sejam $X, Y \in T_pM$ e \bar{X}, \bar{Y} extensões locais de X, Y , respectivamente, e tangentes a M . Então $\bar{g}(N, Y) = 0$, e portanto*

$$\begin{aligned} \bar{g}(S_\eta(X), Y) &= \bar{g}(\Pi(X, Y) |_{T_pM}, N) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y, N) |_{T_pM} = \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, N) |_{T_pM} - \underbrace{\bar{g}(\nabla_X Y, N) |_{T_pM}}_{=0} = \\ &= \underbrace{\bar{X} \bar{g}(\bar{Y}, N) |_{T_pM}}_{=0} - \bar{g}(\bar{Y}, \bar{\nabla}_X N) |_{T_pM} = \\ &= -\bar{g}(\bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} N) |_{T_pM} = \bar{g}(-\bar{\nabla}_X N, Y) |_{T_pM} = \bar{g}(-(\bar{\nabla}_{\bar{X}} N)^T, Y) \end{aligned}$$

para todo $\bar{Y} \in T_p\bar{M}$. ■

2.5.7 Subvariedades totalmente geodésicas

Teorema 6 *Toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de \bar{M} em p , se e só se, e a segunda forma fundamental Π for nula em p .*

Prova. *Tomemos $\acute{\gamma}$ vetor tangente ao longo de γ logo:*

$$\nabla_{\acute{\gamma}} \acute{\gamma} = 0 \quad (2.50)$$

por outra parte, podemos fazer

$$\Pi(\acute{\gamma}, \acute{\gamma}) = \bar{\nabla}_{\acute{\gamma}} \acute{\gamma} - \nabla_{\acute{\gamma}} \acute{\gamma} \quad (2.51)$$

Como Π é nula em p , $\Pi(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ também o será; portanto:

$$\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0. \quad (2.52)$$

Nesse caso dizemos, que M é uma subvariedade geodésica em p e **totalmente geodésica** se é geodésica em todos os pontos de M . ■

Resumidamente, uma subvariedade semi-riemanniana M de \bar{M} é totalmente geodésica se $\Pi = 0$ para todo $p \in M$.

Então uma subvariedade M totalmente geodésica é extrinsecamente plana: observadores em \bar{M} não percebem uma curvatura em M . Isto não é dizer que M é intrinsecamente plana.

Definição 38 Um ponto p de $M \subset \bar{M}$ é umbílico se existe um vetor normal $Z \in T_p(M)^\perp$ tal que

$$\Pi(X, Y) = g(X, Y)Z, \text{ para todo } X, Y \in \mathcal{L}(M) \quad (2.53)$$

Então Z é chamado de vetor curvatura normal de M em p .

Uma subvariedade M de \bar{M} é totalmente umbílica se todo ponto de M é umbílico. Então existe um campo vetorial normal Z em $p \in M$, chamado *campo vetorial curvatura normal* de M , tal que $\Pi(V, W) = g(V, W)Z$ para todo $V, W \in \mathcal{L}(M)$. Assim uma subvariedade totalmente umbílica é totalmente geodésica para $Z = 0$.

Lema 5 Sejam $M \subset \bar{M}$ uma subvariedade Lorentziana e totalmente umbílica. Toda geodésica do tipo luz de M é geodésica de \bar{M}

Prova. Se tomarmos $X(t)$ campo tangente ao uma geodésica do tipo luz em M

$$\Pi(X, X) = g(X, X)Z = \bar{\nabla}_X X - \nabla_X X$$

como $g(X, X) = 0$ e também $\nabla_X X = 0$ então:

$$\bar{\nabla}_X X = 0$$

■

Para métricas Lorentziana, a fórmula $\Pi(X, X) = g(X, X)Z$ mostra que M encurva-se na direção de Z nas direções tipo-espaço, e afasta-se Z nas do tipo-tempo.

Capítulo 3

Produto de variedades semi-riemannianas

É muito possível que a verdade não se preste a enunciados pictóricos, mas apenas a expressão em fórmulas matemáticas.

(Bertrand Russell. Análise da Matéria)

Anteriormente vimos que o produto cartesiano de duas variedades diferenciáveis é uma variedade diferenciável. Claro, ainda ali não poderíamos evidenciar as propriedades métricas e de conexão, posto ainda não as termos introduzido. Todavia, após, nosso breve passeio pelas terminologias e definições da geometria semi-riemanniana, passemos substrato de nossas análises futuras.

Proposição 11 *Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) variedades semi-riemannianas e consideremos o produto cartesiano $M_1 \times M_2$ com estrutura diferencial do produto. Sejam $\pi : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$ e $\sigma : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ as projeções naturais. Então introduzir-se-a em $M \times N$ uma métrica (métrica do produto) semi-riemanniana definindo-se:*

$$g(u, v)_{(p,q)} = g_2(d\pi(u), d\pi(v))_p + g_1(d\sigma(u), d\sigma(v))_q \quad (3.1)$$

para todo $(p, q) \in M_1 \times M_2$, $u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$.

O espaços produtos admitem certas peculiaridades simplificadoras. Apresentaremos agora algumas de importância fundamental, cujos resultados estão discutidos de forma primorosa em [29].

Proposição 12 *Sejam M_1 e M_2 variedades semi-riemannianas. Consideremos o produto $M_1 \times M_2$ com a métrica do produto. Sejam ∇^1 e ∇^2 conexões de Levi-Civita respectivamente de M_1 e M_2 , então a conexão ∇ do produto $M = M_1 \times M_2$ é de Levi-Civita e expressa por:*

$$\nabla_{Y_1+Y_2}(X_1+X_2) = \nabla_{Y_1}^1 X_1 + \nabla_{Y_2}^2 X_2, \text{ para } X_1, Y_1 \in \mathcal{L}(M_1) \text{ e } X_2, Y_2 \in \mathcal{L}(M_2). \quad (3.2)$$

Uma das grandes fontes para a construção de exemplos e contra-exemplos em geometria semi-riemanniana são os produtos distorcidos de variedades.

3.1 Espaço produto distorcido

Definição 39 *Sejam M_1 e M_2 variedades semi-riemannianas e $F : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e diferenciável. A variedade produto $M = M_1 \times_F M_2$ é um produto distorcido¹ se estiver munida da seguinte métrica:*

$$\bar{g}(u, v)_{(p,q)} = g_1(d\pi(u), d\pi(v))_p + (F)^2 g_2(d\sigma(u), d\sigma(v))_q \quad (3.3)$$

para todo $(p, q) \in M_1 \times M_2$, $u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$

Aqui chamaremos M^2 a base de M e M^1 de *fibra*. Objetivamos apresentar a geometria de M em termos da função de distorção F e as geometrias de M^1 e M^2 .

Como no caso de um produto semi-riemanniano é fácil ver, que as folhas horizontais $p \times M^2 = \pi^{-1}(p)$ e as folhas verticais $M^1 \times q = \sigma^{-1}(q)$ são subvariedades semi-riemannianas de M (ver Figura 3.1).

A métrica distorcida é caracterizada por:

- (1) Para cada $q \in M^2$, a aplicação $\pi|(M^1 \times q)$ é uma isometria em M^1 .
- (2) Para cada $p \in M^1$, a aplicação $\sigma|(p \times M^2)$ é uma *homotetia*² positiva em M^2 , com fator escalar $\frac{1}{F(p)}$.

¹Esta definição de Bishop $M_1 \times_{F_1} M_2$ de um *produto umbílico*, é um caso particular de outro que B. Chen[39], em 1977 chamou *twisted product* e que é $M_1 \times_{(F_1, F_2)} M_2$.

²**Homotetia** significa ampliação(positiva) ou redução(negativa) das distâncias dos pontos de um espaço em relação a um ponto fixo.

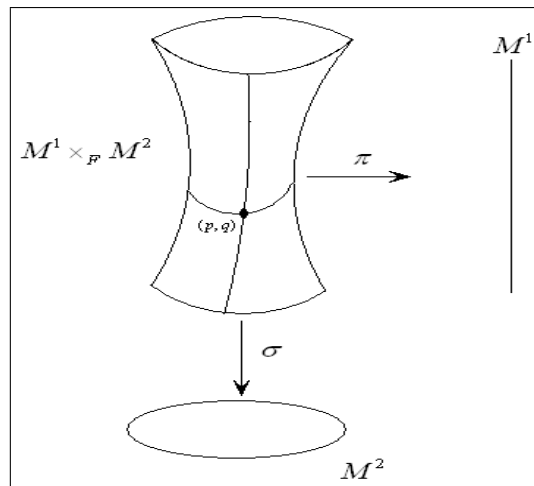


Figura 3.1: Espaço produto distorcido.

(3) Para cada $(p, q) \in M$, a fibra $M^1 \times q$ e a folha $p \times M^2$ são ortogonais em (p, q)

Os vetores tangentes as folhas horizontais são *horizontais*; os vetores tangentes as folhas verticais são *verticais*.

Da **seção 2.2** lembremos a noção de levantamento de um campo vetorial em M^1 e M^2 para $M^1 \times M^2$, onde os conjuntos de todos os levantamentos são denotados por $\mathcal{L}(M^1)$ e $\mathcal{L}(M^2)$. Por simplicidade, utilizamos a mesma notação para um campo vetorial e seu levantamento.

A relação do produto distorcido com a fibra M^1 é quase tão simples quanto no caso do produto semi-riemanniano; todavia, a relação com a base M^1 geralmente envolve a função de distorção.

