Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Uma Representação de Weierstrass para Superfícies Mínimas em $\mathbb{H}_3$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Por
Alejandro Caicedo Roque

sob orientação do
Prof. Dr. Pedro A. Hinojosa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre da Ciência em Matemática.

Agosto - 2008
João Pessoa, Paraíba

Uma Representação de Weierstrass para Superfícies Mínimas em $\mathbb{H}_3$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

por

Alejandro Caicedo Roque

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre da Ciência em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada por:

Prof. Dr. **Pedro A. Hinojosa**
Orientador

Prof. Dr. **Jorge Herbert Soares de Lira**
Examinador

Prof. Dr. **Jorge Antonio Hinojosa Vera**
Examinador

Prof. Dr. **Pedro Antonio Gómez Venegas**
Suplente

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Agosto - 2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAíBA

Data: **Agosto - 2008**

Autor: **Alejandro Caicedo Roque**

Tìtulo: **Uma Representação de Weierstrass para Superfícies Mínimas em $\mathbb{H}_3$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.**

Depto.: **Matemática**

Grau: **M.Sc.** Convocação: **Agosto** Ano: **2008**

____
Assinatura do Autor

A minha família e à Gisele.

Agradecimentos

- A Deus

- Aos meus pais Alejandro Caicedo e Emma Maria Roque, a meus Irmãos Jose Manuel, Carlos Alberto e Mauricio.

- Gisele Eloa Lopes Bernardino e sua família.

- Ao meu orientador o professor Pedro Hinojosa.

- Aos professores Everaldo S. Medeiros, Pedro Venegas, Roberto Bedregal, Fernando A. Xavier.

- Aos meus amigos do Mestrado, Demacio Costa, Rodrigo Alves, Kelly P Murillo, Ornan Filipe, Eduardo Sampaio, Gilvaneide de Souza.

- Ao CNPq pelo apoio financiero e à a população brasileira pela hospitalidade e bom acolhemento.

Índice

Resumo

A representação de Weierstrass para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ e sua generalização a $\mathbb{R}^n$ mostra-se uma ferramenta muito útil no estudo de superfícies mínimas nestes espaços. Neste trabalho pretendemos descrever uma representação tipo Weierstrass para imersões simplesmente conexas no grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3$. Usando aplicações harmónicas é possível obter uma fórmula de representação geral, tipo Weierstrass, para imersões mínimas simplesmente conexas em variedades Riemannianas gerais, isto é útil do ponto de vista teórico, entretanto é muito difícil encontrar soluções explicitas. A dimensão 3 e a estrutura de grupo de Lie do grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3$ permitem uma descrição geométrica simples e podemos obter alguns exemplos clássicos.

Palavras-Chave:

Representação de Weierstrass, Superficies Mínimas, Variedades Riemannianas, Grupos de Lie, Grupo de Heisenberg, Espaços Produto.

Abstract

The Weierstrass representation of minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ and its generalization to $\mathbb{R}^n$ shows is a very useful tool in the study of minimal surfaces in these spaces. In this work we want to describe a type Weierstrass representation for immersions simply connected in the group of Heisenberg $\mathbb{H}_3$. Using applications harmonics is possible obtain a formula for general representation, type Weierstrass for minimal immersions in manifolds Riemannian simply connected general, is that, useful of point view theoretical, however it is very difficult find solutions explicit. The dimention 3 and the structure of group Lie of the group of Heisenberg $\mathbb{H}_3$ allow a description Geometric simple and we can get some classic examples.

Key words:

Weierstrass Representation, Minimal Surfaces, Riemannian Manifolds, Lie Group, Heisenberg Group, Product Spaces.

Introdução

O estudo feito por Karl Weierstrass em 1866 e por Alfred Enneper em 1868, da conhecida atualmente como parametrização de Enneper-Weierstrass ou Representação de Weierestras para superfícies mínimas, é uma ferramenta muito útil e satisfatória para o estudo de superfícies mínimas imersas em espaços n-dimensionais.

Na literatura atual existe um grande número de aplicações da representação de Weierstrass para vários campos da Matemática, Física, Química e Biologia. Na atualidade o número de contribuições nesta linha de pesquisa permite construir superfícies mínimas de um modo sistemático e permite entender as propriedades geométricas intrínsecas das superfícies mínimas

A clássica fórmula de representação de Weierstrass para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ com suas generalizações a $\mathbb{R}^n$, demonstrou ser uma ferramenta extremamente útil para o estudo de superfícies mínimas naqueles espaços.

Neste trabalho descrevemos um método para deduzir uma fórmula de representação tipo-Weierstrass para superfícies mínimas simplesmente conexas imersas em uma variedade Riemanniana geral e em particular no 3-grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3$ e no espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ do plano hiperbólico com a reta real.

Para isto estuda-se o caso particular de variedades diferenciáveis chamadas de grupos de Lie, assim como sua métrica e seus campos invariantes à esquerda. Obtendo alguns exemplos, em particular o grupo de Heisenberg.

O grupo de Heisenberg, é relativamente pouco conhecido, mas existem tópicos diversos onde este grupo se revela como um fator importante tal é o caso de: teoria de representação de Grupos de Lie Nilpotentes, fundamentos de Análise Harmnica

Abeliano, Módulo de Variedades Abelianas, teoria da estrutura dos Grupos Finitos, teoria de equações diferencial parciais, mecânica quântica, lgebra Homológica, Teoria Ergódiga, Teoria de representação de grupos Algébricos Redutivos, etc. Muitos físicos ainda chamam o grupo de Heisenberg como o grupo de Weyl, por ser Hernam Weyl um dos pioneiros em introduzir o grupo de Heisenberg em mecânica quântica. além disso, também é possível estudar o grupo de Heisenberg como a fronteira de uma variedade Riemanniana (ver [Yilong Ni]), caso que não é nosso interesse neste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, realizaremos um breve estudo sobre grupos de Lie. Discutimos resultados básicos sobre tais grupos, e damos alguns exemplos clássicos. Determinamos os campos invariantes à esquerda, as fórmulas de conexão e curvatura, apresentamos o grupo de Heisenberg e mostraremos que este não é um grupo de matrizes.

1.1 Grupos de Lie

1.1.1. Definição *Um grupo de Lie G é uma variedade diferenciável C^∞ com uma estrutura de grupo e tal que a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \mu : G \times G & \longrightarrow & G, \\ (x, y) & \longmapsto & \mu(x, y) = xy^{-1} \end{array}$$

é diferenciável (C^∞).

(a) Segue-se imediatamente da definição que para cada $g \in G$, as aplicações

$$\begin{array}{rcl} L_g : G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & gh \end{array}$$

e

$$\begin{aligned} R_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto hg \end{aligned}$$

são difeomorfismos de G. Note também que $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ e $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$. L_g e R_g são chamadas, respectivamente, translação à esquerda por g e translação à direita por g.

(b) Observando os diagramas abaixo

$$\begin{array}{ccccc} G \times G & \stackrel{Id\times\varphi}{\longrightarrow} & G \times G & \stackrel{\mu}{\longrightarrow} & G \\ (x,y) & \longmapsto & (x, y^{-1}) & \longmapsto & x(y^{-1})^{-1} = xy \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} G & \longrightarrow & G \times G & \stackrel{\mu}{\longrightarrow} & G \\ x & \longmapsto & (e,x) & \longmapsto & ex^{-1} = x^{-1} \end{array}$$

Concluimos que, as aplicações

$$\begin{aligned} \bullet : G \times G &\longrightarrow G \\ (x,y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow G, \\ x &\longmapsto \varphi(x) = x^{-1} \end{aligned}$$

são (C^∞). Isto é claro, pois são compostas de aplicações C^∞.

1.1.2. Proposição *Seja G é um grupo de Lie e seja G_0 a componente conexa de G que contém a identidade, $e \in G$. Então, G_0 é um subgrupo de Lie do grupo G. Além disso, G_0 é normal em G e todas as componentes de G são difeomorfas a G_0.*

Demonstração: Provaremos primeiro que as componentes conexas são difeomorfas uma a outra. Para $g \in G$, denotemos por G_g a componente conexa de G que contém g. Vamos provar que G_g é difeomorfo a $G_e = G_0$.

Como as translações por g (à esq. ou à dir.) são difeomorfismos, então bastará provar, por exemplo, que

$$G_g = L_g(G_0) = gG_0.$$

Agora,

$$g \in G_g \qquad \Rightarrow \qquad g^{-1}g = e \in g^{-1}G_g,$$

temos então que $e \in g^{-1}G_g$ e $g^{-1}G_g$ é conexo. (pois G_g é conexo e L_g é continua). Logo $g^{-1}G_g \subseteq G_0$ (definição de G_0, maior conexo que contém e), portanto $G_g \subseteq gG_0$.

Analogamente prova-se que $gG_0 \subseteq G_g$. Portanto $G_g \overset{difeo}{\simeq} G_0$.

Provemos agora que G_0 é um grupo de Lie.

- G_0 é subgrupo normal de G.

  $G_0 \subset G$ é conexo, logo $G_0 \cdot G_0$ é conexo. Portanto $G_0 \cdot G_0$ é uma vizinhança conexa de e. Segue-se que $G_0 \cdot G_0 \subset G_0$.

  $G_0^{-1} = \varphi(G_0)$ é também uma vizinhança conexa de e. Assim, $G_0^{-1} = G_0$.

  Portanto G_0 é um subgrupo de G.

  Agora uma translação sobre G é um homeomorfismo de G. Assim, se $g \in G$, então gG_0g^{-1} é uma vizinhança conexa de e. Logo, para cada $g \in G$, $gG_0g^{-1} \subset G_0$. Portanto G_0 é subgrupo normal de G.

- G_0 é uma subvariedade de G.

  Seja $i : G_0 \hookrightarrow G$ a inclusão. Queremos ver que, para cada $p \in G$, a diferencial, $di_p : T_pG_0 \hookrightarrow T_pG$ é uma aplicação $1-1$.

  Seja $\gamma : I \longrightarrow G_0$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Então, $di_p\,(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} i\,(\gamma\,(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\gamma(t) = \gamma'(0) = v$. Logo, $di_p = Id$ é $1-1$.

  Assim, G_0 é um grupo com uma estrutura de variedade diferenciável na qual a aplicação $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$ é C^∞. Isto é claro pois é a restrição a G_0 da mesma aplicação em G. Consideramos em G_0 a estrutura diferenciável de G restrita a G_0, que é a estrutura diferencial que faz de G_0 uma subvariedade de G.

Note que, além disso $i : G_e \hookrightarrow G$ é um morfismo de grupos. Portanto G_e é um subgrupo de Lie de G. $\square$

1.1.3. Exemplos

(a) $(\mathbb{R}^n, +)$ *com a estrutura diferenciável usual.*

(b) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \bullet)$ *com a estrutura usual de variedade.*

(c) $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *com a multiplicação induzida de* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(d) *O produto de dois grupos de Lie H e G é um grupo de Lie $H \times G$, com a estrutura de variedade producto e produto direito de grupos.*

$$(h_1, g_1)(h_2, g_2) = (h_1 h_2, g_1 g_2).$$

Conseqentemente $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ são grupos de Lie.

(e) *A variedade $GL_n(\mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$ reais, com determinante não nulo é um grupo de Lie com a multiplicação de matrizes.*

(f) $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^t = Id\}$, *$O(n)$ é uma subvariedade de $GL_n(\mathbb{R})$.*

De fato, considere a função

$$\begin{aligned} f : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow S_n = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) : A = A^t\right\}, \\ A &\longmapsto AA^t \end{aligned}$$

f está bem definida $\left((AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t\right)$ e é diferenciável. Além disso, $f^{-1}(Id) = O(n)$. Assim, para ver que $O(n)$ é subvariedade de $GL_n(\mathbb{R})$ basta mostrar que Id é um valor regular de f.

Sejam $X, Y \in M_n(\mathbb{R}) \backsimeq R^{n^2}$, *temos*

$$\begin{aligned} df_X(Y) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(X+hY) - f(X)}{h} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{(X+hY)(X+hY)^t - XX^t}{h} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{XX^t + hXY^t + hYX^t + h^2YY^t - XX^t}{h} \\ &= XY^t + YX^t. \end{aligned}$$

Se $X \in f^{-1}(Id)$ *e* $S \in S_n$ *então escolhemos* $Y = SX/2$ *e temos:*

$$\begin{aligned} df_X(Y) &= X\left(\frac{SX}{2}\right)^t + \left(\frac{SX}{2}\right)X^t \\ &= \frac{XX^tS^t}{2} + \frac{SXX^t}{2} = \frac{S^t}{2} + \frac{S}{2} \\ &= \frac{S^t + S}{2} = \frac{2S}{2} = S. \end{aligned}$$

Assim df_X *é sobre para cada* $X \in f^{-1}(Id)$. *Portanto* Id *é valor regular de* f.

(g) $U(n) = \{B \in M_n(\mathbb{C}) : BB^t = I\}$.

(h) $SU(n) = \{B \in U(n) : \det B = 1\}$.

(i) $SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$.

(j) *O grupo dos movimentos afins de* $\mathbb{R}^n$. *Consideremos* $K = GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ *(variedade produto) e definamos:*

$$\begin{aligned} K \times K &\longrightarrow K, \\ ((A,v),(A_1,v_1)) &\longmapsto (AA_1, Av_1 + v) \end{aligned}$$

Este produto faz de K *um grupo de Lie. Cada elemento* $(A,v) \in K$ *é identificado com um movimento afim*

$$\begin{aligned} (A,v) : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto (A,v)x = Ax + v \end{aligned}$$

Isto é, pode-se pensar $(A, v) \in K$ como uma aplicação afim de $\mathbb{R}^n$. A identidade do grupo K é o elemento $(I, 0)$ e o inverso de $(A, v) \in K$ é $(A^{-1}, -A^{-1}v)$.

1.1.4. Definição *Um campo X num grupo de Lie G diz-se invariante à esquerda se, e somente se, $dL_g(X_h) = X_{gh}$. Analogamente define-se: X é invariante à direita se, e somente se, $dR_g(X_h) = X_{hg}$.*

Note que, se X é um campo em G invariante à esquerda (resp. à dir), então para conhecer o campo X basta conhecer o valor de X_e. De fato, $\forall g \in G$, $X_g = dL_g(X_e)$.(resp. $X_g = dR_g(X_e)$)

Isto implica também que o grupo G é paralelizável pois, se $\{X_1, \ldots, X_n\}$ é uma base de T_eG, então $\{dL_g(X_e)\}_{i=1}^n$ é base de T_gG. Assim temos n campos C^∞, globalmente definidos em G, linearmente independentes em cada ponto.

1.1.5. Proposição *Se X é um campo em G invariante à esquerda, então X é diferenciável C^∞.*

Demonstração: Como $L_{g^{-1}}$, é um difeomorfismo C^∞, para mostrar que X é diferenciável em $g \in G$ basta fazer a demonstração para g numa vizinhança coordenada de e.

Seja $\phi : U \subset G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma vizinhança coordenada de $e \in G$, escreva $\phi = (x^1, \ldots, x^n)$ com $x^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ e seja $g \in U$. Como as operações em G são contínuas podemos tomar $V \subset U$ vizinhança de $e \in G$ tal que $L_g(V) \subset U$.

Então, temos que

$$X_g\left(x^i\right) = \left(dL_g \cdot X_e\right)\left(x^i\right) = X_e\left(x^i \circ L_g\right).$$

Agora, escrevendo $X_e = \sum_j c_j \frac{\partial}{\partial x^i}(e)$, $c_j = const$, temos

$$X_g\left(x^i\right) = \sum_j c_j \frac{\partial\left(x^i \circ L_g\right)}{\partial x^i}(e)$$

e como $x^i \circ L_g$ é uma função diferenciável em g, $X_g(x^i)$ é diferenciável de g. Como $f^i : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, $f^i(g,h) = x^i(gh)$, ou seja, $f^i(g,h)$ é a i-ésima coordenada do produto $gh = L_g h$

$$X_g\left(x^i\right) = \sum_j c_j \frac{\partial f^i}{\partial x^i}\left(ge\right).$$

Portanto X é diferenciável em $g \in V$ $\square$

1.1.6. Proposição *Seja LG o conjunto dos campos invariantes à esquerda em G. Então a aplicação*

$$\begin{aligned} \alpha : LG &\longrightarrow T_e G, \\ X &\longmapsto \alpha\left(X\right) = X_e \end{aligned}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Demonstração: È claro que α é linear. Provemos que α é sobre.

