

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# O Problema das 4 retas do Cálculo de Schubert

Viviane de Jesus Lisboa

2011

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# O Problema das 4 retas do Cálculo de Schubert

por

Viviane de Jesus Lisboa

sob orientação da

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

Março de 2011

João Pessoa-PB

L769p

Lisboa, Viviane de Jesus.

O problema das 4 retas do cálculo de Schubert / Viviane de Jesus Lisboa.- João Pessoa, 2011.

57f. : il.

Orientadora: Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Cálculo de Schubert. 3. Grassmanniana.  
4. Mergulho de Plücker.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

## O Problema das 4 retas do Cálculo de Schubert

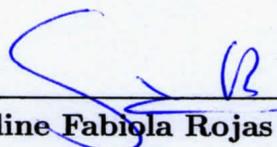
por

**Viviane de Jesus Lisboa**

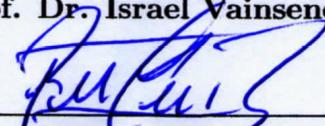
Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

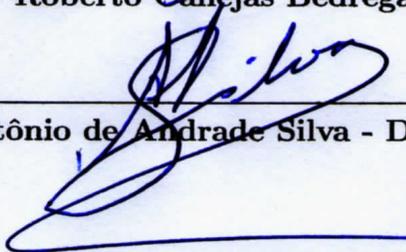
Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
**Prof.ª Dr.ª Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia - DM-UFPB (Orientadora)**

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Israel Vainsencher - DM-UFMG**

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal - DM-UFPB**

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Antônio de Andrade Silva - DM-UFPB(Suplente)**

*Aos meus pais, Joselito e Vilma Maria  
e a minha irmã Lidiane que tanto  
me apoiaram nas decisões que tomei,  
a toda minha família e amigos  
que acreditaram em mim,  
muitas vezes mais do que eu mesma.*

# Agradecimentos

A todos que me apoiaram e que esperaram de mim muito mais que sonhei um dia. Inicialmente a Deus que colocou em meu viver esta oportunidade, de conhecer esta cidade e estas pessoas maravilhosas.

Meus pais, Vilma Maria e Joselito, minha irmã, Lidiane, que acreditaram em meus sonhos. Meus tios Herculano (em memória) e Iracy por me receber com todo amor em sua casa durante parte de minha graduação. Meus incontáveis tios, tias, primos, primas presentes em minha vida com todo amor e confiança transmitidos em cada momento de minha existência. Amigos queridos de cada fase estudantil, que sempre me apoiaram e acreditaram em meu futuro Vilmara, Meg, Dinier, Wanessa, Kelly, dentre muitos outros.

Especialmente quero lembrar de meus professores queridos Mocinha, Claudiano, Uberlandio, nos quais me espelhei, e me empenho até hoje para chegar em meu objetivo final: ser uma boa professora, transmitindo meu conhecimento matemático e social aos meus alunos, assim como eles fizeram comigo. Como não poderia ser diferente, à minha orientadora Jacqueline pela paciência e dedicação em nossos estudos e produção desta dissertação.

A distância da família não impede que encontremos pessoas maravilhosas com as quais formamos uma nova família, com novas mães Dona Auta e Juanice, imãs Oldineia, Tarciana, Edjane, pessoas queridas sem as quais não conseguiria forças para passar por todo o processo de adaptação em uma nova cidade. E no fim deste curso de minha vida, agradeço ao meu namorado Douglas, por facilitar este momento de tensão com muito carinho.

Aos vários colegas de mestrado, que compartilharam os momentos de loucura e devaneio matemático, especialmente Maikon, Geraldo e Prycilla pelos momentos de estudo maciço.

Por fim gostaria de agradecer ao CNPQ pelo apoio financeiro, sem o qual não poderia realizar este trabalho.

# Resumo

Neste trabalho expomos a resolução do problema das 4 retas do Cálculo de Schubert utilizando o mergulho de Plücker, com ênfase no estudo da posição relativa das 4 retas dadas em  $\mathbb{P}^3$ , o que nos permite obter uma descrição explícita do conjunto de soluções e dar sentido preciso à noção de posição geral.

No capítulo 1 inserimos a noção de espaço projetivo e outras correlatas que servirão de base no estudo do problema a ser resolvido.

No capítulo 2 introduzimos o Mergulho de Plücker,  $\omega$ , o qual nos permite identificar o conjunto das retas que encontram uma reta fixa  $l_0$  com a interseção da quádrlica de Plücker e o espaço tangente à mesma no ponto  $\omega(l_0)$ . Além disso damos a descrição das variedades lineares contidas na quádrlica de Plücker.

Por fim, no capítulo 3 demonstramos o Teorema 3.0.3 que é a chave para resolução do nosso problema e fazemos a descrição do conjunto solução cada para posição relativa possível das 4 retas.

Concluimos com um apêndice onde tratamos da conjectura de Shapiro-Shapiro no caso do problema das quatro retas do cálculo de Schubert.

## **Palavras-chave:**

Grassmanniana, Mergulho de Plücker, Cálculo de Schubert.

# Abstract

In this dissertation we expose the solve the four line problem in Schubert Calculus using the Plücker embedding, giving emphasis to the study of the relative position of the four given lines in  $\mathbb{P}^3$ , this allows us to obtain an explicit description of the solution's set as well as to give the precise meaning to the notion of general position.

In chapter 1, we insert the notion of projective space and other related, which are the basic notions for addressing the problem that we treat.

In chapter 2, we introduce the Plücker embedding,  $\omega$ , which allows us to identify the set of lines that meet a fixed given line  $l_0$  with the intersection of the Plücker's quadric,  $\mathcal{Q}$ , and the tangent space of  $\mathcal{Q}$  at  $\omega(l_0)$ . We also give the description of all the linear varieties contained in the Plücker's quadric  $\mathcal{Q}$ .

Finally, in chapter 3 we demonstrate the Theorem 3.0.3 which is a key ingredient to find solutions for our problem. Moreover, we establish a relationship between the relative position of the four given lines and their solution's set.

Finally, we conclude in the appendix with the Shapiro-Shapiro conjecture in the case of the four line problem in Schubert Calculus.

## **Keywords:**

Grammannian, Plücker Embedding, Schubert Calculus.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Espaço projetivo e conjuntos algébricos</b>	<b>1</b>
1.1	Espaço Projetivo . . . . .	2
1.1.1	Retas, Planos e Hiperplanos . . . . .	3
1.2	Conjuntos Algébricos Projetivos . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Grassmanniana e Mergulho de Plücker</b>	<b>12</b>
2.1	Subespaços Lineares da Grassmanniana de Retas . . . . .	17
<b>3</b>	<b>O Problema das 4 retas de Schubert</b>	<b>21</b>
3.1	Posição Relativa das 4 retas X Soluções . . . . .	22
3.1.1	As 4 retas possuem um ponto em comum . . . . .	22
3.1.2	As 4 retas não são concorrentes e pelo menos um par entre elas é coplanar . . . . .	24
3.1.3	As 4 retas são disjuntas duas a duas . . . . .	31
<b>A</b>	<b>Soluções Reais e a Conjectura de Shapiro-Shapiro</b>	<b>40</b>

# Introdução

O problema do qual trataremos neste trabalho é um típico problema de Geometria Enumerativa, a saber: Dadas quatro retas distintas no espaço projetivo complexo tridimensional  $\mathbb{P}^3$ , determinar o número de retas que as intersectam simultaneamente.

Para resolver problemas deste tipo o geômetra alemão Hermann Cäsar Hannibal Schubert (1848-1911) introduziu um cálculo, hoje chamado em sua homenagem de *Cálculo de Schubert*.

De modo simplificado a idéia deste cálculo é: dado um sistema de equações algébricas transformá-lo em um novo sistema cujas soluções são mais fáceis de calcular. Este cálculo é baseado no *Princípio da Conservação do Número* que garante que o número de soluções encontradas no fim do processo é o mesmo que o do início. Porém tal principio era na época muito questionado pela falta de uma demonstração.

Justificar este resultado foi a base do 15º problema dentre os 22 da lista apresentada por Hilbert no Congresso Internacional de Matemática realizado em Paris em 1900.

De fato, com o desenvolvimento da teoria de interseção, em particular pelo cálculo do anel de Chow da grassmanniana de retas em  $\mathbb{P}^3$ ,  $G(2, \mathbb{C}^4)$ , sabe-se que dadas 4 retas em posição geral em  $\mathbb{P}^3$ , existem exatamente 2 soluções (veja problema 1 na página 210 em [2], [4] ou [6] para uma pesquisa mais aprofundada).

Assim o objetivo deste trabalho é determinar as soluções do problema das 4 retas de Schubert, estudando a posição relativa das 4 retas dadas em  $\mathbb{P}^3$  e, em particular esclarecer o significado de “posição geral” das 4 retas neste problema.

Salientamos que a noção de posição geral trata da posição “mais geral” dos objetos em estudo. De fato, consiste em encontrar um aberto no espaço de parametros destes objetos no qual o problema em questão admite solução finita, naturalmente a determinação deste aberto depende do problema em questão.

Neste trabalho veremos as noções básicas necessárias para a determinação das soluções deste problema, entre elas espaço projetivo, grassmanniana de retas e mergulho de Plücker. De fato, um ingrediente chave para encontrarmos as soluções do problema em questão é a utilização do mergulho de Plücker, que tem esse nome em homenagem ao físico e matemático alemão Julius Plücker (1801-1868).

Por outra parte quando se estudam problemas em áreas aplicadas (física, estatística,...) a determinação de soluções reais é imprescindível. Com foco nisto, no apêndice discutimos a conjectura de Shapiro-Shapiro no caso do problema das 4 retas do Cálculo de Schubert baseado em [12] e [13].

# Notação e Terminologia

A seguir fazemos uma lista de notações e terminologias utilizadas no decorrer do texto e damos os seus significados:

- Sejam  $p \neq q$  dois pontos distintos em  $\mathbb{P}^n$ . Então denotaremos por  $l_{p,q}$  a (única) reta em  $\mathbb{P}^n$  passando por estes pontos.
- Sejam  $p \in \mathbb{P}^n$  e  $l \subset \mathbb{P}^n$  uma reta tal que  $p$  não pertence a  $l$ . Então denotaremos por  $\langle p, l \rangle$  o (único) plano em  $\mathbb{P}^n$  contendo o ponto  $p$  e a reta  $l$ .
- Será utilizada a mesma notação para dimensão afim e projetiva e o contexto indicará qual dimensão o texto se refere.

As demais notações e terminologias presentes no trabalho terão seu significado expresso no decorrer do mesmo.

# Capítulo 1

## Espaço projetivo e conjuntos algébricos

Iniciaremos este trabalho com um estudo sobre os espaços projetivos e conjuntos algébricos. A exposição a seguir tem como base [5].

Muita coisa na matemática surge como forma de explicar ou justificar algo visto ou usado em outro ambiente, seja ele científico, cotidiano ou até mesmo artístico. Com a Geometria Projetiva não foi diferente.

A representação artística grega de figuras estruturalmente perfeitas, mas sem qualquer expressão de sentimento, vai dando lugar, com o renascimento (1400 a 1600 DC), a figuras e esculturas que mostram a realidade ou a imaginação de seu autor. Assim foram necessárias técnicas que pudessem auxiliar na criação de tais imagens.

A Geometria Euclidiana não atende a tais necessidades com suas noções de semelhança e equivalência de figuras mediante a congruência. Surgiu então, de modo intuitivo, a noção de perspectiva nos trabalhos dos pintores do século XV.

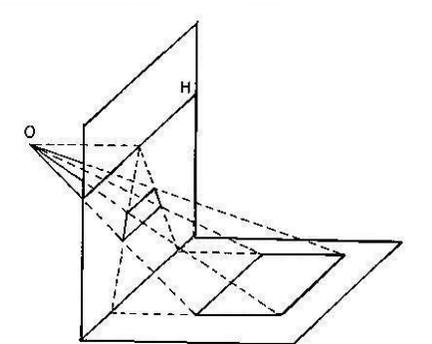


Figura 1.1: Perspectiva

A perspectiva foi matematicamente introduzida pelo italiano Leon Battista Alberti (1404 - 1472) em 1435. Sua idéia foi simplificar o mecanismo da visão, cada olho humano vê uma imagem plana distinta da outra, sendo as duas levadas ao cérebro e

só então este recria a sensação de tridimensionalidade. Leon propôs então que fosse pintado o que só um olho vê e utilizar-se de jogos de luz e sombra, além da diminuição da intensidade da cor em função da distância, para dar a idéia de tridimensionalidade.

Matematicamente podemos interpretar que entre o olho e o objeto é formado um cone de raios luminosos, denominado Cone de Imagem, na pintura é retratada uma seção deste cone.

Neste ponto questiona-se: quais seriam as propriedades preservadas pelas seções de cone? Notamos que algumas propriedades da Geometria Euclidiana são quebradas, como distância, ângulos, paralelismo de retas e semelhança.

Surge então a Geometria Projetiva e nela o conceito de espaço projetivo. Iniciaremos com a construção do plano projetivo real, que dá sentido matemático preciso ao conceito de perspectiva comentado anteriormente. Para mais detalhes, veja [1] e [14].

## 1.1 Espaço Projetivo

Antes de falarmos do Espaço Projetivo Complexo, no qual trataremos nosso problema, vamos conhecer o Plano Projetivo Real, que nos servirá de motivação para a construção dos espaços projetivos em geral.

O conceito de Plano Projetivo Real foi inicialmente introduzido pelo matemático, engenheiro militar e arquiteto francês de Lion, Girard Desargues (1591 - 1661).

Podemos construí-lo do seguinte modo (conforme [14]):

Considere o plano afim mergulhado no espaço tridimensional real  $\mathbb{R}^3$  como o plano  $\pi$  de equação  $z = 1$ .

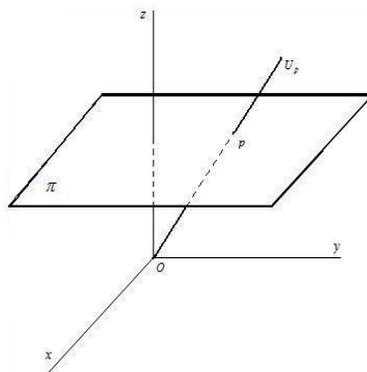


Figura 1.2: Construção do Plano Projetivo

Cada ponto  $p$  do plano  $\pi$  determina uma única reta  $U_p$  passando pela origem.

Note que além dos subespaços unidimensionais da forma  $U_p$ , em  $\mathbb{R}^3$  há também subespaços unidimensionais que não intersectam o plano  $\pi$ , que são justamente os subespaços contidos no plano  $Oxy$ , estes são ditos pontos no infinito.

Assim passamos a definir o plano projetivo real por:

**Definição 1.1.1** O plano projetivo real  $\mathbb{P}^2$  é o conjunto das retas do espaço tridimensional real passando pela origem. Isto é, o conjunto dos subespaços unidimensionais do espaço tridimensional real  $\mathbb{R}^3$ .

Utilizando a mesma noção da construção do plano projetivo real podemos considerar para qualquer espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$  o conjunto formado pelos subespaços unidimensionais de  $V$ , que denotaremos por  $\mathbb{P}(V)$  e denominaremos de projetivização de  $V$  (ou espaço projetivo determinado por  $V$ ). Assim

$$\mathbb{P}(V) = \{[v] \subset V \mid v \in V, v \neq 0\}, \quad (1.1)$$

onde  $[v]$  denota o subespaço de  $V$  gerado pelo vetor  $v$  (conforme [10]).

Por simplicidade, de aqui em diante denotaremos  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$ . Veja que  $\mathbb{P}^0 = \{[1]\}$  consiste de um único ponto, pois  $\mathbb{C} = [1]$  é o único subespaço de  $\mathbb{C}$  de dimensão 1. Já  $\mathbb{P}^1$  consiste de uma cópia de  $\mathbb{C}$  e o ponto no infinito, mais precisamente  $\mathbb{P}^1 = \{[(a, 1)] \mid a \in \mathbb{C}\} \cup \{[(1, 0)]\}$ .

Um ponto  $p = [v] \in \mathbb{P}^n$  com  $v = (a_0, \dots, a_n)$ , será denotado por  $p = [a_0 : \dots : a_n]$ ,  $a_0, \dots, a_n$  serão chamados de coordenadas homogêneas do ponto  $p$ . Note que se  $a_0, \dots, a_n$  são coordenadas homogêneas de  $p$  então  $\lambda a_0, \dots, \lambda a_n$ , com  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , também são coordenadas homogêneas de  $p$ .

**Observação 1.1.0.1** Se definirmos a relação de equivalência  $\sim$  em  $V - \{0\}$  por

$$u \sim v \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} - \{0\} \text{ tal que } u = \lambda v,$$

então  $\frac{V - \{0\}}{\sim}$  pode ser identificado com  $\mathbb{P}(V)$ . De fato, defina

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}(V) &\rightarrow \frac{V - \{0\}}{\sim} \\ [v] &\mapsto \tilde{v} \end{aligned}$$

A seguir usaremos a definição de  $\mathbb{P}(V)$  em (1.1) ou sua identificação com  $\frac{V - \{0\}}{\sim}$  dada por  $\varphi$ .

### 1.1.1 Retas, Planos e Hiperplanos

Uma reta no espaço projetivo  $\mathbb{P}(V)$  é um subespaço linear de dimensão um de  $\mathbb{P}(V)$ . De maneira geral os *subespaços lineares* de dimensão  $r$  de  $\mathbb{P}(V)$  com  $\dim V = n + 1$  são construídos como a projetivização dos subespaços  $W$  de  $V$  de dimensão  $r + 1$ ,  $r \leq n$ . Assim definimos  $\dim \mathbb{P}(W) = r$ , em particular  $\dim \mathbb{P}(V) = n$ . Os subespaços lineares de  $\mathbb{P}(V)$  de dimensão 1, 2, e  $n - 1$  recebem os nomes especiais de reta, plano e hiperplano, respectivamente.

Na geometria projetiva dois hiperplanos em  $\mathbb{P}(V)$  sempre se intersectam.

**Fato 1.1.1.1** *Sejam  $H_1 = \mathbb{P}(W_1)$  e  $H_2 = \mathbb{P}(W_2)$  hiperplanos em  $\mathbb{P}(V)$ , com  $\dim V = n + 1 \geq 3$ . Então  $H_1 \cap H_2$  é um subespaço linear de dimensão  $n - 2$ , ou  $H_1 = H_2$ .*

**Demonstração:** Se  $H_1 = H_2$ , temos o resultado. Suponhamos  $H_1 \neq H_2$ . Então  $W_1 \neq W_2$ , logo  $\exists v_1 \in W_1$ , com  $v_1$  não pertencente a  $W_2$ , tomando  $\{u_1, \dots, u_n\}$  uma base de  $W_2$ , temos que  $\{u_1, \dots, u_n, v_1\}$  é LI e  $[u_1, \dots, u_n, v_1] = V$ . Portanto  $V = W_1 + W_2$ .

Já que  $\dim V = n + 1$ ,  $\dim W_1 = \dim W_2 = n$  e  $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(V)$ , temos que  $\dim(W_1 \cap W_2) = n + n - (n + 1) = n - 1$ .

Por outro lado, tendo em consideração que  $H_1 \cap H_2 = \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$  concluímos que  $H_1 \cap H_2$  é um subespaço linear de dimensão  $n - 2$ . □

Em particular, concluímos que duas retas contidas num mesmo plano sempre se intersectam.

