



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ESTUDO DOS CAMPOS VETORIAIS
POLINOMIAIS QUADRÁTICOS QUE POSSUEM
INTEGRAL PRIMEIRA RACIONAL DE GRAU 3**

Claudemir Mota da Cruz

João Pessoa
Abril de 2011



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ESTUDO DOS CAMPOS VETORIAIS
POLINOMIAIS QUADRÁTICOS QUE POSSUEM
INTEGRAL PRIMEIRA RACIONAL DE GRAU 3**

Claudemir Mota da Cruz

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

João Pessoa
Abril de 2011

C957e	<p>Cruz, Claudemir Mota da. Estudo dos campos vetoriais polinomiais quadráticos que possuem integral primeira racional de grau 3 / Claudemir Mota da Cruz. -- João Pessoa : [s.n.], 2011. 95f. : il. Orientador : Pedro Antônio Gómez Venegas. Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN.</p> <p>1. Matemática. 2. Campos vetoriais polinomiais. 3. Integral primeira racional. 4. Compactificação de Poincaré.</p>
UFPB/BC	CDU: 51(043)

“A nossa vida é uma constante viagem, do nascimento à morte. A paisagem muda, as pessoas mudam, as necessidades se transformam, mas o trem segue adiante. A vida é o trem, não a estação.” Paulo coelho

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter sempre me acompanhado em todos os meus passos, e ter sido a minha força sustentadora durante a realização deste trabalho, e em toda a minha vida.

Agradeço fortemente aos meus pais, Solange e José Claudemir, por terem me dado o apoio necessário, compreensão e paciência para a realização dos meus sonhos. Agradeço também a minha irmã, por ter compreendido a minha ausência.

Agradeço mais ainda a Geraldo e a Pryscilla, grandes amigos que formei durante a graduação, e que me acompanharam no mestrado, ajudando e fazendo-me nunca desistir, mesmo nos momentos de angústia coletiva. Obrigado por me fazer compreender mais um pouco do universo matemático. Sem vocês essa jornada teria sido “infinitamente” mais difícil. Vocês a tornaram mais “diferenciável”...quer dizer, “suave”.

Agradeço também a Josué Oliveira, pelo apoio inicial e amizade valiosa. A Catiane e Samuel, por de uma forma ou de outra, serem amigos presentes, apesar da distância.

Agradeço também aos amigos que formei durante o mestrado, especialmente a Maikon Livi e Tatiane, pelos convites para almoço no sofá de “última geração”, pelas risadas e piadas inteligentes (às vezes com matemática).

Agradeço ao Professor Nelson Nery, por ter me feito enxergar que com simplicidade, paciência e boa vontade podemos fazer exposições simples, concisas e reveladoras. Agradeço por ser uma grande inspiração como professor.

Agradeço ao meu orientador, Pedro Venegas, pela paciência diante das vezes que cheguei “desesperado” a sua sala, diante de problemas “insolúveis” ou com “bombas atômicas para matar formigas”. Agradeço também pelo frutífero convívio, aprendizado e por ter expandido mais um pouco minha forma de pensar.

Agradeço aos professores Nelson Nery e Ramón Ahumada, por terem aceitado participar da banca de defesa.

Agradeço aos funcionários e professores da PGMAT/DM-UFPB, pela prestatividade e disposição em sempre ajudar.

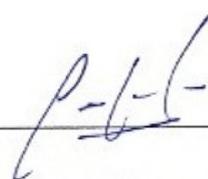
Agradeço ainda a CAPES, pelo apoio financeiro.

Estudo dos Campos Vetoriais Polinomiais Quadráticos que Possuem Integral Primeira Racional de Grau 3

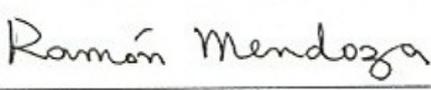
por
Claudemir Mota da Cruz

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por

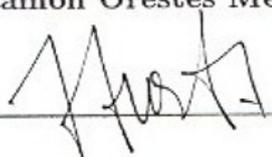


Prof. Dr. Pedro Antônio Gómez Venegas - UFPB (Orientador)



Prof. Dr. Ramón Orestes Mendoza Ahumada - UFPE

Prof. Dr. Ramón Orestes Mendoza Ahumada - UFPE



Prof. Dr. Nelson Nery de Oliveira Castro - UFPB

Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera - UFPB (Suplente)

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Resumo

Este trabalho foi dedicado a determinação global dos retratos de fase, no disco de Poincaré, dos campos vetoriais polinomiais quadráticos que possuem integral primeira racional de grau três. Para determinar o retrato de fase, utilizamos técnicas como *blow-up*, classificação dos pontos singulares, curvas invariantes para um sistema de equações diferenciais ordinárias e a indução de campos vetoriais sobre a esfera.

Palavras-Chave: Campos Vetoriais Polinomiais, Integral Primeira Racional, Compactificação de Poincaré.

Abstract

This work was dedicated to classify all the global phase portraits of the quadratic polynomial vector fields having a rational first integral of degree three. For this, techniques were used as *blow-up*, classification of singular points, invariant curves for a system of ordinary differential equations and vector fields induced on the sphere.

Key-words: Polynomial Vector Fields, Rational First Integral, Poincaré Compactification

Sumário

Introdução	1
1 Estrutura Local dos Pontos Singulares	2
1.1 Campos vetoriais e Fluxos	2
1.2 Blow Up Polar	9
1.3 Setores	12
2 A Compactificação de Poincaré	17
2.1 Campos Vetoriais Polinomiais e a Compactificação de Poincaré	17
2.1.1 A Compactificação de Poincaré em Coordenadas Locais	19
2.1.2 A Compactificação de Poincaré para Campos Polinomiais Hamiltonianos	23
3 Campos Vetoriais Quadráticos	30
3.1 Caracterização das Integrais Primeiras Racionais de Grau 3	33
4 Estudo dos Retratos de Fase	47
4.1 Integral Primeira Irredutível	47
4.2 Integral Primeira Redutível	49
Conclusão	87
Apêndice	88
A Revisão sobre a Classificação das Cônicas	89
B Campos vetoriais no disco de Poincaré: construção	90
Referências Bibliográficas	94

Lista de Figuras

1.1	Ilustração da ação do fluxo tubular (imagem retirada de [5],pág 9)	4
1.2	Pontos não degenerados:(a)-sela,(b)nó instável (repulsor),(c)-foco,(d)-centro.	6
1.3	:Blowing up e Blowing down.	10
1.4	Blowing up e Blowing down.	12
1.5	Setores Elípticos	13
1.6	Setor Hiperbólico	13
1.7	Setor parabólico	14
1.8	Retratos de Fase na Vizinhança de Pontos nilpotentes:(a) Cúspide, (b) e (c) sela-nó;(d) Sela Elíptica;	15
2.1	Projeção Central em \mathbb{R}^3	17
3.1	Retratos de Fase	31
4.1	Blowing Up	57
4.2	Blowing Down	57
B.1	91
B.2	91
B.3	93
B.4	93

Introdução

O pioneiro, no estudo dos retratos de fase de um campo vetorial, foi Jules Henri Poincaré¹, encontrando em problemas da mecânica celeste, a primeira motivação, com particular atenção para a estabilidade do sistema solar.

Mais de mil artigos foram publicados nos últimos vinte e cinco anos, sobre os campos vetoriais quadráticos e suas aplicações. Entretanto, a classificação de todos os campos vetoriais quadráticos integráveis e seus respectivos retratos de fase, ainda é um problema em aberto. Os campos vetoriais quadráticos tendo a integral primeira polinomial foram completamente estudados por [6] e [9]. Os campos quadráticos, que possuem integral primeira racional de grau 2, também já foram completamente estudados por [11]. Os campos vetoriais quadráticos homogêneos já foram completamente estudados em [15].

Neste trabalho buscamos determinar, completamente, as formas padrão para um campo vetorial quadrático não homogêneo que possui integral primeira racional de grau 3, além dos seus respectivos retratos de fase, buscando condições sobre os coeficientes de H (integral primeira). Para isso, exploraremos a referência [10].

A dissertação foi organizada com o objetivo de trazer suavidade a leitura, utilizando conhecimentos essenciais da teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias. Em muitos trechos foi *extremamente* essencial o uso de softwares matemáticos tais como Maple, Mathematica e o $P4$, pois a quantidade de equações torna os cálculos algébricos extremamente extensos e humanamente quase insolúveis.

O software $P4$ foi desenvolvido por Jaume Llibre², em parceria com outros pesquisadores, e foi utilizado nesta dissertação para auxiliar na determinação dos retratos de fase sobre o disco de Poincaré \mathbb{D}^2 . Entretanto evidenciamos uma grande quantidade de informações sobre os pontos singulares e as curvas invariantes, explicitando, dentro do possível, a construção dos retratos de fase destes campos vetoriais em \mathbb{D}^2 , sem abrir mão da teoria que embasa a construção. Para maiores detalhes sobre o processo de construção, foi construído um apêndice, com o passo a passo da compactificação de Poincaré.