Dado $z \in T_e G$ definimos o campo X em G por $X_g = dL_g z$. Temos,

$$X_{gh} = dL_{gh} z = dL_g L_h z = dL_g X_h$$

portanto X é invariante à esquerda. Além disso, $\alpha\left(X\right) = X_e = dL_e z = Id\left(z\right) = z$. Logo X é sobre.

Agora, provemos que α é $1-1$. Para isto basta observar que $X_g = dL_g X_e$, logo se, $X_e = Y_e$, então $dL_g X_e = dL_g Y_e$. Donde, $X_g = Y_g$. $\square$

1.1.7. Definição *Uma álgebra de Lie é uma álgebra anticomutativa com uma operação bilinear que verifica a identidade de Jacobi, ou seja, um espaço vetorial L com uma aplicação $[\quad,\quad] : L \times L \longrightarrow L$ $\mathbb{R}$-bilinear tal que*

1. $[x, y] = -[y, x]$ *(anticomutatividade)*

2. $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$. *(Identidade de Jacobi)*

1.1.8. Exemplos

(a) $(\mathbb{R}^n, +, \bullet, [\cdot\ ,\ \cdot] \equiv 0)$

(b) *Denote por* $\mathfrak{X}(M)$ *o conjunto dos campos* C^∞ *sobre uma variedade* M. $\mathfrak{X}(M)$ *é um espaço vetorial com as operações usuais de soma de campos e multiplicação de um número por um campo.*

$$(X+Y)_x := X_x + Y_x, \qquad (\lambda X)_x := \lambda X_x.$$

Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *define-se o colchete* $[X,Y]$ *como o campo em* $\mathfrak{X}(M)$ *tal que, para cada* $f \in C^\infty(M)$ *e cada* $x \in M$ *tem-se:*

$$[X,Y]_x f = X_x(Yf) - Y_x(Xf),$$

onde Xf *é a aplicação dada por:*

$$\begin{array}{rcl} Xf : M & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (Xf)(x) = df(x)X_x. \end{array}$$

Além disso, se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty$, então $fX \in \mathfrak{X}(M)$.

1.1.9. Definição *Sejam* M *e* N *variedades diferenciáveis e* $\varphi : M \longrightarrow N$ *uma aplicação de classe* C^∞. *Dizemos que os campos* $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ *são* $\varphi-$*relacionados, se* $d\varphi \cdot X = Y \cdot \varphi$. *Ou seja, se o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & N \\ X\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow Y \\ TM & \underset{d\varphi}{\longrightarrow} & TN \end{array}, \quad Y \circ \varphi = d\varphi \circ X.$$

1.1.10. Proposição *Seja* $\varphi : M \longrightarrow N$ *uma aplicação de classe* C^∞ *e sejam* $X, X_1 \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $Y, Y_1 \in \mathfrak{X}(N)$. *Se* X *e* Y *são* φ*-relacionados e se* X_1 *e* Y_1 *são* φ*-relacionados, então* $[X, X_1]$ *é* φ*-relacionado com* $[Y, Y_1]$.

Demonstração: Queremos mostrar que para cada $p \in M$ e cada $f \in C^\infty(N)$ vale a igualdade

$$d\varphi\,[X, X_1]_p\,(f) = [Y, Y_1]_{\varphi(p)}\,(f).$$

Temos,

$$\begin{aligned}
d\varphi\left[X,X_1\right]_p(f) &= \left[X,X_1\right]_p(f\circ\varphi)\\
&= X_p\left(X_1\left(f\circ\varphi\right)\right)-\left(X_1\right)_p\left(X\left(f\circ\varphi\right)\right)\\
&= X_p\left(d\varphi\circ X_1\right)(f)-\left(X_1\right)_p\left(d\varphi\circ X\right)(f)\\
&= X_p\left(Y_1\circ\varphi\right)(f)-\left(X_1\right)_p\left(Y\circ\varphi\right)(f)\\
&= X_p\left(Y_1(f)\circ\varphi\right)-\left(X_1\right)_p\left(Y(f)\circ\varphi\right)\\
&= d\varphi\left(X_p\right)\left(Y_1(f)\right)-d\varphi\left(X_1\right)_p\left(Y(f)\right)\\
&= Y_{\varphi(p)}\left(Y_1(f)\right)-Y_{1_{\varphi(p)}}\left(Y(f)\right)\\
&= \left[Y,Y_1\right]_{\varphi(p)}(f)\,.
\end{aligned}$$

$\square$

1.1.11. Corolário *Se $X,Y\in LG$ então $[X,Y]\in LG$. (Ou seja, LG é uma álgebra de Lie.)*

Demonstração: Note que se $X\in LG$ e $g\in G$, então X é L_g-relacionado consigo mesmo.

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{L_g} & G\\
X\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow X\\
TG & \underset{dL_g}{\longrightarrow} & TG
\end{array}\ ,\quad dL_g\circ X = X\circ L_g.$$

como $dL_g\circ X = X\circ L_g$ e $dL_g\circ Y = Y\circ L_g$ então, da proposição anterior, temos $dL_g\circ[X,Y]=[dL_g\circ X, dL_g\circ Y]$, logo $[X,Y]$ é invariante à esquerda. $\square$

Temos visto que LG e T_eG são isomorfos como espaços vetoriais. Assim, podemos induzir uma estrutura de álgebra de Lie em T_eG passando o colchete de campos em LG para T_eG.

Para $\widehat{X},\widehat{Y}\in T_eG$, definimos $[\widehat{X},\widehat{Y}]:=[X,Y]_e$ onde, $X,Y\in LG$ são tais que

$$X_g = dL_g\widehat{X},\quad Y_g = dL_g\widehat{Y}.$$

Denotaremos por $\widehat{G}$ a álgebra de Lie do grupo G.

1.1.12. Exemplos

(a) $(\mathbb{R}^3, \wedge)$, *onde* $\wedge$ *é o produto vetorial usual de* $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{ccc} i\wedge j = k & i\wedge j = -j\wedge i & i\wedge i = 0 \\ j\wedge k = i & j\wedge k = -k\wedge j & j\wedge j = 0 \\ k\wedge i = j & \underset{Anticonmutatividade}{k\wedge i = -i\wedge k} & \underset{Jacobi}{k\wedge k = 0} \end{array}$$

$(\mathbb{R}^3, \wedge)$ *é a álgebra de Lie do grupo de Lie* $\mathbb{S}^3$, $(\mathbb{R}^3, \wedge) \backsimeq T_e\mathbb{S}^3$.

(b) $(M_n(\mathbb{R}), [\quad,\quad])$, *matrizes* $n \times n$ *reais com* $[A, B] = AB - BA$.

$GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ *é aberto e* $T_I GL_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$. *De fato, a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : M(n) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \varphi(A) = detA, \end{array}$$

é contínua e $GL_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(R \setminus \{0\})$.

A operação colchete induzida pelo isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \alpha : LG & \longrightarrow & T_eG, \\ x & \mapsto & \alpha(X) = X_e \end{array}$$

coincide com o colchete de matrizes $[A, B] = AB - BA$, *no caso* $G = GL_n(\mathbb{R})$, *ou seja, se*

$$\begin{array}{rcl} \alpha : LG & \longrightarrow & M(n), \\ X & \longmapsto & \alpha(X) = X_e \end{array}$$

então $\alpha([X, Y]) = \alpha(X)\alpha(Y) - \alpha(Y)\alpha(X)$.

Com efeito, indicando por A^{ij} o elemento ij da matriz A, temos

$$\alpha([X, Y])^{ij} = [X, Y]_e \left(x^{ij}\right)$$

onde x^{ij} é a função coordenada em $M_n(\mathbb{R})$ que associa a cada matriz A o seu elemento A_{ij}.

$$\begin{aligned}
[X,Y]_e\left(x^{ij}\right) &= X_e\left(Yx^{ij}\right) - Y_e\left(Xx^{ij}\right)\\
Yx^{ij}(y) &= Y_y\left(x^{ij}\right) = \left(dL_yY_e\right)\left(x^{ij}\right)\\
&= Y_e\left(x^{ij}\circ dL_y\right), \forall y \in GL(n).
\end{aligned}$$

Analogamente $Xx^{ij}(y) = X_e\left(x^{ij}\circ dL_y\right)$.

Além disso, para $y, z \in GL_n(\mathbb{R})$ temos

$$x^{ij}\circ dL_yz = x^{ij}(yz) = \sum_k x^{ik}(y)\,x^{kj}(z).$$

Logo

$$x^{ij}L_y = \sum_k x^{ik}(y)\,x^{kj}.$$

Portanto

$$Yx^{ij}(y) = \textstyle\sum_k x^{ik}(y)\,Y_ex^{kj}, \quad Xx^{ij}(y) = \sum_k x^{ik}(y)\,X_ex^{kj}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\alpha\left([X,Y]\right)^{ij} &= \sum_k X_ex^{ik}(y)\,Y_ex^{kj} - \sum_k Y_ex^{ik}(y)\,X_ex^{kj}\\
&= \sum_k\left\{\alpha(X)^{ik}\,\alpha(Y)^{kj} - \sum_k \alpha(Y)^{ik}\,\alpha(X)^{kj}\right\}\\
&= \left[\alpha(X)\,\alpha(Y) - \alpha(Y)\,\alpha(X)\right]^{ij}.
\end{aligned}$$

Na definição de álgebra de Lie poderíamos ter considerado RG, o conjunto dos campos invariantes à direita ($X_g = dR_gX_e$) e teríamos uma álgebra isomorfa mas, em geral, não contendo os mesmos campos.

Vimos que $LG \backsimeq T_eG$, (isometria de espaços vetoriais). Logo, se tomamos uma base $\{X_1,\ldots,X_n\}$ de T_eG poderíamos gerar $X^1,\ldots,X^n$ campos em LG, tais que $X_e^i = X_i$. Então $X \in LG$ pode-se escrever

$$X_e = \sum_i c_iX_e^i, \quad c_i = const.$$

Se $X \in LG$, então $X_x = dL_x X_e$. Portanto $X = \sum\limits_i c_i X^i$.

Em particular dados dois campos $X, Y \in LG$, tais que $X = \sum\limits_i c_i X^i$, $Y = \sum\limits_j d_j X^j$, temos

$$[X, Y] = \sum_{ij} c_i d_j \left[X^i, X^j\right].$$

Podemos escrever $[X^i, X^j] = \sum\limits_k C_{ij}^k X^k$ e obtemos

$$[X, Y] = \sum_{ij} c_i d_j \left(\sum_k C_{ij}^k X^k\right).$$

Assim, basta conhecer as constantes C_{ij}^k para conhecer toda a álgebra de Lie de G. As constantes C_{ij}^k são chamadas de constantes de estrutura da álgebra de Lie LG ou constantes estruturais de Cartan. Pode-se provar que:

(a) $C_{ij}^k + C_{ji}^k = 0$

(b) $\sum_r \left(C_{ij}^r C_{kr}^s + C_{jk}^r C_{ri}^s + C_{ki}^r C_{rj}^s\right) = 0$

1.1.13. ***Definição*** *Uma métrica Riemanniana num grupo de Lie é invariante à esquerda se, e somente se, as translações à esquerda são isometrias, ou seja,*

$$\langle u, v\rangle_y = \left\langle d\left(L_x\right)_y u, d\left(L_x\right)_y v\right\rangle_{L_x(y)}, \quad \forall x, y \in G, \quad \forall u, v \in T_y G.$$

Analogamente define-se métrica invariante à direita.

Uma métrica que é invariante à esquerda e à direita diz-se *bi-invariante.*

Para introduzir uma métrica invariante à esquerda em G podemos, por exemplo, tomar um produto interno qualquer em $T_e G := \widehat{G}$ e definir

$$\langle u, v\rangle_x = \left\langle d\left(L_{x^{-1}}\right)_x u, d\left(L_{x^{-1}}\right)_x v\right\rangle, \quad \forall x \in G, \quad \forall u, v \in T_x G.$$

Isto define, de fato, uma métrica Riemanniana em G pois L_x depende diferenciavelmente de x, e, é claro que, tal métrica será invariante à esquerda. Analogamente podemos construir uma métrica invariante à direita.

Um grupo de Lie com uma métrica invariante à esquerda é uma variedade homogênea, no sentido que: dados $x, y \in G$ existe uma isometria de G que leva x em y, a saber

$$\begin{array}{rcl} L_{yx^{-1}} : G & \longrightarrow & G, \\ x & \mapsto & L_{yx^{-1}}(x) = yx^{-1}x = y. \end{array}$$

Assim G é também completo como variedade Riemanniana, pois qualquer variedade homogênea é completa.

Seja G um grupo de Lie com métrica $\langle \ , \ \rangle$ invariante à esquerda. Lembremos que a conexão Riemanniana associada é determinada pelas condições:

(a) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$. (Simetria)

(b) $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$. (Compatibilidade com a métrica)

A partir de (a) e (b), permutando os campos X, Y, Z obtém se a fórmula:

$$2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle + X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle + Z \langle X, Y \rangle,$$

conhecida como fórmula de Koszul.

Agora, se $X, Y \in LG$ então $\langle X, Y \rangle$ é constante. De fato,

$$\langle X_x, Y_x \rangle = \langle d(L_x)_e X_e, d(L_x)_e Y_e \rangle = \langle X_e, Y_e \rangle.$$

Conseqentemente, no caso de um grupo de Lie, a fórmula de Koszul reduz-se a

$$2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle.$$

Assim, se $x \in G$ é um ponto qualquer em G, então por (**??**) temos

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle (x) &= \langle [X, Y], Z \rangle (x) - \langle [Y, Z], X \rangle (x) + \langle [Z, X], Y \rangle (x) \\ &= \langle [X, Y]_e, Z_e \rangle - \langle [Y, Z]_e, X_e \rangle + \langle [Z, X]_e, Y_e \rangle \\ &= 2 \langle (\nabla_X Y)_e, Z_e \rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\left\langle d\left(L_x\right)_e\left(\nabla_X Y\right)_e, Z_x\right\rangle &= \left\langle d\left(L_x\right)_e\left(\nabla_X Y\right)_e, d\left(L_x\right)_e Z_x\right\rangle \\ &= \left\langle\left(\nabla_X Y\right)_e, Z_e\right\rangle.\end{aligned}$$

Portanto

$$\left\langle\left(\nabla_X Y\right)_x, Z_x\right\rangle=\left\langle d\left(L_x\right)_e\left(\nabla_X Y\right)_e, Z_x\right\rangle, \quad \forall Z \in LG.$$

Logo

$$\left(\nabla_X Y\right)_x=d\left(L_x\right)_e\left(\nabla_X Y\right)_e.$$

Ou seja, se $X, Y \in LG$, então $\nabla_X Y \in LG$.

Assim, cada elemento $X \in LG$ define uma transformação linear anti-simétrica

$$\begin{aligned}\nabla_X : LG &\longrightarrow LG, \\ Y &\longmapsto \nabla_X Y\end{aligned}$$

A anti-simetria é conseqência direita da simetria da conexão e o fato de $\langle X, Y\rangle$ ser constante. Com efeito, se $\langle Y, Z\rangle$ é constante, então para cada X de LG temos $X\langle Y, Z\rangle=0$ e logo $\langle\nabla_X Y, Z\rangle=-\langle Y, \nabla_X Z\rangle$.

1.1.14. ***Definição*** *Sejam G um grupo de Lie, X $Y \in \mathfrak{X}(G)$. A transformação linear $R(X,Y) : \mathfrak{X}(G) \longrightarrow \mathfrak{X}(G)$ que associa a cada par de campos X, Y o campo $R(X,Y)=\nabla_Y\nabla_X-\nabla_X\nabla_Y+\nabla_{[X,Y]}$ é chamado tensor de curvatura.*

Se nos restringimos a LG, então como ∇_X transforma LG em LG, temos que $R(X,Y)$ transforma LG em LG e logo $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = const$ em G.

