Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Folheações e Curvas Estáticas no Plano Projetivo

Marco Aurélio Tomaz Mialaret Júnior

2011

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Folheações e Curvas Estáticas no Plano Projetivo

por

Marco Aurélio Tomaz Mialaret Júnior

sob orientação do

Prof. Dr. Cleto B. Miranda Neto

Agosto de 2011
João Pessoa-PB

M618f Mialaret Júnior, Marco Aurélio Tomaz.
Folheações e curvas estáticas no plano projetivo / Marco Aurélio Tomaz Mialaret Júnior.-- João Pessoa, 2011.
49f.
Orientador: Cleto B. Miranda Neto
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Curvas estáticas. 3. Pontos de inflexão. 4. Folheações holomorfas. 5. Soluções algébricas.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Folheações e Curvas Estáticas no Plano Projetivo

por

Marco Aurélio Tomaz Mialaret Júnior

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Fernando Xavier de Souza - UFPB

Prof. Dr. André Luiz Meireles Araujo - UFPE

Profa. Dr. Napoleon Caro Tuesta - UFPB (Suplente)

Aos meus pais.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a toda minha família, em especial minha mãe Tirzar, meu pai Marco e minha irmã Kádja, pelo apoio e amor incondicional nesses dois anos de luta. Também não posso esquecer-me de minha namorada Karla e a sua família pela paciência, amor e compreensão (Sem essas pessoas dificilmente eu teria forças).

Gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Dr. Cleto Miranda Neto por indicar-me um tema tão belo, sempre incentivar minha autonomia e acreditar em meu trabalho. Também agradeço aos professores Dr. Fernando Xavier e Dr. André Meireles por terem participado da banca e por, em tão pouco tempo, apresentarem sugestões relevantes para a dissertação. Também agradeço ao Prof. Dr. Jorge Vitório Pereira pela colaboração nas correções da dissertação.

E por último e não menos importante agradeço aos grandes amigos que fiz durante estes dois anos: Tati, Maikon e Tatinha: pelas tardes de estudo na sala, apoio, momentos divertidos e pela costela na pressão. Karine (Iso): pelo incentivo, amizade e por sempre estar sorrindo e tentando ver o lado bom das coisas (faz bem ter pessoas assim ao nosso lado). Edjane (Iso): Pelos momentos divertidos, que foram muitos, e por seus devaneios (sempre inspiradores) . Cecília: pela amizade. Priscila e Claudemir: pelo apoio acadêmico em um momento difícil. Dayvid (Boy): pelas partidas de xadrez. Juanice: pelos conselhos e amizade. Viviane e Oldinéia: pelo abrigo e amizade. Talita: pela breve amizade. Rodrigo: por sua premonição pré-prova. Suellen e Ricardo: pela presença sempre agradável. Valdecir: pelos dois anos de convivência pacífica e pela paciência com os meus esquecimentos. Enfim, agradeço a todos que comtribuiram direta ou inderetamente para o meu sucesso.

Resumo

O presente trabalho aborda um estudo das curvas estáticas no plano projetivo, proporcionando um método que garante a existência de integrais primeiras para certos campos vetorias. Para atingir tal objetivo, o presente estudo abrange os seguintes tópicos: Campos Vetoriais, Integrais Primeiras (tendo como principal resultado apresentado o Teorema de Jouanolou), Folheações Holomorfas (em particular, folheações no plano projetivo) e as Soluções Algébricas (onde o principal resultado é o conhecido teorema de Darboux, que garante a existência de integrais primeiras racionais para folheações algébricas no plano projetivo).

Palavras-chave: Pontos de inflexão, Curvas Estáticas, Folheações Holomorfas, Soluções Algébricas

Abstract

The present work discusses a study of extactic curves in the projective plane, providing a method that guarantees the existence of first integrals for certain vector fields. To achieve this goal, this study covers the following topics: vector fields, first integrals (with the main result presented in Jouanolou's Theorem), holomorphic foliations (in particular, foliations on the projective plane) and algebraic solutions (where the main result is the well-known theorem of Darboux, which guarantees the existence of rational first integrals for algebraic foliations on the projective plane).

Key-words: Inflections points, Extactic curves, Holomorphic foliations, Algebraic solutions.

Introdução

O principal objetivo desta dissertação é o estudo das chamadas *curvas estáticas* no plano projetivo complexo, que são curvas especiais que descrevem os pontos de inflexão das soluções de um dado campo vetorial. Pontos de inflexão são caracterizados por possuírem retas tangentes com ordem de contato pelo menos 3. Se C é uma curva então $p \in C$ é um ponto de inflexão de ordem d se existir uma curva de grau d que possui alta ordem de contato com a curva C em p, no sentido de que a ordem de contato é pelo menos a dimensão do espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau d em 3 variáveis. No caso das curvas planas, os pontos de inflexão são calculados pelo hessiano, o que torna a obtenção dos pontos de inflexão de ordem superior uma tarefa árdua.

Cayley, em *On the sextactic points of a plane curve* (1865), foi provavelmente o primeiro matemático a estudar os pontos de inflexão de ordem superior de curvas planas. Para pontos de inflexão de ordem 2, ele obteve uma fórmula explícita (porém não muito simples). F. Cukierman, em seu trabalho *Determinant of complexes and higher Hessians* (1997), afirmou que a obtenção de fórmulas para os pontos de inflexão de ordem superior a 3 não havia sido resolvida na literatura clássica e apresentou uma nova abordagem para obter tais pontos, no caso de curvas planas e de curvas dadas por interseções completas em algum espaço projetivo.

Em *Vector fields, invariant varieties and linear systems* (2001), principal trabalho no qual esta dissertação se baseia, J. V. Pereira calcula os pontos de inflexão – de ordem superior – das soluções de campos vetoriais holomorfos no plano projetivo complexo. Mais precisamente, são definidos certos divisores ε_d (as chamadas *curvas estáticas*), associados a um campo vetorial $\mathcal{X}$ em $\mathbb{P}^2$, tal que a restrição de um tal divisor a uma solução de $\mathcal{X}$ coincide com os pontos de inflexão de ordem d desta solução.

Para melhor atingir os objetivos, este texto será dividido em três capítulos.

No primeiro capítulo, são expostas as noções gerais básicas a serem utilizadas ao longo da dissertação (incluindo elementos da teoria de folheações holomorfas e integrais primeiras), tendo como principal resultado apresentado o Teorema de Jouanolou, que fornece uma condição suficiente para uma 1-forma diferencial polinomial possuir uma integral primeira racional.

O segundo capítulo dá enfoque ao estudo das soluções algébricas de folheações no plano projetivo complexo; mais precisamente, a obtenção de um método para garantir a existência de integrais primeiras racionais para folheações algébricas em $\mathbb{P}^2$. Tal resultado é dado pelo bem-conhecido Teorema de Darboux.

Por fim, no terceiro capítulo, com toda a teoria em mãos, as curvas estáticas em

$\mathbb{P}^2$ serão definidas, e será demonstrado o teorema que garante a existência de integrais primeiras para certos campos vetoriais $\mathcal{X}$ através do cálculo de suas curvas estáticas $\varepsilon_d(\mathcal{X})$.

Sumário

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Campos vetoriais

Nesta seção, campos vetoriais polinomiais — aqui chamados simplesmente *campos vetoriais* — serão definidos em $\mathbb{C}^3$, pois tal contexto é suficiente quanto aos principais resultados apresentados neste trabalho (salienta-se, todavia, que definições e propriedades análogas continuam válidas para $\mathbb{C}^n$, para qualquer natural n, mais detalhes em [[16]] e [[22]]).

Se p é um ponto de $\mathbb{C}^3$, o conjunto $T_p(\mathbb{C}^3)$ de todos os vetores com ponto de aplicação p é chamado de *espaço tangente* a $\mathbb{C}^3$ em p.

Um campo vetorial $\mathcal{X}$ em $\mathbb{C}^3$ é uma função que associa a cada ponto $p \in \mathbb{C}^3$ um vetor $\mathcal{X}(p) = (M_1(p), M_2(p), M_3(p)) \in T_p(\mathbb{C}^3)$, onde M_1, M_2, M_3 são elementos do anel de polinômios $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$, interpretados, sempre que for conveniente, como funções polinomiais $M_i\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C},\ i = 1, 2, 3$. Se cada polinômio M_i for homogêneo de grau k (com relação à graduação *standard* de $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$), então o campo será chamado de campo vetorial *homogêneo* de grau k, o que se escreve $\deg(\mathcal{X}) = k$.

Sejam $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$ campos vetoriais em $\mathbb{C}^3$ tais que, para todo $p \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1(p) &= (1,0,0)_p \\ \mathcal{U}_2(p) &= (0,1,0)_p \\ \mathcal{U}_3(p) &= (0,0,1)_p \end{aligned}$$

onde $(a, b, c)_p \in T_p(\mathbb{C}^3)$ denota o vetor (a, b, c) considerado com ponto de aplicação p. Assim, cada $\mathcal{U}_i$ fornece vetores unitários paralelos ao i-ésimo vetor canônico $e_i \in T_{(0,0,0)}(\mathbb{C}^3)$. Em particular, $\mathcal{U}_i(0, 0, 0) = e_i$ para cada i.

Lema 1.1.1 *Se $\mathcal{X}$ é um campo vetorial em $\mathbb{C}^3$, existem três e somente três polinômios $M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ tais que $\mathcal{X} = M_1\mathcal{U}_1 + M_2\mathcal{U}_2 + M_3\mathcal{U}_3$ (os polinômios M_1, M_2, M_3 são denominados funções coordenadas de $\mathcal{X}$).*

Demonstração: *Dado $p \in \mathbb{C}^3$, temos* $\mathcal{X}(p) = (M_1(p), M_2(p), M_3(p)) = M_1(p)(1,0,0)_p + M_2(p)(0,1,0)_p + M_3(p)(0,0,1)_p = M_1(p)\mathcal{U}_1(p) + M_2(p)\mathcal{U}_2(p) +$

$M_3\,(p)\,\mathcal{U}_3\,(p) = (M_1\mathcal{U}_1 + M_2\mathcal{U}_2 + M_3\mathcal{U}_3)(p), \forall\, p \in \mathbb{C}^3$. Logo $\mathcal{X} = M_1\mathcal{U}_1 + M_2\mathcal{U}_2 + M_3\mathcal{U}_3$. Finalmente, a unicidade da tripla $\{M_1, M_2, M_3\}$ segue claramente da independência linear dos vetores $(e_1)_p, (e_2)_p, (e_3)_p$, qualquer que seja o ponto $p \in \mathbb{C}^3$. ■

Sejam agora $\mathcal{X} = (M_1, M_2, M_3)$ e $\mathcal{X}' = (M_1', M_2', M_3')$ campos vetoriais em $\mathbb{C}^3$ e $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ uma aplicação polinomial. Para cada $p \in \mathbb{C}^3$, tem-se:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{X} + \mathcal{X}')\,(p) &= ((M_1 + M_1')\,(p)\,, (M_2 + M_2')\,(p)\,, (M_3 + M_3')\,(p)) \\
&= (M_1\,(p) + M_1'\,(p)\,, M_2\,(p) + M_2'\,(p)\,, M_3\,(p) + M_3'\,(p)) \\
&= (M_1\,(p)\,, M_2\,(p)\,, M_3\,(p)) + (M_1'\,(p)\,, M_2'\,(p)\,, M_3'\,(p)) \;=\; \mathcal{X}\,(p) + \mathcal{X}'\,(p)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(f\mathcal{X})\,(p) &= ((fM_1)\,(p)\,, (fM_2)\,(p)\,, (fM_3)\,(p)) \\
&= (f\,(p)\,M_1\,(p)\,, f\,(p)\,M_2\,(p)\,, f\,(p)\,M_3\,(p)) \\
&= f\,(p)\,(M_1\,(p)\,, M_2\,(p)\,, M_3\,(p)) \;=\; f(p)\mathcal{X}(p)
\end{aligned}$$

Segue-se que o conjunto dos campos vetoriais em $\mathbb{C}^3$ possui uma estrutura natural de *módulo* sobre o anel das funções polinomiais $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ (equivalentemente, sobre o anel $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$). O Lema acima afirma que tal módulo é *livre* (de posto 3), uma base sendo $\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3\}$.

O campo vetorial homogêneo definido por $E(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$ é chamado *campo de Euler* ou *campo radial*. Pode-se definir uma relação de equivalência entre dois campos homogêneos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}'$, de mesmo grau k, da seguinte maneira:

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{X}' \iff \mathcal{X} \;=\; \mathcal{X}' \,+\, g\,E,$$

para algum polinômio homogêneo g de grau $k - 1$.

Seja $\overline{\mathcal{X}}$ a classe de equivalência de $\mathcal{X}$ com respeito a esta relação de equivalência. Então, qualquer $\mathcal{X}' \in \overline{\mathcal{X}}$ é dito um *representante* do campo $\mathcal{X}$.

Define-se a *divergência* de um campo $\mathcal{X} = (M_1, M_2, M_3)$ como sendo a função

$$\operatorname{div}(\mathcal{X}) \;=\; \frac{\partial M_1}{\partial x_1} \;+\; \frac{\partial M_2}{\partial x_2} \;+\; \frac{\partial M_3}{\partial x_3}.$$

Tal função será utilizada mais adiante nesta dissertação.

Um ponto $p \in \mathbb{C}^3$ é dito um *ponto singular* (ou *singularidade*) do campo $\mathcal{X} = (M_1, M_2, M_3)$ se $\mathcal{X}(p) = 0 \in T_p(\mathbb{C}^3)$, isto é, se

$$M_1(p) \;=\; M_2(p) \;=\; M_3(p) \;=\; 0.$$

O conjunto dos pontos singulares de $\mathcal{X}$ é denotado por $\operatorname{Sing}(\mathcal{X})$, em analogia com a tradicional notação do lugar singular $\operatorname{Sing}(V)$ de uma variedade V.

