

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Controle Hierárquico da Equação da Onda

Claudemir Rodrigues Santiago

2011

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Controle Hierárquico da Equação da Onda

por

Claudemir Rodrigues Santiago

sob orientação do

Prof. Dr. Milton de Lacerda Oliveira

Julho de 2011

João Pessoa-PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Controle Hierárquico da Equação da Onda

por

Claudemir Rodrigues Santiago

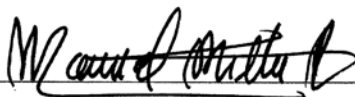
Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Milton de Lacerda Oliveira - UFPB (Orientador)



Prof. Dr. Manoel Milla Miranda - UFRJ



Prof. Dr. Alberto Mercado Saucedo - USM-Chile

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna – UFPB (Suplente)

*Aos meus pais, João e Terezinha, e a minha amada
esposa, Márcia, que souberam vencer a distância e
a saudade durante a realização dessa conquista.*

Agradecimentos

A DEUS por ter me dado saúde, inteligência e força para superar todas as dificuldades enfrentadas ao longo dessa conquista.

Ao meu orientador Prof. Dr. MILTON DE LACERDA OLIVEIRA, que desde o ingresso no Mestrado, ajudou-me transmitindo seus conhecimentos; e agora na fase de realização deste trabalho prestou sua dedicação, apoio e paciência, para que o mesmo, assim, se tornasse realidade.

Ao Prof. Dr. FÁGNER DIAS ARARUNA, não só pelos conhecimentos transmitidos, mas por ter se prontificado a me ajudar num momento difícil do Mestrado, e pelas agradáveis e divertidas aulas de tópicos que vivenciei.

Ao Prof. Dr. MANOEL MILLA MIRANDA, por ter se prontificado a participar da banca examinadora, e por contribuir para o engrandecimento não só deste trabalho, mas de minha vida acadêmica.

Ao Prof. Dr. ALBERTO MERCADO, pela honrosa participação como membro da banca examinadora desta dissertação, bem como suas valiosas contribuições à mesma.

Aos professores da PÓS-GRADUAÇÃO, em especial àqueles que de forma direta contribuíram para minha formação: ANDRADE, VENEGAS, NELSON NERY, EVERALDO e CLETO. Também não poderia me esquecer de destacar os professores DANIEL e FERNANDO, que me receberam tão bem no momento de ingresso, e os professores da UFS que me incentivaram e contribuíram para realização deste sonho: FÁBIO, DANILO, KALASAS, JORGE FERREIRA, ÉDER, ALAN, NATANAEL E DOUGLAS.

A meu pai, JOÃO, que desde a época que se arriscava na boleia de um caminhão na Rio-Bahia, derramou seu suor para que não só eu, mas todos os seus filhos, tivessem uma boa educação e se tornassem pessoas honestas e dignas. Obrigado por tudo.

A minha mãe, TEREZINHA, por ter me agraciado com seu amor e dedicação. Obrigado por fazer do seu acordar ao seu descanso, uma luta para obter o melhor para

sua família, por ter feito dos seus sonhos a realização dos sonhos dos seus filhos, e desde que me levou à minha primeira aula, até os dias de hoje, ter prestado seu tempo para me apoiar. Verdadeiro exemplo de carisma, bondade e luta.

A minha amada esposa, MÁRCIA, por ter me dado a oportunidade de juntos construirmos uma família, pela paciência e força pra suportar a distância e a saudade durante todo esse tempo, e principalmente por poder compartilhar do seu amor.

Aos meus irmãos: WAGNER e LEIDIANE, além do meu sobrinho WAGUINHO, que mesmo a distância, apoiam-me, e pelos bons momentos de alegria, e descontração quando nos reunimos.

Ao meu sogro MANOEL e minha sogra JOSEFA, por terem me recebido tão bem em sua família, além daqueles que compartilham dos momentos prazerosos quando nos reunimos: JOSEANE, MAGNO, ANE, MAYK, EDUARDA, e em especial, MARCONDES por me fazer companhia nas bebedeiras.

Aos meus amigos de Itabaiana, em especial PAULO CÉSAR e FABINHO, a quem me dou a liberdade de chamar de irmãos, e que graças a sinuosidade da vida, nos afastamos temporariamente.

Aos amigos que conquistei durante a realização deste sonho, colegas de turmas anteriores e subsequentes, são pessoas especiais que não citarei para não tornar-se um capítulo da dissertação, mas que durante toda minha vida estarão presentes mesmo que distante. Gostaria somente de destacar em João Pessoa, AILTON, VALDECIR, e FLÁVIO pelos momentos de descontração dentro e fora da UFPB, aos colegas de turma que dividiram alegres e descontraídos momentos: MARCO, RODRIGO, SUELEN, ELIZABETH E GILSENIO, além dos colombianos DANIEL e DIANA. Aos baianos MARCOS de Salvador, CLAUDEMIR, PRISCILA E REGINALDO, ao AMINTAS por estar sempre presente para dividir as angústias e alegrias, a ISLANITA pelo companheirismo não somente durante as aulas de tópicos na segunda metade do curso, como também na fase de elaboração deste trabalho.

Aos amigos DISSON, MAICON, TATIANE, BRUNA e ELISÂNIA, que juntamente com outros, vêm representando Sergipe no Mestrado da UFPB, ao longo de vários anos.

A SECELT de Itabaiana e à Prefeitura Municipal de Areia Branca por valorizarem a capacitação e formação contínua dos seus professores.

A todos meus sinceros agradecimentos.

Resumo

O presente trabalho tem o controle distribuído v aplicado à fronteira da Equação da Onda Linear. Buscamos atingir dois objetivos: um do tipo controlabilidade, e outro o não distanciamento do estado do sistema a um estado $y_2(x, t)$ predefinido. Esse é um problema de otimização multicritério, e para solucioná-lo, introduzimos a noção de controle ótimo de Stackelberg (clássico em economia), no qual dividimos v em dois, digamos v_1 e v_2 , e cada um atuará na respectiva parte da fronteira Σ_1, Σ_2 , com uma hierarquia entre os mesmos. Assim, assumimos que v_1 é o controle líder e v_2 será o seguidor. A partir dessa terminologia, usamos a ideia do controle hierárquico, isto é, admitimos que dado um certo v_1 , otimizamos o segundo objetivo com respeito a v_2 e encontramos uma relação tal que $v_2 = \mathcal{F}(v_1)$. Então, o primeiro objetivo tornou-se função de v_1 , sendo do tipo controlabilidade aproximada que será provado através de um critério de densidade e do teorema de unicidade de Holmgren. Por último, provada a controlabilidade aproximada e a partir da unicidade da solução, encontramos o sistema de otimalidade para o controle líder.

Palavras-chave:

Controlabilidade Aproximada na Fronteira, Controle Ótimo de Stackelberg, Controle Hierárquico e Sistema de Otimalidade.

Abstract

The present work has the distributed control v applied to the linear wave's equation. We seek to reach two objective, one of the kind Controllability and another the not system state distance to a state $y_2(x, t)$ predefined. This is an problem of multicriteria optimization, and to solves him, introduce the notion Stackelberg's Optimal Control (classical in economy), in which we divide v into two, tell v_1 and v_2 , and each one will act in the respective part from the Boundary Σ_1, Σ_2 with a hierarchy between the same. This way, we take over that v_1 is the control leader and v_1 will be the follower. To leave of this terminogy, we use the idea of the hierarchical control, that is, admit that given a right v_1 , optimize the second goal concerning v_2 and find a relation such that $v_2 = \mathcal{F}(v_1)$. So, the first goal became function of v_1 , belonging to the kind approximate controlability that will be proved through a density criterion and a Holmgren's uniqueness theorem. Finally, proved for controlability close, from unicidade of the solution, find Optimality system for the control leader.

Key words:

Approximate Controllability in the Boundary, Stackelberg's Optimal Control, Hierarchical Control and Optimality System.

Notação e Terminologia

- Ω - Domínio aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$.
- Γ - denota a fronteira de Ω .
- $\mathcal{Q} = \Omega \times (0, T)$ - denota o cilindro do $\mathbb{R}^{n+1}$.
- $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ - denota fronteira lateral de $\mathcal{Q}$.
- V^* - denota o espaço dual de V .
- $(V(\Omega))^2 = V(\Omega) \times V(\Omega)$ - denota o produto cartesiano entre $V(\Omega)$ e $V(\Omega)$.
- $' = \frac{\partial}{\partial t}$ - denota a derivada com relação ao tempo.
- $(\cdot, \cdot)$ - denota o produto interno em $L^2(\Omega)$.
- $((\cdot, \cdot))$ - denota o produto interno em $H_0^1(\Omega)$.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V \times V^*}$ - denota a dualidade entre os espaços V e V^* .
- $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ - denota a dualidade entre os espaços $V \times W$ e $V^* \times W^*$.
- $|\cdot|$ - denota a norma em $L^2(\Omega)$.
- $\|\cdot\|$ - quando não especificada, denota a norma em $H_0^1(\Omega)$.
- $\|\cdot\|_V$ - denota a norma em V .
- B_0, B_{-1} - denota a bola unitária do espaço $L^2(\Omega)$ e do espaço $H^{-1}(\Omega)$ respectivamente.
- $\mathcal{L}(V, W)$ - denota o espaço dos operadores lineares e contínuos de V em W .
- L^* - denota o operador adjunto de L .
- $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ - Denota o operador Laplaciano.

- $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ - denota o gradiente.
- $q.s.$ - quase sempre.
- C - quando não especificada, denota uma constante real positiva e arbitrária.
- $D(f)$ - denota o domínio da função f .
- $\rightarrow, \rightharpoonup, \overset{*}{\rightharpoonup}$ - denota as convergências forte, fraca e fraca estrela respectivamente.
- $\hookrightarrow, \overset{c}{\hookrightarrow}$ - denota as imersões contínua e compacta, respectivamente.
- $\delta(\Omega, \Gamma_0) = \sup_{x \in \Omega} d(x, \Gamma_0)$ - denota a distância de x a Γ_0 tomada no sentido de geodésica em Ω .

Sumário

Introdução	1
0.1 Histórico de Teoria do Controle	1
0.2 Introdução geral	3
1 Resultados Preliminares	7
1.1 Espaços Funcionais	7
1.1.1 Os Espaços $L^p(\Omega)$ e $L^p(0, T; X)$	7
1.1.2 Espaço das Distribuições	9
1.2 Tópicos de Análise Funcional	12
1.2.1 Convergências em Espaços Normados	12
1.2.2 Formas Geométricas do Teorema de Hahn-Banach	15
1.3 Tópicos de Análise Convexa	16
1.3.1 Convexidade e Otimização	16
1.3.2 Teoria de Dualidade de Fenchel	19
1.4 Resultados Importantes	20
1.4.1 O Teorema de Caratheodory	21
1.4.2 Desigualdades Utilizadas	22
1.4.3 Teoremas Relevantes	23
2 Solução Fraca e Controlabilidade da Equação da Onda Linear	27
2.1 Solução Fraca	27
2.2 Regularidade Escondida para Solução Fraca	30

2.3	Solução Ultrafraca	37
2.4	Observabilidade na fronteira	41
2.5	Controle Aproximado na Fronteira	45
3	Controle Hierárquico	54
3.1	Controle Hierárquico Segundo a Terminologia Stackelberg	54
3.2	Sistema de otimalidade para o controle seguidor	57
3.3	Controlabilidade aproximada	63
3.4	Sistema de otimalidade para o controle líder	67
	Referências Bibliográficas	76

Introdução

0.1 Histórico de Teoria do Controle

Desde o início dos tempos, o homem busca controlar fenômenos da natureza, ou mesmo reverter diversas situações, e sistemas a seu favor. O controle pode ser basicamente definido como mecanismo pelo qual um sistema, quer seja mecânico, elétrico, biológico, entre outros, utiliza para manter um certo equilíbrio. Embora os sistemas de controle de vários tipos remontam à antiguidade, os projetos de sistemas de controle realimentados através da revolução industrial eram de tentativa e erro, junto com muita intuição de engenharia. Assim, era mais arte do que ciência.

Em meados do século XIX, a Matemática foi pela primeira vez usada para analisar a estabilidade de sistemas de controle realimentados, viabilizado pelo astrônomo G.B.Airy em 1840. Ele foi o primeiro a discutir as equações diferenciais de estabilidade na sua análise, nesse mesmo período surgiu um trabalho mais completo publicado pelo físico J.C.Maxwell em 1868, em que o mesmo fez uma análise da dinâmica do regulador centrífugo, trabalho este intitulado: "*On Governors*".

Assim, podemos fazer uma divisão histórica da teoria do controle por:

- Controle Primitivo (1868 $\sim$ 1900);
- Controle Clássico (1900 $\sim$ 1960);
- Controle Moderno (1960 $\sim$ *hoje*);

Podemos destacar no controle primitivo, as contribuições em critérios de estabilidade por E.J.Routh em 1877 e A. Hurwitz em 1885, além de Alexander Lyapunov, no estudo da estabilidade de sistemas de equações diferenciais não-lineares, em 1892.

No início do século XX, percebeu-se a complexidade de diversos sistemas, agora com modelagens não-lineares e não-determinísticas, fato esse, que levou nomes importantes

do controle Clássico, como os de H.W.,Bode, N.B.,Nichols e W.R.,Evans, a buscarem "métodos" para projetos desses sistemas de controle.

Após 1960, houve um avanço muito grande na teoria do controle, a esta fase, coube a nomeação de "Controle Moderno". Podemos destacar a contribuição para esse avanço dos seguintes nomes: Richard Bellman (1920-1984), o qual, criou a programação dinâmica para controle ótimo de sistemas a tempo-discreto, Lev Pontryagin (1908-1988) introduziu o princípio do máximo para controle ótimo(baseado em cálculo variacional) e princípio bang-bang, além de R.E.Kalman, que em sua obra: "*On The General Theory of Control Systems*" muda o "estado da arte"da teoria do controle, aplicando a teoria de Lyapunov ao controle, e usando técnicas de filtragem, e aproximações algébricas.

Graças ao desenvolvimento da ciência e tecnologia muitos outros critérios e ramificações da teoria de controle tornaram-se inevitáveis. Questões como: controlabilidade e observabilidade, que são imprescindíveis na análise de um sistema antes de decidir a melhor estratégia de controle a ser aplicado, ou até mesmo, se é possível controlar ou estabilizar o sistema se tornaram preocupação da teoria, além disso, a busca de princípios de otimalidade do sistema, ou seja, *princípios de mínimo*, através do cálculo de variações desenvolvido por Leonard Euler, fortaleceu o controle ótimo que é uma técnica de controle especial em que o sinal de controle otimiza um "índice de custo", ou seja, controle ótimo é um conjunto de equações diferenciais que descrevem os caminhos das variáveis de controle, possivelmente com algumas restrições nos controles admissíveis que minimizem o funcional custo, como por exemplo, no caso de um satélite, os impulsos necessários para trazê-lo para a trajetória desejada, de forma que consuma a menor quantidade de combustível.

Com as aplicações da teoria do controle em áreas de estrutura flexível como: robótica, plataformas marítimas, teoria dos jogos e economia, surgiu a noção de "*Controle hiérárquico*", Um sistema com o comportamento complexo, que é, muitas vezes organizados como uma hierarquia, ou seja, dividimos o controle em duas partes, em que um controle será o líder, e o outro será o seguidor. Esta noção de foi introduzida

por Heinrich Freiherr Von Stackelberg¹ em "*Markform und Gleichgewicht*" em 1934, e é clássica em economia.

O modelo de Stackelberg, surgiu para descrever o comportamento da indústria automobilística americana, a qual apresentava-se a GM como empresa líder e as demais (Ford, Chrysler, etc...), como seguidoras. Ele descreve a interação de duas empresas que disputam o mesmo mercado, ou seja, fabricam produtos homogêneos. A característica do modelo de Stackelberg é que uma das empresas (líder de mercado) conhece o *modus operandi* da outra, e escolhe primeiro que quantidade irá produzir.

Recentemente, a enorme contribuição de nomes como Jacques Louis Lions², D.L. Russel e seus seguidores, junto com a implementação de novos métodos (a exemplo do método da unicidade de Hilbert (veja [14])), vêm fazendo da teoria do controle o objeto de estudo de diversos pesquisadores por todo o mundo.

0.2 Introdução geral

Um problema de controle inclui um funcional custo (ou funcional objetivo) que é uma função de variáveis de estado e de controle. Nesta dissertação o controle v será aplicado à fronteira de um sistema distribuído, ou seja, de um sistema modelado por uma equação diferencial parcial, que no nosso caso será a Equação da Onda Linear. Estudamos algumas propriedades (existência, unicidade, regularidade, controlabilidade e otimalidade) da Equação da Onda Linear, com condições de contorno tipo Dirichlet.

Seja Ω um subconjunto aberto e limitado $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ suficientemente regular. Sejam Γ_0 um subconjunto de Γ com medida positiva tal que $\mathcal{Q} = \Omega \times (0, T) \subset$

¹Stackelberg, H.F.V.(1905 – 1946) - Nascido em Moscou, estudou Matemática e Economia na Alemanha, deu enormes contribuições à Economia e Teoria dos Jogos, principalmente através do seu modelo de duopólio para liderança de mercado.

²Lions, J.L.(1928-2001) - Exímio matemático francês, que deu imensas contribuições em diversas áreas, em especial à teoria de E.D.P.'s e controle estocástico, publicou mais de 400 artigos científicos e cerca de 20 livros que foram traduzidos para o russo e o inglês.

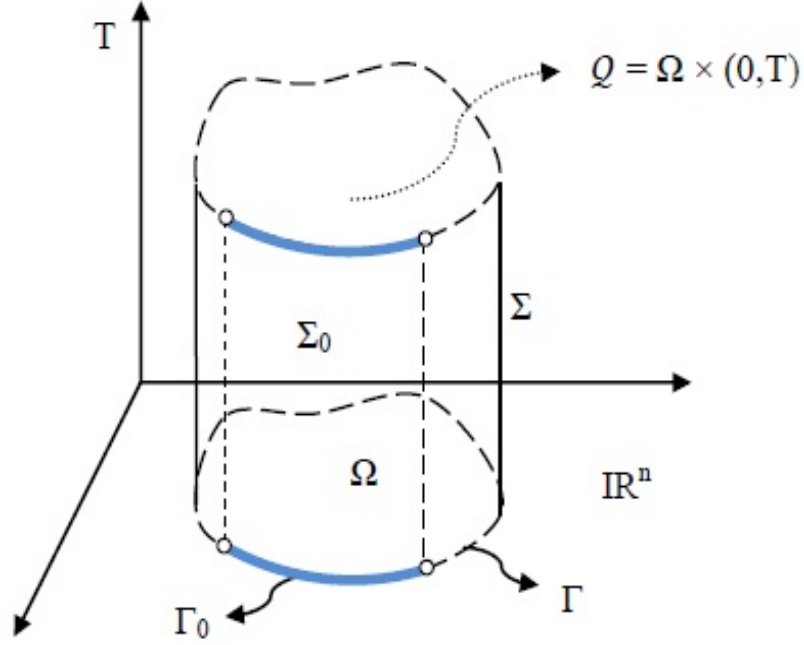


Figura 1: Cilindro do $\mathbb{R}^{n+1}$ com fronteira separada.

$\mathbb{R}^{n+1}$ um cilindro com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$, e $T > 0$ um número real fixado suficientemente grande³. Aplicaremos o controle em Γ_0 e este dependerá de t (Veja figura 1).

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0, & \text{em } \mathcal{Q} \\ y = \begin{cases} v, & \text{em } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T) \\ 0 & \text{em } \Sigma - \Sigma_0 \end{cases} \\ y(\cdot, 0) = y_0(x), \quad y'(\cdot, 0) = y_1(x), & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

onde $y = y(x, t)$ é solução da equação de estado e $v = v(x, t)$ é a função de controle. A controlabilidade é alcançada quando encontramos uma maneira de v atuar em Σ_0 de tal forma que se assumirmos que $v \in L^2(\Sigma_0)$, a solução $y(x, t; v) = y(v) \in L^2(\mathcal{Q})$ do sistema (1) alcance um equilíbrio num instante T .

³Esse fato se deve à velocidade de propagação da onda ser finita, condição que não aparece para sistemas de difusão.

Nosso trabalho tem como objetivo principal o estudo da *controlabilidade aproximada*, isto é, quando o conjunto de estados alcançáveis é um subconjunto denso do espaço dos dados $\{y^T, y'^T\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Precisamente, gostaríamos de escolher um certo $v \in L^2(\Omega)$ tal que, dados $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ positivos e arbitrariamente pequenos:

$$\begin{cases} y'(T, v) & \in y^T + \alpha_1 B_{-1} \\ y(T, v) & \in y^T + \alpha_0 B_0 \end{cases} \quad (2)$$

em que, em geral, y denota uma função $x \rightarrow y(x, t; v)$. Uma escolha razoável é considerar⁴:

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma_0)} \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} v^2 d\Sigma, \text{ restrito a (2)}. \quad (3)$$

Se existe um controle v satisfazendo (3) para todo par $\{y^T, y'^T\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ e $\forall \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ então dizemos que o sistema é aproximadamente controlável. Mas na maioria das situações, atingir (3) não é o único objetivo, ou seja, também gostaríamos que para todo $t \in (0, T)$, $y(x, t; v)$ não se distancie de um determinado estado predefinido $y_2(x, t) \in L^2(\mathcal{Q})$. De forma mais precisa, introduzimos:

$$J_1(v) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} v^2 d\Sigma \quad e \quad (4)$$

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} [y(x, t, v) - y_2(x, t)]^2 dx dt + \frac{\beta}{2} \int_{\Sigma_0} v^2 d\Sigma \quad (5)$$

e queremos encontrar v tal que

$$J_1(v) = \inf_{v \in L^2(\Sigma_0)} \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} v^2 d\Sigma, \text{ restrito a (2)} \quad (6)$$

e

$$J(v) \text{ seja mínimo}, \quad (7)$$

o que em geral é impossível para o mesmo v .