Agora a curvatura seccional de um plano $\mathbb{P} \subset T_xG$ é o valor em x de

$$K(X,Y) := \langle R(X,Y)X, Y\rangle,$$

ou seja,

$$K(X,Y) = \left\langle \nabla_Y\nabla_X-\nabla_X\nabla_Y+\nabla_{[X,Y]}, Y\right\rangle \tag{1.1}$$

onde, X e Y são os campos locais tais que $\{X_x, Y_x\}$ é uma base ortonormal do plano $\mathbb{P}$. Como podemos escolher campos ortonormales invariantes à esquerda, tais que no ponto fornecem a base desejada, concluímos que num grupo de Lie com métrica invariante à esquerda, as curvaturas seccionais podem ser calculadas diretamente na álgebra de Lie de G, LG.

1.1.15. Proposição *Sejam $X, Y \in LG$. Então*

$$K(X,Y) = \|[X,Y]\|^2 + \langle [Y,[X,Y]], X\rangle + \|\nabla_X Y\|^2 + \langle \nabla_X X, \nabla_Y Y\rangle.$$

Demonstração: Como $\langle \nabla_X X, Y\rangle$ é constante, então $Y\langle \nabla_X X, Y\rangle = 0$. Logo,

$$\langle \nabla_Y \nabla_X X, Y\rangle = -\langle \nabla_X X, \nabla_Y Y\rangle. \tag{1.2}$$

Por outro lado $X\langle \nabla_Y X, Y\rangle = 0$, então

$$\begin{aligned} -\langle \nabla_X \nabla_Y X, Y\rangle &= \langle \nabla_Y X, \nabla_X Y\rangle \\ &= \langle -[X,Y] + \nabla_X Y, \nabla_X Y\rangle \\ &= -\langle [X,Y], \nabla_X Y\rangle + \|\nabla_X Y\|^2. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Substituindo os dois resultados anteriores na fórmula de koszul obtemos,

$$2\left\langle \nabla_{[X,Y]} X, Y\right\rangle = \langle [[X,Y],X],Y\rangle - \langle [X,Y],[X,Y]\rangle + \langle [Y,[X,Y]],X\rangle$$

e como,

$$\begin{aligned} \langle [[X,Y],X],Y\rangle &= \left\langle \nabla_{[X,Y]} X - \nabla_X [X,Y], Y\right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{[X,Y]} X, Y\right\rangle + \langle [X,Y], \nabla_X Y\rangle, \end{aligned}$$

temos

$$\left\langle \nabla_{[X,Y]} X, Y\right\rangle - \langle [X,Y], \nabla_X Y\rangle = -\|[X,Y]\|^2 + \langle [Y,[X,Y]], X\rangle. \tag{1.4}$$

Logo, $\left\langle \nabla_{[X,Y]} X, Y\right\rangle = \langle [X,Y], \nabla_X Y\rangle - \|[X,Y]\|^2 + \langle [Y,[X,Y]], X\rangle.$

De (??), (??), (??) e da fórmula da curvatura seccional (??) obtemos

$$\begin{aligned} K(X,Y) &= \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y\rangle - \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y\rangle + \left\langle \nabla_{[X,Y]} X, Y\right\rangle \\ &= \big(-\langle \nabla_X X, \nabla_Y Y\rangle - \langle [X,Y], \nabla_X Y\rangle + \|\nabla_X Y\|^2 \\ &\quad + \langle [X,Y], \nabla_X Y\rangle - \|[X,Y]\|^2 + \langle [Y,[X,Y]], X\rangle \big). \end{aligned}$$

□

1.2 O Espaço de Heisenberg.

Nesta seção apresentamos o espaço de Heisenberg, determinamos os campos invariantes à esquerda e os campos de Killing.

Consideremos, na álgebra de Lie das matrizes triangulares superiores $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, matrizes M e N da forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}x_1' & x_3' \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}x_2' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde τ é um parâmetro real.

Temos

$$MN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\tau x_1 x_2' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad NM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\tau x_1' x_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí resulta que o colchete de Lie é dado por:

$$[M,N] = MN - NM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\tau(x_1 x_2' - x_1' x_2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Além disso, temos que

$$A = \exp M = (I + M + \tfrac{1}{2!}M^2 + \tfrac{1}{3!}M^3 + \tfrac{1}{4!}M^4 + \cdots) = (I + M + \tfrac{1}{2!}M^2),$$

pois $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\tau x_1 x_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M^2 M = 0$ e assím por diante.

Portanto,

$$A = \exp M = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}x_1 & x_3 + \tau x_1 x_2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deste modo, exponenciando a álgebra de Lie,

$$\widehat{\mathbb{H}}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}x_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ & & \end{pmatrix} : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \right\},$$

obtemos o grupo de Lie

$$\mathbb{H}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}x_1 & x_3 + \tau x_1 x_2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Este grupo é chamado grupo de Heisenberg.

A matriz $A = \exp M$ em $\mathbb{H}_3$ é representada pelas coordenadas $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, denominadas coordenadas exponenciais de A.

O produto em $\mathbb{H}_3$ é obtido pela restrição do produto usual de matrizes em $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$.

Fixando $A = \exp M$ e $B = \exp N$ calculamos

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}x_1 & x_3 + \tau x_1 x_2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}x_1' & x_3' + \tau x_1' x_2' \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}x_2' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}(x_1 + x_1') & x_3 + x_3' + 2\tau x_1 x_2' + \tau x_1 x_2 + \tau x_1' x_2' \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}(x_2 + x_2') \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} AB &= exp\ M \cdot exp\ N \\ &= exp(M + N + \frac{1}{2}[M, N]). \end{aligned}$$

Assim,

$$M + N + \tfrac{1}{2}[M, N] = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}(x_1 + x_1') & x_3 + x_3' + 2\tau x_1 x_2' - \tau x_1' x_2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}(x_2 + x_2') \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é a matriz em $\widehat{\mathbb{H}}_3$ cuja exponencial resulta em $AB = \exp M \cdot \exp N$. Portanto, se (x_1, x_2, x_3) e (x_1', x_2', x_3') são as coordenadas exponenciais de A e B respectivamente, então as coordenadas exponenciais de AB são

$$(x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3' + 2\tau x_1 x_2' - \tau x_1' x_2).$$

Assim, o produto de matrizes é representado em coordenadas exponenciais por

$$(x_1, x_2, x_3) * (x_1', x_1', x_1') = (x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3' + 2\tau x_1 x_2' - \tau x_1' x_2) \tag{1.5}$$

Agora dadas as matrizes $M, N, P \in \widehat{\mathbb{H}}_3$, obtemos

$$[[M, N], P] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\tau(x_1 x_2' - x_1' x_2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Assim, $[\widehat{\mathbb{H}}_3, \widehat{\mathbb{H}}_3] = \mathbb{R} \cdot e_3 \equiv \mathfrak{h}$ e $\Big[[\widehat{\mathbb{H}}_3, \widehat{\mathbb{H}}_3], \widehat{\mathbb{H}}_3\Big] = [\mathfrak{h}, \widehat{\mathbb{H}}_3] = \{0\}$. Portanto a álgebra de Lie é nilpotente, com centro dado por $\mathfrak{h}$.

A continuação determinaremos os campos invariantes à esquerda associados aos vetores tangentes $e_1, e_2, e_3 \in \widehat{\mathbb{H}}_3$, onde,

$$e_1 = \partial_{x_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \partial_{x_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \partial_{x_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que $[e_1, e_2] = e_3$ e os demais colchetes são nulos. O subgrupo à 1-parâmetro gerado por e_1 é a curva que passa pela identidade com velocidade e_1, dada pela exponencial,

$$exp\ (te_1) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Em coordenadas exponenciais, esta curva corresponde a $t \longrightarrow (\frac{t}{\sqrt{2\tau}}, 0, 0)$. Denotamos por E_1 o campo invariante à esquerda gerado por e_1. A curva integral do campo E_1 passando pelo ponto $A \in \mathbb{H}_3$, em coordenadas (x_1, x_2, x_3) é dada por

$$\begin{aligned}
L_A(exp\ te_1) &= A \cdot (exp\ te_1) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}x_1 & x_3 + \tau x_1 x_2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}(x_1 + \frac{t}{\sqrt{2\tau}}) & x_3 + \tau x_1 x_2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}(x_1 + \frac{t}{\sqrt{2\tau}}) & x_3 - \tau x_2 \frac{t}{\sqrt{2\tau}} + \tau(x_1 + \frac{t}{\sqrt{2\tau}})x_2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, coordenadas exponenciais temos a curva:

$$(x_1, x_2, x_3) * \left(\frac{t}{\sqrt{2\tau}}, 0, 0\right) = \left(x_1 + \frac{t}{\sqrt{2\tau}}, x_2, x_3 - \tau x_2 \frac{t}{\sqrt{2\tau}}\right).$$

Calculando a diferencial da translação à esquerda no ponto $A = A(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}_3$ obtemos o campo E_1 em $A \in \mathbb{H}_3$.

$$E_1(A) = E_{1_A} = E_1\Big|_{(x_1,x_2,x_3)} = \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_A(exp\ te_1).$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_A(exp\ te_1) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(x_1 + \frac{t}{\sqrt{2\tau}}, x_2, x_3 - \tau x_2 \frac{t}{\sqrt{2\tau}}\right) \\
&= \frac{\partial_{x_1}}{\sqrt{2\tau}} - \frac{\tau x_2 \partial_{x_2}}{\sqrt{2\tau}}.
\end{aligned}$$

Assim obtemos, $E_1 = \frac{\partial_{x_1}}{\sqrt{2\tau}} - \frac{\tau x_2 \partial_{x_2}}{\sqrt{2\tau}}$.

Analogamente, obtemos os campos invariantes à esquerda gerados por $e_2 = \partial x_2$ e $e_3 = \partial x_3$ na álgebra de Lie $\widehat{\mathbb{H}}_3$. Assim temos:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{\partial_{x_1}}{\sqrt{2\tau}} - \frac{\tau x_2 \partial_{x_3}}{\sqrt{2\tau}}, \\ E_2 = \frac{\partial_{x_2}}{\sqrt{2\tau}} + \frac{\tau x_1 \partial_{x_3}}{\sqrt{2\tau}}, \\ E_3 = \partial_{x_3}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Calculando os colchetes de Lie, temos

$$\begin{aligned}
[E_1, E_2] &= \left[\frac{\partial_{x_1}}{\sqrt{2\tau}} - \frac{\tau x_2 \partial_{x_3}}{\sqrt{2\tau}}, \frac{\partial_{x_2}}{\sqrt{2\tau}} + \frac{\tau x_1 \partial_{x_3}}{\sqrt{2\tau}}\right] \\
&= \frac{1}{2\tau}\partial_{x_3} = \frac{1}{2\tau} E_3.
\end{aligned}$$

As outras relações são nulas.

De (**??**) obtemos

$$\begin{cases} \partial_{x_3} = E_3 \\ \partial_{x_1} = \sqrt{2\tau} E_1 + \tau x_2 E_3 \\ \partial_{x_2} = \sqrt{2\tau} E_2 - \tau x_1 E_3. \end{cases}$$

Logo, os coeficientes da métrica em termos de coordenadas exponenciais são dados por

$$\begin{aligned}
\langle \partial_{x_1}, \partial_{x_1} \rangle &= 2\tau + \tau^2 x_2^2 \\
\langle \partial_{x_2}, \partial_{x_2} \rangle &= 2\tau + \tau^2 x_1^2 \\
\langle \partial_{x_3}, \partial_{x_3} \rangle &= 1 \\
\langle \partial_{x_1}, \partial_{x_2} \rangle &= -\tau^2 x_1 x_2 \\
\langle \partial_{x_1}, \partial_{x_3} \rangle &= \tau x_2 \\
\langle \partial_{x_2}, \partial_{x_3} \rangle &= -\tau x_1.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
ds^2 &= (2\tau + \tau^2 x_2^2) dx_1^2 + (2\tau + \tau^2 x_1^2) dx_2^2 + dx_3^2 - 2\tau^2 x_1 x_2 dx_1 dx_2 \\
&\quad +2\tau x_2 dx_1 dx_3 - 2\tau x_1 dx_2 dx_3 \\
&= 2\tau dx_1^2 + 2\tau dx_2^2 + dx_3^2 + (\tau x_2 dx_1 - \tau x_1 dx_2)\tau x_2 dx_1 \\
&\quad +(\tau x_1 dx_2 - \tau x_2 dx_1)\tau x_1 dx_2 + 2\tau x_2 dx_1 dx_2 - 2\tau x_1 dx_2 dx_3 \\
&= 2\tau dx_1^2 + 2\tau dx_2^2 + dx_3^2 + (\tau x_2 y dx_1 - \tau x_1 x dx_2)(\tau x_2 dx_1 - \tau x_1 dx_2) \\
&\quad +2(\tau x_2 dx_1 - \tau x_1 dx_2) dx_3 \\
&= 2\tau dx_1^2 + 2\tau dx_2^2 + (dx_3 + \tau x_2 dx_1 - \tau x_1 dx_2)^2.
\end{aligned}$$

Logo, a métrica invariante à esquerda que fixamos em $\mathbb{H}_3$ é dada por

$$ds^2 = 2\tau dx_1^2 + 2\tau dx_2^2 + (dx_3 + \tau x_2 dx_1 - \tau x_1 dx_2)^2. \tag{1.7}$$

Calculando os campos invariantes à direita gerados por e_1, e_2 e e_3 obtemos:

$$\begin{cases} F_1 = \partial_{x_1} + \tau x_2 \partial_{x_3} \\ F_2 = \partial_{x_2} - \tau x_1 \partial_{x_3} \\ F_3 = \partial_{x_3}. \end{cases}.$$

Note que estes campos correspondem a diferenciais de translações à esquerda, logo definem campos de Killing.

1.3 Grupos de matrizes

Nesta seção definimos o que é um grupo de matrizes e damos algumos exemplos. Descrevemos o grupo de Heisenberg de forma algébrica com a finalidade de mostrar que não é um grupo de matrizes.

Consideremos os subconjuntos H_3 e N de $GL_3(\mathbb{R})$ definidos por

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Para simplificar a notação escreveremos os elementos de H_3 na forma

$$A(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3.1. Proposição *H_3 é um subgrupo de $GL_3(\mathbb{R})$.*

Demonstração: Como $I = A(0,0,0) \in H_3$. E dados $A(x_1, x_2, x_3)$ e $A(y_1, y_2, y_3)$ em H_3, temos que

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3) \cdot A(y_1, y_2, y_3) &= \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_3 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x_1 + y_1 & x_3 + y_3 + x_1 y_2 \\ 0 & 1 & x_2 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= A(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + x_1 y_2) \in H_3. \end{aligned}$$

Além disso,

$$A(x_1, x_2, x_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & x_3 + x_1 x_2 \\ 0 & 1 & -x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(-x_1, -x_2, x_3 + x_1 x_2).$$

Portanto, H_3 é subgrupo de $GL_3(\mathbb{R})$. $\square$

È claro que H_3 é um subgrupo fechado de $GL_3(\mathbb{R})$.

1.3.2. Proposição *N é um subgrupo normal de H_3.*

Demonstração: N é um subgrupo de H_3, já que, se $A(0,0,n)$ e $A(0,0,m)$ em N então

$$A(0,0,n)\ A(0,0,m)^{-1} = A(0,0,n)\ A(0,0,-m) = A(0,0,n-m) \in N$$

Agora, se $A(x_1,x_2,x_3) \in H_3$ e $A(0,0,n) \in N$, então

$$\begin{aligned} A(x_1,x_2,x_3)A(0,0,n)A(x_1,x_2,x_3)^{-1} &= A(x_1,x_2,x_3+n)A(-x_1,-x_2,x_1x_2-x_3) \\ &= A(0,0,n) \in N. \end{aligned}$$

Portanto N é subgrupo normal de H_3. $\square$

Define-se o grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3$ como

$$\mathbb{H}_3 := H_3/N.$$

Denotaremos a classe lateral esquerda de $A(x_1,x_2,x_3)$ em $\mathbb{H}_3$ por

$$\overline{A(x_1,x_2,x_3)} = A(x_1,x_2,x_3)N.$$

$\mathbb{H}_3$ é um grupo topológico, e como H_3 e N são variedades diferenciáveis, então $\mathbb{H}_3$ também é variedade diferenciável. Como N é subgrupo normal fechado de H_3, tem-se que $\mathbb{H}_3$ é um grupo de Lie.