Seja $V = Z(f) \subset \mathbb{C}^3$ uma hipersuperfície algébrica reduzida. Diz-se que V é uma *solução algébrica* de $\mathcal{X}$, ou que V é *invariante* por $\mathcal{X}$, se o vetor $\mathcal{X}(p)$ é tangente a V sempre que $p \in U$, onde $U = (V \setminus (\operatorname{Sing}(V) \cup \operatorname{Sing}(\mathcal{X}))$. Ou seja, V é uma solução algébrica de $\mathcal{X}$ se:

$$\sum_{i=1}^{3} M_i(p)\, \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(p) \;=\; 0 \quad \forall\, p \in U.$$

Mas $U \subset V$ é um aberto denso de Zariski (aqui, precisamos assumir que $V \not\subseteq \mathrm{Sing}(\mathcal{X})$), e assim a função $\sum_{i=1}^{3} M_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ necessariamente se anula identicamente em $V = Z(f)$. Logo, pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, existe $g \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{3} M_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \;=\; gf$$

A partir deste ponto de vista, pode-se considerar a *derivação* de $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ correspondente ao campo $\mathcal{X}$ como sendo

$$D_{\mathcal{X}} = \sum_{i=1}^{3} M_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Na prática, muitas vezes costuma-se identificar $\mathcal{X}$ e $D_{\mathcal{X}}$.

Enfim, uma hipersuperfície algébrica reduzida $V = Z(f)$ é uma solução algébrica de $\mathcal{X}$ se, e somente se,

$$D_{\mathcal{X}}(f) \;=\; g\, f$$

para algum $g \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$. Neste caso, diz-se que a derivação $D_{\mathcal{X}}$ é *logarítmica* para f (ou para a hipersuperfície V).

Trata-se mesmo de uma derivação pois, dados $a, b \in \mathbb{C}$ e $f, g \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$, tem-se

$$D_{\mathcal{X}}\,(af + bg) = aD_{\mathcal{X}}\,(f) + bD_{\mathcal{X}}\,(g)$$

$$D_{\mathcal{X}}\,(fg) = gD_{\mathcal{X}}\,(f) + fD_{\mathcal{X}}\,(g)$$

Isto é, $D_{\mathcal{X}}$ é $\mathbb{C}$-linear e satisfaz a regra de Leibniz.

1.2 Formas diferenciais

De modo geral, o *espaço dual* de um $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\mathbb{V}$ é o conjunto de todas as transformações lineares $w : \mathbb{V} \to \mathbb{C}$, chamadas *funcionais lineares*, e denotado por $\mathbb{V}^*$. Note que $\mathbb{V}^*$ possui uma estrutura natural de espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ (para uma estudo mais detalhado [[6]] e [[7]]).

Uma base de $\mathbb{V}^*$ satisfazendo tal propriedade é única (fixada a base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$), chamada *base dual* (associada a $\mathcal{B}$). Em particular, $\dim(\mathbb{V}^*) = \dim(\mathbb{V})$.

Considere o caso especial em que $\mathbb{V} = \mathbb{C}^n$ e $\mathcal{B}$ é a base canônica. Qualquer $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ se escreve $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$. Para cada i, considere $w_i = dx_i \in (\mathbb{C}^n)^*$ dado por $dx_i(x_1, ..., x_n) = x_i$. Então $\mathcal{B}^* = \{dx_1, \ldots, dx_n\}$, de modo que todo funcional linear $w \in (\mathbb{C}^n)^*$ pode ser escrito como

$$w = a_1 dx_1 + ... + a_n dx_n, \quad a_i \in \mathbb{C},\ \forall i.$$

Define-se uma *forma diferencial de grau 1*, ou uma *1-forma diferencial*, em $\mathbb{C}^3$, como sendo uma aplicação w que a cada ponto $p \in \mathbb{C}^3$ associa um funcional linear $w(p) \in (\mathbb{C}^3)^*$, de maneira que, dados $a, b \in \mathbb{C}$ e $p, q \in \mathbb{C}^3$, tem-se:

$$w(ap + bq) \;=\; a\, w(p) \;+\; b\, w(q)\,.$$

Em coordenadas x_1, x_2, x_3 de $\mathbb{C}^3$, uma 1-forma diferencial se escreve

$$w \;=\; F_1\, dx_1 \;+\; F_2\, dx_2 \;+\; F_3\, dx_3,$$

onde cada F_i é um polinômio complexo em 3 variáveis. Dado qualquer $p \in \mathbb{C}^3$, basta calcular

$$w(p) \;=\; F_1(p)\, dx_1(p) \;+\; F_2(p)\, dx_2(p) \;+\; F_3(p)\, dx_3(p),$$

onde, como acima, tem-se

$$dx_i(p) = x_i \quad \text{se} \quad p = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3.$$

Desse modo, vê-se que a noção de 1-forma é dual à de campo vetorial.

Dado o campo $\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{3} M_i \mathcal{U}_i$ e a 1-forma w, tem-se:

$$\begin{aligned} w(\mathcal{X}(p)) &= w\left(\sum_{i=1}^{3} M_i(p)\, \mathcal{U}_i(p)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{3} M_i(p)\, w(\mathcal{U}_i(p)). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (w(\mathcal{X}))(p) &= \left(w\left(\sum_{i=1}^{3} M_i \mathcal{U}_i\right)\right)(p) \\ &= \sum_{i=1}^{3} (w(M_i \mathcal{U}_i))(p) = \sum_{i=1}^{3} M_i(p)\, w(\mathcal{U}_i(p)). \end{aligned}$$

Portanto $(w(\mathcal{X}))(p) \;=\; w(\mathcal{X}(p))$, de modo que uma 1-forma converte campos em funções. As seguintes propriedades de linearidade valem:

$$\begin{aligned} w\left(f\mathcal{X} + g\overline{\mathcal{X}}\right) &= f w(\mathcal{X}) + g w\left(\overline{\mathcal{X}}\right) \\ (f w + g\overline{w})(\mathcal{X}) &= f w(\mathcal{X}) + g\overline{w}(\mathcal{X}) \end{aligned}$$

onde f, g são polinômios, $\mathcal{X}$, $\overline{\mathcal{X}}$ são campos e w, $\overline{w}$ são 1-formas.

Exemplo 1.2.1 *A diferencial* $df = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ *de uma função holomorfa* $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ *(por exemplo, polinomial) é um exemplo natural de 1-forma.*

Mais geralmente, pode-se definir *formas diferenciais de grau superior* como sendo combinações lineares de dois ou mais termos da base dual de $\mathbb{C}^3$, onde o "produto" das diferenciais satisfaz a regra de *alternação*, que no caso de 2-formas se escreve

$$dx_i dx_j = -dx_j dx_i.$$

Em particular, tomando $j = i$, obtém-se $dx_i dx_i = 0$.

É facil ver que em $\mathbb{C}^3$ existem quatro tipos de formas diferenciais (polinomiais), a saber:

0-forma: f (função polinomial);

1-forma: $f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$;

2-forma: $f_1 dx_1 dx_2 + f_2 dx_1 dx_3 + f_3 dx_2 dx_3$;

3-forma: $f dx_1 dx_2 dx_3$;

onde $f, f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$.

A soma de formas diferenciais de mesmo grau (grau qualquer) é feita da maneira usual,

$$\sum f_i dx_i + \sum g_i dx_i = \sum (f_i + g_i)\, dx_i$$

e o produto entre formas (não necessariamente de mesmo grau) é feito de maneira distributiva e utilizando a regra da alternação. Como se sabe, trata-se do *produto exterior* "$\wedge$" (também chamado *produto wedge*). Ambas as notações $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_s$ e $dx_1 \cdots dx_s$ são usuais.

Lema 1.2.2 *Se w e $\overline{w}$ são 1-formas em $\mathbb{C}^3$, então $w \wedge \overline{w} = -\overline{w} \wedge w$.*

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}
w \wedge \overline{w} &= (f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3) \wedge (g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + g_3 dx_3) \\
&= f_1 g_1 dx_1 \wedge dx_1 + f_1 g_2 dx_1 \wedge dx_2 + f_1 g_3 dx_1 \wedge dx_3 + f_2 g_1 dx_2 \wedge dx_1 + \\
&\quad + f_2 g_2 dx_2 \wedge dx_2 + f_2 g_3 dx_2 \wedge dx_3 + f_3 g_1 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 g_2 dx_3 \wedge dx_2 + f_3 g_3 dx_3 \wedge dx_3 \\
&= (f_1 g_2 - f_2 g_1)\, dx_1 \wedge dx_2 + (f_2 g_3 - f_3 g_2)\, dx_2 \wedge dx_3 + (f_1 g_3 - f_3 g_1)\, dx_1 \wedge dx_3 \\
&= -g_2 f_1 dx_2 \wedge dx_1 - g_1 f_2 dx_1 \wedge dx_2 - g_3 f_2 dx_3 \wedge dx_2 - g_2 f_3 dx_2 \wedge dx_3 - \\
&\quad - g_3 f_1 dx_3 \wedge dx_1 - g_1 f_3 dx_1 \wedge dx_3 - g_1 f_1 dx_1 \wedge dx_1 - g_2 f_2 dx_2 \wedge dx_2 - g_3 f_3 dx_3 \wedge dx_3 \\
&= (-g_1 dx_1 - g_2 dx_2 - g_3 dx_3) \wedge (f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3) \\
&= -(g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + g_3 dx_3) \wedge (f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3) = -\overline{w} \wedge w.
\end{aligned}$$

■

Seja $w = \sum_{i=1}^{3} f_i dx_i$ uma 1-forma em $\mathbb{C}^3$. Define-se a *diferencial exterior* de w como sendo a 2-forma

$$dw = \sum_{i=1}^{3} df_i \wedge dx_i$$

onde $df_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$ é a diferencial usual da função f_i. Naturalmente, esta definição se estende para o caso de r-formas onde $r \geq 2$ (analogamente, a diferencial exterior será uma $(r+1)$-forma).

De modo geral, se $U \subset \mathbb{C}^n$ é um aberto, então uma 1-forma diferencial (holomorfa) $w = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$ é dita *exata* (em U) quando existe uma função holomorfa $F : U \to \mathbb{C}$ tal que $w = dF$, e é dita *fechada* (em U) se $dw|_U = 0$. Se a 1-forma w é de classe C^1 (isto é, vale a condição extra de que as f_i's tem derivadas contínuas) então w é fechada (a reciproca é falsa, pois a propriedade de ser fechada é apenas local).

Teorema 1.2.3 *Sejam f e g polinômios, w e $\overline{w}$ 1-formas, então:*

1. $d(fg) = g\,df + f\,dg$
2. $d(fw) = df \wedge w + fdw$
3. $d(w \wedge \overline{w}) = dw \wedge \overline{w} - w \wedge d\overline{w}$

Demonstração: As duas primeiras propriedades são de verificação rotineira e não representam dificuldade alguma (ficam como exercício para o leitor). Quanto à terceira propriedade, suponha, sem perda de generalidade, que $w = fdx_1$ e $\overline{w} = gdx_2$. Então:

$d(w \wedge \overline{w}) = d(fgdx_1 \wedge dx_2)$
$= \frac{\partial(fg)}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial(fg)}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial(fg)}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2$
$= \frac{\partial(fg)}{\partial x_3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \left(\frac{\partial(f)}{\partial x_3} g + \frac{\partial(g)}{\partial x_3} f\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$

Mas

$dw \wedge \overline{w} = \left(\frac{\partial(f)}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial(f)}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1\right) \wedge gdx_2$
$= g\frac{\partial(f)}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = g\frac{\partial(f)}{\partial x_3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

e além disso

$w \wedge d\overline{w} = fdx_1 \wedge \left(\frac{\partial(g)}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial(g)}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2\right) = -f\frac{\partial(g)}{\partial x_3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$

Portanto,

$d(w \wedge \overline{w}) = dw \wedge \overline{w} - w \wedge d\overline{w}$

■

Corolário 1.2.4 *Dadas 1-formas w, w' e w'' tais que $w \wedge w' = 0$ e $w \wedge w'' = 0$, tem-se $w' \wedge w'' = 0$.*

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que $w = f_1dx_1 + f_2dx_2$, $w' = g_1dx_1 + g_2dx_2$ e $w'' = h_1dx_1 + h_2dx_2$. Então,

$$\begin{array}{rcl} w \wedge w' & = & (f_1dx_1 + f_2dx_2) \wedge (g_1dx_1 + g_2dx_2) \\ & = & f_1g_2dx_1 \wedge dx_2 - f_2g_1dx_1 \wedge dx_2 \\ & = & (f_1g_2 - f_2g_1)\, dx_1 \wedge dx_2 = 0 \end{array}$$

Como $dx_1 \wedge dx_2 \neq 0$, segue que

$$g_2 = \frac{f_2g_1}{f_1}.$$

E,

$$\begin{array}{rcl} w \wedge w'' & = & (f_1dx_1 + f_2dx_2) \wedge (h_1dx_1 + h_2dx_2) \\ & = & f_1h_2dx_1 \wedge dx_2 - f_2h_1dx_1 \wedge dx_2 \\ & = & (f_1h_2 - f_2h_1)\, dx_1 \wedge dx_2 = 0 \end{array}$$

Como $dx_1 \wedge dx_2 \neq 0$, segue que

$$h_2 = \frac{f_2h_1}{f_1}.$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} w' \wedge w'' & = & (g_1dx_1 + g_2dx_2) \wedge (h_1dx_1 + h_2dx_2) \\ & = & g_1h_2dx_1 \wedge dx_2 - g_2h_1dx_1 \wedge dx_2 \\ & = & (g_1h_2 - g_2h_1)\, dx_1 \wedge dx_2 = 0 \end{array}$$

Mais uma vez, como $dx_1 \wedge dx_2 \neq 0$, segue que

$$g_1h_2 - g_2h_1 = g_1 \cdot \frac{f_2h_1}{f_1} - \frac{f_2g_1}{f_1} \cdot h_1 = 0$$

■

1.3 Folheações holomorfas

Seja M uma variedade complexa de dimensão $m \geq 2$. Uma *folheação holomorfa não-singular* (ou *regular*) de *dimensão* k (ou *codimensão* $m-k$) em M, onde $1 \leq k \leq m-1$, é dada pelo seguinte conjunto de informações:

1. Uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abertos;

2. Para cada $\alpha \in A$, um biholomorfismo $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{D}^k \times \mathbb{D}^{m-k}$, onde $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ é o disco unitário com centro na origem;

3. Sempre que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, a aplicação

$$\begin{array}{rccll} \phi_{\alpha\beta} & : & \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) & \to & \phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \\ & & (z,w) & \mapsto & \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(z,w) & = (\varphi_1, \varphi_2) \end{array}$$

   satisfaz $\phi_{\alpha\beta}(z,w) = (\varphi_1(z,w), \varphi_2(z,w))$.