¹matemático, físico e filósofo Francês

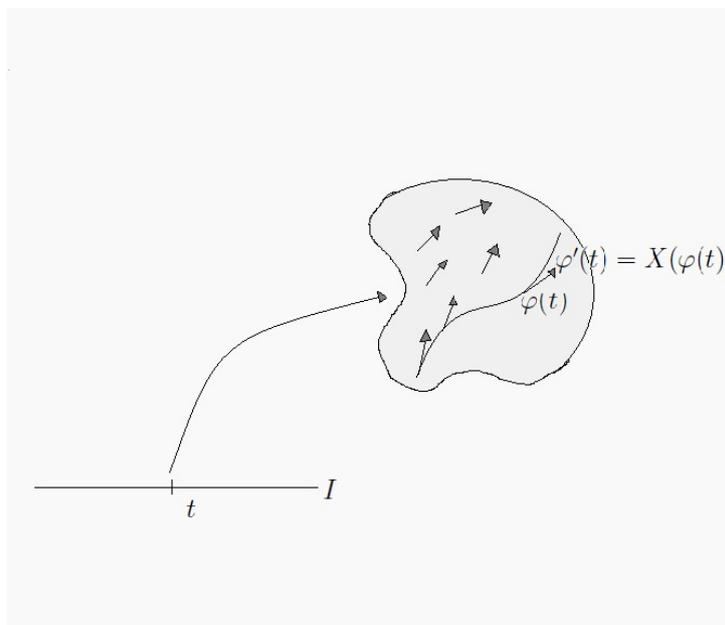
²professor da Universitat Autònoma de Barcelona

Capítulo 1

Estrutura Local dos Pontos Singulares

1.1 Campos vetoriais e Fluxos

Seja Ω um aberto em \mathbb{R}^n . Uma aplicação $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k é dito campo vetorial e a ele associamos uma equação diferencial $x' = X(x)$. As soluções desta equação diferencial, isto é, as aplicações diferenciáveis $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ (onde I é aberto no qual a solução está definida), tais que $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$, para todo $t \in I$, são chamadas trajetórias ou curvas integrais de X .



Curva Integral

Definição 1.1.1. Uma aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$ de classe C^1 é dito fluxo se

- $\varphi(0, x) = x$
- $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$

Definição 1.1.2. Uma aplicação $\varphi : D \rightarrow \Omega$ chama-se fluxo gerado por X , se φ é solução da equação diferencial $x' = X(x)$ e $D = \{(t, x); x \in \Omega, t \in I_x\}$ é um conjunto aberto com $I_x \subset \mathbb{R}$ aberto tal que $\varphi(0) = x$.

Exemplo 1.1.1. Dado o campo vetorial $X = (7x - 1, 7y + 11)$ e $\Omega = \mathbb{R}^2$, teremos que o fluxo é dado por

$$\varphi(t, (p, q)) = \left(\frac{(7p - 1)e^{7t} + 1}{7}, \frac{(11 + 7q)e^{7t} - 11}{7} \right)$$

onde (p, q) é a posição no instante $t = 0$.

Definição 1.1.3. O conjunto $\gamma_p = \{\varphi(t, p), t \in I_p\}$, isto é, a imagem da curva integral de X pelo ponto p , chama-se órbita de X pelo ponto p . O conjunto aberto Ω , munido da decomposição em órbitas de X , chama-se retrato de fase de X

Definição 1.1.4. Sejam X_1 e X_2 dois campos vetoriais definidos em subconjuntos abertos Δ_1 e Δ_2 de \mathbb{R}^2 , respectivamente. Dizemos que X_1 é topologicamente equivalente (respectivamente C^r -equivalente) a X_2 quando existe um homeomorfismo (respectivamente um difeomorfismo de classe C^r) $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ que envia as órbitas de X_1 em órbitas de X_2 preservando a orientação.

Definição 1.1.5. Seja $\varphi_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\varphi_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ os fluxos gerados pelos campos vetoriais $X_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $X_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, respectivamente. Dizemos que X_1 é topologicamente conjugado (respectivamente C^r -conjugado) a X_2 quando existe um homeomorfismo (respectivamente um difeomorfismo de classe C^r) $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ tal que $h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x))$ para todo $(t, x) \in \Omega$.

Observação 1.1.1. Observe que neste caso é necessário que o intervalo maximal I_x para φ_1 e $I_{h(x)}$ para φ_2 sejam iguais.

Exemplo 1.1.2. $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $h(x, y) = \left(x, y + \frac{x^3}{4}\right)$ é uma C^r -conjugação entre $X(x, y) = (x, -y)$ e $Y(x, y) = (x, -y + x^3)$.

De fato, o fluxo de X é dado por

$$\varphi(t, (a, b)) = \left(ae^t, \left(b - \frac{a^3}{4}\right) e^{-t} + \frac{a^3}{4} e^{3t} \right)$$

onde $t \in \mathbb{R}$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, e o fluxo de Y é dado por $\psi(t, (c, d)) = (ce^t, de^{-t})$.

Por uma substituição direta obtemos que $h(\psi(t, p)) = \varphi(t, h(p))$.

Evidentemente toda conjugação topológica é uma equivalência topológica, mas o contrário nem sempre ocorre, como podemos ver no exemplo abaixo.

Exemplo 1.1.3. Sejam $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ matrizes dos sistemas $x' = Ax$ e $x' = Bx$, com os respectivos fluxos $\varphi(t, (a, b)) = (b \sin(t) + a \cos(t), b \cos(t) - a \sin(t))$ e $\psi(t, (a, b)) = (b \sin(2t) + a \cos(2t), b \cos(2t) - a \sin(2t))$. Afirmação: Os campos vetoriais correspondentes não são C^r conjugados, mas são C^r equivalentes.

De fato, as órbitas de ambos os campos são periódicas e de período 2π e π , respectivamente. Daí, os intervalos maximais associados a solução de cada sistema são distintos.

$$\therefore h(\varphi(t, x)) \neq \psi(t, h(x)) \tag{1.1}$$

Por outro lado, os campos vetoriais são C^r -equivalentes, pois tomando a aplicação $h =$ identidade, verificamos que possuem as mesmas órbitas.

Definição 1.1.6. Sejam $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^r , $r \geq 1$, $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $f : A \rightarrow \Delta$ de classe C^r chama-se seção transversal local de X quando para todo $a \in A$, $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ e $X(f(a))$ geram o espaço \mathbb{R}^n . Seja $\Sigma = f(A)$ munido da topologia induzida. Se $f : A \rightarrow \Sigma$ for um homeomorfismo, diz-se que Σ é uma seção transversal de X .

Teorema 1.1.1. (Teorema do Fluxo tubular): Seja p um ponto não singular de $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r e $f : A \rightarrow \Sigma$ uma seção transversal local de X de classe C^r com $f(0) = p$. Então existe uma vizinhança V de p em Δ e um difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B$ de classe C^r , onde $\epsilon > 0$ e B é uma bola aberta em \mathbb{R}^{n-1} de centro na origem $0 = f^{-1}(p)$ tal que

1. $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$;
2. h é uma C^r -conjugação entre $X|_V$ e o campo constante $Y : (-\epsilon, \epsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Y = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

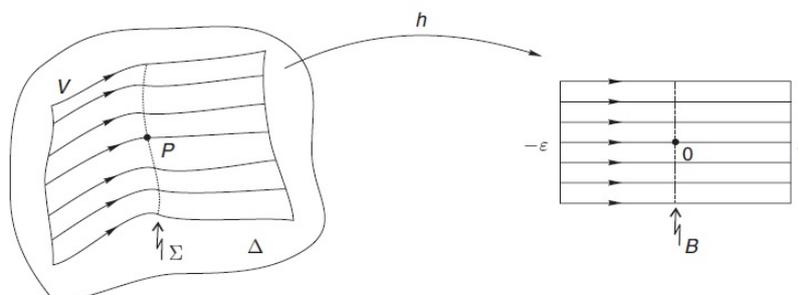


Figura 1.1: Ilustração da ação do fluxo tubular (imagem retirada de [5],pág 9)

Demonstração. Ver [14], pág. 223. □

Seja q um ponto regular de um campo vetorial X (isto é $X(q) \neq 0$) de classe C^r com $1 \leq r \leq \infty$. Pelo teorema do fluxo tubular, sabemos que existe um difeomorfismo que conjuga X em uma vizinhança de q com o fluxo constante $Y = (1, 0)$. Então quaisquer dois campos vetoriais X e Y são localmente C^r conjugados na vizinhança de um ponto regular q . Mas o mesmo não ocorre na vizinhança de um ponto singular.