Quanto a uma conexão Levi-Civita temos a seguintes peculiaridades:

Proposição 13 *Seja $(\bar{M}, \bar{g}, \bar{\nabla})$, tal que $\bar{M} = M_1 \times_F M_2$. Se $X, Y \in \mathcal{L}(M_1)$, e $V, W \in \mathcal{L}(M_2)$, então*

(1) $\bar{\nabla}_X V = \bar{\nabla}_V X = \left(\frac{XF}{F}\right)V,$

(2) $\Pi^1(X, Y) = 0$ em $M_1,$

(3) $(\bar{\nabla}_V W)^\perp = \Pi^2(V, W) = -\left(\frac{\bar{g}(V, W)}{F}\right) \text{grad } F$ em $M_2.$

Prova. Lembremos dois resultados importantes:

$$T_{(p,q)}(\bar{M}) = T_{(p,q)}(M_1 \times M_2) = T_p(M_1) + T_q(M_2)$$

Consideremos a fórmula de Koszul (2.18), que vêm da condição de compatibilidade da conexão com a métrica

$$2\bar{g}(\bar{\nabla}_X V, Y) = X[\bar{g}(V, Y)] + V[\bar{g}(X, Y)] - Y[\bar{g}(X, V)] + \bar{g}([X, V], Y) + \bar{g}([Y, V], X) + \bar{g}([Y, X], V)$$

Obviamente teremos

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X V, Y) = \frac{1}{2}V[\bar{g}(X, Y)] = \frac{1}{2}V[g_1(X, Y)] = 0.$$

Além disso

$$2\bar{g}(\bar{\nabla}_X V, W) = X[\bar{g}(V, W)] + V[\bar{g}(X, W)] - W[\bar{g}(X, V)] + \bar{g}([X, V], W) + \bar{g}([W, V], X) + \bar{g}([W, X], V)$$

Igualmente, temos

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X V, W) = \frac{1}{2}X[\bar{g}(V, W)].$$

Todavia,

$$\bar{g}(V, W)_{(p,q)} = F^2 g_2(V, W) \Big|_{(p,q)}.$$

e

$$X\bar{g}(V, W) = X(F^2 g_2(V, W)) = 2F(XF)g_2(V, W).$$

Rescrevendo

$$X\bar{g}(V, W) = \frac{2XF}{F}\bar{g}(V, W).$$

Temos, então:

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X V, W) = \frac{XF}{F}\bar{g}(V, W).$$

E ainda:

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X V, W) = \bar{g}\left(\frac{XF}{F}V, W\right).$$

Portanto, como $[X, V] = 0$

$$(1) \bar{\nabla}_X V = \bar{\nabla}_V X = \frac{XF}{F} V.$$

Agora consideremos:

$$\bar{\nabla}_X \bar{g}(Y, V) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, V) + \bar{g}(X, \bar{\nabla}_Y V) = 0$$

logo

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, V) = -\bar{g}(X, \bar{\nabla}_Y V), \quad (3.4)$$

que pode ser escrita na seguinte forma:

$$\bar{g}(\Pi^1(X, Y) + \nabla_X^1 Y, V) = -\frac{XF}{F} \bar{g}(X, V), \quad (3.5)$$

consequentemente:

$$(2) \Pi^1(X, Y) = 0 \quad (3.6)$$

Sabemos, ainda, que:

$$\bar{\nabla}_V \bar{g}(W, X) = \bar{g}(\bar{\nabla}_V W, X) + \bar{g}(W, \bar{\nabla}_V X) = 0.$$

Conseqüentemente,

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_V W, X) = -\bar{g}(W, \bar{\nabla}_V X).$$

Como $\bar{\nabla}_V X = \frac{XF}{F} V$,

temos então:

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_V W, X) = -\bar{g}(W, \frac{XF}{F} V) = -\frac{XF}{F} \bar{g}(W, V).$$

Como $XF = \bar{g}(\text{grad } F, X)$, temos:

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_V W, X) = -\frac{\bar{g}(\text{grad } F, X)}{F} \bar{g}(W, V) = \bar{g}\left(-\frac{\bar{g}(W, V) \text{ grad } F}{F}, X\right)$$

e, por conseguinte

$$(3) \Pi^2(V, W) = (\bar{\nabla}_V W)^\perp = -\frac{\bar{g}(W, V) \text{grad } F}{F}.$$

■

Corolário 3 *Seja um espaço produto distorcido $M = M_1 \times_F M_2$ com $p \in M_1$ e $q \in M_2$. As folhas $M_1 \times q$ são totalmente geodésicas e as folhas $p \times M_2$ são totalmente umbílicas.*

Prova. Este resultado é consequência imediata de (2) e (3) da **proposição 13**. ■

Proposição 14 *Uma curva $\gamma = (\alpha, \beta)$ em $M = M_1 \times_F M_2$ é uma geodésica se, e somente se,*

(1) $\alpha'' = \bar{g}(\beta', \beta')F \circ \alpha \text{ grad } F$ em M_1 ;

(2) $\beta'' = \frac{-2}{F \circ \alpha} \frac{d(F \circ \alpha)}{ds} \beta'$ em M_2 .

Prova. Suponhamos que γ seja a curva regular integral de $\gamma' \in \mathcal{L}(M)$, como estamos em um espaço produto podemos dizer que $\gamma' = X + V$ tal que $X \in \mathcal{L}(M_1)$ e $V \in \mathcal{L}(M_2)$, se α e β duas curvas integrais regulares de X e V respectivamente, decorre que:

$$\gamma'' = \bar{\nabla}_Y Y = \bar{\nabla}_{X+V}(X + V) = \bar{\nabla}_X X + \bar{\nabla}_X V + \bar{\nabla}_V X + \bar{\nabla}_V V$$

Evidentemente $\gamma'' = 0$ se, e somente se, $(\gamma'')^T = 0$ e $(\gamma'')^\perp = 0$. isto é

$$\nabla_X^1 X + (\bar{\nabla}_V V)^\perp = 0$$

$$2\bar{\nabla}_V X + (\bar{\nabla}_V V)^T = 0$$

Devido a (**Proposição 14**) temos que:

$$\nabla_X^1 X - \frac{g(V, V)}{F} \text{grad } F = 0;$$

$$2\frac{XF}{F}V + \nabla_V^2 V = 0$$

E ainda sabemos que: $g(V, V) = F^2 g_2(V, V)$, $\alpha' = X$ e $\beta' = V$. ■

Quanto a equação (1) da proposição acima, podemos fazer um desacoplamento tomando

$$\bar{g}(\gamma', \gamma') = g_1(\alpha', \alpha') + F^2 g_2(\beta', \beta') = K$$

e substituir em (1), com isso teremos:

$$\alpha'' = [K - g_1(\alpha', \alpha')] \text{grad } F \tag{3.7}$$

Esse resultado traz importantes conseqüências que viabilizarão nossas análises subseqüentes.

Capítulo 4

Movimento no hiperespaço

Quanto mais compreendemos o mundo físico e penetramos nas leis da natureza, mais nos parece que o mundo físico se evapora e nos resta apenas a matemática. Quanto mais aprofundamos o conhecimento das leis da física, mais somos conduzidos a este mundo da matemática e dos conceitos matemáticos.

(Sir. Roger Penrose. O Grande, o Pequeno e a Mente Humana).

O modelo de Randall-Sundrum e outras teorias Kaluza-Klein não-compactas como STM, embora possam estatuir dimensões extras por motivações distintas, confrontam-se com desafios semelhantes. De um ponto de vista teórico, elas devem prever efeitos observáveis das dimensões extras. De um ponto de vista experimental, o assunto vital é a descoberta de fenômenos anômalos que poderíamos associar à existência de dimensões extras. Um possível modo de testar as consequências físicas advindas da existência de dimensões extras é examinar a dinâmica de partículas teste. Em suma, pretende-se procurar anomalias no universo em $4D$. Por isso, o movimento geodésico em variedades $5D$ e subvariedades $4D$ tem sido um assunto de investigações intensivas[23]. Resultados importantes emergiram ao reduzir-se as equações de geodésicas em $5D$. Constatou-se que o movimento livre em $5D$ é observado em $4D$ como estando submetido a uma aceleração anômala. Também concluiu-se que ao se mover livremente no hiperespaço (*bulk*) uma partícula pode ser confinada a uma subvariedade $4D$ (espaço-tempo) , isto é, mesmo movendo-se no hiperespaço

terá impressão que move-se em $4D$. O assunto central que consideramos é a natureza do mecanismo de confinamento e se tal mecanismo tem qualquer propriedade observável.

No cenário de branas confinamento estável de campos de matéria é possível a nível quântico se levarmos em conta interação com um campo escalar [48]. Em um cenário puramente clássico, no entanto, se fará necessário dispor de mecanismos de confinamento geodésico de forma a restringir partículas maciças a mover-se sobre hipersuperfícies de maneira estável.

Procuramos determinar em que condições a estrutura geométrica de um *bulk* espaço produto distorcido semi-riemanniano pode confinar tal movimento.

Consideremos as equações de geodésicas no hiperespaço n -dimensional ($n = m + 4$). Sendo o espaço-tempo uma variedade lorentziana tetradimensional M^4 e estando ele imerso em um hiperespaço(*bulk*) $B^n \times_F M^4$, com métrica distorcida, ou seja, um espaço produto distorcido, com B^n munido de uma estrutura riemanniana. A questão aqui já suscitada, e apresentada ao longo do trabalho, vem a ser propriamente o movimento geodésico (quanto à questão do confinamento).

Um ponto interessante é que a "força extra" desaparece se $\Pi = 0$. Neste caso, geodésicas em M^4 serão automaticamente geodésicas de $B^n \times_F M^4$. Isso provém do **teorema 6** da totalidade geodésica de uma subvariedade. Porém, devemos observar que $\Pi = 0$ é suficiente, mas não condição necessária para que uma geodésica particular em M^4 também seja uma geodésica no hiperespaço.

4.1 Força extra em espaço produto distorcido

A equação (2) da **proposição 14** indica que o movimento geodésico no *bulk* é percebido nas folhas horizontais (espaço-tempo) como uma pregeodésica, isso é, o movimento das partículas confinadas a essas folhas, está acometido de uma aceleração anômala, que depende da função de distorção.

Nas teorias físicas que consideram o universo como uma hiper-superfície tetradimensional Σ^4 imersa em um espaço produto distorcido pentadimensional M^5 o movimento das partículas são curvas no espaço M^5 , não necessariamente confi-

nadas às hiper-superfície Σ^4 . A esse respeito, podemos "esperar" que os efeitos do movimento em cinco dimensões apareçam em quatro dimensões como uma força extra capaz de afetar o movimento de partículas no espaço-tempo usual. Esse assunto tem sido investigado recentemente em [23], aqui também alguns resultados críticos encontrados em [24].