Cada aberto U_α é denominado um *aberto trivializador* da folheação (mais detalhes em [[15]] e [[17]]).

Observações:

- Por (b): U_α é decomposto em variedades de dimensão k da forma $\phi_\alpha^{-1}\left(\mathbb{D}^k \times w_0\right)$, onde $w_0 \in \mathbb{D}^{m-k}$, chamadas de *placas*.

- Por (c): as placas se sobrepõem nas interseções de abertos trivializadores da seguinte maneira: se $P_\alpha \subset U_\alpha$ e $P_\beta \subset U_\beta$, então $P_\alpha \cap P_\beta = \varnothing$ ou $P_\alpha \cap P_\beta = P_\alpha \cap U_\beta = P_\beta \cap U_\alpha$.

Uma importante noção no estudo das folheações holomorfas é a de *folhas*. Uma *folha* é definida como a classe de equivalência de um $p \in M$ dada pela seguinte relação de equivalência: $p \backsim q$ $(q \in M)$ se existem placas $P_1, ..., P_m$, com $p \in P_1$ e $q \in P_m$ tais que $P_i \cap P_{i+1} \neq \varnothing$, para $i = 1, ..., m-1$. Cada folha, assim definida, possui uma estrutura de variedade complexa de dimensão k imersa em M, com a topologia induzida pelos abertos das placas. Portanto, uma folheação $\mathcal{F}$ proporciona uma decomposição da variedade em subvariedades imersas de dimensão k, duas a duas disjuntas. Denota-se por $T_p\mathcal{F}$ o *espaço tangente* a $\mathcal{F}$ em $p \in M$, que é definido como o espaço tangente à folha passando por $p \in M$. Assim, $\dim(T_p\mathcal{F}) = k$. Duas folheações são ditas iguais se todas as suas folhas coincidem.

Uma folheação holomorfa *singular* $\mathcal{F}$, de dimensão k (ou codimensão $m-k$), onde $1 \leq k \leq m-1$, em uma variedade complexa M de dimensão m, é uma folheação não-singular de dimensão k em $M \backslash S$, onde S é um conjunto analítico em M de codimensão maior ou igual a dois. Exige-se que o conjunto S seja minimal, no sentido de que não existe um subconjunto analítico próprio $S' \subset S$ tal que a folheação regular em $M \backslash S$ se estenda a $M \backslash S'$. Nessas condições, S é chamado de *conjunto singular* de $\mathcal{F}$, que será denotado por $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. Se $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, p é dito uma *singularidade* (ou *ponto singular*) da folheação; se $p \in M \backslash \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$, p é chamado de *ponto regular*. As folhas de $\mathcal{F}$ são, por definição, as folhas da folheação regular $\mathcal{F}|_{M \backslash \mathrm{Sing}(\mathcal{F})}$. Duas folheações singulares $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ são iguais se:

1. $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) = \mathrm{Sing}(\mathcal{F}')$;

2. As folheações regulares $\mathcal{F}|_{M \backslash \mathrm{Sing}(\mathcal{F})}$ e $\mathcal{F}'|_{M \backslash \mathrm{Sing}(\mathcal{F}')}$ são iguais.

Observação 1.3.1 *Uma distribuição de k-planos de M, onde $1 \leq k \leq m-1$ e $m = \dim M$, é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ um subespaço S_p de dimensão k de T_pM. A distribuição é dita holomorfa se para cada $p \in M$ existir uma vizinhança U onde estão definidos k campos vetoriais $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_k$ linearmente independentes em todos os pontos de U, tais que em cada ponto $q \in U$ o subespaço de T_qM gerado por $\mathcal{X}_1(q), \ldots, \mathcal{X}_k(q)$ coincide com o k-plano S_q. Ocorre que uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ de dimensão k em M define uma distribuição holomorfa de k-planos associando a cada $p \in M$ o espaço tangente $T_p\mathcal{F}$. Tem-se, assim, uma importante aplicação da teoria das folheações à teoria das distribuições, e em particular ao conceito de integrabilidade (do qual trata, por exemplo, o famoso Teorema de Frobenius).*

1.3.1 Folheações de dimensão 1

Seja M uma variedade complexa de dimensão $m \geq 2$, e seja $\mathcal{X}$ um campo de vetores holomorfo não-singular em um aberto $U \subset M$. Então, pode-se mostrar (através da versão holomorfa do Teorema do Fluxo Tubular) que U possui uma estrutura de folheação de dimensão 1 (isto é, $k = 1$). Assim, se $\widetilde{U} \subset M$ é aberto com $U \cap \widetilde{U} \neq \varnothing$, admitindo um campo de vetores não-singular $\widetilde{\mathcal{X}}$ que satisfaz $\mathcal{X}|_{U \cap \widetilde{U}} = f \widetilde{\mathcal{X}}|_{U \cap \widetilde{U}}$ para alguma função $f : U \cap \widetilde{U} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorfa, então $\mathcal{X}$ e $\widetilde{\mathcal{X}}$ induzem a mesma folheação em $U \cap \widetilde{U}$. Tem-se, portanto, uma folheação definida em $U \cup \widetilde{U}$. Inversamente, uma folheação de dimensão 1 é induzida localmente por campos vetoriais não-singulares. Basta tomar, em cada aberto trivializador U_α, o campo $\mathcal{X}_\alpha = D\left(\phi_\alpha^{-1}\right) \frac{\partial}{\partial x_1}$, onde $(x_1, (x_2, ..., x_m))$ são coordenadas de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}^{m-1}$. Se $U_{\alpha\beta} \neq \varnothing$, então para cada $p \in U_{\alpha\beta}$ existe $f_{\alpha\beta}(p) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\mathcal{X}_\alpha(p) = f_{\alpha\beta}(p)\, \mathcal{X}_\beta(p)$. A função $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, assim definida, é holomorfa. Portanto, o seguinte conjunto de dados:

1. Uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abertos;

2. Para cada $\alpha \in A$, um campo de vetores holomorfo não-singular $\mathcal{X}_\alpha$ em U_α;

3. Sempre que $U_{\alpha\beta} \neq \varnothing$, uma função holomorfa $f_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\mathcal{X}_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = f_{\alpha\beta} \mathcal{X}_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$,

define uma folheação de dimensão 1 em M. Ocorre que toda folheação holomorfa singular de dimensão 1 é induzida localmente por um campo vetorial holomorfo.

1.3.2 Fibrados associados a folheações

Já se sabe que, se $\mathcal{F}$ é uma folheação holomorfa de dimensão 1 em uma variedade complexa M, então M possui uma cobertura aberta $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que, para cada $\alpha \in A$, $\mathcal{F}|_{U_\alpha}$ é induzida por um campo holomorfo $\mathcal{X}_\alpha$. Além disso, sempre que $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, existe um invertível $f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_{\alpha\beta})^*$, tal que $\mathcal{X}_\alpha = f_{\alpha\beta} \mathcal{X}_\beta$. As funções $f_{\alpha\beta}$ satisfazem as condições de *cociclo*, ou seja,

1. $f_{\alpha\beta} f_{\beta\alpha} = 1$ em $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$;

2. $f_{\alpha\beta} f_{\beta\gamma} f_{\gamma\alpha} = 1$ em $U_{\alpha\beta\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Assim, o cociclo $(f_{\alpha\beta})$ induz um fibrado em retas holomorfo sobre M: o *fibrado cotangente* a $\mathcal{F}$, denotado por $T^*_{\mathcal{F}}$; o seu dual $T_{\mathcal{F}} = (T^*_{\mathcal{F}})^*$ é chamado de *fibrado tangente* a $\mathcal{F}$. Mostra-se que $T_{\mathcal{F}}$ não depende das escolhas feitas. A título de informação, tem-se o seguinte fato: a folheação $\mathcal{F}$ é não-singular se, e somente se, $T_{\mathcal{F}}$ é um subfibrado do fibrado tangente TM de M.

1.3.3 Folheações de codimensão 1

Para as folheações holomorfas singulares, tem-se o seguinte fato básico: toda folheação de codimensão 1 é induzida localmente por uma 1-forma w holomorfa e *integrável*, o que pelo bem-conhecido Teorema de Frobenius significa que $dw \wedge w = 0$.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa de codimensão 1 em uma variedade complexa M. Sejam $U_\alpha, U_\beta \subset M$ abertos, com $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, nos quais $\mathcal{F}$ é induzida por 1-formas holomorfas w_α e w_β, respectivamente. Procedendo analogamente ao caso de folheações de dimensão 1, conclui-se que existe $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorfa, satisfazendo $w_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = g_{\alpha\beta} w_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$. Portanto, uma folheação de codimensão 1 em uma variedade complexa M é definida pelo seguinte conjunto de dados:

1. Uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M por abertos;

2. Para cada $\alpha \in A$, uma 1-forma holomorfa w_α em U_α integrável, ou seja, satisfazendo $dw_\alpha \wedge w_\alpha = 0$, e cujo conjunto singular possui codimensão maior ou igual a dois;

3. Sempre que $U_{\alpha\beta} \neq \varnothing$, uma função holomorfa $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $w_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = g_{\alpha\beta} w_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$.

1.4 A integral primeira

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = P(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = Q(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\sharp)$$

onde P e Q são polinômios complexos em duas variáveis. Uma aplicação holomorfa $\phi : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ (onde U é um aberto) é dita uma *solução* de $(\sharp)$ se para qualquer $t \in U$ vale

$$\phi'(t) = (P \circ \phi(t),\, Q \circ \phi(t))$$

Existência e unicidade de soluções para o sistema de equações diferenciais acima são garantidas pelo famoso teorema a seguir (o disco de raio r centrado na origem de $\mathbb{C}$ será denotado por $\mathbb{D}(0, r)$):

Teorema 1.4.1 (*Existência e unicidade*) *Considere um sistema de equações diferenciais na forma* $(\sharp)$ *. Então valem as seguintes afirmações:*

1. Para qualquer $p \in \mathbb{C}^2$ existe um número real positivo r_p e uma função holomorfa $\phi_p : \mathbb{D}(0, r_p) \to \mathbb{C}^2$ tal que

$$\phi_p(0) = p \quad \text{e} \quad \phi_p'(t) = (P \circ \phi_p(t), Q \circ \phi_p(t)),$$

ou seja, ϕ_p é uma solução de $(\sharp)$ passando por p.

2. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto contendo a origem. Se $\psi : U \to \mathbb{C}^2$ é uma solução de ($\sharp$) tal que $\psi(0) = p$, então $\psi|_V = \phi_{p|V}$, onde $V = U \cap \mathbb{D}(0, r_p)$.

Apesar da importância deste teorema, pouco se sabe sobre a natureza (por exemplo, o comportamento qualitativo) das soluções do sistema diferencial proposto acima. Porém, em algumas situações, o estudo das *integrais primeiras* para sistemas do tipo ($\sharp$) constitui uma valiosa ferramenta.

Se $U \subset \mathbb{C}^2$ é um aberto e $F : U \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa não-constante, então F é dita uma *integral primeira* em U para o sistema ($\sharp$) se F é constante ao longo das soluções de ($\sharp$) contidas em U.

Proposição 1.4.2 *O sistema ($\sharp$), com $P, Q \neq 0$, é associado à 1-forma diferencial holomorfa $w = Pdx_2 - Qdx_1$.*

Demonstração: Considerando o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = P \\ \frac{dx_2}{dt} = Q \end{cases}$$

pode-se escrever formalmente

$$\frac{P}{Q} = \frac{\frac{dx_1}{dt}}{\frac{dx_2}{dt}} = \frac{dx_1}{dx_2}$$

o que significa escrever a condição $w = 0$, onde $w = Pdx_2 - Qdx_1$. ■

Proposição 1.4.3 *Uma função holomorfa e não-constante $F : U \to \mathbb{C}$ (onde $U \subset \mathbb{C}^2$ é um aberto) é uma integral primeira para ($\sharp$) (com $P, Q \neq 0$) se, e somente se, $w \wedge dF = 0$, onde $w = Pdx_2 - Qdx_1$.*

Demonstração: Basta notar que

$$\begin{aligned} w \wedge dF &= (Pdx_2 - Qdx_1) \wedge \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2\right) \\ &= P\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_2 \wedge dx_1 + P\frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 \wedge dx_2 - \\ &\quad -Q\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 \wedge dx_1 - Q\frac{\partial F}{\partial x_2}dx_1 \wedge dx_2 \\ &= -\left(Q\frac{\partial F}{\partial x_2} + P\frac{\partial F}{\partial x_1}\right) dx_1 \wedge dx_2, \end{aligned}$$

e assim, dividindo por Q e considerando a condição $P/Q = dx_1/dx_2$ (correspondente à condição de ser solução do sistema), obtém-se que $w \wedge dF = 0$ se, e somente se, são satisfeitas as igualdades $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$ ao longo das soluções de ($\sharp$) no domínio U de F. ■

Mostra-se que a equação diferencial $w = 0$ define uma folheação cujas folhas são as subvariedades integrais desta equação.

As noções de soluções algébricas e de curvas algébricas invariantes são bastante úteis para o estudo da existência de integrais primeiras. As definições são:

Soluções algébricas: Seja $\phi : V \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ uma solução de $(\sharp)$. ϕ é dita uma *solução algébrica* se existir $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ não-nulo, tal que $f(\phi(t)) = 0$, para todo $t \in V$.

Curvas algébricas invariantes: Seja $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$. A curva $C = Z(f)$ é dita uma *curva algébrica invariante* por $(\sharp)$ se, para toda solução $\phi \colon \mathbb{D}(0, r) \to \mathbb{C}^2$ de $(\sharp)$ satisfazendo $f(\phi(0)) = 0$, tem-se $f(\phi(t)) = 0$ sempre que $t \in \mathbb{D}(0, r)$.

Proposição 1.4.4 *Seja $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ um polinômio reduzido. A curva algébrica C descrita implicitamente por $Z(f)$ é invariante por $(\sharp)$ se, e somente se, existe uma 2-forma polinomial θ_f, tal que $w \wedge df = f \cdot \theta_f$.*

Demonstração: Se $C = Z(f)$ é uma curva algébrica invariante por $(\sharp)$, então para toda solução $\phi : V \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ contida em C vale que

$$(w \wedge df)(\phi(t)) = 0$$

para todo $t \in V$. Portanto, $(w \wedge df)|_C = 0$ e, pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, f divide $w \wedge df$.