Seja p um ponto singular de um campo vetorial $X = (P, Q)$ em \mathbb{R}^2 , (isto é, $X(p) = 0$) onde $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$. Dizemos que a matriz jacobiana

$$JX(p) := \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(p) & \frac{\partial P}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(p) & \frac{\partial Q}{\partial y}(p) \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

é a parte linear do campo vetorial X no ponto singular p . Dependendo de como os autovalores se apresentam, o ponto singular pode ser classificado em

- *Não-degenerado*, se 0 não é um autovalor;
- *Hiperbólico*, se os dois autovalores de $JX(p)$ tem parte real diferente de 0.
- *Semi-hiperbólico*, se exatamente um autovalor de $JX(p)$ é igual a zero.

Singularidades Hiperbólicas e semi-hiperbólicas são conhecidas como *pontos singulares elementares*.

- *Nilpotente* se ambos os autovalores de $JX(p)$ são iguais a zero mas $JX(p) \neq 0$
- *Linearmente nulo*, se $JX(p) \equiv 0$
- *Centro*, se existe uma vizinhança aberta, constituído, além da singularidade, de órbitas periódicas. A singularidade é dita *centro linear* se os autovalores de $JX(p)$ são imaginários puros.

Tendo esta classificação em mente, podemos definir o determinante, o traço e o discriminante em p associados ao campo X como

$$|\mathbf{JX}(\mathbf{p})| = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(p) & \frac{\partial P}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(p) & \frac{\partial Q}{\partial y}(p) \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{tr}(\mathbf{p}) := \frac{\partial P}{\partial x}(p) + \frac{\partial Q}{\partial y}(p)$$

$$\Delta(\mathbf{p}) = \mathbf{tr}(p)^2 - 4|\mathbf{JX}(p)|,$$

respectivamente, e deles extrair as seguintes propriedades:

- Se $|JX(p)| \neq 0$, então o ponto singular é não-degenerado.
- Se $|JX(p)| = 0$, mas $tr(p) \neq 0$ então o ponto singular é semi-hiperbólico;
- Se $|JX(p)| < 0$, o ponto é dito sela;
- Se $tr^2(p) > 4|JX(p)| > 0$, o ponto é dito nó estável se $tr(p) < 0$ e instável se $tr(p) > 0$;
- Se $4|JX(p)| > tr^2(p) > 0$, o ponto é dito foco estável se $tr(p) < 0$ e instável se $tr(p) > 0$;
- Se $tr(p) = 0 < |JX(p)|$, p é um *foco fraco* ou um *centro*;

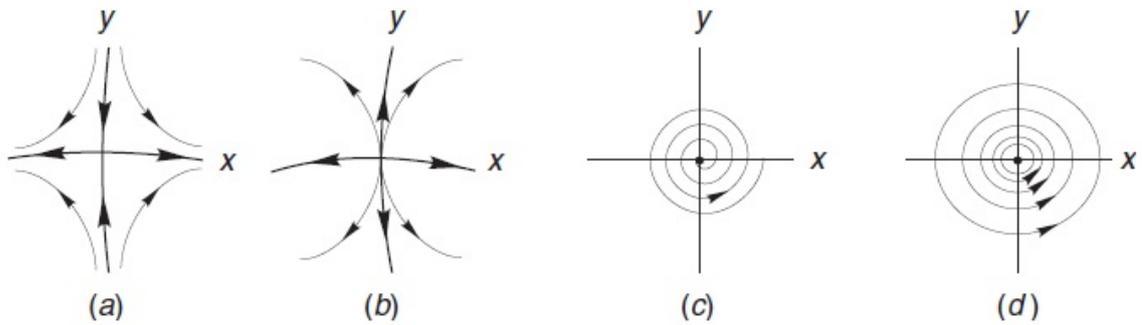


Figura 1.2: Pontos não degenerados:(a)-sela,(b)nó instável (repulsor),(c)-foco,(d)-centro.
 Fonte: Referência [5]

- Se $|JX(p)| = 0$ e o $tr(p) = 0$ então o ponto singular é linearmente nulo ou nilpotente, dependendo se $JX(p)$ é identicamente nula ou não.

Se $p = (x_0, y_0)$ é um ponto singular do sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y) \\ \dot{y} &= Q(x, y) \end{aligned} \tag{1.3}$$

onde $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$, então $(0, 0)$ é um ponto singular do sistema

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= P(\bar{x}, \bar{y}) \\ \dot{\bar{y}} &= Q(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde $x = \bar{x} + x_0$, e $y = \bar{y} + y_0$. Desta forma temos que as funções $P(\bar{x}, \bar{y})$ e $Q(\bar{x}, \bar{y})$ possuem termos de grau maior ou igual a 1 em \bar{x} e \bar{y} . Logo 1.4 pode ser escrita da seguinte forma (ao retirarmos a “barra”)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + F(x, y) \\ \dot{y} &= cx + dy + G(x, y) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Portanto,

$$JX(0,0) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Se a singularidade for hiperbólica, sabemos que os autovalores tem parte real não nula. Disso segue que a forma canônica de Jordan desta matriz pode se apresentar de três maneiras distintas:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

com $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \alpha \neq 0$ e $\beta > 0$.

No casos em que o ponto singular é semi-hiperbólico ou centro linear obtemos, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

com $\lambda \neq 0, \beta > 0$.

Teorema 1.1.2. *Seja $(0,0)$ um ponto singular isolado do campo vetorial X , dado por*

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + A(x, y) \\ \dot{y} = cx + dy + B(x, y) \end{cases} \quad (1.9)$$

onde A e B são analíticos em uma vizinhança da origem com $A(0,0) = B(0,0) = 0$ e $DA(0,0) = DB(0,0) = 0$. Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores de $DX(0,0)$ do sistema na origem. Então temos

1. Se λ_1 e λ_2 são reais e $\lambda_1\lambda_2 < 0$ então $(0,0)$ é uma sela (ver 1.2 (a)). Se denotarmos por E_1 e E_2 os autoespaços associados a λ_1 e λ_2 , respectivamente, pode-se encontrar 2 curvas invariantes tangentes a E_1 e a E_2 em $(0,0)$. Uma é atraída e a outra é repelida, conforme a figura 1.2(a). Existe uma mudança de coordenadas C^∞ que transforma 1.9 na seguinte forma normal

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases} \quad (1.10)$$

se $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, e

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1(x + f(x^k y^l)) \\ \dot{y} = \lambda_2(y + g(x^k y^l)) \end{cases} \quad (1.11)$$

se $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{k}{l}$, com $k, l \in \mathbb{N}$ e $f, g \in C^\infty$. O sistema do tipo 1.9 é C^0 – conjugado a

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (1.12)$$

2. Se λ_1 e λ_2 são reais com $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ e $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ então $(0, 0)$ é um nó (1.2(b)). Se $\lambda_1 > 0$ (respectivamente < 0) então $(0, 0)$ é um nó repulsor (respectivamente atrator). Além disso existe uma mudança de coordenadas C^∞ que reescreve 1.9 como sendo

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases} \quad (1.13)$$

se $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{N}$, e

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y + \delta x^m \end{cases} \quad (1.14)$$

para $\delta = 0$ ou $\delta = 1$ se $\lambda_1 = m\lambda_2$, com $m \in \mathbb{N}$ e $m \geq 1$. O sistema do tipo 1.9 é C^0 – conjugado a

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta x \\ \dot{y} = \delta y \end{cases}$$

com $\delta = \pm 1$ e $\lambda_1 \delta > 0$.

3. Se $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ com $\alpha, \beta \neq 0$ então $(0, 0)$ é um foco forte (ver figura 1.2(c)). Se $\alpha > 0$ (respectivamente < 0) teremos um foco repulsor (respectivamente atrator). Existe uma mudança de coordenadas C^∞ que reescreve 1.9 como sendo

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y \\ \dot{y} = -\beta x + \alpha y \end{cases}$$

O sistema 1.9 é C^0 – conjugado a

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta x \\ \dot{y} = \delta y \end{cases} \quad (1.15)$$

com $\delta = \pm 1$ e $\alpha\delta > 0$

4. Se $\lambda_1 = i\beta$ e $\lambda_2 = -i\beta$ com $\beta \neq 0$ então $(0, 0)$ é um centro linear, topologicamente, um foco fraco ou um centro. Assim o retrato de fase na vizinhança de $(0, 0)$ é equivalente a figura 1.2(c) ou (d)

Demonstração. Ver [5], pág 87. □

Observação 1.1.2.

A denominação “foco forte” é usada em (3) na descrição da singularidade da parte linear $DX(0)$ que já é um foco, enquanto a denominação “foco fraco” é usado quando a parte linear $DX(0)$ é um centro.