Façamos (por conveniência de notação) as seguintes implementações a **definição 38**: $\bar{M} = B^n \times_F M^4$ e $F : B^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por e^f , adotamos também métrica \bar{g} com assinatura $(+, -, \dots, -)$. Assim, (3.3) agora considerada em \bar{M} tornar-se-á:

$$ds^2 = e^{2f(\mathbf{y})} h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - k_{ab} dy^a dy^b, \quad (4.1)$$

onde, os índices gregos referem-se às coordenadas do espaço-tempo M^4 e os latinos às coordenadas de B^n que, por sua vez, supomos se dotada de uma estrutura riemanniana.

Evoquemos agora a proposição 15:

Uma curva $\gamma = (\alpha, \beta)$ em $\bar{M} = M^m \times_F M^n$ é uma geodésica se, e somente se,

$$\beta'' = \frac{-2}{F \circ \alpha} \frac{d(F \circ \alpha)}{ds} \beta' \quad \text{em } M^4. \quad (4.2)$$

$$\alpha'' = g(\beta', \beta') F \circ \alpha \text{ grad } F \quad \text{em } B^n; \quad (4.3)$$

Consideremos um sistema de coordenadas em M , tal que: $\mathbf{Z} = (x^1, \dots, x^4, y^1, \dots, y^n)$.

A equação geodésica γ em M é dada por:

$$\frac{dZ^A}{d\lambda^2} + \Gamma_{BC}^A \frac{dZ^B}{d\lambda} \frac{dZ^C}{d\lambda} = 0, \quad (4.4)$$

onde λ é um parâmetro afim. Após certa manipulação algébrica chegamos a :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + {}^{(4)}\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \phi^\mu, \quad (4.5)$$

onde

$$\phi^\mu = -\Gamma_{ab}^\mu \frac{dy^a}{d\lambda} \frac{dy^b}{d\lambda} - 2\Gamma_{\alpha b}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dy^b}{d\lambda}$$

e

$$\frac{d^2 y^a}{d\lambda^2} + {}^{(n)}\Gamma_{bc}^a \frac{dy^b}{d\lambda} \frac{dy^c}{d\lambda} = \psi^a, \quad (4.6)$$

onde

$$\psi^a = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} - 2\Gamma_{\alpha b}^\alpha \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dy^b}{d\lambda}$$

Evidentemente (4.5) e (4.6) são as transcrições de (4.2) e (4.3) neste sistema de coordenadas.

Supomos agora que \bar{M} pode ser folheado por uma família de subvariedades definida por n equações $y^a = y_o^a = \text{constante}$. A geometria de M^4 é, então, determinada pela métrica induzida

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x, y_o^1, \dots, y_o^n) dx^\alpha dx^\beta.$$

De modo que as quantidades ${}^{(4)}\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ que aparecem no lado à esquerda de (4.5) podem ser identificadas com os símbolos de Christoffel associados à métrica induzida nas folhas da foliação definida acima.

Conseqüentemente as quantidades ϕ^μ e ψ^a reduzem-se, respectivamente, a:

$$\phi^\mu = 0$$

e

$$\psi^a = -f_{,a} e^{2f} h_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

onde $f_{,a} = \frac{\partial f}{\partial y^a}$, e denotamos com ponto a derivada com respeito ao parâmetro afim. Também estamos usando a notação $f^{,a} = k^{ab} f_{,b}$. Notemos que se o fator de distorção f for constante, as equações (4.4) que descrevem as geodésicas do produto distorcido M separam-se-a nas equações de geodésicas totalmente desacopladas das duas subvariedades M^4 e B^n , conforme à **proposição 14**. Novamente fazendo uso de (2.29) da mesma maneira que anteriormente, teremos para a métrica (4.1)

$$e^{2f} h_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - k_{ab} \dot{y}^a \dot{y}^b = K. \quad (4.7)$$

Desse modo, temos que as equações (4.5) e (4.6) tornare-se-ão respectivamente

$$\ddot{x}^\mu + {}^{(4)}\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = -2f_{,a} \dot{x}^\mu \dot{y}^a, \quad (4.8)$$

$$\ddot{y}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{y}^b \dot{y}^c = -f^{,a}(K + k_{bc} \dot{y}^b \dot{y}^c). \quad (4.9)$$

As equações acima constituem um sistema de equações diferenciais de segunda ordem que, por sua vez, pode ser resolvido, em princípio, se $f = f(y^1, \dots, y^n)$ for conhecida.

4.2 Confinamento do movimento no espaço-tempo tetradimensional

Nesta seção desejamos investigar a possibilidade de confinamento de partículas maciças e fótons na variedade espaço-tempo M^4 . Em outras palavras, nosso objetivo aqui é encontrar as condições matemáticas que devem ser satisfeitas pelo fator de distorção f para geodésicas do tipo tempo e nulas fiquem aprisionadas em M^4 . O **teorema 6** nos adverte que uma subvariedade M^4 de uma variedade semi-riemanniana M é totalmente geodésica se, e somente se, toda geodésica de M^4 é também uma geodésica em M , isto é, a subvariedade M^4 é totalmente geodésica se, e somente se, todas as componentes da curvaturas extrínsecas de M^4 se anulam. Se a geometria de M é lorentziana, se M^4 é totalmente umbílica, então, como iremos mostrar nesta seção, o teorema continua válido, mas, refere-se apenas às geodésicas tipo-tempo e tipo-espaço, posto que as geodésicas nulas por natureza já são geodésicas de ambos os espaços independentemente do valor da curvatura extrínseca. Em verdade, iremos mostrar que o confinamento de geodésicas nulas não depende do valor da curvatura extrínseca. De um ponto de vista físico parece ser muito interessante que os feixes de luz (fótons) não "*percebam*" a curvatura extrínseca do espaço-tempo. Este fato é uma generalização do resultado apontado na **seção 3.1** no qual o caso de imersões de hipersuperfícies de codimensão um são estudados.

Vamos retornar às equações (4.8) e (4.9). Seja γ uma geodésica tipo-tempo (ou tipo-espaço) da subvariedade M^4 . Uma vez que $\gamma \in M^4$ devemos ter $\dot{y}^a = 0$, e assim (4.8) é identicamente satisfeita. Agora se $f^{,a}(y_0^1, \dots, y_0^n) = 0$, então (4.9) também vale. Por outro lado, se qualquer geodésica γ de M com equações paramétricas $(x^\alpha = x^\alpha(\lambda), y^a = y_0^a)$ é uma geodésica de M^4 , então de (4.9) devemos ter

$f^{,a}(y_0^1, \dots, y_0^n) = 0$. Vamos agora considerar o valor da curvatura extrínseca (ou curvatura normal) de M^4 . De (4.1) vemos que os vetores $N_{(a)} = \frac{\partial}{\partial y^a}$ da base coordenada $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^a} \right\}$ são normais à subvariedade M^4 .

Seja γ uma curva de M^4 com vetor tangente dado por

$$V = \left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda}, 0 \right). \quad (4.10)$$

A curvatura normal de M^4 , em um ponto $p \in M^4$, na direção de $N_{(a)}$ é dada pelo produto interno

$$H_{N_{(a)}} = g \left(N_{(a)}, \frac{DV}{d\lambda} \right) \quad (4.11)$$

em p , onde $\frac{DV}{d\lambda}$ é a derivada covariante de V com respeito à conexão de Levi-Civita determinada por g . Após calcular $\frac{DV}{d\lambda}$ de (4.1) facilmente mostramos que

$$H_a = g \left(\frac{\partial}{\partial y^a}, \frac{DV}{d\lambda} \right) = k_{ab} \Gamma_{\alpha\beta}^b \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = f_a e^{2f} h_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \quad (4.12)$$

Assim, os coeficientes da curvatura normal

$$H_a = H_{a\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \quad (4.13)$$

são dados por

$$H_{a\alpha\beta} = f_a e^{2f} h_{\alpha\beta}. \quad (4.14)$$

Claro está que $H_{\alpha\beta a} = 0$ se, e somente se, $f_a = 0$. Portanto, em vista do exposto acima, exatamente o que diz o **Teorema 6** concluímos o seguinte: *geodésicas do tipo tempo ou do tipo espaço podem ser confinadas na subvariedade M^4 , se e somente se a curvatura extrínseca de M^4 se anula*. É interessante analisar o que acontece com as geodésicas nulas.

Uma vez que agora $K = 0$ se a curva γ é uma geodésica nula de M^4 então as equações (4.8) e (4.9) nos informam que γ também é uma geodésica de M , independentemente do valor de f_a , e então independentemente dos valores das curvaturas normais de M^4 .