Reciprocamente, supondo que $w \wedge df = f \cdot \theta_f$ (onde θ_f é uma 2-forma polinomial) e que $\phi : \mathbb{D}(0, r) \to \mathbb{C}^2$ é uma solução para $(\sharp)$ tal que $f(\phi(0)) = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} w(\phi(t)) \wedge df(\phi(t)) &= (P(\phi(t))\,dx_2 - Q(\phi(t))\,dx_1) \wedge \Big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}(f(\phi(t)))\,dx_1 + \tfrac{\partial}{\partial x_2}(f(\phi(t)))\,dx_2\Big) \\ &= P(\phi(t))\tfrac{\partial}{\partial x_1}(f(\phi(t)))\,dx_2 \wedge dx_1 + P(\phi(t))\tfrac{\partial}{\partial x_2}(f(\phi(t)))\,dx_2 \wedge dx_2 - \\ &\quad -Q(\phi(t))\tfrac{\partial}{\partial x_1}(f(\phi(t)))\,dx_1 \wedge dx_1 - Q(\phi(t))\tfrac{\partial}{\partial x_2}(f(\phi(t)))\,dx_1 \wedge dx_2 \\ &= -\Big(P(\phi(t))\tfrac{\partial}{\partial x_1}(f(\phi(t))) + Q(\phi(t))\tfrac{\partial}{\partial x_2}(f(\phi(t)))\Big)\,dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} (f(\phi(t)))'\,dx_1 \wedge dx_2 &= f'(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\,dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \Big(\Big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}(f(\phi(t))), \tfrac{\partial}{\partial x_2}(f(\phi(t)))\Big) \cdot (P(\phi(t)), Q(\phi(t)))\Big)\,dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \Big(P(\phi(t))\tfrac{\partial}{\partial x_1}(f(\phi(t))) + Q(\phi(t))\tfrac{\partial}{\partial x_2}(f(\phi(t)))\Big)\,dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

Comparando as duas expressões, obtém-se

$$w(\phi(t)) \wedge df(\phi(t)) = -(f(\phi(t)))'\,dx_1 \wedge dx_2$$

Então, com a hipótese $w \wedge df = f \cdot \theta_f$, segue que $(f \circ \phi)'(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{D}(0, r)$, e assim $f \circ \phi$ é uma função constante. Mas $f(\phi(0)) = 0$, logo $f(\phi(t)) = 0$ para todo $t \in \mathbb{D}(0, r)$. Ou seja, ϕ é uma solução algébrica de $(\sharp)$ e C é uma curva algébrica invariante. ■

Ao sistema $(\sharp)$ considerado acima, podemos associar o campo vetorial $\mathcal{X} = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$ em $\mathbb{C}^2$, que pode ser representado como

$$\mathcal{X} = P\frac{\partial}{\partial x_1} + Q\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Este campo atua sobre $\mathbb{C}(x_1, x_2)$ (o corpo das funções racionais em duas variáveis, ou equivalentemente, o corpo de frações do domínio $\mathbb{C}[x_1, x_2]$) da seguinte maneira:

$$\begin{array}{c}\mathcal{X} : \mathbb{C}(x_1, x_2) \to \mathbb{C}(x_1, x_2) \\ \mathcal{X}(f) : = P\frac{\partial f}{\partial x_1} + Q\frac{\partial f}{\partial x_2}.\end{array}$$

para toda função racional $f \in \mathbb{C}(x_1, x_2)$. É fácil ver que a aplicação $\mathcal{X} : \mathbb{C}(x_1, x_2) \to \mathbb{C}(x_1, x_2)$ é $\mathbb{C}$-linear e satisfaz a regra de Leibnitz, isto é,

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(\lambda f + \mu g) &= \lambda \mathcal{X}(f) + \mu \mathcal{X}(g) \\ \mathcal{X}(fg) &= \mathcal{X}(f)\, g + f \mathcal{X}(g)\end{aligned}$$

onde f, g são funções holomorfas (racionais) e λ, μ são números complexos. Isto permite uma interpretação do campo vetorial polinomial $\mathcal{X}$ como sendo uma *derivação*. Inversamente, cada derivação $\mathcal{D} : \mathbb{C}(x_1, x_2) \to \mathbb{C}(x_1, x_2)$ pode ser vista como um campo vetorial racional

$$\mathcal{D}(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathcal{D}(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Naturalmente, o campo $\mathcal{D}$ é polinomial se, e somente se, $\mathcal{D}(\mathbb{C}[x_1, x_2]) \subset \mathbb{C}[x_1, x_2]$.

Proposição 1.4.5 *Seja* $\mathcal{X} = P\frac{\partial}{\partial x_1} + Q\frac{\partial}{\partial x_2}$ *como antes, e seja* $w = Pdx_2 - Qdx_1$. *Então, para qualquer função racional* $f \in \mathbb{C}(x_1, x_2)$, *tem-se:*

1. $w \wedge df = -\mathcal{X}(f)\, dx_1 \wedge dx_2$

2. $dw = \operatorname{div}(\mathcal{X})\, dx_1 \wedge dx_2$

Demonstração:

1. Pode-se escrever:

$$\begin{aligned} w \wedge df &= (Pdx_2 - Qdx_1) \wedge \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2\right) \\ &= P\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_2 \wedge dx_1 - Q\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_1 \wedge dx_2 \\ &= -\left(P\frac{\partial f}{\partial x_1} + Q\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \\ &= -\mathcal{X}(f)\, dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

2. Basta calcular:

$$\begin{aligned} dw &= dP \wedge dx_2 - dQ \wedge dx_1 \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial P}{\partial x_2}dx_2\right) \wedge dx_2 - \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_2}dx_2\right) \wedge dx_1 \\ &= \frac{\partial P}{\partial x_1}dx_1 \wedge dx_2 - \frac{\partial Q}{\partial x_2}dx_2 \wedge dx_1 \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \operatorname{div}(\mathcal{X})\, dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

■

Com o que foi visto nesta seção, pode-se, a título de terminologia, dizer que uma função F é uma *integral primeira* para o campo $\mathcal{X}$ (considerado acima) se, e somente se, $\mathcal{X}(F) = 0$. Pode-se, ainda, reformular a Proposição 1.4.4 do seguinte modo:

Proposição 1.4.6 *Seja $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ um polinômio reduzido. A curva algébrica $C = Z(f)$ é invariante pelo sistema ($\sharp$) se, e somente se, existe um polinômio L_f tal que $\mathcal{X}(f) = L_f \cdot f$.*

Se $w = Pdx_2 - Qdx_1$ é uma 1-forma polinomial, então, como já foi visto, w admite uma curva algébrica invariante $C = Z(f)$ se, e somente se, $w \wedge df = f \cdot \theta_f$ para alguma 2-forma polinomial θ_f. Então

$$w \wedge \tfrac{df}{f} = \theta_f$$

e neste caso a 2-forma θ_f é denominada *cofator* de f. Assim, se w possui grau d, então os cofatores associados a eventuais curvas algébricas invariantes possuem grau menor ou igual a $d-1$.

O próximo teorema é o resultado central da seção e fornece uma condição suficiente para uma dada 1-forma diferencial possuir integral primeira (racional). Foi obtido por Jouanolou, em seu fundamental trabalho *Équations de Pfaff algébriques* (1979).

Teorema 1.4.7 *(Jouanolou) Seja w uma 1-forma diferencial polinomial de grau d em $\mathbb{C}^2$. Se w admite $\frac{d(d+1)}{2} + 2$ curvas algébricas invariantes, então w admite uma integral primeira racional.*

Demonstração: Seja $k = \frac{d(d+1)}{2} + 2$ e sejam $f_1, f_2, ..., f_k$ os polinômios definindo as k curvas algébricas invariantes por w. Para cada i, seja θ_{f_i} o cofator associado a f_i, isto é,

$$w \wedge \frac{df_i}{f_i} \;=\; \theta_{f_i}.$$

Cada θ_{f_i} tem grau no máximo $d-1$, uma vez que w tem grau d. Como o $\mathbb{C}$-espaço vetorial das 2-formas diferenciais de grau menor ou igual a $d-1$ possui dimensão $\frac{d(d+1)}{2} = k-2 < k-1$, obtém-se que os cofatores θ_{f_i}, para $i = 1, \ldots, k-1$, são linearmente dependentes. Logo, existem números complexos $a_1, \ldots, a_{k-1}$ (não todos nulos) tais que

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_i \theta_{f_i} \;=\; 0.$$

Seja então η_1 a 1-forma racional meromorfa dada por

$$\eta_1 \;=\; a_1 \frac{df_1}{f_1} \;+\; \ldots \;+\; a_{k-1} \frac{df_{k-1}}{f_{k-1}};$$

Claramente, η_1 é uma forma fechada (isto é, $d\eta_1 = 0$). Além disso,

$$w \wedge \eta_1 \;=\; \sum_{i=1}^{k-1} a_i \, w \wedge \frac{df_i}{f_i} \;=\; \sum_{i=1}^{k-1} a_i \, \theta_{f_i} \;=\; 0.$$

Analogamente, considerando os cofatores associados a $f_2, \ldots, f_k$, pode-se construir uma 1-forma racional meromorfa fechada η_2 da forma

$$\eta_2 \;=\; b_2 \frac{df_2}{f_2} \;+\; b_3 \frac{df_3}{f_3} \;+\; \ldots \;+\; b_k \frac{df_k}{f_k},$$

para certos números complexos $b_2, \ldots, b_k$ (não todos nulos), tal que $w \wedge \eta_2 = 0$.

Claramente, os conjuntos dos pólos de η_1 e η_2 são distintos. Assim, existe uma função racional não-constante F tal que $\eta_1 = F\eta_2$. Aplicando a diferencial exterior obtém-se

$$d\eta_1 \;=\; Fd\eta_2 \;+\; dF \wedge \eta_2.$$

Como η_1 e η_2 são formas fechadas, segue que

$$dF \wedge \eta_2 = 0,$$

E sendo

$$w \wedge \eta_2 = 0,$$

Conclui-se (pelo Corolário 1.2.5)

$$w \wedge dF = 0.$$

Portanto, F é uma integral primeira racional para w. ■

Corolário 1.4.8 *Seja w uma 1-forma diferencial em $\mathbb{C}^2$. Existe uma integral primeira racional para w se, e somente se, w admite uma infinidade de curvas algébricas invariantes.*

Demonstração: Se w admite uma integral primeira racional, então existem $f, g \in \mathbb{C}[x_1, x_2] \setminus \{0\}$ tais que

$$w \wedge d\left(\frac{f}{g}\right) \;=\; 0.$$

Logo

$$w \wedge (gdf - fdg) \;=\; 0.$$

e

$$w \wedge \frac{df}{f} = w \wedge \frac{dg}{g}.$$

Tomando $f_\lambda = f - \lambda g,\;\; \lambda \in \mathbb{C}$, segue que,

$$w \wedge df_\lambda = w \wedge df - \lambda w \wedge dg.$$

Assim,

$$w \wedge df_\lambda = (f - \lambda g)\, w \wedge \frac{df}{f} = (f - \lambda g)\, w \wedge \frac{dg}{g}.$$

Portanto, $w \wedge \frac{df_\lambda}{f_\lambda}$ é uma 2-forma diferencial, isto é, os fatores irredutíveis de f_λ são curvas algébricas invariantes. Como $\lambda \in \mathbb{C}$ é arbitrário, tem-se uma infinidade de curvas algébricas invariantes.

Reciprocamente, se w admite uma infinidade de curvas algébricas invariantes, o teorema acima garante que w admite uma integral primeira racional. ∎

Na realidade, Jouanolou obteve o seu resultado originalmente num contexto bem mais geral. A título de informação, uma conseqüência de tal resultado é (para mais detalhes [[19]]):

Teorema 1.4.9 *(Jouanolou) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação singular holomorfa de uma variedade complexa compacta M. Se $\mathcal{F}$ admite uma infinidade de hipersuperfícies analíticas invariantes, então $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira meromorfa.*

Capítulo 2

Soluções algébricas de folheações em $\mathbb{P}^2$

Neste capítulo, o espaço ambiente a ser considerado é o plano projetivo complexo $\mathbb{P}^2$, que é dado pelo quociente

$$\mathbb{P}^2 := \frac{\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}}{\sim},$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência dada por $z \sim w$ (onde $z, w \in \mathbb{C}^3$) se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $z = \lambda w,$. Claramente, existe uma inclusão natural $\mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ dada por $(x_1; x_2) \longmapsto (1 : x_1 : x_2)$. Para maiores detalhes sobre o espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ em geral, vide Apêndice 4.2 ou a referência [[23]]. Em particular, o hiperplano no infinito H_∞, será, no presente caso $n = 2$, denominado *reta no infinito* e denotado $l_\infty = \{x_2 = 0\}$. Logo,

$$\mathbb{P}^2 = U_2 \cup l_\infty,$$

2.0.1 Curvas projetivas planas

Serão dadas aqui, em essência, apenas as propriedades básicas de polinômios homogêneos e a definição de curva projetiva plana, mais detalhes podem ser encontrados em [[8]].

Como já se sabe, os pontos de $\mathbb{P}^2$ satisfazem $(x_0 : x_1 : x_2) = (\lambda x_0 : \lambda x_1 : \lambda x_2)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Se $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ é um polinômio homogêneo de grau d, tem-se

$$F(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) \;=\; \lambda^d \, F(x_0, x_1, x_2).$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim,

$$F(x_0 : x_1 : x_2) = 0 \;\Leftrightarrow\; F(\lambda x_0 : \lambda x_1 : \lambda x_2) = 0,$$

e portanto faz sentido falar em F *se anular* em um ponto de $\mathbb{P}^2$. Isto permite definir uma *curva projetiva plana* (*algébrica*) como o conjunto dos zeros em $\mathbb{P}^2$ de um polinômio homogêneo $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$, irredutível e não-constante. Em símbolos:

$$Z(F) = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 \mid F(x_0 : x_1 : x_2) = 0\}.$$

A curva $Z(F) \subset \mathbb{P}^2$ será irredutível sempre que o polinômio F for irredutível.