Já no caso em que p é nilpotente ou linearmente nulo, teremos, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

A técnica abaixo pode ser empregada para determinar o retrato de fase na vizinhança de um ponto linearmente nulo:

1.2 Blow Up Polar

O *Blowing Up Polar* é uma técnica que nos permite conhecer o comportamento da trajetória do campo vetorial na vizinhança de um ponto singular, pois realiza uma mudança no sistema de coordenadas, onde associamos o ponto singular a um círculo, e as trajetórias permanecem inalteradas, conforme a figura exemplifica

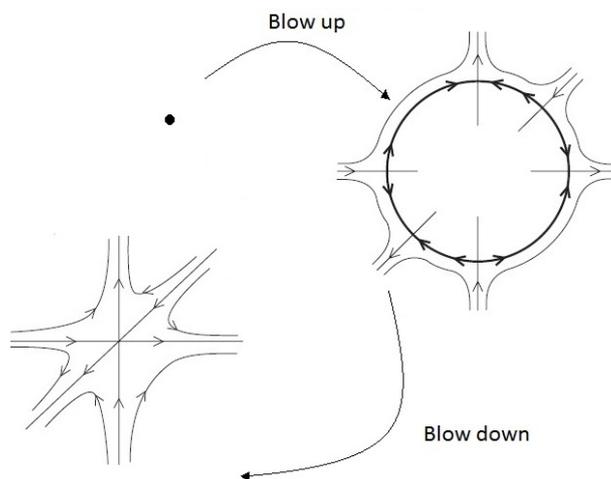


Figura 1.3: :Blowing up e Blowing down.

Fonte:Retirada e modificada da Referência [5]

Esta técnica é bastante útil, pois nos permite perceber os diversos comportamentos do campo vetorial na vizinhança de um ponto não-elementar e depois retornarmos ao sistema original, com as trajetórias já conhecidas¹: *Blowing down*.

Seja $X = (P(x, y), Q(x, y))$ um campo vetorial polinomial em \mathbb{R}^2 e $(0, 0)$ uma singularidade isolada. Considerando a aplicação

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\theta, r) &\longmapsto (r\cos(\theta), r\sen(\theta)) \end{aligned} \tag{1.17}$$

podemos definir um campo vetorial \bar{X} sobre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, tal que $D\phi_v(\bar{X}) = X(\phi(v))$ e assim escrevemos o campo X em coordenadas polares.

Quando tomamos a restrição $\psi := \phi|_{\mathbb{S}^1 \times (0, \infty)}$ obtemos uma mudança de coordenadas para \mathbb{R}^2 , pois teremos que ψ é um difeomorfismo. Ao considerarmos $\bar{\psi} := \phi|_{\mathbb{S}^1 \times [0, \infty)}$, teremos uma aplicação que leva o círculo $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ do cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ no ponto $(0, 0)$. Assim expandiremos a singularidade $(0, 0)$ em um círculo, por meio da aplicação $(\bar{\psi})^{-1}$, preservando todas as trajetórias do campo vetorial.

Determinemos agora a expressão para o campo vetorial \bar{X} em uma vizinhança $\bar{V} = (\bar{\psi})^{-1}(V)$, onde V é uma vizinhança de $(0, 0)$ em \mathbb{R}^2 .

Temos que $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sen(\theta)$ e portanto

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r} \\ \dot{\theta} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{r^2} \end{cases} \tag{1.18}$$

¹Imagens retiradas de [5] pág 94 e 95

e como $X = (\dot{x}, \dot{y}) = (P(x, y), Q(x, y))$, temos

$$\begin{cases} P(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) r \cos \theta + r \operatorname{sen} \theta Q(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) = r \dot{r} \\ Q(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) r \cos \theta - P(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) r \operatorname{sen} \theta = \dot{\theta} r^2 \end{cases} \quad (1.19)$$

logo

$$\begin{cases} \dot{r} = P(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) \cos \theta + \operatorname{sen} \theta Q(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) \\ \dot{\theta} = \frac{1}{r} [Q(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) \cos \theta - P(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta] \end{cases} \quad (1.20)$$

Tomando $X_r = \dot{r}$, $X_\theta = \dot{\theta}$ e escolhendo o maior inteiro positivo κ tal que $r^\kappa | P(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$ e $r^\kappa | Q(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$, teremos $r^{\kappa-1} | X_r$ e $r^{\kappa-1} | X_\theta$. Assim podemos tomar $\bar{X} = (r \frac{X_r}{r^\kappa}, \frac{X_\theta}{r^{\kappa-1}})$.

Observação 1.2.1.

- Aqui houve a necessidade da divisão por $r^{\kappa-1}$ para possibilitar o encontro de singularidades especiais que possam, eventualmente, estar sendo omitidas ao simplesmente resolvermos a equação $(\dot{r}, \dot{\theta}) = (0, 0)$.
- Para descobrir o comportamento do campo vetorial na vizinhança de um ponto singular, pode ser necessário aplicar a técnica de blow up polar diversas vezes até que a trajetória naquela vizinhança fique completamente determinada.
- Além do Blowing Up Polar, existe o “Blowing Up direcional”, onde expandimos a singularidade em uma reta. Não a trataremos aqui, pois ambas as técnicas podem ser aplicadas para determinar as trajetórias na vizinhança da singularidade, sem grandes prejuízos de uma em relação a outra. Para mais detalhes sobre Blowing Up direcional consultar [5] ou [13].

Exemplo 1.2.1. Dado o campo vetorial $X = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ temos que $(0, 0)$ é uma singularidade isolada e $JX(0, 0) \equiv 0$. Logo $(0, 0)$ é linearmente nulo. Aplicando Blow Up polar obteremos que

$$\bar{X} = (r(\cos^3 \theta + \operatorname{sen}^3 \theta - 2 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta), 3 \cos \theta \operatorname{sen} \theta (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta)).$$

Resolvendo a equação $X(0, \theta) = 0$, obteremos como soluções $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$. Calculando a matriz Jacobiana nestes pontos, obteremos que todos os pontos são do tipo sela. Esquemáticamente temos²

²Imagem retirada de [13]

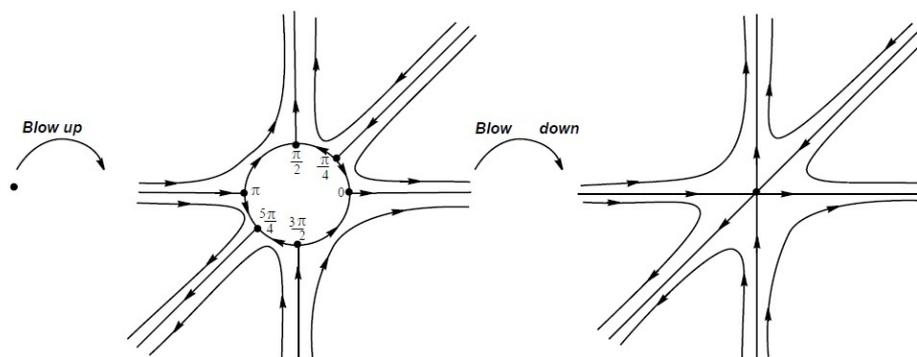


Figura 1.4: Blowing up e Blowinh down.
 Fonte: Referência [13]

1.3 Setores

Seja Δ um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 e seja $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^r , onde $1 \leq r \leq \infty$. Seja $\varphi(t) = \varphi(t, p) = \varphi_p(t)$ a curva integral de X passando pelo ponto p , definida em um intervalo maximal $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Se $\omega_+(p) = \infty$, definimos o conjunto

$$\omega(p) = \{q \in \Delta; \exists \{t_n\} \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q \text{ quando } n \rightarrow \infty\} \quad (1.21)$$

Analogamente, se $\omega_-(p) = -\infty$ definimos

$$\alpha(p) = \{q \in \Delta; \exists \{t_n\} \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q \text{ quando } n \rightarrow \infty\} \quad (1.22)$$

Os conjuntos $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ são chamados *conjunto ω -limite* e *conjunto α -limite* de p , respectivamente.

Exemplo 1.3.1. *Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial dado por $X(x, y) = (x, -y)$. Então*

1. *Se $p = (0, 0)$, $\alpha(p) = \omega(p) = \{(0, 0)\}$.*
2. *Se $p \in \{(x, 0); x \neq 0\}$, $\alpha(p) = \{(0, 0)\}$ e $\omega(p) = \emptyset$*

Dizemos que $0 \in U$, $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto, é um *ponto de rotação do campo de vetores* $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, se qualquer vizinhança dele contém uma curva integral simples fechada cujo interior contenha o ponto O .

Uma solução $\gamma(t)$ do campo X passando pelo ponto p a qual não é identicamente nula e definida sobre $[0, +\infty)$, (respec. $(-\infty, 0]$) é chamada *solução positivamente nula* (respec. *negativamente nula*) se o $\omega(p) = \{0\}$ (respec. $\alpha(p) = \{0\}$)

Suponha que O não seja um ponto de rotação. Sejam $D \subset U$ um aberto contendo O e $C = \partial D$ uma curva de Jordan positivamente orientada. Uma solução $\gamma(t)$ de X é

chamada *solução base positiva* para a curva C (respec. *solução base negativa* para a curva C) se $t \in [0, \infty)$ (respec. $t \in (-\infty, 0]$), $\gamma(0) \in C$, $\gamma(t) \in D$ para $t \neq 0$ e se $\gamma(t)$ é uma solução nula positivamente (respec. negativamente nula).