**Fato 1.1.1.2** *Seja  $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ , um subespaço linear de dimensão 2, e sejam  $l_1$  e  $l_2$  retas contidas em  $\mathbb{P}(W)$ . Então ou  $l_1 \cap l_2$  consiste em um ponto ou  $l_1 = l_2$ .*

## 1.2 Conjuntos Algébricos Projetivos

Seja  $d$  um inteiro não negativo. Lembremos que um polinômio  $F \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  é dito homogêneo de grau  $d$  se  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$  tivermos:

$$F(\lambda X_0, \dots, \lambda X_n) = \lambda^d F(X_0, \dots, X_n).$$

Considere aqui os subconjuntos de  $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n] = S$  da forma

$$S_d = \left\{ f \in S \mid f \text{ é homogêneo de grau } d \right\}.$$

Observe que  $S_d$  é um subespaço vetorial de  $S$  de dimensão  $\binom{n+d}{d}$ .

Se tomarmos  $F \in S_d$  com  $d \geq 1$  e  $p = [v] \in \mathbb{P}^n$ , note que  $F(\lambda v) = \lambda^d F(v)$ , assim  $F(p)$  não está bem definido se  $F(v) \neq 0$ . Porém se  $F(v) = 0$ , temos  $F(\lambda v) = 0$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ .

Assim o conjunto

$$Z(F) = \left\{ [v] \in \mathbb{P}^n \mid F(v) = 0 \right\}$$

está bem definido, e é chamado hipersuperfície algébrica de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^n$ , se  $d \geq 1$  e  $F$  for livre de quadrados. Por exemplo, uma hipersuperfície de grau 1 em  $\mathbb{P}^n$  é um hiperplano.

Podemos considerar em  $\mathbb{P}^n$  subconjuntos determinados pelos zeros comuns dos polinômios homogêneos  $F_1, \dots, F_k \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ , a saber

$$Z(F_1, \dots, F_k) = \left\{ [v] \in \mathbb{P}^n \mid F_i(v) = 0 \forall i = 1, \dots, k \right\} = Z(F_1) \cap \dots \cap Z(F_k).$$

Dito conjunto será denominado de conjunto dos zeros de  $F_1, \dots, F_k$  em  $\mathbb{P}^n$ .

Seja  $I = \langle F_1, \dots, F_k \rangle \subset \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  o ideal gerado pelos polinômios homogêneos  $F_i$  com  $i = 1, \dots, k$  (neste caso  $I$  é dito ideal homogêneo), definimos

$$Z(I) = \left\{ a \in \mathbb{P}^n \mid F(a) = 0 \ \forall F \in I \right\}.$$

Então temos que  $Z(I) = Z(F_1, \dots, F_k)$  e  $Z(I)$  independe dos geradores tomados para  $I$ .

**Definição 1.2.1** *Um subconjunto  $Z \subset \mathbb{P}^n$  é dito conjunto algébrico projetivo, ou variedade projetiva, se existem polinômios homogêneos  $F_1, \dots, F_k \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  tais que  $Z$  é o conjunto de zeros de  $F_1, \dots, F_k$ , ou seja,  $Z$  é a interseção de finitas hipersuperfícies algébricas, ou  $Z = \mathbb{P}^n$ .*

**Observação 1.2.0.3** *É importante destacar que a família*

$$\tau = \left\{ Z(I) \right\}_{I \subset \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]} \text{ com } I \text{ ideal homogêneo de } \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n],$$

define uma topologia em  $\mathbb{P}^n$ , onde os conjuntos algébricos  $Z(I)$  são os fechados da topologia definida por  $\tau$ . Deixamos aos leitores a verificação de que  $\tau$  define uma topologia em  $\mathbb{P}^n$  (conforme Exemplo 8.2.9. na página 354 de [3]). Dita topologia é denominada topologia de Zariski.

Se  $X \subset \mathbb{P}^n$  for um subconjunto, definimos o ideal de  $X$  por  $\mathcal{I}(X) = \langle \{f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \mid f \text{ é homogêneo e } f(x) = 0, \forall x \in X\} \rangle$ . Sejam  $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ , com  $X \subset Y$ , então verifica-se que  $\mathcal{I}(Y) \subset \mathcal{I}(X)$ .

Lembremos que se  $I$  for um ideal do anel  $A$ , então o radical de  $I$ ,  $\sqrt{I}$ , é definido por

$$\sqrt{I} = \{p \in A \mid \exists m \in \mathbb{N}, p^m \in I\}.$$

**Teorema 1.2.1 (Teorema dos Zeros de Hilbert)** *Seja  $Z(I) \subset \mathbb{P}^n$  um conjunto algébrico, onde  $I \subset \langle X_0, \dots, X_n \rangle \subset \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  é um ideal homogêneo. Então:*

$$\mathcal{I}(Z(I)) = \sqrt{I}.$$

Este resultado pode ser encontrado em [7], Proposição 5.9 da página 34.

**Corolário 1.2.2** *Considere os ideais homogêneos  $J, I \subset \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  tais que  $Z(J) \subset Z(I)$ , então  $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$ . Em particular se  $I = \langle F \rangle$  e  $J = \langle L_1, \dots, L_k \rangle$ , com  $L_i$  formas lineares, então  $F \in \langle L_1, \dots, L_k \rangle$ .*

**Demonstração:** Segue do Teorema 1.2.1 que

$$Z(J) \subset Z(I) \Rightarrow \mathcal{I}(Z(I)) \subset \mathcal{I}(Z(J)) \Rightarrow \sqrt{I} \subset \sqrt{J}.$$

Finalmente, é suficiente observar que  $F \in \sqrt{I}$  e  $\sqrt{J} = J$ .

□

No Teorema 1.2.4 mostraremos que de fato todo subespaço linear em  $\mathbb{P}^n$  é um conjunto algébrico. Para isto precisamos do seguinte lema.

**Lema 1.2.3** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$  de dimensão  $n$  e  $f_1, \dots, f_k$  funcionais lineares sobre  $V$  (i.e.  $f_1, \dots, f_k \in V^*$ ). Seja  $W_i = \ker(f_i)$  qualquer que seja  $1 \leq i \leq k$ , então temos:*

(I)  $f_1, \dots, f_k$  são vetores linearmente independentes de  $V^*$  se, e somente se  $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) = n - k$ .

(II)  $f_1, \dots, f_k$  são vetores linearmente dependentes de  $V^*$  se, e somente se  $\dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) > n - k$ .

**Demonstração:**

Primeiramente note que  $[f_1, \dots, f_k]$  é o anulador de  $W_1 \cap \dots \cap W_k$ , sabendo que a dimensão no subespaço mais a dimensão do seu anulador é igual a dimensão do espaço (Proposição 4.3, página 52 em [9]), temos

$$\dim(W_1 \cap \dots \cap W_k) = n - \dim[f_1, \dots, f_k].$$

Daí as afirmações (I) e (II) são facilmente verificadas.

□

**Teorema 1.2.4** *Seja  $\Lambda = \mathbb{P}(W)$  com  $W = [u_0, \dots, u_r]$  um subespaço linear de  $\mathbb{P}^n$  de dimensão  $r < n$ . Então existem exatamente  $n - r$  formas lineares linearmente independentes  $L_1, \dots, L_{n-r} \in S_1$  tais que*

$$\Lambda = Z(L_1, \dots, L_{n-r}).$$

**Demonstração:**

Denotemos  $\mathbb{C}^{n+1} = V$ . Seja  $W^0 \subset V^*$  o conjunto dos funcionais lineares cujos núcleos contêm  $W$ , ou seja,  $W^0 = \{f \in V^* \mid f(u_0) = \dots = f(u_r) = 0\}$ . Completamos a base  $\{u_0, \dots, u_r\}$  de  $W$  para uma base de  $V$ ,  $\{u_0, \dots, u_r, w_{r+1}, \dots, w_n\}$  e consideremos sua base dual associada  $\{u_0^*, \dots, u_r^*, w_{r+1}^*, \dots, w_n^*\}$  de  $V^*$ . Note que  $\{w_{r+1}^*, \dots, w_n^*\}$  é um subconjunto linearmente independente de  $W^0$ , pois os funcionais lineares em questão satisfazem a propriedade básica da base dual, a saber,  $w_i^*(u_j) = 0$  para todo  $0 \leq j \leq r$  e  $r + 1 \leq i \leq n$ . Portanto  $\dim W^0 \geq n - r$ .

Agora sejam  $f_1, \dots, f_k \in V^*$  linearmente independentes tais que

$$\begin{aligned} W &\subset \ker(f_1) \cap \dots \cap \ker(f_k) \\ \Rightarrow r + 1 &\leq \dim(\ker(f_1) \cap \dots \cap \ker(f_k)) = n + 1 - k \Rightarrow k \leq n - r, \end{aligned}$$

ou seja, o maior número de funcionais lineares em  $V^*$  linearmente independentes cujos núcleos contém  $W$  é  $n - r$ . Portanto  $W^0$  tem dimensão  $n - r$  e  $W = \ker(f_1) \cap \dots \cap \ker(f_{n-r})$  para qualquer base  $\{f_1, \dots, f_{n-r}\}$  de  $W^0$ .

Agora fixemos a base canônica  $\alpha = \{v_0, \dots, v_n\}$  de  $V$  (onde  $v_i = e_{i+1}$ , com  $0 \leq i \leq n$ ) e seja  $\alpha^* = \{v_0^*, \dots, v_n^*\}$  sua base dual associada. E escolhamos uma base para  $W^0$ , a saber  $\{f_1, \dots, f_{n-r}\}$ . Assim cada  $f_i$  possui uma representação única em relação à base  $\alpha^*$ ,

$$f_i = \sum_{j=0}^n a_{i,j} v_j^*$$

com  $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ . Considere as  $n - r$  formas lineares  $L_i$  definidas por

$$L_i = \sum_{j=0}^n a_{i,j} X_j,$$

$1 \leq i \leq n - r$  em  $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ . Note que:

1. Se os vetores  $u_0, \dots, u_r$  são representados na base  $\alpha$  por

$$u_i = \sum_{j=0}^n u_{i,j} v_j$$

com  $0 \leq i \leq r$ , então para cada  $[b_0 u_0 + \dots + b_r u_r] \in \Lambda$  temos que

$$b_0 u_0 + \dots + b_r u_r = \sum_{j=0}^n (b_0 u_{0,j} + \dots + b_r u_{r,j}) v_j.$$

Portanto

$$L_i([b_0 u_0 + \dots + b_r u_r]) = \sum_{j=0}^n a_{i,j} (b_0 u_{0,j} + \dots + b_r u_{r,j}) = f_i(b_0 u_0 + \dots + b_r u_r) = 0$$

para todo  $1 \leq i \leq n - r \Rightarrow \Lambda \subseteq Z(L_1) \cap \dots \cap Z(L_{n-r})$ .

2. Seja  $[\mathbf{v}] \in Z(L_1) \cap \dots \cap Z(L_{n-r})$  com

$$\mathbf{v} = \sum_{j=0}^n v_j v_j.$$

Então

$$f_i(\mathbf{v}) = \sum_{j=0}^n a_{i,j} v_j = L_i([\mathbf{v}]) = 0$$

para todo  $1 \leq i \leq n - r$ . Portanto  $\mathbf{v} \in \ker(f_1) \cap \dots \cap \ker(f_{n-r}) = W \Rightarrow [\mathbf{v}] \in \Lambda$ .

$$\therefore \Lambda = Z(L_1) \cap \dots \cap Z(L_{n-r}).$$

□

**Definição 1.2.2** *Um conjunto algébrico projetivo  $X \subset \mathbb{P}^n$  é dito conjunto algébrico linear, ou variedade linear se  $X = Z(I)$  onde  $I = \langle L_1, \dots, L_k \rangle$  com  $L_1, \dots, L_k \in S_1$ .*

Seja  $X = Z(I)$  uma variedade linear com  $I = \langle L_1, \dots, L_k \rangle$ . Note que caso  $I = \{0\}$  então  $X = \mathbb{P}^n$ . Caso contrário:  $I \neq \{0\}$  e podemos assumir que  $I = \langle L_1, \dots, L_k \rangle$ , onde  $\{L_1, \dots, L_k\}$  é linearmente independente. Note que se

$$L_i = \sum_{j=0}^n a_{ij} X_j$$

então  $Z(I) = \mathbb{P}(W)$ , onde  $W = \left\{ (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{j=0}^n a_{ij} b_j = 0 \right\}$ . Assim  $\dim Z(I) = (n+1-k) - 1 = n-k$ .

Observe que:

$l \subset \mathbb{P}^2$  é uma reta  $\Leftrightarrow l = Z(L)$ , com  $L$  forma linear não nula em  $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ .

$l \subset \mathbb{P}^3$  é uma reta  $\Leftrightarrow l = Z(L_1, L_2)$ , com  $\{L_1, L_2\}$  formas lineares LI em  $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ .

**Proposição 1.2.0.4** *Sejam  $F \in S_d$  não nulo, com  $d \geq 1$ , e  $l = \mathbb{P}(W)$  uma reta em  $\mathbb{P}^n$ ,  $n \geq 2$ . Então  $Z(F) \cap l \neq \emptyset$ . Além disso ou  $l \subset Z(F)$  ou  $Z(F) \cap l$  consiste de no máximo  $d$  pontos.*

**Demonstração:** Se  $l \subset Z(F)$  temos o resultado.

Suponha que  $l \not\subset Z(F)$ , então podemos escolher uma base  $\{w_1, w_2\}$  de  $W$  tal que  $[w_2]$  não pertence a  $Z(F)$  e podemos escrever

$$l = \{[w_1 + tw_2] \mid t \in \mathbb{C}\} \cup \{[w_2]\}$$

Se  $w_1 = (a_0, \dots, a_n)$ ,  $w_2 = (b_0, \dots, b_n)$  e

$$F = \sum_{\substack{i_0, \dots, i_n \geq 0 \\ i_0 + \dots + i_n = d}} c_{i_0, \dots, i_n} X_0^{i_0} \dots X_n^{i_n},$$

com  $c_{i_0, \dots, i_n} \in \mathbb{C}$ , então avaliando  $F$  em  $[w_1 + tw_2] \in l$  obtemos o polinômio

$$p(t) = \sum_{\substack{i_0, \dots, i_n \geq 0 \\ i_0 + \dots + i_n = d}} c_{i_0, \dots, i_n} (a_0 + tb_0)^{i_0} \dots (a_n + tb_n)^{i_n} = F(w_1) + \dots + t^d F(w_2).$$

Note que se  $[w_1 + t_0 w_2] \in Z(F)$ , então  $p(t_0) = 0$ .

Sendo  $p(t)$  um polinômio não constante, já que o coeficiente do termo de grau  $d$  é  $F(w_2) \neq 0$ , então pelo Teorema Fundamental da Álgebra,  $p$  tem ao menos uma raiz, ou seja  $Z(F) \cap l \neq \emptyset$ . Por outro lado, já que o grau do polinômio  $p(t)$  é  $d$ , então o número máximo de raízes distintas do polinômio é  $d$ . Portanto o número de pontos da interseção  $Z(F) \cap l$  é no máximo  $d$ .

□

**Corolário 1.2.5** *Sejam  $F \in S_d$  não nulo, com  $d \geq 1$ , e  $\Lambda = \mathbb{P}(W)$  um subespaço linear de dimensão  $r \geq 2$  de  $\mathbb{P}^n$ . Então  $Z(F) \cap \Lambda$  consiste de infinitos pontos.*

**Demonstração:** Primeiramente note que sendo  $\Lambda$  um subespaço linear de dimensão  $r \geq 2$ , então  $\Lambda$  contém um plano.

Suponhamos que  $\Lambda$  seja um plano, ou seja  $\dim \Lambda = 2$ . Note que nesse caso temos duas possibilidades:

1. Existe uma reta  $l$  do plano  $\Lambda$  tal que  $l \subseteq Z(F)$ , ou
2.  $Z(F) \cap \Lambda$  não contém retas.

No caso 1. concluímos que  $l \subseteq Z(F) \cap \Lambda$ . Portanto  $Z(F) \cap \Lambda$  consiste de infinitos pontos.

Para resolver o caso 2. usaremos o Fato 1.2.0.5 que será provado após este corolário, a saber: dados  $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{P}^2$ , existe  $l \subsetneq \mathbb{P}^2$  reta tal que  $p_i$  não pertence a  $l$  para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

- Seja  $l \subset \Lambda$  uma reta, pela Proposição 1.2.0.4 a interseção  $l \cap Z(F)$  é um conjunto não vazio. Então escolhamos  $p_0 \in l \cap Z(F) \subset Z(F) \cap \Lambda$ .
- Pelo Fato 1.2.0.5 existe um reta  $l_1 \subset \Lambda$  tal que  $p_0$  não pertence a  $l_1$ . Pela Proposição 1.2.0.4 a interseção  $l_1 \cap Z(F)$  é um conjunto não vazio, escolhamos  $p_1 \in l_1 \cap Z(F) \subset Z(F) \cap \Lambda$ . Assim obtemos  $p_0, p_1 \in Z(F) \cap \Lambda$ , com  $p_0 \neq p_1$ .
- Aplicando novamente o Fato 1.2.0.5 concluímos que existe um reta  $l_2 \subset \Lambda$  tal que  $p_0, p_1$  não pertencem a  $l_2$ . Pela Proposição 1.2.0.4 a interseção  $l_2 \cap Z(F)$  é um conjunto não vazio, escolhamos  $p_2 \in l_2 \cap Z(F) \subset Z(F) \cap \Lambda$ . Assim obtemos  $p_0, p_1, p_2 \in Z(F) \cap \Lambda$ , pontos distintos dois a dois.

Este processo pode ser realizado indutivamente, de fato, se nós já temos uma sequência de pontos distintos  $p_0, \dots, p_{m-1} \in Z(F) \cap \Lambda$ , obtemos  $p_m \in Z(F) \cap \Lambda$  com  $p_m \neq p_i$  para  $i = 0, \dots, m-1$  da seguinte forma: segue-se do Fato 1.2.0.5 que existe uma reta  $l_m \subset \Lambda$  tal que  $p_i$  não pertence a  $l_m$  para todo  $i = 0, \dots, m-1$  e podemos escolher  $p_m \in l_m \cap Z(F) \subset \Lambda \cap Z(F)$ . Assim seguindo a construção indutiva obtemos uma sequência enumerável de infinitos pontos  $p_0, \dots, p_m, \dots$  que pertencem a  $Z(F) \cap \Lambda$ .

□

**Fato 1.2.0.5** *Sejam  $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{P}^2$ , então existe  $l \subsetneq \mathbb{P}^2$  reta tal que  $p_i$  não pertence a  $l$  para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ .*

**Demonstração:** Sendo  $l$  uma reta em  $\mathbb{P}^2$ , então pelo Teorema 1.2.4 existe uma forma linear não nula  $L = AX_0 + BX_1 + CX_2$  tal que  $l = Z(L)$ . Vendo por outro ângulo queremos mostrar que existe uma forma linear não nula  $L = AX_0 + BX_1 + CX_2$  tal que  $p_i$  não pertence a  $Z(L)$  para todo  $i = 1, \dots, m$ .

Considere  $p_i = [a_{i0} : a_{i1} : a_{i2}]$  com  $i = 1, \dots, m$ . Note que

$$p_i \in Z(L) \Leftrightarrow Aa_{i0} + Ba_{i1} + Ca_{i2} = 0.$$

Definamos

$$\begin{aligned} \widehat{p}_i : \quad \mathbb{C}^3 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, z) &\mapsto a_{i0}x + a_{i1}y + a_{i2}z \end{aligned}$$

então  $p_i \in Z(L) \Leftrightarrow (A, B, C) \in \text{Ker}(\widehat{p}_i)$ .

Assim queremos mostrar que existe  $(A, B, C) \in \mathbb{C}^3 - \{(0, 0, 0)\}$  tal que  $(A, B, C) \notin \text{Ker}(\widehat{p}_i) \forall i$ .

De fato, sendo  $\widehat{p}_i$  uma transformação linear pelo teorema do Núcleo e Imagem  $\dim \text{Ker}(\widehat{p}_i) = 2, \forall i \in \{1, \dots, m\}$  desde que  $\widehat{p}_i$  é sobrejetiva.