1.3.3. Definição *Um grupo de Lie G é um grupo de matrizes, se é um subgrupo fechado de $GL_n(R)$, para algum $n \in \mathbb{Z}$.*

Dado que $GL_n(\mathbb{R})$ pode ser considerado como um subconjunto de $\mathbb{R}^{n^2}$, na definição anterior entende-se que G é fechado em $GL_n(\mathbb{R})$ com a topologia relativa herdada de $\mathbb{R}^{n^2}$.

1.3.4. Exemplos

(a) *$GL_n(\mathbb{R})$ é um grupo de matrizes, pois é um grupo fechado no mesmo $GL_n(\mathbb{R})$.*

(b) *$O(3)$ é um subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$. Além disso é fechado em $\mathbb{R}^9$, pois $O(3) = \det^{-1}(\{1, -1\})$ e $\det : GL_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \{1, -1\}$ é continua, alem disso $\{1, -1\}$ é fechado em $\mathbb{R}$. Portanto $O(3)$ é fechado em $GL_n(\mathbb{R})$.*

(c) *$SO(3)$ é um grupo de matrizes pelas mesmas razões que $O(3)$.*

Como vimos anteriormente, os grupos de matrizes também são grupos de Lie.

Em geral, se G é um grupo de matrizes, então é um grupo de Lie, pois é um grupo topológico e uma variedade diferenciável de dimensão finita.

Então surge a pergunta: todo grupo de Lie é um grupo de matrizes? A resposta é negativa como veremos no exemplo seguinte.

Primeiro vamos demonstrar o seguinte lema técnico.

1.3.5. Lema *Seja G um subgrupo fechado de $GL_n(\mathbb{R})$. Suponhamos que existem elementos $A \neq I, B$ e C em G que satisfazem $A = B^{-1}C^{-1}BC$, $AB = BA$, e além disso, $A^p = I$ para algum primo $p > 2$. Então $n \geqslant p$.*

Demonstração: Podemos considerar $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$. Como $A^p = I$, tem-se que A satisfaz a equação $x^p - 1 = 0$. Então o polinmio mínimo m_A de A divide $x^p - 1 = (x-1)(x^{p-1} + \cdots + 1)$.

Mas $A \neq I$ implica que m_A é fator de

$$x^{p-1} + \cdots + 1 = (x - \alpha)\left(x - \alpha^2\right) \cdots \left(x - \alpha^{p-1}\right),$$

onde $\alpha \neq 1$ é uma raiz p-ésima de 1. Sem perda de generalidade podemos afirmar que $x - \alpha |\ m_A$, com o qual resulta que α é raiz de m_A e então existe α raiz p-ésima de 1 e $v_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tais que

$$Av_0 = \alpha v_0.$$

Seja $E_\alpha = \{v \in \mathbb{C}^n : Av = \alpha v\}$ o espaço próprio correspondente a α. Tomemos $v \in E_\alpha$. Então $A(Bv) = (AB)v = (BA)v = B(Av) = B(\alpha v) = \alpha Bv$ implica $Bv \in E_\alpha$. E como $v \in E_\alpha$ é arbitrário, resulta que

$$B\left(E_\alpha\right) \in E_\alpha.$$

Por outro lado, A restrito a E_α é igual a αI. Dai,

$$A = B^{-1}C^{-1}BC = \alpha I \quad \textit{então} \quad C^{-1}BC = \alpha B \quad \textit{em} \quad E_\alpha.$$

vemos que B e αB são semelhantes em E_α. Portanto B e αB restritos a E_α, tem os mesmos valores próprios em E_α.

Se μ é um valor próprio de B, $\alpha\mu$ é um valor próprio de αB. Logo $\alpha\mu$ é um valor próprio de B. Pelo mesmo raciocínio $\alpha^2\mu$ é um valor próprio de B, e assim sucessivamente. Resulta que B tem em E_α, os valores próprios

$$\mu, \alpha\mu, \alpha^2\mu, \ldots, \alpha^{p-1}\mu.$$

todos diferentes, pois B é invertível.

Concluímos que,

$$p \leqslant dim(E_\alpha) \leqslant dim\left(\mathbb{C}^n\right) = n, \quad donde \quad p \leqslant n.$$

□

Finalmente podemos provar que.

1.3.6. Corolário $\mathbb{H}_3$ *não é um grupo de matrizes.*

Demonstração: suponhamos que $\mathbb{H}_3$ é um grupo de matrizes, ou seja, é um subgrupo fechado de $GL_n(\mathbb{R})$ para algum n. Seja p um primo arbitrário e definamos A, B e C da seguinte forma

$$B = \overline{A(1,0,0)}, \quad C = \overline{A(0,1/p,0)}, \quad A = B^{-1}C^{-1}BC = \overline{A(0,0,1/p)}.$$

Então $A^p = \overline{A(0,0,1)} = \overline{A(0,0,0)} = \overline{I}$ e

$$AB = \overline{A(0,0,1/p)} = BA.$$

Logo A, B, e C satisfazem as hipóteses do lema. Temos então que $p \leqslant n$, o qual é uma contradição pois n é fixo e p é um primo arbitrário. Portanto $\mathbb{H}_3$ não é um grupo de matrizes. $\square$

Capítulo 2

Superfícies Mínimas em $\mathbb{H}_3$

Neste capítulo apresentaremos um método para descrever uma representação de Weierstrass para superficies mínimas simplesmente conexas imersas no grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3$ de dimensão 3. Para conseguir este objetivo usaremos a equação de Euler-Lagrange, conhecida também como equação harmonica estandar e daremos uma representação de weierstrass para superficies mínimas simplesmente conexas imersas numa variedade Riemanniana e em particular num grupo de Lie dotado com uma métrica invariante à esquerda. Finalmente discutiremos alguns exemplos de superfícies mínimas em $\mathbb{H}_3$.

2.1 Representação de Weierstrass numa Variedade Riemanniana

Sejam (M^n, g) uma n-variedade Riemanniana com métrica Riemanniana g, Σ uma superfície de Riemann e $f : \Sigma \longrightarrow M$ uma imersão.

Denotemos por

$$f^{-1}(TM) := \left\{(p, u) \in \Sigma \otimes TM : p \in \Sigma, \quad u \in T_{f(p)}\Sigma\right\}.$$

o pull-back do fibrado tangente TM de M via f.

Sejam ∇ a conexão Riemanniana em M e $\widetilde{\nabla}$ a conexão do fibrado $f^{-1}(TM)$.

No fibrado $f^{-1}(TM)$, a seção $\tau(f)$, dada por

$$\tau(f) := \sum_{i=1}^{2} \left(\widetilde{\nabla}_{e_i} df(e_i) - df(\nabla_{e_i} e_i) \right),$$

é chamada *campo tensão de* f.

A equação $\tau(f) \equiv 0$ é conhecida como *equação de Euler-Lagrange* para aplicações harmônicas, ou equação harmônica estandar.

Sejam (x_1, x_2) e $(y_1, \ldots, y_n)$ coordenadas locais em torno de $p \in \Sigma$ e $f(p) \in M$, respectivamente. Nestas coordenadas, podemos escrever o campo tensão $\tau(f)$ da seguinte forma:

$$\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} \tau(f)^i \frac{\partial}{\partial y_i}, \tag{2.1}$$

onde,

$$\tau(f)^i = \sum_{s,t=1}^{2} h^{st} \left\{ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_s \partial x_t} - \sum_{l=1}^{2} \Gamma^l_{st}(p) \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \sum_{j,k=1}^{n} {}^M\Gamma^i_{jk}(p) \frac{\partial f_j}{\partial x_s} \frac{\partial f_k}{\partial x_t} \right\}. \tag{2.2}$$

Aqui, Γ^l_{jk} e ${}^M\Gamma^i_{jk}$ são os símbolos de Christoffel em Σ e M, resp.

Seja $\mathbb{E} = f^{-1}(TM) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ a complexificação do fibrado $f^{-1}(TM)$. $\mathbb{E}$ pode ser considerado simplesmente como um conjunto de expressões formais $X + iY$, com $X, Y \in f^{-1}(TM)$, dotado das operações usuais de soma e multiplicação de números complexos. Note que o espaço $f^{-1}(TM)$ está contido em $\mathbb{E}$ como um subespaço real e é chamado uma forma real de $\mathbb{E}$. A métrica g pode ser estendida a $\mathbb{E}$ como

(a) Uma forma bilinear complexa $(\ \ ,\ \ ) : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{C}$;

(b) Uma métrica hermitiana $\ll\ \ ,\ \ \gg : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{C}$.

E estas extensões se relacionam pela equação $\ll V, W \gg = (V, \overline{W})$.

Se (u, v) são coordenadas locais em Σ, e $z = u + iv$ é um parâmetro complexo (local). Definimos, como usualmente, os operadores:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right). \tag{2.3}$$

A conexão $\widetilde{\nabla}$ em $f^{-1}(TM)$ estende-se a uma conexão complexa em $\mathbb{E}$, hermitiana com respeito a $\ll\ ,\ \gg$. Além disso, sabe-se que, (ver [?]) $\mathbb{E}$ tem uma única estrutura holomorfa na qual, uma seção $W : \Sigma \longrightarrow \mathbb{E}$ é holomorfa se, e somente se,

$$\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial z}} W = 0, \tag{2.4}$$

Seja $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{E}$ a seção do fibrado $\mathbb{E}$ dada por: $\phi(p) = \frac{\partial f}{\partial z}(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(p) - i\frac{\partial}{\partial v}(p)\right)$ onde, $\frac{\partial f}{\partial u}(p) = f_{*_p}\left(\frac{\partial}{\partial u}\Big|_p\right)$ e $\frac{\partial f}{\partial v}(p) = f_{*_p}\left(\frac{\partial}{\partial v}\Big|_p\right)$.

A seção ϕ tem as seguintes propriedades.

2.1.1. Proposição *Se $f : \Sigma \to M$ é uma imersão, então $\ll \phi, \phi \gg \neq 0$.*

Demonstração: Se f é uma imersão, então $\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|^2 \neq 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\ll \phi, \phi \gg &= (\phi, \overline{\phi}) \\
&= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - i\frac{\partial f}{\partial v}\right), \overline{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - i\frac{\partial f}{\partial v}\right)}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - i\frac{\partial f}{\partial v}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + i\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) + i\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) - i\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) - i^2\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|^2\right] \neq 0.
\end{aligned}$$

□

2.1.2. Proposição *$f : \Sigma \to M$ é uma aplicação conforme se, e somente se, $(\phi, \phi) = 0$.*

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned}
(\phi, \phi) &= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - i\frac{\partial f}{\partial v}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - i\frac{\partial f}{\partial v}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) - i\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) - i\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|^2 - 2i\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) - \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|^2\right].
\end{aligned}$$

Portanto $(\phi,\phi) = 0$ se, e somente se, $\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|^2 = 2i\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$. Segue-se que, $\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|^2$ e $\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0$, ou seja, $(\phi,\phi) = 0$ se, e somente se, f é conforme. $\square$

Agora, seja $f : \Sigma \longrightarrow M$ uma imersão conforme e $z = u + iv$ um parâmetro complexo local, ou seja, $\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|$ e $\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0$. Então a métrica em Σ, induzida por f, é dada por:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|^2 du^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|^2 dv^2 \\ &= \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \left(du^2 + dv^2\right) \\ &= \lambda^2 |dz|^2, \quad \text{com } \lambda = \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|. \end{aligned}$$

O operador de Laplace-Beltrami em Σ, com respeito à métrica induzida é dado por:

$$\Delta = \lambda^{-2}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\right) = 4\lambda^{-2}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}.$$

De fato, note que as matrizes da primeira forma fundamental e sua inversa são, respectivamente:

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (h^{ij}) = \begin{pmatrix} 1/\lambda^2 & 0 \\ 0 & 1/\lambda^2 \end{pmatrix},$$

logo,

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda^2\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda^2 0\frac{\partial}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\lambda^2 0\frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\lambda^2\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial v}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\right]. \end{aligned}$$

De outro lado, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} + i\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u} - i^2\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\right]. \end{aligned}$$

2.1.3. Proposição *O campo tensão de f é dado por:*

$$\begin{aligned}\tau(f) &= \sum_{i=1}^{n}\left\{\Delta f_i + 4\lambda^{-2}\sum_{j,k=1}^{n} {}^{M}\Gamma^{i}_{jk}(p)\frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f_k}{\partial z}\right\}\frac{\partial}{\partial x_i}\\ &= 4\lambda^{-2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial \phi_i}{\partial \overline{z}} + \sum_{j,k=1}^{n} {}^{M}\Gamma^{i}_{jk}(p)\overline{\phi_j}\phi_k\right\}\frac{\partial}{\partial x_i}\end{aligned}$$

Demonstração: Seja $\{x_1, \ldots, x_n\}$ um sistema de coordenadas locais numa vizinhança U de M tal que $U \cap f(\Sigma) \neq \emptyset$. Denotemos por $z = u+iv = (u_1, u_2)$ as coordenadas em Σ. Então, num conjunto aberto, $\Omega \subset \Sigma$, ϕ pode-se escrever na forma $\phi = \sum_{j}^{n} \phi_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ para algumas funções complexas ϕ_j definidas em Ω. Com respeito a decomposição de ϕ o campo tensão é escrito utilizando as equacões (**??**) e (**??**), na forma

$$\tau(f) = \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{s,t=1}^{2} h^{st}\left\{\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_s \partial u_t} - \sum_{l=1}^{2}\Gamma^{l}_{st}(p)\frac{\partial f_i}{\partial u_l} + \sum_{j.k=1}^{n} {}^{M}\Gamma^{i}_{jk}(p)\frac{\partial f_j}{\partial u_s}\frac{\partial f_k}{\partial u_t}\right\}\right\}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Como, $h^{st} = \delta_{st}\lambda^{-2}$ e $\Gamma^{l}_{st} = 0$ em Σ, então

$$\tau(f) = \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{s=1}^{2}\lambda^{-2}\left\{\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_s^2} + \sum_{j,k=1}^{n} {}^{M}\Gamma^{i}_{jk}(p)\frac{\partial f_j}{\partial u_s}\frac{\partial f_k}{\partial u_s}\right\}\right\}\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2.5}$$

onde ${}^{M}\Gamma^{i}_{jk}$ são os símbolos de Christoeffel de M (veja [**?**]).