Este é um problema de otimização multicritério, que é clássico em economia, e para solução desse problema usaremos nesse trabalho a noção de "Controle Ótimo de Stackelberg". Esta noção segue a ideia de dividirmos Σ_0 em duas partes e assumirmos

⁴Para um estudo desse problema veja Lions ([14])

que existem dois controles v_1 e v_2 , além de uma hierarquia entre eles, em que um deles é o controle líder, e o outro é o controle seguidor.

Esta dissertação tem como base resultados encontrados nos trabalhos de Lions ([14], [17], [18]), Glowinski ([10]), Zuazua ([29]) e Micu ([22]), e sua estrutura está dividida em três capítulos da seguinte forma:

- No capítulo 1, fizemos uma síntese dos principais resultados e definições básicas essenciais ao entendimento do restante do trabalho, tendo como objetivo tornar a leitura clara e autossuficiente.
- No capítulo 2, provamos a existência, unicidade e regularidade da solução fraca da Equação da Onda Linear, além da sua regularidade escondida. Obtivemos a solução fraca pelo método de Faedo-Galerkin, enquanto a solução ultrafraca foi obtida pelo método da transposição. Também provamos a desigualdade de observabilidade na fronteira, resultado esse essencial para obtermos a controlabilidade aproximada do sistema, e por último, mas não menos importante, não poderíamos deixar de introduzir a noção de controle aproximado na fronteira do sistema (1), estudo preponderante para o entendimento do capítulo subsequente.
- No capítulo 3, introduzimos o que entendemos por "*controle hierárquico*" na terminologia do controle ótimo de Stackelberg, além de buscar um sistema de otimalidade para o controle seguidor, através da minimização do funcional J_2 e a partir daí encontramos uma relação entre o controle líder e o controle seguidor de forma que dado v_1 , encontramos $v_2 = \mathcal{F}(v_1)$. Obtemos também a controlabilidade do sistema para o controle líder, depois disso, formulamos um problema de minimização o qual para sua solução, aplicamos o método de dualidade de Fenchel para obtermos o funcional custo, e a partir da unicidade dessa solução, encontramos o sistema de otimalidade para o controle líder.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo, temos o intuito de apresentar a maior quantidade de definições e resultados que possam levar o leitor a uma melhor compreensão do que vai ser exposto durante o restante da dissertação. É claro que, para uma possível busca de algo que não foi abordado nesta seção, recomendamos uma consulta a algum exemplar entre aqueles que abordem o assunto na bibliografia.

1.1 Espaços Funcionais

1.1.1 Os Espaços $L^p(\Omega)$ e $L^p(0, T; X)$

Dado um número inteiro $m > 0$, por $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, representa-se o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω , isto é, o espaço vetorial das (classes de) funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p \leq \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|, \text{ quando } p = \infty,$$

é um espaço de Banach. (Veja [20]).

Dado um espaço de Banach X , chamaremos por $L^p(0, T, X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das classes de funções u , definidas em $(0, T)$ com valores em X , que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue em $(0, T)$, com a norma

$$\|u(t)\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representaremos o espaço de Banach das (classes de) funções vetoriais $u : (0, T) \longrightarrow X$ que são fortemente mensuráveis e $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0, T)$ com a norma:

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in [0,T]} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

Para $1 \leq p \leq \infty$, consideremos o espaço:

$$W^{m,p}(0, T; X) = \{u \in L^p(0, T; X); u^{(j)} \in L^p(0, T; X), j = 1, \dots, m\},$$

onde $u^{(j)}$ representa a j -ésima derivada de u no sentido das distribuições vetoriais. Com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\sum_{j=0}^m \|u^{(j)}(t)\|_{L^p(0,T;X)} \right), & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{t \in (0,T)} \text{ess} \left(\sum_{j=0}^m \|u^{(j)}(t)\|_X \right), & p = \infty \end{cases}$$

$W^{m,p}(0, T; X)$ é um espaço de Banach.

Observação 1.1.1.1 Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,p}(0, T; X)$ será chamado por $H^m(0, T; X)$, e que munido do produto interno

$$(u, v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^m (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(0,T;X)}$$

é um espaço de Hilbert. Chama-se por $H_0^m(0, T; X)$ o fecho, em $H^m(0, T; X)$ de $\mathcal{D}(0, T; X)$ e por $H^{-m}(0, T; X)$ o dual topológico de $H_0^m(0, T; X)$.

Lema 1.1.1 (Imersão) Sejam X e Y dois espaços de Banach e suponhamos que $X \hookrightarrow Y$, isto é, $X \subset Y$ com imersão contínua. Se $1 \leq s \leq r \leq \infty$, então

$$L^r(0, T; X) \hookrightarrow L^s(0, T; Y).$$

Prova: Veja Matos ([19]) ■

Lema 1.1.2 *Se $u \in L^p(0, T; X')$, $1 \leq p \leq \infty$, e $v \in X$ então $t \mapsto \langle u(t), v \rangle_{X', X} \in L^p(0, T)$. Em particular, se H é um espaço de Hilbert, então $t \mapsto (u(t), v)_H \in L^p(0, T)$.*

Prova: Veja Matos ([19]) ■

Lema 1.1.3 *Se p e q são índices conjugados, $u \in L^p(0, T; X)$ e $v \in L^q(0, T; X')$, então a função numérica $t \mapsto \langle v(t), u(t) \rangle_{X, X} \in L^1(0, T)$.*

Prova: Veja Matos ([19]) ■

Observação 1.1.1.2 *Sejam $\mathcal{Q} = \Omega \times (0, T)$, em que Ω é um aberto do $\mathbb{R}^n$, e ζ uma função dada tal que $\zeta : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$. Denotaremos $\zeta(t)$ por uma função definida em Ω de forma que $\zeta(t)(x) := \zeta(x, t)$. Note que:*

$$L^p(\mathcal{Q}) = \left\{ u : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\mathcal{Q}} |u(x, t)|^p dx dt < \infty \right\}$$

como

$$\int_{\mathcal{Q}} |u(x, t)|^p dx dt = \int_0^T \left[\int_{\Omega} |u(x, t)|^p dx \right] dt = \int_0^T \|u(t)\|_p^p dt$$

então identificamos $L^p(\mathcal{Q}) = L^p(0, T; L^p(\Omega))$.

1.1.2 Espaço das Distribuições

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e uma função contínua $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, define-se suporte de f , e denota-se por $\text{supp}(f)$, o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$. Assim, $\text{supp}(f)$ é um subconjunto fechado de Ω .

Uma n -upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é denominada de multi-índice, e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Representa-se por D^α o operador de derivação de ordem $|\alpha|$, isto é:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, \dots, 0)$, define-se $D^0 u = u$, para toda função u .

Por $C_0^\infty(\Omega)$ denota-se o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis definidas, e com suporte compacto em Ω .

Exemplo 1.1.4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto tal que $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\} \subset \Omega$. Consideremos $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} & , \text{ se } \|x\| < 1 \\ 0 & , \text{ se } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$, e $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma euclidiana de x . Temos que $f \in C^\infty(\Omega)$ e $\text{supp}(f) = \overline{B_1(0)}$ é compacto, isto é $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.1.2.1 *Diz-se que uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando as seguintes condições forem satisfeitas :*

- i) Existe um compacto K de Ω tal que $\text{supp}(\varphi) \subset K$ e $\text{supp}(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$;
- ii) $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K , para todo multi-índice α .

Observação 1.1.2.2 *É possível dotar $C_0^\infty(\Omega)$ com uma topologia de forma que a noção de convergência nessa topologia coincida com a dada pela Definição (1.1.2.1).*

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido da noção de convergência acima definida, será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$, e denominado de Espaço das Funções Testes sobre Ω .

Uma distribuição (escalar) sobre Ω é um funcional contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Mais precisamente, uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

- a) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$;
- b) T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(T(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

Denotaremos o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi \rangle$. $\mathcal{D}'(\Omega)$ é o conjunto de todas as distribuições sobre Ω , com as operações usuais, é um espaço vetorial. Os exemplos a seguir desempenham um papel fundamental na teoria de distribuições escalares.

Exemplo 1.1.5 *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. O funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx.$$

é uma distribuição sobre Ω univocamente determinada por u . Por esta razão, identifica-se u à distribuição T_u por ela definida e, desta maneira, $L^1_{loc}(\Omega)$ será identificado a uma parte própria de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo 1.1.6 *Consideremos $0 \in \Omega$, e o funcional $\delta_0 : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por:*

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

δ_0 é uma distribuição sobre Ω . Além disso, mostra-se que δ_0 não é definido por uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, não existe $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \int f \varphi$.

Definição 1.1.2.3 *Diz-se que uma sequência $(T_n)_{n \in \mathbb{R}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sequência numérica $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n \in \mathbb{R}}$ convergir para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em X é denominado de Espaços das Distribuições Vetoriais sobre $(0, T)$ com valores em X e denominado de $\mathcal{D}'(0, T; X)$.

Definição 1.1.2.4 *Dada $S \in \mathcal{D}'(0, T; X)$, define-se a derivada de ordem n como sendo a distribuição vetorial sobre $(0, T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T)$$

Exemplo 1.1.7 Dados $u \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$ a aplicação $T_u : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$, definida por

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(t) \varphi(t) dt,$$

integral de Bochner em X , é linear e contínua no sentido da convergência de $\mathcal{D}(0, T)$, logo uma distribuição vetorial. A aplicação $u \rightarrow T_u$ é injetiva, de maneira que podemos identificar u com T_u e, neste sentido, temos $L^p(0, T; X) \subset \mathcal{D}'(0, T; X)$.

1.2 Tópicos de Análise Funcional

1.2.1 Convergências em Espaços Normados

Sejam $\mathfrak{X}$ um espaço normado com norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$ e $\mathfrak{X}'$ seu dual topológico, ou seja, o conjunto de todos os funcionais lineares e contínuos, definidos em $\mathfrak{X}$. Definimos em $\mathfrak{X}'$ a norma

$$\|f\|_{\mathfrak{X}'} = \sup_{\|\rho\|=1} \{ |\langle f, \rho \rangle| ; \rho \in \mathfrak{X} \}$$

Definição 1.2.1.1 (*Convergência Forte*) Dizemos que uma sequência $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge forte para ρ em $\mathfrak{X}$, ou simplesmente, $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para ρ em $\mathfrak{X}$, quando

$$\|\rho_n - \rho\|_{\mathfrak{X}} \rightarrow 0$$

a qual denotaremos por $\rho_n \rightarrow \rho$ em $\mathfrak{X}$.

Definição 1.2.1.2 (*Convergência fraca*) Dizemos que uma sequência $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fraco para ρ em $\mathfrak{X}$, quando

$$\langle f, \rho_n \rangle \rightarrow \langle f, \rho \rangle, \quad \forall f \in \mathfrak{X}'$$

a qual denotaremos por $\rho_n \rightharpoonup \rho$ em $\mathfrak{X}$.

Definição 1.2.1.3 (Convergência fraca $*$) Sejam $f \in \mathfrak{X}'$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de $\mathfrak{X}'$. Dizemos que uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fraco-estrela para f em $\mathfrak{X}'$, quando

$$\langle f_n, \rho \rangle \rightarrow \langle f, \rho \rangle, \quad \forall \rho \in \mathfrak{X}$$

a qual denotaremos por $f_n \xrightarrow{*} f$ em $\mathfrak{X}'$.

Definição 1.2.1.4 Seja $F : M \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional definido em um subconjunto M de um espaço vetorial normado (e.v.n.) X . Então:

a) F é dito *fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente* se, e somente se,

$$F(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n),$$

para toda sequência $(u_n) \subset M$, com $u_n \rightarrow u$ quando $n \rightarrow \infty$.

b) F é dito *coercivo* se, e somente se,

$$\frac{F(u)}{\|u\|} \rightarrow \infty, \quad \text{quando } \|u\| \rightarrow \infty, \quad u \in M.$$

c) F é dito *fracamente coercivo* se, e somente se,

$$F(u) \rightarrow \infty, \quad \text{quando } \|u\| \rightarrow \infty, \quad u \in M.$$

d) F é dito *estritamente convexo* se, e somente se, M é convexo e

$$F[\lambda u + (1 - \lambda)v] < \lambda F(u) + (1 - \lambda)F(v)$$

para todo $\alpha \in (0, 1)$ e todo $u, v \in M$ com $u \neq v$.

Teorema 1.2.1 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) Seja E um espaço de Banach. O conjunto $B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ é compacto com respeito à topologia fraca- $*$ $\sigma(E', E)$.

Prova: Veja Oliveira([24], pg.108). ■

Teorema 1.2.2 *Sejam $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de $\aleph$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de $\aleph'$, com $\rho \in \aleph$ e f em $\aleph'$, então temos:*

- i) Se $\rho_n \rightarrow \rho$ em $\aleph$, então $\rho_n \rightharpoonup \rho$ em $\aleph$.
- ii) Se $\rho_n \rightharpoonup \rho$ em $\aleph$, então $\|\rho_n\|$ é limitada e $\|\rho\| \leq \liminf \|\rho_n\|$.
- iii) Se $\rho_n \rightharpoonup \rho$ em $\aleph$ e $f_n \rightarrow f$ em $\aleph'$, então $\langle f_n, \rho_n \rangle \rightarrow \langle f, \rho \rangle$.
- iv) Se $f_n \rightharpoonup f$ em $\aleph'$, então $f_n \xrightarrow{*} f$ em $\aleph'$.
- v) Se $f_n \xrightarrow{*} f$ em $\aleph'$ e $\rho_n \rightarrow \rho$ em $\aleph$, então $\langle f_n, \rho_n \rangle \rightarrow \langle f, \rho \rangle$.
- vi) Se $\aleph$ é um espaço de Hilbert, então $\rho_n \rightarrow \rho$ em $\aleph$, se, e somente se, $\rho_n \rightharpoonup \rho$ em $\aleph$ e $\|\rho_n\| \rightarrow \|\rho\|$.

Prova: Veja Brezis([5], pg.58 e 63). ■

Definição 1.2.1.5 *Um espaço métrico é dito separável, quando possui um subconjunto enumerável denso.*

Teorema 1.2.3 *$\aleph$ é separável se, e somente se, para $r > 0$, o conjunto $\overline{B}_{\aleph'}(0, r)$ é metrizável na topologia fraca-**.

Prova: Veja Oliveira([24], pg.115). ■

Definição 1.2.1.6 *Dizemos que $\aleph$ é reflexivo se ele é isomorfo a $\aleph''$ e o isomorfismo é dado pela aplicação canônica $\widehat{J} : \aleph \rightarrow \aleph''$ que associa cada $\rho \in \aleph$ com $\widehat{\rho} \in \aleph''$ por*

$$\widehat{\rho}(f) := f(\rho) ; f \in \aleph''$$

Além disso, cabe observar que quando $\aleph$ é reflexivo, as convergências fraca de $\aleph'$ e fraca- coincidem.*

Proposição 1.2.1.7 *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Prova: Veja Oliveira([24]) ■

Apresentaremos na tabela abaixo um resumo das principais propriedades dos espaços $L^p(\Omega)$, com $2 < p < \infty$ e $p^{-1} + q^{-1} = 1$:

	Banach	Hilbert	Reflexivo	Separável	Espaço Dual
$L^p(\Omega)$	<i>sim</i>	<i>não</i>	<i>sim</i>	<i>sim</i>	$L^q(\Omega)$
$L^1(\Omega)$	<i>sim</i>	<i>não</i>	<i>não</i>	<i>sim</i>	$L^\infty(\Omega)$
$L^2(\Omega)$	<i>sim</i>	<i>sim</i>	<i>sim</i>	<i>sim</i>	$L^2(\Omega)$
$L^\infty(\Omega)$	<i>sim</i>	<i>não</i>	<i>não</i>	<i>não</i>	Contém $L^1(\Omega)$

(1.1)

1.2.2 Formas Geométricas do Teorema de Hahn-Banach

Definição 1.2.2.1 Um hiperplano afim é um subconjunto M de um espaço vetorial normado (e.v.n.) E , da forma

$$M = \{x \in E; f(x) = \alpha\}$$

em que f é um funcional linear, que não se anula identicamente e $\alpha \in \mathbb{R}$ é constante. Denotamos $M = [f = \alpha]$ e dizemos que $f = \alpha$ é a equação de M .

Teorema 1.2.4 (Teorema de Hahn-Banach 1ª Forma Geométrica) Sejam $A, B \subset E$ dois subconjuntos convexos não-vazios tal que $A \cap B = \emptyset$. Assuma que um dos dois é aberto. Então existe um hiperplano fechado que separa A e B .

Prova: Veja Brezis([5], pg.7). ■

Teorema 1.2.5 (Teorema de Hahn-Banach 2ª Forma Geométrica) Sejam $A, B \subset E$ dois subconjuntos convexos não-vazios, tal que $A \cap B = \emptyset$. Assuma que A é fechado e B é compacto. Então existe um hiperplano fechado que separa A e B estritamente.

Prova: Veja Brezis([5], pg.7). ■

Corolário 1.2.6 Seja $F \subset E$, um subespaço linear tal que $\overline{F} \neq E$. Então, existe algum funcional $f \in E^*$ (o qual não é identicamente nulo), tal que

$$\langle f, x \rangle = 0, \forall x \in F.$$

Prova: Veja Brezis([5], pg.8) . ■

Teorema 1.2.7 (*Critério de Densidade*) Seja D um subconjunto de um espaço de Hilbert H . Então as seguintes condições são equivalentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} i) D \text{ gera um subespaço que é denso em } H. \\ ii) \text{ Todo funcional linear contínuo } f \text{ em } H \text{ que se anula em } D \text{ é identicamente nulo em } H. \end{array} \right.$$

Prova: Veja Aubin([3], pg.30) . ■

1.3 Tópicos de Análise Convexa

Nesta seção, abordaremos alguns conceitos da teoria de funções convexas, além do que, introduziremos alguns conceitos referentes à teoria de dualidade de Fenchel-Rockafellar que serão utilizados no desenvolvimento do trabalho.

1.3.1 Convexidade e Otimização

Nesta subseção, faremos um pequeno estudo de aplicações convexas, que surgem no estudo de problemas de otimização, isto é, para resolvermos um problema de minimização abstrato, ou seja, minimizar $F(x)$ para $x \in C \subset X$, em que C é um subconjunto convexo de um espaço vetorial real X , tal que:

$$F : C \subset X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} ,$$

podemos associar (extender) a função $F(x)$ a uma função $\widehat{F}(x)$ definida agora em todo X de modo que:

$$\left| \begin{array}{l} \widehat{F}(x) = F(x) \quad , \text{ se } x \in C \\ \widehat{F}(x) = +\infty \quad , \text{ se } x \notin C \end{array} \right.$$

Então, minimizar $F(x)$ sobre C é equivalente a minimizar $\widehat{F}(x)$ sobre todo X .

Observação 1.3.1.1 É fácil ver que, se a aplicação $F: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ for convexa as seções

$$\{u; F(u) \leq \alpha\} \text{ e } \{u; F(u) < \alpha\}$$

são, $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, conjuntos convexos de X^1 .

Definição 1.3.1.2 (*Domínio Efetivo*) Para toda aplicação $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, chamamos a seção:

$$\text{Dom}F = \{u; F(u) < \infty\}$$

de domínio efetivo de F , que também é convexo, e além disso, minimizando F sobre X , estaremos minimizando F sobre seu domínio efetivo.

Definição 1.3.1.3 (*Função Indicador*) Seja X um espaço linear real. A Função Indicador $\mathfrak{S}_C$ de um subconjunto $C \subset X$ é definida por:

$$\mathfrak{S}_C(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \in C \\ +\infty & , \text{ se } x \notin C. \end{cases}$$

Note que $\mathfrak{S}_C$ será convexa e semicontínua inferiormente se, e somente se, C é for um subconjunto convexo e aberto de X , respectivamente.²

Observação 1.3.1.4 Existem duas vantagens em introduzir a extensão $\widehat{F}(x)$: a primeira é que só precisamos considerar as funções definidas q.s., e a segunda, é que pela definição 1.3.1.3, o estudo de conjuntos convexos se reduz naturalmente ao estudo de funções convexas.

Definição 1.3.1.5 (*função Própria*) Uma função convexa é dita própria se $\text{Dom}F \neq \emptyset$ e $F(x) > -\infty$.

Definição 1.3.1.6 (*Mínimo Local*) Dizemos que μ é um ponto de mínimo local (ou simplesmente ponto de mínimo) de J sobre C (convexo) se, e somente se,

$$\mu \in C \text{ e } \exists \delta > 0; \forall \zeta \in C, \|\zeta - \mu\| < \delta \implies J(\mu) \leq J(\zeta).$$

Definição 1.3.1.7 (*Mínimo Global*) Dizemos que μ é um ponto de mínimo global (ou simplesmente ponto de mínimo) de J sobre C (convexo) se, e somente se,

$$\mu \in C \text{ e } J(\mu) \leq J(\zeta), \forall \zeta \in C.$$

¹A recíproca, porém, é falsa. Veja[7], pg.8

²Ver [7] página 10.

Proposição 1.3.1.8 *Seja $F : C \subseteq H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional definido em um subconjunto não-vazio, convexo e limitado C de um espaço de Hilbert H . Suponha que F seja convexa, semicontínua inferiormente e própria. Então o problema de minimização*

$$F(u) = \min_{v \in D} F(v) ,$$

tem uma solução, e esta será única, se adicionarmos a hipótese de F ser estritamente convexa sobre C .

Prova: Veja Ekeland ([7], pg.35). ■

Teorema 1.3.1 *Seja $F : D \subseteq H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional definido em um subconjunto D de um espaço de Hilbert H . Suponha que F tenha as seguintes propriedades:*

- i) D é um subconjunto convexo fechado não-vazio do espaço de Hilbert H .
- ii) F é sequencialmente semicontínuo inferiormente.
- iii) Se D é ilimitado, então F é fracamente coercivo.

Então o problema de minimização

$$F(u) = \min_{v \in D} F(v) ,$$

tem uma solução, e esta será única, se adicionarmos a hipótese de F for estritamente convexa.