Suponhamos que não existe  $L = AX_0 + BX_1 + CX_2$  tal que  $p_i$  não pertence a  $L$  para todo  $i$ , ou seja,

$$\bigcup_{i=1}^m \text{Ker}(\widehat{p}_i) = \mathbb{C}^3,$$

mas  $\text{Ker}(\widehat{p}_i)$  são subespaços lineares de  $\mathbb{C}^3$  de dimensão 2, e a união de subespaços  $W_1, \dots, W_k$  de um espaço vetorial  $V$  é também um espaço vetorial se, e somente se existe  $i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $W_j \subseteq W_i, \forall j \in \{1, \dots, k\}$ , nestas condições

$$\dim \bigcup W_j = \dim W_i = 2.$$

Assim mesmo que  $\bigcup \text{Ker}(\widehat{p}_i)$  seja um espaço vetorial, sua dimensão é dois.

Portanto, existe  $L = AX_0 + BX_1 + CX_2$  forma linear não nula tal que

$$p_i \notin Z(L) \forall i = 1, \dots, m.$$

□

Observando a demonstração do Fato 1.2.0.5 anterior notamos que o mesmo vale não só para o corpo  $\mathbb{C}$ , como para qualquer corpo infinito.

**Definição 1.2.3** *Seja  $Z(F)$  uma hypersuperfície de grau  $d$ .  $p \in \mathbb{P}^n$  é chamado de ponto singular de  $Z(F)$  se, e somente se  $\frac{\partial F}{\partial X_i}(p) = 0 \forall i = 0, \dots, n$ .*

Com essa definição em mente podemos separar as hipersuperfícies em dois tipos:

1. *singular*: aquelas que possuem algum ponto de singularidade, ou
2. *não singular*: aquelas que não possuem pontos de singularidade.

Se  $X = Z(F) \subset \mathbb{P}^n$  for uma hipersuperfície de grau  $d$ , denotaremos por  $Sing(X)$  o conjunto das singularidades de  $X$ .

Observe que  $X = Z(L) \subset \mathbb{P}^n$  hiperplano, não admite pontos singulares. Já para  $d \geq 2$ , sempre existem hipersuperfícies singulares, por exemplo  $X = Z(X_0^d + \dots + X_{n-1}^d) \subset \mathbb{P}^n$  é singular, sendo  $Sing(X) = \{[0 : \dots : 0 : 1]\}$ .

Por outro lado, segue-se da definição de ponto singular que  $Sing(X) = Z(\frac{\partial F}{\partial X_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial X_n})$  é um conjunto algébrico. Além disso pela equação de Euler:

$$X_0 \frac{\partial F}{\partial X_0} + \dots + X_n \frac{\partial F}{\partial X_n} = dF$$

temos  $Sing(X) \subset X$ .

Sejam  $X = Z(F) \subset \mathbb{P}^n$  uma hipersuperfície de grau  $d$  e  $p = [v] \in X - Sing(X)$ . Seja  $F'_v: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  o diferencial de  $F$  em  $v$ , isto é,

$$F'_v(u_0, \dots, u_n) = \sum_{i=0}^n \frac{\partial F}{\partial X_i}(v) \cdot u_i.$$

Note que  $ker(F'_v) = ker(F'_{\lambda v})$  para todo  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , o que nos permite definir:

**Definição 1.2.4** O espaço projetivo tangente a  $X$  no ponto  $p = [v]$ , denotado por  $\mathbb{T}_p X$  como

$$\mathbb{T}_p X = \mathbb{P}(ker(F'_v)) = \left\{ [u_0 : \dots : u_n] \in \mathbb{P}^n \mid \sum_{i=0}^n \frac{\partial F}{\partial X_i}(v) \cdot u_i = 0 \right\}. \quad (1.2)$$

Observe que:

1. Segue da equação de Euler que  $p \in \mathbb{T}_p X$ .
2. Se  $p \in X$  é um ponto não singular, então  $\mathbb{T}_p X$  é um hiperplano em  $\mathbb{P}^n$ .

## Capítulo 2

# Grassmanniana e Mergulho de Plücker

Neste capítulo estudaremos a grassmanniana de retas em  $\mathbb{P}^3$  e utilizaremos o mergulho de Plücker para identificar dita grassmanniana com uma hipersuperfície quádrlica  $\mathcal{Q}$  em  $\mathbb{P}^5$ .

**Definição 2.0.5** *Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$  de dimensão  $n + 1$ . Para cada  $0 \leq d \leq n + 1$ . Chamamos de  $d$ -grassmanniana ou grassmanniana de  $d$ -planos em  $V$ , denotado por  $G(d, V)$ , o conjunto*

$$G(d, V) = \left\{ W \subset V \mid W \text{ é um subespaço vetorial de } V \text{ de dimensão } d \right\}.$$

Assim a projetivização de  $V$  pode ser vista como a grassmanniana de subespaços de dimensão 1 do espaço  $V$ , ou seja,

$$\mathbb{P}(V) = G(1, V).$$

Do mesmo modo  $G(2, V)$  é chamada de Grassmanniana de retas de  $\mathbb{P}(V)$  pois como já vimos toda reta  $l \subset \mathbb{P}(V)$  é definida como a projetivização de um subespaço vetorial  $W$  de  $V$  de dimensão 2, ou seja,  $W \in G(2, V)$ .

Consideremos a partir deste momento o polinômio  $F = X_{01}X_{23} - X_{02}X_{13} + X_{03}X_{12} \in \mathbb{C}[X_{01}, X_{02}, X_{03}, X_{12}, X_{13}, X_{23}]$  e a hipersuperfície quádrlica  $\mathcal{Q} = Z(F) \subset \mathbb{P}^5$ .

**Afirmção 2.0.0.6** *Nas notações anteriores,  $\mathcal{Q}$  é não singular.*

**Prova da Afirmção:** Sendo  $F = X_{01}X_{23} - X_{02}X_{13} + X_{03}X_{12}$ , temos

$$\frac{\partial F}{\partial X_{01}} = X_{23}, \quad \frac{\partial F}{\partial X_{02}} = -X_{13}, \quad \frac{\partial F}{\partial X_{03}} = X_{12}, \quad \frac{\partial F}{\partial X_{12}} = X_{03}, \quad \frac{\partial F}{\partial X_{13}} = -X_{02}, \quad \frac{\partial F}{\partial X_{23}} = X_{01}.$$

Como a única solução deste sistema é a origem em  $\mathbb{C}^6$ , concluímos que  $\mathcal{Q}$  é não singular.  $\square$

Definamos a aplicação

$$\begin{aligned} \omega : G(2, \mathbb{C}^4) &\rightarrow \mathbb{P}^5 \\ \pi = [u, v] &\mapsto \omega(\pi) = [w_{01} : w_{02} : w_{03} : w_{12} : w_{13} : w_{23}] \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde  $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$  e  $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$  e  $w_{ij} = u_i v_j - u_j v_i$ ,  $0 \leq i < j \leq 3$ .

**Proposição 2.0.6**  $\omega$  está bem definida,  $Im(\omega) = \mathcal{Q}$  e  $\omega$  é injetiva.

**Demonstração:** Primeiro observe que sendo  $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$  e  $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$  linearmente independentes, algum  $w_{i,j} \neq 0$ . Além disso se  $u' = (u'_0, u'_1, u'_2, u'_3)$  e  $v' = (v'_0, v'_1, v'_2, v'_3)$  são tais que  $\pi = [u, v] = [u', v']$ , então existem  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$  tais que

$$\begin{aligned} u &= \alpha u' + \beta v', \\ v &= \gamma u' + \delta v', \\ 0 &\neq \alpha \delta - \beta \gamma. \end{aligned}$$

Que é equivalente ao sistema nas coordenadas dos vetores  $u, v, u', v'$ , a saber,

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha u'_i + \beta v'_i, \\ v_i &= \gamma u'_i + \delta v'_i. \end{aligned}$$

Assim temos que

$$w_{ij} = u_i v_j - u_j v_i = (\alpha \delta - \beta \gamma)(u'_i v'_j - u'_j v'_i) = (\alpha \delta - \beta \gamma)w'_{ij}.$$

Como  $\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0$ , segue que:

$$[w_{01} : w_{02} : w_{03} : w_{12} : w_{13} : w_{23}] = [w'_{01} : w'_{02} : w'_{03} : w'_{12} : w'_{13} : w'_{23}].$$

Portanto,  $\omega$  está bem definida.

Provemos agora que  $\omega(G(2, \mathbb{C}^4)) = \mathcal{Q}$ . Por um lado,  $\forall \omega(\pi) \in \omega(G(2, \mathbb{C}^4))$ , temos que  $F(\omega(\pi)) = 0$ . O que implica em  $\omega(G(2\mathbb{C}^4)) \subseteq \mathcal{Q}$ .

Por outro lado, fixados  $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$  e  $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$  temos que:

$$\begin{aligned} v_0 u - u_0 v &= (0, -w_{01}, -w_{02}, -w_{03}); \\ v_1 u - u_1 v &= (w_{01}, 0, -w_{12}, -w_{13}); \\ v_2 u - u_2 v &= (w_{02}, w_{12}, 0, -w_{23}); \\ v_3 u - u_3 v &= (w_{03}, w_{13}, -w_{23}, 0). \end{aligned}$$

---

Seja  $\underline{a} = [w_{01} : w_{02} : w_{03} : w_{12} : w_{13} : w_{23}] \in \mathcal{Q}$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $w_{01} \neq 0$  então os vetores  $p = (0, -w_{01}, -w_{02}, -w_{03})$  e  $q = (w_{01}, 0, -w_{12}, -w_{13})$  são linearmente independentes. Consideremos o plano  $\pi = [p, q] \in G(2, \mathbb{C}^4)$ . Note que:

$$\omega(\pi) = [w_{01}^2 : w_{01}w_{02} : w_{01}w_{03} : w_{01}w_{12} : w_{01}w_{13} : w_{02}w_{13} - w_{03}w_{12}]$$

como  $\underline{a} \in \mathcal{Q}$ , então  $w_{02}w_{13} - w_{03}w_{12} = w_{01}w_{23}$ . Assim  $\omega(\pi) = \underline{a}$ . Logo  $\mathcal{Q} \subset \omega(G(2, \mathbb{C}^4))$ . Portanto  $\mathcal{Q} = \omega(G(2, \mathbb{C}^4))$ .

Verifiquemos agora que  $\omega$  é injetiva.

Sejam  $\pi = [u, v]$  e  $\pi' = [u', v']$  em  $G(2, \mathbb{C}^4)$ . Assuma que  $\omega(\pi) = \omega(\pi') \in \mathcal{Q} \subsetneq \mathbb{P}^5$ , então  $w_{ij} = \alpha w'_{ij}$  onde  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e  $0 \leq i < j \leq 3$ .

Suponha que  $w_{01} = \alpha w'_{01} \neq 0$ . Então

$$\pi = [u, v] = [v_0u - u_0v, v_1u - u_1v] = [\frac{1}{\alpha}(v_0u - u_0v), \frac{1}{\alpha}(v_1u - u_1v)] = [v'_0u' - u'_0v', v'_1u' - u'_1v'] = [u', v'] = \pi'.$$

Portanto  $\omega$  é uma bijeção entre  $G(2, \mathbb{C}^4)$  e  $\mathcal{Q}$ . □

A função  $\omega$  é chamada de *Mergulho de Plücker*.

Para  $\pi_0 \in G(2, \mathbb{C}^4)$  fixo definamos

$$\Omega_0 = \left\{ \pi \in G(2, \mathbb{C}^4) \mid \dim(\pi \cap \pi_0) \geq 1 \right\}.$$

A seguir mostraremos que o mergulho de Plücker  $\omega$  nos permite identificar  $\Omega_0$  com  $\mathbb{T}_{P_0} \mathcal{Q} \cap \mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^5$ , onde  $P_0 = \omega(\pi_0)$ . Assim identificamos o subconjunto de retas que intersectam uma reta fixa em  $\mathbb{P}^3$  com a interseção de um hiperplano tangente a  $\mathcal{Q}$  e a hipersuperfície quádrlica  $\mathcal{Q}$  em  $\mathbb{P}^5$ .

**Lema 2.0.7** *Seguindo as notações anteriores. Seja  $\pi \neq \pi_0 \in \Omega_0$  e  $u \in \mathbb{C}^4$  tal que  $\pi \cap \pi_0 = [u]$ . Tomando  $v_0 \in \pi_0 - [u]$  e  $v \in \pi - [u]$ . Então*

1.  $[u, sv_0 + tv] \in G(2, \mathbb{C}^4), \forall [s : t] \in \mathbb{P}^1$ .
2. *Sejam  $\omega : G(2, \mathbb{C}^4) \rightarrow \mathbb{P}^5$  o mergulho de Plücker em (2.1) e*

$$\mathcal{L}_{\pi_0, \pi} = \left\{ [u, sv_0 + tv] \in G(2, \mathbb{C}^4) \mid [s : t] \in \mathbb{P}^1 \right\}.$$

*Então  $\omega(\mathcal{L}_{\pi_0, \pi})$  é uma reta (contida em  $\mathcal{Q}$ ) em  $\mathbb{P}^5$  passando por  $\omega(\pi_0)$  e  $\omega(\pi)$ .*

3. *Sejam  $p = [u] \in \mathbb{P}^3$ ,  $\Pi = \mathbb{P}(\pi_0 + \pi)$  e*

$$\Omega_p(\Pi) = \left\{ l \subset \mathbb{P}^3 \mid l \text{ uma reta e } p \in l \subset \Pi \right\}.$$

*Então  $\Omega_p(\Pi)$  se identifica com  $\mathcal{L}_{\pi_0, \pi}$  e conseqüentemente com a reta  $\omega(\mathcal{L}_{\pi_0, \pi})$  em  $\mathbb{P}^5$ .*

**Demonstração:** Provemos o item 1.

É suficiente verificar que  $u$  e  $sv_0 + tv$ , com  $s, t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , são linearmente independentes em  $\mathbb{C}^4$ . Suponha por absurdo que  $u = \lambda(sv_0 + tv)$ ,  $\lambda \neq 0$ , então  $v \in \pi_0$  o que é absurdo. Logo  $\{u, sv_0 + tv\}$  é linearmente independente.

Portanto  $[u, sv_0 + tv] \in G(2, \mathbb{C}^4)$ ,  $\forall [s : t] \in \mathbb{P}^1$ .

Seguindo a demonstração, provemos o item 2.

Lembremos que dados dois pontos distintos  $p = [u]$  e  $q = [v]$  em  $\mathbb{P}^n$  existe uma única reta  $l_{p,q}$  em  $\mathbb{P}^n$  passando pelos pontos  $p$  e  $q$ . Além disso,  $l_{p,q} = \{[su + tv] \in \mathbb{P}^n \mid [s : t] \in \mathbb{P}^1\}$ . Se denotarmos por  $P_0 = \omega(\pi_0) = [V_0]$  e  $P = \omega(\pi) = [V]$ , então pode-se verificar que  $\omega([u, sv_0 + tv]) = [sV_0 + tV]$  para  $[s : t] \in \mathbb{P}^1$ . Portanto  $\omega(\mathcal{L}_{\pi_0, \pi}) = l_{P_0, P}$ .

Quanto ao item 3. basta observar a identificação de  $G(2, \mathbb{C}^4)$  com as retas em  $\mathbb{P}^3$  e com ela a relação existente entre  $\mathcal{L}_{\pi_0, \pi}$  e  $\Omega_p(\Pi)$ .  $\square$

**Proposição 2.0.8** *Seguindo as notações anteriores.  $\omega$  induz uma bijeção entre  $\Omega_0$  e  $\mathbb{T}_{P_0}\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^5$ .*

**Demonstração:** Como  $\omega$  já é injetiva, basta provar que  $\omega(\Omega_0) = \mathbb{T}_{P_0}\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}$ .

Sejam  $\pi \in \Omega_0$ , com  $\pi \neq \pi_0$ ,  $P_0 = \omega(\pi_0)$  e  $P = \omega(\pi)$ , mostremos que a reta que passa por  $P_0$  e  $P$ ,  $l_{P_0, P}$ , está contida em  $\mathbb{T}_{P_0}\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}$ .

Af. 1 A reta  $l_{P_0, P} \subset \mathcal{Q}$ .

Do Lema 2.0.7 temos que  $l_{P_0, P} = \omega(\mathcal{L}_{\pi_0, \pi})$ . Assim  $l_{P_0, P} \subset \mathcal{Q}$ .

Af. 2 A reta  $l_{P_0, P} \subset \mathbb{T}_{P_0}\mathcal{Q}$ .

Observe que pelo Teorema 1.2.4 temos que  $l_{P_0, P} = Z(L_1) \cap Z(L_2) \cap Z(L_3) \cap Z(L_4)$  com  $L_i$  formas lineares tais que  $\{L_i\}_{i=1}^4$  é linearmente independente em  $\mathbb{C}[X_{01}, X_{02}, X_{03}, X_{12}, X_{13}, X_{23}]$ . Já que  $l_{P_0, P} \subset \mathcal{Q} = Z(F)$ , segue do Corolário 1.2.2 que

$$F = \sum_{i=1}^4 \alpha_i L_i,$$

onde  $\alpha_i \in \mathbb{C}[X_{01}, X_{02}, X_{03}, X_{12}, X_{13}, X_{23}]_1$ .

Seja  $R = [w] \in l_{P_0, P}$ , então para qualquer  $u = (u_0, u_1, \dots, u_5) \in \mathbb{C}^6$  temos que

$$F'_w(u) = \sum_{i=0}^5 \frac{\partial F}{\partial Y_i}(w) u_i = \alpha_1(w) L_1(u) + \dots + \alpha_4(w) L_4(u) \quad (2.2)$$

onde  $Y_i$  com  $0 \leq i \leq 5$  na igualdade acima é a  $(i + 1)$ -ésima variável no conjunto ordenado  $\{X_{01}, X_{02}, X_{03}, X_{12}, X_{13}, X_{23}\}$ .

Note que, se  $[u] \in l_{P_0, P}$  segue-se de (2.2) que  $F'_w(u) = 0$ . Então  $[u] \in \mathbb{T}_R\mathcal{Q}$  e portanto  $l_{P_0, P} \subseteq \mathbb{T}_R\mathcal{Q}$ ,  $\forall R \in l_{P_0, P}$ . Em particular,  $P \in l_{P_0, P} \subseteq \mathbb{T}_{P_0}\mathcal{Q}$ . Sendo  $P = \omega(\pi)$  com  $\pi \in \Omega_0$  arbitrário, então  $\omega(\Omega_0) \subset \mathbb{T}_{P_0}\mathcal{Q}$ .

Portanto  $\omega(\Omega_0) \subseteq \mathbb{T}_{P_0}\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}$ .

---

Agora vamos verificar a outra inclusão:  $\mathbb{T}_{P_0} \mathcal{Q} \cap \mathcal{Q} \subseteq \omega(\Omega_0)$ . Fixe  $\pi_0 = [u, v]$  com  $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ ,  $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$  e  $P_0 = [w_{01} : w_{02} : w_{03} : w_{12} : w_{13} : w_{23}]$  como em (2.1). Seja  $A = [a_{01} : a_{02} : a_{03} : a_{12} : a_{13} : a_{23}] \in \mathbb{T}_{P_0} \mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}$  então

$$\begin{aligned} w_{23}a_{01} - w_{13}a_{02} + w_{12}a_{03} + w_{03}a_{12} - w_{02}a_{13} + w_{01}a_{23} &= 0, \\ a_{01}a_{23} - a_{02}a_{13} + a_{03}a_{12} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Assuma sem perda de generalidade que  $a_{01} = 1$ , sendo  $A$  um elemento da imagem de  $\omega$ , então existe  $U \in G(2, \mathbb{C}^4)$  tal que  $\omega(U) = A$ , nessas condições  $U$  é gerado por  $p = (0, 1, a_{02}, a_{03})$  e  $q = (1, 0, -a_{12}, -a_{13})$ . Vamos considerar aqui dois casos.