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f_k}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_j}{\partial u} + i\frac{\partial f_j}{\partial v}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_k}{\partial u} - i\frac{\partial f_k}{\partial v}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial f_j}{\partial u}\frac{\partial f_k}{\partial u} - i\frac{\partial f_j}{\partial u}\frac{\partial f_k}{\partial v} + i\frac{\partial f_j}{\partial v}\frac{\partial f_k}{\partial u} + \frac{\partial f_j}{\partial v}\frac{\partial f_k}{\partial v}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial f_j}{\partial u}\frac{\partial f_k}{\partial u} + \frac{\partial f_j}{\partial v}\frac{\partial f_k}{\partial v}\right) + i\frac{1}{4}\left(\frac{\partial f_j}{\partial v}\frac{\partial f_k}{\partial u} - \frac{\partial f_j}{\partial u}\frac{\partial f_k}{\partial v}\right).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Observe que, na equação anterior, a soma do termo imaginário é nulo. Assim, somando em (**??**), temos

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n} {}^{M}\Gamma^{i}_{jk}(p)\frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f_k}{\partial z} &= \sum_{j,k=1}^{n} {}^{M}\Gamma^{i}_{jk}(p)\frac{1}{4}\left(\frac{\partial f_j}{\partial u}\frac{\partial f_k}{\partial u}+\frac{\partial f_j}{\partial v}\frac{\partial f_k}{\partial v}\right)\\ &\quad +i\frac{1}{4}\left(\frac{\partial f_j}{\partial v}\frac{\partial f_k}{\partial u}-\frac{\partial f_j}{\partial u}\frac{\partial f_k}{\partial v}\right)\\ &= \sum_{j,k=1}^{n} {}^{M}\Gamma^{i}_{jk}(p)\frac{1}{4}\left(\frac{\partial f_j}{\partial u}\frac{\partial f_k}{\partial u}+\frac{\partial f_j}{\partial v}\frac{\partial f_k}{\partial v}\right)\\ &= \frac{1}{4}\sum_{s=1}^{2}\sum_{j,k=1}^{n} {}^{M}\Gamma^{i}_{jk}(p)\frac{\partial f_j}{\partial u_s}\frac{\partial f_k}{\partial u_s},\end{aligned}$$

e daí:

$$\sum_{s=1}^{2}\sum_{j,k=1}^{n} {}^{M}\Gamma^{i}_{jk}(p)\frac{\partial f_j}{\partial x_s}\frac{\partial f_k}{\partial x_s}=4\sum_{j,k=1}^{n} {}^{M}\Gamma^{i}_{jk}(p)\frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f_k}{\partial z}.$$

Portanto, substituindo em (**??**) resulta

$$\begin{aligned}\tau(f) &= \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{s=1}^{2}\lambda^{-2}\left\{\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_s^2}+\sum_{j,k=1}^{n} {}^{M}\Gamma^{i}_{jk}(p)\frac{\partial f_j}{\partial x_s}\frac{\partial f_k}{\partial x_s}\right\}\right\}\frac{\partial}{\partial x_i}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left\{\Delta f_i+4\lambda^{-2}\sum_{j,k=1}^{n} {}^{M}\Gamma^{i}_{jk}(p)\frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f_k}{\partial z}\right\}\frac{\partial}{\partial x_i}.\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left\{4\lambda^{-2}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f_i}{\partial z}+4\lambda^{-2}\sum_{j,k=1}^{n} {}^{M}\Gamma^{i}_{jk}(p)\overline{\phi_j}\phi_k\right\}\frac{\partial}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\tau(f)=4\lambda^{-2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial \phi_i}{\partial \overline{z}}+\sum_{j,k=1}^{n} {}^{M}\Gamma^{i}_{jk}(p)\overline{\phi_j}\phi_k\right\}\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{2.7}$$

□

2.1.4. Proposição *Uma aplicação $f:\Sigma\longrightarrow M$ é harmônica se, e somente se, $\phi=\frac{\partial f}{\partial z}$ é uma seção holomorfa de E.*

Demonstração: De fato, utilizando (**??**) temos que a seção ϕ é holomorfa se, e somente se, $\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\left(\sum\limits_i^n \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = 0$, mas

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\left(\sum_i^n \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \sum_i \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial \overline{z}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi_i \nabla_{f_*\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \\
&= \sum_i \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial \overline{z}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi_i \nabla_{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right)} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \\
&= \sum_i \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial \overline{z}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi_i \nabla_{\left(\sum\limits_j^n \overline{\phi}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \\
&= \sum_i \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial \overline{z}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi_i \sum_j^n \overline{\phi}_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \\
&= \sum_i \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial \overline{z}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi_i \sum_{jk}^n \overline{\phi}_j \Gamma_{ji} \frac{\partial}{\partial x_k} \right\}
\end{aligned}$$

mudando i por k no segundo termo do lado direito da equação anterior, temos

$$\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\left(\sum_i^n \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_i \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial \overline{z}} + \sum_{jk}^n \Gamma^i_{jk} \overline{\phi}_j \phi_k \right\} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Assim, ϕ é holomorfa se, e somente se,

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \overline{z}} + \sum_{jk}^n \Gamma^i_{jk} \overline{\phi}_j \phi_k = 0 \qquad 1 = 1, \ldots, n. \tag{2.8}$$

Agora, basta substituir a equação anterior na equação do campo tensão (**??**).

□

È conhecido que uma aplicação conforme de uma superfície Σ sobre uma variedade Riemanniana M é harmônica se, e somente se, ela é uma imersão mínima (ver [**?**]). Portanto uma imersão conforme é mínima se, e somente se, ϕ é uma seção holomorfa de $\mathbb{E}$.

Agora vamos enunciar o teorema da representação de Weierstrass numa variedade Riemanniana.

2.1.5. Teorema *[Representação de Weierstrass numa variedade]. Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $\{x_1, \ldots, x_n\}$ coordenadas locais em M. Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$*

um domínio aberto simplesmente conexo e $\phi_j,\ j = 1, \ldots, n$ funções de valor complexo definidas em Ω que são soluções de (??). Então a aplicação $f : \Omega \to M$, dada, em coordenadas, por $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$, onde

$$f_j(u,v) = 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \phi_j dz\right)$$

está bem definida e define uma imersão mínima conforme se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

- $\sum\limits_{jk}^{n} g_{jk}\phi_j\overline{\phi}_k \neq 0.$
- $\sum\limits_{jk}^{n} g_{jk}\phi_j\overline{\phi}_k = \sum\limits_{jk}^{n} \phi_j\phi_k g_{jk} = 0.$

Demonstração: Temos que mostrar que a função f_j é bem definida. Para isso mostraremos que a 1-forma $\phi_j dz$ não tem períodos reais, ou seja, que a integral de ϕ_j sobre qualquer curva fechada é zero. Seja γ uma curva fechada tal que $\gamma = \partial D$, onde $D \subset \Omega$ é um aberto e consideremos $\phi_j = Re(\phi_j) + iIm(\phi_j)$. Então, pelo teorema de Green temos

$$\begin{aligned} Re\left(\int_\gamma \phi_j dz\right) &= Re\left(\int_\gamma [Re(\phi_j) + iIm(\phi_j)](du + idv)\right) \\ &= Re\left(\int_\gamma [Re(\phi_j)du - Im(\phi_j)dv]\right) \\ &= Re\left(\int_D \left[-\frac{\partial Im(\phi_j)}{\partial u} - \frac{\partial Re(\phi_j)}{\partial v}\right]\right) \\ &= -Re\left(\int_D \left[\frac{\partial Re(\phi_j)}{\partial v} + \frac{\partial Im(\phi_j)}{\partial u}\right]\right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Escrevendo $\phi_k = Re(\phi_k) + iIm(\phi_k)$ e $\overline{\phi}_j = Re(\phi_j) - iIm(\phi_j)$ temos

$$\overline{\phi}_j\phi_k = [Re(\phi_j)Re(\phi_k) + Im(\phi_j)Im(\phi_k)] + i[Im(\phi_k)Re(\phi_j) - Im(\phi_j)Re(\phi_k)].$$

Então, a equação (??) pode-se escrever na forma

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \overline{z}} + 2\sum_{j\neq k}^{n} \Gamma_{jk}^{i} Re(\overline{\phi}_j\phi_k) + \sum_{j}^{n} \Gamma_{jj}^{i} \mid \phi \mid^2 = 0 \qquad 1 = 1, \ldots, n,$$

onde os $\Gamma's$ são calculados em $f_j(u,v) = 2Re(\int_{z_0}^{z} \phi_j dz)$.

Logo, $\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} \in \mathbb{R}$. Agora, como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Re(\phi_i)}{\partial u} + i\frac{\partial Im(\phi_i)}{\partial u}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial Re(\phi_i)}{\partial v} + i\frac{\partial Im(\phi_i)}{\partial v}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Re(\phi_i)}{\partial u} - \frac{\partial Im(\phi_i)}{\partial v}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial Re(\phi_i)}{\partial v} + \frac{\partial Im(\phi_i)}{\partial u}\right) \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

concluímos que

$$\frac{\partial Re(\phi_i)}{\partial v} + \frac{\partial Im(\phi_i)}{\partial u} = 0.$$

Daí, $Re\left(\int_\gamma \phi_j dz\right) = 0$ e a 1-forma $\phi_i dz$ não tem períodos reais.

O resto da demonstração segue-se das Proposições (**??**) e (**??**).

□

Se $M = \mathbb{R}^n$ com a métrica flat, então a equação (**??**) é equivalente as equações de Cauchy-Riemann. De fato, em $\mathbb{R}^n$, os $\Gamma_{jk}^i = 0$, logo $\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} = 0,\ i = 1, \ldots, n$. Então da equação (**??**) temos

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}Re(\phi_i) + \frac{\partial}{\partial v}Im(\phi_i)\right) = -\frac{i}{2}\left(\frac{\partial}{\partial v}Re(\phi_i) - \frac{\partial}{\partial u}Im(\phi_i)\right).$$

Portanto

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u}Re(\phi_i) = -\frac{\partial}{\partial v}Im(\phi_i), \\ \frac{\partial}{\partial u}Im(\phi_i) = \frac{\partial}{\partial v}Re(\phi_i). \end{cases}$$

Mas, em geral é extremamente difícil encontrar soluções explícitas da equação (**??**).

È possível encontrar soluções explícitas numa variedade onde (**??**) reduz-se a um sistema de equações diferenciais parciais com coeficientes constantes, este é o caso quando M é um grupo de Lie e será tratado na seção seguinte.

Em qualquer caso a representação de Weierstrass pode ser útil para resultados teóricos. Por exemplo, se a métrica é analítica o problema de Cauchy para (**??**) tem uma solução. Em particular para qualquer ponto $p \in M$ e qualquer 2-plano $\pi \subset T_pM$, existe uma superfície mínima que passa por p com plano tangente π.

2.2 Representação de Weierstrass em um Grupo de Lie

Nesta secção discutiremos o caso de aplicações $f : \Sigma \longrightarrow G$, onde G é um grupo de Lie dotado com uma métrica invariante à esquerda g.

Seja $\{E_i\}, \quad i = 1, \ldots, n$ um referencial de campos vetoriais invariantes à esquerda, e sejam $\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n$, os campos vetoriais coordenados numa carta U de G.

Então, em algum aberto $\Omega \subset \Sigma$ a seção $\phi = \frac{\partial f}{\partial z} \in \Gamma(f^*(TG) \otimes \mathbb{C})$ pode-se expressar com respeito aos campos vetoriais coordenados ou com respeito aos campos invariantes à esquerda,

$$\phi = \sum_i^n \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i^n \psi_i E_i, \qquad \text{para funções complexas } \phi_i, \psi_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

Além disso, existe uma matriz invertível $A = (A_{ij})$, cujas coordenadas são funções, $A_{ij} : f(\Omega) \cap U \to \mathbb{R}, \quad i, j = 1, \ldots, n$ e verifica-se a igualdade

$$\phi_i = \sum_j^n A_{ij} \psi_j. \tag{2.11}$$

Agora, sejam C_{ij}^k as constantes de estrutura da álgebra de Lie $\hat{G}$ de G, ou seja,

$$[E_i, E_j] = \sum_k^n C_{ij}^k E_k. \tag{2.12}$$

A fórmula de Koszul para a conexão de Levi-Civita é

$$2g(\nabla_{E_i} E_j, E_k) = C_{ki}^j - C_{jk}^i + C_{ji}^k := L_{ij}^k. \tag{2.13}$$

De fato, lembre que

$$\begin{aligned} g(\nabla_Y X, Z) &= \frac{1}{2}\{Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad -g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X) - g([X,Y]Z)\} \end{aligned}$$

e como os campos E_i são invariantes à esquerda, $g(E_i, E_j)$ é constante e logo,

$$\begin{aligned}
g(\nabla_{E_i} E_j, E_k) &= \frac{1}{2}\left\{-g\left([E_i, E_k], E_j\right) - g\left([E_j, E_k], E_i\right) - g\left([E_i, E_j], E_k\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-g\left(\sum_p^n C_{ik}^p E_p, E_j\right) - g\left(\sum_p^n C_{jk}^p E_p, E_i\right)\right. \\
&\quad \left. -g\left(\sum_p^n C_{ij}^p E_p, E_k\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\sum_p^n C_{ik}^p g(E_p, E_j) - \sum_p^n C_{jk}^p g(E_p, E_i)\right. \\
&\quad \left. -\sum_p^n C_{ij}^p g(E_p, E_k)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{C_{ki}^j - C_{jk}^i + C_{ji}^k\right\} = \frac{1}{2} L_{ij}^k. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Utilizando a expressão de ϕ com respeito a os campos vetoriais invariantes à esquerda temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\left(\sum_i^n \psi_i E_i\right) &= \sum_i \left\{\frac{\partial \psi_i}{\partial \overline{z}} E_i + \psi_i \nabla_{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right)} E_i\right\} \\
&= \sum_i \left\{\frac{\partial \psi_i}{\partial \overline{z}} E_i + \psi_i \nabla_{\left(\sum_j^n \overline{\psi}_j E_j\right)} E_i\right\} \\
&= \sum_i \left\{\frac{\partial \psi_i}{\partial \overline{z}} E_i + \psi_i \sum_j^n \overline{\psi}_j \nabla_{E_j} E_i\right\} \\
&= \sum_i \left\{\frac{\partial \psi_i}{\partial \overline{z}} + \sum_{jk}^n \overline{\psi}_j \psi_k \Gamma_{jk}^i\right\} E_i.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\left(\sum_i^n \psi_i E_i\right) = \sum_i \left\{\frac{\partial \psi_i}{\partial \overline{z}} + \sum_{jk}^n L_{jk}^i \overline{\psi}_j \psi_k\right\} E_i.$$

Isto significa que a seção ϕ é holomorfa se, e somente se,

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \overline{z}} + \sum_{jk}^n L_{jk}^i \overline{\psi}_j \psi_k = 0, \ i = 1, \ldots, n. \qquad (2.15)$$

Portanto, do teorema (**??**), temos

2.2.1. Teorema *[Representação de Weierstrass num grupo de Lie] Considere n funções ψ_j, $j = 1, \ldots, n$ de valor complexo definidas num aberto simplesmente conexo $\Omega \in \mathbb{C}$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

- $\sum_i \psi_i \overline{\psi}_i \neq 0$,
- $\sum_i \psi_i^2 = 0$,
- *as funções ψ_i são soluções de (**??**).*

Então, a aplicação $f : \Omega \longrightarrow G$ definida por

$$f_i(u, v) = 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \sum_{j}^{n} A_{ij}\psi_j dz\right)$$

é uma imersão mínima conforme.

Se a dimensão de M é 3, como no caso de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$, podemos dar uma descrição geométrica simples de quase todas as soluções da equação $\sum_{j}^{3} \psi_j^2 = 0$.

A idéia é a seguinte: de $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0$ temos

$$(\psi_1 - i\psi_2)(\psi_1 + i\psi_2) = -\psi_3^2.$$

Isto sugere a definição de duas novas funções complexas,

$$G := \sqrt{\frac{1}{2}(\psi_1 - i\psi_2)} \quad \text{e} \quad H := \sqrt{-\frac{1}{2}(\psi_1 + i\psi_2)}. \tag{2.16}$$

Para uma escolha conveniente das raízes quadradas as funções G, H são simples e satisfazem as equações:

$$\begin{cases} \psi_1 = G^2 - H^2; \\ \psi_2 = i(G^2 + H^2); \\ \psi_3 = 2GH. \end{cases}$$

Agora, a métrica induzida é dada por $ds^2 = 2\lambda^2(du^2 + dv^2)$, onde $\lambda^2 = \sum_k |\psi_k|^2$.

Além disso,

$$|\psi_1|^2 = G^2\overline{G}^2 - G^2\overline{H}^2 - H^2\overline{G}^2 + H^2\overline{H}^2, \qquad |\psi_2|^2 = G^2\overline{G}^2 - G^2\overline{H}^2 + H^2\overline{G}^2 + H^2\overline{H}^2$$

e $|\psi_3|^2 = 4|G|^2|H|^2$.

Assim, $\lambda^2 = 2(|G|^2 + |H|^2)^2$ e então, a métrica induzida é dada por:

$$ds^2 = 2\lambda^2(du^2 + dv^2) = 2(|G|^2 + |H|^2)^2(du^2 + dv^2).$$

Determinemos agora a aplicação de Gauss $N := \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|}$.