Sejam $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ uma solução base para C . O subconjunto S do interior de C com fronteira contendo O , os arcos $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ e o *subarco* orientado fechado C_{12} que vai de $\gamma_1(0)$ a $\gamma_2(0)$, é chamado de *setor*.

Considere agora o caso em que existe uma solução $\gamma_0(t)$, $-\infty < t < \infty$, de X , que é interior ou está em C para todo t e $\gamma_0(t + t_1) \equiv \gamma_1(t)$ para $t \geq 0$, $\gamma_0(t + t_2) = \gamma_2(t)$ para $t \leq 0$, $t_1 \leq t_2$. O Ponto O e o arco $\gamma_0(t)$, $-\infty < t < \infty$ formam uma curva de Jordan com interior I . Se S contém I , então é chamada *setor elíptico* (ver figuras abaixo³). Quando $t_1 = t_2$ teremos que C_{12} se reduz ao ponto $\gamma_0(t)$, então S é elíptico e coincide com I . Quando $t_1 \neq t_2$, S pode conter pontos que não estão em I $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$

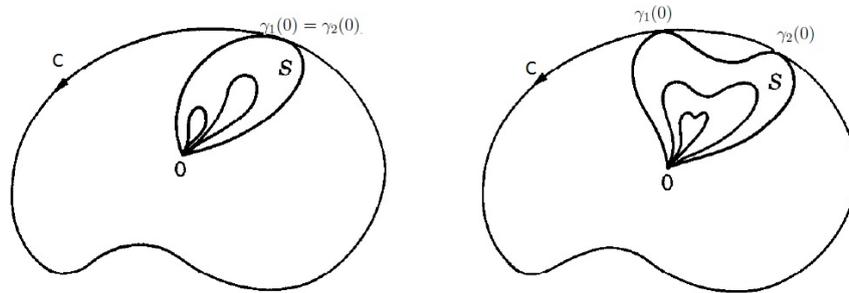


Figura 1.5: Setores Elípticos

Um setor S que não é um setor elíptico e que $S \cup C_{12}$ não contém uma solução base é chamada *setor hiperbólico*

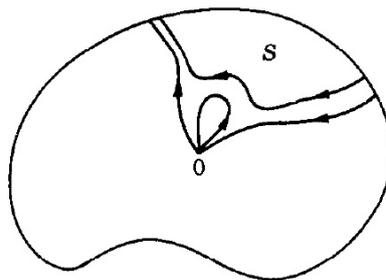


Figura 1.6: Setor Hiperbólico
Fonte: Referência [7]

Um setor S com fronteiras contendo os arcos solução base positivos (negativos) $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ e o fecho de S não contém soluções base negativas (positivas) é chamado *setor parabólico positivo (negativo)*.

³Imagens retiradas e modificadas de [7]

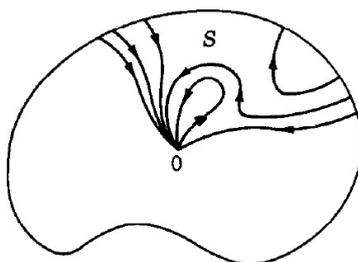


Figura 1.7: Setor parabólico
Fonte: Referência [7]

Definição 1.3.1. Uma solução base é chamada de separatriz do campo X se ela é uma componente da fronteira de dois setores diferentes.

Resumimos abaixo algumas propriedades pertencentes aos pontos singulares que apresentaremos sem demonstração. Para maiores detalhes veja [1] teorema 65, 66 e 67.

Proposição 1.3.1. Seja $(0,0)$ um ponto isolado do campo vetorial $(F(x,y), y + G(x,y))$, onde F e G são funções analíticas em uma vizinhança da origem, de modo que o menor grau entre todos os termos, nas variáveis x e y , é, no máximo 2. Seja $y = g(x)$ a solução da equação $y + G(x,y) = 0$ em uma vizinhança de $(0,0)$. Assuma que o desenvolvimento da função $f(x) = F(x, g(x))$ é da forma $f(x) = \mu x^m + o(x)$ ($o(x)$ = termos de ordem superior), onde $m \geq 2$ e $\mu \neq 0$. Quando m é ímpar, então $(0,0)$ ou é um nó estável ou uma sela, dependendo se $\mu > 0$ ou $\mu < 0$, respectivamente. No caso da sela, a separatriz estável é tangente ao eixo x . Se m é par, então $(0,0)$ é uma sela-nó, isto é, o ponto singular p é formado pela união de dois setores hiperbólicos com um setor parabólico. A separatriz estável é tangente a parte positiva (respectivamente negativa) do eixo x em $(0,0)$ quando $\mu < 0$ (respectivamente $\mu > 0$). As duas separatrizes instáveis são tangentes ao eixo y em $(0,0)$.

Proposição 1.3.2. Seja $(0,0)$ um ponto singular isolado de um campo vetorial $(y + F(x,y), G(x,y))$ onde F e G são funções analíticas em uma vizinhança da origem, de modo que o menor grau entre todos os termos, nas variáveis x e y , é, no máximo 2. Seja $y = f(x)$ a solução da equação $y + F(x,y) = 0$ em uma vizinhança de $(0,0)$. Assuma que o desenvolvimento da função $G(x, f(x))$ é da forma $Kx^\kappa + o(x)$, ($o(x)$ = termos de ordem superior), e $\Phi(x) \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) (x, f(x)) = Lx^\lambda + o(x)$ com $K \neq 0$, $\kappa \geq 2$ e $\lambda \geq 1$. Então as seguintes afirmações são válidas:

1. Se κ é par e

- (a) $\kappa > 2\lambda + 1$, então a origem uma sela-nó. Além disso, a sela-nó tem uma separatriz tangente ao semi-eixo $x < 0$ e outras duas separatrizes tangentes ao semi-eixo $x > 0$.

- (b) $\kappa < 2\lambda + 1$ ou $\Phi \equiv 0$ então a origem é uma cúspide, isto é, um ponto singular formado pela união de dois setores hiperbólicos. Além disso, a cúspide tem duas separatrizes tangentes a parte positiva do eixo x
2. Se κ é ímpar e $K > 0$, então a origem é uma sela. Além disso a sela tem duas separatrizes tangentes ao semi-eixo $x < 0$ e outras duas tangentes ao semi-eixo $x > 0$;
3. Se κ é ímpar, $K < 0$ e
- (a) λ par, $\kappa = 2\lambda + 1$ e $L^2 + 4K(\lambda + 1) \geq 0$ ou λ par e $\kappa > 2\lambda + 1$ então a origem é um nó estável (instável) nó se $L < 0$ ($L > 0$), tendo todas as órbitas tangentes ao eixo x em $(0, 0)$.
- (b) λ é ímpar, $\kappa = 2\lambda + 1$ e $L^2 + 4K(\lambda + 1) \geq 0$ ou λ é ímpar e $\kappa > 2\lambda + 1$ então a origem é uma sela elíptica, isto é, um ponto singular formado pela união de um setor hiperbólico e um setor elíptico. Além disso, uma separatriz da sela elíptica é tangente ao semi-eixo $x < 0$ e a outra ao semi-eixo $x > 0$;
- (c) $\kappa = 2\lambda + 1$ e $L^2 + 4K(\lambda + 1) < 0$ ou $\kappa < 2\lambda + 1$, então a origem é um foco ou um centro, e se $\Phi(x) \equiv 0$ então a origem é um centro.

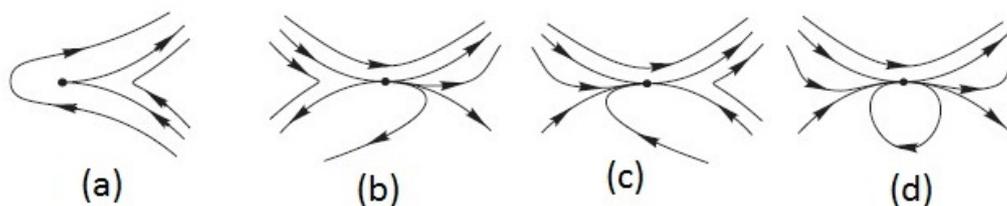


Figura 1.8: Retratos de Fase na Vizinhança de Pontos nilpotentes:(a) Cúspide, (b) e (c) sela-nó;(d) Sela Elíptica;

Fonte: Referência [5]

Exemplo 1.3.2. Considere o campo vetorial $X = (2 + 4x + y + 2x^2 + 2xy, 2y + 2xy + 2xy^2)$, o qual possui 3 singularidades $(-1, 0)$, $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$ e $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -1 - \sqrt{2})$. Temos que

$$JX(x, y) = \begin{bmatrix} 4 + 4x + 2y & 1 + 2x \\ 2y + 2y^2 & 2 + 2x + 4xy \end{bmatrix}.$$

Portanto, $JX(-1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e portanto o ponto é nilpotente; $|JX(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})| = -12 + 8\sqrt{2}$, $|JX(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -1 - \sqrt{2})| = -12 - 8\sqrt{2}$ e portanto ambos os pontos são do tipo sela.