Prova: Veja Zeidler([28], pg.54). ■

Proposição 1.3.1.9 (*Caracterização de solução*) *Suponha que $F = F_1 + F_2$, e que F_1 e F_2 são funcionais convexos e semicontínuos inferiormente de C em $\mathbb{R}$, com F_1 sendo gâteaux-diferenciável com derivada F'_1 . Então, se $\mu \in C$, as condições são equivalentes:*

- i) μ é solução do problema:

$$\inf_{\mu \in C} F(\mu) ;$$

- ii) $\langle F'_1(\mu), \zeta - \mu \rangle + F_2(\zeta) - F_2(\mu) \geq 0, \forall \zeta \in C ;$

- iii) $\langle F'_1(\zeta), \mu - \zeta \rangle + F_2(\mu) - F_2(\zeta) \geq 0, \forall \zeta \in C.$

Prova: Veja Ekeland ([7], pg.38). ■

1.3.2 Teoria de Dualidade de Fenchel

Nesta subseção, apresentaremos resultados que envolvem o método de dualidade para resolver problemas de otimização convexa.

Suponha que estejamos interessados em resolver o problema de minimização:

$$v := \inf_{x \in H} [\Phi(x) + \Psi(Lx)]$$

onde os funcionais Φ, Ψ e o operador L são definidos como no teorema 1.3.2. Note que a função $\Phi + \Psi \circ L$ que nos propomos a minimizar, só será não-trivial se $\text{Dom}(\Phi) \cap L^{-1} \circ \text{Dom}(\Psi) \neq \emptyset$, ou seja, se

$$0 \in L \circ \text{Dom}(\Phi) - \text{Dom}(\Psi) \quad (1.2)$$

e neste caso temos $v < \infty$.

Introduzimos o *Problema de minimização dual*:

$$v^* := \inf_{q \in H^*} [\Phi^*(-L^*q) + \Psi^*(q)]$$

onde $L^* \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$, Φ^* e Ψ^* são as conjugadas de Φ e Ψ respectivamente (veja 1.3.2.1). Mas, isto só faz sentido se assumirmos que $0 \in L^* \circ \text{Dom}(\Psi^*) + \text{Dom}(\Phi^*)$, e neste caso, temos $v^* < \infty$.

Definição 1.3.2.1 (*Função Conjugada*) *Seja $\Phi : H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função estendida não-trivial definida num espaço de Hilbert H . Podemos associá-la a uma função chamada de Conjugada (ou polar) $\Phi^* : H^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definida no dual de H tal que:*

$$\Phi^*(u^*) = \sup_{u \in H} \{\langle u^*, u \rangle - \Phi(u); u^* \in H^*\} \quad (1.3)$$

e sua biconjugada (ou bipolar) por:

$$\Phi^{**}(u) = \sup_{u^* \in H^*} \{\langle u, u^* \rangle - \Phi^*(u^*); u \in H\} \quad (1.4)$$

Teorema 1.3.2 (*Fenchel*) *Suponha que $L \in \mathcal{L}(V, W)$ onde V, W são espaços de Hilbert, e que $\Phi : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $\Psi : W \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ são funcionais*

não-triviais, convexos e semicontínuos inferiormente. Consideraremos os casos em que $0 \in [L(\text{Dom}(\Phi)) - \text{Dom}(\Psi)]$ e $0 \in [L^*(\text{Dom}(\Psi^*)) + \text{Dom}(\Phi^*)]$ (que é equivalente a hipótese de v e v^* serem finitos).

a) Se supormos que $0 \in \text{Int}[L(\text{Dom}(\Phi)) - \text{Dom}(\Psi)]$, então:

$$\begin{cases} i) & v + v^* = 0 \\ ii) & \exists \bar{q} \in W^* \quad \text{tal que } \Phi^*(-L^*(\bar{q})) + \Psi^*(\bar{q}) = v^* \end{cases}$$

b) Se supormos que $0 \in \text{Int}[L^*(\text{Dom}(\Psi^*)) + \text{Dom}(\Phi^*)]$, então:

$$\begin{cases} i) & v + v^* = 0 \\ ii) & \exists \bar{x} \in V \quad \text{tal que } \Phi(\bar{x}) + \Psi(L\bar{x}) = v \end{cases}$$

Prova: Veja Aubin([3], pg.240). ■

Teorema 1.3.3 (Fenchel-Rockafellar) Suponha que $L \in \mathcal{L}(V, W)$ onde V, W são espaços de Hilbert, e que $\Phi : V \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ e $\Psi : W \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ são funcionais não-triviais, convexos e semicontínuos inferiormente. Suponha que exista $x \in \text{Dom}(\Phi) \cap \text{Dom}(\Psi)$ tal que Φ é contínua em x e Ψ é contínua em Lx . Então:

$$\inf_{x \in V} [\Phi(x) + \Psi(Lx)] = - \inf_{q \in W^*} [\Phi^*(L^*q) + \Psi^*(-q)] = - \min_{q \in W^*} [\Phi^*(L^*q) + \Psi^*(-q)]$$

Prova: Veja Brezis([5], pg.15). ■

1.4 Resultados Importantes

Nesta seção, daremos ênfase ao teorema de caratheodory, que é de suma importância no prolongamento de soluções de E.D.P.'s, algumas desigualdades e os teoremas não abordados nas seções anteriores, mas de extrema relevância para realização do trabalho.

1.4.1 O Teorema de Caratheodory

Seja D um subconjunto do $\mathbb{R}^{n+1}$, cujos elementos são denotados por (t, x) , em que $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Considere $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ não necessariamente contínua. Se existir uma função absolutamente contínua $x(t)$, definida em algum intervalo I da reta, tal que $(t, x(t)) \in D$, para todo $t \in I$; e para quase todo t em I ,

$$x' = f(t, x) , \quad (1.5)$$

dizemos que $x(t)$ é uma solução de (1.5) sobre I . Se $(t_0, x_0) \in D$ está associado ao problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

dizemos que a solução $x(t)$ de (1.5) sobre I , é tal que $t_0 \in I$ e $x(t_0) = x_0$.

Definição 1.4.1.1 (*Condições de Caratheodory*) Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Então, f satisfaz às condições de Carathéodory se:

- i) $f(x, t)$ é mensurável em t para cada x fixo;
- ii) $f(x, t)$ é contínua em x para cada t fixo;
- iii) para cada compacto U em D , existe uma função real integrável $m_U(t)$ tal que:

$$|f(t, x)| \leq m_U(t), \quad \forall (t, x) \in U.$$

Teorema 1.4.1 (*Carathéodory*) Seja $f : R \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo às condições de Carathéodory sobre R . Então existe uma solução $x(t)$ de (1.6) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, $\beta > 0$, onde R é o retângulo definido por:

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq a, \quad |x - x_0| \leq b\}, \text{ com } a > 0, b > 0.$$

Prova: Veja Coddington, E. e Levinson, N.³ ■

³ CODDINGTON, E. e LEVINSON, N., *Theory of O.D.E.*, 1ª ed., N.Y.: McGraw-Hill, 1955.

Teorema 1.4.2 *Sejam D um aberto do $\mathbb{R}^{n+1}$ e f satisfazendo às condições de Carathéodory sobre D . Então, o problema (1.6) tem solução para qualquer $(t_0, x_0) \in D$.*

Prova: Veja Coddington, E. e Levinson, N.⁴ ■

1.4.2 Desigualdades Utilizadas

Lema 1.4.3 (*Desigualdade de Gronwall*) *Sejam $\alpha \geq 0$ uma constante, $u, v : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções absolutamente contínuas em I , tais que:*

$$u(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^t v(s)u(s) ds, \quad \forall t \in I$$

Então vale

$$u(t) \leq \alpha \cdot e^{\left(\int_{t_0}^t v(s)ds\right)}.$$

Em particular, se $\alpha = 0 \Rightarrow u \equiv 0$.

Prova: Veja Evans([8], pg.625). ■

Lema 1.4.4 (*Desigualdade de Young*) *Sejam $p > 1, q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \quad \forall a \geq 0, \quad \forall b \geq 0.$$

Prova: Veja Brezis([5], pg.92). ■

Lema 1.4.5 (*Desigualdade de Minkowski*) *Sejam $f, g \in L^p(\Omega)$, $p \geq 1$. Então $f + g \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Prova: Veja Zeidler([28], pg.352). ■

Lema 1.4.6 (*Desigualdade de Hölder*) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então $f, g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Prova: Veja Brezis([5], pg.92). ■

⁴CODDINGTON, E. e LEVINSON, N., *Theory of O.D.E.*, 1ª ed., N.Y.: McGraw-Hill, 1955.

Lema 1.4.7 (*Desigualdade de Poincaré*) Suponhamos que Ω seja limitado. Então existe uma constante C (dependendo de Ω) tal que:

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Ou seja, em $W_0^{1,p}(\Omega)$ a quantidade $\|\nabla u\|_{L^p}$ é uma norma equivalente à norma de $W^{1,p}$.

Prova: Veja Brezis([5], pg.290). ■

1.4.3 Teoremas Relevantes

Lema 1.4.8 (*Imersão de Sobolev*) Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular Γ :

- i) Se $n > pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $q \in \left[1, \frac{np}{n-mp}\right]$.
- ii) Se $n = pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $q \in [1, \infty]$.
- iii) Se $n = 1$ e $m \geq 1$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Prova: Veja Adams([1], pg.85). ■

Lema 1.4.9 (*Rellich-Kondrachov*) Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular Γ :

- i) Se $n > pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega)$, onde $q \in [1, \frac{np}{n-mp})$.
- ii) Se $n = pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega)$, onde $q \in [1, \infty)$.
- iii) Se $pm > n$, então $W^{m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^k(\overline{\Omega})$, onde $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $k < m - \frac{n}{p} \leq k + 1$.

Prova: Veja Adams([1], pg.168). ■

Observação 1.4.3.1 Identificando $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$ com o seu dual, juntamente com os lemas de imersão acima, obtemos a cadeia de imersões contínuas:

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) = H^0(\Omega) = (L^2(\Omega))' \hookrightarrow H^{-1}(\Omega).$$

Teorema 1.4.10 (*Teorema do Traço*) A aplicação linear

$$u \mapsto (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u) = \left(u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial \nu_A} |_{\Gamma}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu_A^{m-1}} |_{\Gamma} \right)$$

de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ em $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p}, p}(\Gamma)$, prolonga-se por continuidade, a uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva de $W^{m,p}(\Omega)$ em $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p}, p}(\Gamma)$.

Prova: Veja Evans([8], pg.258). ■

Teorema 1.4.11 *Sejam $\mathcal{H}^0 = \{u \in L^2(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$, $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}^0 \cap H^1(\Omega)$ e a aplicação traço:*

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{H}^{2\alpha} &\rightarrow H^{-\frac{1}{2}+\alpha}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}+\alpha}(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma(u) = (\gamma_0 u, \gamma_1 u) \end{aligned}$$

que para $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, é linear e contínua. Então, se $\alpha = \frac{1}{2}$, vale a igualdade:

$$-(\Delta u, v) = (\nabla u, \nabla v) - \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

sendo $u \in \mathcal{H}^1$ e $v \in H^1(\Omega)$.

Prova: Veja Medeiros ([20], pg.147). ■

Observação 1.4.3.2 *Observe que quando $\dim(\Omega) = 1$, ou seja, $\Omega = (a, b)$ se $u \in H^m(a, b)$, então, pelo lema 1.4.9, $u \in C^{m-1}([a, b])$. Logo, faz sentido definir a função u e suas derivadas na fronteira, que no caso serão $\Gamma = \{a, b\}$.*

Lema 1.4.12 (*Lema de Lions*) *Sejam Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, $(g_m)_m$ e g funções de $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, tais que:*

$$\begin{aligned} \|g_m\|_{L^q(\Omega)} &\leq C \\ e \\ g_m &\longrightarrow g \text{ q.s em } \Omega \end{aligned}$$

Então $g_m \longrightarrow g$ fracamente em $L^q(\Omega)$ ⁵.

⁵Veja: Lions, J.L.; *Quelques Méthodes de Résolution des problèmes aux Limites Non Linéaires*, Paris, Dunod, (1969).

Lema 1.4.13 (*Du Bois Raymond*) Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in D(\Omega),$$

se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .

Prova: Veja Medeiros([20] pg.13). ■

Teorema 1.4.14 *Sejam X e Y espaços de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$ e $\mu \in L^p(0, T; X)$, $\mu' \in L^p(0, T; Y)$, $1 \leq p \leq \infty$, então $\mu \in C^0([0, T]; Y)$.*

Prova: Veja Brezis([5]). ■

Teorema 1.4.15 *Seja $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Sejam $u \in L^q(0, T; X') = E'$ e $v \in L^p(0, T; X) = E$, então $\langle u, v \rangle_{E', E} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_{X', X} dt$.*

Prova: Veja Brezis([5]). ■

Teorema 1.4.16 (*Gauss-Green*) *Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então $\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\Gamma} u \nu^i d\Gamma$; ($i = 1, \dots, n$), onde $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \dots, \nu_n(x))$ é a normal unitária exterior em $x \in \Gamma$.*

Prova: Veja Brezis([5]). ■

Teorema 1.4.17 (*Fórmulas de green*):

a) Se $\gamma \in H^2(\Omega)$, então $\int_{\Omega} \nabla \gamma \nabla u dx = - \int_{\Omega} \Delta \gamma u dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} u d\Gamma$, $\forall u \in H^1(\Omega)$.

b) Se $u, \gamma \in H^2(\Omega)$, então $\int_{\Omega} (\Delta \gamma u - \gamma \Delta u) dx = \int_{\partial \Omega} (\frac{\partial \gamma}{\partial \nu} u - \frac{\partial u}{\partial \nu} \gamma) d\Gamma$, $\forall u \in H^1(\Omega)$.

Prova: Veja Brezis([5]). ■

Teorema 1.4.18 (*Representação de Riesz*) *Sejam $1 < p < \infty$ e $\varphi \in (L^p)'$. Então existe um único $u \in (L^q)$, onde $p^{-1} + q^{-1} = 1$, tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f, \quad \forall f \in L^p$$

Além disso se verifica

$$\|u\|_{L^q} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$$

Prova: Veja Brezis([5], pg.97). ■

Teorema 1.4.19 (*Regularidade*) Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular Γ de classe C^2 . Sejam também $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla u dx + \int_{\Omega} \varphi u dx = \int_{\Omega} \varphi f dx, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Então $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$, onde C é uma constante que só depende de Ω .

Prova: Veja Brezis([5]). ■

Teorema 1.4.20 (*Teorema de Unicidade de Holmgren*) Sejam $\Omega_1 \subset \Omega_2$ dois conjuntos abertos e convexos do $\mathbb{R}^n$, e $P(D)$ um operador diferencial com coeficientes constantes tal que todo plano característico Π com respeito a $P(D)$ que satisfaz $\Pi \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ também satisfaz $\Pi \cap \Omega_1 \neq \emptyset$. Então, para solução $u \in D'(\Omega_2)$ da equação $P(D)u = 0$ tal que $u = 0$ em Ω_1 também satisfaz $u = 0$ em Ω_2 .

Prova: Veja Hörmander ([11], pg.129). ■

Proposição 1.4.3.3 Seja $T > 2\delta(\Omega, \Gamma_0)$, onde $\delta(\Omega, \Gamma_0) = \sup_{x \in \Omega} d(x, \Gamma_0)$. Então, qualquer solução fraca ψ do problema

$$\begin{cases} \psi'' - \Delta \psi = 0, & \text{em } Q \\ \psi = 0 & \text{em } \Sigma. \end{cases}$$

tal que $\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0$ sobre $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T) \subset \Sigma$, com $\Gamma_0 \neq \emptyset$, implica que $\psi \equiv 0$.

Prova: Veja Lions ([14], pg 92). ■

Capítulo 2

Solução Fraca e Controlabilidade da Equação da Onda Linear

Neste capítulo, provaremos a existência, unicidade e regularidade da solução fraca da Equação da Onda Linear, além da sua regularidade escondida e a desigualdade de observabilidade na fronteira, e por último, faremos um estudo do controle exato e aproximado na fronteira do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - \Delta y = 0, \text{ em } \mathcal{Q} \\ y = \begin{cases} v, & \text{em } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T) \\ 0 & \text{em } \Sigma - \Sigma_0 \end{cases} \\ y(\cdot, 0) = y_0(x), \quad y'(\cdot, 0) = y_1(x), \text{ em } \Omega \end{array} \right. \quad (2.1)$$

2.1 Solução Fraca

Nesta seção, queremos encontrar uma função $\psi : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi'' - \Delta \psi = f, \text{ em } \mathcal{Q} \\ \psi = 0 \text{ em } \Sigma \\ \psi(\cdot, 0) = \psi_0(x), \quad \psi'(\cdot, 0) = \psi_1(x), \text{ em } \Omega \end{array} \right. \quad (2.2)$$

com $\psi_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\psi_1 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^1([0, T]; L^2(\Omega))$.

Teorema 2.1.1 (*Solução Fraca*) Sejam $\psi_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\psi_1 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^1([0, T]; L^2(\Omega))$, então existe uma única função $\psi : Q \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} \psi &\in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ \psi' &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ \psi'' &\in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega)) \\ \frac{d}{dt}(\psi', v) + ((\psi, v)) &= (f, v) \text{ , } \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ em } \mathcal{D}'(0, T) \text{ ,} \\ \psi'' - \Delta\psi &= f \text{ , em } L^1(0, T; H^{-1}(\Omega)) \\ \psi(0) &= \psi_0 \text{ , } \psi'(0) = \psi_1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Faremos apenas uma ideia da prova¹.

- Existência

Prova: Considere o problema variacional associado à equação (2.2):

$$\frac{d}{dt}(\psi', v) + ((\psi, v)) = (f, v) \text{ , } \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ em } \mathcal{D}'(0, T)$$

Usaremos na ideia da prova, o método de Faedo-Galerkin. Então, seja $V_m = [v_1, \dots, v_m]$, o subespaço de $H_0^1(\Omega)$ de dimensão m , gerado pelos m primeiros vetores. Então, temos o problema aproximado:

$$\begin{cases} (\psi_m'', v) + ((\psi_m, v)) = (f_m, v) \text{ , } \forall v \in V_m \\ \psi_m(0) = \psi_{0m} \in V_m \text{ e } \psi_{0m} \rightarrow \psi_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \\ \psi_m'(0) = \psi_{1m} \in V_m \text{ e } \psi_{1m} \rightarrow \psi_1 \text{ em } L^2(\Omega) \end{cases} \tag{2.4}$$

Pelo teorema de Caratheodory (teorema 1.4.2) , o sistema (2.4) tem solução no intervalo $[0, t_m]$, com $t_m < T$ e essa solução pode ser estendida a todo o intervalo $[0, T]$, depois da seguinte estimativa:

Fazendo em (2.4) $v = \psi_m'(t) \in H_0^1(\Omega)$, obtemos:

$$|\psi_m'(t)| + \|\psi_m(t)\| \leq C \tag{2.5}$$

¹Para maiores detalhes veja Medeiros ([23], Pg.175) .

onde $C > 0$ independe de m . Logo, segue de (2.5) que:

$$\begin{aligned}(\psi_m) & \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ (\psi'_m) & \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega))\end{aligned}\tag{2.6}$$

e por (2.6) juntamente com a imersão $H_0^1(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^2(\Omega)$ e o teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (teorema 1.2.1), temos:

$$\begin{aligned}\psi_m & \xrightarrow{*} \psi \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ \psi_m & \rightarrow \psi \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ \psi'_m & \xrightarrow{*} \psi \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega))\end{aligned}\tag{2.7}$$

Agora, multiplicando (2.4)₁ por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e integrando de 0 a T , temos:

$$-\int_0^T (\psi'_m, v) \theta' dt + \int_0^T ((\psi_m, v)) \theta dt = \int_0^T (f_m, v) \theta dt.$$

Usando as convergências dadas em (2.7) obtemos:

$$-\int_0^T (\psi', v) \theta' dt + \int_0^T ((\psi, v)) \theta dt = \int_0^T (f, v) \theta dt, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Logo,

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\psi', v) + (\psi, v) - (f, v), \theta \right\rangle = 0, \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T) \text{ e } \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

donde

$$\frac{d}{dt} (\psi', v) + ((\psi, v)) = (f, v), \text{ em } \mathcal{D}'(0, T), \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Considerando em particular, $v \in \mathcal{D}(0, T)$, obtemos:

$$\psi'' - \Delta \psi = f, \text{ em } \mathcal{D}'(\mathcal{Q})$$

Portanto

$$\psi'' - \Delta \psi = f, \text{ em } L^1(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Daí, obtemos a solução fraca de (2.2). ■

- As condições iniciais e a unicidade seguem de modo "Standard".