4.3 Confinamento via potencial efetivo

Uma análise do movimento nas dimensões extras também pode ser viabilizada reduzindo-se o problema ao movimento de uma partícula sujeita à ação de

um potencial efetivo $V = V(y)$. Para generalidade nesta seção suporemos que a métrica k de B^n é riemanniana (positivo-definida). Assim, considerando (4.1)

$$dS^2 = e^{2f} h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - k_{ab} dy^a dy^b, \quad (4.15)$$

as equações geodésicas para a parte extra são dadas por

$$\frac{dy_a}{d\lambda} - \frac{1}{2} k_{bc} \dot{y}^b \dot{y}^c - f_{,a} e^{2f} h_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (4.16)$$

Tendo em vista a equação (4.7)

$$e^{2f} h_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} - k_{ab} \frac{dy^a}{d\lambda} \frac{dy^b}{d\lambda} = K \quad (4.17)$$

temos então, que o movimento nas dimensões extras é descrito pelas equações

$$\frac{dy_a}{d\lambda} - \frac{1}{2} k_{bc} \dot{y}^b \dot{y}^c - f_{,a} (K - k_{bc} \dot{y}^b \dot{y}^c) = 0 \quad (4.18)$$

Podemos encontrar a primeira integral da equação (4.18) multiplicando-a por $2ye^{2f}$. De fato, obtemos

$$2e^{2f} \left(\dot{y}^a \frac{dy_a}{d\lambda} - \frac{1}{2} \dot{y}^a k_{bc} \dot{y}^b \dot{y}^c \right) - 2\dot{y}^a e^{2f} f_{,a} (K - k_{bc} \dot{y}^b \dot{y}^c) = 0.$$

Podemos assim escrevê-la como:

$$e^{2f} \frac{d}{d\lambda} (k_{bc} \dot{y}^b \dot{y}^c) + \frac{de^{2f}}{d\lambda} (k_{bc} \dot{y}^b \dot{y}^c) - K \frac{de^{2f}}{d\lambda} = 0,$$

finalmente, teremos

$$e^{2f} (k_{bc} \dot{y}^b \dot{y}^c) = C - K e^{2f},$$

podemos ainda sem perda de generalidade supor que $f(0, \dots, 0) = 0$, e com isto termo

$$C = \dot{y}_0^2 + K$$

onde $\dot{y}_0^2 \equiv k_{bc} \dot{y}_0^b \dot{y}_0^c$ está relacionado com a energia cinética inicial correspondente ao movimento na direção extra. Assim, a Lagrangiana do movimento fica assim representada:

$$L = e^{2f} (k_{bc} \dot{y}^b \dot{y}^c) = \dot{y}_0^2 - V(y) \quad (4.19)$$

com $V(y)$ representando um potencial efetivo dado por:

$$V = K(e^{2f} - 1).$$

Considerando que k_{ab} é uma métrica riemanniana, podemos deduzir que o movimento estará delimitado caso exista solução para a equação $V(y) = \dot{y}_0^2$. Contudo, delimitado não quer dizer confinado, quando lidamos com espaço de codimensão maior. Confinamento implica o retorno contínuo da partícula à hipersuperfície. Para analisar a existência do confinamento precisamos de informações sobre a métrica k_{ab} .

Por simplicidade, consideremos o caso particular em que $M = M^4 \times B^2$. onde a geometria de N^2 é caracterizada pelo seguinte elemento de linha:

$$dl^2 = u^2(r)(dr^2 + r^2d\theta^2) \quad (4.20)$$

Obviamente r está relacionado com a distância dos pontos em relação à hipersuperfície e a função $u(r)$ mede o "afastamento" em relação à métrica euclidiana. Observemos que a única restrição a esta métrica é o fato de que ela depende da coordenada extra. De fato, toda métrica semi-riemanniana bidimensional e conformalmente plana e pode ser escrita na forma (4.20)[50]. Admitimos também que $f = f(r)$. Com efeito, temos que a equação de movimento (4.18) fica

$$e^{2f}u^2\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) = \dot{y}_0^2 - V(r).$$

Da equação de movimento (4.18) para θ , obtemos a seguinte constante de movimento:

$$u^2r^2\dot{\theta} = L = \text{constante}.$$

Deste modo, a equação para o movimento radial se reduz a

$$e^{2f}u^2\dot{r}^2 = \dot{y}_0^2 - \left(V(r) + L^2\frac{e^{2f}}{u^2r^2}\right)$$

Aqui L está relacionado ao momento angular do movimento em torno da subvariedade M^4 .

A existência de estados ligados depende do comportamento do potencial efetivo

$$V_{eff} = \left(V(r) + L^2\frac{e^{2f}}{u^2r^2}\right)$$

Podemos deduzir algumas propriedades gerais do movimento. Estamos admitindo que $f(0) = 0$ e que $u(0)$ é regular e diferente de zero na origem, caso

contrário, a métrica induzida no espaço-tempo M^4 não seria bem definida. Assim, o termo dominante do potencial V_{eff} para $r \rightarrow 0$ é $L^2 \frac{e^{2f}}{u^2 r^2} \rightarrow \infty$.

Primeira conclusão (fisicamente óbvia):

A partícula não retornará a hipersuperfície se $L \neq 0$, podendo estar num estado ligado ou não.

Para $L = 0$, o potencial V_{eff} será confinante (para qualquer valor de \dot{y}_0^2) se $f(r) \rightarrow \infty$ assintoticamente quando $(r \rightarrow \infty)$.

Podemos, agora, analisar um caso particular encontrado na literatura [51] em que as funções $f(r)$ e $u(r)$ são explicitamente dadas por:

$$\begin{aligned} e^{2f} &= \frac{c^2 + ar^2}{c^2 + r^2} \\ u^2 &= \frac{c^4}{(c^2 + r^2)^2}. \end{aligned}$$

Neste caso, o potencial efetivo tem a seguinte forma:

$$V_{eff} = \left(K \left(\frac{c^2 + ar^2}{c^2 + r^2} \right) - 1 \right) + L^2 \frac{(c^2 + ar^2)(c^2 + r^2)}{c^4 r^2}$$

O potencial V_{eff} será confinante para os casos $a > 1$ e $L = 0$. Ainda neste casos, existe um limite de energia cinética inicial acima da qual a partícula escapará para o infinito (ver figura 4.1).

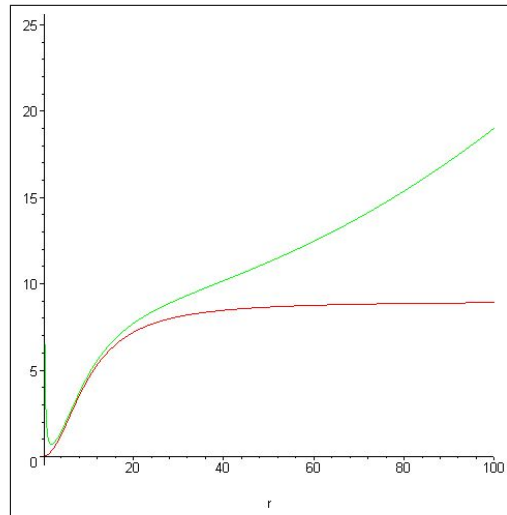


Figura 4.1: $L = 1$ (verde) e $L = 0$ (vermelho).

4.4 A análise do movimento geodésico nas proximidades do espaço-tempo para uma co-dimensão

$$n = 1$$

Da mesma maneira que em [43], vamos analisar o caso em que M^4 é uma hipersuperfície e $B^n = \mathbb{R}$. Com esse fim, usaremos técnicas da teoria de sistemas dinâmicos (ver **Apêndice I**). Especificamente estamos a considerar nessa seção que \bar{M} está munida do seguinte elemento de linha

$$ds^2 = e^{2f} h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - dl^2, \quad (4.21)$$

onde $f = f(l)$ e $h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}(x)$.

Para esta métrica é fácil ver que:

$${}^{(5)}\Gamma_{44}^\mu = 0 \quad (4.22)$$

$${}^{(5)}\Gamma_{4\nu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\beta} g_{\beta\nu,4} = \frac{df}{dl} \delta_\nu^\mu = f' \delta_\nu^\mu. \quad (4.23)$$

Assim a expressão da *força extra* em (4.5) se reduz a

$$\phi^\mu = -2f' \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dl}{d\lambda} \quad (4.24)$$

Agora as equações (4.5) tornam-se

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + {}^{(4)}\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = -2f' \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dl}{d\lambda}. \quad (4.25)$$

É evidente que se tomarmos que $l = l_0 = \text{constante}$, o lado direito fica identicamente nulo.

Com isso, não é difícil mostrar que (4.6) conduz à expressão:

$$\frac{d^2 l}{d\lambda^2} + f' e^{2f} h_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (4.26)$$

Em conseqüência, as equações (4.9) reduzem-se a equação:

$$\frac{d^2 l}{d\lambda^2} + f' \left(K + \left(\frac{dl}{d\lambda} \right)^2 \right) = 0. \quad (4.27)$$

A equação (4.27) diz respeito à parte pentadimensional do movimento geodésico. Como já exposto, os valores de K definem que tipo de geodésicas estaremos a estudar. Decerto, nos interessamos por partículas cujo movimento satisfaz o Princípio da Causalidade. Assim os valores de K deverão ser ou 0 ou 1. A equação (4.27) é uma equação diferencial de segunda ordem, que em princípio, pode ser resolvida se admitirmos conhecida a função $f' = f'(l)$. Reciprocamente, se $l = l(\lambda)$ é então conhecido, conseqüentemente $f = f(l)$ será determinado (a menos de uma constante de integração) contanto que possamos escrever $\lambda = \lambda(l)$.

4.5 Análise qualitativa do movimento na quinta dimensão

Recordemos que a hipersuperfície fixa as condições de limite para o fator de distorção. Se o fator de distorção $f = f(l)$ não é conhecido *a priori*, não disporemos de uma maneira que nos leve a obter informações conclusivas sobre o movimento na quinta dimensão. Contudo, aqui mostraremos que uma análise qualitativa via sistemas dinâmicos nos fornecerá informações relevantes sobre tal movimento.

Para efetuar a análise definimos a variável $q = \frac{dl}{d\lambda}$ e, assim, passamos a considerar (4.27) como o seguinte sistema dinâmico autônomo (vide **Apêndice I**).

$$\begin{aligned} \frac{dl}{d\lambda} &= q, \\ \frac{dq}{d\lambda} &= P(q, l), \end{aligned} \tag{4.28}$$

com

$$P(q, l) = -f'(K + q^2). \tag{4.29}$$

Na investigação de sistemas dinâmicos, um papel preponderante é desempenhado pelos *pontos de equilíbrio*, que neste caso particular do sistema (4.45) é caracterizado por

$$q = 0 \tag{4.30}$$

$$P(q, l) = 0. \tag{4.31}$$

O conhecimento desses pontos, juntamente com as propriedades de estabilidade, permite auferir importantes informações relativas aos tipos de comportamentos permitidos ao sistema. Assim, se para uma geodésica particular conhecemos t como uma função do parâmetro λ , isto é, $t = t(\lambda)$, então como $\frac{dt}{d\lambda} \neq 0$ e sabendo *a priori* o comportamento de $l = l(\lambda)$ a análise qualitativa nos permitirá deduzir a evolução temporal do movimento de uma partícula (ou feixes de luz) na quinta dimensão.