A propriedade a seguir, a respeito de polinômios homogêneos, é bastante útil (naturalmente, é válida em geral para um número qualquer de variáveis):

Proposição 2.0.10 *(Relação de Euler): Se $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ é um polinômio homogêneo de grau d, então vale a igualdade:*

$$x_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} \; + \; x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} \; + \; x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} \; = \; d \cdot F.$$

Demonstração: Derivando ambos os membros da identidade

$$F(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) \; = \; \lambda^d \, F(x_0, x_1, x_2).$$

com relação a λ, obtém-se:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\lambda}(\lambda x_0) \frac{\partial F}{\partial x_0}(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) \; + \; \frac{d}{d\lambda}(\lambda x_1) \frac{\partial F}{\partial x_1}(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) \\ &+ \; \frac{d}{d\lambda}(\lambda x_2) \frac{\partial F}{\partial x_2}(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) \; = \; d \, \lambda^{d-1} F(x_0, x_1, x_2). \end{aligned}$$

Logo,

$$x_0 \frac{\partial F}{\partial x_0}(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) + x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1}(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2}(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = d \, \lambda^{d-1} F(x_0, x_1, x_2).$$

Tomando $\lambda = 1$,

$$x_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = d \cdot F.$$

■

Observação 2.0.11 *Dado um polinômio homogêneo $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$, pode-se desomogeneizá-lo com respeito a qualquer variável. Por exemplo, com respeito a x_0, obtemos o polinômio $f(x, y) = F(1, x, y)$ nas "variáveis afins" $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$ (provenientes do aberto $U_0 \subset \mathbb{P}^2$ dado pela condição $x_0 \neq 0$; vide Apêndice 4.2).*

2.1 Folheações no plano projetivo

Uma maneira de definir um campo vetorial em $\mathbb{P}^2$ é através de uma derivação

$$\mathcal{X} := M_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + M_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + M_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{2.1}$$

onde $M_0, M_1, M_2 \in \mathbb{C}\,[x_0, x_1, x_2]$ são polinômios homogêneos de mesmo grau.

Dado um campo $\mathcal{X}$ como em (2.1), pode-se obter a *forma local* de $\mathcal{X}$ em qualquer aberto coordenado de $\mathbb{P}^2$, por exemplo em $U_0 \simeq \mathbb{C}^2$:

Proposição 2.1.1 *A forma local do campo $\mathcal{X}$ em U_0 é dada por*

$$\mathcal{X}_{U_0} = (m_1 - xm_0)\frac{\partial}{\partial x} - (m_2 - ym_0)\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.2}$$

nas coordenadas locais $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$, e onde $m_i(x,y) = M_i(1,x,y)$.

Demonstração: Primeiro, vê-se que esta forma local não depende do representante. De fato, se E denota o campo de Euler e $\mathcal{X} + GE$ é outro representante , para algum $G \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ homogêneo de grau igual ao grau dos M_i's menos 1, então, denotando $g = g(x,y) = G(1,x,y)$, a forma local seria

$$((m_1 + xg) - x(m_0 + g))\frac{\partial}{\partial x} + ((m_2 + yg) - y(m_0 + g))\frac{\partial}{\partial y} =$$

$$= (m_1 - xm_0)\frac{\partial}{\partial x} + (m_2 - ym_0)\frac{\partial}{\partial y}.$$

A expressão de $\mathcal{X}$ em U_0 é a mesma que a de $x_0\mathcal{X}$, e a mesma que a de

$$x_0\mathcal{X} - M_0E = x_0M_0\frac{\partial}{\partial x_0} + x_0M_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_0M_2\frac{\partial}{\partial x_2} - x_0M_0\frac{\partial}{\partial x_0} - x_1M_0\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2M_0\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$= (x_0M_1 - x_1M_0)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_0M_2 - x_2M_0)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

Enfim, desomogeneizando, obtém-se

$$(m_1 - xm_0)\frac{\partial}{\partial x} + (m_2 - ym_0)\frac{\partial}{\partial y}.$$

■

A localização em um aberto coordenado U_i de um campo global $\mathcal{X}$ em $\mathbb{P}^2$ determina um campo em $\mathbb{C}^2$ que pode ser escrito como:

$$\mathcal{X}_{U_i} = m_1\frac{\partial}{\partial x} + m_2\frac{\partial}{\partial y}, \tag{2.3}$$

para certos $m_1, m_2 \in \mathbb{C}[x,y]$. Contudo, um problema surge quanto à unicidade dos campos em $\mathbb{P}^2$ já que vetores que estão em uma mesma reta passando pela origem de $\mathbb{C}^3$ são identificados. Ou seja, dado um polinômio homogêneo $G \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ de grau adequado (1 a menos que o grau dos polinômios que definem $\mathcal{X}$), o campo $\mathcal{X}$ pode ser representado por $\mathcal{X} + GE$, e portanto a representação de $\mathcal{X}$ não é única, mais detalhes podem ser encontrados em [[2]] ou [[15]].

Para contornar este problema, a solução consiste em trabalhar com campos que possuem divergência nula (vide Seção 1.1), de acordo com a seguinte proposição:

Proposição 2.1.2 *Se $\mathcal{X}$ tem divergência nula e $\mathcal{X}'$ é outro representante do mesmo campo em $\mathbb{P}^2$ com divergência nula, então $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{X}$ um campo com divegência nula e seja $\mathcal{X}' = \mathcal{X} + GE$ outro representante do mesmo campo em $\mathbb{P}^2$. Então,

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{div}(\mathcal{X} + GE) & = & \operatorname{div}(\mathcal{X}) + \operatorname{div}(GE) \\ & = & 0 + \frac{\partial(Gx_0)}{\partial x_0} + \frac{\partial(Gx_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(Gx_2)}{\partial x_2} \\ & = & x_0\frac{\partial(G)}{\partial x_0} + x_1\frac{\partial(G)}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial(G)}{\partial x_2} + G\frac{\partial(x_0)}{\partial x_0} + G\frac{\partial(x_1)}{\partial x_1} + G\frac{\partial(x_2)}{\partial x_2} \\ & = & \deg(G)\, G + 3G \\ & = & (\deg(G) + 3)G \end{array}$$

Portanto, $\operatorname{div}(\mathcal{X} + GE) = 0$ se, e somente se, $G \equiv 0$, isto é, o único representante de $\mathcal{X}$ com divergência nula é o próprio $\mathcal{X}$. ■

Dessa forma, para garantir a unicidade da representação, pode-se definir um campo de vetores em $\mathbb{P}^2$ como sendo dado por uma tripla (M_0, M_1, M_2) de polinômios homogêneos, de mesmo grau, satisfazendo a condição de divergência nula:

$$\frac{\partial M_0}{\partial x_0} + \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} = 0.$$

Em particular, uma folheação bem-determinada em $\mathbb{P}^2$ é simplesmente dada por um campo vetorial polinomial $\mathcal{X}$ em $\mathbb{P}^2$ tal que $\operatorname{div}(\mathcal{X}) = 0$. Tipicamente, pode-se supor que o conjunto singular de $\mathcal{X}$ é um conjunto algébrico de codimensão maior ou igual a dois em $\mathbb{P}^2$. Além disso, se $\mathcal{F}$ é uma folheação em $\mathbb{P}^2$ definida por um tal campo $\mathcal{X} = (M_0, M_1, M_2)$, então uma curva algébrica projetiva $C = Z(F) \subset \mathbb{P}^2$ é uma *solução* para $\mathcal{F}$ (ou é *invariante* por $\mathcal{F}$) se

$$T_p(C) = T_p(\mathcal{F}), \quad \forall\, p \in C \setminus (\operatorname{Sing}(C) \cup \operatorname{Sing}(\mathcal{F})),$$

o que algebricamente equivale à existência de um $G \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ tal que

$$M_0\frac{\partial f}{\partial x_0} + M_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + M_2\frac{\partial f}{\partial x_2} = G\, F,$$

conforme detalhado na Seção 1.1 no contexto afim.

Observação 2.1.3 *Uma vez que o interesse está nas direções tangentes determinadas pelo campo $\mathcal{X}$, e não no "comprimento" dos vetores $\mathcal{X}(p)$, quaisquer dois campos que diferem em um múltiplo escalar (não-nulo) podem ser considerados iguais.*

2.1.1 Exemplos clássicos

1. ***(Lins Neto)*** A família $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$ de folheações holomorfas de $\mathbb{P}^2$ definida por

$$\mathcal{X}_\alpha = \left(x^3 - 1\right)\left(x - \alpha y^2\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(y^3 - 1\right)\left(y - \alpha x^2\right)\frac{\partial}{\partial y}.$$

goza da seguinte propriedade notável: as 9 retas dadas por

$$(x^3-1)(y^3-1)(x^3-y^3) \;=\; 0$$

são invariantes por cada $\mathcal{F}_\alpha$ (para a noção de invariância, vide Seção 1.1).

2. (*Jouanolou*) Os primeiros exemplos de folheações algébricas de $\mathbb{P}^2$ sem curvas algébricas invariantes foram obtidos por Jouanolou na década de 70. Ele provou que, para qualquer inteiro $d \geq 2$, as folheações em $\mathbb{P}^2$ induzidas pelos campos sobre $\mathbb{C}^2$

$$\mathcal{X}_d \;=\; \left(1-xy^d\right)\frac{\partial}{\partial x} \;+\; \left(x^d-y^{d+1}\right)\frac{\partial}{\partial y},$$

não possuem curvas algébricas invariantes. Para um exemplo global, Jouanolou mostrou que a folheação em $\mathbb{P}^2$ definida pelo campo

$$\mathcal{X}_d \;=\; x_1^d\frac{\partial}{\partial x_0} \;+\; x_2^d\frac{\partial}{\partial x_1} \;+\; x_0^d\frac{\partial}{\partial x_2},$$

para qualquer inteiro $d \geq 2$, não possui curvas algébricas invariantes.

3. (*Fibrações*) Seja $\pi : S \to C$ uma fibração, isto é, uma aplicação holomorfa sobrejetiva de uma superfície projetiva S para uma curva algébrica C. Então π induz, através de suas curvas de nível, uma folheação em S. As fibrações aparecem de forma natural como a resolução de folheações que admitem integrais primeiras racionais.

2.2 A dualidade entre campos e 1-formas

Uma 1-forma em $\mathbb{P}^2$ é uma associação que leva cada ponto $p \in \mathbb{P}^2$ em um funcional $w\,(p) \in \left(T_p\,(\mathbb{P}^2)\right)^*$. Por exemplo, no aberto coordenado U_0 uma 1-forma w é determinada por polinômios $a_1\,(x,y)$ e $a_2\,(x,y)$, ou seja:

$$w \;=\; a_1dx \;+\; a_2dy. \tag{2.4}$$

Quanto a uma descrição global para esta 1-forma, tem-se:

Proposição 2.2.1 *A forma global em $\mathbb{P}^2$ da 1-forma (2.4) é dada pela 1-forma*

$$w \;=\; A_0dx_0 \;+\; A_1dx_1 \;+\; A_2dx_2 \tag{2.5}$$

onde $A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{C}\,[x_0,x_1,x_2]$, são polinômios homogêneos de mesmo grau satisfazendo a relação

$$A_0x_0 \;+\; A_1x_1 \;+\; A_2x_2 \;=\; 0.$$

Demonstração: Seja $\{dx_0, dx_1, dx_2\}$ a base dual da base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right\}$ de $T_0(\mathbb{C}^3)$. No aberto coordenado U_0, tem-se coordenadas afins

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \qquad y = \frac{x_2}{x_0}.$$

Daí, fazendo uso das regras usuais de diferenciação, obtém-se

$$dx = \frac{x_0 dx_1 - x_1 dx_0}{x_0^2}, \qquad dy = \frac{x_0 dx_2 - x_2 dx_0}{x_0^2}.$$

Então,

$$\begin{aligned} w = a_1 dx + a_2 dy \qquad &= a_1 \left(\tfrac{x_0 dx_1 - x_1 dx_0}{x_0^2} \right) + a_2 \left(\tfrac{x_0 dx_2 - x_2 dx_0}{x_0^2} \right) \\ &= \tfrac{1}{x_0} \left(- \left(\tfrac{x_1}{x_0} a_1 + \tfrac{x_2}{x_0} a_2 \right) dx_0 + a_1 dx_1 + a_2 dx_2 \right). \end{aligned}$$

Desconsiderando o fator $\frac{1}{x_0}$, chega-se à 1-forma

$$= - \left(\frac{x_1}{x_0} a_1 + \frac{x_2}{x_0} a_2 \right) dx_0 + a_1 dx_1 + a_2 dx_2.$$

Seja $d = \max \{\text{grau}\,(a_1)\,, \text{grau}(a_2)\}$ e sejam:

$$\begin{aligned} A_0 &:= x_0^{d+1} \left(-\frac{x_1}{x_0} a_1 \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0} \right) - \frac{x_2}{x_0} a_2 \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0} \right) \right) \\ A_1 &:= x_0^{d+1} a_1 \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0} \right) \\ A_2 &:= x_0^{d+1} a_2 \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0} \right) \end{aligned}$$

Logo, A_0, A_1, A_2 são polinômios homogêneos, de mesmo grau (igual a $d+1$), satisfazendo

$$x_0 A_0 + x_1 A_1 + x_2 A_2 \quad = x_0^{d+1} \left(-x_1 a_1 - x_2 a_2 + x_1 a_1 + x_2 a_2 \right) = 0.$$

■

Naturalmente, tem-se também o processo inverso:

Proposição 2.2.2 *A forma local da forma global w como em* (2.5)*, é dada, em coordenadas locais (x, y) de U_0, por*

$$w_{U_0} = a_1 dx + a_2 dy,$$

onde $a_i\,(x, y) := A_i\,(1, x, y)\,.$

Demonstração: Escreve-se $x = \frac{x_1}{x_0}$ e $y = \frac{x_2}{x_0}$ e calcula-se:

$$\begin{cases} dx_1 = & x_0 dx + x dx_0 \\ dx_2 = & x_0 dy + y dx_0 \end{cases}$$

Substituindo em $(2.5)\,,$

$$\begin{aligned} w &= A_0 dx_0 + A_1 (x_0 dx + x dx_0) + A_2 (x_0 dy + y dx_0) \\ &= (A_0 + xA_1 + yA_2) dx_0 + x_0 A_1 dx + x_0 A_2 dy. \end{aligned}$$

Finalmente, devido à condição $x_0A_0 + x_1A_1 + x_2A_2 = 0$, tem-se $A_0 + xA_1 + yA_2 = 0$, e portanto, restringindo-se a U_0 (o que na prática consiste em tomar $x_0 = 1$), conclui-se que a expressão local desejada w_{U_0} é como em (2.4). ■

Se $w(p) : T_p(\mathbb{P}^2) \to \mathbb{C}$ é uma 1-forma não-nula, então, pelo Teorema do Núcleo e Imagem, tem-se $\dim(\ker(w(p))) = 1$ e, portanto, $\ker(w(p))$ define uma reta de $T_p\mathbb{P}^2$ passando pela sua origem. Com isso, obtém-se uma correspondência $p \mapsto \ker(w(p))$ que associa a cada $p \in \mathbb{P}^2$ uma reta em $T_p(\mathbb{P}^2)$. Tal correspodência fornece, então, uma distribuição de retas tangentes, mas detalhes em [[1]].