Temos

$$f_u = -(Re\psi_1, Re\psi_2, Re\psi_3) \quad e \quad f_v = (Im\psi_1, Im\psi_2, Im\psi_3),$$

logo,

$$\begin{aligned} f_u \wedge f_v &= (-Re\psi_2 Im\psi_3 + Re\psi_3 Im\psi_2)E_1 - (-Re\psi_1 Im\psi_3 + Re\psi_3 Im\psi_1)E_2 \\ &\quad +(-Re\psi_1 Im\psi_2 + Re\psi_2 Im\psi_1)E_3 \\ &= Im(\psi_3\overline{\psi}_2)E_1 + Im(\psi_3\overline{\psi}_1)E_2 + Im(\psi_1\overline{\psi}_2)E_3. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{cases} \psi_2\overline{\psi}_3 = 2i(G^2 + H^2)\overline{GH}; \\ \psi_2\overline{\psi}_1 = 2GH(\overline{G}^2 - \overline{H}^2); \\ \psi_1\overline{\psi}_2 = -i(G^2 - H^2)(\overline{G}^2 + \overline{H}^2). \end{cases}$$

Donde obtemos:

$$f_u \wedge f_v = \left(|G|^2 + |H|^2\right)\left[-\left(G\overline{H} + H\overline{G}\right)E_1 + i\left(H\overline{G} - G\overline{H}\right)E_2 + \left(|G|^2 - |H|^2\right)E_3\right].$$

Assim, a aplicação de Gauss é dada por

$$N = \frac{|G|^2}{|G|^2 + |H|^2}\left[2Re\left(\frac{H}{G}\right)E_1 + 2Im\left(\frac{H}{G}\right)E_2 + \frac{|H|^2 - |G|^2}{|G|^2}E_3\right].$$

Se $\pi : S^2(1) \setminus \{(0,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é a projeção estereográfica, então a composta de π com N é dada por: $\pi \circ N = (Re(H/G), Im(H/G))$.

De fato, seja $(x,y,z) \in S^2(1) \setminus \{(0,0,1)\}$, como $\pi(x,y,z) = \frac{1}{1-z}(x,y)$ temos

$$\begin{aligned}
\pi \circ N &= \frac{1}{1 - \frac{|H|^2 - |G|^2}{|G|^2 + |H|^2}} \frac{|G|^2}{|G|^2 + |H|^2} \left(2Re\left(\frac{H}{G}\right), 2Im\left(\frac{H}{G}\right) \right) \\
&= \left(Re\left(\frac{H}{G}\right), Im\left(\frac{H}{G}\right) \right).
\end{aligned}$$

Se identificamos $\mathbb{R}^2$ com o plano complexo $\mathbb{C}$ e estendemos π a uma aplicação $\tilde{\pi} : S^2(1) \longrightarrow \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ com $\tilde{\pi}(0,0,1) = \infty$ então $\pi \circ N = H/G$, isto significa que a aplicação $\tilde{g} = H/G$ pode ser identificada com a aplicação de Gauss de f.

A equação (**??**) tem a vantagem, com respeito a equação (**??**), de ser uma equação diferencial parcial com coeficientes constantes. No entanto isto somente translada as dificuldades, porque depois de encontrar soluções explicitas de (**??**), temos que calcular os ϕ_i, e para isto temos que calcular A_{ij} ao longe de f_i.

Na seguinte seção estudaremos dois casos onde é possível superar estas dificultades.

2.3 Superfícies Mínimas no Grupo de Heisenberg

Consideremos o grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3$ representado, em $GL_3(\mathbb{R})$, por matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{com} \qquad x_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3.$$

e dotado com a métrica invariante à esquerda definida por (**??**) com $\tau = \frac{1}{2}$.

$(\mathbb{H}_3, g)$ tem uma estrutura geométrica rica. De fato, seu grupo de isometrias tem dimensão 4 que é a máxima dimensão possível no caso de uma 3-variedade com métrica de curvatura não constante. Do ponto de vista algébrico, $(\mathbb{H}_3, g)$ é um grupo de Lie nilpotente.

Uma base ortonormal de campos vetoriais invariantes à esquerda é dada, com respeito aos campos vetoriais coordenados, como em (**??**) com $\tau = \frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} E_1 = \partial_{x_1} - \frac{x_2 \partial_{x_3}}{2}; \\ E_2 = \partial_{x_2} + \frac{x_1 \partial_{x_3}}{2}; \\ E_3 = \partial_{x_3}. \end{cases} \tag{2.17}$$

Dado que $[E_1, E_2] = E_3$, e o resto é zero, usando a fórmula de Koszul obtemos os coeficientes L_{ij}^k não nulos em (**??**).

$$L_{12}^3 = 1, \quad L_{21}^3 = -1, \quad L_{13}^2 = -1, \quad L_{31}^2 = -1, \quad L_{23}^1 = 1, \quad L_{32}^1 = 1.$$

Seja $f : \Omega \subset\longrightarrow \mathbb{H}_3$ uma imersão diferenciável e seja

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial z} = \sum_i \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i \psi_i E_i.$$

Da expressão dos campos invariantes à esquerda (**??**), temos

$$\phi = \sum_j A_{ij} \psi_i,$$

onde $A = (A_{ij})$ é a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{x_2}{2} & \frac{x_1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Desenvolvendo a equação (**??**) vemos facilmente que a seção ϕ dada por $\phi = \psi_1 E_1 + \psi_2 E_2 + \psi_3 E_3$ é holomorfa se, e somente se, as seguintes equações se verificam:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} + Re(\psi_2 \overline{\psi}_3) = 0; \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - Re(\psi_1 \overline{\psi}_3) = 0; \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - iIm(\psi_1 \overline{\psi}_2) = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Portanto, neste contexto, o teorema (**??**) tem a seguinte forma:

2.3.1. Teorema *[Representação de Weierstrass no Grupo de Heisenberg] Sejam ψ_j, $j = 1, \ldots, n$ funções complexas definidas num domínio aberto, simplesmente conexo, $\Omega \in \mathbb{C}$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

- $\sum_i \psi_i \overline{\psi}_i \neq 0$;
- $\sum_i \psi_i^2 = 0$;
- *as ψ_i são soluções de (**??**).*

Então, a aplicação $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{H}_3$, definida por

$$f_i(u,v) = 2Re\left(\int_{z_0}^{z} \sum_{j}^{n} A_{ij}\psi_j dz\right),$$

é uma imersão mínima conforme.

Para escrevermos as equações (**??**) em termos das funções G e H definidas em (**??**) observe que, por exemplo, a primeira equação de (**??**), $\frac{\partial \psi_1}{\partial \overline{z}} + Re(\psi_2 \overline{\psi}_3) = 0$ é equivalente à equação $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(G^2 - H^2) = -\frac{1}{2}(\overline{\psi}_3\psi_2 + \overline{\psi}_2\psi_3)$. Além disso,

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(G^2 - H^2) = 2\left(G\frac{\partial G}{\partial \overline{z}} - H\frac{\partial H}{\partial \overline{z}}\right) \qquad \text{e}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(\overline{\psi}_3\psi_2 + \overline{\psi}_2\psi_3) &= -\frac{1}{2}\left(2i(G^2+H^2)\overline{G}\ \overline{H} - 2i(\overline{G}^2 + \overline{H}^2)GH\right)\\
&= -i\left(|G|^2 G\overline{H} + |H|^2 H\overline{G}\right) + i\left(|G|^2 H\overline{G} + |H|^2 G\overline{H}\right)\\
&= i\left((H\overline{G} - G\overline{H})(|G|^2 - |H|^2)\right)\\
&= 2Im(G\overline{H})\left(|G|^2 - |H|^2\right).
\end{aligned}$$

Donde obtemos:

$$G\frac{\partial G}{\partial \overline{z}} - H\frac{\partial H}{\partial \overline{z}} = Im(G\overline{H})\left(|G|^2 - |H|^2\right).$$

Analogamente, podemos escrever:

$$\begin{cases}
G\frac{\partial G}{\partial \overline{z}} - H\frac{\partial H}{\partial \overline{z}} = Im(G\overline{H})\left(|G|^2 - |H|^2\right);\\
i\left(G\frac{\partial G}{\partial \overline{z}} + H\frac{\partial H}{\partial \overline{z}}\right) = Re(G\overline{H})\left(|G|^2 - |H|^2\right);\\
H\frac{\partial G}{\partial \overline{z}} + G\frac{\partial H}{\partial \overline{z}} = \frac{-i}{2}\left(|G|^4 - |H|^4\right).
\end{cases}$$

Note que, a terceira equação é uma combinação das duas primeiras. De fato, multiplicando por i a primeira equação e somando a segunda obtemos

$$2i\frac{\partial G}{\partial \overline{z}} = \left(|G|^2 - |H|^2\right)\overline{H}, \tag{2.19}$$

por outro lado, subtraindo i vezes a primeira da segunda temos

$$2i\frac{\partial H}{\partial \overline{z}} = \left(|G|^2 - |H|^2\right)\overline{G}. \tag{2.20}$$

Agora de um cálculo direito segue-se que a terceira equação é dada por (**??**) vezes H mais (**??**) vezes G.

Portanto o teorema (**??**) pode ser escrito como segue-se:

2.3.2. Teorema *Sejam G e H funções complexas definidas num domínio aberto, simplesmente conexo, $\Omega \in \mathbb{C}$, tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

- *G e H não são identicamente nulas,*
- *G e H são soluções de (**??**) e (**??**).*

Então, a aplicação $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{H}_3$, cujas coordenadas são dadas por:

$$\begin{cases} f_1 = 2Re\left(\int_{z_0}^{z}\left(G^2 - H^2\right)dz\right); \\ f_2 = 2Re\left(i\int_{z_0}^{z}\left(G^2 + H^2\right)dz\right); \\ f_3 = 2Re\left(\int_{z_0}^{z}\left(2GH - \frac{f_2}{2}\left(G^2 - H^2\right) + i\frac{f_1}{2}\left(G^2 + H^2\right)\right)dz\right), \end{cases} \tag{2.21}$$

é uma imersão mínima conforme.

Note que, neste caso, não temos o problema antes mencionado sobre as soluções da equação (**??**). Obtivemos as duas primeiras funções por integração direita e substituindo na terceira equação obtemos a terceira função novamente por integração direita.

Agora discutiremos alguns exemplos.

2.3.3. Exemplo *(Planos Verticais) Sejam G e H duas soluciones holomorfas, não nulas, de (**??**) e (**??**), ou seja, $\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = 0$.*

*Das equações (**??**) e (**??**), temos $(|G|^2 - |H|^2)\overline{H} = 0$ e $(|G|^2 - |H|^2)\overline{G} = 0$. Como H e G são não nulas, obtemos $|G|^2 = |H|^2$, donde $|G| = |H|$.*

Assim, por um argumento padrão de análise complexo, G e H diferem por um número complexo unitário, ou seja, $H = e^{i\theta}G, \ \theta \in \mathbb{R}$.

Substituindo nas equações (**??**) encontramos a correspondente imersão mínima $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{H}_3$ dada por

$$\begin{cases} f_1 = 2Re\left(\left(1 - e^{2i\theta}\right)\widetilde{G}\right); \\ f_2 = 2Re\left(i\left(1 + e^{2i\theta}\right)\widetilde{G}\right); \\ f_3 = 2Re\left(\int_{z_o}^{z}\left[2e^{i\theta}G^2 - \frac{f_2}{2}\left(1 - e^{2i\theta}\right)G^2 + i\frac{f_1}{2}\left(1 + e^{2i\theta}\right)G^2\right]dz\right). \end{cases}$$

onde $\widetilde{G} = \int_{z_o}^{z} G^2 dz$.

Nas condições anteriores, é fácil ver que: $f_1 \cos\theta + f_2 \operatorname{sen}\theta = 0$.

De fato,

$$\begin{aligned}
f_1 \cos\theta + f_2 \operatorname{sen}\theta &= 2Re\left(\left(1 - e^{2i\theta}\right)\widetilde{G}\right)\cos\theta + 2Re\left(i\left(1 + e^{2i\theta}\right)\widetilde{G}\right) \operatorname{sen}\theta \\
&= 2\left(Re(\widetilde{G}) - Re\left(e^{2i\theta}\widetilde{G}\right)\right)\cos\theta + 2\left(Re\left(i\widetilde{G}\right) + \right. \\
&\quad \left. Re\left(ie^{2i\theta}\widetilde{G}\right)\right) \operatorname{sen}\theta \\
&= 2Re(\widetilde{G})\cos\theta - 2\left[Re(e^{2i\theta})Re(\widetilde{G}) - Im(e^{2i\theta})Im(\widetilde{G})\right]\cos\theta \\
&\quad +2\left[-Im(\widetilde{G}) - Im(e^{2i\theta}\widetilde{G})\right] \operatorname{sen}\theta \\
&= 2Re(\widetilde{G})\cos\theta - 2\left[Re(\widetilde{G})\cos 2\theta - Im(\widetilde{G}) \operatorname{sen}2\theta\right]\cos\theta \\
&\quad -2Im(\widetilde{G}) \operatorname{sen}\theta - 2\left[Re(e^{2i\theta})Im(\widetilde{G}) + Re(\widetilde{G})Im(e^{2i\theta})\right] \operatorname{sen}\theta \\
&= 2Re(\widetilde{G})\cos\theta - 2Re(\widetilde{G})\cos\theta\cos 2\theta + 2Im(\widetilde{G})\cos\theta \operatorname{sen}2\theta \\
&\quad -2Im(\widetilde{G}) \operatorname{sen}\theta - 2Im(\widetilde{G}) \operatorname{sen}\theta\cos 2\theta - 2Re(\widetilde{G}) \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}2\theta \\
&= Re(\widetilde{G})\left[2\cos\theta - 2\cos\theta\cos 2\theta - 2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}2\theta\right] \\
&\quad +Im(\widetilde{G})\left[2\cos\theta \operatorname{sen}2\theta - 2 \operatorname{sen}\theta - 2 \operatorname{sen}\theta\cos 2\theta\right].
\end{aligned}$$

Agora utilizando as identidades trigonométricas[1] obtemos: $f_1 \cos\theta + f_2 \operatorname{sen}\theta = 0$.

Esta identidade diz que a imagem da imersão está num plano paralelo ao eixo x_3 e forma um ângulo θ com o plano $x_1 = 0$.

Neste exemplo a aplicação de Gauss $\widetilde{g} = \frac{H}{G} = e^{i\theta}$ tem posto zero. Pode-se provar que estas são as únicas superfícies mínimas de $\mathbb{H}_3$ com aplicação de Gauss de posto zero.

No exemplo seguinte discutimos o caso em que as funções G e H são imaginarias puras e dependem só de uma variável.

2.3.4. Exemplo *(Superfície tipo sela) Sejam $G(u,v) = il(v)$ e $H(u,v) = ih(v)$, onde l e h são duas funções diferenciáveis de valor real definidas num intervalo aberto de $\mathbb{R}$.*

Podemos supor $|H| \neq |G|$, do contrário estariamos no exemplo anterior.

Multiplicando a equação (**??**) por $i\overline{G}$, a equação (**??**) por $i\overline{HG}$ e comparando os resultados obtemos:

$$\frac{\partial G}{\partial \overline{z}}\overline{G} = \frac{\partial H}{\partial \overline{z}}\overline{H}. \tag{2.22}$$

Substituindo $G = il(v)$ e $H = ih(v)$ na equação anterior temos

$$\begin{aligned}
\overline{il(v)}\ \frac{\partial il(v)}{\partial \overline{z}} &= \overline{ih(v)}\ \frac{\partial ih(v)}{\partial \overline{z}} \\
l(v)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial l(v)}{\partial u} + i\frac{\partial l(v)}{\partial v}\right) &= h(v)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial h(v)}{\partial u} + i\frac{\partial h(v)}{\partial v}\right) \\
\frac{i}{2}l(v)l'(v) &= \frac{i}{2}h(v)h'(v) \\
ll' &= hh', \qquad (\text{ onde } {}' = \frac{d}{dv}).
\end{aligned}$$

Daí, $(l^2 - h^2)' = 0$ e logo existe uma constante $a \in \mathbb{R}$ tal que $l^2 - h^2 = 2a$. Agora seja $q = q(v)$ a função dada por $q = l^2 - a = h^2 + a$.