4.5.1 Movimento geodésico pentadimensional de partículas maciças nas imediações de uma hipersuperfície tetradi- mensional

Iniciemos por considerar o caso das partículas de massa de repouso não-nulas ($K = 1$), cujo movimento na quinta dimensão é governado pelo sistema dinâmico.

$$\frac{dl}{d\lambda} = q \tag{4.32}$$

$$\frac{dq}{d\lambda} = -f'(1 + q^2). \tag{4.33}$$

O ponto de equilíbrio é determinado por $q = 0$ e os zeros da função $f'(l)$ (se existem), denotamos genericamente por l_0 . Estas soluções são interpretadas como pontos críticos no plano de fase, e correspondem a curvas que se mantêm completamente em uma hipersuperfície (ou folha) Σ_0 de uma folheação $l = \text{constante}$ de M .

A existência de pontos de equilíbrio do sistema dinâmico (4.32) tem a importante consequência de que as geodésicas do hiperespaço e as da hipersuperfície ($l = l_0 = \text{constante}$) coincidem. Note que para a métrica (4.21) a curvatura extrínseca da hipersuperfície Σ_0 é dada por

$$H_N(\partial_\alpha, \partial_b) = -f' e^{2f} h_{\alpha\beta}(x), \tag{4.34}$$

que é claramente nula para os pontos de equilíbrio, onde $f' = 0$. Então, na ausência de pontos de equilíbrio, (i.e. $f' \neq 0$) a curvatura extrínseca não se anula, e de acordo o **teorema 6**, com efeito, a hipersuperfície não será totalmente geodésica.

Para obter informações sobre os possíveis modos de comportamento de partículas e raios de luz em tais hipersuperfícies é importante estudar a natureza e estabilidade dos correspondentes pontos de equilíbrio. Isto pode ser feito linearizando as equações (4.32) (ver **Apêndice I**). Temos, então, as equações:

$$\frac{dl}{d\lambda} = q, \tag{4.35}$$

$$\frac{dq}{d\lambda} = -f''(l_0)l(1 + q^2), \tag{4.36}$$

que podem ser representados pela equação matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{l} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f''(l_0)(1 + q^2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ q \end{pmatrix}$$

cujo polinômio característico é:

$$\lambda^2 + f''(l_0)l(1 + q^2) = 0$$

Estudando os autovalores da correspondente matriz jacobiana nos pontos de equilíbrio e supondo que a função $f'(l)$ se anula em pelo menos algum ponto l_0 , podemos prontamente mostrar que os correspondentes autovalores são determinados pelo sinal da segunda derivada $f''(l_0)$, as seguintes possibilidades emergem para os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico :

Caso I. Se $f''(l_0) > 0$, então o ponto de equilíbrio ($q = 0, l = l_0$) é um *vórtice* ou *centro* (ver figura 4.1). Este representa o caso no qual as soluções próximas ao ponto de equilíbrio tem a topologia de um círculo. Neste caso, o retrato de fase consiste em curvas fechadas que descrevem o movimento da partícula oscilando em torno da hipersuperfície $\Sigma_0(l = l_0)$ indefinidamente (ver figura 4.2).

As amplitudes das oscilações dependerão somente das condições iniciais. Notemos que a existência de tais movimentos cíclicos é independente do espaço-tempo tetradimensional, exceto pelas condições $f'(l_0) = 0$ e $f''(l_0) > 0$, o fator de

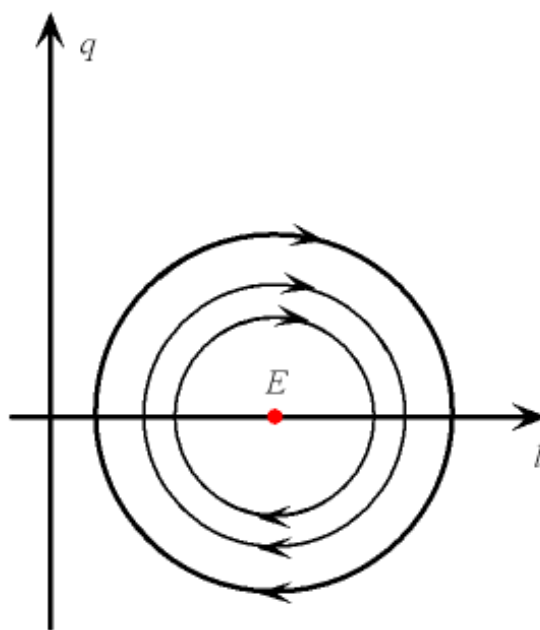


Figura 4.2: O ponto de equilíbrio E no caso onde $f(l_0) > 0$.

distorção $f(l)$ continuando completamente arbitrário. A presença de tais pontos de equilíbrio tem como consequência o quase-confinamento de partículas, que pode ser entendido como um exemplo de *hipersuperfícies quase totalmente geodésicas* (Ver ilustração (figura 4.2)).

Caso II. Se $f''(l_0) < 0$, então o ponto $(q = 0, l = l_0)$ é um *ponto de sela*. Neste caso, a solução correspondente ao ponto de equilíbrio E é altamente instável. Isto quer dizer que a menor perturbação leva a uma divergência exponencial das soluções.(ver figura 4.3).

Um exemplo deste confinamento altamente instável é dado pelo fator de distorção [45].

$$f(l) = -b \ln \cosh(cl), \quad (4.37)$$

onde b e c são constantes positivas. Aqui temos um único ponto de equilíbrio, em $l = 0$. Também podemos verificar que $f''(0) < 0$ neste caso. Aproveitando este exemplo, notamos que para grandes valores de l o fator de distorção (4.37)

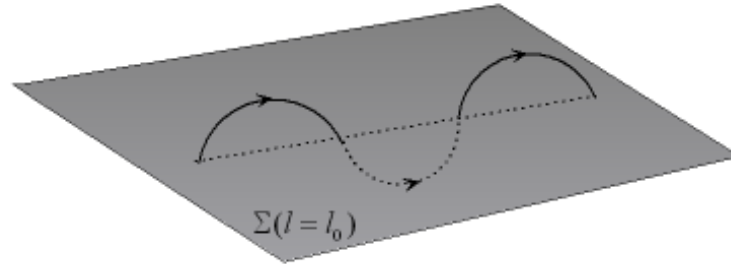


Figura 4.3: As partículas entram e saem indefinidamente da hipersuperfície $\Sigma(l = l_0)$. Isto dá origem a um mecanismo de *quasi-confinamento*.

aproxima-se daquele presente na métrica de Randall-Sundrum [16],[17]

$$ds^2 = e^{-2k|l|} \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - dl^2 \quad (4.38)$$

onde k é uma constante. Neste caso $f'(l) = \mp k$, conforme o valor de l seja positivo ou negativo. Então, para $l \neq 0$ não existem pontos de equilíbrio e, portanto, não há confinamento de partículas devido puramente a efeitos geométricos. No entanto, neste limite de fina espessura, se assumirmos nulo o valor da curvatura extrínseca da brana $l = 0$, então (4.32) implica em confinamento. Todavia, como apontado em [46] este é um confinamento altamente instável no sentido de que qualquer perturbação transversal no movimento das partículas maciças ao longo da brana acarretará uma fuga para a dimensão extra. Porém, este caso está fora do elenco das métricas que estamos considerando aqui, pois, o fator de distorção não é suave (a primeira derivada de $f(l)$ com respeito à coordenada extra não é contínua em $l = 0$).

Caso III. Se $f''(l_0) = 0$, então ambos os autovalores são nulos, o que corresponde a um caso degenerado. Para continuar analisando qualitativamente as soluções próximas do ponto de equilíbrio, neste caso, necessitaríamos conhecer a derivada terceira (ou de ordem superior) da função $f(l)$. Não desejamos considerar este caso em sua generalidade. No entanto, se $f(l)$ é constante (caso IV), então podemos facilmente desenhar um retrato de fase global do sistema.

Caso IV. Se $f(l) = \text{constante}$, então $f'(l)$ se anula para todos os valores de

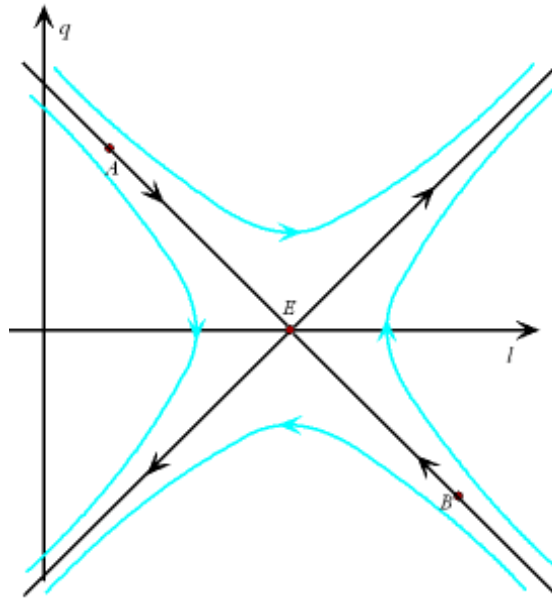


Figura 4.4: Quando $f''(l_0) < 0$ o ponto de equilíbrio é um ponto de sela. Neste caso o confinamento é altamente instável. A única exceção correspondente às linhas AE e BE , ao longo das quais partículas são atraídas de volta para a folha.

l , o que implica que há uma infinidade de pontos de equilíbrio não-isolados, ou seja, temos uma linha contínua de pontos de equilíbrio ($q = 0$). Perturbações ao longo desta linha são neutramente estáveis, o que implica que partículas colocadas em qualquer uma das hipersuperfícies da folheação $l = l_0 = \text{constante}$ irão permanecer lá até receberem uma velocidade transversal à hipersuperfície.