Proposição 2.1.0.4 (*Desigualdade de Energia*) Sejam $E(t) = \frac{1}{2} (|\psi'(t)|^2 + \|\psi(t)\|^2)$ a energia do sistema (2.2) e ψ sua solução fraca, então:

$$|\psi'(t)|^2 + \|\psi(t)\|^2 \leq C \left(|\psi'_1(t)|^2 + \|\psi_0(t)\|^2 + \left[\int_0^T |f(s)| ds \right]^2 \right), \text{ em } [0, T]. \quad (2.8)$$

Prova: Veja Medeiros ([21], pg.23). ■

Teorema 2.1.2 (*Regularidade da Solução Fraca*) A solução fraca do problema (2.2) tem a seguinte regularidade:

$$\psi \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \quad (2.9)$$

Prova: Veja Medeiros ([21], Pg. 29). ■

2.2 Regularidade Escondida para Solução Fraca

Nesta seção, estudaremos a regularidade da derivada normal da solução fraca ψ na fronteira Σ do cilindro $\mathcal{Q}$. Para este fim, consideraremos ψ como a solução fraca do problema (2.2) e usaremos o fato que $\psi' \in L^2(\mathcal{Q})$ resultado desse, obtido na seção (2.1). Logo, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \psi'' &\in H^{-1}(0, T; L^2(\Omega)) \quad e \\ -\Delta\psi &= (f - \psi'') \in L^1(0, T; L^2(\Omega)) + H^{-1}(0, T; L^2(\Omega)) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Quando assumimos que Γ é regular obtemos:

$$\begin{aligned} \psi &\in L^1(0, T; L^2(\Omega)) + H^{-1}(0, T; H^2(\Omega)) \quad e \\ \frac{\partial\psi}{\partial\nu} &\in L^1\left(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) + H^{-1}\left(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right). \end{aligned}$$

O intuito da referida seção é mostrar que

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} \in L^2(\Sigma). \quad (2.11)$$

Lema 2.2.1 *Seja $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ o campo de vetores normais exteriores a Γ . Então existe um campo vetorial $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in [C^1(\overline{\Omega})]^n$ tal que $h_i = \nu_i$ sobre Γ , para $i = 1, \dots, n$.*

Prova: Pelo lema 1.4.9, temos que $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$, para $m > 1 + \frac{n}{2}$. Usando o fato do operador traço $\gamma_0 : H^m(\Omega) \rightarrow H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ser sobrejetivo, então dado $\nu_k \in H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, existe $h_k \in H^m(\Omega)$ tal que $\gamma_0(h_k) = \nu_k$. ■

Lema 2.2.2 *Se $\psi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, então*

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \nu_i \frac{\partial \psi}{\partial \nu}, \text{ sobre } \Gamma \quad (2.12)$$

e

$$|\nabla \psi|^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right)^2 \quad (2.13)$$

Prova: Objetivando provar (2.12), mostraremos primeiro que

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \rho d\Gamma = \int_{\Gamma} \nu_i \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \rho d\Gamma, \quad \forall \rho \in D(\Gamma) \quad (2.14)$$

Sejam $\beta \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\gamma_0(\beta) = \rho$, isto é, $\beta = \rho$ sobre Γ , e $(w_k)_{1 \leq k \leq n}$ o campo vetorial do lema (2.2.1), logo $w_j = \nu_j$ e pelo teorema de Gauss-Green (Teorema 1.4.16), temos:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (\psi w_j \beta) dx = \int_{\Gamma} \nu_i \frac{\partial (\psi w_j \beta)}{\partial x_j} d\Gamma \quad (2.15)$$

Obteremos separadamente expressões para os dois membros da igualdade (2.15).

Assim, na integral do membro esquerdo, aplicamos o lema de Gauss com $\beta = \rho$ e usando o fato que $w_j = \nu_j$, obtemos:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (\psi w_j \beta) dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial (\psi w_j \beta)}{\partial x_j} \nu_j d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} w_j \nu_j d\Gamma + \underbrace{\int_{\Gamma} \psi \frac{\partial (w_j \beta)}{\partial x_j} \nu_j d\Gamma}_0 \quad (2.16)$$

Aplicando o somatório na integral do membro direito de (2.16), temos:

$$\sum_{j=1}^n \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \rho \nu_j^2 d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \rho \sum_{j=1}^n \nu_j^2 d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \rho d\Gamma$$

Logo, obtemos a seguinte igualdade:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (\psi w_j \beta) dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \rho d\Gamma \quad (2.17)$$

Agora, como por hipótese $\psi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, então

$$\int_{\Gamma} \nu_i \frac{\partial (\psi w_j \beta)}{\partial x_j} d\Gamma = \int_{\Gamma} \nu_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} (w_j \beta) d\Gamma = \int_{\Gamma} \nu_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \nu_j \rho d\Gamma \quad (2.18)$$

Note que, aplicando o somatório no último termo de (2.18), obtemos:

$$\sum_{j=1}^n \int_{\Gamma} \nu_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \rho \nu_j d\Gamma = \int_{\Gamma} \nu_i \rho \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \nu_j \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \nu_i \rho (\nabla \psi \cdot \nu) d\Gamma = \int_{\Gamma} \nu_i \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \rho d\Gamma \quad (2.19)$$

Portanto, aplicando o somatório de 1 a n em ambos os membros de (2.15) e depois disso substituindo em (2.17) e (2.19), obtemos (2.12).

Podemos considerar para a prova de (2.13):

$$\sum_{i=1}^n \nu_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \nu_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = |\nabla \psi|^2$$

mas $\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = \nu \cdot \nabla \psi$, então $|\nabla \psi|^2 = \sum_{i=1}^n (\nu_i)^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right)^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right)^2$. ■

Lema 2.2.3 *Seja $(q_k)_{1 \leq k \leq n}$ um campo vetorial tal que $q_k \in C^1(\overline{\Omega})$ para $1 \leq k \leq n$. Se $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de soluções fortes do problema (2.2), então para cada $m \in \mathbb{N}$, temos²:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \nu_k \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma &= \left(\psi'_m(t), q_k \frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x_k} \right) \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \left[|\psi'_m|^2 - |\nabla \psi_m|^2 \right] dxdt \\ &+ \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} dxdt - \int_{\mathcal{Q}} f_m q_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} dxdt. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Prova: Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja ψ_m a solução forte do sistema (2.2). Então $q_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} \in L^2(\Omega)$ e faz sentido a seguinte igualdade

$$\underbrace{\int_{\mathcal{Q}} \psi'' q_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} dxdt}_{*} - \underbrace{\int_{\mathcal{Q}} \Delta \psi_m q_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} dxdt}_{**} = \int_{\mathcal{Q}} f_m q_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} dxdt \quad (2.21)$$

Analisaremos separadamente (*) e (**) em (2.21) :

²Índices repetidos significam soma.

i) Estudo de (*)

Observemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \psi'' q_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} dx dt &= \left(\psi'_m(t), q_k \frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x_k} \right) \Big|_0^T - \int_0^T \int_{\Omega} \psi'_m q_k \frac{\partial \psi'_m}{\partial x_k} dx dt = \\ &= \left(\psi'_m(t), q_k \frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x_k} \right) \Big|_0^T - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} q_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\psi'_m)^2 dx dt, \end{aligned} \quad (2.22)$$

mas

$$-\frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial}{\partial x_k} q_k (\psi'_m)^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial}{\partial x_k} q_k (\psi'_m)^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial}{\partial x_k} [q_k (\psi'_m)^2] dx dt$$

logo, pelo teorema de Gauss-Green (teorema (1.4.16)) temos:

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial}{\partial x_k} [q_k (\psi'_m)^2] dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k (\psi'_m)^2 \nu_k d\Sigma$$

pois $\psi'_m(t) \in H_0^1(\Omega)$. Assim

$$-\frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial}{\partial x_k} (\psi'_m)^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\psi'_m)^2 d\Sigma \quad (2.23)$$

Substituindo (2.23) em (2.22) obtemos:

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} \psi'' q_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} dx dt = (\psi'_m(t), q_k \nabla \psi_m(t)) \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} (\psi'_m)^2 dx dt \quad (2.24)$$

ii) Estudo de (**)

Aplicaremos o Teorema de Green (teorema 1.4.17) em (**) e daí obtemos:

$$-\int_{\mathcal{Q}} \Delta \psi_m q_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} dx dt = -\int_{\Sigma} \frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} q_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} d\Sigma + \underbrace{\int_{\mathcal{Q}} \nabla \psi_m \nabla \left(q_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} \right) dx dt}_{***} \quad (2.25)$$

note que (***) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Q}} \nabla \psi_m \nabla \left(q_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} \right) dx dt &= \\ \int_{\mathcal{Q}} \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \psi_m}{\partial x_n} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(q_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \left(q_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} \right) \right) \right) dx dt &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{Q}} \left[\frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} q_k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} \right] = \\ & \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} q_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} \right)^2 dxdt + \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} dxdt. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Observemos que pelo Lema de Gauss e por (2.13), temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} q_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} \right)^2 dxdt = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} q_k \frac{\partial}{\partial x_k} |\nabla \psi_m|^2 dxdt = \\ & \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k |\nabla \psi_m|^2 \nu_k d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \psi_m|^2 dxdt \end{aligned}$$

Assim, escrevemos (2.26) da seguinte forma:

$$\int_{\mathcal{Q}} \nabla \psi_m \nabla \left(q_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} \right) dxdt = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k |\nabla \psi_m|^2 \nu_k d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \psi_m|^2 dxdt \quad (2.27)$$

Agora substituindo (2.27) em (2.25), obtemos:

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{Q}} \Delta \psi_m q_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} dxdt = - \underbrace{\int_{\Sigma} \frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} q_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} d\Sigma}_{\star} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k |\nabla \psi_m|^2 \nu_k d\Sigma}_{\star\star} - \\ & \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \psi_m|^2 dxdt + \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} dxdt. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Fazendo uma análise de $(\star)$ juntamente com o uso de (2.12) e (2.13), concluímos que:

$$- \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} q_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} d\Sigma = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} q_k \nu_k \frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} d\Sigma = - \int_{\Sigma} q_k \nu_k \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma$$

Da mesma forma para $(\star\star)$, obtemos:

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k |\nabla \psi_m|^2 \nu_k d\Sigma = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} \right)^2 \nu_k d\Sigma$$

Portanto, substituindo $(\star)$ e $(\star\star)$ em (2.28), encontramos:

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathcal{Q}} \Delta \psi_m q_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} dxdt = - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} q_k \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} \right)^2 \nu_k d\Sigma - \\ & \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla \psi_m|^2 dxdt + \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} dxdt. \end{aligned} \quad (2.29)$$

substituindo os resultados obtidos em (i) e (ii), na equação (2.21) obteremos (2.20). ■

Teorema 2.2.4 (*Regularidade escondida*) Se ψ é solução fraca do problema (2.2), então:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma) \quad (2.30)$$

e, além disso, existe uma contante $C > 0$ tal que

$$\int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma \leq C \left(E_0 + \left[\int_0^T |f(s)| ds \right]^2 \right), \quad (2.31)$$

onde $E_0 = E(0)$ é definido como na proposição 2.1.0.4.

Prova: Assumimos que $q_k = h_k$ é o campo vetorial do lema (2.2.1), ou seja, $q_k = v_k$ sobre Γ . Substituindo no lema 2.2.3, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma &= \left(\psi'_m(t), h_k \frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x_k} \right) \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} \left[|\psi'_m|^2 - |\nabla \psi_m|^2 \right] dxdt \\ &\quad + \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} dxdt - \int_{\mathcal{Q}} f_m h_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} dxdt. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Agora, obteremos estimativas para os termos que aparecem no segundo membro de (2.32).

Pelo fato de $h_k \in C^1(\overline{\Omega})$, segue que:

$$\left(\psi'_m(t), h_k \frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x_k} \right) \Big|_0^T \leq 2 \cdot \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \left(\psi'_m(t), h_k \frac{\partial \psi_m(t)}{\partial x_k} \right) \right| \leq \sup_{0 \leq t \leq T} E_m(t) \quad (2.33)$$

Temos ainda que:

$$\frac{1}{2} \left| \int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial h_k}{\partial x_k} \left[|\psi'_m|^2 - |\nabla \psi_m|^2 \right] dxdt \right| \leq C E_m(t) \quad (2.34)$$

e além disso

$$\int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} dxdt \leq C \int_{\mathcal{Q}} |\nabla \psi_m|^2 dxdt \leq C E_m(t). \quad (2.35)$$

Observemos que, como $f_m \in C^0([0, T]; C^1(\overline{\Omega}))$, obtemos a seguinte estimativa:

$$\left| \int_{\mathcal{Q}} f_m h_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} dxdt \right| \leq C \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial x_k} \right)^2 dx \leq C E_m(t). \quad (2.36)$$

Logo, pelas estimativas obtidas de (2.33) à (2.36), podemos deduzir que:

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma \leq C E_m(t) \quad (2.37)$$

e pela proposição 2.1.0.4 segue que:

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma \leq C \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|\psi_m^1|^2 + \|\nabla \psi_m^0\|^2 \right) dx + \int_0^T |f_m(s)| ds \right). \quad (2.38)$$

Assim, podemos observar que $\left(\frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(\Sigma)$, donde existe uma subsequência ainda representada da mesma forma, tal que

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} \xrightarrow{*} \zeta \text{ em } L^2(\Sigma) \quad (2.39)$$

e

$$|\zeta|_{L^2(\Sigma)} \leq \liminf \left| \frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} \right|_{L^2(\Sigma)}. \quad (2.40)$$

Portanto, usando (2.37) e (2.40) finalizaremos a demonstração mostrando que $\zeta = \frac{\partial \psi}{\partial \nu}$.

De fato, observemos que:

$$\begin{aligned} \psi_m &\rightarrow \psi \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ f_m &\rightarrow f \text{ em } L^1(0, T; L^2(\Omega)) \end{aligned} \quad (2.41)$$

e além disso $-\Delta \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$, então

$$\psi \in H_0^1(\Omega), -\Delta \psi \in H^{-1}(\Omega) \implies \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \in H^{-1}(\Gamma).$$

Note que, como

$$-\Delta \psi_m = f_m - \psi_m'' \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; H^{-1}(\Omega))$$

então tomando $\rho \in H^1(\Omega)$, temos

$$\langle -\Delta \psi_m, \rho \rangle = \langle f_m - \psi_m'', \rho \rangle$$

o que implica

$$\left\langle -\frac{\partial \psi_m}{\partial \nu}, \rho \right\rangle + \langle \nabla \psi_m, \nabla \rho \rangle = \langle f_m - \psi_m'', \rho \rangle$$

e pelas convergências (2.39), (2.41) e usando o teorema de Green generalizado (teorema 1.4.11) temos:

$$\langle -\zeta, \rho \rangle + \langle \gamma_1 \psi, \gamma_0 \rho \rangle - \langle \Delta \psi, \rho \rangle = \langle f - \psi'', \rho \rangle$$

por (2.2)₁, obtemos:

$$\langle \gamma_1 \psi, \gamma_0 \rho \rangle = \langle \zeta, \rho \rangle$$

donde

$$\gamma_1 \psi = \zeta = \frac{\partial \psi}{\partial \nu}$$

e portanto, o teorema está demonstrado. ■

Observação 2.2.0.5 Sendo $\{\psi_0, \psi_1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, pelo teorema 2.2.4 a solução fraca ψ de (2.2) com $f \equiv 0$, satisfaz a desigualdade abaixo, denominada **Desigualdade Direta**.

$$\int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma \leq C_0 \left(\|\{\psi_0, \psi_1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \right) \quad (2.42)$$

2.3 Solução Ultrafraca

Nesta seção, buscaremos a existência e unicidade de solução para o seguinte sistema não homogêneo:

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0, & \text{em } \mathcal{Q} \\ y = v & \text{em } \Sigma \\ y(\cdot, 0) = y_0, \quad y'(\cdot, 0) = y_1, & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (2.43)$$

em que os dados iniciais y_0 e y_1 são menos regulares que na solução fraca, ou seja, $y_0 \in L^2(\Omega)$ e $y_1 \in H^{-1}(\Omega)$. Vamos então definir o conceito de solução³ para o sistema (2.43) por meio do *Método da Transposição*.

Agora, Multiplicando a equação (2.43)₁ por uma função $p = p(x, t)$, onde $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$ e integrando formalmente em $\mathcal{Q}$, obtemos:

$$\int_{\mathcal{Q}} y'' p dx dt - \int_{\mathcal{Q}} \Delta y p dx dt = 0 \quad (2.44)$$

³Devido ao método utilizado é também conhecida como "solução por transposição".

Usando integração por partes em t , e além disso o fato que $(y', p)' = (y'', p) + (y', p')$ e $(y', p') = (y, p')' - (y, p'')$, temos:

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \int_{\Omega} y' p dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} y' p' dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla y \nabla p dx dt - \int_{\Sigma} \frac{\partial y}{\partial \nu} p d\Sigma = 0$$

aplicando o teorma de Green implica:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{Q}} y p'' dx dt - \int_{\Omega} y' (0) p (0) dx + \int_{\Omega} y' (T) p (T) dx + \int_{\Omega} y (0) p' (0) dx - \\ & \int_{\Omega} y (T) p' (T) dx - \int_{\mathcal{Q}} y \Delta p dx dt - \int_{\Sigma} \frac{\partial y}{\partial \nu} p d\Sigma + \int_{\Sigma} \frac{\partial p}{\partial \nu} y d\Sigma = 0 \end{aligned}$$

Como não temos informação sobre $y(x, T)$ e $y'(x, T)$, então assumiremos que $p(x, T) = p'(x, T) = 0$ em Ω e $p(x, t) = 0$ sobre Σ , logo:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{Q}} y p'' dx dt - \int_{\Omega} y' (0) p (0) dx + \underbrace{\int_{\Omega} y' (T) p (T) dx}_0 + \int_{\Omega} y (0) p' (0) dx - \\ & \underbrace{\int_{\Omega} y (T) p' (T) dx}_0 - \int_{\mathcal{Q}} y \Delta p dx dt - \underbrace{\int_{\Sigma} \frac{\partial y}{\partial \nu} p d\Sigma}_0 + \int_{\Sigma} \frac{\partial p}{\partial \nu} y d\Sigma = 0 \end{aligned}$$

o que implica:

$$\int_{\mathcal{Q}} y(p'' - \Delta p) dx dt - \int_{\Omega} y' (0) p (0) dx + \int_{\Omega} y (0) p' (0) dx + \int_{\Sigma} \frac{\partial p}{\partial \nu} y d\Sigma = 0$$

Assim, temos

$$\langle y, p'' - \Delta p \rangle = \langle y_1, p(0) \rangle - \langle y_0, p'(0) \rangle - \left\langle \frac{\partial p}{\partial \nu}, y \right\rangle \quad (2.45)$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa pares de dualidade não necessariamente iguais.

Como estamos interessados em obter uma definição para solução Ultrafraca, o candidato para a mesma será um funcional definido pela expressão (2.45). Para isso, de forma natural escolhemos $p = p(x, t)$ como solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} p'' - \Delta p = f, & \text{em } \mathcal{Q} \\ p = 0 & \text{em } \Sigma \\ p(\cdot, T) = p'(\cdot, T) = 0, & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (2.46)$$

Tomando $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ e aplicando uma mudança de variável $(T - t)$ por t , o sistema (2.46) torna-se um caso particular de problema estudado na seção 2.1. Desse modo, segue da proposição 2.1.0.4 e dos teoremas 2.2.4 e 2.1.2 que:

$$\|p'(t)\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} + \|p(t)\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq C \|f\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}, \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma), \quad (2.48)$$

$$\left\| \frac{\partial p}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}^4 \quad (2.49)$$

e

$$p \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \quad (2.50)$$

Podemos concluir de (2.50) e (2.48) que $p'(0) \in L^2(\Omega)$, $p(0) \in H_0^1(\Omega)$ e $\frac{\partial p}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$ assim, podemos escolher,

$$y_0 \in L^2(\Omega), \quad y_1 \in H^{-1}(\Omega) \quad e \quad v \in L^2(\Sigma)$$

e daí, o lado direito de (2.45) fará sentido.

Agora, definimos o funcional $\Upsilon : L^1(0, T; L^2(\Omega)) \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\langle \Upsilon, f \rangle = \langle y_1, p(0) \rangle - \langle y_0, p'(0) \rangle - \int_{\Sigma} \frac{\partial p}{\partial \nu} y d\Sigma \quad (2.51)$$

para todo p solução de (2.46).

Mostraremos que o funcional Υ é uma forma linear contínua. De fato, observando as estimativas dadas em (2.47) e (2.49) temos:

$$\begin{aligned} |\langle \Upsilon, f \rangle| &= |y_0| |p'(0)| + \|y_1\|_{H^{-1}(\Omega)} \|p(0)\| + \left\| \frac{\partial p}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \|y\|_{L^2(\Sigma)} \\ &\leq C \left(|y_0| + \|y_1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)} \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))} \right) \end{aligned} \quad (2.52)$$

⁴Estranhamente, a prova original de Lions (veja [13]) assume que Γ é suave, e somente após dez anos com uma prova técnica não trivial, Chiara(veja [6]) generalizou (2.49) para fronteiras contínuas Lipschitzianas.

então, obtemos o resultado desejado e pelo teorema 1.4.18 segue que $\Upsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ e existe $y \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ tal que

$$\langle \Upsilon, f \rangle = \int_{\mathcal{Q}} y f dx dt, \quad \forall L^1(0, T; L^2(\Omega)) .$$

Além disso por Hahn-Banach, podemos tomar $\|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))} = 1$, obtemos assim:

$$\|\Upsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C \left(|y_0| + \|y_1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)} \right) \quad (2.53)$$

Definição 2.3.0.6 *Dados $\{y_0, y_1, v\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$, dizemos que $y \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ é solução Ultrafraca de (2.43) se satisfaz à identidade:*

$$\int_{\mathcal{Q}} y f dx dt = \langle y_1, p(0) \rangle - (y_0, p'(0)) - \int_{\Sigma} \frac{\partial p}{\partial \nu} y d\Sigma \quad (2.54)$$

$\forall f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ com p solução do sistema (2.46).

Teorema 2.3.1 *(Existência e Unicidade) Existe somente uma solução Ultrafraca y do problema misto não-homogêneo (2.43). Além disso, existe uma constante $C = C(T) > 0$ tal que*

$$\|y\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C \left(|y_0| + \|y_1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|y\|_{L^2(\Omega)} \right) \quad (2.55)$$

Prova: A existência da solução Ultrafraca é uma consequência direta de (2.51), (2.52) e do teorema da representação de Riesz (teorema 1.4.18) para funções pertencentes à $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Passemos agora para a prova da unicidade. Sejam os sistemas:

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0, & \text{em } \mathcal{Q} \\ u = v & \text{em } \Sigma \\ u(\cdot, 0) = u_0, \quad u'(\cdot, 0) = u_1, & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (2.56)$$

e

$$\begin{cases} m'' - \Delta m = 0, & \text{em } \mathcal{Q} \\ m = v & \text{em } \Sigma \\ m(\cdot, 0) = m_0, \quad y'(\cdot, 0) = m_1, & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (2.57)$$

sendo u e m soluções de (2.56) e (2.57) respectivamente. fazendo $w = u - m$, e subtraindo (2.56) e (2.57), obtemos:

$$\begin{cases} w'' - \Delta w = 0, & \text{em } \mathcal{Q} \\ w = 0 & \text{em } \Sigma \\ w(\cdot, 0) = w'(\cdot, 0) = 0, & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (2.58)$$

mas se w é solução do sistema (2.58) então, usando (2.45) temos:

$$\begin{aligned} \langle w, p'' - \Delta p \rangle &= \langle w_1, p(0) \rangle - \langle w_0, p'(0) \rangle - \left\langle \frac{\partial p}{\partial \nu}, w \right\rangle \\ \Rightarrow \langle w, f \rangle &= \int w f = 0, \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{Q}). \end{aligned}$$

Pelo lema 1.4.13, segue que $w = 0$ e portanto $u = m$, mostrando assim a unicidade da solução. ■

2.4 Observabilidade na fronteira

Nosso objetivo, nesta seção, é demonstrar a desigualdade inversa, ou também chamada de desigualdade de observabilidade para o problema de controlabilidade na fronteira.