Temos, $q' = 2ll'$ e como as funções G e H satisfazem (**??**) e (**??**), obtemos $l' = h(l^2 - h^2)$ e daí,

$$q' = 4a\sqrt{q^2 - a^2}. \tag{2.23}$$

[1] $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \quad$ e $\quad \operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

Então, as funções ϕ_1 e ϕ_2 são dadas por:

$$\phi_1 = G^2 - H^2 = (il)^2 - (ih)^2 = -l^2 + h^2 = -2a;$$

$$\phi_2 = i(G^2 + H^2) = i((il)^2 - (ih)^2) = -il^2 + ih^2 = -2iq,$$

integrando obtemos:

$$f_1 = 2Re\left(\int_{z_0}^{z} -2a(du + idv)\right) = -4au;$$

$$f_2 = 2Re\left(\int_{z_0}^{z} -2iq(du + idv)\right) = 4Q(v),$$

onde $Q(v)$ é uma primitiva de $q(v)$.

Para calcular f_3, primeiro notemos que:

$$\begin{aligned}\phi_3 &= 2GH - \frac{f_2}{2}(G^2 - H^2) - i\frac{f_1}{2}(G^2 + H^2)\\ &= 2ilih - \frac{4Q(v)}{2}(-l^2 + h^2) - i\frac{-4au}{2}(-l^2 - h^2)\\ &= -2\sqrt{q^2 - a^2} - 2Q(v)(-2a) - i2au(2q)\\ &= -2\sqrt{q^2 - a^2} + 4aQ(v) + 4iauq.\end{aligned} \qquad (2.24)$$

Por outro lado, de (**??**) temos $\frac{q'}{\sqrt{q^2-a^2}} = 4a$, donde obtemos:

$$4aQ' = 4aq = \frac{qq'}{\sqrt{q^2 - a^2}} = \left(\sqrt{q^2 - a^2}\right)', \quad \text{logo} \;\; 4aQ = \sqrt{q^2 - a^2}.$$

Assim, substituindo em (**??**), temos

$$\phi_3 = -4aQ(v) + 4iaqu.$$

Segue-se que:

$$\begin{aligned}f_3 &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} (-4aQ(v) + 4iaqu)(du + idv)\right)\\ &= 2Re\left(\int_{z_0}^{z} -4aQ(v)du + 4iaqudu - i4aQ(v)dv - 4aqudv\right)\\ &= -8auQ(v) - 8auQ(v)\\ &= -16auQ(v).\end{aligned}$$

Note que $f_3 = f_1 f_2$, logo a imagem da imersão está contida no gráfico da função $x_3 = x_1 x_2$, ou seja, é uma superfície regrada do tipo sela. Além disso, o posto da sua aplicação de Gauss é 1. De fato, $\widetilde{g} = \frac{H}{G} = \frac{h(v)}{l(v)}$ depende somente de um parâmetro.

È interessante notar que as únicas superfícies com aplicação de Gauss de posto 1 no grupo de Heisenberg são as superfícies mínimas regradas e elas podem ser explicitamente descritas (veja [?]).

No exemplo que segue-se descrevemos uma superfície cuja aplicação de Gauss tem posto 2.

Como a aplicação de Gauss é $\widetilde{g} = \frac{H}{G}$, podemos escolher para G e H duas funções que sejam produto de uma função que depende de uma variável vezes uma função complexa unitária que depende da outra variável.

2.3.5. Exemplo *(Helicóides) Considere as funções G e H definidas por*

$$G(u,v) = l(u)e^{-i\frac{v}{2}} \quad e \quad H(u,v) = ih(u)e^{i\frac{v}{2}},$$

onde l e h são funções diferenciáveis, definidas num conjunto aberto de $\mathbb{R}$.

Observe que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \overline{z}}\overline{G} &= \overline{le^{-i\frac{v}{2}}}\ \frac{\partial le^{-i\frac{v}{2}}}{\partial \overline{z}} \\ &= le^{i\frac{v}{2}}\frac{1}{2}\left(l'e^{-i\frac{v}{2}} + il\left(\frac{-i}{2}e^{-i\frac{v}{2}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}ll' + \frac{1}{4}l^2. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \overline{z}}\overline{H} &= \overline{ihe^{i\frac{v}{2}}}\ \frac{\partial ihe^{i\frac{v}{2}}}{\partial \overline{z}} \\ &= -ihe^{-i\frac{v}{2}}\frac{1}{2}\left(ih'e^{i\frac{v}{2}} + i(ih)\left(\frac{i}{2}e^{i\frac{v}{2}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}hh' - \frac{1}{4}h^2. \end{aligned}$$

Assim, a equação (**??**) se escreve na forma $\frac{1}{2}ll' + \frac{1}{4}l^2 = \frac{1}{2}hh' - \frac{1}{4}h^2$, ou seja temos:

$$l^2 + (l^2)' = -h^2 + (h^2)' \tag{2.25}$$

Então existe uma função $\rho(u)$ tal que $l = \frac{\sqrt{\rho'-\rho}}{2}$ e $h = \frac{\sqrt{\rho'+\rho}}{2}$, são soluções de (**??**). Usando (**??**) ou (**??**) obtemos que ρ é solução da equação

$$\rho'' - \rho = \rho\sqrt{(\rho')^2 - \rho^2}.$$

Com efeito, de (**??**) temos

$$\begin{aligned}
2i\frac{\partial G}{\partial \overline{z}} &= \left(|G|^2 - |H|^2\right)\overline{H} \\
2i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial l e^{-i\frac{v}{2}}}{\partial u} + i\frac{\partial l e^{-i\frac{v}{2}}}{\partial v}\right) &= \left(|le^{-i\frac{v}{2}}|^2 - |ihe^{i\frac{v}{2}}|^2\right)\overline{ihe^{i\frac{v}{2}}} \\
i\left(l'e^{-i\frac{v}{2}} + il\left(\frac{-i}{2}e^{-i\frac{v}{2}}\right)\right) &= \left(l^2 - h^2\right)\left(-ihe^{-i\frac{v}{2}}\right) \\
\left(-l' - \frac{l}{2}\right) &= \left(l^2 - h^2\right)h \\
\left(l' + \frac{l}{2}\right) &= \left(h^2 - l^2\right)h = h\rho
\end{aligned}$$

(analogamente ten-se para (**??**)) Da equação (**??**) temos que $h^2 - l^2 = \rho$, então derivando e usando (**??**), $\rho' = (h^2)' - (l^2)' = h^2 + l^2$. Logo fazendo a diferença entre as duas equações anteriores temos $\rho' - \rho = 2l^2$.

Derivando a equação anterior, substituindo em (**??**) e substituindo ρ obtemos

$$\begin{aligned}
\rho'' - \rho' &= 4ll' \\
\rho'' - \left(h^2 + l^2\right) + 2l^2 &= 4ll' + 2l^2 \\
\rho'' - \left(h^2 - l^2\right) &= 4l\left(l' + \frac{l}{2}\right) \\
\rho'' - \rho &= 4l\left(l' + \frac{l}{2}\right)
\end{aligned}$$

Finalmente substituindo $l' + \frac{l}{2} = h\rho$ obtém se

$$\begin{aligned}
\rho'' - \rho &= 4\rho l h \\
\rho'' - \rho &= 4\rho\frac{\sqrt{\rho'-\rho}}{2}\frac{\sqrt{\rho'+\rho}}{2} \\
\rho'' - \rho &= \rho\sqrt{\left(\rho'\right)^2 - \rho^2}.
\end{aligned}$$

A qual é equivalente a $\sqrt{(\rho')^2 - \rho^2} = \frac{1}{2}\rho^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$, com efeito, derivando

$$\sqrt{(\rho')^2 - \rho^2} = \frac{1}{2}\rho^2 + c$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{2\rho'\rho'' - \rho\rho'}{\sqrt{(\rho')^2 - \rho^2}} &= \frac{1}{2}2\rho\rho' \\
\rho'(\rho'' - \rho) &= \rho\rho'\sqrt{(\rho')^2 - \rho^2}
\end{aligned}$$

se $\rho' \neq o$ então $(\rho'' - \rho) = \rho\sqrt{(\rho')^2 - \rho^2}$

A correspondente imersão mínima $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{H}_3$ é dada por

$$\begin{cases} f_1(u,v) = \rho(u)\cos(v), \\ f_2(u,v) = \rho(u)\,sen\,(v). \\ f_3(u,v) = cv + v, \quad b \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.26}$$

Com efeito, calculemos ϕ_1 e f_1.

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= G^2 - H^2 = l^2 e^{-iv} + h^2 e^{iv} \\
&= \frac{\rho' - \rho}{4}(\cos v - isenv) + \frac{(\rho' + \rho)}{4}(\cos v + isenv) \\
&= \frac{\rho'}{4}\cos v - \frac{\rho}{4}\cos v - \frac{\rho'}{4}isenv + \frac{\rho}{4}isenv + \frac{\rho'}{4}\cos v \\
&\quad + \frac{\rho}{4}\cos v + \frac{\rho'}{4}isenv + \frac{\rho}{4}isenv \\
&= \frac{\rho'}{4}\cos v + \frac{\rho}{4}isenv + \frac{\rho'}{4}\cos v + \frac{\rho}{4}isenv \\
&= \frac{\rho'}{2}\cos v + \frac{\rho}{2}isenv.
\end{aligned}$$

Integrando sobre uma curva que ligue z_0 a z resulta

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma}\left(\frac{\rho'}{2}\cos v+\frac{\rho}{2}isenv\right)(du+idv) &= \int\limits_{\gamma}\left(\frac{\rho'}{2}\cos vdu+\frac{\rho}{2}isenvdu\right.\\
&\left.+\frac{\rho'}{2}\cos vidv+\frac{\rho}{2}isenvidv\right)\\
&= \frac{\rho}{2}\cos v+\frac{i}{2}senv\int\limits_{\gamma}\rho du\\
&+i\frac{\rho'}{2}senv+\frac{\rho}{2}\cos v\\
&= \rho\cos v+\frac{i}{2}senv\int\limits_{\gamma}\rho du+i\frac{\rho'}{2}senv.
\end{aligned}$$

Logo, tomando duas vezes a parte real da integral anterior segue-se que

$$f_1 = 2\rho\cos v.$$

Agora, calculemos ϕ_2 e f_2,

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= i\left(G^2+H^2\right)=i\left(l^2e^{-iv}-h^2e^{iv}\right)\\
&= i\left(\frac{\rho'-\rho}{4}(\cos v-isenv)-\frac{\rho'+\rho}{4}(\cos v+isenv)\right)\\
&= i\frac{\rho'}{4}\cos v-i\frac{\rho}{4}\cos v+\frac{\rho'}{4}senv-\frac{\rho}{4}senv\\
&\quad -i\frac{\rho'}{4}\cos v-i\frac{\rho}{4}\cos v+\frac{\rho'}{4}senv+\frac{\rho}{4}senv\\
&= -i\frac{\rho}{2}\cos v+\frac{\rho'}{2}senv.
\end{aligned}$$

Integrando sobre uma curva que ligue z_0 a z resulta

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma}\left(-i\frac{\rho}{2}\cos v+\frac{\rho'}{2}senv\right)(du+idv) &= \int\limits_{\gamma}\left(-i\frac{\rho}{2}\cos vdu+\frac{\rho'}{2}senvdu\right.\\
&\left.+\frac{\rho}{2}\cos vdv+i\frac{\rho'}{2}senvdv\right)\\
&= \frac{-i}{2}\cos v\int\limits_{\gamma}\rho du+\frac{\rho}{2}senv+\frac{\rho}{2}senv-i\frac{\rho'}{2}\cos v\\
&= \rho senv+\frac{-i}{2}\cos v\int\limits_{\gamma}\rho du-i\frac{\rho'}{2}\cos v.
\end{aligned}$$

Logo, tomando duas vezes a parte real da integral anterior obtemos

$$f_2 = 2\rho senv.$$

Finalmente, calculemos ϕ_3 e f_3,

$$\begin{aligned}
\phi_3 &= 2GH - \frac{f_2}{2}\phi_1 + \frac{f_1}{2}\phi_2 \\
&= 2le^{-i\frac{v}{2}}ihe^{i\frac{v}{2}} - \frac{2\rho senv}{2}\left(\frac{\rho'}{2}\cos v + \frac{\rho}{2}isenv\right) \\
&\quad + \frac{2\rho\cos v}{2}\left(-i\frac{\rho}{2}\cos v + \frac{\rho'}{2}senv\right) \\
&= 2i\frac{\sqrt{\rho'-\rho}}{2}\frac{\sqrt{\rho'+\rho}}{2} - \frac{\rho'\rho}{2}\cos v senv \\
&\quad - i\frac{\rho^2}{2}sen^2 v - i\frac{\rho^2}{2}\cos^2 v + \frac{\rho'\rho}{2}\cos v senv \\
&= i\frac{\sqrt{(\rho')^2 - \rho^2}}{2} - i\frac{\rho^2}{2} \\
&= i\frac{\frac{1}{2}\rho^2 + c}{2} - i\frac{\rho^2}{2} \\
&= -i\frac{\rho^2}{4} + i\frac{c}{2}.
\end{aligned}$$

Integrando sobre uma curva que ligue z_0 a z segue-se

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \left(-i\frac{\rho^2}{4} + i\frac{c}{2}\right)(du + idv) &= \int_\gamma -i\frac{\rho^2}{4}du + i\frac{c}{2}du + \frac{\rho^2}{4}dv - \frac{c}{2}dv \\
&= \frac{-i}{4}\int_\gamma \rho^2 du + i\frac{c}{2}u + \frac{\rho^2}{4}v - \frac{c}{2}v
\end{aligned}$$

Logo, tomando duas vezes a parte real da integral anterior obtemos

$$f_3 = 2\left(\frac{\rho^2}{4}v - \frac{c}{2}v\right) = -cv + \frac{\rho^2}{2}v.$$

Se $c \neq 0$, a equação (**??**) da uma parametrização mínima de um Helicóide, além disso, se $c = 0$, (**??**) da uma parametrização mínima do plano horizontal $x_3 = b$.