Caso 1.  $w_{01} = 0$ .

Já que  $P_0 \in \mathcal{Q}$ , temos  $w_{02}w_{13} - w_{03}w_{12} = 0$  e algum  $w_{ij} \neq 0$ . Neste ponto assumimos que  $w_{02} = 1$ . Sabendo que  $w_{01} = 0$  e  $w_{02} = 1$  concluímos que  $\pi_0 = [p_1, q_1]$  com  $p_1 = (0, 0, 1, w_{03})$  e  $q_1 = (1, w_{12}, 0, -w_{23})$ . Note que

$$\begin{aligned} w_{12}p + q &= (1, w_{12}, w_{12}a_{02} - a_{12}, w_{12}a_{03} - a_{13}) \in U, \\ (w_{12}a_{02} - a_{12})p_1 + q_1 &= (1, w_{12}, w_{12}a_{02} - a_{12}, w_{12}a_{02}w_{03} - a_{12}w_{03} - w_{23}) \in \pi_0. \end{aligned}$$

Sabendo que, nestas condições temos  $w_{13} = w_{03}w_{12}$  e substituindo em (2.3) obtemos

$$\begin{aligned} w_{23} - w_{12}a_{02}w_{03} + w_{12}a_{03} + a_{12}w_{03} - a_{13} &= 0 \\ \Downarrow \\ w_{12}a_{03} - a_{13} &= w_{12}a_{02}w_{03} - a_{12}w_{03} - w_{23}. \end{aligned}$$

Portanto,  $w_{12}p + q = (w_{12}a_{02} - a_{12})p_1 + q_1 \in \pi_0 \cap U$  e consequentemente  $A \in \omega(\Omega_0)$ .

Caso 2.  $w_{01} = 1$ .

Neste caso  $\pi_0 = [p_1, q_1]$  com  $p_1 = (0, 1, w_{02}, w_{03})$  e  $q_1 = (1, 0, -w_{12}, -w_{13})$ . Seja  $\alpha = w_{12} - a_{12}$ ,  $\beta = w_{02} - a_{02}$ , note que

$$\begin{aligned} \alpha p + \beta q &= (\beta, \alpha, w_{12}a_{02} - w_{02}a_{12}, w_{12}a_{03} - a_{12}a_{03} - w_{02}a_{13} + a_{02}a_{13}) \in U, \\ \alpha p_1 + \beta q_1 &= (\beta, \alpha, w_{12}a_{02} - w_{02}a_{12}, w_{12}w_{03} - a_{12}w_{03} - w_{02}w_{13} + a_{02}w_{13}) \in \pi_0. \end{aligned}$$

Substituindo em (2.3) as relações encontradas  $w_{23} = w_{02}w_{13} - w_{03}w_{12}$  e  $a_{23} = a_{02}a_{13} - a_{03}a_{12}$ , obtemos

$$\begin{aligned} w_{02}w_{13} - w_{03}w_{12} - w_{13}a_{02} + w_{12}a_{03} + a_{12}w_{03} - w_{02}a_{13} + a_{02}a_{13} - a_{12}a_{03} &= 0 \\ \Downarrow \\ w_{12}a_{03} - a_{12}a_{03} - w_{02}a_{13} + a_{02}a_{13} &= w_{12}a_{03} - a_{12}w_{03} - w_{02}w_{13} + a_{02}w_{13}. \end{aligned}$$

Assim  $\alpha p + \beta q = \alpha p_1 + \beta q_1 \in \pi_0 \cap U$ . Mas, neste caso, temos um vetor não nulo em  $\pi_0 \cap U$  se e somente se  $\alpha \neq 0$  ou  $\beta \neq 0$ .

Assuma que  $w_{12} = a_{12}$  e  $w_{02} = a_{02}$ , sejam  $\gamma = a_{13} - w_{13}$  e  $\delta = a_{03} - w_{03}$ . Observe que

$$\gamma p + \delta q = (\delta, \gamma, a_{02}a_{13} - w_{13}a_{02} - a_{12}a_{03} + w_{03}a_{12}, w_{03}a_{13} - a_{03}w_{13}) = \gamma p_1 + \delta q_1$$

Finalmente note que se  $A \neq P_0$  algum dos números  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  é não nulo. Assim  $A \in \omega(\Omega_0)$

Portanto  $\mathbb{T}_{P_0}\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q} \subseteq \omega(\Omega_0)$ . □

## 2.1 Subespaços Lineares da Grassmanniana de Retas

A partir deste ponto usaremos a seguinte notação:

- $\Omega_P$  é o conjunto das retas de  $\mathbb{P}^3$  que passam pelo ponto  $P$ , chamado de *estrela*.
- $\Omega(\Pi)$  é o conjunto das retas de  $\mathbb{P}^3$  contidas no plano  $\Pi$ , chamado de *plano regrado*.
- $\Omega_P(\Pi) = \Omega_P \cap \Omega(\Pi)$  é o conjunto das retas contidas no plano  $\Pi$  que passam pelo ponto  $P$ , chamado de *feixe (plano) de retas* de  $\mathbb{P}^3$ .

Vimos anteriormente que  $\mathcal{Q} = Z(F) \subset \mathbb{P}^5$  é a hipersuperfície quádrlica que se identifica com  $G(2, \mathbb{C}^4)$  através do Mergulho de Plücker, ainda compreendemos que o subconjunto  $\Omega_p(\Pi)$  em  $\mathbb{P}^3$  se identifica com  $\mathcal{L}_{\pi_0, \pi} \subset G(2, \mathbb{C}^4)$ , onde  $\Pi = \mathbb{P}(\pi_0 + \pi)$  e  $p = [v]$  com  $v \in \pi \cap \pi_0$ , e por sua vez este se identifica com uma reta na quádrlica  $\mathcal{Q}$  de  $\mathbb{P}^5$  através do Mergulho de Plücker.

Nesta secção faremos uma caracterização dos subespaços lineares da Grassmanniana de Retas, para maiores informações consulte [8].

Sendo  $\mathcal{Q}$  uma hipersuperfície quádrlica não singular de  $\mathbb{P}^5$ ,  $\mathcal{Q}$  pode conter subespaços lineares de dimensão menor que 3, retas e planos por exemplo, conforme a Proposição 2.1.2. A seguinte proposição descreve como são as retas contidas em  $\mathcal{Q}$ .

**Proposição 2.1.1** *Seja  $\omega : G(2, \mathbb{C}^4) \rightarrow \mathbb{P}^5$  o Mergulho de Plücker em (2.1) e  $l$  uma reta em  $\mathbb{P}^5$  contida em  $\mathcal{Q}$ . Então para quaisquer dois pontos distintos  $P$  e  $P_0$  em  $l$ , tais que  $P = \omega(\pi)$  e  $P_0 = \omega(\pi_0)$  é verificado que  $\dim \pi \cap \pi_0 = 1$  e  $l = \omega(\mathcal{L}_{\pi_0, \pi})$ .*

### Demonstração:

Sejam  $P_0$  e  $P$  dois pontos distintos em  $l$  tais que  $P_0 = \omega(\pi_0)$  e  $P = \omega(\pi)$ . Agora consideremos  $V_0 = (a_0, \dots, a_5)$  e  $V = (b_0, \dots, b_5)$  vetores não nulos em  $\mathbb{C}^6$  tais que  $P_0 = [V_0]$  e  $P = [V]$ . Note que a condição de  $l \subset \mathcal{Q}$  é equivalente a  $[sV_0 + tV] \in \mathcal{Q}$  para todo  $[s : t] \in \mathbb{P}^1$ , visto que estes são exatamente os pontos da reta  $l$ , isto é

$$st(a_0b_5 - a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 - a_4b_1 + a_5b_0) = 0, \forall [s : t] \in \mathbb{P}^1,$$

---

## 2.1. SUBESPAÇOS LINEARES DA GRASSMANNIANA DE RETAS

o que implica em  $a_0b_5 - a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 - a_4b_1 + a_5b_0 = 0$ . Mas isto é o mesmo que  $P \in \mathbb{T}_{P_0}\mathcal{Q}$ . Logo  $P = \omega(\pi) \in \mathbb{T}_{P_0}\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}$  e pela Proposição 2.0.8 temos que  $\pi \in \Omega_0$ . Portanto  $\dim \pi_0 \cap \pi = 1$ . Por fim pelo Lema 2.0.7 concluímos que  $\omega(\mathcal{L}_{\pi_0, \pi})$  é uma reta em  $\mathcal{Q}$  passando pelos pontos  $\omega(\pi_0)$  e  $\omega(\pi)$ , e pela unicidade da reta passando por dois pontos distintos temos  $l = \omega(\mathcal{L}_{\pi_0, \pi})$ . □

Consideremos agora os subespaços lineares de dimensão dois de  $\mathcal{Q}$ , ou seja, os planos em  $\mathcal{Q}$ . Para tal lembremos que dados três pontos  $P = [v]$ ,  $P_1 = [v_1]$  e  $P_2 = [v_2]$  não colineares em  $\mathbb{P}^n$  existe um único plano  $\Pi \subseteq \mathbb{P}^n$  passando pelos pontos  $P$ ,  $P_1$  e  $P_2$ . De fato,  $\Pi = \left\{ [av + bv_1 + cv_2] \in \mathbb{P}^n \mid [a : b : c] \in \mathbb{P}^2 \right\}$ . Denotaremos por  $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$  o plano em  $\mathbb{P}^n$  passando pelos três pontos não colineares  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  em  $\mathbb{P}^n$ .

**Proposição 2.1.0.7** *Seja  $\omega : G(2, \mathbb{C}^4) \rightarrow \mathbb{P}^5$  o Mergulho de Plücker em (2.1). Verifique-se que*

1. Se  $\Pi = \mathbb{P}([u, u_1, u_2])$  um plano em  $\mathbb{P}^3$  e

$$\mathcal{L}_{\Pi} = \left\{ \pi \in G(2, \mathbb{C}^4) \mid \mathbb{P}(\pi) \subset \Pi \right\},$$

então  $\omega(\mathcal{L}_{\Pi}) = \langle P_0, P_1, P_2 \rangle$  onde  $P_i = \omega(\pi_i)$  com  $i \in \{0, 1, 2\}$ , e  $\pi_0 = [u_1, u_2]$ ,  $\pi_1 = [u, u_1]$  e  $\pi_2 = [u, u_2]$ .

2. Se  $p = [u] \in \mathbb{P}^3$  e

$$\mathcal{L}_p = \left\{ \pi \in G(2, \mathbb{C}^4) \mid p \subset \pi \right\},$$

então  $\omega(\mathcal{L}_p) = \langle P_0, P_1, P_2 \rangle$  onde  $P_i = \omega(\pi_i)$ ,  $\pi_i = [u, v_i]$  com  $i \in \{0, 1, 2\}$  e  $\{u, v_0, v_1, v_2\}$  é uma base de  $\mathbb{C}^4$  contendo  $u$ .

3. Se  $\Lambda$  é um plano em  $\mathbb{P}^5$  contido em  $\mathcal{Q}$ , então  $\Lambda = \omega(\mathcal{L}_p)$  para algum ponto  $p \in \mathbb{P}^3$  ou  $\Lambda = \omega(\mathcal{L}_{\Pi})$  para algum plano  $\Pi \subset \mathbb{P}^3$ .
4. Sejam  $p \in \mathbb{P}^3$  e  $\Pi$  um plano em  $\mathbb{P}^3$ . Então  $\Omega_p$  e  $\Omega(\Pi)$  podem ser identificados com  $\mathcal{L}_p$  e  $\mathcal{L}_{\Pi}$ , respectivamente. Assim se correspondem com planos em  $\mathbb{P}^5$  contidos em  $\mathcal{Q}$ .

**Demonstração:** Provemos o item 1.

Consideremos o plano  $\Pi = \mathbb{P}([u, u_1, u_2])$  em  $\mathbb{P}^3$ ,  $\pi_0 = [u_1, u_2]$ ,  $\pi_1 = [u, u_1]$  e  $\pi_2 = [u, u_2]$ . Assim temos os pontos  $P_i = \omega(\pi_i) \in \mathcal{Q}$ , para  $i \in \{0, 1, 2\}$ . Note que  $P_0 \neq P_1$  e eles determinam a reta  $\omega(\mathcal{L}_{\pi_0, \pi_1})$  conforme Proposição 2.1.1.

Segue do Lema 2.0.7 que: se  $P_2 \in \omega(\mathcal{L}_{\pi_0, \pi_1})$ , então  $\pi_2 \in \mathcal{L}_{\pi_0, \pi_1}$ , assim existe  $[s : t] \in \mathbb{P}^1$  tal que  $[u, u_2] = \pi_2 = [u_1, su + tu_2]$ , logo  $u_1 \in [u, u_2]$  o que é absurdo, já que  $\{u, u_1, u_2\}$  é linearmente independente. Portanto  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  são pontos não colineares e podemos considerar o plano  $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$  em  $\mathbb{P}^5$ .

Por outro lado note que

$$\mathcal{L}_\Pi = \left\{ \pi \in G(2, \mathbb{C}^4) \mid \mathbb{P}(\pi) \subset \Pi \right\} = \left\{ [v, w] \in G(2, \mathbb{C}^4) \mid v, w \in [u, u_1, u_2] \right\}.$$

Seja  $\pi = [v, w] \in \mathcal{L}_\Pi$  então através de alguns cálculos verificamos que

$$\omega(\pi) = [(a_1b_2 - a_2b_1)V_0 + (a_0b_1 - a_1b_0)V_1 + (a_0b_2 - a_2b_0)V_2]$$

se  $P_i = [V_i]$  com  $i \in \{0, 1, 2\}$  e  $v = a_0u + a_1u_1 + a_2u_2$ ,  $w = b_0u + b_1u_1 + b_2u_2$ .

Afirmção: Para todo ponto  $[a : b : c] \in \mathbb{P}^2$  existem  $[a_0 : a_1 : a_2]$ ,  $[b_0 : b_1 : b_2] \in \mathbb{P}^2$  tais que  $[a : b : c] = [(a_1b_2 - a_2b_1) : (a_0b_1 - a_1b_0) : (a_0b_2 - a_2b_0)]$ . Basta considerar os determinantes parciais da matriz cujas linhas são os pontos dados.

Assim  $\omega(\mathcal{L}_\Pi) = \langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ .

Seguindo com a demonstração, provemos o item 2. Primeiramente note que

$$\mathcal{L}_p = \left\{ \pi \in G(2, \mathbb{C}^4) \mid p = [u] \subset \pi \right\} = \left\{ [u, v] \in G(2, \mathbb{C}^4) \mid v \in \mathbb{C}^4 \setminus [u] \right\}.$$

Seja  $\alpha = \{u, v_0, v_1, v_2\}$  uma base de  $\mathbb{C}^4$  contendo  $u$  e sejam  $\pi_i = [u, v_i]$  e  $P_i = \omega(\pi_i)$  para  $i \in \{0, 1, 2\}$ . Assim como no caso anterior os pontos  $P_0, P_1, P_2$  são três pontos não colineares em  $\mathbb{P}^5$ , logo determinam o plano  $\langle P_0, P_1, P_2 \rangle$  em  $\mathbb{P}^5$ . Se  $\pi \in \mathcal{L}_p$  então  $\pi = [u, c_0v_0 + c_1v_1 + c_2v_2]$  para algum  $[c_0 : c_1 : c_2] \in \mathbb{P}^2$ . Neste caso podemos verificar que  $\omega(\pi) = [c_0V_0 + c_1V_1 + c_2V_2]$  se  $P_i = [V_i]$  para  $i \in \{0, 1, 2\}$ . Portanto  $\omega(\mathcal{L}_p) = \langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ .

Para o item 3, considere  $\Lambda$  um plano em  $\mathbb{P}^5$  contido em  $\mathcal{Q}$ . Se nós assumimos que  $\Lambda = \langle P_0, P_1, P_2 \rangle$  onde  $P_i = \omega(\pi_i)$  para  $i \in \{0, 1, 2\}$ . Uma vez que  $P_0$  e  $P_i$  determinam as retas  $\omega(\mathcal{L}_{\pi_0, \pi_i})$  contidas no plano  $\Lambda$  conforme Lema 2.0.7. Nós concluímos que  $\dim \pi_0 \cap \pi_i = 1$  para  $i = 1, 2$ . Sendo assim temos duas possibilidades para a dimensão de  $\pi_0 \cap \pi_1 \cap \pi_2$ , a saber, um ou zero.

Caso 1:  $\pi_0 \cap \pi_1 \cap \pi_2 = [u]$  sendo  $u$  um vetor não nulo de  $\mathbb{C}^4$ .

Neste caso vamos assumir que  $\pi_i = [u, v_i]$  para  $i \in \{0, 1, 2\}$ . Nestas condições os pontos  $P_0, P_1$ , e  $P_2$  são não colineares, o que garante que  $P_2$  não pertence a reta  $\omega(\mathcal{L}_{\pi_0, \pi_1})$ , assim  $\pi_2 = [u, v_2] \not\subset \pi_0 + \pi_1 = [u, v_0, v_1]$ . Portanto  $\{u, v_0, v_1, v_2\}$  é uma base para  $\mathbb{C}^4$  e pelo item 2, garantimos que  $\omega(\mathcal{L}_{[u]}) = \Lambda$ .

Caso 2:  $\dim \pi_0 \cap \pi_1 \cap \pi_2 = 0$ .

Sabemos pelo Lema 2.0.7 que cada par de pontos  $P_i, P_j$  com  $0 \leq i < j \leq 2$  determina uma reta  $\omega(\mathcal{L}_{\pi_i, \pi_j})$  e  $\pi_1 \cap \pi_2 = [u]$ ,  $\pi_0 \cap \pi_i = [u_i]$  para vetores não nulos  $u, u_i \in \mathbb{C}^4$ ,  $i = 1, 2$ . Pela condição de  $\dim \pi_0 \cap \pi_1 \cap \pi_2 = 0$  temos que  $u_1$  e  $u_2$  são vetores linearmente independentes, logo uma base para  $\pi_0$ . Portanto, pelo item 1, podemos concluir neste caso que  $\omega(\mathcal{L}_{[u, u_1, u_2]}) = \Lambda$ .

Por fim o item 4 é verificado pela relação existente entre  $\Omega_p$  e  $\mathcal{L}_p$ ,  $\omega(\Pi)$  e  $\mathcal{L}_\Pi$  através da identificação de  $G(2, \mathbb{C}^4)$  com retas em  $\mathbb{P}^3$ .

□

Com a seguinte proposição concluiremos que  $\mathcal{Q}$  não contém subespaços lineares de dimensão 3 do  $\mathbb{P}^5$ .

**Proposição 2.1.2** *Seja  $Z(G)$  uma quádrlica não singular de  $\mathbb{P}^n$ . Se  $r \geq 1$  é tal que  $Z(G)$  contém subespaços  $r$ -lineares de  $\mathbb{P}^n$ , então  $2r < n$ .*

**Demonstração:** Seja  $\Lambda$  um subespaço  $r$ -linear de  $\mathbb{P}^n$ . Então podemos concluir pelo Teorema 1.2.4 que existem  $n - r$  formas lineares linearmente independentes  $L_1, \dots, L_{n-r} \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$  tais que  $\Lambda = Z(L_1, \dots, L_{n-r})$ . Agora, se  $\Lambda = Z(L_1, \dots, L_{n-r}) \subset Z(G)$ , então aplicando o Corolário 1.2.2 podemos concluir que  $G = L_1 M_1 + \dots + L_{n-r} M_{n-r}$  com  $M_1, \dots, M_{n-r}$  formas lineares em  $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ . Seguindo note que

$$\frac{\partial G}{\partial X_i} = \sum_{j=1}^{n-r} \left[ \frac{\partial L_j}{\partial X_i} \cdot M_j + L_j \cdot \frac{\partial M_j}{\partial X_i} \right]$$

para  $0 \leq i \leq n$ . Assim  $\Pi = Z(L_1, \dots, L_{n-r}, M_1, \dots, M_{n-r}) \subset \text{Sing}(Z(G))$ . Logo  $\Pi = \emptyset$ . Por outro lado acontece que sendo  $s$  o número de formas L.I. em  $\{L_1, \dots, L_{n-r}, M_1, \dots, M_{n-r}\}$  temos  $n - r \leq s \leq 2n - 2r$ . Suponha que

$$\begin{aligned} 2r \geq n &\Rightarrow n \geq 2n - 2r \geq s \\ &\Rightarrow n - s \geq 0 \\ &\Rightarrow \dim \Pi \geq 0 \\ &\Rightarrow \Pi \neq \emptyset \\ &\qquad \qquad \qquad \rightarrow | \leftarrow . \end{aligned}$$

Portanto  $2r < n$ . □

A última demonstração também pode ser feita usando álgebra linear da seguinte forma.