Como o ponto $(-1, 0)$ é nilpotente, podemos utilizar o Blow Up para determinar as trajetórias na vizinhança deste ponto ou utilizar a Proposição 1.3.2, que nos dá informações sobre as trajetórias no caso das singularidades nilpotentes.

Então, fazendo uma translação da singularidade para a origem por meio da mudança de coordenadas $X = x + 1$ e $Y = y$ e tomando o campo vetorial reverso, obteremos

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Y - 2X^2 - 2YX \\ \dot{Y} &= -2YX - 2Y^2X + 2Y^2\end{aligned}$$

que está no formato das hipóteses do teorema. Assim devemos encontrar $Y - f(X) = 0$ de tal forma que $f(X)$ seja solução da equação $Y + F(X, Y) = 0$ numa vizinhança de $(0, 0)$.

Se $Y = f(X) = a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \dots$ é a solução que desejamos, ao substituírmos em $Y + F(X, Y) = 0$, onde $F(X, Y) = -2X^2 - 2YX$, obteremos

$$a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \dots = 2X^2 + 2(a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \dots)X$$

Comparando os coeficientes obteremos que $a_1 = 0$, $a_i = 2^{i-1}$, para $i = 2, 3, \dots$ e portanto $Y = \sum_{i=2}^{\infty} 2^{i-1}X^i$

Assim

$$\begin{aligned}G(X, f(X)) &= \sum_{i=2}^{\infty} 2^i X^{i+1} - 2\left(\sum_{i=2}^{\infty} 2^{i-1} X^i\right)^2 X + 2\left(\sum_{i=2}^{\infty} 2^{i-1} X^i\right)^2 \\ &= -2^2 X^3 + o(X^3).\end{aligned}\tag{1.23}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial G}{\partial Y}\right) = -6X + o(X)$$

Disso segue que $K = -4$, $\kappa = 3$, $L = -6$, $\lambda = 1$. Dessa forma $\kappa = 2\lambda + 1$ e $L^2 + 4K(\lambda + 1) > 0$ e portanto pela Proposição 1.3.2 item 3 (b), $(0, 0)$ é uma sela elíptica.

Capítulo 2

A Compactificação de Poincaré

De uma forma geral, a compactificação de Poincaré de um campo X consiste em traçar “cópias” do fluxo de X sobre uma esfera¹. Um caso particular dessa compactificação é feita pelo centro da esfera, onde o fluxo é projetado sobre o hemisfério norte e sobre o hemisfério sul. O objetivo é, possibilitar uma análise global do comportamento do campo X ao longo de todo o espaço, em especial das singularidades.

2.1 Campos Vetoriais Polinomiais e a Compactificação de Poincaré

Seja $X(x) = (P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x))$ um campo vetorial polinomial onde P_1, P_2, \dots, P_n são polinômios reais, tais que $P_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Identifiquemos \mathbb{R}^n com o hiperplano $\pi = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} | y_{n+1} = 1\}$ tangente a esfera S^n no pólo norte. Denotemos o hemisfério norte por $H^+ = \{y \in S^n | y_{n+1} > 0\}$ e o hemisfério sul por $H^- = \{y \in S^n | y_{n+1} < 0\}$. Tomemos então a projeção central do hiperplano π sobre a esfera S^n tomando pontos sobre o hemisfério norte e sobre o hemisfério sul²:

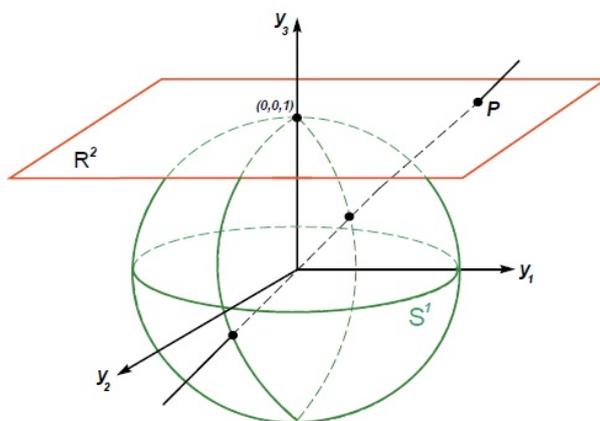


Figura 2.1: Projeção Central em \mathbb{R}^3

¹Aqui olhada como uma variedade diferenciável

²Imagem retirada de [13]

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi^+ : \mathbb{R}^n &\longrightarrow H^+ \\ x &\longmapsto \Phi^+(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), f_{n+1}(x)) = \\ &= \frac{1}{\Delta(x)}(x_1, x_2, \dots, x_n, 1), \text{ onde } \Delta(x) = (1 + \sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Note que Φ^+ é uma aplicação C^∞ , pois suas funções coordenadas o são. Além disso, verifica-se, sem muita dificuldade, que Φ^+ é bijetiva e que sua inversa é dada por

$$(\Phi^+)^{-1}(w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}) = \left(\frac{w_1}{w_{n+1}}, \frac{w_2}{w_{n+1}}, \dots, \frac{w_{n-1}}{w_{n+1}}, \frac{w_n}{w_{n+1}} \right)$$

Analogamente podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi^- : \mathbb{R}^n &\longrightarrow H^- \\ x &\longmapsto \Phi^-(x) = -\frac{1}{\Delta(x)}(x_1, x_2, \dots, x_n, 1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

a qual possui inversa semelhante a acima exposta.

Determinemos então o fluxo sobre S^n induzido pelo campo vetorial polinomial X , por meio da projeção central. Seja \widehat{X} uma aplicação tal que

$$\begin{aligned} \widehat{X} : H^+ \cup H^- &\longrightarrow T[H^+ \cup H^-] \\ y &\longrightarrow \widehat{X}(y) = \begin{cases} D\Phi_x^+ X(x) & \text{se } y = \Phi^+(x) \\ D\Phi_x^- X(x) & \text{se } y = \Phi^-(x) \end{cases}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $y = (y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) = \frac{1}{\Delta(x)}(x_1, \dots, x_n, 1)$.

Então, ao tomarmos $\frac{1}{\Delta(x)}(x_1, \dots, x_n, 1) = (f_1(x), \dots, f_n(x), f_{n+1}(x))$ teremos

$$\begin{aligned} D\Phi_x^+ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial e_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial e_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial e_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial e_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial e_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial e_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n+1}}{\partial e_1}(x) & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial e_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial e_n}(x) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} y_{n+1} - y_{n+1}y_1^2 & -y_{n+1}y_1y_2 & \dots & -y_{n+1}y_1y_n \\ -y_{n+1}y_2y_1 & y_{n+1} - y_{n+1}y_2^2 & \dots & -y_{n+1}y_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_{n+1}y_1y_n & -y_{n+1}y_2y_n & \dots & y_{n+1} - y_{n+1}y_n^2 \\ -y_{n+1}^2y_1 & -y_{n+1}^2y_2 & \dots & -y_{n+1}^2y_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Observe que a expressão para $D\Phi^-$ é a mesma para $D\Phi^+$, uma vez que $y = (y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) = -\frac{1}{\Delta(x)}(x_1, \dots, x_n, 1)$. Logo, podemos obter uma única expressão que caracterize \widehat{X} em $H^+ \cup H^-$:

$$\widehat{X}(y) = y_{n+1} \begin{bmatrix} 1 - y_1^2 & -y_1 y_2 & \dots & -y_1 y_n \\ -y_2 y_1 & 1 - y_2^2 & \dots & -y_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_1 y_n & -y_2 y_n & \dots & 1 - y_n^2 \\ -y_{n+1} y_1 & -y_{n+1} y_2 & \dots & -y_{n+1} y_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widehat{P}_1(y) \\ \widehat{P}_2(y) \\ \vdots \\ \widehat{P}_{n-1}(y) \\ \widehat{P}_n(y) \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

onde $\widehat{P}_i(y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}) = P_i\left(\frac{y_1}{y_{n+1}}, \frac{y_2}{y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{n+1}}\right)$

Como o campo \widehat{X} está definido em $S^n \setminus S^1$, nosso objetivo agora é obter uma expressão para um campo \widetilde{X} que esteja definida em toda a esfera S^n .