Caso V. Se não temos pontos de equilíbrio, ou seja, se no fator de distorção $f(l)$ não existe ponto de retorno para nenhum valor de l , então não podemos ter confinamento de partículas clássicas nas hipersuperfícies devido somente a efeitos geométricos. Um exemplo desta situação é ilustrado pelo fator de distorção

$$f(l) = \frac{1}{2} \ln (\Lambda l^2/3) \tag{4.39}$$

considerado na referência [49].

Notamos que mesmo quando não há pontos de equilíbrio, a representação da dinâmica ainda pode ser obtida se $f(l)$ é conhecido, obtendo-se a primeira integral do sistema definido por (4.28). Mas, escrevendo este sistema como a equação diferencial

de primeira ordem

$$\frac{dl}{dq} = -\frac{q}{f'^2(K+q^2)}, \quad (4.40)$$

a qual pode ser prontamente integrada, levando a

$$f(l) = -\ln \sqrt{K+q^2} + B, \quad (4.41)$$

onde B é uma constante de integração.

4.6 O movimento de fótons nas proximidades de uma hipersuperfície do tipo tempo

Examinemos agora as geodésicas nulas (movimento de fótons) no intuito de saber quando são elas confinadas na hipersuperfície ou, pelo menos numa vizinhança desta. Neste caso, o sistema dinâmico (4.28) torna-se:

$$\frac{dl}{d\lambda} = q \quad (4.42)$$

$$\frac{dq}{d\lambda} = -f'^2 q^2 \quad (4.43)$$

Os pontos de equilíbrio são dados, agora, por $q = 0$, que consiste em uma linha de pontos de equilíbrio ao longo de eixo l , com ambos os autovalores iguais a zero. Como resultado, existem geodésicas nulas $5D$ em qualquer hipersuperfície $l = \text{constante}$. Isto demonstra que o confinamento de fótons na hipersuperfície não depende do fator de distorção. Há, também, regiões de estabilidade e instabilidade com respeito à pequenas perturbações ao longo do eixo l .

Como foi apontado na seção anterior, podemos facilmente obter uma integral primeira do sistema (4.42) que é dado por (4.41). No caso do movimento dos fótons, ($K = 0$) isto dá

$$q = Ae^{-f(l)} \quad (4.44)$$

onde A é uma constante de integração. Portanto, podemos obter uma dinâmica global das soluções (4.42) a partir de certo conhecimento qualitativo da função $f(l)$.

Muitos casos diferentes podem surgir, dependendo da natureza de $f(l)$. Aqui, por simplicidade, vamos impor a simetria Z_2^1 sobre a geometria do *bulk*. O que se segue são alguns exemplos possíveis:

1. $f(l)$ é uma função monotonicamente crescente para $l \geq 0$ que se aproxima do limite $f(l) \rightarrow \infty$ quando $l \rightarrow \infty$ (isto pode ser perfeitamente visto em (4.5)). Isto inclui o caso do fator distorção considerada em [49].

2. $f(l)$ é uma função monotonicamente decrescente para $l \geq 0$ que se aproxima do limite $f(l) \rightarrow -\infty$ quando $l \rightarrow \infty$, que é o caso do fator distorção dado em [46] (veja a 4.5). Note o curioso comportamento dos fótons que não são

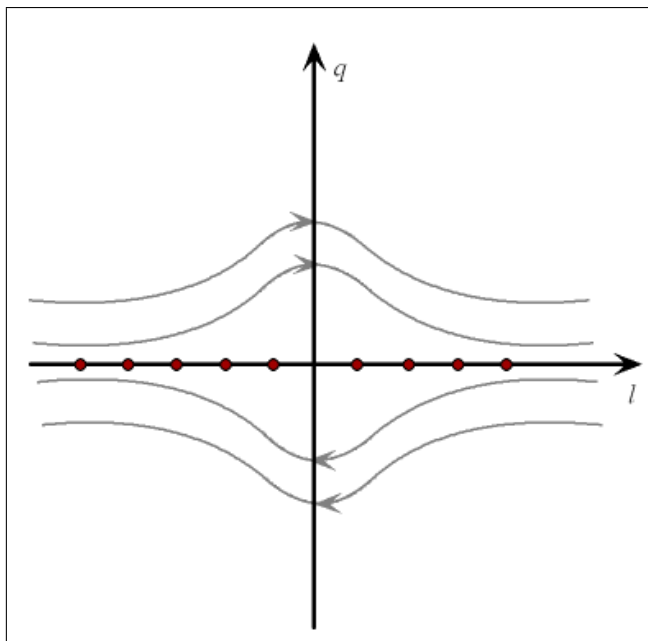


Figura 4.5: Retrato de fase do movimento de fótons em presença de simetria Z_2 com uma função $f(l)$ monotônica crescente para $l \geq 0$ e $f(l) \rightarrow \infty$ quando $l \rightarrow \infty$.

confinados: se os colocamos em movimento em direção à hipersuperfície $\Sigma(l = 0)$, então após alcançar uma distância mínima de Σ , são lançados de volta ao infinito, mostrando claramente que são repelidos por Σ ;

3. $f(l)$ é constante, e neste caso temos o mesmo diagrama de fase que temos no caso de partículas maciças.

Finalmente é relevante notar que no caso de geodésicas nulas, os pontos de equilíbrio da equação (4.42) não exigem que $f' = 0$, que é uma consequência da aplicação do **lema 6** ao **corolário 3**, isso é, como as folhas espaço-tempo são umbílicas, então, as geodésicas do tipo luz da folha também são geodésicas do *bulk*. Outra conclusão importante é que, nos casos em que as hipersuperfícies são localizadas nos pontos de retorno $l = l_0$ das funções f , $H_{\alpha\beta} = -f'e^{2f}h_{\alpha\beta}(x)$ satisfaz a simetria Z_2 por definição.

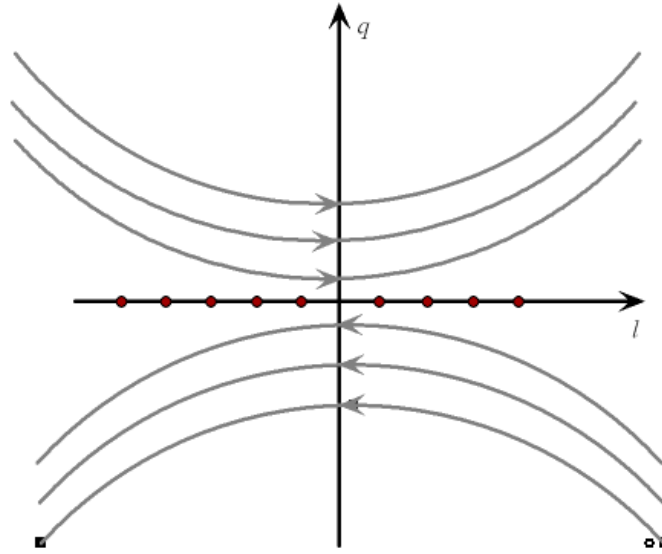


Figura 4.6: Retrato de fase correspondente ao caso onde $f(l)$ é um função monotônica decrescente para $l \geq 0$. Nessa conjuntura $f(l) \rightarrow -\infty$ quando $l \rightarrow \infty$.

4.7 Movimento de partículas nas proximidades da subvariedade M^4 com $M = \mathbb{R}^n \times_F M^4$

Por simplicidade, consideraremos o caso em que a métrica k_{ab} , de (4.1), é euclidiana, isto é, $k_{ab} = \text{diag}(+\dots+)$. Isto irá nos permitir verificar facilmente a existência de pontos de equilíbrio[47].

Se definirmos $\frac{dy^a}{d\lambda} = z^a$ podemos, então, expressar as equações (4.9) como um sistema dinâmico autônomo dado por

$$\begin{aligned} \frac{dy^a}{d\lambda} &= z^a, \\ \frac{dz^a}{d\lambda} &= P^a(z, y), \end{aligned} \tag{4.45}$$

com

$$P^a(z, y) = -f^{,a}(K + k_{bc}z^bz^c) - \Gamma_{bc}^a z^bz^c, \tag{4.46}$$

e

$$z^a = (z^1, \dots, z^n), y^a = (y^1, \dots, y^n). \tag{4.47}$$

Novamente $K = 1$ para partículas de maciças e $K = 0$ para partículas com massa de repouso nula (caso dos fótons). Também temos que

$$z^a = 0 \text{ e } P^a(z, y) = 0, \quad (4.48)$$

determinam os pontos de equilíbrio de (4.45) (ver **Apêndice I**).

O conhecimento destes pontos junto com as suas propriedades de estabilidade nos permitirá ganhar muitas informações relativas aos tipos de comportamento permitido ao sistema.

Se as equações $f_{,a} = 0$ possuírem raízes reais (que denotamos por $y_o = (y_o^1, \dots, y_o^n)$), os pontos de equilíbrio estarão determinados por ($z^a = 0, y = y_o$).

Tanto a natureza, como também a estabilidade destes pontos de equilíbrio, podem ser obtidos através de linearização das equações (4.45), estudando-se os auto-valores da matriz jacobiana correspondente calculada nos pontos de equilíbrio. Neste caso, esta é uma matriz $2n \times 2n$ dada por

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -f_{11} & -f_{12} & \dots & -f_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ -f_{21} & -f_{22} & \dots & -f_{2n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & 0 & \dots & 0 \\ -f_{n1} & -f_{n2} & \dots & -f_{nn} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

onde $f_{,ab} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^a \partial y^b}$. Não é difícil ver que o determinante $\det J$ e o traço I de J são determinados, respectivamente por

$$\det J = -(1)^{n+1} \det f_{,ab} \quad (4.50)$$

e $I = 0$.

Para formas gerais do fator de distorção f os auto-valores do sistema são raízes de um polinômio de ordem $2n$, que seria difícil analisar analiticamente. Porém, aqui nosso propósito primário, é descobrir se o sistema é, em princípio, capaz de prover confinamento de partículas nas proximidades da subvariedade espaço-tempo

M^4 . Assim em lugar de procurar o caso geral, aqui, nos perguntaremos se existem classes de fatores de distorção especiais f para os quais tal o confinamento é possível.