**Demonstração 2:** Seja  $\Lambda = \mathbb{P}(W)$  um subespaço  $r$ -linear de  $\mathbb{P}^n$  tal que  $\{w_0, \dots, w_r\}$  é uma base para  $W$ . A menos de uma mudança de coordenadas linear podemos assumir que  $G = X_0^2 + \dots + X_n^2$ . Então  $G$  induz uma forma bilinear  $B : \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$B(u, v) = u_0 v_0 + \dots + u_n v_n \text{ onde } u = (u_0, \dots, u_n) \text{ e } v = (v_0, \dots, v_n).$$

Agora, sendo  $W \leq \mathbb{C}^{n+1}$  podemos associar o espaço ortogonal

$$W^\perp = \left\{ v \in \mathbb{C}^{n+1} \mid B(u, v) = 0 \forall u \in W \right\}.$$

Note que  $W^\perp = \ker(T_0) \cap \dots \cap \ker(T_r)$ , onde  $T_i$  é o funcional linear de  $\mathbb{C}^{n+1}$  dado por  $T_i(v) = B(w_i, v)$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Sendo estes funcionais linearmente independentes concluímos que  $\dim W^\perp = n + 1 - \dim W = n - r$ .

Por outro lado  $\Lambda \subset \mathcal{Q}$  se e somente se  $G(u) = B(u, u) = 0$  para todo  $u \in W$ . Então  $\Lambda \subset \mathcal{Q}$  se e somente se  $W \subset W^\perp$ . Consequentemente, se  $\Lambda \subset \mathcal{Q}$ , então  $\dim W \leq \dim W^\perp = n + 1 - \dim W$ . Portanto,  $2\dim W \leq n + 1$  o que implica em  $2r < n$ . □

# Capítulo 3

## O Problema das 4 retas de Schubert

Neste momento vamos nos concentrar na resolução do problema das quatro retas de Schubert.

A Geometria Enumerativa é parte da Geometria Algébrica que trata de problemas envolvendo famílias de objetos geométricos que satisfazem determinadas condições de tal forma que em alguns casos apenas um número finito satisfaçam à estas condições, preocupando-se com o cálculo deste número finito.

Em nosso caso específico tratamos do seguinte problema: Quantas retas no espaço projetivo intersectam quatro retas (distintas) dadas?

Notemos que a depender da posição destas retas em  $\mathbb{P}^3$  obtemos diferentes soluções para o problema, como o Teorema 3.0.3 a seguir já garante. De fato além de determinar quantas soluções existem, o que nos interessa é estudar a posição das retas em relação com as soluções encontradas. Para isto faremos uma análise de cada uma das possibilidades no que diz respeito a posição relativa das retas dadas.

O próximo teorema nos informa a quantidade de soluções que podem aparecer no problema das quatro retas de Schubert.

**Teorema 3.0.3** *Seja  $\pi_i \in G(2, \mathbb{C}^4)$  e  $\Omega_i = \{\pi \in G(2, \mathbb{C}^4) | \dim(\pi \cap \pi_i) \geq 1\}$  com  $1 \leq i \leq 4$ . Então*

$$\#(\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3 \cap \Omega_4) = \begin{cases} \infty, \\ 2, \\ 1. \end{cases}$$

**Demonstração:** De fato pela Proposição 2.0.8, temos que

$$\#(\bigcap_{i=1}^4 \Omega_i) = \#(\mathbb{T}_{P_1} \mathcal{Q} \cap \mathbb{T}_{P_2} \mathcal{Q} \cap \mathbb{T}_{P_3} \mathcal{Q} \cap \mathbb{T}_{P_4} \mathcal{Q} \cap \mathcal{Q})$$

com  $P_i = \omega(\pi_i)$  para  $1 \leq i \leq 4$ . Seja  $H_i = \mathbb{T}_{P_i} \mathcal{Q}$  e  $P_i = [v_i]$  para  $1 \leq i \leq 4$ . Assim por (1.2) temos que  $H_i = \mathbb{P}(\ker F'_{v_i})$ , mais precisamente  $H_i = Z(F_i)$ , onde

$$F_i = \sum_{0 \leq k < j \leq 3} \frac{\partial F}{\partial X_{k,j}}(v_i) X_{k,j} \in \mathbb{C}[X_{01}, X_{02}, X_{03}, X_{12}, X_{13}, X_{23}]$$

com  $1 \leq i \leq 4$ . Agora temos duas possibilidades:

Caso 1.  $\{F'_{v_i}\}_{i=1}^4$  é um conjunto de funcionais linearmente independentes de  $(\mathbb{C}^6)^*$ .

Neste caso, do Lema 1.2.3 segue que  $\dim \bigcap_{i=1}^4 \ker(F'_{v_i}) = 6 - 4 = 2$ . Já que a função associada a forma linear  $F_i$  é igual a  $F'_{v_i}$  para  $1 \leq i \leq 4$ , concluímos que

$$H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4 = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^4 \ker(F'_{v_i})) \text{ é uma reta em } \mathbb{P}^5.$$

Finalmente, seja  $l = H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$ , logo pela Proposição 1.2.0.4 temos  $l \subset \mathcal{Q}$  ou  $l \cap \mathcal{Q}$  consiste em 1 ou 2 pontos.

Caso 2.  $\{F'_{v_i}\}_{i=1}^4$  é um conjunto de funcionais linearmente dependentes de  $(\mathbb{C}^6)^*$ .

Novamente segue do Lema 1.2.3 que  $\dim \bigcap_{i=1}^4 \ker(F'_{v_i}) > 6 - 4 = 2$ . Neste caso concluímos que

$$H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4 = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^4 \ker(F'_{v_i})) \text{ é um } k\text{-plano em } \mathbb{P}^5 \text{ com } k \geq 2.$$

Logo pelo Corolário 1.2.5 concluímos que  $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4 \cap \mathcal{Q}$  consiste de infinitos pontos. □

## 3.1 Posição Relativa das 4 retas X Soluções

Sejam  $l_1, l_2, l_3$  e  $l_4$  quatro retas distintas em  $\mathbb{P}^3$ .

Introduziremos uma notação para representar o conjunto solução,  $\mathcal{S}$ , do problema das quatro retas no cálculo de Schubert, isto é

$$\mathcal{S} = \{l \subset \mathbb{P}^3 \mid l \cap l_i \neq \emptyset, \forall i = 1, 2, 3, 4\}.$$

A seguir listaremos as possibilidades para a posição das quatro retas e seu respectivo conjunto solução  $\mathcal{S}$ .

### 3.1.1 As 4 retas possuem um ponto em comum

Considere o ponto  $p$  na interseção das retas  $l_i$ , ou seja,

$$p \in \bigcap_{i=1}^4 l_i.$$

Neste caso ainda temos duas opções a considerar, a saber: a) as quatro retas são coplanares; b) as quatro retas não são coplanares.

### 3.1. POSIÇÃO RELATIVA DAS 4 RETAS X SOLUÇÕES

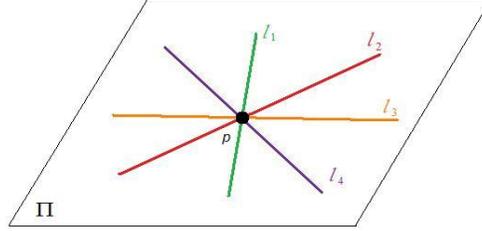


Figura 3.1: Retas contidas no plano  $\Pi$  passando pelo ponto  $p$ .

a)  $l_1, l_2, l_3$  e  $l_4$  estão contidas no plano  $\Pi$ , conforme figura 3.1.

Primeiramente observemos que se  $l \in \Omega_p$ , então  $l \in \mathcal{S}$ . Suponha que  $l \in \mathcal{S} - \Omega_p$ , então  $l$  intersecta  $l_1$  e  $l_2$  em dois pontos diferentes, o que implica em  $l \subset \Pi$ . Portanto  $\mathcal{S} = \Omega_p \cup \Omega(\Pi)$  que se identifica com a união de dois planos em  $\mathcal{Q}$  pela Proposição 2.1.0.7 e cuja interseção corresponde à reta  $\Omega_p(\Pi)$ .

b)  $l_1, l_2, l_3$  e  $l_4$  não são coplanares.

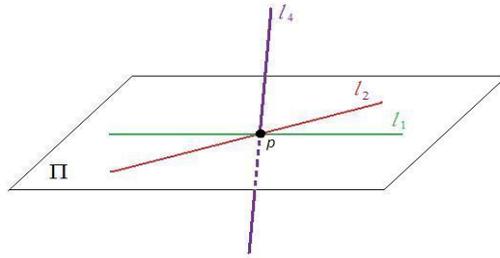


Figura 3.2: Retas não coplanares passando pelo ponto  $p$ .

Seja  $\Pi$  o plano que contém as retas  $l_1$  e  $l_2$ . Assuma que  $l_4$  não está contida no plano  $\Pi$ .

Note que as retas passando pelo ponto  $p$  são soluções, ou seja,  $\Omega_p \subseteq \mathcal{S}$ . Agora suponha que  $l \in \mathcal{S}$  é tal que  $p$  não pertence a  $l$ . Assim  $l$  intersecta  $l_1$  e  $l_2$  em dois pontos distintos, consequentemente  $l \subset \Pi$ . Mas  $l \cap l_4 \subset \Pi \cap l_4 = \{p\}$ , logo  $p \in l$ , o que é absurdo. Portanto  $\mathcal{S} \subseteq \Omega_p$ , o que implica em  $\mathcal{S} = \Omega_p$  e se identifica com um plano em  $\mathcal{Q}$  pela Proposição 2.1.0.7.

### 3.1.2 As 4 retas não são concorrentes e pelo menos um par entre elas é coplanar

Os casos que analisaremos a seguir tem como base o estudo dos planos que contêm uma determinada configuração de retas.

- a) As 4 retas estão contidas num plano  $\Pi$ .

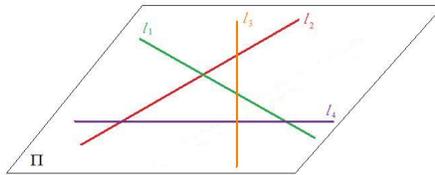


Figura 3.3: Retas contidas no plano  $\Pi$  sem ponto em comum.

Neste caso sendo  $\Pi$  um plano no espaço projetivo  $\mathbb{P}^3$  já provamos que todas as retas contidas em  $\Pi$  se intersectam, ou seja  $\Omega(\Pi) \subseteq \mathcal{S}$ . Por outro lado tomando  $l \in \mathcal{S}$  temos que  $l$  intersecta ao menos duas das quatro retas  $l_i$ , com  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , em pontos distintos, caso contrário estas teriam um ponto em comum. Logo  $l \subset \Pi$ . Assim  $\mathcal{S} \subseteq \Omega(\Pi)$ . Portanto  $\mathcal{S} = \Omega(\Pi)$  que se identifica com um plano em  $\mathcal{Q}$  pela Proposição 2.1.0.7.

- b) Exatamente 3 das quatro retas são coplanares.

Assumindo que  $l_1, l_2$  e  $l_3$  estão contidas no plano  $\Pi$  e  $\Pi \cap l_4 = \{q\}$ . Ainda temos aqui duas possibilidades que analisaremos a seguir:

- b.1)  $l_1 \cap l_2 \cap l_3 = \{p\}$ .

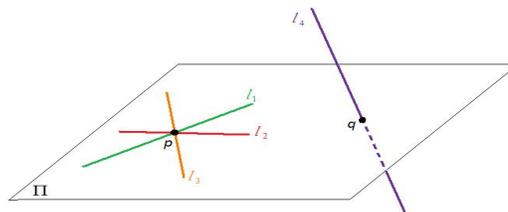


Figura 3.4: As três retas possuem um ponto em comum  $p \neq q$

### 3.1. POSIÇÃO RELATIVA DAS 4 RETAS X SOLUÇÕES

Primeiramente note que  $p \neq q$ , pois as 4 retas não possuem ponto em comum. Sendo assim, considere  $l \in \mathcal{S}$  uma solução que intersecta as retas  $l_1$  e  $l_2$  em dois pontos distintos, então concluímos que  $l \subset \Pi$ , mas além disto  $l \cap l_4 = \{q\}$ , logo  $l \in \Omega_q(\Pi)$ . Caso  $l$  intersecte  $l_1$  e  $l_2$  no ponto  $p$ , nos é garantido que  $l \cap l_4 \neq \{p\}$ , já que  $p$  não é um ponto de  $l_4$ , podemos então concluir que  $l \subset \langle p, l_4 \rangle$ , e conseqüentemente  $l \in \Omega_p(\langle p, l_4 \rangle)$ . Portanto  $\mathcal{S} = \Omega_q(\Pi) \cup \Omega_p(\langle p, l_4 \rangle)$  e se identifica com duas retas projetivas com um ponto em comum, a saber a imagem da reta  $l_{p,q}$  pelo Mergulho de Plücker  $\omega$  conforme a Proposição 2.1.1.

b.2)  $l_1 \cap l_2 \cap l_3 = \emptyset$ .

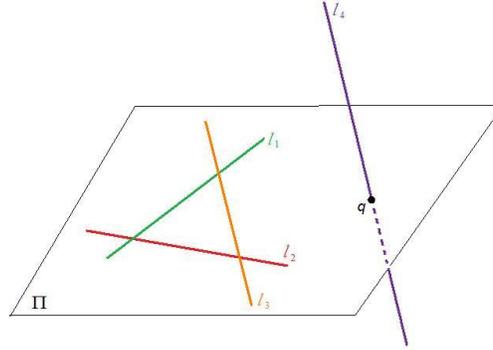


Figura 3.5: As três retas não possuem um ponto em comum

Aqui temos que toda reta em  $\Pi$  passando pelo ponto  $q$  é solução do nosso problema, ou seja,  $\Omega_q(\Pi) \subseteq \mathcal{S}$ . Por outro lado dada uma reta  $l$  em  $\mathcal{S}$ ,  $l$  intersecta ao menos duas das  $l_i$ , com  $i \in \{1, 2, 3\}$  em pontos distintos, logo  $l \subset \Pi$ , do mesmo modo  $l \cap l_4 = \{q\}$ , concluímos então que  $\mathcal{S} \subseteq \Omega_q(\Pi)$ . Portanto  $\mathcal{S} = \Omega_q(\Pi)$  e este se identifica com uma reta em  $\mathcal{Q}$  pela Proposição 2.1.1.

De agora em diante assumiremos que não existem três retas coplanares dentre as quatro retas  $l_1, l_2, l_3$  e  $l_4$ .

c) Existem dois subconjuntos disjuntos de  $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$  cada um dos quais contendo duas retas coplanares.

Assuma que  $l_1$  e  $l_2$  estão contidas no plano  $\Pi_1$ ,  $l_3$  e  $l_4$  estão contidas no plano  $\Pi_2$ . Sejam  $l_1 \cap l_2 = \{p\}$  e  $l_3 \cap l_4 = \{q\}$ . Note que  $\Pi_1 \neq \Pi_2$ .

Neste caso temos três possibilidades para a posição das retas, mais precisamente para a posição dos pontos  $p$  e  $q$  em relação à reta  $\Pi_1 \cap \Pi_2$ , conforme analisaremos a seguir:

c.1)  $p, q \in \Pi_1 \cap \Pi_2$ .

### 3.1. POSIÇÃO RELATIVA DAS 4 RETAS X SOLUÇÕES

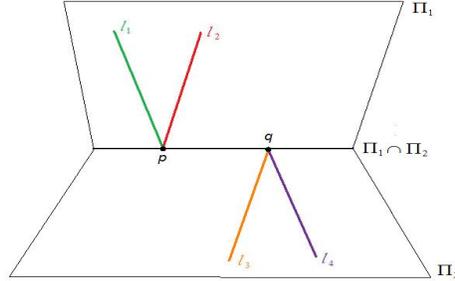


Figura 3.6: As interseções das retas estão contidas na interseção dos planos

Primeiramente note que  $p \neq q$ , pois as 4 retas não possuem ponto em comum. Mais ainda as retas em  $\Pi_1$  que passam pelo ponto  $q$  e as retas em  $\Pi_2$  que passam pelo ponto  $p$  são solução do problema, ou seja,  $\Omega_q(\Pi_1) \cup \Omega_p(\Pi_2) \subseteq \mathcal{S}$ . Por outro lado, seja  $l \in \mathcal{S} - \Omega_q(\Pi_1)$ . Note que se  $l \in \mathcal{S}$  e  $l \subset \Pi_1$ , então  $q \in l$ , logo  $l \in \Omega_q(\Pi_1)$ . Assim  $l \not\subset \Pi_1$ . Já que  $l$  intersecta  $l_1$  e  $l_2$ , então  $p \in l$ , e como  $l$  também intersecta  $l_3$  e  $l_4$  em dois pontos distintos (caso contrário  $l \subset \Pi_1$ ), então  $l \subset \Pi_2$ , portanto  $l \in \Omega_p(\Pi_2)$ . Analogamente se  $l$  não está em  $\Omega_p(\Pi_2)$ , provamos que  $l \in \Omega_q(\Pi_1)$ . Portanto  $\mathcal{S} = \Omega_q(\Pi_1) \cup \Omega_p(\Pi_2)$  que se identifica com a união de duas retas com um ponto de interseção em  $\mathcal{Q}$ , a saber a imagem da reta  $l_{p,q} = \Pi_1 \cap \Pi_2$  pela Proposição 2.1.1.

c.2)  $p \in \Pi_1 \cap \Pi_2$  e  $q$  não pertence a  $\Pi_1 \cap \Pi_2$ .

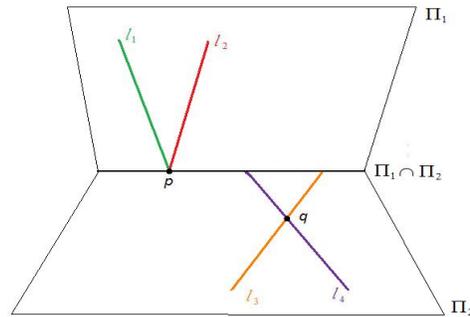


Figura 3.7: Uma das interseções das retas está na interseção dos planos a outra não

Nestas condições note que toda reta  $l$  contida em  $\Pi_2$  passando pelo ponto  $p$  é solução do nosso problema, ou seja,  $\Omega_p(\Pi_2) \subseteq \mathcal{S}$ . Por outro lado, tomando  $l \in \mathcal{S}$ , suponha que  $l \subset \Pi_1$ , o que implica que  $l$  intersecta  $l_3$  e  $l_4$  em pontos distintos, pois  $l \cap l_i \subsetneq \Pi_1 \cap l_i = p_i$  para  $i = 3, 4$  com  $p_3 \neq p_4$ . Portanto  $l$  é a reta de interseção entre os planos  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ ,

### 3.1. POSIÇÃO RELATIVA DAS 4 RETAS X SOLUÇÕES

assim  $l \in \Omega_p(\Pi_2)$ . Se  $l \not\subset \Pi_1$ , então  $l \cap l_1 \cap l_2 = \{p\}$ , pois caso contrário  $l \subset \Pi_1$ . Mas  $l$  deve intersectar  $l_3$  e  $l_4$ , assim temos duas possibilidades:  $l \cap l_3 \cap l_4 = \{q\}$ , logo  $l = l_{p,q} \subset \Pi_2$  ou  $l$  encontra  $l_3$  e  $l_4$  em pontos distintos, o que implica em que  $l \subset \Pi_2$ . Portanto  $\mathcal{S} = \Omega_p(\Pi_2)$  que se identifica com uma reta em  $\mathcal{Q}$  pela Proposição 2.1.1.

c.3)  $p$  e  $q$  não pertencem a  $\Pi_1 \cap \Pi_2$ .