Observação 2.2.3 *Analogamente ao caso de campos vetoriais, tem-se interesse, quando se trabalha com 1-formas, na igualdade* $\ker(w) = \ker(\lambda w)$ *(para todo número complexo* $\lambda \neq 0$*), a fim de se obter a definição adequada de folheação definida por uma 1-forma (vide discussão a seguir).*

Observação 2.2.4 *Uma distribuição polinomial de vetores tangentes a* $\mathbb{P}^2$ *pode ser dada tanto por um campo vetorial (como foi mostrado anteriormente neste trabalho), como por uma 1-forma. Assim, se um campo* $\mathcal{X}$ *e uma 1-forma* w *definem a mesma distribuição de vetores, deve-se ter*

$$\mathcal{X}(p) \in \ker(w(p)), \quad \forall\, p \in \mathbb{P}^2.$$

Escrevendo em coordenadas locais $w = a_1 dx + a_2 dy$ *e* $\mathcal{X} = b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y}$*, segue-se da definição de base dual a relação*

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

Assim, com o que foi visto, chega-se a uma definição adequada de folheações definidas por 1-formas: uma folheação de grau d definida por uma 1-forma em $\mathbb{P}^2$ é dada (a menos de múltiplos não-nulos) por uma tripla (A_0, A_1, A_2) de polinômios homogêneos de grau $d+1$, satisfazendo a relação

$$x_0A_0 + x_1A_1 + x_2A_2 = 0.$$

Para finalizar esta seção, serão demonstradas duas proposições que versam sobre a dualidade entre campos e 1-formas (no contexto polinomial).

Proposição 2.2.5 *Seja* $\mathcal{X} = M_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + M_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + M_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ *um campo de vetores de grau* d*, tal que* $\operatorname{div}(\mathcal{X}) = 0$*. Então, a 1-forma global* w *que define a mesma folheação de* $\mathcal{X}$ *é*

$$w = (x_2M_1 - x_1M_2) dx_0 + (x_0M_2 - x_2M_0) dx_1 + (x_1M_0 - x_0M_1) dx_2$$

Demonstração: Como já foi provado na Proposição 2.1.1, a expressão local para $\mathcal{X}$ no aberto coordenado U_0 é

$$\mathcal{X}_{U_0} \;=\; (m_1 - xm_0)\frac{\partial}{\partial x} \;+\; (m_2 - ym_0)\frac{\partial}{\partial y},$$

onde m_i é a desomogeneização de M_i com respeito a x_0. Assim, usando que $\mathcal{X}(w)|_{U_0} = 0$ (vide Observação 2.2.4), obtém-se que

$$w_{U_0} \;=\; (m_2 - ym_0)\, dx \;-\; (m_1 - xm_0)\, dy.$$

Como $x = \frac{x_1}{x_0}$ e $y = \frac{x_2}{x_0}$, segue que

$$dx = \tfrac{x_0 dx_1 - x_1 dx_0}{x_0^2} \quad \text{e} \quad dy = \tfrac{x_0 dx_2 - x_2 dx_0}{x_0^2}.$$

Daí,

$$\begin{array}{rcc} w_{U_0} & = & (m_2 - ym_0)\, dx - (m_1 - xm_0)\, dy \\ & = & (m_2 - ym_0)\left(\frac{x_0 dx_1 - x_1 dx_0}{x_0^2}\right) - (m_1 - xm_0)\left(\frac{x_0 dx_2 - x_2 dx_0}{x_0^2}\right) \\ & = & \frac{1}{x_0} m_2 dx_1 - \frac{x_1}{x_0^2} m_2 dx_0 - \frac{x_2}{x_0^2} m_0 dx_1 + \frac{x_1 x_2}{x_0^3} m_0 dx_0 - \frac{1}{x_0} m_1 dx_2 + \frac{x_2}{x_0^2} m_1 dx_0 + \frac{x_1}{x_0^2} m_0 dx_2 - \frac{x_1 x_2}{x_0^3} m_0 dx_0 \\ & = & \frac{1}{x_0}\left(m_2 dx_1 - \frac{x_1}{x_0} m_2 dx_0 - \frac{x_2}{x_0} m_0 dx_1 - m_1 dx_2 + \frac{x_2}{x_0} m_1 dx_0 + \frac{x_1}{x_0} m_0 dx_2 \right) \\ & = & \left(-\frac{x_1}{x_0} m_2 + \frac{x_2}{x_0} m_1\right) dx_0 + \left(-\frac{x_2}{x_0} m_0 + m_2\right) dx_1 + \left(-m_1 + \frac{x_1}{x_0} m_0\right) dx_2 \end{array}$$

Homogeneizando,

$$w = (x_2 M_1 - x_1 M_2)\, dx_0 + (x_0 M_2 - x_2 M_0)\, dx_1 + (x_1 M_0 - x_0 M_1)\, dx_2.$$

■

Reciprocamente, pode-se obter os coeficientes da expressão global do campo, a partir dos coeficientes da expressão global da forma. De fato:

Proposição 2.2.6 *Se A_0, A_1, A_2 são polinômios homogêneos de grau $d+1$ satisfazendo a relação $x_0 A_0 + x_1 A_1 + x_2 A_2 = 0$, então existem polinômios homogêneos M_0, M_1, M_2 de grau d tais que:*

$$\begin{cases} A_0 &=& x_2 M_1 - x_1 M_2 \\ A_1 &=& x_0 M_2 - x_2 M_0 \\ A_2 &=& x_1 M_0 - x_0 M_1 \end{cases}$$

Demonstração: Por hipótese,

$$x_0 A_0 = -\left(x_1 A_1 + x_2 A_2\right) \qquad (*)$$

Por outro lado, por teoria geral, pode-se escrever

$$A_0 = \lambda x_0^{d+1} + x_1 G_2 + x_2 G_1$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$ e G_1, G_2 são polinômios homogêneos de grau d. Substituindo em $(*)$:

$$x_0\left(\lambda x_0^{d+1} + x_1G_2 + x_2G_1\right) = -\left(x_1A_1 + x_2A_2\right)$$

Logo:

$$x_1\left(x_0G_2 + A_1\right) + x_2\left(x_0G_1 + A_2\right) = -\lambda x_0^{d+2}$$

ou seja, λx_0^{d+2} pertence ao ideal gerado por x_1, x_2, o que implica $\lambda = 0$. Assim:

$$x_1\left(x_0G_2 + A_1\right) = -x_2\left(x_0G_1 + A_2\right) \quad (**)$$

Segue-se que x_1 divide $(x_0G_1 + A_2)$, e x_2 divide $(x_0G_2 + A_1)$, isto é, existem polinômios homogêneos G_0, G_3 tais que

$$\begin{cases} x_1G_0 &= x_0G_1 + A_2 \\ x_2G_3 &= x_0G_2 + A_1 \end{cases}$$

Substituindo em $(**)$:

$$x_1x_2G_3 = -x_1x_2G_0 \Rightarrow G_3 = -G_0$$

Portanto,

$$\begin{cases} A_1 &= -x_0G_2 - x_2G_0 \\ A_2 &= x_1G_0 - x_0G_1 \end{cases}$$

e, de $(*)$, segue que $A_0 = x_1G_2 + x_2G_1$.

Definindo $M_0 = G_0$, $M_1 = G_1$, e $M_2 = -G_2$ obtém-se as relações desejadas. ∎

2.3 Soluções algébricas

Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação por curvas em $\mathbb{P}^n$ e L uma folha de $\mathcal{F}$. A folha L é dita *algébrica* se o seu fecho $\overline{L}$ em $\mathbb{P}^n$ é uma curva algébrica, isto é, um subconjunto algébrico de dimensão 1. Neste caso, $\overline{L}$ é uma solução algébrica de $\mathcal{F}$:

$$T_p(\overline{L}) = T_p(\mathcal{F}), \quad \forall\, p \in \overline{L} \setminus (\mathrm{Sing}(\overline{L}) \cup \mathrm{Sing}(\mathcal{F})).$$

Proposição 2.3.1 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação por curvas que possui apenas singularidades isoladas (isto é,* $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ *tem dimensão zero). Então, uma folha L de $\mathcal{F}$ é algébrica se, e somente se, o seu fecho $\overline{L}$ é obtido de L por adjunção das singularidades de $\mathcal{F}$ às quais L é aderente.*

Demonstração: Se L é algébrica, então L não pode se acumular em pontos regulares de $\mathcal{F}$ pois $\overline{L}$ é um subconjunto analítico de dimensão 1, isto é, $\overline{L} \setminus L \subseteq \mathrm{Sing}\,(\mathcal{F})$, o que é equivalente a

$$\overline{L} = L \cup (\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap (\overline{L} \setminus L)),$$

como se deseja. Para demonstrar a recíproca, serão usados os dois resultados clássicos abaixo (para o primeiro deles, diz-se que um subconjunto analítico de uma variedade holomorfa é *puro-dimensional* se suas componentes irredutíveis possuem a mesma dimensão):

Teorema de Remmert-Stein: Sejam M uma variedade holomorfa, K um subconjunto analítico puro-dimensional de M, e V um subconjunto analítico puro-dimensional de $M \backslash K$, tais que $\dim(V) > \dim(K)$. Então, o fecho $\overline{V}$ é um subconjunto analítico de M.

Teorema de Chow: Todo subconjunto analítico de $\mathbb{P}^n$ é algébrico.

Seja então $K = \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \cap (\overline{L} \setminus L)$ e suponha que $\overline{L} = L \cup K$, que claramente é uma união disjunta. Assim, tem-se

$$L \;=\; \overline{L} \setminus K \;\subset\; \mathbb{P}^n \setminus K.$$

Note que K é puro-dimensional de dimensão 0 (já que $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ o é, por hipótese), e que L é puro-dimensional de dimensão 1 (por ser uma folha de $\mathcal{F}$). Pelo Teorema de Remmert-Stein, $\overline{L}$ é um subconjunto analítico de $\mathbb{P}^n$, e consequentemente, pelo Teorema de Chow, $\overline{L}$ é um conjunto algébrico; como sua dimensão é 1, $\overline{L}$ tem de ser uma curva algébrica e isso por definição significa que L é uma folha algébrica. ■

Observação 2.3.2 *De modo geral, seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 em uma variedade holomorfa M, dada por uma 1-forma holomorfa integrável w. Por argumentos similares aos utilizados nas Seções 1.3 e 1.4, uma função meromorfa f é uma integral primeira meromorfa de $\mathcal{F}$ (no sentido de que f é uma função meromorfa não-constante definida em M, tal que f é constante ao longo das folhas de $\mathcal{F}$) se, e somente se, $w \wedge df \equiv 0$. Note que, quando $M = \mathbb{P}^2$, o termo "meromorfa" pode ser substituído por "racional", já que as funções meromorfas em $\mathbb{P}^2$ são racionais. Se uma folheação $\mathcal{F}$ em $\mathbb{P}^2$ admite uma integral primeira racional, então todas as folhas de $\mathcal{F}$ são algébricas.*

O próximo resultado é uma extensão das idéias da Seção 1.4 — em especial, o Teorema 1.4.7, que foi demonstrado em detalhes — para folheações no plano projetivo.

Teorema 2.3.3 *(Teorema de Darboux) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2$ que possui uma infinidade de soluções algébricas. Então, $\mathcal{F}$ admite uma integral primeira racional.*

Demonstração: De modo geral pode-se supor que $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ tem codimensão maior ou igual a 2, e como neste caso $M = \mathbb{P}^2$, tem-se que $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ tem dimensão 0. Considere o seguinte resultado auxiliar:

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 em $\mathbb{P}^n$ e seja $\mathcal{F}^* = \Pi^*(\mathcal{F})$, onde $\Pi\colon \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{P}^n$ é a projeção natural. Então, existe uma 1-forma holomorfa integrável $w = \sum_{j=0}^{n} M_j dx_j$ em $\mathbb{C}^{n+1}$, cujos coeficientes $M_0, \ldots, M_n$ são polinômios homogêneos de mesmo grau, tal que $w = 0$ define $\mathcal{F}^*$ em $\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$. Em particular, *para toda carta afim $U \subset \mathbb{P}^n$, $\mathcal{F}|_U$ pode ser definida por uma 1-forma polinomial integrável.*

Aplicando-se este resultado, obtém-se que existe uma 1-forma w em $\mathbb{C}^3$, cujos coeficientes são polinômios homogêneos de grau k, tal que $w = 0$ define $\mathcal{F}^*$. Seja agora $S = Z(f)$ uma solução algébrica de $\mathcal{F}$, onde f é um polinômio homogêneo. Neste caso, S é invariante por $\mathcal{F}^*$.

Afirmação: Existe uma 2-forma θ tal que $w \wedge df = f \cdot \theta$ e os coeficientes de θ são polinômios homogêneos de grau $k-1$.

Para isto, defina a forma $\alpha = \frac{df}{f} \wedge w$, que é holomorfa em $\mathbb{C}^3 \backslash \mathrm{Sing}\,(w)$. Note que $\mathrm{Sing}(w)$ tem dimensão 0. Será usado o seguinte fato, conhecido como *Teorema de Hartogs*:

Seja U um aberto em $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ e seja $K \subset U$ um subconjunto compacto tal que $U \setminus K$ é conexo. Então, toda função holomorfa em $U \setminus K$ se estende (unicamente) a uma função holomorfa em U. (Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em [[5]]).

Desta forma, α se estende a uma 2-forma holomorfa em $\mathbb{C}^3$, ainda denotada por α. Por desenvolvimento de Taylor, tem-se $\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$, onde os coeficientes de α_j são polinômios homogêneos de grau j. Então:

$$df \wedge w = f \cdot \alpha = \sum_{j=0}^{\infty} f \cdot \alpha_j$$

Se f tem grau m, a forma $df \wedge w$ tem coeficientes homogêneos de grau $k+m-1$. Por outro lado, $f \cdot \alpha_j$ tem coeficientes homogêneos de grau $m+j$. Logo, $m+j \neq k+m-1$, e então $f \cdot \alpha_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$. Portanto, $df \wedge w = f \cdot \alpha_{k-1}$, e a afirmação está provada, tomando-se $\theta = \alpha_{k-1}$.