Tomando $m = \max\{\text{grau}(P_1), \text{grau}(P_2), \dots, \text{grau}(P_n)\}$ teremos que $\widetilde{P}_i(y) := y_{n+1}^m \widehat{P}_i(y) = y_{n+1}^m P_i\left(\frac{y_1}{y_{n+1}}, \frac{y_2}{y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{n+1}}\right)$ será um polinômio homogêneo de grau m . Desta forma,

$$\widetilde{X}(y) = y_{n+1}^{m-1} \widehat{X}(y) = \begin{bmatrix} 1 - y_1^2 & -y_1 y_2 & \dots & -y_1 y_n \\ -y_2 y_1 & 1 - y_2^2 & \dots & -y_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_1 y_n & -y_2 y_n & \dots & 1 - y_n^2 \\ -y_{n+1} y_1 & -y_{n+1} y_2 & \dots & -y_{n+1} y_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widetilde{P}_1(y) \\ \widetilde{P}_2(y) \\ \vdots \\ \widetilde{P}_{n-1}(y) \\ \widetilde{P}_n(y) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Como \widetilde{X} é um campo vetorial polinomial, e portanto diferenciável em todos os pontos, temos pela sua continuidade que $\widetilde{X}_n|_{S^{n-1}} = 0$ uma vez que $\frac{1}{\Delta(x)} \rightarrow 0$.

A expressão 2.5 para \widetilde{X} é denominada *Compactificação de Poincaré* para o campo X .

A projeção do hemisfério norte fechado de S^n em $y_{n+1} = 0$ pela aplicação $(y_1, y_2, y_3) \mapsto (y_1, y_2)$ é chamada disco de Poincaré e denotado por \mathbb{D}^2 .

Observação 2.1.1.

Observe que ao multiplicarmos \widehat{X} por y_{n+1}^{m-1} não alteramos o fluxo de X , pois y_{n+1}^{m-1} ou é uma função estritamente positiva, para $y = \Phi^+(x)$ ou, é negativa ou positiva, para $y = \Phi^-(x)$, dependendo se m é par ou ímpar.

2.1.1 A Compactificação de Poincaré em Coordenadas Locais

Sejam $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)$ e $(\mathcal{V}_i, \gamma_i)$, $i = 1, 2, \dots, n, n+1$ cartas locais para S^n tais que

$$\begin{cases} \mathcal{U}_i = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}) \in S^n | y_i > 0\} \\ \mathcal{V}_i = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}) \in S^n | y_i < 0\} \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \varphi_i : \mathcal{U}_i \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \gamma_i : \mathcal{V}_i \longrightarrow \mathbb{R}^n \end{cases}$$

definidas pela regra $(y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}) \longrightarrow (\frac{y_1}{y_i}, \frac{y_2}{y_i}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \dots, \frac{y_{n+1}}{y_i})$ e possuem como inversa

$$\begin{cases} (x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} \frac{1}{\Delta(x)}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n) \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{\gamma_i^{-1}} -\frac{1}{\Delta(x)}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n) \end{cases}$$

onde $\Delta(x) = (1 + \sum_i^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ (2.7)

Tomemos então $(z_1, z_2, \dots, z_n) = \varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}) = (\frac{y_1}{y_i}, \frac{y_2}{y_i}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \dots, \frac{y_{n+1}}{y_i})$ como coordenadas locais em \mathcal{U}_i , $i = 1, 2, \dots, n, n+1$

Proposição 2.1.1. *O campo \tilde{X} em \mathcal{U}_1 , nas coordenadas locais $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, é definida por*

$$\tilde{X}(z) = \frac{1}{\Delta(z)^{m-1}}(\tilde{P}_1 - z_1\tilde{P}_2, \tilde{P}_3 - z_2\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n - z_{n-1}\tilde{P}_1, -z_n\tilde{P}_1), \quad (2.8)$$

$$\text{onde } \Delta(z) = (1 + \sum_i^n z_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

Demonstração. De fato, se $y \in \mathcal{U}_1 \cap H^+$ teremos que

$$\begin{aligned} d(\varphi_1)_y(\tilde{X}(y)) &= d(\varphi_1)_y(y_{n+1}^{m-1}\hat{X}(y)) = \\ &= y_{n+1}^{m-1}d(\varphi_1)_y[(d\Phi^+)_x X(x)] = \\ &= y_{n+1}^{m-1}d(\varphi_1 \circ \Phi^+)_x X(x) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Mas notemos que $(\varphi_1 \circ \Phi^+)(x) = \varphi_1(\frac{1}{\Delta(x)}(x_1, \dots, x_n, 1)) = \frac{1}{x_1}(x_2, x_3, \dots, x_n, 1)$, de onde obtemos

$$d(\varphi_1 \circ \Phi^+)_x(X(x)) = \begin{bmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{x_3}{x_1^2} & 0 & \frac{1}{x_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{x_n}{x_1^2} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{x_1} \\ -\frac{1}{x_1^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \\ P_{n-1}(x) \\ P_n(x) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Isso ocorre se, e somente se

$$d(\varphi_1 \circ \Phi^+)_x(X(x)) = \frac{1}{x_1^2}(-x_2P_1 + x_1P_2, -x_3P_1 + x_1P_3, \dots, -x_nP_1 + x_1P_n, -P_1)$$

onde $P_i = P_i(x)$

Como havíamos tomado anteriormente $(z_1, \dots, z_n) = (\frac{y_1}{y_i}, \frac{y_2}{y_i}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, \dots, \frac{y_{n+1}}{y_i})$, temos que, para $i = 1$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{y_1}{y_{n+1}} = \frac{1}{z_n} \\ x_2 &= \frac{y_2}{y_{n+1}} = \frac{y_2 y_1}{y_1 y_{n+1}} = z_1 \frac{y_1}{y_{n+1}} = \frac{z_1}{z_n} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{z_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

Daí,

$$d(\varphi_1 \circ \Phi^+)_x X(x) = z_n(-z_1 P_1 + P_2, -z_2 P_1 + P_3, \dots, -z_{n-1} P_1 + P_n, -z_n P_1), \quad (2.11)$$

onde $P_i = P_i(\frac{1}{z_n}, \frac{z_1}{z_n}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_n})$.

Ora,

$$y_{n+1} = \frac{1}{\Delta(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{z_n^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{z_i^2}{z_n^2}}} = \frac{z_n}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n z_i^2}} = \frac{z_n}{\Delta(z)}, \quad (2.12)$$

Substituindo 2.11 e 2.12 em 2.9, obtemos

$$d(\varphi_1)_y(\tilde{X}(y)) = \frac{z_n^m}{\Delta(z)^{m-1}}(-z_1 P_1 + P_2, -z_2 P_1 + P_3, \dots, -z_{n-1} P_1 + P_n, -z_n P_1) \quad (2.13)$$

onde $P_i = P_i(\frac{1}{z_n}, \frac{z_1}{z_n}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_n})$. Tomando $\tilde{P}_i(1, z_1, \dots, z_n) = z_n^m P_i(\frac{1}{z_n}, \frac{z_1}{z_n}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_n})$, teremos que

$$d(\varphi_1)_y(\tilde{X}(y)) = \frac{1}{\Delta(z)^{m-1}}(-z_1 \tilde{P}_1 + \tilde{P}_2, -z_2 \tilde{P}_1 + \tilde{P}_3, \dots, -z_{n-1} \tilde{P}_1 + \tilde{P}_n, -z_n \tilde{P}_1).$$

□

A expressão

$$\mathcal{Z}(z_1, z_2, \dots, z_n) = \Delta(z)^{m-1} \cdot d(\varphi_1)_y(\tilde{X}(y)) = (-z_1 \tilde{P}_1 + \tilde{P}_2, -z_2 \tilde{P}_1 + \tilde{P}_3, \dots, -z_{n-1} \tilde{P}_1 + \tilde{P}_n, -z_n \tilde{P}_1)$$

é definida como sendo o campo \tilde{X} em \mathcal{U}_1 nas coordenadas locais (z_1, z_2, \dots, z_n)

Observação 2.1.2.

1. Note que se $y \in \mathcal{U}_1 \cap H^-$ teremos a mesma descrição para a expressão acima, pois $d(\varphi_1 \circ \Phi^-) = d(\varphi_1 \circ \Phi^+)$ e $y_{n+1} = -\frac{1}{\Delta(x)} = -\frac{|z_n|}{\Delta(z)} = \frac{z_n}{\Delta(z)}$, uma vez que $z_n = \frac{y_{n+1}}{y_1} < 0$
2. Nos pontos do equador de S^n, S^{n-1} , teremos que a expressão será a mesma, devido a continuidade de X

3. Para os demais abertos $\mathcal{U}_i, i = 2, \dots, n+1$ os cálculos são bastante similares, não oferecendo, portanto, resistência. Suas expressões são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_2 & : \frac{1}{\Delta(z)^{m-1}}(-z_1\tilde{P}_2 + \tilde{P}_1, -z_2\tilde{P}_2 + \tilde{P}_3, \dots, -z_{n-1}\tilde{P}_2 + \tilde{P}_n, -z_n\tilde{P}_2) \\
 \mathcal{U}_3 & : \frac{1}{\Delta(z)^{m-1}}(-z_1\tilde{P}_3 + \tilde{P}_1, -z_2\tilde{P}_3 + \tilde{P}_2, \dots, -z_{n-1}\tilde{P}_3 + \tilde{P}_n, -z_n\tilde{P}_3) \\
 & \quad \vdots \\
 \mathcal{U}_n & : \frac{1}{\Delta(z)^{m-1}}(-z_1\tilde{P}_n + \tilde{P}_1, -z_2\tilde{P}_n + \tilde{P}_2, \dots, -z_{n-1}\tilde{P}_n + \tilde{P}_{n-1}, -z_n\tilde{P}_n)
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

e $\mathcal{U}_{n+1} : \frac{1}{\Delta(z)^{m-1}}(P_1, P_2, \dots, P_n).$

4. Em \mathcal{U}_{n+1} , $\tilde{\mathcal{Z}}(z_1, \dots, z_n) = (P_1, \dots, P_n)$, pois $\mathcal{U}_{n+1} = H^+$ e $\varphi_{n+1} = (\Phi^+)^{-1}$, donde obtemos $d(\varphi_{n+1} \circ \Phi^+)_x = I$.