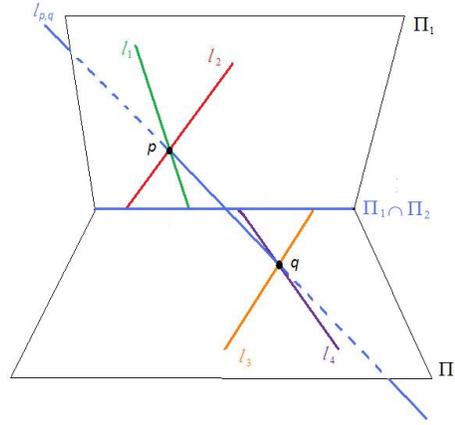


Figura 3.8: As interseções das retas não estão na interseção dos planos

Note que as retas  $\Pi_1 \cap \Pi_2$  e  $l_{p,q}$  são solução do nosso problema, ou seja,

$$\{\Pi_1 \cap \Pi_2, l_{p,q}\} \subseteq \mathcal{S}.$$

Por outro lado, seja  $l \in \mathcal{S}$ ,  $l \neq l_{p,q}$ . O que implica que  $l \subset \Pi_1$  ou  $l \subset \Pi_2$ . Suponhamos que  $l \subset \Pi_1$ , temos então que  $l \cap l_i \subset \Pi_1 \cap l_i = \{P_i\}$ , com  $i \in \{3, 4\}$ , lembrando que  $P_3 \neq P_4$ , assim  $l \subset \Pi_2$ , logo  $l = \Pi_1 \cap \Pi_2$ . Portanto  $\mathcal{S} = \{\Pi_1 \cap \Pi_2, l_{p,q}\}$  que se identifica com dois pontos em  $\mathcal{Q}$  pelo Mergulho de Plücker em (2.1).

d) Existe uma reta  $l_i$  entre  $l_1, l_2, l_3$  e  $l_4$  tal que  $l_i \cap l_j \neq \emptyset$  para ao menos dois índices  $j \in \{1, 2, 3, 4\} - \{i\}$ .

Assuma que  $l_1$  e  $l_2$  estão contidas no plano  $\Pi_1$ ,  $l_1$  e  $l_3$  estão contidas no plano  $\Pi_2$ . Sejam  $l_1 \cap l_2 = \{p\}$ ,  $l_1 \cap l_3 = \{q\}$  e  $\{r_i\} = \Pi_i \cap l_4$  para  $i = 1, 2$ . Note que  $\Pi_1 \neq \Pi_2$ .

Aqui dependendo da distribuição dos pontos  $p, q, r_1$  e  $r_2$  temos as seguintes possibilidades a serem analisadas:

d.1)  $p = q$

Primeiramente note que  $p$  não pertence a  $l_4$ , pois as retas não possuem ponto em comum. Sendo assim, toda reta no plano  $\langle p, l_4 \rangle$  passando pelo ponto  $p$  é solução do nosso problema, ou seja,  $\Omega_p(\langle p, l_4 \rangle) \subseteq \mathcal{S}$ . Por outro lado, para  $l \in \mathcal{S}$ , temos as seguintes duas possibilidades:

### 3.1. POSIÇÃO RELATIVA DAS 4 RETAS X SOLUÇÕES

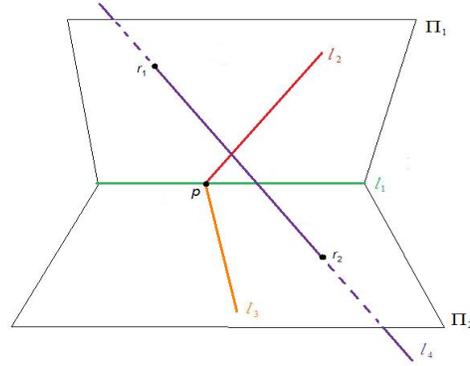
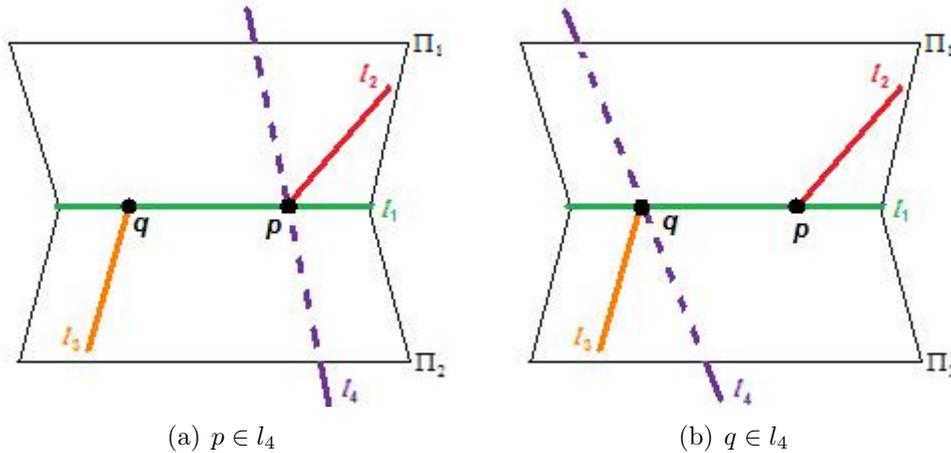


Figura 3.9: Os pontos  $p$  e  $q$  coincidem

- $p \in l$ . Já que  $l \cap l_4 = \{P_4\}$  com  $P_4 \neq p$ , temos  $l \subset \langle p, l_4 \rangle$ .
- $p \notin l$ , daí  $l$  intersecta  $l_1$ ,  $l_2$  e  $l_3$  em pontos distintos, o que implica em  $l \subset \Pi_1 \cap \Pi_2 = l_1$ , logo  $p \in l$ , o que é absurdo.

Logo  $l \in \Omega_p(\langle p, l_4 \rangle)$ . Portanto  $\mathcal{S} = \Omega_p(\langle p, l_4 \rangle)$  que se identifica com uma reta em  $\mathcal{Q}$  pela Proposição 2.1.1.

d.2)  $p \neq q$  e  $p \in l_4$  (ou  $p \neq q$  e  $q \in l_4$ ).



(a)  $p \in l_4$

(b)  $q \in l_4$

Figura 3.10: Os pontos  $p$  e  $q$  são distintos e um deles pertence a  $l_4$

Se  $p \neq q$  e  $p \in l_4$ , note que toda reta em  $\Pi_2 = \langle p, l_3 \rangle$  passando por  $p$  é solução do nosso problema, ou seja,  $\Omega_p(\Pi_2) \subseteq \mathcal{S}$ . Por outro lado, tome  $l \in \mathcal{S}$ , provemos que  $p \in l$ .

Suponhamos por absurdo que  $p \notin l$ . Então  $l$  intersecta  $l_1$  e  $l_2$  em pontos distintos, o que implica em  $l \subset \Pi_1$ . Por outro lado  $l_4 \cap l \subseteq l_4 \cap \Pi_1 = \{p\}$ , daí  $p \in l$ , absurdo. Já que  $p \notin l_3$ , temos  $l \cap l_3 \neq \{p\}$ . Assim  $l \subset \langle p, l_3 \rangle$ .

### 3.1. POSIÇÃO RELATIVA DAS 4 RETAS X SOLUÇÕES

Logo  $\mathcal{S} \subseteq \Omega_p(\Pi_2)$ . Portanto  $\mathcal{S} = \Omega_p(\Pi_2)$  e se identifica com uma reta em  $\mathcal{Q}$  pela Proposição 2.1.1.

Se considerarmos a outra possibilidade  $p \neq q$  e  $q \in l_4$ , obteremos de modo análogo  $\mathcal{S} = \Omega_q(\Pi_1)$  que se identifica com uma reta em  $\mathcal{Q}$  pela Proposição 2.1.1.

d.3)  $p \neq q$ ,  $r_1 = r_2$  com  $r_1 \in l_{p,q}$  e  $r_1$  é distinto de  $p$  e  $q$ .

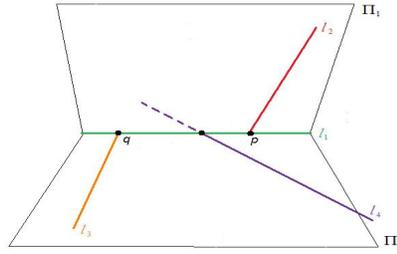


Figura 3.11: Os pontos  $r_1$  e  $r_2$  coincidem, são distintos de  $p$  e  $q$  com  $r_1 \in l_{p,q}$ .

Note que nestas condições  $l_1 \in \mathcal{S}$ . Seja  $l \in \mathcal{S}$ , suponha que  $p \notin l$ . Então  $l \subset \Pi_1$ . Assim  $l \cap l_3 \subset \Pi_1 \cap l_3 = \{q\}$  e  $l \cap l_4 \subset \Pi_1 \cap l_4 = \{r_1\}$ , daí  $l = l_{q,r_1} = l_{p,q}$ , o que é absurdo. Analogamente se  $q \notin l$  chegamos num absurdo. Logo  $p, q \in l$  e  $l = l_{p,q} = l_1$ . Portanto  $\mathcal{S} = \{l_1\}$  que se identifica com um ponto em  $\mathcal{Q}$  pelo Mergulho de Plücker (2.1).

d.4)  $p \neq q$  e  $r_1 \neq r_2$ .

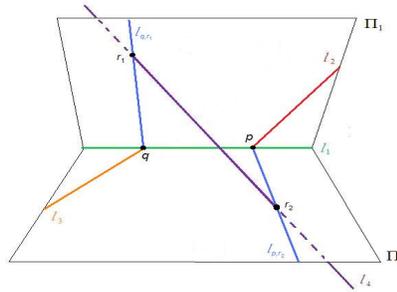


Figura 3.12: Os pontos  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $p$  e  $q$  são distintos.

Seja  $l \in \mathcal{S}$ . Podemos dividir em dois casos.

(i)  $p$  não pertence a  $l$ . Então  $l \cap l_1 \neq l \cap l_2$ , o que implica em  $l \subset \Pi_1$ . Logo  $l \cap l_3 \subset \Pi_1 \cap l_3 = \{q\}$  e  $l \cap l_4 \subset \Pi_1 \cap l_4 = \{r_1\}$ . Consequentemente,  $l = l_{q,r_1}$ .

(ii)  $p \in l$ . Note que  $l$  intersecta  $l_3$  num ponto  $P_3$  em  $\Pi_2$  diferente de  $p$ . Logo  $l \subset \Pi_2$ . Além disso  $l \cap l_4 \subset \Pi_2 \cap l_4 = \{r_2\}$ . Consequentemente,  $l = l_{p,r_2}$ .

### 3.1. POSIÇÃO RELATIVA DAS 4 RETAS X SOLUÇÕES

Portanto  $\mathcal{S} = \{l_{q,r_1}, l_{p,r_2}\}$  que se identifica com dois pontos em  $\mathcal{Q}$  pelo Mergulho de Plücker em (2.1).

e) Exatamente duas retas são coplanares.

Assuma que  $l_1$  e  $l_2$  estão contidas no plano  $\Pi$ ,  $l_1 \cap l_2 = \{p\}$ ,  $\Pi \cap l_i = \{p_i\}$  para  $i = 3, 4$ . Note que  $p_3 \neq p_4$ , do contrário  $l_3$  e  $l_4$  seriam coplanares. Seja  $C = \{p, p_3, p_4\}$ . Neste caso temos ainda três opções, conforme descrevemos a seguir:

e.1)  $p = p_3$  (ou  $p = p_4$ ).

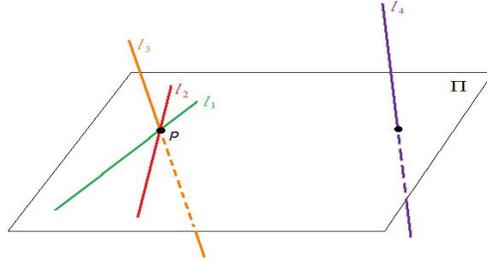


Figura 3.13: Três das retas são concorrentes.

Note que toda reta contida em  $\langle p, l_4 \rangle$  passando pelo ponto  $p$  é solução, ou seja,  $\Omega_p(\langle p, l_4 \rangle) \subseteq \mathcal{S}$ . Por outro lado, seja  $l \in \mathcal{S}$  com  $l \cap l_i = \{Q_i\}$ . Suponha que  $p$  não pertence a  $l$ , assim  $Q_1 \neq Q_2$ , o que implica em  $l \subset \Pi$ , logo  $Q_3 \in l \cap l_3 \subset \Pi \cap l_3 = \{p\}$ , o que é absurdo, logo  $p \in l$ . Já que  $l$  intersecta  $l_4$  no ponto  $Q_4 \neq p$ , temos  $l \subset \langle p, l_4 \rangle$ . Portanto  $\mathcal{S} = \Omega_p(\langle p, l_4 \rangle)$  que se identifica com uma reta em  $\mathcal{Q}$  pela Proposição 2.1.1.

Se  $p = p_4$ , procedendo de forma análoga, obteremos  $\mathcal{S} = \Omega_p(\langle p, l_3 \rangle)$ .

e.2)  $\#C = 3$  e  $p \in l_{p_3, p_4}$ .

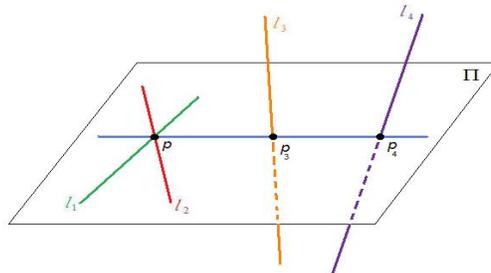


Figura 3.14: Os pontos  $p, p_3, p_4$  são distintos e colineares.

### 3.1. POSIÇÃO RELATIVA DAS 4 RETAS X SOLUÇÕES

Neste caso a reta  $l_{p_3,p_4} \in \mathcal{S}$ . Por outro lado, tome  $l \in \mathcal{S}$ , com  $Q_i \in l \cap l_i$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Se  $l \subset \Pi$ , então  $Q_j \in l \cap l_j \subset \Pi \cap l_j = \{p_j\}$ , com  $j = 3, 4$ . Logo  $l = l_{p_3,p_4}$ . Suponhamos agora que  $l \not\subset \Pi$ , assim  $p \in l$ , pois caso contrário  $Q_1 \neq Q_2$  e consequentemente  $l \subset \Pi$ . Desta forma os pontos  $p, p_3$  e  $Q_3$  são três pontos distintos e não colineares que geram um plano que denotaremos por  $\Pi_3$ , do mesmo modo os pontos  $p, p_4$  e  $Q_4$  geram um outro plano que denotaremos por  $\Pi_4$ , dos quais  $l$  é a intersecção. Mas  $l_{p,p_3} \subset \Pi_3$  e  $l_{p,p_4} \subset \Pi_4$ , sendo estas a mesma reta, temos  $l = l_{p_3,p_4} \subset \Pi$ , absurdo. Portanto  $\mathcal{S} = \{l_{p_3,p_4}\}$  que se identifica com um ponto em  $\mathcal{Q}$  pelo Mergulho de Plücker em (2.1).

e.3)  $\#C = 3$  e  $p$  não pertence a  $l_{p_3,p_4}$ .

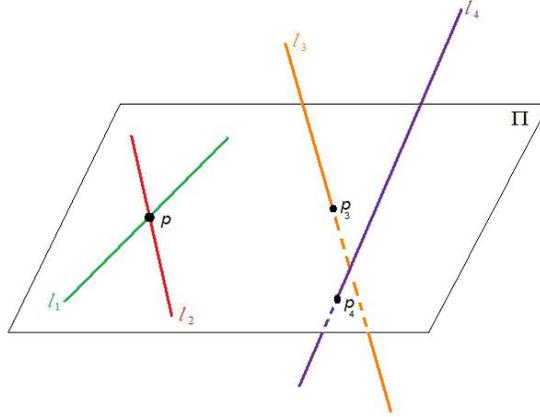


Figura 3.15: Os pontos  $p, p_3, p_4$  são distintos e não colineares.

Seja  $l \in \mathcal{S}$ , podemos considerar duas possibilidades.

(i)  $l \subset \Pi$ . Logo  $l \cap l_i \subset \Pi \cap l_i = \{p_i\}$ , que implica  $p_i \in l$ , para  $i = 3, 4$ . Portanto  $l = l_{p_3,p_4}$ .

(ii)  $l \not\subset \Pi$ . Agora tendo em mente que  $l \cap l_i \neq \emptyset$  para  $i = 1, 2$  e  $l \not\subset \Pi$  concluímos que  $p \in l$ . Por outro lado  $l \cap l_i = \{q_i\} \subset l_i \subset \langle p, l_i \rangle$  com  $i = 3, 4$ . Logo,  $l = \langle p, l_3 \rangle \cap \langle p, l_4 \rangle$ .

Portanto,  $\mathcal{S} = \{\langle p, l_3 \rangle \cap \langle p, l_4 \rangle, l_{p_3,p_4}\}$  e se identifica com dois pontos em  $\mathcal{Q}$  pelo Mergulho de Plücker em (2.1).

#### 3.1.3 As 4 retas são disjuntas duas a duas

Por fim temos a possibilidade de nenhum par de retas ser coplanar, ou equivalentemente, as quatro retas são disjuntas, duas a duas. Afim de determinar as soluções neste caso utilizaremos um corolário do Teorema 3.1.1 a seguir além da proposição subsequente.

**Teorema 3.1.1** *Notações como na subseção 1.2. Dados  $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}^n$  defina  $S_d(P_1, \dots, P_k) = \left\{ f \in S_d \mid f(P_i) = 0, \forall i = 1, \dots, k \right\}$ . Então  $S_d(P_1, \dots, P_k)$  é um subespaço vetorial de  $S_d$  e  $\dim S_d(P_1, \dots, P_k) \geq \dim S_d - k$ .*

**Demonstração:**

Denotemos por  $\underline{P} = (P_1, \dots, P_k)$ . Defina  $\varepsilon_{\underline{P}} : S_d \rightarrow \mathbb{C}^k$  por  $\varepsilon_{\underline{P}}(f) = (f(P_1), \dots, f(P_k))$ . Observe que  $\varepsilon_{\underline{P}}$  é uma transformação linear tal que  $\ker(\varepsilon_{\underline{P}}) = S_d(P_1, \dots, P_k)$ . Portanto,  $S_d(P_1, \dots, P_k)$  é um subespaço vetorial de  $S_d$ .