Considere agora o espaço vetorial W formado pelas 2-formas holomorfas θ em $\mathbb{C}^3$ cujos coeficientes são polinômios homogêneos de grau $k-1$, e seja N a dimensão de W. Como $\mathcal{F}$ possui uma infinidade de soluções algébricas, $\mathcal{F}^*$ também possui. Sejam então $f_0, ..., f_N$ soluções de $\mathcal{F}^*$. Pela afirmação demonstrada acima, pode-se escrever

$$\frac{df_j}{f_j} \wedge w \ = \ \theta_j, \qquad j = 0, \ldots, N,$$

para certas θ_j's em W. O conjunto $\{\theta_0, ..., \theta_N\} \subset W$ é linearmente dependente e assim $\sum_{j=0}^{N} a_j \cdot \theta_j = 0$, com $a_0, ..., a_N \in \mathbb{C}$ (não todos nulos). Então $\eta \wedge w = 0$, onde

$$\eta = \sum_{j=0}^{N} a_j \cdot \frac{df_j}{f_j}.$$

Note que $f_0 \ldots f_N \cdot \eta$ é holomorfa e $f_0 \ldots f_N \cdot \eta \wedge w = 0$, portanto $f_0 ... f_N \cdot \eta = g \cdot w$, onde g é um polinômio homogêneo.

Ainda utilizando a hipótese, pode-se tomar uma outra solução f_{N+1} de $\mathcal{F}$, logo de $\mathcal{F}^*$. Seja $\theta_{N+1} \in W$ tal que $df_{N+1} \wedge w = f_{N+1} \cdot \theta_{N+1}$. Utilizando que $\{\theta_1, ..., \theta_{N+1}\}$ é linearmente dependente e um argumento análogo ao anterior, obtém-se a forma

$$\beta \;=\; \sum_{j=1}^{N+1} b_j \cdot \frac{df_j}{f_j}$$

com $b_j \in \mathbb{C}$ (não todos nulos), e tal que $f_1 \cdots f_{N+1} \cdot \beta = h \cdot w$, onde h é um polinômio homogêneo. Então, $\eta = F \cdot \beta$, onde $F = \frac{gf_{N+1}}{hf_0}$. Como η e β são fechadas obtemos $dF \wedge \beta = 0 \Rightarrow dF \wedge w = 0 \Rightarrow F$ é uma integral primeira racional de $\mathcal{F}$. ■

Maiores informações podem ser obtidas nas referências [[3]], [[4]], [[11]] , [[12]] e [[9]] .

Capítulo 3

As curvas estáticas

Definição Um *ponto de n-inflexão* (ou *ponto de inflexão de ordem* n) de uma curva em $\mathbb{P}^2$ é um ponto onde a multiplicidade de interseção da curva com alguma curva algébrica de grau n é maior do que

$$d(n) = \frac{n(n+3)}{2}$$

Observação: O número $d(n) + 1$ é a dimensão do espaço vetorial de curvas planas projetivas de grau n. Se todo ponto de uma curva algébrica C em $\mathbb{P}^2$ for um ponto de n-inflexão, então o grau de C é no máximo n.

Definição Seja $(x, y(x))$ uma parametrização de uma solução de um campo da forma $\mathcal{X} = m_1 \frac{\partial}{\partial x} + m_2 \frac{\partial}{\partial y}$. Seus pontos de inflexão são obtidos pelo cálculo do determinante (mais detalhes em [[20]])

$$\det \begin{bmatrix} \frac{dx}{dx} & \frac{dy}{dx} \\ \frac{d^2x}{dx^2} & \frac{d^2y}{dx^2} \end{bmatrix}$$

A seguir, serão definidas as chamadas *curvas estáticas* $\varepsilon_d(\mathcal{X})$ $(d \in \mathbb{N})$ para campos vetoriais $\mathcal{X}$ em $\mathbb{P}^2$, com a propriedade de que a restrição de uma tal curva a qualquer solução de $\mathcal{X}$ coincide com os pontos de inflexão de ordem d da solução.

3.1 O caso local

Seja $\mathcal{X} = m_1 \frac{\partial}{\partial x} + m_2 \frac{\partial}{\partial y}$ um campo vetorial sobre $\mathbb{C}^2$ e seja $(x, y(x))$ uma parametrização de uma solução deste campo. Então, os pontos de inflexão desta solução são obitidos pelo cálculo do determinante

$$\det \begin{bmatrix} \frac{dx}{dx} & \frac{dy}{dx} \\ \frac{d^2x}{dx^2} & \frac{d^2y}{dx^2} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{dy}{dx} \\ 0 & \frac{d^2y}{dx^2} \end{bmatrix} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Note que, para o campo $\mathcal{X} = m_1 \frac{\partial}{\partial x} + m_2 \frac{\partial}{\partial y}$, tem-se

$$\det \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ \frac{dx}{dx} & \frac{dy}{dx} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ 1 & \frac{dy}{dx} \end{bmatrix} = m_1 \cdot \frac{dy}{dx} - m_2 = 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Assim,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{m_2\left(x, y\left(x\right)\right)}{m_1\left(x, y\left(x\right)\right)}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial m_2}{\partial x} + \frac{\partial m_2}{\partial y} \cdot \frac{m_2}{m_1}\right) \cdot m_1 - \left(\frac{\partial m_1}{\partial x} + \frac{\partial m_1}{\partial y} \cdot \frac{m_2}{m_1}\right) \cdot m_2}{\left(m_1\right)^2} \tag{3.1}$$

Portanto, a expressão (3.1) no aberto $\mathbb{C}^2 \setminus \{m_1 = 0\}$ descreve a curva formada pelos pontos de inflexão de ordem 1 da solução $(x, y(x))$. De maneira análoga, em uma parametrização da forma $(x(y), y)$, define-se a curva de inflexão no aberto $\mathbb{C}^2 \setminus \{m_2 = 0\}$.

Para os pontos de 2-inflexão deve-se considerar a imagem da solução $(x, y(x))$ pela aplicação de 2-Veronese (vide Observação 4.2.2 no Apêndice). Tal imagem é a curva parametrizada por:

$$\left(x,\, x^2,\, x \cdot y\left(x\right),\, y\left(x\right),\, y^2\left(x\right)\right)$$

em $\mathbb{C}^5$. Em seguida deve-se calcular o determinate da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2x & \frac{d(xy(x))}{dx} & \frac{dy(x)}{dx} & \frac{dy^2(x)}{dx} \\ 0 & 2 & \frac{d^2(xy(x))}{dx^2} & \frac{d^2y(x)}{dx^2} & \frac{d^2y^2(x)}{dx^2} \\ 0 & 0 & \frac{d^3(xy(x))}{dx^3} & \frac{d^3y(x)}{dx^3} & \frac{d^3y^2(x)}{dx^3} \\ 0 & 0 & \frac{d^4(xy(x))}{dx^4} & \frac{d^4y(x)}{dx^4} & \frac{d^4y^2(x)}{dx^4} \\ 0 & 0 & \frac{d^5(xy(x))}{dx^5} & \frac{d^5y(x)}{dx^5} & \frac{d^5y^2(x)}{dx^5} \end{bmatrix}$$

a fim de se obter os pontos de 2-inflexão de $(x, y(x))$. De maneira totalmente análoga, os pontos de n-inflexão da solução podem ser obtidos através da aplicação de n-Veronese.

3.2 O caso global

Se $\mathcal{X} = M_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + M_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + M_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ é um campo vetorial homogêneo em $\mathbb{C}^3$, então a equação da curva de inflexão (ou *primeira curva estática*, denotada $\varepsilon_1(\mathcal{X})$) da folheação induzida sobre $\mathbb{P}^2$ é obtida por

$$\varepsilon_1\left(\mathcal{X}\right) = \det \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ \mathcal{X}\left(x_0\right) & \mathcal{X}\left(x_1\right) & \mathcal{X}\left(x_2\right) \\ \mathcal{X}^2\left(x_0\right) & \mathcal{X}^2\left(x_1\right) & \mathcal{X}^2\left(x_2\right) \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

onde $\mathcal{X}^k(f) = \mathcal{X}\left(\mathcal{X}^{k-1}(f)\right)$, para qualquer polinômio f.

Exemplo 3.2.1 *Sejam os campos*

$$\mathcal{X} = \left(x_0^3 - x_1^3\right)\left(x_0^3 - x_2^3\right)x_0\frac{\partial}{\partial x_0} + \left(x_0^3 - x_1^3\right)\left(x_1^3 - x_2^3\right)x_1\frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$\mathcal{Y} = x_1^2 x_2^2\frac{\partial}{\partial x_0} + x_0^2 x_2^2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_0^2 x_1^2\frac{\partial}{\partial x_2}$$

e seja $\mathcal{Z} = t\mathcal{X} + s\mathcal{Y}$, $(s,t) \in \mathbb{C}^2$, $s \cdot t \neq 0$. *Então, com ajuda do softawre Maple 15®, a equação da primeira curva estática de* $\mathcal{Z}$ *é dada por:*

$$\varepsilon_1(\mathcal{Z}) \quad = \quad \det\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ \mathcal{Z}(x_0) & \mathcal{Z}(x_1) & \mathcal{Z}(x_2) \\ \mathcal{Z}^2(x_0) & \mathcal{Z}^2(x_1) & \mathcal{Z}^2(x_2) \end{bmatrix}$$

$$= -2L_9(4t^3x_2x_1x_0^{10} - 5st^2x_0^9 - 12t^3x_1^4x_0^7x_2 + 5x_0^6t^2sx_1^3 + x_0^6t^2sx_2^3 + 12t^3x_0^4x_2x_1^7 + $$
$$+5x_0^3t^2sx_1^6 - 2x_0^3t^2x_1^3x_2^3s - 4x_0t^3x_1^{10}x_2 + 2x_0s^3x_2x_1 - 5t^2sx_1^9 + t^2sx_1^6x_2^3)$$

Observação: *O polinômio* $L_9 = \left(x_0^3 - x_1^3\right)\left(x_0^3 - x_2^3\right)\left(x_1^3 - x_2^3\right)$ *é conhecido como as nove retas de Lins Neto, mais detalhes em* [[14]].

Suponha que $p \in \mathbb{C}^3$ é um ponto não-singular de $\mathcal{X}$ (isto é, $\mathcal{X}$ não é paralelo ao campo radial em p). Pelo teorema de existência de soluções locais para equações diferenciais ordinárias, existe um germe da curva V em torno de $p \in \mathbb{C}^3$ que é uma órbita local de $\mathcal{X}$. Portanto, o campo $\mathcal{X}$ restringe-se à curva V, ou seja, $\mathcal{X}$ age como uma derivação sobre o anel das funções locais de V. Já que V, interpretada como um germe de uma curva projetiva, tem dimensão 1, segue-se que a restrição do campo $\mathcal{X}$ a V pode ser realizada como a derivada de um parâmetro local t. Mais precisamente, pode-se escrever

$$\varepsilon_1(\mathcal{X})|_V(t) = \det\begin{bmatrix} x_0(t) & x_1(t) & x_2(t) \\ \frac{\partial x_0(t)}{\partial t} & \frac{\partial x_1(t)}{\partial t} & \frac{\partial x_2(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 x_0(t)}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 x_1(t)}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 x_2(t)}{\partial t^2} \end{bmatrix}.$$

de modo que a equação $\varepsilon_1(\mathcal{X})|_V(t) = 0$ fornece exatamente os pontos de inflexão de V em uma vizinhança de p.

Prosseguindo com o raciocínio, a segunda curva estática de $\mathcal{X}$ (isto é, a curva dos pontos de 2-inflexão) é obtida da seguinte maneira:

Seja (x, y, z) uma parametrização de uma solução do campo $\mathcal{X}$, que possui imagem $(x^2, xy, y^2, yz, z^2, zx)$, pela aplicação de 2-Veronese. Portanto, a segunda curva estática $\varepsilon_2(\mathcal{X})$ é obtida através do cálculo do determinante

$$\begin{bmatrix} x^2 & xy & y^2 & yz & z^2 & zx \\ \mathcal{X}(x^2) & \mathcal{X}(xy) & \mathcal{X}(y^2) & \mathcal{X}(yz) & \mathcal{X}(z^2) & \mathcal{X}(zx) \\ \mathcal{X}^2(x^2) & \mathcal{X}^2(xy) & \mathcal{X}^2(y^2) & \mathcal{X}^2(yz) & \mathcal{X}^2(z^2) & \mathcal{X}^2(zx) \\ \mathcal{X}^3(x^2) & \mathcal{X}^3(xy) & \mathcal{X}^3(y^2) & \mathcal{X}^3(yz) & \mathcal{X}^3(z^2) & \mathcal{X}^3(zx) \\ \mathcal{X}^4(x^2) & \mathcal{X}^4(xy) & \mathcal{X}^4(y^2) & \mathcal{X}^4(yz) & \mathcal{X}^4(z^2) & \mathcal{X}^4(zx) \\ \mathcal{X}^5(x^2) & \mathcal{X}^5(xy) & \mathcal{X}^5(y^2) & \mathcal{X}^5(yz) & \mathcal{X}^5(z^2) & \mathcal{X}^5(zx) \end{bmatrix}$$

De modo completamente análogo, a d-ésima curva estática $\varepsilon_d(\mathcal{X})$ é obtida pelo determinante de uma matriz em que a primeira linha é formada por uma base dos monômios de grau d nas variáveis x, y, z, e a i-ésima linha é dada pela derivação $\mathcal{X}$ aplicada à $(i-1)$-ésima linha.