Como exemplo, consideremos os casos em que onde f_{ij} possua pontos de equilíbrio nulos para todo o $i \neq j$, e números reais positivos caso $i = j$. Em tal circunstância a matriz J simplifica-se e os auto-valores podem ser encontrados prontamente:

$$\lambda = \pm i \sqrt{f_{,aa}}, \quad a = 1 \dots 2n \quad (4.51)$$

onde $f_{,aa}$ não subtende nenhuma soma. Esta condição seria satisfeita para funções do tipo

$$f = \sum_a c_a (y^a)^n, \quad (4.52)$$

para $n \in \mathbb{Z}^+$, isto é, valores inteiros e positivos n .

Isto nos permite ver o sistema como um conjunto de osciladores harmônicos acoplados:

$$\frac{d^2 y^i}{dt^2} = -\omega_i^2 y^i$$

onde novamente nenhuma adição é subtendida em $\omega_i = f_{ii}$. Assim, no caso de codimensão n , o movimento está confinado a um n -toro. Isto generaliza o caso do ponto de equilíbrio de vórtice que foi encontrado para codimensão um, a um caso de confinamento toroidal de partículas nas proximidades da subvariedade espaço-tempo M^4 .

Capítulo 5

Conclusão

Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse, mas o ato de ali chegar, que me dá o maior prazer. Quando acabo por clarificar e explorar completamente um assunto, então afasto-me dele para entrar na escuridão outra vez. (Carl Friedrich Gauss. Carta enviada por Gauss ao seu amigo Wolfgang Bolyai)

Nesta dissertação, estivemos a estudar alguns aspectos do movimento de partículas maciças e fótons em espaço produto distorcido. Espaços deste tipo têm recebido uma grande atenção ao longo dos recentes anos, principalmente em conexão com cenários de *braneworld*.

Empregando a vantajosa separação que ocorre naturalmente em tais espaços entre o movimento nas dimensões extras e o movimento no espaço-tempo, usando a análise do espaço de fase, encontramos uma forma de *quase-confinamento* das geodésicas, neutramente estável. De certa maneira, isto é importante para uma generalização do confinamento tipo δ de partículas em branas. Uma importante razão para considerar um outro tipo de modelos de branas em que se tenha um comprimento extra mínimo característico é dado pela teoria de cordas [52][53].

A importância do tipo de confinamento discutido aqui está no fato de que sua origem se deve puramente a efeitos gravitacionais clássicos, sem a requerer presença de mecanismos de confinamento tipo do campo escalar. Como exemplo, encontramos que no caso do modelo de Randall-Sundrum a geometria não é capaz de confinar partículas maciças, enquanto que fótons podem ser confinados. Como é

bem conhecido, o confinamento de partículas neste cenário é alcançado por meios de um campo escalar [16].

Uma hipótese usualmente admitida em cenários mundo-brana, que desempenha um papel importante em conexão com o confinamento nestes modelos, é a simetria Z_2 . É, portanto, importante, notar que, alguns resultados que encontramos são capazes de levar a confinamento, nesta perspectiva. Finalmente comparamos nossos resultados com teorema da totalidade geodésica de uma subvariedade, que diz que as geodésicas de um espaço semi-riemanniano coincidem com as geodésicas de uma subvariedade (totalmente geodésica) imersa se e somente se a segunda forma fundamental subvariedade se anula. A análise desse fato está discutida com detalhes no capítulo 2. Nossa análise, por outro lado, enquanto restrita ao caso de espaços produto distorcidos, fornece informações referentes à estabilidade do confinamento em subvariedades lorentziana tetradimensionais totalmente geodésicas, com o seguido uso da análise de sistemas dinâmicos.

Finalmente, gostaríamos de fazer as seguintes considerações:

Uma classe importante de modelos de dimensionalidade superior no chamado cenário “braneworld” apresenta as seguintes características em comum:

- a) Nosso espaço-tempo é representado por uma hipersuperfície quadridimensional (“brana”) imersa num espaço de dimensão superior (“bulk” ou hiperespaço);
- b) a geometria do hiper-espaço é caracterizada por uma variedade diferencial dotada de produto distorcido;
- c) toda a matéria fermiônica do Universo está confinada na brana devido a uma interação dos férmions com um campo escalar, cuja existência é aprioristicamente suposta;
- d) o campo escalar mencionado depende apenas das dimensões extras do hiper-espaço.

Dito isto, uma idéia que parece ser interessante e rica de conseqüências é examinar a possibilidade de dotar o hiper-espaço de um carácter não-riemanniano, de

maneira a aparecerem graus de liberdade extra na geometria. Estes graus de liberdade poderiam ser usados para simular classicamente um confinamento quântico de uma maneira puramente geométrica. Um exemplo desse esquema de investigação foi elaborado recentemente, tendo como modelo uma geometria de Weyl [54]. Acreditamos, que seja possível, ir além da geometria de Weyl, investigando sistematicamente outras geometrias não-riemannianas (ou pós-riemannianas), tais como geometrias com torção, variedades complexas, geometrias de Finsler, para citar algumas.

Apêndice A

Apêndices

Um sistema dinâmico é um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem em n variáveis $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ que descrevem a evolução temporal do estado de um sistema. Essas equações possuem a seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}), \quad (\text{A.1})$$

com $\mathbf{x} \in U \subset \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{\mu} \in V \subset \mathbb{R}^P$, com U e V conjuntos abertos em \mathbb{R}^N e \mathbb{R}^P , respectivamente.

Na literatura da teoria de sistemas dinâmicos temos as seguintes definições:

- \mathbf{x} é chamado vetor de estado;
- $F(\mathbf{x})$. Corresponde à evolução do sistema (descreve a dinâmica), e descreve a *trajetória* do sistema;
- *trajetória* é a seqüência de estados exibida por um sistema dinâmico durante sua evolução temporal.
- O conjunto de valores que toma \mathbf{x} é denominado **espaço de fase**.

A.1 Sistemas autônomos

Definição 40 *Chamam-se autônomos os sistemas de equações diferenciais invariantes sob translações do tempo. Isto é:*

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}) \tag{A.2}$$

É claro que um sistema será autônomo se, e somente se, os lados direitos das equações não dependerem explicitamente do tempo.

A.1.1 Estabilidade de um sistema autônomo

Definição 41 Um vetor \mathbf{x}_0 em \mathbb{R}^n se diz um ponto crítico ou de equilíbrio para o sistema autônomo se $F(\mathbf{x}_0) = 0$.

Neste contexto, o primeiro problema da teoria da estabilidade é o de determinar as condições sob as quais as soluções de (A.2) que partem das vizinhanças de um ponto de equilíbrio para o sistema permanecem sempre perto desse ponto, caso este que denominamos ponto de equilíbrio estável, e as condições sob as quais não permanecem por perto, caso este que dizemos equilíbrio instável.

A.1.2 Classificação dos pontos de equilíbrio dos sistemas autônomos no plano

Dada uma equação

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \tag{A.3}$$

com $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, onde $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma matriz constante 2×2 , define-se um sistema autônomo linear no plano.

Uma vez solucionada (A.3), poder-se-á traçar as curvas $x_1(t)$ vs t e $x_2(t)$ vs t . Também é possível traçar uma curva $x_1(t)$ vs $x_2(t)$, em um plano $x_1 \times x_2$ conhecido como o *plano de fase*. A curva resultante é uma trajetória de (A.3), e pode visualizar-se como uma curva paramétrica definida por $(x_1(t), x_2(t))$.

A solução de (A.3) depende das condições iniciais. Com efeito, a trajetória também dependerá das condições iniciais. Sobre o mesmo plano de fase se podem traçar diferentes trajetórias obtidas com distintas condições iniciais; o resultado disso

é o que chamamos por *retrato de fase*. A seguir, mostramos alguns diagramas de fase típicos de um sistema dinâmico planar nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio:

A **Figura A.1** mostra os retratos de fase típicos de sistemas lineares estáveis e a **Figura A.2** mostra os retratos de fase típicos de sistemas lineares instáveis. Devemos ressaltar que a forma dos retratos de fase depende fundamentalmente dos auto-valores de A [55].

Nome	Retrato	Auto-valores	Exemplo
Estável Pontos Nodais.		Reais Negativos	$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10}e^{-t}$ $x_2(t) = x_{20}e^{-2t}$	
Estável Um ponto Nodal.		Reais Negativos Degenerados	$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = (x_{10} + tx_{20})e^{-t}$ $x_2(t) = x_{20}e^{-t}$	
Estável Sifão Ponto Focal		Complexos de Parte Real Negativa	$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10}e^{-2t} \cos t + x_{20}e^{-2t} \sin t$ $x_2(t) = -x_{10}e^{-2t} \sin t + x_{20}e^{-2t} \cos t$	
Estável Vórtice Ponto de vórtice		Imaginários Puros	$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10} \cos t + x_{20} \sin t$ $x_2(t) = -x_{10} \sin t + x_{20} \cos t$	

Figura A.1: Retratos de fase estáveis típicos

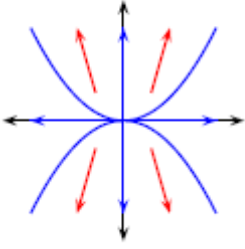
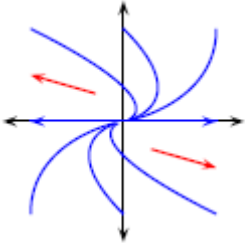
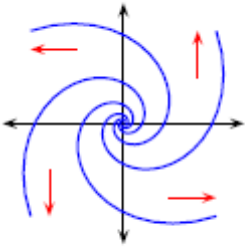
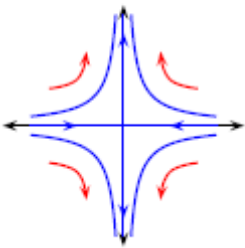
Nome	Retrato	Auto-valores	Exemplo
Instável Pontos Nodais.		Reais Positivos	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10}e^t$ $x_2(t) = x_{20}e^{2t}$	
Instável		Reais Positivos Degenerados	$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = (x_{10} + tx_{20})e^t$ $x_2(t) = x_{20}e^t$	
Instável Sifão Ponto Focal		Complexos de Parte real Positiva	$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10}e^{2t} \cos t + x_{20}e^{2t} \sin t$ $x_2(t) = -x_{10}e^{2t} \sin t + x_{20}e^{2t} \cos t$	
Instável Ponto sela		Reais de sinais Diferentes	$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
		$x_1(t) = x_{10}e^{-t}$ $x_2(t) = x_{20}e^t$	

Figura A.2: Retratos de fase instáveis típicos

A.2 Sistemas não lineares

Um sistema autônomo, não-linear, de segunda ordem, é definido por duas equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

onde f e g não são simples combinação linear das variáveis x e y . Não existem técnicas analíticas gerais para resolver esse tipo de equação. E os métodos numéricos apresentam mais problemas do que no caso de equações lineares. No entanto, a análise gráfica no espaço de fase pode fornecer muitas informações sobre o comportamento do sistema. Uma forma eficaz de determinar a estabilidade de um sistema dinâmico não-linear é a linearização. O propósito deste método é determinar se um ponto crítico é estável, estipulando que nas proximidades deste ponto o comportamento desse sistema se aproxime de um sistema linear.