Por outro lado, observe que dado  $\underline{a} = [a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n$  existe  $i \in \{0, \dots, n\}$  tal que  $a_i \neq 0$ . Assim se escolhermos  $g = x_i^d$  verifica-se que  $g(\underline{a}) = a_i^d \neq 0$ , ou seja, dado um ponto em  $\mathbb{P}^n$  sempre podemos achar uma forma homogênea de grau  $d$  que não se anula neste ponto. Isto nos permite concluir que  $\varepsilon_{\underline{P}}$  não é a transformação linear nula. Daí

$$1 \leq \dim \text{Im}(\varepsilon_{\underline{P}}) \leq k. \quad (3.1)$$

Agora a partir do teorema do núcleo e da imagem podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \dim S_d &= \dim \ker(\varepsilon_{\underline{P}}) + \dim \text{Im}(\varepsilon_{\underline{P}}) \\ &= \dim S_d(P_1, \dots, P_k) + \dim \text{Im}(\varepsilon_{\underline{P}}). \end{aligned}$$

Assim, segue-se de (3.1) que:

$$\dim S_d - k \leq \dim S_d(P_1, \dots, P_k) \leq \dim S_d - 1.$$

□

**Corolário 3.1.2** *Sejam  $l_1, l_2$  e  $l_3$  retas em  $\mathbb{P}^3$  tal que  $l_i \cap l_j = \emptyset$  para  $1 \leq i < j \leq 3$ , então existe uma superfície quádrlica não singular  $Q$  em  $\mathbb{P}^3$  contendo  $l_1, l_2$  e  $l_3$ .*

**Demonstração:** De fato, tome os pontos  $P_{i1}, P_{i2}, P_{i3} \in l_i$  para cada  $i = 1, 2, 3$ .

Pelo Teorema 3.1.1 para  $d = 2$  e  $k = 9$  temos  $\dim S_2(P_{11}, \dots, P_{33}) \geq 1$ . Assim existe  $G \in S_2(P_{11}, \dots, P_{33})$ ,  $G \neq 0$ , tal que  $Q = Z(G)$  é uma quádrlica que contém os 9 pontos dados. Como cada reta  $l_i$  tem três pontos em comum com  $Q$ , pela Proposição 1.2.0.4,  $l_i \subset Q$  para  $i = 1, 2, 3$ .

Se  $Q$  fosse singular o Teorema 1 (página 63 em [10]) nos garante que  $Q$  se identificaria com um plano duplo (no qual todas as retas se intersectam), dois planos concorrentes (onde ao menos duas das três retas estariam no mesmo plano, logo se intersectariam) ou um cone (no qual todas as retas passam pelo vértice), assim as três retas  $l_1, l_2$  e  $l_3$  não seriam disjuntas. Portanto  $Q$  é uma quádrlica não singular que contém as retas  $l_1, l_2$  e  $l_3$ .

Para encontrar a equação da quádrlica em questão considere os monômios de grau 2:

### 3.1. POSIÇÃO RELATIVA DAS 4 RETAS X SOLUÇÕES

$$m_0 = X_0^2, m_1 = X_1^2, m_2 = X_2^2, m_3 = X_3^2, m_4 = X_0X_1,$$

$$m_5 = X_0X_2, m_6 = X_0X_3, m_7 = X_1X_2, m_8 = X_1X_3, m_9 = X_2X_3.$$

Escolha em cada reta três pontos distintos que denotaremos por  $P_1, P_2, P_3 \in l_1$ ,  $P_4, P_5, P_6 \in l_2$  e  $P_7, P_8, P_9 \in l_3$ . Defina o polinômio

$$G = \det \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \dots & m_8 & m_9 \\ m_0(P_1) & m_1(P_1) & m_2(P_1) & \dots & m_8(P_1) & m_9(P_1) \\ m_0(P_2) & m_1(P_2) & m_2(P_2) & \dots & m_8(P_2) & m_9(P_2) \\ m_0(P_3) & m_1(P_3) & m_2(P_3) & \dots & m_8(P_3) & m_9(P_3) \\ m_0(P_4) & m_1(P_4) & m_2(P_4) & \dots & m_8(P_4) & m_9(P_4) \\ m_0(P_5) & m_1(P_5) & m_2(P_5) & \dots & m_8(P_5) & m_9(P_5) \\ m_0(P_6) & m_1(P_6) & m_2(P_6) & \dots & m_8(P_6) & m_9(P_6) \\ m_0(P_7) & m_1(P_7) & m_2(P_7) & \dots & m_8(P_7) & m_9(P_7) \\ m_0(P_8) & m_1(P_8) & m_2(P_8) & \dots & m_8(P_8) & m_9(P_8) \\ m_0(P_9) & m_1(P_9) & m_2(P_9) & \dots & m_8(P_9) & m_9(P_9) \end{pmatrix}$$

Note que  $G(P_i) = 0, \forall i = 1, \dots, 9$ . Tal polinômio  $G$  assim definido determina a quádrlica que contém as retas  $l_1, l_2$  e  $l_3$ , mas devemos ainda garantir que  $G \neq 0$ .

#### Afirmção 3.1.3.1 $G \neq 0$

Observe que ao fazermos o desenvolvimento do determinante na definição de  $G$  usando a primeira linha obtemos

$$G = M_0m_0 - M_1m_1 + \dots + M_8m_8 - M_9m_9.$$

Assim a afirmação  $G \neq 0$  é equivalente a mostrar que  $M_i \neq 0$  para algum  $0 \leq i \leq 9$ . Por outro lado, cada  $M_i$  é uma expressão polinomial nas coordenadas dos pontos  $P_1, \dots, P_9$  e é suficiente verificar que  $M_i$  é não nulo (para algum  $0 \leq i \leq 9$ ) por uma mudança de coordenadas projetivas.

Para isto considere inicialmente a mudança de coordenadas projetivas  $\mathbb{T} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  tal que  $\mathbb{T}(P_1) = [1 : 0 : 0 : 0]$ ,  $\mathbb{T}(P_2) = [0 : 1 : 0 : 0]$ ,  $\mathbb{T}(P_4) = [0 : 0 : 1 : 0]$ ,  $\mathbb{T}(P_5) = [0 : 0 : 0 : 1]$ . Assim  $\mathbb{T}(l_1) = Z(X_2, X_3)$  e  $\mathbb{T}(l_2) = Z(X_0, X_1)$  e podemos assumir que  $\mathbb{T}(l_3) = [(1, 0, A, B), (0, 1, C, D)]$  com  $AD - BC \neq 0$  já que as retas são duas a duas disjuntas.

Logo podemos assumir que  $\mathbb{T}(P_7) = [1 : s : A + sC : B + sD]$ ,  $\mathbb{T}(P_8) = [t : 1 : tA + C : tB + D]$  para algum  $s, t \in \mathbb{C}$  e  $\mathbb{T}(P_9) = [u : v : uA + vC : uB + vD]$  para algum  $u, v \in \mathbb{C}$  tais que  $u \neq 0$  ou  $v \neq 0$ . De fato, por termos três pontos distintos em cada uma das retas disjuntas  $l_1, l_2$  e  $l_3$ , necessariamente deve-se verificar que:

$$1 - st \neq 0, v - us \neq 0 \text{ e } u - tv \neq 0.$$

### 3.1. POSIÇÃO RELATIVA DAS 4 RETAS X SOLUÇÕES

Seja  $\mathbb{T}_\bullet : \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3] \rightarrow \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$  o automorfismo definido por  $\mathbb{T}_\bullet(P(X_0, X_1, X_2, X_3)) = P(T^{-1}(X_0, X_1, X_2, X_3))$  onde  $T$  é o isomorfismo linear que define a mudança de coordenadas projetiva  $\mathbb{T}$ .

Após alguns cálculos verificamos que:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{T}_\bullet M_0 &= 0, \\
 \mathbb{T}_\bullet M_1 &= 0, \\
 \mathbb{T}_\bullet M_2 &= 0, \\
 \mathbb{T}_\bullet M_3 &= 0, \\
 \mathbb{T}_\bullet M_4 &= 0, \\
 \mathbb{T}_\bullet M_5 &= \alpha\beta B(BC - AD)(1 - st)[v^2t + u^2s - uv(1 + st)], \\
 \mathbb{T}_\bullet M_6 &= \alpha\beta A(BC - AD)(1 - st)[v^2t + u^2s - uv(1 + st)], \\
 \mathbb{T}_\bullet M_7 &= \alpha\beta D(BC - AD)(1 - st)[v^2t + u^2s - uv(1 + st)], \\
 \mathbb{T}_\bullet M_8 &= \alpha\beta C(BC - AD)(1 - st)[v^2t + u^2s - uv(1 + st)], \\
 \mathbb{T}_\bullet M_9 &= 0.
 \end{aligned}$$

Considere a forma homogênea de grau 2  $f(x, y) = ty^2 + sx^2 - (1 + st)xy$ . Observe que  $[t : 1]$  e  $[1 : s]$  são duas raízes distintas de  $f$ . Além disso  $[u : v]$  não pode ser raiz de  $f$ . Do contrário,

$$(u, v) = \lambda(t, 1) \text{ ou } (u, v) = \delta(1, s) \Rightarrow u = tv \text{ ou } v = su, \text{ o que é absurdo.}$$

Assim,  $\mathbb{T}_\bullet M_i \neq 0$ , para  $i = 5, 6, 7, 8$ , o que implica em  $M_i \neq 0$ . Portanto,  $G \neq 0$ . □

**Proposição 3.1.3** *Seja  $Q$  uma superfície quádrlica não singular em  $\mathbb{P}^3$ . Então existem duas famílias disjuntas de retas  $\mathcal{L} = \{L_p\}_{p \in \mathbb{P}^1}$  e  $\mathcal{M} = \{M_p\}_{p \in \mathbb{P}^1}$  em  $Q$  parametrizadas por  $\mathbb{P}^1$  (isto é, estão em bijeção com  $\mathbb{P}^1$ ) tal que*

1.  $L_p \cap L_q = \emptyset$  e  $M_p \cap M_q = \emptyset$  para todas  $L_p, L_q \in \mathcal{L}$ ,  $M_p, M_q \in \mathcal{M}$  e  $p \neq q \in \mathbb{P}^1$ .
2.  $L_p \cap M_q \neq \emptyset$  para todo  $L_p \in \mathcal{L}$ ,  $M_q \in \mathcal{M}$  e  $p, q \in \mathbb{P}^1$ .
3. Se  $l$  é uma reta contida em  $Q$ , então  $l \in \mathcal{L}$  ou  $l \in \mathcal{M}$ .
4. Dado  $x \in Q$ , então existem únicas retas  $L_{p(x)} \in \mathcal{L}$  e  $M_{q(x)} \in \mathcal{M}$  tais que  $\{x\} = L_{p(x)} \cap M_{q(x)}$ .

A demonstração da Proposição 3.1.3 pode ser encontrada em [10] páginas 66 a 68.

Agora, seja  $l \in \mathcal{S}$  e  $Q$  a superfície quádrlica não singular em  $\mathbb{P}^3$  contendo  $l_1, l_2$  e  $l_3$  (pelo Corolário 3.1.2). Uma vez que  $l_1, l_2$  e  $l_3$  são disjuntas (duas a duas), pertencem a uma mesma família de retas em  $Q$ . Então vamos supor que  $l_1, l_2$  e  $l_3$  pertencem a família  $\mathcal{L}$ .

### 3.1. POSIÇÃO RELATIVA DAS 4 RETAS X SOLUÇÕES

Em primeiro lugar note que qualquer solução  $l$  pertence a família  $\mathcal{M}$  de retas em  $Q$ .

De fato,  $l$  intersecta  $l_1, l_2$  e  $l_3$  em três pontos distintos pertencentes a  $Q$ , assim pela Proposição 1.2.0.4  $l \subset Q$ . Pela Proposição 3.1.3 item 3.  $l \in \mathcal{L}$  ou  $l \in \mathcal{M}$ . Como retas distintas de uma mesma família não se intersectam concluímos que  $l \in \mathcal{M}$ .

Para determinarmos as soluções neste caso temos duas possibilidades a considerar:

a)  $l_4 \not\subset Q$ . Neste caso segue da Proposição 1.2.0.4 que  $l_4 \cap Q$  é um conjunto não vazio e  $l_4 \cap Q = \{x, y\}$  (com  $x$  e  $y$  não necessariamente distintos). Sejam  $M_x$  e  $M_y$  as únicas retas da família  $\mathcal{M}$  passando por  $x$  e  $y$ , respectivamente (conforme 4. da Proposição 3.1.3). Na verdade  $M_x$  e  $M_y$  são soluções, pois se  $p \in \{x, y\}$  então  $M_p \cap l_i$  é não vazio para  $i = 1, 2, 3$  pois  $l_i \in \mathcal{L}$  e  $M_p \cap l_4 = \{p\}$ . Por outro lado se  $l \in \mathcal{M}$  é solução, então  $l \cap l_4 \subset Q \cap l_4 = \{x, y\}$  o que implica em  $x \in l$  ou  $y \in l$ . Portanto segue do item 4. da Proposição 3.1.3 que  $l = M_x$  ou  $l = M_y$ .

b)  $l_4 \subset Q$ . Neste caso  $l_1, l_2, l_3$  e  $l_4$  pertencem à família  $\mathcal{L}$  (já que  $l_1, \dots, l_4$  são duas a duas disjuntas). Então toda reta da família  $\mathcal{M}$  é solução e este conjunto se corresponde com uma cônica em  $\mathbb{P}^5$ , conforme será mostrado na Proposição 3.1.4.

**Observação 3.1.3.2** *Para aplicar o Corolário 3.1.2 precisamos apenas que  $l_i \cap l_j = \emptyset$  para  $1 \leq i < j \leq 3$ . Assim*

(1) *no caso  $l_4 \not\subset Q$ , temos as seguintes possibilidades:*

- $l_4 \cap l_1 \neq \emptyset$  e  $l_4 \cap l_j = \emptyset$ ,  $j = 2, 3$ .

*Recaímos no caso e.2) uma única solução ou e.3) exatamente duas soluções.*

- $l_4 \cap l_i \neq \emptyset$  para  $i = 1, 2$  e  $l_4 \cap l_3 = \emptyset$ .

*Neste caso recaímos no caso d.4), logo obtemos duas soluções.*

(2) *no caso  $l_4 \subseteq Q$ , se  $l_4 \cap l_i \neq \emptyset$  para algum  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , necessariamente  $l_4 \in \mathcal{M}$  e é a única solução, logo recaímos no caso d.3)*

Mostraremos a seguir que a imagem pelo Mergulho de Plücker das famílias  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}$  são cônicas situadas em planos disjuntos e complementares ortogonais. Por outro lado, as soluções obtidas nos casos em que pelo menos um par de retas é coplanar são: soluções finitas (uma ou duas retas), subespaços lineares (retas ou planos), união de duas retas ou união de dois planos. Enquanto que o caso b) acima é o único caso onde as soluções não são finitas, nem união de subespaços lineares.

**Proposição 3.1.4** *As famílias  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}$  se identificam com cônicas, situadas em planos disjuntos e complementares ortogonais, na quádrlica de Plücker.*

**Demonstração:** De fato, vale salientar que as famílias  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}$  podem ser definidas da seguinte forma (conforme [10] na página 66):

$$\mathcal{L} = \left\{ \mathbb{P}(U_a) \subset \mathbb{P}^3 \mid U_a \in G(2, \mathbb{C}^4) \right\}$$

### 3.1. POSIÇÃO RELATIVA DAS 4 RETAS X SOLUÇÕES

$$\mathcal{M} = \left\{ \mathbb{P}(V_a) \subset \mathbb{P}^3 \mid V_a \in G(2, \mathbb{C}^4) \right\}$$

onde  $U_a = [u_1(a), u_2(a)]$  e  $V_a = [v_1(a), v_2(a)]$ , com  $u_1(a) = (i\alpha, \alpha, i\beta, \beta)$ ,  $u_2(a) = (i\beta, -\beta, -i\alpha, \alpha)$ ,  $v_1(a) = (i\alpha, \alpha, -i\beta, \beta)$  e  $v_2(a) = (i\beta, -\beta, i\alpha, \alpha)$ , se  $a = [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$ .

Provemos para a família  $\mathcal{M}$ .

Tome  $l = \mathbb{P}(V_a) \in \mathcal{M}$ , com  $a = [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1$ . Assim  $l$  se identifica com  $\omega(V_a)$ , onde

$$\omega(V_a) = [-2i\alpha\beta : -\alpha^2 - \beta^2 : i(\alpha^2 - \beta^2) : i(\alpha^2 - \beta^2) : \alpha^2 + \beta^2 : -2i\alpha\beta].$$

Note que as formas lineares  $L_1 = X_{01} - X_{23}$ ,  $L_2 = X_{02} + X_{13}$  e  $L_3 = X_{03} - X_{12}$  são tais que  $\omega(V_a) \in Z(L_1, L_2, L_3)$ , além disso, como já provamos  $\omega(V_a) \in Z(F)$ .

Logo  $\omega(\mathcal{M}) \subseteq Z(L_1, L_2, L_3, F)$ .

Por outro lado, tome  $P = [P_{01} : \dots : P_{23}] \in Z(L_1, L_2, L_3, F)$ , assim suas coordenadas satisfazem:

$$\begin{cases} P_{01} &= P_{23}; \\ P_{02} &= -P_{13}; \\ P_{03} &= P_{12}; \\ F(P) &= 0. \end{cases}$$

Para garantir a outra inclusão, ou seja  $Z(L_1, L_2, L_3, F) \subseteq \omega(\mathcal{M})$ , basta encontrar  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  que satisfaçam as relações:

$$\begin{cases} -2i\alpha\beta &= P_{01}; & (I) \\ -\alpha^2 - \beta^2 &= P_{02}; & (II) \\ i(\alpha^2 - \beta^2) &= P_{03}. & (III) \end{cases} \quad (3.2)$$

Para isto analisamos as possibilidades  $P_{01} = 0$  ou  $P_{01} \neq 0$ .

$$\boxed{P_{01} = 0}$$

Sabemos que  $P_{02}^2 + P_{03}^2 = 0$ . Assim (i)  $P_{02} - iP_{03} = 0$  ou (ii)  $P_{02} + iP_{03} = 0$ .

(i) se  $P_{02} = iP_{03}$ , então o sistema (3.2) é equivalente a:

$$\begin{cases} -2i\alpha\beta &= 0; \\ -\alpha^2 - \beta^2 &= iP_{03}; \\ i(\alpha^2 - \beta^2) &= P_{03}. \end{cases}$$

E verifica-se facilmente que  $\beta = 0$  e  $\alpha = \sqrt{-iP_{03}}$  é solução deste sistema.

(ii) se  $P_{02} = -iP_{03}$ , concluí-se de maneira análoga que  $\alpha = 0$  e  $\beta = \sqrt{iP_{03}}$  é solução do sistema (3.2).

### 3.1. POSIÇÃO RELATIVA DAS 4 RETAS X SOLUÇÕES

$$\boxed{P_{01} \neq 0}$$

Neste caso  $\alpha \neq 0$  e  $\beta \neq 0$ .

De (3.2) (I) segue-se que  $\alpha = \frac{iP_{01}}{2\beta}$  e conseqüentemente  $\alpha^2 = \frac{-P_{01}^2}{4\beta^2}$ . Substituindo esta última igualdade em (3.2) (II) e (III), respectivamente obtemos

$$4\beta^4 + 4P_{02}\beta^2 - P_{01}^2 = 0 \quad (3.3)$$

$$4\beta^4 - 4iP_{03}\beta^2 + P_{01}^2 = 0 \quad (3.4)$$

Observe que se existir uma solução comum  $\beta \in \mathbb{C}$  das equações (3.3) e (3.4), então

$$P_{02}\beta^2 - \frac{P_{01}^2}{4} = -iP_{03}\beta^2 + \frac{P_{01}^2}{4}.$$

Tendo em consideração que  $P_{02} + iP_{03} \neq 0$ , concluímos que

$$\beta^2 = \frac{P_{01}^2}{2(P_{02} + iP_{03})} = -\frac{1}{2}(P_{02} - iP_{03}).$$

Deixamos ao leitor a verificação de que  $\beta^2$  acima é solução comum de (3.3) e (3.4).