Antes de enunciarmos o teorema que nos garante a desigualdade inversa, consideremos a seguinte terminologia:

- seja x_0 algum ponto de $\mathbb{R}^n$ tal que $x_0 \notin \Omega$ e $m(x)$ o vetor $x - x_0$ com componentes $m_k(x) = (x - x_0)_k$; $1 \leq k \leq m$.
- $\delta(x_0) = \sup_{x \in \Gamma} \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} = \|m(x)\|_{L^\infty(\Omega)}$.
- Partição da fronteira Γ de Ω (Veja figura 2.1) :

$$\begin{cases} \Gamma_0 = \{x \in \Gamma; m(x)\nu(x) > 0\} \\ \Gamma_{0*} = \{x \in \Gamma; m(x)\nu(x) \leq 0\} = \Gamma - \Gamma_0. \end{cases}$$

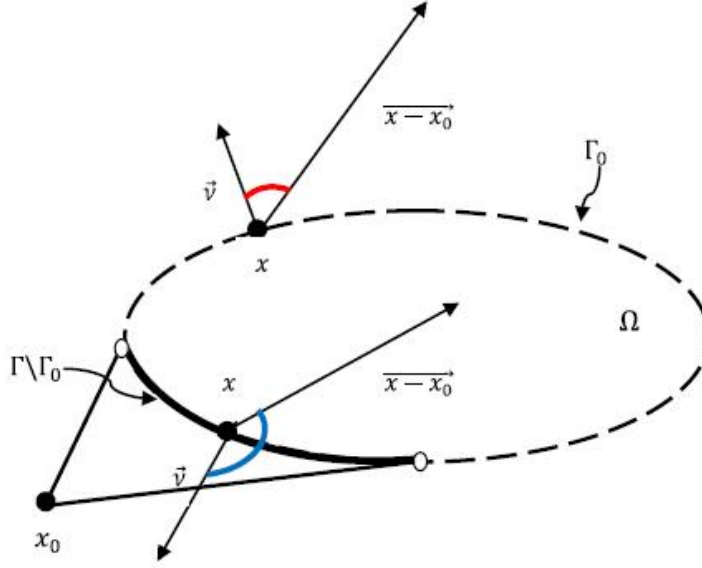


Figura 2.1: *Partição da fronteira Γ de Ω .*

- Partição da fronteira Σ de Q :

$$\begin{cases} \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T) \\ \Sigma_{0*} = \Gamma_{0*} \times (0, T) \end{cases}$$

Agora, enunciaremos o teorema que garante a desigualdade inversa:

Teorema 2.4.1 *Consideremos $T_0 = 2\delta(x_0)$. Se $T > T_0$, então:*

$$\|\psi^0\|^2 + |\psi^1|^2 \leq \frac{\delta(x_0)}{2[T - T(x_0)]} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \quad (2.59)$$

para toda solução forte ϕ de:

$$\begin{cases} \psi'' - \Delta \psi = 0, & \text{em } Q \\ \psi = 0 & \text{em } \Sigma \\ \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \psi'(\cdot, 0) = \psi_1, & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.60)$$

Prova: Pela identidade (2.20) temos:

$$\frac{1}{2} \int q_k v_k \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt = X + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k} (|\psi'|^2 - |\nabla \psi|^2) dx dt +$$

$$\int_{\mathcal{Q}} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx dt ; \text{ onde } X = \left(\psi'_n(t), q_k \frac{\partial \psi(t)}{\partial x_k} \right) \Big|_0^T \quad (2.61)$$

Escolhendo $q_k(x) = (x - x_0)_k = m_k(x)$; $1 \leq k \leq n$, obtemos

$$\frac{\partial q_k}{\partial x_j} = \delta_{jk} \quad \text{e} \quad \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = |\nabla \psi|^2,$$

o que substituindo em (2.61) nos dá

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} m_k \nu_k \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right) d\Gamma dt = X + \frac{n}{2} \int_{\mathcal{Q}} \left(|\psi'|^2 - |\nabla \psi|^2 \right) dx dt + \int_{\mathcal{Q}} |\nabla \psi|^2 dx dt$$

Em Σ_0 temos $0 \leq m_k \nu_k \leq (\sum_{k=1}^n m_k^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^n \nu_k^2)^{\frac{1}{2}} = \|m(x)\|_{\mathbb{R}^n} = \delta(x_0)$.

Portanto

$$\int_{\Sigma} m_k \nu_k \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \leq \int_{\Sigma_0} m_k \nu_k \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma \leq \delta(x_0) \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt.$$

Assim

$$X + \frac{n}{2} \int_{\mathcal{Q}} \left(|\psi'|^2 - |\nabla \psi|^2 \right) dx dt + \int_{\mathcal{Q}} |\nabla \psi|^2 dx dt \leq \frac{\delta(x_0)}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt. \quad (2.62)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} X + \frac{n}{2} \int_{\mathcal{Q}} \left(|\psi'|^2 - |\nabla \psi|^2 \right) dx dt + \int_{\mathcal{Q}} |\nabla \psi|^2 dx dt = \\ X + \frac{n-1}{2} \int_{\mathcal{Q}} \left(|\psi'|^2 - |\nabla \psi|^2 \right) dx dt + \int_0^T E(t) dt, \end{aligned}$$

onde $E(t) = \frac{1}{2} (|\psi'(t)|^2 + \|\psi(t)\|^2)$. Fazendo $Y = \int_{\mathcal{Q}} (|\psi'|^2 - |\nabla \psi|^2) dx dt$, e observando que a energia é conservativa, isto é, $E(t) = E(0)$; $\forall t \in [0, T]$, temos de (2.62) que:

$$X + \frac{n-1}{2} Y + T E(0) \leq \frac{\delta(x_0)}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \quad (2.63)$$

Notemos que ao multiplicarmos ambos lados de (2.60)₁ por ψ e integrando formalmente em $\mathcal{Q}$, obtemos:

$$- \int_{\mathcal{Q}} |\psi|^2 dx dt + (\psi'(t), \psi(t)) \Big|_0^T + \int_{\mathcal{Q}} |\nabla \psi|^2 dx dt = 0. \quad (2.64)$$

Dessa forma,

$$X + \frac{n-1}{2} Y = \int_{\Omega} \psi' \left(m \cdot \nabla \psi + \frac{n-1}{2} \psi \right) dx \Big|_0^T. \quad (2.65)$$

Iremos agora obter uma estimativa para a integral em (2.65) em termos de energia.

Observemos que,

$$\int_{\Omega} \psi \left(m \cdot \nabla \psi + \frac{n-1}{2} \psi \right) dx \leq \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} \psi'^2 dx + \frac{1}{2\mu} \int_{\Omega} \left(m \cdot \nabla \psi + \frac{n-1}{2} \psi \right)^2 dx, \quad (2.66)$$

onde $\mu > 0$ é um número real a ser escolhido posteriormente.

Analisemos a última integral do lado direito de (2.66)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(m \cdot \nabla \psi + \frac{n-1}{2} \psi \right)^2 dx &= \int_{\Omega} (m \cdot \nabla \psi) \psi dx \\ &+ \int_{\Omega} \frac{(n-1)^2}{4} \psi^2 dx + (n-1) \int_{\Omega} (m \cdot \nabla \psi) \psi dx \end{aligned} \quad (2.67)$$

Temos ainda que

$$\int_{\Omega} (m \cdot \nabla \psi) \psi dx = \int_{\Omega} m_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \psi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} m_k \frac{\partial \psi^2}{\partial x_k} dx \quad (2.68)$$

e como $\psi = 0$ sobre Σ , pelo Lema de Gauss, temos:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial (m_k \psi^2)}{\partial x_k} dx = \int_{\Gamma} \nu_k m_k \psi^2 d\Gamma = 0 \quad (2.69)$$

logo

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} m_k \frac{\partial \psi^2}{\partial x_k} dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial m_k}{\partial x_k} \psi^2 dx = -\frac{n}{2} \int_{\Omega} \psi^2 dx \quad (2.70)$$

Assim, substituindo [(2.68) – (2.69)] em (2.67), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(m \cdot \nabla \psi + \frac{n-1}{2} \psi \right)^2 dx &= \int_{\Omega} (m \cdot \nabla \psi)^2 dx + \\ &\left[\frac{(n-1)^2}{4} - \frac{n(n-1)}{2} \right] \int_{\Omega} \psi^2 dx \leq \int_{\Omega} (m \cdot \nabla \psi)^2 dx, \end{aligned} \quad (2.71)$$

pois $\frac{(n-1)^2}{4} - \frac{n(n-1)}{2} = -\frac{(n^2+1)}{4} \leq 0$. Sendo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(m \cdot \nabla \psi + \frac{n-1}{2} \psi \right)^2 dx &\leq \delta(x_0) \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \|m(x)\|_{\mathbb{R}^n}^2 |\nabla \psi|^2 dx = (\delta(x_0))^2 \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx, \end{aligned}$$

segue de (2.71) que:

$$\int_{\Omega} \left(m \cdot \nabla \psi + \frac{n-1}{2} \right)^2 dx \leq \delta(x_0) \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 dx \quad (2.72)$$

Substituindo (2.72) em (2.66) e fazendo $\mu = \delta(x_0)$, obtemos a desigualdade:

$$\int_{\Omega} \psi' \left(m \cdot \nabla \psi + \frac{n-1}{2} \psi \right) dx \leq \delta(x_0) E(0), \quad (2.73)$$

a qual, substituindo em (2.65) nos dá:

$$\begin{aligned} \left| X + \frac{n-1}{2} Y \right| &= \left| \psi'(t), m \cdot \nabla \psi + \frac{n-1}{2} \psi \right|_0^T \\ &\leq 2 \left\| \psi'(t), m \cdot \nabla \psi + \frac{n-1}{2} \psi \right\|_{L^\infty(0,T)} \leq 2\delta(x_0) E(0) = T(x_0) E(0) \end{aligned} \quad (2.74)$$

De acordo com (2.74) deduzimos de (2.63) que:

$$-T(x_0) E(0) + T E(0) \leq \frac{\delta(x_0)}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \quad (2.75)$$

como queríamos demonstrar. ■

Observação 2.4.0.7 *De forma mais precisa, se $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\delta(x_0) = \sup_{x \in \Gamma} \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}$, $T_0 = 2\delta(x_0)$ e $\{f^0, f^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, então para $T > T_0$, existe $C > 0$ tal que*

$$C \left\| \{f^0, f^1\} \right\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 \leq \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma. \quad (2.76)$$

2.5 Controle Aproximado na Fronteira

Nesta seção, temos o intuito de estudar a controlabilidade aproximada na fronteira do sistema (2.1) antes de tratarmos do caso mais complexo, em que dividiremos Σ_0 em duas partes e usaremos a terminologia de Stackelberg, fato a ser tratado no próximo capítulo. Notemos que pela linearidade do sistema (2.1), podemos assumir sem perda de generalidade que $\{y_0, y_1\} = \{0, 0\}$.

Definição 2.5.0.8 Dizemos que (2.1) é aproximadamente controlável se, $\forall \epsilon > 0$ e $\{z^0, z^1\} \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ dados, existe $v \in L^2(\Sigma_0)$, tal que a solução $y = y(x, t, v)$ do sistema (2.1) com dados iniciais nulos, satisfaz:

$$\|\{y'(T), y(T)\} - \{z^1, z^0\}\|_{H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq \epsilon. \quad (2.77)$$

Equivalentemente, (2.1) é aproximadamente controlável se existe $v \in L^2(\Sigma_0)$ (possivelmente infinitos v 's) tal que a solução $y = y(x, t, v)$ do sistema (2.1) satisfaz:

$$y(T) \in z^0 + \alpha_0 B_0 \text{ e } y'(T) \in z^1 + \alpha_1 B_{-1} \text{ , } \forall \alpha_0, \alpha_1 > 0. \quad (2.78)$$

Agora, formularemos um problema, de forma, que apareça um funcional custo, e a partir da minimização do mesmo, forneça-nos o controle desejado.

1) Formulação do Problema de Minimização

Seja $\delta(\Omega, \Gamma_0) = \sup_{x \in \Omega} d(x_0, \Omega)$. Logo, vamos considerar o seguinte problema:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Dados } \{z^1, z^0\} \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega), \alpha_0, \alpha_1 > 0 \text{ e } T > T_0 = 2\delta(\Omega, \Gamma_0), \\ \text{achar } \inf_{v \in L^2(\Sigma_0)} \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} v^2 d\Sigma \text{ entre todos os } v\text{'s (possivelmente infinitos controles)} \\ \text{que implicam (2.78).} \end{array} \right. \quad (2.79)$$

Observação 2.5.0.9 Obtemos controlabilidade exata quando temos $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$.

2) Método de Dualidade de Fenchel⁵

Definimos o operador

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : L^2(\Sigma_0) &\rightarrow H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ v &\mapsto \mathcal{T}v = \{-y'(T, v), y(T, v)\} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Além disso, é fácil ver que $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(L^2(\Sigma_0), H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega))$.

⁵Fenchel, M. W. (1905 – 1988) - Matemático alemão, estudou Geometria e Otimização na universidade de Berlim tendo como principais contribuições a transformada de Legendre-Fenchel e seu teorema de dualidade.

Teorema 2.5.1 *Sejam $T > 2\delta(\Omega, \Gamma_0)$ e $\mathcal{T}$ como foi definido acima. Então, quando v gera $L^2(\Sigma_0)$, $\{-y'(T), y(T)\}$ gera um subespaço (afim) denso de $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$.*

Prova: Para a realizarmos a prova, estudaremos primeiro a imagem do operador $\mathcal{T}$. Seja $f = \{f^0, f^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, e introduziremos o estado adjunto ξ definido como solução única de:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi'' - \Delta \xi = 0, \text{ em } \mathcal{Q} \\ \xi = 0, \text{ em } \Sigma \\ \xi(\cdot, T) = f^0, \xi'(\cdot, T) = f^1, \text{ em } \Omega \end{array} \right. \quad (2.81)$$

Agora, multiplicando (2.81)₁ por y solução de (2.1) e integrando formalmente em $\mathcal{Q}$, obtemos:

$$\int_{\mathcal{Q}} \xi'' y dx dt - \int_{\mathcal{Q}} \Delta \xi y dx dt = 0$$

Observemos que $(\xi', y)' = (\xi'', y) + (\xi', y')$ e $(y', \xi') = (y', \xi)' - (y'', \xi)$, assim temos:

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \xi' y dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \xi' y' dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \xi \nabla y dx dt - \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \xi}{\partial \nu} y d\Sigma = 0$$

o que implica

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \xi'(T) y(T) dx - \underbrace{\int_{\Omega} \xi'(0) y(0) dx}_0 + \int_0^T \int_{\Omega} \xi y'' dx dt - \int_{\Omega} \xi(T) y'(T) dx + \\ & \underbrace{\int_{\Omega} \xi(0) y'(0) dx}_0 - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta y \xi dx dt - \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \xi}{\partial \nu} y d\Sigma + \underbrace{\int_{\Sigma_0} \frac{\partial y}{\partial \nu} \xi d\Sigma}_0 = 0 \end{aligned}$$

Logo, temos

$$\int_{\Sigma_0} \frac{\partial \xi}{\partial \nu} y d\Sigma = -\langle y'(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + (y(T), f^1). \quad (2.82)$$

Sendo $\{f^0, f^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $\{-y'(T, v), y(T, v)\} \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, segue que:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \xi}{\partial \nu} y d\Sigma &= \langle \langle \{-y'(T), y(T)\}, \{f^0, f^1\} \rangle \rangle \\ &= \langle \langle \mathcal{T}v, \{f^0, f^1\} \rangle \rangle = (v, \mathcal{T}^* \{f^0, f^1\})_{L^2(\Sigma_0)} \end{aligned} \quad (2.83)$$

Assim, temos:

$$\mathcal{T}^* \{f^0, f^1\} = \frac{\partial \xi}{\partial \nu}. \quad (2.84)$$

Portanto, se

$$\langle \langle \mathcal{T}v, f \rangle \rangle = - \langle y'(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + (y(T), f^1) = 0, \quad ,$$

para todo $v \in L^2(\Sigma_0)$, então:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \nu} = 0 \quad em \quad \Sigma_0 \quad (2.85)$$

donde, quando $v \in L^2(\Sigma_0)$, segue de (2.1)₂ e (2.85) que $y = 0$ em Σ , daí:

$$\left| \begin{array}{l} y'' - \Delta y = 0, \quad em \quad \mathcal{Q} \\ y = 0 \quad em \quad \Sigma \\ y(0) = y'(0) = 0, \quad em \quad \Omega \end{array} \right.$$

e por unicidade de solução $y \equiv 0$.

Assim,

$$\left| \begin{array}{l} \xi'' - \Delta \xi = 0, \quad em \quad \mathcal{Q} \\ \xi = 0, \quad em \quad \Sigma \end{array} \right.$$

satisfazendo então (2.85). Portanto, pelo teorema de unicidade de Holmgren (teorema 1.4.20), se $T > 2\delta(\Omega, \Gamma_0)$, então $\xi \equiv 0$ em $\mathcal{Q}$, o que implica $f^0 = f^1 = 0$, e pelo teorema 1.2.7

$$\{y(T, v), y'(T, v)\}$$

gera um subespaço denso de $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. ■

Assim, existe $v \in L^2(\Sigma_0)$ tal que:

$$\mathcal{T}v \in \{-z^1 + \alpha_1 B_{-1}, z^0 + \alpha_0 B_0\}. \quad (2.86)$$

Introduziremos os funcionais $G_1 : L^2(\Sigma_0) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $G_2 : H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ como segue:

$$G_1(v) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} v^2 d\Sigma, \quad \forall v \in L^2(\Sigma_0) \quad (2.87)$$

e

$$G_2(\mathcal{T}v) = G_2(\{-a^1, a^0\}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \begin{cases} -a^1 \in z^1 + \alpha_1 B_{-1} \\ a^0 \in z^0 + \alpha_0 B_0 \end{cases} \\ \infty, & \text{de outro modo} \end{cases} \quad (2.88)$$

Logo, como a imagem do operador $\mathcal{T}$ é densa em $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ com $T > 2\delta(\Omega, \Gamma_0)$, podemos reescrever o problema (2.79) da seguinte maneira:

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma_0)} [G_1(v) + G_2(\mathcal{T}v)] \quad (2.89)$$

Aplicaremos a (2.89) o método de dualidade de *Fenchel*, método este, bastante utilizado na teoria de Análise Convexa. Pelo teorema de Fenchel-Rockafellar (teorema 1.3.3) com $V = L^2(\Sigma_0)$, $W = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $\Phi = G_1 : L^2(\Sigma_0) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $\Psi = G_2 : H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ temos que:

- Sendo $\{y'(T, v), y(T, v)\} \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $\exists v \in L^2(\Sigma_0)$ de modo que $\mathcal{T}v = \{-a^1, a^0\}$ satisfaz:

$$\mathcal{T}v \in \{z^1 + \alpha_1 B_{-1}, z^0 + \alpha_0 B_0\} \implies G_2(\mathcal{T}v) = 0$$

$$\therefore v \in \text{Dom}(G_1) \cap \text{Dom}(G_2(\mathcal{T}v)).$$

Temos também que G_1 é contínua em v .

De fato, seja $|v^n - v|_{L^2(\Sigma_0)} \longrightarrow 0$ então, temos:

$$\begin{aligned} |G_1(v^n) - G_1(v)| &= \frac{1}{2} \left| \int_{\Sigma_0} (v^n)^2 d\Sigma - \int_{\Sigma_0} v^2 d\Sigma \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_{\Sigma_0} v^n (v^n - v) d\Sigma - \int_{\Sigma_0} v (v^n - v) d\Sigma \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \left(\int_{\Sigma_0} (v^n)^2 d\Sigma \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\int_{\Sigma_0} (v^n - v)^2 d\Sigma \right)^{\frac{1}{2}}}_{\rightarrow 0} - \left(\int_{\Sigma_0} (v^n - v)^2 d\Sigma \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\int_{\Sigma_0} v^2 d\Sigma \right)^{\frac{1}{2}}}_{\rightarrow 0} \right| \end{aligned}$$

o que implica

$$|G_1(v^n) - G_1(v)| \rightarrow 0$$

portanto G_1 é contínuo em v .

Assim, temos que:

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma_0)} [G_1(v) + G_2(\mathcal{T}v)] = - \min_{\widehat{g} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} [G_1^*(\mathcal{T}^*(\{\widehat{g}^0, \widehat{g}^1\})) + G_2^*(-\{\widehat{g}^0, \widehat{g}^1\})] . \quad (2.90)$$

Observe que $G_1^*(v) = G_1(v)$.