Portanto, nas vizinhanças do ponto crítico (u, v) as duas funções podem ser escritas na forma de uma série de Taylor:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(u, v) + (x - u) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(u, v)} + (y - v) \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(u, v)} + \dots \\ g(x, y) &= g(u, v) + (x - u) \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(u, v)} + (y - v) \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(u, v)} + \dots \end{aligned}$$

Como (u, v) é um ponto crítico do sistema, $f(u, v)$ e $g(u, v)$ serão nulas. Com efeito, se mudarmos a origem das coordenadas para o ponto crítico (u, v) , numa vizinhança da origem, o sistema pode ser aproximado pelo seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(u, v)} & \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(u, v)} \\ \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(u, v)} & \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(u, v)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Essa matriz, obtida a partir das derivadas das funções de estado, designa-se por **matriz jacobiana**.

Bibliografia

- [1] Davies, Paul., *Superforça*. 1ªEd. Gradiva, Lisboa,(1988).
- [2] Einstein,A., Lorentz, H.Weyl, H.Minkowsky, H., *O principio da Relatividade, Textos fundamentais da Física Moderna*. Volume I, 5ª edição, Fundação Calouste Gulbenkian.
- [3] Riemann, B., *Clifford translated, On the Hypotheses which lie at the basis of Geometry*, Nature, Vol VIII.Nos 183,184, pp.14-17, 36, 37.
- [4] Nordström,G.,*Über die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfelds zu vereinigen*. Phys. Zeitschr, **15**, 504(1914).
- [5] Mie, G., *"Grundlagen einer Theorie der Materie "*. Ann.Physik, **37**, 511, (1913).
- [6] Kaluza, T., 1921. *On the Problem of Unity in Physics*. Sitzungsber. Preuss.Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) K1:966–972.
- [7] Klein,O., *Quantum theory and five-dimensional theory of relativity*. Zeitschr. Physik , **37**, 897(1926).
- [8] T.Appelquist, A. Chodos e P. Freund, *Modern Kaluza-Klein Theories*, Addison-Wesley, Menlo Park(1987).
- [9] P.West, *Introduction tro Supersymmetry and Supergravity*, World Scientific, Cingapura(1986).
- [10] M.Green, J.Schwarz, E. Witten, *Superstring theory*, Cambridge University Press, Cambridge, England (1987).

- [11] Joseph P., *String Theory: Superstring Theory and Beyond*, Vol. 2, Cambridge University Press,(1998).
- [12] Romero, C. *Imersão isométrica de variedades pseudo-riemannianas e dimensões extras do espaço-tempo*. Manuscrito não publicado(2004).
- [13] C.V.Johnson, *D-branas*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [14] Hawking. Stephen, *O universo numa casca de noz*, Mandarim, São Paulo (2001).
- [15] Arkani-Hamed, Nima, Savas Dimopoulos, and G. R. Dvali., *The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*. Physics Letters B4 **29**:263–272.hep-ph/9803315. (1998).
- [16] Randall, Lisa, and Raman Sundrum., *An alternative to compactification*. Physical Review Letters 83:4690–4693. hep-th/9906064.
- [17] Randall, Lisa, and Raman Sundrum., *A large mass hierarchy from a small extra dimension*. Physical, Review Letters 83:3370–3373. hep-ph/9905221.
- [18] Wesson, Paul S., *Space-Time-Matter. Singapore*. World Scientific(1999).
- [19] Campbell, J. 1926., *A Course of Differential Geometry*. Oxford: Claredon.
- [20] Magaard, L., 1963. *Zur einbettung riemannscher Raume in Einstein-Raume und konformeulidische Raume*. Ph.D. diss., Kiel.
- [21] Dahia, F., *Imersão do espaço-tempo e a generalização do teorema de Campbell-Magaard*. Tese de Doutorado, UFPb (2001).
- [22] Dahia, F. e Romero, C., *The embedding of the space-time in five dimensions:an extension of Campbell-Magaard theorem*. J. Math. Phys. **43**, 5804(2002).
- [23] Wesson, Paul S., B. Mashhoon, H. Liu, and W. N. Sajko, *Fifth force from fifth dimension*. Physics Letters B 456:34–37 (1999).
- [24] Dahia, F, E.M.Monte, Romero,C., *Fifth force from fifth dimension: a comparison between two different approaches*, Mod. Phys. Lett. A **18**, 1773 (2003).

-
- [25] R. L. Bishop and B. O'Neill, *Manifolds of negative curvature*. Trans. Am. Math. Soc. 145, 1 (1969).
- [26] J. K. Beem, P. E. Ehrlich, and K. Easley, *Global Lorentzian Geometry*. 2nd ed. Dekker, New York, 1996.
- [27] J. K. Beem, P. E. Ehrlich, and T. G. Powell, *Warped product manifolds in relativity*. In Selected Studies: A Volume Dedicated to the Memory of Albert Einstein, edited by T. M. Rassias and G. M. Rassias (North-Holland, Amsterdam, 1982), p. 41.
- [28] J. K. Beem and P. E. Ehrlich, *Singularities, incompleteness, and the Lorentzian distance function*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **85**, 161 (1979).
- [29] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic, New York, (1983).
- [30] Chamblin, A., S. W. Hawking, and H. S. Reall., *Brane-world black holes*. Physical Review D61:065007. hep-th/9909205, (2000).
- [31] Brecher, D., and M. J. Perry., *Ricci-flat branes*. Nuclear Physics B 566:151–172. hep-th/9908018, (2000)
- [32] Schutz, B., *Geometrical methods of mathematical physics*. Cambridge, 1997.
- [33] Carmo, M. Perdigão., *Geometria Riemanniana*. 2ª edição, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, (1988).
- [34] Lima, Elon Lages, *Curso de análise vol.2*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [35] Camacho, C., Lins Neto, A., *Teoria Geométrica das Folheações*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [36] D'Inverno, Ray., *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford Univ Pr, (1992).
- [37] Kaku, M. *Hiperespaço*, Rocco, Editora, (2000).

- [38] Kostrikin, A.I., e Manin, Y.I., *Linear Algebra and Geometry*. Gordon and Breach, New York, (1981).
- [39] Chen B.Y., *Geometry of submanifolds and its applications*. Science Univ. of Tokyo, 1981, pp 96.
- [40] Ponge, R., and Reckzigel H., *Twisted product in pseudo-Riemannian geometry*, *Geom. Dedicata*, **48**, 15-25, (1993)
- [41] Rovenskii, Vladimir, *Foliations on Riemannian manifolds and submanifolds*. Birkhäuser Boston, (1997).
- [42] Rodriguez, Lucio, *Geometria das Subvariedades*. Monografias de Matemática, **26**, Rio de Janeiro, 1976.
- [43] Dahia, F., Romero, C. ; Silva, Lucio. F. P. ; Tavakol, R., *Warped product spaces and geodesic motion in the neighbourhood of hypersurfaces*. *Journal of Mathematical Physics*, **48**, 072501, (2007).
- [44] Einsehart, L., *Riemannian Geometry*. Princeton University Press, (1949).
- [45] Gremm, M., *Four-dimensional gravity on a thick domain wall*. *Phys. Lett. B* **478**, 434 (2000).
- [46] W. Muck, K. S. Viswanathan, and I. Volovich, *Geodesics and Newton's law in brane backgrounds*, *Phys. Rev.D*, **62**, 105019 (2000).
- [47] Dahia, F. ; Romero, C. ; Silva, L. F. P. ; Tavakol, R. *Geodesic motion in the neighbourhood of submanifolds embedded in warped product spaces*. *General Relativity and Gravitation*, **40**, (no prelo), (2008).
- [48] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, "Do We Live Inside A Domain Wall?". *Phys. Lett. B* **125**, **136**, (1983).
- [49] P. S. Wesson, B. Mashhoon and H. Liu, *The (Im)possibility of Detecting a Fifth Dimension* *Mod. Phys. Lett.A* **12**, 2309 (1997).

-
- [50] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern Geometry - Methods and Applications: Part I: The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields*. Springer, New York, (1991).
- [51] M. Gogberashvili and D. Singleton, “*Nonsingular Increasing Gravitational Potential for the Brane in 6D*”. Phys. Lett., B 582, **95** (2004).
- [52] S. S. Seahra, *Classical confinement of test particles in higher-dimensional models: Stability criteria and a new energy condition*. Phys. Rev. D, **68**, 104027 (2003).
- [53] O. DeWolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser, A. Karch, Phys, *Modeling the fifth dimension with scalars and gravity*. Rev.D **62**, 046008, (2000).
- [54] F. Dahia, A. T. Gomez, C. Romero, *Do we live in a Weyl bulk?. General Relativity and Quantum Cosmology*, arXiv:0711.2754v1.
- [55] V. Arnold, *Equações diferenciais ordinárias*. Editora Mir, (1985).