Logo  $\omega(\mathcal{M}) = Z(L_1, L_2, L_3, F) = Z(L_1, L_2, L_3) \cap Z(F)$ , ou seja,  $\omega(\mathcal{M})$  é a interseção de um plano com uma quádrlica em  $\mathbb{P}^5$ , que corresponde a uma cônica em  $\mathbb{P}^5$ .

Para a família  $\mathcal{L}$  podemos provar a mesma relação considerando  $F_1 = X_{01} + X_{23}$ ,  $F_2 = X_{02} - X_{13}$  e  $F_3 = X_{03} + X_{12}$ .

Observemos finalmente que os planos  $\Pi_1 = Z(L_1, L_2, L_3)$  e  $\Pi_2 = Z(F_1, F_2, F_3)$  são disjuntos, visto que se  $A = [a_{01} : a_{02} : a_{03} : a_{12} : a_{13} : a_{23}] \in \Pi_1 \cap \Pi_2$ , então

$$\begin{cases} a_{01} &= \pm a_{23}; \\ a_{02} &= \pm a_{13}; \\ a_{03} &= \pm a_{12}. \end{cases}$$

O que é absurdo, pois aí  $a_{ij} = 0, \forall 0 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3$ .

Observemos finalmente que os planos são o complemento ortogonal um do outro, para tal basta tomar dois pontos  $u \in W_1$  e  $v \in W_2$ , onde  $\Pi_1 = \mathbb{P}(W_1)$  e  $\Pi_2 = \mathbb{P}(W_2)$ , ao fazer o produto interno usual de  $\mathbb{C}^6$  entre  $u$  e  $v$  concluímos que  $u \perp v$ . Assim  $W_1 = W_2^\perp$  como queríamos demonstrar.

Portanto as imagens das famílias  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}$  pelo mergulho de Plücker são cônicas contidas em planos complementares ortogonais. □

Usando as informações obtidas nesta seção no que se refere a posição relativa das 4 retas no espaço projetivo  $\mathbb{P}^3$  e seu conjunto de soluções  $\mathcal{S}$  montamos a seguinte tabela:

### 3.1. POSIÇÃO RELATIVA DAS 4 RETAS X SOLUÇÕES

Posição relativa das 4 retas	Conjunto solução	Identificação em $\mathcal{Q}$
3.1.1 a)	$\Omega_p \cup \Omega_{\Pi}$	União de dois planos
3.1.1 b)	$\Omega_p$	um plano
3.1.2 a)	$\Omega(\Pi)$	um plano
3.1.2 b.1)	$\Omega_q(\Pi) \cup \Omega_p(\langle p, l_4 \rangle)$	duas retas concorrentes
3.1.2 b.2)	$\Omega_q(\Pi)$	uma reta
3.1.2 c.1)	$\Omega_q(\Pi_1) \cup \Omega_p(\Pi_2)$	duas retas concorrentes
3.1.2 c.2)	$\Omega_p(\Pi_2)$	uma reta
3.1.2 c.3)	$\{\Pi_1 \cap \Pi_2, l_{p,q}\}$	dois pontos
3.1.2 d.1)	$\Omega_p(\langle p, l_4 \rangle)$	uma reta
3.1.2 d.2)	$\Omega_p(\Pi_2)$	uma reta
3.1.2 d.3)	$\{l_1\}$	um ponto
3.1.2 d.4)	$\{l_{q,r_1}, l_{p,r_2}\}$	dois pontos
3.1.2 e.1)	$\Omega_p(\langle p, l_4 \rangle)$	uma reta
3.1.2 e.2)	$\{l_{p_3,p_4}\}$	um ponto
3.1.2 e.3)	$\{\langle p, l_3 \rangle \cap \langle p, l_4 \rangle, l_{p_3,p_4}\}$	dois pontos
3.1.3 a)	$\{M_x, M_y\}$	dois pontos
3.1.3 b)	$\mathcal{M}$ (ou $\mathcal{L}$ )	uma cônica

Outra questão que pode ser abordada é quanto à posição relativa dos pontos  $P_i = \omega(l_i)$  em  $\mathcal{Q}$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  ou ainda a interseção de  $\Lambda = \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$  com a quádrlica de Plücker  $\mathcal{Q}$ . O seguinte Teorema caracteriza cada uma das possibilidades.

**Teorema 3.1.5** *Considere o conjunto  $\mathcal{S}$  como anteriormente. Seja  $P_i$  (para  $i = 1, 2, 3, 4$ ) a imagem de  $l_i$  em  $\mathcal{Q}$  pelo mergulho de Plücker  $\omega$  em (2.1). Seja  $\Lambda = \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$  o menor subespaço linear que contém os quatro pontos em  $\mathbb{P}^5$ . Então verifica-se que*

1.  $\#\mathcal{S} = 2$  se e somente se  $\Lambda \cap \mathcal{Q}$  é uma quádrlica não singular no 3-plano  $\Lambda$ .
2.  $\#\mathcal{S} = 1$  se e somente se  $\Lambda \cap \mathcal{Q}$  é um cone no 3-plano  $\Lambda$ .
3. Se  $\#\mathcal{S} = \infty$  então
  - (a)  $\mathcal{S}$  é uma reta se e somente se  $\Lambda \cap \mathcal{Q}$  é a união de dois planos no 3-plano  $\Lambda$ .
  - (b)  $\mathcal{S}$  é uma cônica se e somente se  $\Lambda \cap \mathcal{Q}$  é uma cônica não singular no plano  $\Lambda$ .
  - (c)  $\mathcal{S}$  é uma cônica reduzida e redutível se e somente se  $\Lambda \cap \mathcal{Q}$  é uma cônica reduzida e redutível no plano  $\Lambda$ .
  - (d)  $\mathcal{S}$  é um plano se e somente se  $\Lambda = \Lambda \cap \mathcal{Q}$  é um plano.
  - (e)  $\mathcal{S}$  é a união de dois planos se e somente se  $\Lambda = \Lambda \cap \mathcal{Q}$  é uma reta.

### 3.1. POSIÇÃO RELATIVA DAS 4 RETAS X SOLUÇÕES

---

Sua demonstração é feita com uma argumentação análoga a que usamos na determinação do conjunto de soluções  $\mathcal{S}$ , com ênfase na caracterização das retas e dos planos na quádrlica de Plücker  $\mathcal{Q}$ , além do fato que toda superfície quádrlica em  $\mathbb{P}^3$  corresponde a: um plano duplo, união de planos, cone ou uma quádrlica não singular.

# Apêndice A

## Soluções Reais e a Conjectura de Shapiro-Shapiro

No que tange ao problema das quatro retas do cálculo de Schubert várias questões poderiam ser levantadas, uma delas seria quanto às soluções reais para o mesmo, ou seja, quando as soluções encontradas (pontos na quádrlica de Plücker) têm coordenadas reais? Determinar ou ainda decidir sobre a existência de soluções reais para um dado sistema de equações é um problema muito difícil, mesmo porque existem poucos resultados gerais que tratem sobre a existência e/ou cálculo de soluções gerais, como por exemplo o teorema dos zeros de Hilbert para corpos algebricamente fechados.

Por outra parte quando se estudam problemas em cinemática, estatística e biologia computacional, para citar algumas áreas, a determinação de soluções reais é imprescindível.

Neste sentido e com foco em problemas geométricos que podem ter todas suas soluções reais, em 1995 os irmãos Boris Shapiro e Michael Shapiro formularam uma conjectura, denominada conjectura de Shapiro-Shapiro, que afirma: se fixarmos subespaços lineares em uma certa posição especial, então todos os subespaços lineares que são incidentes aos já fixados simultaneamente serão reais, conforme [13].

No que se refere ao problema das 4 retas de Schubert, a conjectura afirma que: Se as 4 retas distintas no espaço projetivo tridimensional são tangentes a uma curva racional

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^3 \\ [s : t] &\mapsto [s^3 : s^2t : st^2 : t^3] \end{aligned} \tag{A.1}$$

em pontos com coordenadas reais, então todas as soluções encontradas serão reais.

Mas antes de tratarmos desta conjectura, consideremos o problema presente nas Olimpíadas Universitárias de Matemática, solucionando-o usando todo processo demonstrado anteriormente nesta dissertação.

**Problema** (XXX Olimpíada Brasileira de Matemática - Nível Universitário - Problema 2). *Considere as retas de equações paramétricas*

$$\begin{aligned}
l_1 : (x, y, z) &= (0, 0, 1)t, \\
l_2 : (x, y, z) &= (1, 2, 0) + (1, 0, 0)t, \\
l_3 : (x, y, z) &= (1, 1, 1) + (0, 1, 0)t, \\
l_4 : (x, y, z) &= (1, 0, 0) + (1, 1, 1)t.
\end{aligned}$$

*Quantas retas intersectam simultaneamente as 4 retas acima?*

### Solução

Cada reta  $l_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  em  $\mathbb{R}^3$  determina uma reta  $L_i$  em  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4) = \mathbb{P}^3$  usando o aberto

$$U_3 = \left\{ [a_0 : a_1 : a_2 : 1] \in \mathbb{P}^3 \mid (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

de  $\mathbb{P}^3$  da seguinte forma  $l_i \equiv L_i \cap U_3$ , onde

$$\begin{aligned}
l_1 &\mapsto L_1 = \mathbb{P}([(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)]), \\
l_2 &\mapsto L_2 = \mathbb{P}([(1, 2, 0, 1), (1, 0, 0, 0)]), \\
l_3 &\mapsto L_3 = \mathbb{P}([(1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0)]), \\
l_4 &\mapsto L_4 = \mathbb{P}([(1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0)]).
\end{aligned}$$

Aplicando o raciocínio demonstrado anteriormente calculemos a imagem por  $\omega$  de cada  $L_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

$$\begin{aligned}
\omega(L_1) &= [0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1], \\
\omega(L_2) &= [-2 : 0 : -1 : 0 : 0 : 0], \\
\omega(L_3) &= [1 : 0 : 0 : -1 : -1 : 0], \\
\omega(L_4) &= [1 : 1 : -1 : 0 : -1 : -1].
\end{aligned}$$

Encontremos agora a equação do hiperplano tangente  $H_i = Z(h_i)$  à hipersuperfície  $\mathcal{Q}$  em cada ponto  $\omega(L_i)$ . Lembrando que se  $P = [a_{01} : a_{02} : a_{03} : a_{12} : a_{13} : a_{23}] \in \mathcal{Q}$ , então a equação do hiperplano tangente a  $\mathcal{Q}$  no ponto  $P$  será

$$a_{23}X_{01} - a_{13}X_{02} + a_{12}X_{03} + a_{03}X_{12} - a_{02}X_{13} + a_{01}X_{23}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
h_1 &= X_{01}, \\
h_2 &= X_{12} + 2X_{23}, \\
h_3 &= X_{02} - X_{03} + X_{23}, \\
h_4 &= -X_{01} + X_{02} - X_{12} - X_{13} + X_{23}.
\end{aligned}$$

Procuramos encontrar agora a intersecção dos subespaços  $W_i = \ker(h_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  usando álgebra linear solucionamos o sistema com equações  $h_i = 0$ ,  $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$  e encontramos a seguinte intersecção

---


$$\bigcap_{i=1}^4 W_i = [(0, 1, 1, 0, 1, 0), (0, -3, -2, -2, 0, 1)].$$

A seguir, encontremos a intersecção de  $\mathbb{P}\left(\bigcap W_i\right)$  com  $\mathcal{Q}$ . Tome  $P \in \mathbb{P}\left(\bigcap W_i\right)$ , então existem  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tais que

$$P = [0 : \alpha - 3\beta : \alpha - 2\beta : -2\beta : \alpha : \beta].$$

Considerando que  $P \in \mathcal{Q}$ , substituímos suas coordenadas em  $F$  e igualamos a 0, assim

$$\alpha^2 - 5\alpha\beta + 4\beta^2 = 0.$$

Tirando  $\alpha$  em função de  $\beta$  obtemos  $\alpha = \beta$  ou  $\alpha = 4\beta$ .

Substituindo estes valores temos os pontos de intersecção da reta  $\mathbb{P}\left(\bigcap W_i\right)$  com a quádrlica  $\mathcal{Q}$ , a saber  $P = [0 : -2 : -1 : -2 : 1 : 1]$  para  $\alpha = \beta$  e  $P = [0 : 1 : 2 : -2 : 4 : 1]$  para  $\alpha = 4\beta$ . A imagem inversa de cada um destes pontos é uma reta em  $\mathbb{P}^3$  solução do problema das 4 retas.

Com uma rápida verificação pode-se notar que tais retas são determinadas pela projetivização dos planos:  $\Pi_1 = [(2, 2, 0, 1), (1, -1, -1, 0)]$  e  $\Pi_2 = [(-1, 2, 0, 1), (-2, -4, -1, 0)]$ .

Assim  $M_1 = \mathbb{P}(\Pi_1)$  e  $M_2 = \mathbb{P}(\Pi_2)$  são as retas em  $\mathbb{P}^3$  que intersectam as 4 retas dadas. Para encontrar a solução em  $\mathbb{R}^3$  basta intersectar tais retas com o aberto  $U_3$  definido anteriormente. Portanto  $m_1 \equiv M_1 \cap U_3$  e  $m_2 \equiv M_2 \cap U_3$  são as retas solução do problema inicial, suas equações são:

$$\begin{aligned} m_1(t) &= (2, 2, 0) + t(1, -1, -1), \\ m_2(t) &= (-1, 2, 0) + t(-2, -4, -1). \end{aligned}$$

□

Agora tratemos da demonstração da conjectura de Shapiro-Shapiro para o caso específico do problema das 4 retas do Cálculo de Schubert.

Tomemos as retas  $l_1, l_2, l_3$  e  $l_4$  tangentes a curva  $\mathcal{C} = \gamma(\mathbb{P}^1)$  nos pontos  $P_1 = [1 : a : a^2 : a^3]$ ,  $P_2 = [1 : b : b^2 : b^3]$ ,  $P_3 = [1 : c : c^2 : c^3]$  e  $P_4 = [1 : d : d^2 : d^3]$ , respectivamente.

Assim

$$\begin{aligned} l_1 &= \mathbb{P}\left([(1, a, a^2, a^3), (0, 1, 2a, 3a^2)]\right), \\ l_2 &= \mathbb{P}\left([(1, b, b^2, b^3), (0, 1, 2b, 3b^2)]\right), \\ l_3 &= \mathbb{P}\left([(1, c, c^2, c^3), (0, 1, 2c, 3c^2)]\right), \\ l_4 &= \mathbb{P}\left([(1, d, d^2, d^3), (0, 1, 2d, 3d^2)]\right). \end{aligned}$$

---

Logo a imagem destas retas via o mergulho de Plücker é:

$$\omega(l_1) = [1 : 2a : 3a^2 : a^2 : 2a^3 : a^4],$$

$$\omega(l_2) = [1 : 2b : 3b^2 : b^2 : 2b^3 : b^4],$$

$$\omega(l_3) = [1 : 2c : 3c^2 : c^2 : 2c^3 : c^4],$$

$$\omega(l_4) = [1 : 2d : 3d^2 : d^2 : 2d^3 : d^4].$$

Denotemos por  $h_i$  a equação do hiperplano tangente a  $\mathcal{Q}$  no ponto  $\omega(l_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , assim

$$h_1 = a^4 X_{01} - 2a^3 X_{02} + a^2 X_{03} + 3a^2 X_{12} - 2a X_{13} + X_{23},$$

$$h_2 = b^4 X_{01} - 2b^3 X_{02} + b^2 X_{03} + 3b^2 X_{12} - 2b X_{13} + X_{23},$$

$$h_3 = c^4 X_{01} - 2c^3 X_{02} + c^2 X_{03} + 3c^2 X_{12} - 2c X_{13} + X_{23},$$

$$h_4 = d^4 X_{01} - 2d^3 X_{02} + d^2 X_{03} + 3d^2 X_{12} - 2d X_{13} + X_{23}.$$

A seguir devemos determinar a intersecção de  $\mathcal{Q}$  com  $Z(h_1, h_2, h_3, h_4)$ .

Para isto usaremos do método de escalonamento da matriz do sistema de equações, a saber

$$\begin{bmatrix} a^4 & -2a^3 & a^2 & 3a^2 & -2a & 1 \\ b^4 & -2b^3 & b^2 & 3b^2 & -2b & 1 \\ c^4 & -2c^3 & c^2 & 3c^2 & -2c & 1 \\ d^4 & -2d^3 & d^2 & 3d^2 & -2d & 1 \end{bmatrix}$$

Depois do processo de escalonamento obtemos a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} -abcd & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -cd(a+b) - ab(c+d) & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -d(a+b+c) - ab - ac - bc & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ -a - b - c - d & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim os pontos da reta  $Z(h_1, \dots, h_4)$  são da forma  $P = [v_{01} : \frac{1}{2}(a+b+c+d)v_{01} : -3v_{12} + [d(a+b+c) + ab + ac + bc]v_{01} : v_{12} : \frac{1}{2}[cd(a+b) + ab(c+d)]v_{01} : abcdv_{01}]$ .

Considerando  $P \in Z(h_1, \dots, h_4) \cap \mathcal{Q}$  temos que  $F(P) = 0$ , substituindo e arrumando a equação obtemos uma equação polinomial de grau 2, a saber

$$-3v_{12}^2 + (ad+bd+cd+ab+ac+bc)v_{01}v_{12} + \left[abcd - \frac{1}{4}(a+b+c+d)(cda+cdb+abc+abd)\right]v_{01}^2$$

Da qual obtemos o discriminante

---

$$\Delta = \frac{1}{2} \left[ (a-b)^2(c-d)^2 + (a-c)^2(b-d)^2 + (a-d)^2(b-d)^2 \right] \geq 0$$

Logo toda raíz da equação  $F(P) = 0$  para  $P$  na reta  $Z(h_1, \dots, h_4)$  é real.

Assim está demonstrada a Conjectura de Shapiro-Shapiro para o caso específico do problema das 4 retas do Cálculo de Schubert.

# Referências Bibliográficas

- [1] Avritzer, D. Introdução à Geometria Enumerativa via Teoria de Deformações. 2ª Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Salvador, 2004.
- [2] Borges, G. D. Teoria de Interseção em Grassmanniana e algumas aplicações ao cálculo de Schubert. Dissertação de Mestrado UFPB, 2000.
- [3] Fernandes, R. L. e Ricou, M. Introdução à Álgebra. Instituto Supervisor Técnico, Lisboa, Portugal, 2003.
- [4] Fulton, W. Intersection theory. 2ed. Springer, Berlin, 1998. (A Series of Modern Surveys in Mathematics)
- [5] Hefez, A. Uma Introdução à História da Geometria Projetiva. Revista Matemática Universitária, nº 3, 1986.
- [6] Kleiman, S. L. e Lakson, D. Schubert Calculus. The American Mathematical Monthly, v.79, n.10, p. 1061-1082, 1972.
- [7] Kunz, E. Introduction to commutative algebra and algebraic geometry. Birkhäuser, 1987.
- [8] Machado, P.A.F. A Geometria da Grassmanniana de Retas de  $\mathbb{P}^3$ . Dissertação de Mestrado UFMG, 1989.
- [9] Mendes, R. Álgebra Linear. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.
- [10] Rojas, J. e Mendoza, R. Álgebra Linear e o problema das quatro retas do cálculo de Schubert. Revista Matemática Universitária, nº 45, 55 - 69, 2009.
- [11] Rojas, J. e Mendonza, R. General position for the 4-lines problem in Schubert calculus. Artigo em preparação.
- [12] Sottile, F. Real Schubert Calculus: Polynomial Systems and a Conjecture of Shapiro and Shapiro.
- [13] Sottile, F. Real Solutions to Equations From Geometry. Department of Mathematics Texas A&M University, 2010.

*REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS*

---

- [14] Vainsencher, I. Introdução às Curvas Algébricas Planas. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro, IMPA, 2005.
- [15] Vakil, R. Schubert Induction, Ann. of Math. (2) 164, n.2, 2006.