De fato,

$$\begin{aligned} G_1^*(v) &= \sup_{v \in L^2(\Sigma_0)} \left\{ (v^*, v)_{L^2(\Sigma_0)} - G_1(v) ; v^* \in L^2(\Sigma_0) \right\} = \\ &= \sup_{v \in L^2(\Sigma_0)} \left\{ \int_{\Sigma_0} v^2 d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} v^2 d\Sigma \right\} = \sup_{v \in L^2(\Sigma_0)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} v^2 d\Sigma \right\} = G_1(v) , \end{aligned} \quad (2.91)$$

$\forall v \in L^2(\Sigma_0)$. Temos também que:

$$\begin{aligned} G_2^*(\widehat{g}) &= G_2^*(\{\widehat{g}^0, \widehat{g}^1\}) = \\ &= \sup_{\{a^1, a^0\} \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)} \left\{ \langle \langle \{-a^1, a^0\}, \{\widehat{g}^0, \widehat{g}^1\} \rangle \rangle - G_2(\{-a^1, a^0\}) \right\} \end{aligned}$$

utilizando a dualidade entre $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, definida como

$$\langle \langle \{a^1, a^0\}, \{\widehat{g}^0, \widehat{g}^1\} \rangle \rangle = (\widehat{g}^1, a^0) - \langle \widehat{g}^0, a^1 \rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} \quad (2.92)$$

obtemos:

$$\sup_{\{a^1, a^0\} \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)} \left\{ - \langle -a^1, \widehat{g}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + (a^0, \widehat{g}^1) - G_2(\mathcal{T}v) \right\}$$

note que $G_2(\mathcal{T}v) = 0$, desta forma temos:

$$\begin{aligned} &\sup_{(\gamma_1, \gamma_0) \in B_{-1} \times B_0} \left\{ - \langle z^1 + \alpha_1 \gamma_1, \widehat{g}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + (z^0 + \alpha_0 \gamma_0, \widehat{g}^1) \right\} = \\ &= (z^0, \widehat{g}^1) - \langle z^1, \widehat{g}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \alpha_1 \sup_{\gamma_1 \in B_{-1}} \langle -\gamma_1, \widehat{g}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \alpha_0 \sup_{\gamma_0 \in B_0} (\gamma_0, \widehat{g}^1) = \\ &= (z^0, \widehat{g}^1) - \langle z^1, \widehat{g}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \alpha_1 \|\widehat{g}^0\| + \alpha_0 |\widehat{g}^1| , \end{aligned} \quad (2.93)$$

$\forall \widehat{g} = \{\widehat{g}^0, \widehat{g}^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Por (2.84), $\mathcal{T}^*(\widehat{g}) = \frac{\partial \xi}{\partial \nu}$, e usando (2.91), obtemos:

$$G_1^* \left(\frac{\partial \widehat{\xi}}{\partial \nu} \right) = G_1 \left(\frac{\partial \widehat{\xi}}{\partial \nu} \right) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \widehat{\xi}}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma ; \text{ com } \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma_0). \quad (2.94)$$

Portanto, (2.90) é equivalente a

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma_0)} [G_1(v) + G_2(\mathcal{T}v)] = - \min_{\widehat{g} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \widehat{\xi}}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma + \right. \\ \left. (z^0, \widehat{g}^1) - \langle z^1, \widehat{g}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \alpha_1 \|\widehat{g}^0\| + \alpha_0 |\widehat{g}^1| \right\}, \quad (2.95)$$

em que ξ é dada em (2.81).

Considerando a dualidade definida em (2.92), podemos associar a solução do problema dual do lado direito de (2.95) à minimização do funcional $\mathcal{X} : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$\mathcal{X}(\{\widehat{g}^0, \widehat{g}^1\}) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \widehat{\xi}}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma + \\ (z^0, \widehat{g}^1) - \langle z^1, \widehat{g}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \alpha_1 \|\widehat{g}^0\| + \alpha_0 |\widehat{g}^1| \quad (2.96)$$

daí, temos que

$$\inf_{v_1 \in L^2(\Sigma_1)} [G_1(v_1) + G_2(\mathcal{T}v_1)] = - \min_{\widehat{g} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \mathcal{X}(\{\widehat{g}^0, \widehat{g}^1\}) \quad (2.97)$$

Agora, tomando $0 < \epsilon = \min\{\alpha_0, \alpha_1\}$ e usando a norma do gráfico, reescreveremos o funcional (2.96) como:

$$\mathcal{X}_\epsilon(\{\widehat{g}^0, \widehat{g}^1\}) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \widehat{\xi}}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma + \\ \langle \langle \{\widehat{g}^0, \widehat{g}^1\}, \{z^1, z^0\} \rangle \rangle + \epsilon \|\{\widehat{g}^0, \widehat{g}^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}. \quad (2.98)$$

Teorema 2.5.2 *Seja $T > 2\delta(\Omega, \Gamma_0)$. Então o funcional definido em (2.98) atinge um único mínimo $\widehat{g} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, solução do problema dual (2.95).*

Prova: De fato, pelas definições 1.3.1.3, 1.3.1.5 e pela proposição 1.3.1.8, basta provarmos que o funcional $\mathcal{X}_\epsilon$ é *estritamente convexo*.

Para isto, sejam $\lambda \in (0, 1)$ e $\{\widehat{g}^0, \widehat{g}^1\}, \{\widehat{h}^0, \widehat{h}^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ com $\{\widehat{g}^0, \widehat{g}^1\} \neq \{\widehat{h}^0, \widehat{h}^1\}$, e note que, para cada $\{\widehat{g}^0, \widehat{g}^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, existe $\widehat{g} \in L^2(\Sigma_0)$ tal que $\mathcal{T}\widehat{g} = \{\widehat{g}^0, \widehat{g}^1\}$ por (2.80), então:

$$\begin{aligned} & \mathcal{X}_\epsilon \left[\lambda \{\widehat{g}^0, \widehat{g}^1\} + (1 - \lambda) \{\widehat{h}^0, \widehat{h}^1\} \right] = \\ & \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \left(\lambda \widehat{g} + (1 - \lambda) \widehat{h} \right)}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma + \left(z^0, \lambda \widehat{g}^1 + (1 - \lambda) \widehat{h}^1 \right) - \\ & \left\langle z^1, \lambda \widehat{g}^0 + (1 - \lambda) \widehat{h}^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \epsilon \left\| \lambda \widehat{g}^1 + (1 - \lambda) \widehat{h}^1, \lambda \widehat{g}^0 + (1 - \lambda) \widehat{h}^0 \right\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} = \\ & \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \left(\lambda \widehat{g} + (1 - \lambda) \widehat{h} \right)}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma}_{*} + \lambda \left[\left(z^0, \widehat{g}^1 \right) - \left\langle z^1, \widehat{g}^0 \right\rangle + \epsilon \left\| \{\widehat{g}^0, \widehat{g}^1\} \right\| \right] + \\ & \left[\left(z^0, \widehat{h}^1 \right) - \left\langle z^1, \widehat{h}^0 \right\rangle + \epsilon \left\| \{\widehat{h}^0, \widehat{h}^1\} \right\| \right] \end{aligned} \quad (2.99)$$

Analisando (*) em (2.99) obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \left(\lambda \widehat{g} + (1 - \lambda) \widehat{h} \right)}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma = \frac{\lambda^2}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \widehat{g}}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma + \\ & \underbrace{\lambda(1 - \lambda) \int_{\Sigma_0} \frac{\partial \widehat{g}}{\partial \nu} \frac{\partial \widehat{h}}{\partial \nu} d\Sigma}_{**} + \frac{(1 - \lambda)^2}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \widehat{h}}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma \end{aligned} \quad (2.100)$$

Vamos majorar (2.100) usando a desigualdade $\int \frac{\partial \widehat{g}}{\partial \nu} \frac{\partial \widehat{h}}{\partial \nu} < \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial \widehat{g}}{\partial \nu} \right)^2 + \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial \widehat{h}}{\partial \nu} \right)^2$ com $\frac{\partial \widehat{g}}{\partial \nu} \neq \frac{\partial \widehat{h}}{\partial \nu}$ e multiplicando por $\lambda(1 - \lambda) > 0$. em (**). Logo, obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \left(\lambda \widehat{g} + (1 - \lambda) \widehat{h} \right)}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma < \left[\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2} \right] \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \widehat{g}}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma + \\ & \left[\frac{(1 - \lambda)^2}{2} + \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2} \right] \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \widehat{h}}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma = \end{aligned}$$

$$\frac{\lambda}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \widehat{g}}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma + \frac{(1-\lambda)}{2} \int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \widehat{h}}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma. \quad (2.101)$$

Substituindo (2.101) em (2.99) obtemos a desigualdade:

$$\mathcal{X}_\epsilon \left[\lambda \{ \widehat{g}^0, \widehat{g}^1 \} + (1-\lambda) \{ \widehat{h}^0, \widehat{h}^1 \} \right] < \lambda \mathcal{X}_\epsilon (\{ \widehat{g}^0, \widehat{g}^1 \}) + (1-\lambda) \mathcal{X}_\epsilon (\{ \widehat{h}^0, \widehat{h}^1 \}) ,$$

provando assim a convexidade estrita de $\mathcal{X}_\epsilon$. ■

Portanto, provamos que o funcional $\mathcal{X}_\epsilon$ tem um único mínimo $\widehat{g} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, que é solução do problema dual (2.95) e juntamente com o fato de ξ ser a solução única de (2.81), garantem que o *controle ótimo*, isto é, a solução v do problema (2.79) que é dado por:

$$v = \frac{\partial \widehat{\xi}}{\partial \nu} , \quad em \quad \Sigma_0. \quad (2.102)$$

Capítulo 3

Controle Hierárquico

O objetivo desse capítulo, é introduzimos a terminologia do controle ótimo de Stackelberg para solucionar o problema:

$$J_1(v) = \inf_{v \in L^2(\Sigma_0)} \frac{1}{2} \int_{\Sigma_0} v^2 d\Sigma \quad (3.1)$$

restrito a

$$\begin{cases} y'(T, v) & \in y^T + \alpha_1 B_{-1} \\ y(T, v) & \in y^T + \alpha_0 B_0 \end{cases}, \quad (3.2)$$

em que $\{y^T, y^T\}$ são dados pertencentes a $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, e a partir disso, buscar um sistema de otimalidade para o controle seguidor e de uma relação entre o controle líder, e o controle seguidor de forma que dado v_1 , obtemos $v_2 = \mathcal{F}(v_1)$. Temos também a finalidade de buscar a controlabilidade do sistema, e depois encontrarmos o sistema de otimalidade para o controle líder.

3.1 Controle Hierárquico Segundo a Terminologia Stackelberg

Nesta seção, temos o propósito de inserir a noção de controle hierárquico na terminologia Stackelberg como alternativa para solucionar o problema (3.1).

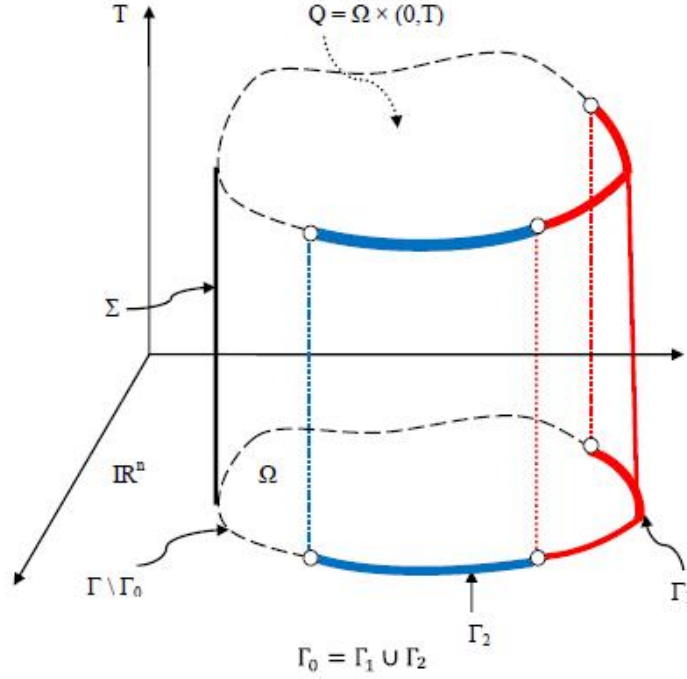


Figura 3.1: Cilindro do $\mathbb{R}^{n+1}$ com separação de parte da fronteira $\Sigma_0 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

A fim de aplicar essa terminologia, dividiremos Γ_0 em duas partes $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Gamma_0$ com

$$\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad (3.3)$$

a menos de um conjunto de medida nula, e $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ (Veja figura 3.1). Consideremos também

$$v = \{v_1, v_2\} ; v_i \in L^2(\Sigma_i) , i = 1, 2. \quad (3.4)$$

Também podemos escrever

$$v = v_1 + v_2 \text{ com } \Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad (3.5)$$

Então, reescrevemos (2.1) assim:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - \Delta y = 0, \text{ em } \mathcal{Q} \\ y = \begin{cases} v_1 & , \text{ em } \Sigma_1 \\ v_2 & , \text{ em } \Sigma_2 \\ 0 & , \text{ em } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{cases} \\ y(0) = y'(0) = 0, \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Agora, usando a ideia de Stackelberg¹ assumimos que desejamos uma hierarquia na decomposição de (3.3) e (3.4), onde v_1 é o controle líder e v_2 é o seguidor, temos como objetivo principal obter (3.1) restrito a (3.2) com um custo mínimo e como segunda prioridade mantermos

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} [y(x, t, v) - y_2(x, t)]^2 dx dt + \frac{\beta}{2} \int_{\Sigma_0} v^2 d\Sigma \quad (3.7)$$

o menor possível, com $\beta > 0$ e $y_2(x, t) \in L^2(\mathcal{Q})$ sendo um estado predefinido.

Então, definimos

$$y(v) = y(v_1, v_2) \quad , \quad (3.8)$$

com a separação da fronteira como em (3.3), escrevemos (3.7) como:

$$J_2(v_1, v_2) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} [y(v_1, v_2) - y_2(x, t)]^2 dx dt + \frac{\beta}{2} \int_{\Sigma_2} v_2^2 d\Sigma \quad (3.9)$$

pois veremos em (3.10) que v_1 será considerado fixo.

Consideramos o primeiro problema:

$$\begin{aligned} & \text{Dado } v_1 \in L^2(\Sigma_1) \text{ , encontrar} \\ & \inf_{v_2 \in L^2(\Sigma_2)} J_2(v_1, v_2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Este problema admite uma única solução (como será visto na seção 3.2)

$$v_2 = \mathcal{F}(v_1) \quad (3.11)$$

¹Como as funções aqui são do tipo controlabilidade, Von Stackelberg introduziu a idéia completamente diferente no contexto econômico.

Agora se substituirmos (3.11) em (3.8) solução de (3.6), obteremos o estado $y(v_1, \mathcal{F}(v_1))$ solução do sistema:

$$\left| \begin{array}{l} y'' - \Delta y = 0, \text{ em } \mathcal{Q} \\ y = \begin{cases} v_1 & , \text{ em } \Sigma_1 \\ \mathcal{F}(v_1) & , \text{ em } \Sigma_2 \\ 0 & , \text{ em } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{cases} \\ y(0) = y'(0) = 0, \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Logo, podemos substituir de forma natural o problema (3.1) restrito a (3.2) por:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } v_1 \in L^2(\Sigma_1) \text{ que minimize } J_1(v_1) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} v_1^2 d\Sigma \\ \text{com } v_1 \text{ restrito a: } \begin{cases} y(T; v_1, \mathcal{F}(v_1)) \in y^T + \alpha_0 B_0 \\ y'(T, v_1, \mathcal{F}(v_1)) \in y'^T + \alpha_1 B_{-1} \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

desde que isso seja possível $\forall \alpha_0, \alpha_1 > 0$ suficientemente pequenos e $\{y'^T, y^T\} \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

3.2 Sistema de otimalidade para o controle seguidor

A finalidade desta seção, é buscar a otimalidade para o controle seguidor, a partir de um certo controle líder dado. Faremos isso utilizando a estratégia descrita na seção 3.1 para resolver o problema (3.10) partindo da minimização do funcional (3.9).

Assim, seja o funcional (3.7), que com a separação de parte da fronteira tal que $\Sigma_0 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ foi escrito como (3.9), então para a solução do problema (3.10), minimizaremos o funcional J_2 fazendo uso do teorema 1.3.1.

De fato, sejam $U_{ad} = \{(y, v_2) \in L^2(\mathcal{Q}) \times L^2(\Sigma_2)\} \subset (L^2(\mathcal{Q}))^2$ e $J_2(y, v_2) : U_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$, definido por (3.9); assumiremos também que $y(v_1, v_2) = y$, então:

- Claramente U_{ad} é não-vazio, e sendo o mesmo um subespaço de um espaço de Hilbert, é convexo e fechado
- J_2 é fracamente coercivo

De fato, usando a segunda desigualdade triangular temos:

$$\|y - y_2\|_{L^2(\mathcal{Q})} \geq \left| \|y\|_{L^2(\mathcal{Q})} - \|y_2\|_{L^2(\mathcal{Q})} \right|$$

e como y_2 é fixo, segue que

$$\lim_{\substack{\|y\|_{L^2(\mathcal{Q})} \rightarrow \infty \\ \|v_2\|_{L^2(\Sigma_2)} \rightarrow \infty}} J_2(y, v_2) = \frac{1}{2} \|y - y_2\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2 + \frac{\beta}{2} \|v_2\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \rightarrow \infty$$

daí segue a coercividade fraca de J_2 .

- J_2 é fracamente semicontínuo inferiormente

Sejam duas sequências $(v_2^n), (y^n) \subset U_{ad}$ tais que $y^n \rightharpoonup y$ e $v^n \rightharpoonup v$. Logo, temos que para $n, N \in \mathbb{N}$, com $n > N$

$$\begin{cases} \|y^n - y\|_{L^2(\mathcal{Q})} < \epsilon \\ \|v^n - v\|_{L^2(\Sigma_2)} < \epsilon \end{cases} \quad (3.14)$$

Assim,

$$\begin{aligned} |J_2(y^n, v_2^n) - J_2(y, v_2)| &= \\ \left| \frac{1}{2} \left(\|y^n - y_2\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2 - \|y - y_2\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2 \right) + \frac{\beta}{2} \left(\|v_2^n\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 - \|v_2\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \right) \right| &\leq \\ \frac{1}{2} \left| \|y^n - y_2\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2 - \|y - y_2\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2 \right| + \frac{\beta}{2} \left| \|v_2^n\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 - \|v_2\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \right| &\leq \\ \frac{C_1}{2} \|y^n - y_2 - y + y_2\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2 + \frac{C_2\beta}{2} \left(\|v_2^n - v_2\|_{L^2(\Sigma_2)}^2 \right) &\leq C\epsilon, \end{aligned}$$

onde $C = \max \left\{ \frac{C_1}{2}, \frac{C_2\beta}{2} \right\}$, com isso obtemos a continuidade de J_2 e consequentemente a fraca semicontinuidade inferior.

- J_2 é estritamente convexo

De fato, sejam $\lambda \in (0, 1)$ e $(y, v_2), (\tilde{y}, \tilde{v}_2) \in U_{ad}$ com $(y, v_2) \neq (\tilde{y}, \tilde{v}_2)$. Escrevendo y_2 como $y_2 = \lambda y_2 + (1 - \lambda)y_2$, temos:

$$J_2[\lambda y + (1 - \lambda)\tilde{y} - (\lambda y_2 + (1 - \lambda)y_2), \lambda v_2 + (1 - \lambda)\tilde{v}_2] =$$

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} [\lambda y + (1 - \lambda) \tilde{y} - \lambda y_2 - (1 - \lambda) y_2]^2 dxdt + \frac{\beta}{2} \int_{\Sigma_2} (\lambda v_2 + (1 - \lambda) \tilde{v}_2)^2 d\Sigma. \quad (3.15)$$

Analisando o lado direito de (3.15) obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} [\lambda(y - y_2) + (1 - \lambda)(\tilde{y} - y_2)]^2 dxdt + \frac{\beta}{2} \int_{\Sigma_2} (\lambda v_2 + (1 - \lambda) \tilde{v}_2)^2 d\Sigma = \\ & \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathcal{Q}} (y - y_2)^2 dxdt + \underbrace{\lambda(1 - \lambda) \int_{\mathcal{Q}} (y - y_2)(\tilde{y} - y_2) dxdt}_{*} + \frac{(1 - \lambda)^2}{2} \int_{\mathcal{Q}} (y - \tilde{y}_2)^2 dxdt + \\ & \underbrace{\frac{\beta\lambda^2}{2} \int_{\Sigma_2} v_2^2 d\Sigma + \beta\lambda(1 - \lambda) \int_{\Sigma_2} v_2 \tilde{v}_2 d\Sigma}_{**} + \frac{\beta(1 - \lambda)^2}{2} \int_{\Sigma_2} \tilde{v}_2^2 d\Sigma \end{aligned} \quad (3.16)$$

Vamos majorar (*) e (**) em (3.16) usando a desigualdade $\int ab < \frac{1}{2} \int a^2 + \frac{1}{2} \int b^2$, com $a \neq b$:

(*) Aplicando a desigualdade e depois multiplicando por $\lambda(1 - \lambda) > 0$ obtemos:

$$\begin{aligned} & \lambda(1 - \lambda) \int_{\mathcal{Q}} (y - y_2)(\tilde{y} - y_2) dxdt < \\ & \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2} \int_{\mathcal{Q}} (y - y_2)^2 dxdt + \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2} \int_{\mathcal{Q}} (\tilde{y} - y_2)^2 dxdt. \end{aligned} \quad (3.17)$$

(**) Aplicando a desigualdade e depois multiplicando por $\beta\lambda(1 - \lambda) > 0$ obtemos:

$$\beta\lambda(1 - \lambda) \int_{\Sigma_2} v_2 \tilde{v}_2 d\Sigma < \frac{\lambda\beta(1 - \lambda)}{2} \int_{\Sigma_2} v_2^2 d\Sigma + \frac{\lambda\beta(1 - \lambda)}{2} \int_{\Sigma_2} \tilde{v}_2^2 d\Sigma. \quad (3.18)$$

Usando (3.17) e (3.18) em (3.16), obtemos a desigualdade estrita:

$$\begin{aligned} & J_2(\lambda y + (1 - \lambda) \tilde{y} - y_2, \lambda v_2 + (1 - \lambda) \tilde{v}_2) < \\ & \frac{\lambda^2}{2} \int_{\mathcal{Q}} (y - y_2)^2 dxdt + \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2} \int_{\mathcal{Q}} (y - y_2)^2 dxdt + \frac{(1 - \lambda)^2}{2} \int_{\mathcal{Q}} (y - \tilde{y}_2)^2 dxdt + \\ & \frac{\lambda(1 - \lambda)}{2} \int_{\mathcal{Q}} (y - \tilde{y}_2)^2 dxdt + \frac{\beta\lambda^2}{2} \int_{\Sigma_2} v_2^2 d\Sigma + \frac{\lambda\beta(1 - \lambda)}{2} \int_{\Sigma_2} v_2^2 d\Sigma + \\ & \frac{\lambda\beta(1 - \lambda)}{2} \int_{\Sigma_2} \tilde{v}_2^2 d\Sigma + \frac{\beta(1 - \lambda)^2}{2} \int_{\Sigma_2} \tilde{v}_2^2 d\Sigma = \end{aligned}$$

$$\frac{\lambda}{2} \int_{\mathcal{Q}} [y - y_2]^2 dxdt + \frac{\lambda\beta}{2} \int_{\Sigma_2} v_2^2 d\Sigma + \frac{(1-\lambda)}{2} \int_{\mathcal{Q}} [\tilde{y} - y_2]^2 dxdt + \frac{(1-\lambda)\beta}{2} \int_{\Sigma_2} \tilde{v}_2^2 d\Sigma = \lambda J_2(y, v_2) + (1-\lambda) J_2(\tilde{y}, \tilde{v}_2).$$

Provando assim a convexidade estrita de J_2 .