Proposição 3.2.2 *Toda curva algébrica de grau n, invariante pelo campo $\mathcal{X}$, é um fator de $\varepsilon_n(\mathcal{X})$.*

Demonstração: Seja F uma curva algébrica invariante de grau n. Como a escolha da base para o espaço vetorial não desempenha papel algum na definição de curva estática, pode-se escolher uma base em que F aparece. Além disso, como F é invariante, tem-se

$$\mathcal{X}(F) = g \cdot F, \quad \text{onde } g \text{ é um polinômio.}$$

Assim,

$$\begin{array}{lllll} \mathcal{X}^2(F) = & \mathcal{X}(\mathcal{X}(F)) = & \mathcal{X}(g \cdot F) = & \mathcal{X}(g) \cdot F + g^2 \cdot F = & (\mathcal{X}(g) + g^2) \cdot F \\ \quad\vdots & & & & \\ \mathcal{X}^k(F) = & \mathcal{X}\left(\mathcal{X}^{k-1}(F)\right) = & G \cdot F & , \text{ onde } G \text{ é um polinômio.} & \end{array}$$

Assim, F é um fator de $\mathcal{X}^i(F)$, $\forall i$, e portanto tem de ser fator de $\varepsilon_n(\mathcal{X})$. ■

O próximo teorema é o principal bônus do que já foi apresentado até aqui, e ilustra a aplicabilidade da teoria das curvas estáticas ao importante problema da existência de integrais primeiras de determinado grau.

Teorema 3.2.3 *Um campo vetorial projetivo $\mathcal{X}$ admite uma integral primeira de grau d, mas não admite uma integral primeira de grau menor do que d se, e somente se, $\varepsilon_d(\mathcal{X}) = 0$ e $\varepsilon_{d-1}(\mathcal{X}) \neq 0$.*

Demonstração: Se $\mathcal{X}$ admite uma integral primeira de grau d, então toda curva invariante por $\mathcal{X}$ possui grau no máximo d e assim todo ponto é um ponto de d-inflexão, isto é, $\varepsilon_d(\mathcal{X}) = 0$. Uma vez que nem toda curva invariante possui grau $d-1$, tem-se $\varepsilon_{d-1}(\mathcal{X}) \neq 0$.

Reciprocamente, seja $p \in \mathbb{P}^2$ um ponto não-singular de $\mathcal{X}$ e suponha que a solução passando por p é parametrizada, localmente, por $(x, y(x))$. Como, por hipótese, $\varepsilon_d(\mathcal{X})$ é identicamente nula, a composição dessa solução local com o mergulho de d-Veronese está contida em um hiperplano (Observação 4.2.2), e assim $(x, y(x))$ deve estar contida em uma curva algébrica de grau no máximo d. Como toda solução é algébrica, segue, do Teorema de Darboux (vide Teorema 2.3.3), que $\mathcal{X}$ admite uma integral primeira de grau no máximo d. Da hipótese $\varepsilon_{d-1}(\mathcal{X}) \neq 0$ tem-se que a solução genérica possui grau pelo menos d. ■

Combinando a Proposição 3.2.2 com o Teorema 3.2.3, obtém-se:

Corolário 3.2.4 *Seja $\mathcal{X}$ um campo vetorial em $\mathbb{P}^2$. Para todo $d \in \mathbb{N}$, as equações das possíveis curvas invariantes de grau menor ou igual a d aparecem como fatores de $\varepsilon_d(\mathcal{X})$, e se $\varepsilon_d(\mathcal{X}) = 0$ então $\mathcal{X}$ possui uma integral primeira racional de grau no máximo d.*

Capítulo 4

Apêndice

Este apêndice começa com um breve resumo da definição e propriedades básicas iniciais de diferenciabilidade complexa. Em seguida, serão estudados os espaços projetivos complexos.

4.1 A derivada complexa

Seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função contínua, onde $U \subset \mathbb{C}^3$ é um aberto. A função f é dita *holomorfa* em $z_0 \in U$ se o limite

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \tfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

existe. O número complexo $f'(z_0)$ é chamado de *derivada de* f *em* z_0. Se f for holomorfa em todo $z_0 \in U$, então f é dita holomorfa em U.

Nota-se que as regras usuais de derivação de duas funções com valores reais se estendem naturalmente para funções com valores complexos. Assim, por exemplo, se $f, g : U \to \mathbb{C}^3$ são funções holomorfas, tem-se:

1. $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$;
2. $(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$;
3. Se $g(z) \neq 0$, então $(\frac{f}{g})'(z) = \frac{1}{[g(z)]^2}\left[f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)\right]$.

Teorema 4.1.1 *Seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função contínua. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. f é holomorfa em $z_0 \in U$;
2. As partes real e imaginária de f satisfazem as relações de $Cauchy - Riemann$, e f é diferenciável em z_0 do ponto de vista real;
3. f possui derivada real em z_0, e esta transformção linear corresponde à multiplicação por um número complexo.

4.2 O n-espaço projetivo complexo

O n-espaço projetivo sobre $\mathbb{C}$ é definido como o conjunto de todas as retas que passam pela origem em $\mathbb{C}^{n+1}$ e é denotado por $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ (ou mais simplesmente por $\mathbb{P}^n$). Assim, cada ponto $x \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ determina uma reta $\{(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) \mid \lambda \in k\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, de modo que os pontos $x, y \in \mathbb{C}^{n+1}$ estão numa mesma reta se, e somente se, $x_i = \lambda y_i, \forall i$ e para algum $\lambda \in \mathbb{C}$.

Mais formalmente, considere a relação de equivalência $\sim$ que identifica os pontos $x, y \in \mathbb{C}^{n+1}$ se existir um escalar $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $y = \lambda x$. O *n-espaço projetivo* é o correspondente espaço quociente

$$\mathbb{P}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}.$$

A classe de equivalência de um dado $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ é denotada por $(x_0 : \ldots : x_n)$ (coordenadas homogêneas do ponto x).

Observação 4.2.1 *A projeção natural*

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} &\to \mathbb{P}^n \\ (x_0, \ldots, x_n) &\longmapsto (x_0 : \ldots : x_n) \end{aligned}$$

induz em $\mathbb{P}^n$ a topologia quociente. Tal projecão é contínua, logo $S \subset \mathbb{P}^n$ é aberto se, e somente se, $\pi^{-1}(S)$ é aberto em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Sabe-se que $\mathbb{P}^n$ é uma variedade complexa compacta, conexa, de dimensão complexa n. Pode-se estabeler em $\mathbb{P}^n$ uma noção de vizinhança, segundo a qual dois pontos de $\mathbb{P}^n$ estão "próximos" se as retas associadas em $\mathbb{C}^{n+1}$ formam um ângulo pequeno.

Claramente, tem-se uma injeção:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \hookrightarrow & \mathbb{P}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (1 : x_1 : \ldots : x_n) \end{array}$$

Considere os seguintes conjuntos:

$$U_i = \{(x_0 : \ldots : x_i : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Cada U_i é um aberto denso em $\mathbb{P}^n$, pois $\pi^{-1}(U_i)$ é o complementar do plano $x_i = 0$ em $\mathbb{C}^{n+1}$ e é um aberto denso em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Os U_i's são chamados de *abertos coordenados* (ou *cartas afins*) de $\mathbb{P}^n$

O espaço $\mathbb{P}^n$ decompõe-se, então, como união dos seus abertos coordenados:

$$\mathbb{P}^n = U_0 \cup \ldots \cup U_n.$$

Um aberto coordenado de particular interesse é U_n, pois através deste (por convenção), define-se:

$$H_\infty \;=\; \mathbb{P}^n \setminus U_n \;=\; \{(x_0 : \ldots : x_n) \mid x_n = 0\};$$

H_∞ é chamado de *hiperplano no infinito*. O homeomorfismo

$$(x_0 : \ldots : x_{n-1} : 0) \;\longleftrightarrow\; (x_0 : \ldots : x_{n-1})$$

mostra que H_∞ identifica-se a $\mathbb{P}^{n-1}$. Tem-se $\mathbb{P}^n = U_n \cup H_\infty$.

Cada um dos $U_i's$ é homeomorfo a $\mathbb{C}^n$. De fato, para cada i, a aplicação

$$\begin{array}{cccc} \varphi_i : & U_i & \to & \mathbb{C}^n \\ & (x_0 : \ldots : x_i : \ldots : x_n) & \mapsto & (\frac{x_0}{x_i} : \ldots : \frac{x_{i-1}}{x_i} : \frac{x_{i+1}}{x_i} : \ldots : \frac{x_n}{x_i}) \end{array}$$

é um homeomorfismo; mais que isso, é um biholomorfismo.

Observação 4.2.2 *(Mergulho de Veronese) Dados inteiros positivos n, d, sejam $M_0, \ldots, M_N$ todos os monômios de grau d nas $n+1$ variáveis $x_0, \ldots, x_n$. Logo, $N = \binom{n+d}{n} - 1$. A aplicação $v_d \colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ dada por $p \mapsto (M_0(p), \ldots, M_N(p))$, $p \in \mathbb{P}^n$, é extremamente importante em Geometria Algébrica, e recebe o nome de "Mergulho de Veronese de grau d" ou "Mergulho de d-Veronese". Esta aplicação é um homeomorfismo de $\mathbb{P}^n$ sobre sua imagem, que é uma variedade projetiva irredutível em $\mathbb{P}^N$ (quando $n = d = 2$, esta variedade é chamada "Superfície de Veronese"). Se $V \subset \mathbb{P}^n$ é um subconjunto algébrico de codimensão 1, mostra-se que v_d leva V em um subconjunto algébrico de $\mathbb{P}^N$ que está contido em um hiperplano.*

4.3 Contas do Exemplo 3.2.1

Para o cálculo da primeira curva estática do exemplo (3.2.1) deve-se realizar as seguintes contas no Maple 15® :

1^a linha

$> X(f) := (x\hat{}3 - y\hat{}3) * (x\hat{}3 - z\hat{}3) * x * \frac{\partial}{\partial x} f + (x\hat{}3 - y\hat{}3) * (y\hat{}3 - z\hat{}3) * y * \frac{\partial}{\partial y} f$

2^a linha

$> Y(f) := y\hat{}2 * z\hat{}2 * \frac{\partial}{\partial x} f + x\hat{}2 * z\hat{}2 * \frac{\partial}{\partial y} f + x\hat{}2 * y\hat{}2 * \frac{\partial}{\partial z} f$

3^a linha

$> Z(f) := t * X(f) + s * Y(f).$

4^a linha

$> Z(x).$

5^a linha

$> Z(y).$

6^a linha

$> Z(z).$

7^a linha

$> Z(Z(x)).$

8^a linha

$> Z(Z(y)).$

9^a linha
$> Z(Z(z))$.
10^a linha, deve-se escolher a opção matriz e colocar as seguintes entradas:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ Z(x) & Z(y) & Z(z) \\ Z(Z(x)) & Z(Z(y)) & Z(Z(z)) \end{bmatrix}$$

11^a linha, deve-se escolher a opção determinante.
12^alinha, deve-se escolher a opção fator.

Observação: Com ajuda do Maple® é de fácil verificação que $\epsilon_1 (L_9) = 0$, porém $Z (L_9) \neq 0$. Com isto temos um contra-exemplo para a recíproca da proposição (3.2.2)
.

Referências Bibliográficas

[[1]] F. Bahia e V. Ferrer. Folheações de Grau Um no Plano Projetivo e Matrizes de Traço Nulo, UFPB, 5^a Bienal de Matemática, João Pessoa, 2010.

[[2]] D. Cerveau e A.Lins Neto. Holomorfic Foliations em $\mathbb{P}^2$ Having an Invariant Algebraic Curve, Annales de L'Institut Fourier, v.41, n.4, pp. 883-903, 1991.

[[3]] S. C. Coutinho e B. F. M. Ribeiro. On Holomorphic Foliantions Without Algebraic Solutions, Experimental Mathematics, v.10, n.4, pp. 529-536, 2001

[[4]] S. C. Coutinho e L. M. Schechter. Algebraic Solutions of Holomorphic Foliations: an Algorithmic Approach, Journal Of Symbolic Compution, v.41, n.5, pp. 603-618, 2006.

[[5]] J. -D. Demailly. Complex Analytic and Differential Geometry, Université de Genoble I Institut Fourier, Saint-Martin d'Héres, France, 1997.

[[6]] H. Fleming. Geometria Diferencial, USP, Notas de Aula, São Paulo, 2002.

[[7]] H. Fleming. Cálculo Vetorial Prático, USP, Notas de Aula, São Paulo, 2002.

[[8]] W. Fulton. Algebraic Curves: an Introduction Notes Series, 1 ed., New York-Amsterdan, W.A. Benjamin, 1969.

[[9]] J. P. Joaunolou. Équations de Pfaff Algébriques, Lectures Notes in Math., 708, Springer.

[[10]] E. Lages Lima. Curso de Análise vol.2,IMPA, Projeto Euclides, 11^a ed., Rio de Janeiro, 2009.

[[11]] J. M. Lion. Un Critère de Darboux d'Existence Première Pour les 1-formes Différentielles Analytiques, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática, 31-2 (2000).

[[12]] A. Lins Neto. Componentes Irredutíveis dos Espaços de Folheações, IMPA, 26^a Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, 2007.

[[13]] A. Lins Neto. Introdução às Variáveis Complexas, IMPA, Projeto Euclides, Rio de Janeiro.

[[14]] A. Lins Neto. Some Examples for Poincaré and Painlevé Problems, Preprint, IMPA, 2000.

[[15]] A. Lins Neto e B. Scárdua. Folheações Algébricas Complexas, IMPA, 21^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, 1997.

[[16]] C. B. Miranda Neto, Vector Fields and a Family of Linear Type Modules Related to Free Divisors, Journal of Pure and Applied Algebra, 215 (2011), 2652-2659.

[[17]] R. S. Mol. Introdução à Teoria de Folheações Holomorfas, UFPB, Notas de Aula, João Pessoa, 2006.

[[18]] B. O'Neil. Elementary Differential Geometry, Second Edition, Academic Press, 1997.

[[19]] J. V. Pereira. Integrabilidade de Folheações Holomorfas, IMPA, 24^o Colóquio Brasileiro de Matemática, 2003.

[[20]] J. V. Pereira. Vector Fields, Invariant Varieties and Linear Systems, Annales de L'Institut Fourier, v.51, n.5, pp. 1385-1405, 2001.

[[21]] D. Perrin. Algebraic Geometry: An Introdution, 1 ed., Springer-Verlag London Limited, 2008.

[[22]] L. M. Schechter. Soluções Algébricas de Campos de Vetores Planares: Métodos Algorítimicos, UFRJ, Dissertação em Engenharia de Sistemas e Computação, Rio de Janeiro, 2007.

[[23]] I. Vainsencher. Introdução às Curvas Algébricas Planas, Coleção Matemática Universitária, 2^a ed., IMPA, 2005.