2.3.6. Exemplo[*Superfície tipo Catenóide*] *Neste exemplo daremos as funções de Weierstrass G e H para a superfície tipo catenóide descrita em [ver [**?**]]. Seja*

$$h = \sqrt{\frac{g^2+4}{g^2-4}}, \ g^2 > 4,$$

onde $g = g(u)$ é uma função de valor real a qual é uma solução da equação diferencial ordinária

$$g'^2 = \frac{g^2\left(g^4-16\right)-4}{g^2-4}.$$

Então as funções

$$H = \tfrac{i}{2}e^{i\left(v+\frac{l}{2}\right)}\sqrt{g'+2g\left(1+\tfrac{il'}{2}\right)}, \quad G = \tfrac{1}{2}e^{-i\left(v+\frac{l}{2}\right)}\sqrt{g'-2g\left(1+\tfrac{il'}{2}\right)},$$

*com $l = l(u)$ uma função de valor real, são soluções das equações (**??**) e (**??**) se $l' = \frac{h}{g^2+4}$.*

Assim os correspondentes $\phi's$ são

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= G^2 - H^2 = \left(\frac{1}{2}e^{-i\left(v+\frac{l}{2}\right)}\sqrt{g'-2g\left(1+\frac{il'}{2}\right)}\right)^2 \\
&\quad - \left(\frac{i}{2}e^{i\left(v+\frac{l}{2}\right)}\sqrt{g'+2g\left(1+\frac{il'}{2}\right)}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}e^{-i(2v+l)}\left(g'-2g\left(1+\frac{il'}{2}\right)\right) + \frac{1}{4}e^{i(2v+l)}\left(g'+2g\left(1+\frac{il'}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\cos\alpha - isen\alpha\right)\left(g'-2g-igl'\right) + \frac{1}{4}\left(\cos\alpha + isen\alpha\right)\left(g'+2g+igl'\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[g'\cos\alpha - ig'sen\alpha - 2g\cos\alpha + 2igsen\alpha - igl'\cos\alpha - gl'sen\alpha\right. \\
&\quad \left.+g'\cos\alpha + ig'sen\alpha + 2g\cos\alpha + 2igsen\alpha + igl'\cos\alpha - gl'sen\alpha\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[2g'\cos\alpha + 4igsen\alpha - 2gl'sen\alpha\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(g'\cos\alpha + 2igsen\alpha - gl'sen\alpha\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left(g\cos\left(2v+l\right)\right) \quad onde \quad 2v+l=\alpha.
\end{aligned}$$

Integrando sobre uma curva que ligue z_0 a z segue-se

$$\begin{aligned}
\int_{z_0}^{z} \frac{1}{2}\left[g' \cos\alpha + 2igsen\alpha - gl'sen\alpha\right] dz &= \int_{z_0}^{z} \frac{\partial}{\partial z}\left(g\cos(2v+l)\right) dz \\
&= g\cos(2v+l)
\end{aligned}$$

Logo tomando duas vezes a parte real da integral anterior temos

$$f_1 = 2g\cos(2v+l).$$

Agora calculemos ϕ_2 e $f_{2,}$

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= i\left(G^2+H^2\right) = i\left(\left(\frac{1}{2}e^{-i\left(v+\frac{l}{2}\right)}\sqrt{g' - 2g\left(1+\frac{il'}{2}\right)}\right)^2\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{i}{2}e^{i\left(v+\frac{l}{2}\right)}\sqrt{g' + 2g\left(1+\frac{il'}{2}\right)}\right)^2\right) \\
&= i\left(\frac{1}{4}e^{-i(2v+l)}\left(g' - 2g - igl'\right) - \frac{1}{4}e^{i(2v+l)}\left(g' + 2g + igl'\right)\right) \\
&= \frac{i}{4}\left[(\cos\alpha - i\ \text{sen}\alpha)\left(g' - 2g - igl'\right) - (\cos\alpha + isen\alpha)\left(g' + 2g + igl'\right)\right] \\
&= \frac{i}{4}\left[g'\cos\alpha - ig'\ \text{sen}\alpha - 2g\cos\alpha + 2ig\ \text{sen}\alpha - igl'\cos\alpha - gl'sen\alpha\right. \\
&\quad \left. - g'\cos\alpha - ig'\ \text{sen}\alpha - 2g\cos\alpha - 2ig\ \text{sen}\alpha - igl'\cos\alpha + gl'\ \text{sen}\alpha\right] \\
&= \frac{i}{2}\left[-2ig'\ \text{sen}\alpha - 4g\cos\alpha - 2igl'\cos\alpha\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[g'\ \text{sen}\alpha - 2ig\cos\alpha + gl'\cos\alpha\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left(g\ \text{sen}\left(2v+l\right)\right) \quad onde \quad 2v+l=\alpha.
\end{aligned}$$

Integrando sobre uma curva que ligue z_0 a z resulta

$$\begin{aligned}
\int_{z_0}^{z} \frac{1}{2}\left[(ig'\cos v - 2g\ \text{sen}v - igl'\ \text{sen}v)\right] dz &= \int_{z_0}^{z} \frac{\partial}{\partial z}\left(g\ \text{sen}(2v+l)\right) dz \\
&= g\ \text{sen}(2v+l)
\end{aligned}$$

Logo tomando duas vezes a parte real da integral anterior temos

$$f_2 = 2g\,\mathrm{sen}(2v + l).$$

finalmente obtemos:

$$\phi_3 = 2GH - \frac{f_2}{2}\phi_1 + \frac{f_1}{2}\phi_2 = h = \sqrt{\frac{g^2+4}{g^2-4}}.$$

e $f_3 = 2\widetilde{h}$, onde $\widetilde{h}$ é uma primitiva de h.

Assim temos,

$$\begin{cases} f_1(u,v) = 2g\cos(l+2v); \\ f_2(u,v) = 2g\ \mathrm{sen}(l+2v); \\ f_3(u,v) = 2\widetilde{h}. \end{cases}$$

Modulo mudança de coordenadas, isto parametriza um catenóide de revolução (veja [?]).

Capítulo 3

Superfícies Mínimas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Neste capítulo apresentaremos uma representação de Weierstrass no espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, do plano Hiperbólico $\mathbb{H}^2$ com a reta real $\mathbb{R}$.

Consideramos o plano hiperbólico no modelo do semi-espaço

$$\mathbb{H}^2 := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\right\}$$

dotado da métrica, de curvatura Gaussiana constante -1, dada por

$$g_{\mathbb{H}^2} = \frac{1}{x_2^2}\left(dx_1^2 + dx_2^2\right).$$

Um elemento $(x_1, x_2) \in \mathbb{H}^2$ pode ser considerado como uma função afim própria, $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(t) = x_2 t + x_1$. O conjunto de tais funções, com a composição usual de funções, forma um grupo. Esta é a estrutura de grupo de $\mathbb{H}^2$. A variedade diferenciável $\mathbb{H}^2$ é simplesmente o semi-plano superior $\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\right\}$ com a estrutura diferencial induzida de $\mathbb{R}^2$. Com esta estrutura $\mathbb{H}^2$ torna-se um grupo de Lie e a métrica $g_{\mathbb{H}^2}$, acima definida, é invariante à esquerda.

Consideramos agora $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ como um grupo de Lie com a estrutura de grupo produto e a métrica, invariante à esquerda,

$$g := \frac{1}{x_2^2}\left(dx_1^2 + dx_2^2\right) + dx_3^2.$$

Escrevendo, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, a operação do grupo é dada por: $x \circ y = (x_2 y_1 + x_1, x_2 y_2, x_3 + y_3)$.

Seja $L_x : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R},\ y \longmapsto L_x(y) = x \circ y,$ a translação à esquerda,por x, no grupo $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Então, a diferencial de L_x, na identidade $e = (0, 1, 0) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, é dada por:

$$dL_x(e) = \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, os campos invariantes à esquerda gerados, respectivamente, pelos vetores $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial}{\partial x_3}$ são dados por:

$$E_1 := x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad E_2 := x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \qquad \text{e} \qquad E_3 := \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Além disso, $[E_1, E_2] = -E_1$ e todos os outros colchetes são nulos, de modo que, as constantes de estrutura da álgebra de Lie, C_{ij}^k, são dadas por:

$$C_{12}^1 = -1, \quad C_{12}^2 = C_{12}^3 = 0, \quad C_{22}^k = C_{33}^k = 0,$$

$$C_{21}^1 = C_{21}^2 = C_{21}^3 = 1, \quad C_{12}^1 = C_{12}^2 = C_{12}^3 = -1.$$

Agora, da equação $L_{ij}^k = C_{ki}^j - C_{jk}^i + C_{ji}^k$, obtemos $L_{11}^2 = 2,\ L_{12}^1 = -2$ e os outros L_{ij}^k são todos nulos. Assim temos o seguinte.

3.0.7. ***Teorema*** *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo e $\psi_j : \Omega \to \mathbb{C}$, $j = 1, 2, 3$, funções que verificam as seguintes condições:*

- $\sum\limits_{i=1} \psi_i \overline{\psi}_i \neq 0;$
- $\sum\limits_{i=1} \psi_i^2 = 0;$
- *ψ_3 é holomorfa e ψ_1, ψ_2 são soluções do sistema* $\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \overline{\psi}_1 \psi_2 = 0; \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - \|\psi_1\|^2 = 0. \end{cases}$

Então a aplicação $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ dada por

$$f_i(u, v) = 2Re \left(\int_{z_0}^{z} \sum_j A_{ij} \psi_j dz \right)$$

define uma imersão mínima conforme.

Demonstração De acordo com (**??**) a seção $\phi = \psi_1 E_1 + \psi_2 E_2 + \psi_3 E_3$ é holomorfa se, e sómente se,

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \overline{\psi}_1 \psi_2 = 0; \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - \|\psi_1\|^2 = 0; \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Então o resultado segue-se do teorema (**??**). □

Fazendo $\tilde{f}_2 := 2Re \int\limits_{z_0}^{z} \psi_2 dz$, a imersão mínima pode-se escrever na forma:

$$f(u,v) = \left(2Re \int\limits_{z_0}^{z} e^{\tilde{f}_2} \psi_1 dz,\ e^{\tilde{f}_2},\ 2Re \int\limits_{z_0}^{z} \psi_3 dz \right).$$

3.0.8. ***Exemplo*** *Se ψ_2 é uma função holomorfa, então de (**??**) temos que ψ_1 é identicamente zero e a correspondente imersão é a parametrização mínima do plano vertical $\{x_1 = const.\}$*

Se ψ_1 e ψ_2 não são holomorfas, então de (**??**) temos que $\psi_1^2 + \psi_2^2$ é holomorfa.

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\psi_1^2 + \psi_2^2 \right) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi_1^2 + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi_2^2 \\ &= 2\psi_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi_1 + 2\psi_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi_2 \\ &= 2\psi_1 \overline{\psi_1} \psi_2 + 2\psi_2 \left(- \|\psi_1\|^2 \right) \\ &= 2 \|\psi_1\|^2 \psi_2 - 2\psi_2 \|\psi_1\|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

A ultima condição é certamente satisfeita se $\psi_1^2 + \psi_2^2 = a$ para alguma constante $a \in \mathbb{R}$.

Examinaremos os casos $a = 0$ e $a = 1$.

Caso $a = 0$.

De $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0$, temos que $\psi_3^2 = 0$ e a correspondente imersão

$$f(u,v) = \left(2Re \int\limits_{z_0}^{z} e^{\tilde{f}_2} \psi_1 dz,\ e^{\tilde{f}_2},\ 0 \right)$$

é a parametrização mínima do plano horizontal $\{x_3 = const.\}$. De fato, uma superfície totalmente geodésica.

caso $a = 1$.

Neste caso, decompondo

$$\psi_1(u,v) = a_1(u,v) + ia_2(u,v) \quad \text{e} \quad \psi_2(u,v) = a_3(u,v) + ia_4(u,v)$$

nas suas partes real e imaginaria, a condição $\psi_1^2 + \psi_2^2 = -1$ equivale a

$$a_1^2 - a_2^2 + i(a_1a_2 + a_2a_1) + a_3^2 - a_4^2 + i(a_3a_4 + a_4a_3) = -1,$$

ou seja, ao sistema:

$$\begin{cases} a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 = -1; \\ a_1a_2 + a_3a_4 = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Escolhendo a solução

$$\begin{cases} a_1(u,v) = sen(2v)a_4(u,v); \\ a_3(u,v) = -sen(2v)a_2(u,v), \end{cases}$$

da segunda equação de (**??**), então, usando (**??**), vemos que as funções a_1 e a_2 são soluções de

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial u} - \frac{\partial a_2}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial a_1}{\partial v} - \frac{\partial a_2}{\partial u}\right) = 4a_1a_2.$$

De fato, da primeira equação de (**??**) temos,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \psi_1}{\partial \overline{z}} - \overline{\psi}_1\psi_2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial u} + i\frac{\partial a_2}{\partial u} + i\left(\frac{\partial a_1}{\partial v} + i\frac{\partial a_2}{\partial v}\right)\right) - (a_1 + ia_2)(a_3 + ia_4) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial u} - \frac{\partial a_2}{\partial v} + i\left(\frac{\partial a_2}{\partial u} + \frac{\partial a_1}{\partial v}\right)\right) - (a_1a_3 + a_2a_4 + i(a_1a_4 - a_2a_3)). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial u} - \frac{\partial a_2}{\partial v} = 2(a_1a_3 + a_2a_4); \\ \frac{\partial a_2}{\partial u} + \frac{\partial a_1}{\partial v} = 2(a_1a_4 - a_2a_3). \end{cases} \tag{3.3}$$

Por outro lado, da segunda equação de (**??**) temos,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - \|\psi_1\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_3}{\partial u} + i\frac{\partial a_4}{\partial u} + i\left(\frac{\partial a_3}{\partial v} + i\frac{\partial a_4}{\partial v}\right)\right) + \left(a_1^2 - a_2^2\right) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial a_3}{\partial u} - \frac{\partial a_4}{\partial v}\right) = 2\left(a_2^2 - a_1^2\right); \\ \left(\frac{\partial a_4}{\partial u} + \frac{\partial a_3}{\partial v}\right) = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Agora, multiplicando as duas equaçoes de (**??**) e usando as equações (**??**) temos a equação desejada:

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial u} - \frac{\partial a_2}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial a_2}{\partial u} + \frac{\partial a_1}{\partial v}\right) = 4a_1a_2.$$

Uma solução da equação acima é:

$$a_1 = \frac{2\left(\cos(2u) + sen(2v)\right)\tan(2v)}{2 - sen(2\left(u-v\right)) + sen(2\left(u+v\right))}; \;\; a_2 = \frac{2sen(2u)}{-2 + sen(2\left(u-v\right)) - sen(2\left(u+v\right))}.$$

Finalmente, depois de integrar, a imersão $f(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$ é dada por,

$$\begin{cases} f_1(u,v) = \frac{2sen(2u)\tan(v)}{2sen^2(2u)\tan^2(v) + (1+\cos(2u)\tan v))^2}; \\ f_2(u,v) = \frac{1+\tan^2(v)}{2sen^2(2u)\tan^2(v) + (1+\cos(2u)\tan v))^2}; \\ f_3(u,v) = 2u. \end{cases}$$

Sejam $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ o disco hiperbólico e $\tilde{\alpha} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{H}^2$ a isometria standard entre $\mathbb{D}$ e $\mathbb{H}^2$. Seja $\alpha : \mathbb{D} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, a aplicação dada por, $\alpha(x,y,z) = (\tilde{\alpha}(x,y), z)$. Então a imersão f é a composta entre α e $\tilde{f}$, onde $\tilde{f}\ (u,v) = (\tan(v)\cos(2u),\ \tan(v)sen(2u),\ 2u)$ é a imersão de um helicóide mínimo em $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ descrito em [**?**].

Finalmente, gostaríamos de enfatizar que algumas das questões básicas resolvidas para a representação de Weierstrass de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$, permanecem ainda sem resposta para a representação de Weierstrass em $\mathbb{H}_3$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Entre estas questões temos, por exemplo,

- Uma análise no caso não simplesmente conexo;
- Uma aplicação da fórmula de representação Weierstrass para o problema de Berstein;
- A construção de novos exemplos;
- Aplicação destes métodos a outras variedades de dimensão três.

Referências Bibliográficas

[1] Barbosa, J.L., Colares, A.G., *Minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$, Lec. Not. Math, 1195, Springer Verlag, Berlin, 1986.

[2] Baker, A., *Matrix groups An introdution to Lie groups theory*, Springer, undergraduate mathematics series, 1953.

[3] Capogna, L., Danielli, D., Pauls, S. D., Tyson J. T., *An Introduction to the Heisenberg Group and the Sub-Riemannian Isoperimetric Problem*, Progress in Mathematics v. 259, Birkhäuser Verlag AG, 2007.

[4] Eells, J., Lemaire, L., *Selected topics in harmonics maps*, AMS regional conference series in mathematics, 50, 1983.

[5] Eells, J., Sampson, J. H., *Harmonics mappings of Riemann manifolds*, Amer. J. Math., 86, 109-160, 1964.

[6] Figueroa, C.B., *Geometria das Subvariedades do Grupo de Heisenberg*, Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas.

[7] Figueroa, C.B., Mercuri, F., Pedrosa, R., *Invariant surfaces of the Heisenberg groups*, Ann. Mat. Pur. Appl., **177**(4), 173-194, 1999.

[8] Hinojosa, P. A., *Notas de aula Geometria Riemanniana*, UFPB, 2007.

[9] Koszul, J. L., Malgrange, B. *Sur certaines fibrées complexes*, Arch. Math, **9**, 102-109, 1958.

[10] Koufogiorgos, TH., Baikoussis, CH., *A theorem on the tension field*, Proc. Amer. Math. Soc., v 93, No2, 1985.

[11] Mercuri, F., Piu, P., *A weierstrass representation formula for minimal surfaces in* $\mathbb{H}^3$ *and* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Act. Math. Sin. Engl. Ser., v22, No6, 1603-1612, 2006.

[12] Moreno, G., Torres, M.T., *Grupos de Lie que no son grupos de matrices*, Morfismos., V1, No1, 27-33, 1997.

[13] Nelli, B., Rosenberg, H., *Minimal surfaces in* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S), **33**, 263-292, 2002.

[14] Stenrood, N., *The topology of fiber bundles*, Princeton University Press, 1951.