Portanto, existe uma única solução v_2 para o problema (3.10), como para cada v_1 dado encontramos uma única solução v_2 , podemos relacionar uma dependência entre v_1 e v_2 de forma que $v_2 = \mathcal{F}(v_1)$.

Agora, dado v_1 , calcularemos a derivada de Gateaux do funcional $J_2(y; v_1, v_2)$ e igualaremos a zero, encontrando assim a equação de Euler associada ao problema (3.10):

$$\begin{aligned} (J_2)'(y, v_2) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [J_2(y + \epsilon\theta_1, v_2 + \epsilon\theta_2) - J_2(y, v_2)] = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} (y + \epsilon\theta_1 - y_2, v_2 + \epsilon\theta_2)^2 dxdt - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} (y - y_2, v_2)^2 dxdt + \right. \\ &\quad \left. \frac{\beta}{2} \int_{\Sigma_2} (v_2 + \epsilon\theta_2)^2 d\Sigma - \frac{\beta}{2} \int_{\Sigma_2} v_2^2 d\Sigma \right] = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} ((y - y_2)^2 + 2(y - y_2)\epsilon\theta_1 + \epsilon^2\theta_1^2, v_2^2 + 2v_2\epsilon\theta_2 + \epsilon^2\theta_2^2) dxdt - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} ((y - y_2)^2, v_2^2) dxdt + \frac{\beta}{2} \int_{\Sigma_2} (v_2^2 + 2v_2\epsilon\theta_2 + \epsilon^2\theta_2^2) d\Sigma - \frac{\beta}{2} \int_{\Sigma_2} v_2^2 d\Sigma \right] = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} (2(y - y_2)\epsilon\theta_1 + \epsilon^2\theta_1^2, v_2^2 + 2v_2\epsilon\theta_2 + \epsilon^2\theta_2^2) dxdt + \frac{\beta}{2} \int_{\Sigma_2} (2v_2\epsilon\theta_2 + \epsilon^2\theta_2^2) d\Sigma \right] = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \int_{\mathcal{Q}} (2(y - y_2)\theta_1 + \epsilon\theta_1^2, v_2^2 + 2v_2\theta_2 + \epsilon\theta_2^2) dxdt + \frac{\beta}{2} \int_{\Sigma_2} (2v_2\theta_2 + \epsilon\theta_2^2) d\Sigma \right] \quad (3.19) \end{aligned}$$

passando ao limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ em (3.19) obtemos:

$$J_2'(y; v_1, v_2) = \int_{\mathcal{Q}} (y - y_2)\theta_1 dxdt + \beta \int_{\Sigma_2} v_2\theta_2 d\Sigma. \quad (3.20)$$

Assim, a equação de Euler de (3.9) é dada por:

$$\int_{\mathcal{Q}} (y - y_2)\hat{y} dxdt + \beta \int_{\Sigma_2} v_2\hat{v}_2 d\Sigma = 0, \quad \forall \hat{v}_2 \in L^2(\Sigma_2) \quad (3.21)$$

donde, em (3.21), y é solução de (3.12), v_1 é dado e v_2 é a solução (3.10). Além disso, $\widehat{y}$ é solução de:

$$\left| \begin{array}{l} \widehat{y}'' - \Delta \widehat{y} = 0, \text{ em } Q \\ \widehat{y} = \begin{cases} 0 & , \text{ em } \Sigma_1 \\ \widehat{v}_2 & , \text{ em } \Sigma_2 \\ 0 & , \text{ em } \Sigma \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \end{cases} \\ \widehat{y}(\cdot, 0) = \widehat{y}'(\cdot, 0) = 0, \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Agora, Multiplicando a equação dada em (3.22)₁ por uma função $p = p(x, t)$, onde $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$ e integrando formalmente em Q , obtemos:

$$\int_Q \widehat{y}'' p dx dt - \int_Q \Delta \widehat{y} p dx dt = 0 \quad (3.23)$$

Usando integração por partes em t , e além disso o fato que $(\widehat{y}', p)' = (\widehat{y}'', p) + (\widehat{y}', p')$ e $(\widehat{y}', p') = (\widehat{y}, p')' - (\widehat{y}, p'')$, temos:

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \int_\Omega \widehat{y}' p dx dt - \int_0^T \int_\Omega \widehat{y}' p' dx dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla \widehat{y} \nabla p dx dt - \int_\Sigma \frac{\partial \widehat{y}}{\partial \nu} p d\Sigma = 0$$

aplicando o teorema de Green implica que:

$$\begin{aligned} \int_Q \widehat{y} p'' dx dt + \underbrace{\int_\Omega \widehat{y}'(T) p(T) dx - \int_\Omega \widehat{y}'(0) p(0) dx}_0 - \int_\Omega \widehat{y}(T) p'(T) dx + \\ \underbrace{\int_\Omega \widehat{y}(0) p'(0) dx}_0 - \int_Q \widehat{y} \Delta p dx dt - \int_\Sigma \frac{\partial \widehat{y}}{\partial \nu} p d\Sigma + \int_\Sigma \frac{\partial p}{\partial \nu} \widehat{y} d\Sigma = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Como não temos informação sobre $\widehat{y}(x, T)$ e $\widehat{y}'(x, T)$, então assumiremos que $p(x, T) = p'(x, T) = 0$ em Ω e $p(x, t) = 0$ sobre Σ , o que juntamente com a separação da fronteira em (3.24), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_Q \widehat{y} p'' dx dt + \underbrace{\int_\Omega \widehat{y}'(T) p(T) dx}_0 - \underbrace{\int_\Omega \widehat{y}(T) p'(T) dx}_0 - \int_Q \widehat{y} \Delta p dx dt - \\ \underbrace{\int_\Sigma \frac{\partial \widehat{y}}{\partial \nu} p d\Sigma}_0 + \underbrace{\int_{\Sigma_1} \frac{\partial p}{\partial \nu} \widehat{y} d\Sigma}_0 + \int_{\Sigma_2} \frac{\partial p}{\partial \nu} \widehat{y} d\Sigma = 0. \end{aligned}$$

Supondo que $p'' - \Delta p = y - y_2$, obtemos:

$$\int_{\mathcal{Q}} \widehat{y}(y - y_2) dx dt + \beta \int_{\Sigma_2} \frac{\partial p}{\partial \nu} \widehat{v}_2 d\Sigma = 0 \quad (3.25)$$

Considerando p como solução do problema adjunto associado:

$$\left\{ \begin{array}{l} p'' - \Delta p = y - y_2, \text{ em } \mathcal{Q} \\ p = 0, \text{ em } \Sigma \\ p(T) = p'(T) = 0, \text{ em } \Omega. \end{array} \right.$$

e observando que $\widehat{y}$ é solução ultrafraca de (3.22), obtemos:

$$\int_{\mathcal{Q}} \widehat{y}(p'' - \Delta p) dx dt + \int_{\Sigma_2} \frac{\partial p}{\partial \nu} \widehat{v}_2 d\Sigma = 0. \quad (3.26)$$

Assim, comparando (3.21) com (3.26) temos que

$$\int_{\Sigma_2} \frac{\partial p}{\partial \nu} \widehat{v}_2 d\Sigma = \int_{\Sigma_2} \beta v_2 \widehat{v}_2 d\Sigma, \forall \widehat{v}_2 \in L^2(\Sigma_2)$$

daí teremos

$$v_2 = \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \nu} d\Sigma. \quad (3.27)$$

Portanto, podemos resumir o estudo do controle seguidor da seguinte forma:

Dado um certo controle $v_1 \in L^2(\Sigma_1)$, o controle seguidor $v_2 = \mathcal{F}(v_1) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \nu} d\Sigma$ em Σ_2 , donde o par

$$\{y, p\} = \{y(v_1), p(v_1)\} \quad (3.28)$$

é solução única do sistema de otimalidade:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - \Delta y = 0, \text{ em } \mathcal{Q} \\ p'' - \Delta p = y - y_2, \text{ em } \mathcal{Q} \\ y = \begin{cases} v_1, & \text{em } \Sigma_1 \\ \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \nu}, & \text{em } \Sigma_2 \\ 0, & \text{em } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{cases} \\ p = 0, \text{ em } \Sigma \\ y(0) = y'(0) = 0, \text{ em } \Omega \\ p(T) = p'(T) = 0, \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.29)$$

3.3 Controlabilidade aproximada

Mostraremos nesta seção um resultado de controlabilidade aproximada para o sistema (3.29), ou seja, mostraremos que no caso (3.4):

$$\left| \begin{array}{l} \{y(T, v_1, \mathcal{F}(v_1)), y'(T, v_1, \mathcal{F}(v_1))\} \text{ gera um subespaço (afim) denso de} \\ L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \text{ quando } v_1 \text{ gera } L^2(\Sigma_1), \text{ desde que } T > 2\delta(\Omega, \Gamma_1). \end{array} \right. \quad (3.30)$$

que é um resultado de controlabilidade aproximada.

Para a solução do problema de controlabilidade (3.30), reescreveremos (3.12) e (3.13) usando (3.28) e (3.29), além disso, introduziremos:

$$\left| \begin{array}{l} y = \bar{y} + z \\ p = \bar{p} + q \end{array} \right. \quad (3.31)$$

em que $\bar{y}$ é solução de:

$$\left| \begin{array}{l} \bar{y}'' - \Delta \bar{y} = 0, \text{ em } \mathcal{Q} \\ \bar{y} = \begin{cases} 0 & , \text{ em } \Sigma_1 \\ \frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \nu} & , \text{ em } \Sigma_2 \\ 0 & , \text{ em } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{cases} \\ \bar{y}(0) = \bar{y}'(0) = 0, \text{ em } \Omega \end{array} \right. \quad (3.32)$$

e $\bar{p}$ satisfaz:

$$\left| \begin{array}{l} \bar{p}'' - \Delta \bar{p} = 0, \text{ em } \mathcal{Q} \\ \bar{p} = \begin{cases} 0 & , \text{ em } \Sigma_1 \\ \frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \nu} & , \text{ em } \Sigma_2 \\ 0 & , \text{ em } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{cases} \\ \bar{p}(0) = \bar{p}'(0) = 0, \text{ em } \Omega, \end{array} \right.$$

z e q em (3.31) satisfazem:

$$\left| \begin{array}{l} z'' - \Delta z = 0, \text{ em } \mathcal{Q} \\ z = \begin{cases} v_1 & , \text{ em } \Sigma_1 \\ \frac{1}{\beta} \frac{\partial q}{\partial \nu} & , \text{ em } \Sigma_2 \\ 0 & , \text{ em } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{cases} \\ z(0) = z'(0) = 0, \text{ em } \Omega \end{array} \right. \quad (3.33)$$

e

$$\left| \begin{array}{l} q'' - \Delta q = z, \text{ em } \mathcal{Q} \\ q = 0, \text{ em } \Sigma_1 \\ q(\cdot, T) = q'(\cdot, T) = 0, \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Definimos o operador

$$\begin{aligned} L : L^2(\Sigma_1) &\rightarrow H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ v_1 &\mapsto Lv_1 = \{z'(T, v_1), -z(T, v_1)\} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Além disso, observe que $L \in \mathcal{L}(L^2(\Sigma_1), H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega))$.

Agora, mostraremos que *quando v_1 gera $L^2(\Sigma_1)$ (desde que $T > 2\delta(\Omega, \Gamma_1)$), então $\{z'(T), -z(T)\}$ gera um subespaço (afim) denso de $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$.*

Com esse intuito, estudaremos primeiro a imagem do operador L . Assim, Seja $f = \{f^0, f^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, e introduziremos estados adjuntos φ e ψ definidos como solução única de:

$$\left| \begin{array}{l} \varphi'' - \Delta \varphi = \psi, \text{ em } \mathcal{Q} \\ \varphi = 0, \text{ em } \Sigma \\ \varphi(\cdot, T) = f^0, \varphi'(\cdot, T) = f^1, \text{ em } \Omega \end{array} \right. \quad (3.36)$$

com ψ satisfazendo

$$\left| \begin{array}{l} \psi'' - \Delta \psi = 0, \text{ em } \mathcal{Q} \\ \psi = \begin{cases} 0 & , \text{ em } \Sigma_1 \\ \frac{1}{\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} & , \text{ em } \Sigma_2 \\ 0 & , \text{ em } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{cases} \\ \psi(0) = \psi'(0) = 0, \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.37)$$

Agora, Multiplicando $(3.37)_1$ por q solução de (3.34) e integrando formalmente em $\mathcal{Q}$, obtemos:

$$\int_{\mathcal{Q}} \psi'' q dx dt - \int_{\mathcal{Q}} \Delta \psi q dx dt = 0$$

Observemos que $(\psi', q)' = (\psi'', q) + (\psi', q')$ e $(q', \psi) = (q', \psi)' - (q'', \psi)$, assim temos:

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi' q dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \psi' q' dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla q dx dt - \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} q d\Sigma = 0$$

o que implica

$$\underbrace{\int_{\Omega} \psi' (T) q (T) dx}_0 - \underbrace{\int_{\Omega} \psi' (0) q (0) dx}_0 + \int_0^T \int_{\Omega} \psi q'' dx dt - \int_0^T \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi q' dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta q \psi dx dt + \int_{\Sigma} \frac{\partial q}{\partial \nu} \psi d\Sigma - \underbrace{\int_{\Sigma} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} q d\Sigma}_0 = 0$$

separando a integral sobre a fronteira, obtemos:

$$\underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} (q'' - \Delta q) \psi dx dt}_{z\psi} - \underbrace{\int_{\Omega} \psi (T) q' (T) dx}_0 + \underbrace{\int_{\Omega} \psi (0) q' (0) dx}_0 + \int_{\Sigma_2} \frac{1}{\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial q}{\partial \nu} d\Sigma + \underbrace{\int_{\Sigma_1} \frac{\partial q}{\partial \nu} \psi d\Sigma}_0 = 0$$

portanto,

$$\int_0^T \int_{\Omega} z \psi dx dt = -\frac{1}{\beta} \int_{\Sigma_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial q}{\partial \nu} d\Sigma. \quad (3.38)$$

Agora, multiplicamos $(3.36)_1$ por z solução de (3.33) e integrando formalmente em $\mathcal{Q}$, obtemos:

$$\int_{\mathcal{Q}} \varphi'' z dx dt - \int_{\mathcal{Q}} \Delta \varphi z dx dt = \int_{\mathcal{Q}} \psi z dx dt$$

notemos que $(\varphi', z)' = (\varphi'', z) + (\varphi', z')$ e $(z', \varphi) = (z', \varphi)' - (z'', \varphi)$, assim temos:

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi' z dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \varphi' z' dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla z dx dt - \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} z d\Sigma = \int_0^T \int_{\Omega} \psi z dx dt$$

o que implica:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \varphi'(T) z(T) dx - \underbrace{\int_{\Omega} \varphi'(0) z(0) dx}_0 + \int_0^T \int_{\Omega} z'' \varphi dx dt - \\
& \int_0^T \int_{\Omega} \Delta z \varphi dx dt - \int_{\Omega} z'(T) \varphi(T) dx dt + \underbrace{\int_{\Omega} z'(0) \varphi(0) dx dt}_0 - \\
& \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} z d\Sigma + \underbrace{\int_{\Sigma} \frac{\partial z}{\partial \nu} \varphi d\Sigma}_0 = \int_0^T \int_{\Omega} \psi z dx dt. \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Logo, separando a fronteira em (3.39) e usando (3.38) obtemos:

$$\begin{aligned}
& (z(T), f^1) - \langle z'(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} (z'' - \Delta z) \varphi dx dt}_0 - \\
& \int_{\Sigma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \underbrace{z}_{v_1} d\Sigma - \int_{\Sigma_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \underbrace{z}_{\frac{1}{\beta} \frac{\partial q}{\partial \nu}} d\Sigma = -\frac{1}{\beta} \int_{\Sigma_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial q}{\partial \nu} d\Sigma
\end{aligned}$$

o que implica:

$$-\int_{\Sigma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} v_1 d\Sigma = \langle z'(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - (z(T), f^1) \tag{3.40}$$

ou seja,

$$\langle \langle Lv_1, f \rangle \rangle = - \int_{\Sigma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} v_1 d\Sigma. \tag{3.41}$$

Portanto, se $\langle \langle Lv, f \rangle \rangle = \langle z'(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - (z(T), f^1) = 0$, para todo $v_1 \in L^2(\Sigma_1)$, então:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \Sigma_1. \tag{3.42}$$

Logo, no caso de (3.4), segue de (3.37)₂ e (3.42) que $\psi = 0$ em Σ , daí:

$$\left| \begin{array}{l} \psi'' - \Delta \psi = 0, \text{ em } \mathcal{Q} \\ \psi = 0 \text{ em } \Sigma \\ \psi(0) = \psi'(0) = 0, \text{ em } \Omega \end{array} \right.$$

e por unicidade de solução $\psi \equiv 0$.

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi'' - \Delta \varphi = 0, \text{ em } \mathcal{Q} \\ \varphi = 0, \text{ em } \Sigma \end{array} \right.$$

satisfazendo então (3.42). Portanto, pelo teorema de unicidade de Holmgren² (teorema 1.4.20), se $T > 2\delta(\Omega, \Gamma_1)$, em que $\delta(\Omega, \Gamma_1) = \sup_{x \in \Omega} d(x, \Gamma_1)$ ³, então $\varphi \equiv 0$ em $\mathcal{Q}$, o que implica $f^0 = f^1 = 0$, e pelo teorema 1.2.7:

$$\{y(T, v_1, \mathcal{F}(v_1)), y'(T, v_1, \mathcal{F}(v_1))\}$$

gera um subespaço denso de $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

3.4 Sistema de otimalidade para o controle líder

Nesta seção, temos como propósito a procura da *otimalidade do controle líder* v_1 , isto é, queremos encontrar v_1 tal que resolva o problema (3.13), assumindo que tais v_1 's (*possivelmente infinitos controles*) existam.

Usando (3.31), (3.32) e (3.33), Reescreveremos o problema (3.13) como:

$$(P_2) = \left\{ \inf \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} v_1^2 d\Sigma \right\} \quad (3.43)$$

onde v_1 agora está restrito a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{y}'(T, v_1) + z'(T) - y'^T \in \alpha_1 B_{-1} \\ \bar{y}(T, v_1) + z(T) - y^T \in \alpha_0 B_0 \end{array} \right.$$

que é equivalente a:

$$\left\{ \begin{array}{l} z'(T) \in y'^T - \bar{y}'(T, v_1) + \alpha_1 B_{-1} \\ -z(T) \in -y^T + \bar{y}(T, v_1) + \alpha_0 B_0 \end{array} \right. \quad (3.44)$$

Observação 3.4.0.10 *Obtemos controlabilidade exata quando temos $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$.*

²Para um uso mais explícito do nosso caso pode-se usar a proposição 1.4.3.3

³Distância de x a Γ_1 tomada no sentido de geodésica em Ω ; note também que $d(\Omega, \Gamma_1) \geq d(\Omega, \Gamma_1)$.

Assim, a imagem Lv_1 do operador definido em (3.35) é tal que:

$$Lv_1 \in \{y'^T - \bar{y}'(T, v_1) + \alpha_1 B_{-1}, -y^T + \bar{y}(T, v_1) + \alpha_0 B_0\}. \quad (3.45)$$

Introduziremos os funcionais $F_1 : L^2(\Sigma_1) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $F_2 : H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ como segue:

$$F_1(v_1) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} v_1^2 d\Sigma, \quad \forall v_1 \in L^2(\Sigma_1) \quad (3.46)$$

e

$$F_2(Lv_1) = F_2(\{z'(T), -z(T)\}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \begin{cases} z'(T) \in y'^T - \bar{y}'(T, v_1) + \alpha_1 B_{-1} \\ -z(T) \in -y^T + \bar{y}(T, v_1) + \alpha_0 B_0 \end{cases} \\ \infty, & \text{de outro modo} \end{cases} \quad (3.47)$$

Observemos também que por (3.35) e (3.40) podemos definir explicitamente o operador L^* . De fato,

$$-\int_{\Sigma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} v_1 d\Sigma = \langle z'(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - (z(T), f^1) = \langle \langle \{z'(T), -z(T)\}, \{f^0, f^1\} \rangle \rangle \quad (3.48)$$

ou ainda

$$\langle \langle Lv_1, f \rangle \rangle = (v_1, L^* f)_{L^2(\Sigma_1)} \quad (3.49)$$

então, L^* é dado por:

$$\begin{aligned} L^* : \quad & H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Sigma_1) \\ & \{f^0, f^1\} \mapsto L^* f = -\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \end{aligned} \quad (3.50)$$

em que φ é dada em (3.36).

A partir da introdução dessas notações, juntamente com o fato da imagem do operador L ser densa em $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ com $T > 2\delta(\Omega, \Gamma_1)$ (Fato provado na seção anterior), resolver o problema (3.13) é equivalente a resolver:

$$(P_3) = \left\{ \inf_{v_1 \in L^2(\Sigma_1)} [F_1(v_1) + F_2(Lv_1)] \right\} \quad (3.51)$$

Aplicaremos a (3.51) o método de dualidade de *Fenchel*, método este, bastante utilizado na teoria de Análise Convexa. Pelo teorema 1.3.3 com $V = L^2(\Sigma_1)$, $W = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $\Phi = f^1 : L^2(\Sigma_1) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $\Psi = F_2 : H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ temos que:

- Sendo $\{y(T, v_1, \mathcal{F}(v_1)), y'(T, v_1, \mathcal{F}(v_1))\} \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $\exists v_1 \in L^2(\Sigma_1)$ de modo que $Lv_1 = \{z'(T, v_1), -z(T, v_1)\}$ satisfaz:

$$Lv_1 \in \{y'^T - \bar{y}'(T, v_1) + \alpha_1 B_{-1}, -y^T + \bar{y}(T, v_1) + \alpha_0 B_0\} \implies F_2(Lv_1) = 0$$

$$\therefore v_1 \in \text{Dom}(F_1) \cap \text{Dom}(F_2 \circ L).$$

Temos também que F_1 é contínua em v_1 .

De fato, seja $|v_1^n - v_1|_{L^2(\Sigma_1)} \longrightarrow 0$ então, temos:

$$\begin{aligned} |F_1(v_1^n) - F_1(v_1)| &= \frac{1}{2} \left| \int_{\Sigma_1} (v_1^n)^2 d\Sigma - \int_{\Sigma_1} v_1^2 d\Sigma \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_{\Sigma_1} v_1^n (v_1^n - v_1) d\Sigma - \int_{\Sigma_1} v_1 (v_1^n - v_1) d\Sigma \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \left(\int_{\Sigma_1} (v_1^n)^2 d\Sigma \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\int_{\Sigma_1} (v_1^n - v_1)^2 d\Sigma \right)^{\frac{1}{2}}}_{\rightarrow 0} - \left(\int_{\Sigma_1} (v_1^n - v_1)^2 d\Sigma \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\int_{\Sigma_1} v_1^2 d\Sigma \right)^{\frac{1}{2}}}_{\rightarrow 0} \right| \end{aligned}$$

o que implica

$$|F_1(v_1^n) - F_1(v_1)| \rightarrow 0$$

portanto F_1 é contínuo em v_1 .

Então, temos que:

$$\inf_{v_1 \in L^2(\Sigma_1)} [F_1(v_1) + F_2(Lv_1)] = \min_{\hat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \left[F_1^* \left(L^* \left(\{\hat{f}^0, \hat{f}^1\} \right) \right) + F_2^* \left(-\{\hat{f}^0, \hat{f}^1\} \right) \right]. \quad (3.52)$$

Observe que $F_1^*(v_1) = F_1(v_1)$.

De fato,

$$\begin{aligned}
F_1^*(v_1) &= \sup_{v_1 \in L^2(\Sigma_1)} \left\{ (v_1^*, v_1)_{L^2(\Sigma_1)} - F_1(v_1); v_1^* \in L^2(\Sigma_1) \right\} \\
&= \sup_{v_1 \in L^2(\Sigma_1)} \left\{ \int_{\Sigma_1} v_1^2 d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} v_1^2 d\Sigma \right\} \\
&= \sup_{v_1 \in L^2(\Sigma_1)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} v_1^2 d\Sigma \right\} \\
&= F_1(v_1), \quad \forall v_1 \in L^2(\Sigma_1).
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Temos também que:

$$\begin{aligned}
F_2^*(\hat{f}) &= F_2^*\left(\left\{\hat{f}^0, \hat{f}^1\right\}\right) = \\
&\sup_{Lv_1 \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)} \left\{ \left\langle \left\langle \left\{ z'(T), -z(T) \right\}, \left\{ \hat{f}^0, \hat{f}^1 \right\} \right\rangle \right\rangle - F_2(Lv_1) \right\}
\end{aligned}$$

utilizando a dualidade entre $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\sup_{Lv_1 \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)} \left\{ \left\langle z'(T), \hat{f}^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \left(z(T), \hat{f}^1 \right) - F_2(Lv_1) \right\} = \\
&\sup_{(\gamma_1, \gamma_0) \in B_{-1} \times B_0} \left\{ \left\langle y'^T - \bar{y}'(T) + \alpha_1 \gamma_1, \hat{f}^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \left(-\bar{y}(T) + y^T + \alpha_0 \gamma_0, \hat{f}^1 \right) \right\} = \\
&\quad - \left(-\bar{y}(T) + y^T, \hat{f}^1 \right) + \left\langle y'^T - \bar{y}'(T), \hat{f}^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \\
&\quad \alpha_1 \sup_{\gamma_1 \in B_{-1}} \left\langle \gamma_1, \hat{f}^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \alpha_0 \sup_{\gamma_0 \in B_0} \left(\gamma_0, \hat{f}^1 \right) = \\
&\quad - \left(-\bar{y}(T) + y^T, \hat{f}^1 \right) + \left\langle y'^T - \bar{y}'(T), \hat{f}^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\
&\quad + \alpha_1 \left\| \hat{f}^0 \right\| + \alpha_0 \left| \hat{f}^1 \right|, \quad \forall \hat{f} = \left\{ \hat{f}^0, \hat{f}^1 \right\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Por 3.50, $L(\hat{f}) = -\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$, e usando (3.53) obtemos:

$$F_1^*\left(-\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \nu}\right) = F_1\left(-\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \nu}\right) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma; \text{ com } \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma_1). \tag{3.55}$$

Portanto, (3.52) é equivalente a

$$\begin{aligned}
&\inf_{v_1 \in L^2(\Sigma_1)} [F_1(v_1) + F_2(Lv_1)] = - \min_{\hat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma + \right. \\
&\quad \left. - \left(-\bar{y}(T) + y^T, \hat{f}^1 \right) + \left\langle y'^T - \bar{y}'(T), \hat{f}^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \alpha_1 \left\| \hat{f}^0 \right\| + \alpha_0 \left| \hat{f}^1 \right| \right\},
\end{aligned} \tag{3.56}$$

em que φ é dada em (3.36). Sendo assim, (3.56) é o problema dual de (3.43).

Fazendo $\eta^0 = -\bar{y}(T) + y^T$ e $\eta^1 = y'^T - \bar{y}'(T)$, e considerando a dualidade entre $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, temos:

$$\left\langle \left\langle \{\eta^1, -\eta^0\}, \{\hat{f}^0, \hat{f}^1\} \right\rangle \right\rangle = -\left(\eta^0, \hat{f}^1\right) + \left\langle \eta^1, \hat{f}^0 \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} \quad (3.57)$$

Então, associamos a solução do problema dual do lado direito de (3.56) à minimização do funcional $\Theta : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$\begin{aligned} \Theta\left(\{\hat{f}^0, \hat{f}^1\}\right) &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma + \\ &\left\langle \left\langle \{\eta^1, -\eta^0\}, \{\hat{f}^0, \hat{f}^1\} \right\rangle \right\rangle + \alpha_1 \|\hat{f}^0\| + \alpha_0 |\hat{f}^1| \end{aligned} \quad (3.58)$$

daí, temos que

$$\inf_{v_1 \in L^2(\Sigma_1)} [F_1(v_1) + F_2(Lv_1)] = -\min_{\hat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \Theta\left(\{\hat{f}^0, \hat{f}^1\}\right) \quad (3.59)$$

Agora, tomando $0 < \epsilon = \min\{\alpha_0, \alpha_1\}$ e usando a norma do gráfico, reescreveremos o funcional (3.58) como:

$$\begin{aligned} \Theta_\epsilon(\{f^0, f^1\}) &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma + \\ &\left\langle \left\langle \{\eta^1, -\eta^0\}, \{\hat{f}^0, \hat{f}^1\} \right\rangle \right\rangle + \epsilon \left\| \left(\hat{f}^0, \hat{f}^1\right) \right\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Pelo teorema 1.3.3, temos que o funcional definido em (3.60) atinge um mínimo $\hat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, solução do problema dual (3.59), e este é único, pois o funcional Θ_ϵ é *estritamente convexo*.

De fato, sejam $\{\hat{f}^0, \hat{f}^1\}, \{g^0, g^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Logo, pelos mesmos argumentos utilizados na prova da convexidade estrita do funcional (3.9) temos:

$$\begin{aligned} \Theta_\epsilon \left[\lambda \{\hat{f}^0, \hat{f}^1\} + (1-\lambda) \{g^0, g^1\} \right] &= \lambda \Theta_\epsilon \left(\{\hat{f}^0, \hat{f}^1\} \right) + (1-\lambda) \Theta_\epsilon \left(\{g^0, g^1\} \right) \\ &\quad - \frac{\lambda(1-\lambda)}{2} \int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \nu} - \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \end{aligned}$$

então, quando $\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} \neq \{g^0, g^1\}$, obtemos:

$$\Theta_\epsilon \left[\lambda \left\{ \widehat{f}^0, \widehat{f}^1 \right\} + (1 - \lambda) \left\{ g^0, g^1 \right\} \right] < \lambda \Theta_\epsilon \left(\left\{ \widehat{f}^0, \widehat{f}^1 \right\} \right) + (1 - \lambda) \Theta_\epsilon \left(\left\{ g^0, g^1 \right\} \right).$$

Assim, provamos que o funcional Θ_ϵ tem um único mínimo $\widehat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, que é solução do problema dual (3.59). Portanto, segue de (3.43) e (3.56) que:

$$\begin{aligned} \inf \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} v_1^2 d\Sigma &= \min_{\widehat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma - \left(y^T - \overline{y}(T), \widehat{f}^1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left\langle y'^T - \overline{y}'(T), \widehat{f}^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \alpha_1 \left\| \widehat{f}^0 \right\| + \alpha_0 \left| \widehat{f}^1 \right| \right], \end{aligned} \quad (3.61)$$

restrito a (3.44).

Observação 3.4.0.11 *A ideia essencial do resultado que segue é que para todo $f \in C$, podemos testar a otimalidade da solução de na direção admissível $f - \widehat{f}$, em que $\widehat{f} + \lambda(f - \widehat{f}) \in C$ se $\lambda \in [0, 1]$.*

Seja $\widehat{f} = \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}$ a solução única do seguinte problema dual:

$$\begin{aligned} &\min_{\widehat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma - \left(y^T - \overline{y}(T), \widehat{f}^1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left\langle y'^T - \overline{y}'(T), \widehat{f}^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \alpha_1 \left\| \widehat{f}^0 \right\| + \alpha_0 \left| \widehat{f}^1 \right| \right]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Então sendo $\mu = \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu}, \widehat{f} \right), \zeta = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, f \right)$ e $F = \Theta$ com

$$\begin{cases} F_1 = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma \\ e \\ F_2 = \left\langle \left\langle \left\{ \widehat{f}^0, \widehat{f}^1 \right\}, \left\{ \eta^1, -\eta^0 \right\} \right\rangle \right\rangle + \alpha_1 \left\| \widehat{f}^0 \right\| + \alpha_0 \left| \widehat{f}^1 \right|, \end{cases}$$

então, calcularemos a derivada de gateaux de F_1 :

$$F_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
F'_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ F_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \epsilon \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu} \right) - F_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) \right\} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \frac{1}{2} \left(\int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \epsilon \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma - \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma \right) \right\} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \frac{1}{2} \left[\int_{\Sigma_1} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 + 2\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 \right) d\Sigma \right] \right\} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \frac{1}{2} \left[\int_{\Sigma_1} 2\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma \right] \right\} .
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Passando ao limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ em (3.63), obtemos a derivada de Gateaux de F_1 que é dada por:

$$F'_1 = \int_{\Sigma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu} d\Sigma, \quad \forall \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma_1).$$

Logo, pela proposição 1.3.1.9

$$\left\langle F'_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right), \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu} - \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) \right\rangle + F_2 \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu}, \widehat{f} \right) - F_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, f \right) \geq 0,$$

$\forall \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, f \right) \in C$, ou seja, obtemos a seguinte desigualdade variacional:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma_1} \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu} - \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)}_{(\star\star)} d\Sigma + \left\langle \left\langle \left\{ \widehat{f}^0, \widehat{f}^1 \right\}, \left\{ \eta^1, -\eta^0 \right\} \right\rangle \right\rangle + \alpha_1 \left\| \widehat{f}^0 \right\| + \\
&\alpha_0 \left| \widehat{f}^1 \right| - \left\langle \left\langle \left\{ f^0, f^1 \right\}, \left\{ \eta^1, -\eta^0 \right\} \right\rangle \right\rangle - \alpha_1 \left\| f^0 \right\| - \alpha_0 \left| f^1 \right| \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Analisemos o termo $(\star\star)$ em (3.64). Note que, por (3.40) com $v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$ temos:

$$- \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma = \left\langle z'(T), \widehat{f}^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - (z(T), \widehat{f}^1) \tag{3.65}$$

e também

$$\int_{\Sigma_1} \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Sigma = - \left\langle z'(T), f^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + (z(T), f^1) \tag{3.66}$$

logo, somando (3.65) com (3.66) obtemos:

$$\int_{\Sigma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu} - \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) d\Sigma = -(z(T), \widehat{f}^1 - f^1) + \left\langle z'(T), \widehat{f}^0 - f^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \tag{3.67}$$

substituindo (3.67) em (3.64) temos:

$$-(z(T), \widehat{f}^1 - f^1) + \left\langle z'(T), \widehat{f}^0 - f^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \left\langle f^0, \eta^1 \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} + (f^1, \eta^0)$$

$$+ \left\langle \widehat{f}^0, \eta^1 \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} - \left(\widehat{f}^1, \eta^0 \right) + \alpha_1 \left(\left\| \widehat{f}^0 \right\| - \left\| f^0 \right\| \right) + \alpha_0 \left(\left| \widehat{f}^1 \right| - \left| f^1 \right| \right) \geq 0$$

o que implica

$$\begin{aligned} & - \left(z(T), \widehat{f}^1 - f^1 \right) + \left\langle z'(T), \widehat{f}^0 - f^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \left\langle \widehat{f}^0 - f^0, \eta^1 \right\rangle_{H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)} \\ & - \left(\widehat{f}^1 - f^1, \eta^0 \right) + \alpha_1 \left(\left\| \widehat{f}^0 \right\| - \left\| f^0 \right\| \right) + \alpha_0 \left(\left| \widehat{f}^1 \right| - \left| f^1 \right| \right) \geq 0 \end{aligned}$$

portanto, temos

$$\begin{aligned} & \left\langle \overline{y}'(T) + z'(T) - y'^T, \widehat{f}^0 - f^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \left(z(T) + \overline{y}(T) - y^T, \widehat{f}^1 - f^1 \right) \\ & + \alpha_1 \left(\left\| \widehat{f}^0 \right\| - \left\| f^0 \right\| \right) + \alpha_0 \left(\left| \widehat{f}^1 \right| - \left| f^1 \right| \right) \geq 0, \forall \widehat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Agora, tomando $y = \overline{y} + z$ e $p = \overline{p} + q$ como foi feito em (3.31), obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.4.1 *Sejam $T > 2\delta(\Omega, \Gamma_1)$ e $v = \{v_1, v_2\}$ com $v_i \in L^2(\Sigma_i)$, $i = 1, 2$. Então o controle líder ótimo v_1 , isto é, o que minimiza $\frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} v_1^2 d\Sigma$ restrito à:*

$$\begin{cases} y'(T, v_1, \mathcal{F}(v_1)) & \in y'^T + \alpha_1 B_{-1} \\ y(T, v_1, \mathcal{F}(v_1)) & \in y^T + \alpha_0 B_0 \end{cases}$$

é dado por:

$$v_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, \text{ em } \Sigma_1,$$

em que φ é dado pela solução única $\{\varphi, \psi, y, p\}$ do sistema de otimalidade:

$$\left| \begin{array}{l} \varphi'' - \Delta \varphi = \psi, \text{ em } \mathcal{Q} \\ \psi'' - \Delta \psi = 0, \text{ em } \mathcal{Q} \\ y'' - \Delta y = 0, \text{ em } \mathcal{Q} \\ p'' - \Delta p = y - y_2, \text{ em } \mathcal{Q} \\ \varphi = 0, \text{ em } \Sigma \\ \psi = \begin{cases} 0, & \text{em } \Sigma_1 \\ \frac{1}{\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, & \text{em } \Sigma_2 \\ 0, & \text{em } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases}
y = \begin{cases} -\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} & , em \ \Sigma_1 \\ \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \nu} & , em \ \Sigma_2 \\ 0 & , em \ \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{cases} \\
p = 0 & , em \ \Sigma \\
\varphi(\cdot, T) = f^0, \ \varphi'(\cdot, T) = f^1, \ em \ \Omega \\
\psi(0) = \psi'(0) = 0, \ em \ \Omega. \\
y(0) = y'(0) = 0, \ em \ \Omega. \\
p(T) = p'(T) = 0, \ em \ \Omega..
\end{cases} \tag{3.68}$$

e $f = \{f^0, f^1\}$ é definido como solução única da desigualdade variacional:

$$\begin{aligned}
& \left\langle y'(T, f) - y^T, \widehat{f}^0 - f^0 \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \left(y(T, f) - y^T, \widehat{f}^1 - f^1 \right) + \\
& \alpha_1 \left\| \widehat{f}^0 \right\| - \alpha_1 \left\| f^0 \right\| + \alpha_0 \left| \widehat{f}^1 \right| - \alpha_0 \left| f^1 \right| \geq 0, \ \forall \ \widehat{f} = \left\{ \widehat{f}^0, \widehat{f}^1 \right\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \tag{3.69}
\end{aligned}$$

onde em (3.69) escrevemos $y(T; f)$ para explicitar o fato que a solução $\{\varphi, \psi, y, p\}$ de (3.68) depende de f .

Observação 3.4.0.12 O teorema (3.4.1) é **construtivo**. Podemos obter (3.68) e (3.69) usando algoritmos de aproximações numéricas. Mas esse não foi nosso objetivo nessa dissertação, um tratamento desses algoritmos pode ser encontrado em [10].

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, R. A., *Sobolev Space*, Academic Press, London, (1975).
- [2] ALLAIRE, G., *Numerical Analysis and Optimization*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford Univ. Press, (2007)
- [3] AUBIN, J.P., *Applied Functional Analysis*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, 2^a. Ed., (2000).
- [4] BERNSTEIN, S. , *Sur une classe d'équations fonctionnelles aux dérivées partielles*. Isv. SSSR, Serie Math. 4 pp 17-26 (1940)
- [5] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, (2011).
- [6] CHIARA, A., *Equation des Ondes et Régularité sur un ouvert Lipschitzien*, C.R. Acad. Sciences Paris, Série I, Math., 316, pp.33-36, (1993).
- [7] EKELAND, I. and TEMAN, R., *Convex Analysis and Variational Problems*, Classics in Applied Mathematics 28, SIAM, (1999).
- [8] EVANS, L.C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol.19, AMS, (1997).
- [9] FATTORINI, H.O., *Infinite Dimensional Linear Control Systems*, North-Holland Mathematics Studies 201, Elsevier-Amsterdam, (2005) .

- [10] GLOWINSKI, R. and LIONS, J.L., *Exact and Approximate Controllability for Distributed Parameter Systems*, Acta Numerica, pp.159-333, Cambridge Univ. Press, (1995).
- [11] HÖRMANDER, L., *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, (1976).
- [12] LIONS, J.L., *Problèmes aux Limites dans les Equations aux Dérivées Partielles*, Les Presses de L'Université de Montreal, Montreal, (1965).
- [13] LIONS, J.L., *Contrôle des Systèmes Distribués Singuliers*, Gauthier-Villars, Paris, (1983).
- [14] LIONS, J.L., *Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilization des Systèmes Distribués*, Tome I, RMA 8, Masson, Paris, (1988).
- [15] LIONS, J.L., *Perturbations Singulières Dans Les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal*, Lecture Notes In Mathematics, Springer-Verlag, (1973).
- [16] LIONS, J.L., *Optimal Control of System Governed by Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, (1971).
- [17] LIONS, J.L., *Some Remarks on Stackelberg's Optimization*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol.4, No.4, pp 477-487, (1994).
- [18] LIONS, J.P., *Hierarchic Control*, Mathematical science, Proc. Indian Academic science, Vol.104, No.1, pp.295-304, (1994).
- [19] MATOS, M.P. - *Integral de Bochner e Espaços $L^p(0, T; X)$* , Notas de Aulas do Curso de Verão, UFPB, João Pessoa, (1998).
- [20] MEDEIROS, L.A. e MILLA MIRANDA, M., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, vol.25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1989).

- [21] MEDEIROS, L.A., *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais*, Parte 1, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (2006).
- [22] MICU,S. e ZUAZUA,E., *An Introduction to the Controllability of P.D.E.*, Universidad Autónoma de Madrid, Spain.
- [23] MURILLO, K.P., *Controlabilidade Exata e Aproximada da Equação da Onda Linear*, Dissertação de Mestrado, João Pessoa:DM-UFPB, (2008).
- [24] OLIVEIRA,C.R., *Introdução à Análise Funcional*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, (2010).
- [25] ROCKAFELLAR, T.R., *Conjugate Duality and Optimization*, Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, (1974).
- [26] ROCKAFELLAR, T.R and WETS,R.J-B., *Variational Analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 317, Springer-Verlag, (1997).
- [27] VISIK, M.I. and LADYZENSKAYA,O.A., *Boundary value problems for P.D.E. and certain classes of operator equations*, Uspehi Math. Nauk (NS), 11(672), pp.41-97, (1956) .
- [28] ZEIDLER, E., *Applied Functional Analysis*, Applied Mathematical Sciences 109, Springer-Verlag, (1995).
- [29] ZUAZUA,E., *Controlabilidad Exacta y Estabilización de la Ecuacion de Ondas*,.Textos de Métodos Matemáticos 23, Ed.UFRJ,(1990).