5. As expressões em coordenadas locais para $\tilde{X}(y)$, com $y \in \mathcal{V}_i$, são dadas de forma bastante análoga às dadas para $y \in \mathcal{U}_i$, com $i = 1, 2, \dots, n, n+1$. De fato, a expressão para φ_i é a mesma para γ_i , para cada i , e fazendo a mesma análise presente em 2.12, teremos que $y_{n+1} = \frac{|z_n|}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^n z_i^2}} = -\frac{z_n}{\Delta(z)}$ uma vez que $z_n = \frac{y_{n+1}}{y_i} < 0$. Daí,

$$y_{n+1}^{m-1} = \left(-\frac{z_n}{\Delta(z)}\right)^{m-1} = (-1)^{m-1} \left(\frac{z_n}{\Delta(z)}\right)^{m-1}.$$

Logo a expressão de \tilde{X} em \mathcal{V}_i é a mesma que em \mathcal{U}_i , multiplicada por $(-1)^{m-1}$.

Definição 2.1.1. Seja N uma variedade, $S \subset N$ um subconjunto e X um campo de vetores sobre N . Dizemos S é um subconjunto invariante por X , se dado $x \in S$ temos que $\varphi(t, x) \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$, onde φ denota o fluxo de X .

Proposição 2.1.2. Se X é um campo de vetores sobre \mathbb{R}^{n+1} e \tilde{X} sua compactificação, então $S^{n-1} \subset S^n$ é invariante por \tilde{X} .

Demonstração. Seja $\varsigma(t) = (\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_n)$ um fluxo de \tilde{X} dado em coordenadas locais $(\mathcal{U}_i, \varphi_i = (\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_n))$, $i = 1, 2, \dots, n, n+1$, tal que $\varsigma(t_0) \in S^{n-1}$. Se ς é um fluxo de X teremos que ς satisfaz a equação diferencial $x' = \tilde{X}(x)$, ou seja,

$$\varsigma'(t) = \tilde{X}(\varsigma(t)).$$

Assim, em particular, devido a 2.9 teremos:

$$\varsigma'_n(t) = -\varsigma_n(t)\tilde{P}_i(\varsigma_1(t), \dots, \varsigma_{i-1}(t), 1, \varsigma_{i+1}(t), \dots, \varsigma_n(t)) \quad , \varsigma_n(t_0) = 0$$

Mas observe que $\varsigma_n(t) = 0$ é uma solução para a equação acima. Disso segue que $\varsigma(t) \in S^{n-1}$, $\forall t \in I$, onde I é o domínio de ς .

Para as vizinhanças coordenadas \mathcal{V}_i , os cálculos são similares, a menos da multiplicação por $(-1)^{m-1}$ (ver 2.1.2 item 5). \square

2.1.2 A Compactificação de Poincaré para Campos Polinomiais Hamiltonianos

Nosso objetivo nesta seção é caracterizar a compactificação de Poincaré para sistemas polinomiais Hamiltonianos. Para tanto, inicialmente descreveremos a compactificação de Poincaré para o campo polinomial Hamiltoniano em coordenadas cartesianas e, posteriormente, a descreveremos em coordenadas locais.

Teorema 2.1.1. *(Teorema de Euler) Se $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é um polinômio homogêneo de grau r então*

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) p_i = r f(p)$$

Demonstração. Como f é um polinômio homogêneo, temos que

$$f(\kappa x_1, \kappa x_2, \dots, \kappa x_m) = \kappa^r f(x_1, x_2, \dots, x_m). \quad (2.15)$$

Daí, ao derivarmos 2.15 em relação a κ obteremos

$$\frac{d}{d\kappa} f(\kappa x_1, \kappa x_2, \dots, \kappa x_m) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\kappa x_1, \kappa x_2, \dots, \kappa x_m) x_i = r \kappa^{r-1} f(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad \forall \kappa \in \mathbb{R},$$

assim, para $\kappa = 1$ temos o resultado. \square

Definição 2.1.2. *Uma função polinomial $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ é denominada polinomial Hamiltoniana, e $X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial y_{d+1}}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_{2d}}, -\frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial y_d} \right)$ é chamado campo vetorial polinomial Hamiltoniano associado a H .*

Como vimos na seção anterior, a compactificação de Poincaré, \tilde{X} , para um campo polinomial $X = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ é dado por

$$\tilde{X}(y) = \begin{bmatrix} 1 - y_1^2 & -y_1 y_2 & \dots & -y_1 y_n \\ -y_2 y_1 & 1 - y_2^2 & \dots & -y_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_1 y_n & -y_2 y_n & \dots & 1 - y_n^2 \\ -y_{n+1} y_1 & -y_{n+1} y_2 & \dots & -y_{n+1} y_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{P}_1(y) \\ \tilde{P}_2(y) \\ \vdots \\ \tilde{P}_{n-1}(y) \\ \tilde{P}_n(y) \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

onde $\tilde{P}_i(y) = y_{n+1}^m P_i \left(\frac{y_1}{y_{n+1}}, \frac{y_2}{y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{n+1}} \right)$.

Desta forma, para o campo X_H obteremos

$$\tilde{X}_H(y) = \begin{bmatrix} 1 - y_1^2 & -y_1y_2 & \cdots & -y_1y_n \\ -y_2y_1 & 1 - y_2^2 & \cdots & -y_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_1y_n & -y_2y_n & \cdots & 1 - y_n^2 \\ -y_{n+1}y_1 & -y_{n+1}y_2 & \cdots & -y_{n+1}y_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_{d+1}}(y) \\ \vdots \\ \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_{2d}}(y) \\ -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_1}(y) \\ \vdots \\ -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_d}(y) \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

com $\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_i}(y) = y_{n+1}^m \frac{\partial H}{\partial y_i} \left(\frac{y_1}{y_{n+1}}, \frac{y_2}{y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{n+1}} \right)$.

Decorre de 2.17 que a primeira coordenada do campo \tilde{X}_H é

$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_{d+1}} - y_1^2 \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_{d+1}} - y_1y_2 \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_{d+2}} - \cdots - y_1y_d \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_{2d}} + y_1y_{d+1} \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_1} + \cdots + y_1y_{2d} \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_d}, \quad n = 2d.$$

Note que y_1 é um fator comum a todas as parcelas, daí podemos escrever

$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_{d+1}} + y_1 \sum_{j=1}^d \left(y_{j+d} \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_j} - y_j \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_{j+d}} \right).$$

Segue para a i -ésima coordenada que y_i é o fator comum. Desta forma, podemos escrever a i -ésima coordenada do campo \tilde{X}_H na forma

$$(\tilde{X}_H)_i = \begin{cases} \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_{d+i}} + \lambda y_i, & \text{se } 1 \leq i \leq d \\ -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_{i-d}} + \lambda y_i & \text{se } d+1 \leq i \leq 2d \\ \lambda y_{n+1}, & \text{se } i = 2d+1 \end{cases},$$

onde $\lambda = \sum_{j=1}^d \left(y_{j+d} \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_j} - y_j \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_{j+d}} \right)$.

Note que o sinal negativo, presente na coordenada de $(\tilde{X}_H)_i$, para $i \geq d+1$, provém da negatividade das coordenadas $(X_H)_i$, para $i \geq d+1$.

Proposição 2.1.3. $\{H^* = 0\}$ é invariante por \tilde{X}_H , onde

$$H^*(y_1, \dots, y_{n+1}) := y_{n+1}^{m+1} H \left(\frac{y_1}{y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{n+1}} \right).$$

Demonstração. Devemos provar que se $\varphi(t_0) \in \{H^* = 0\}$ temos que $\varphi(t, x) \in \{H^* = 0\} \forall t \in I$ onde φ é o fluxo de \tilde{X}_H e I o domínio de φ . De fato, dada a equação $j(t) = H^*(\varphi(t))$ teremos que,

$$\begin{aligned}
 j'(t) &= \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial H^*}{\partial y_i}(\varphi(t))\varphi'_i(t) + \frac{\partial H^*}{\partial y_{i+d}}(\varphi(t))\varphi'_{i+d}(t) \right) + \frac{\partial H^*}{\partial y_{n+1}}(\varphi(t))\varphi'_{n+1}(t) = \\
 &= \sum_{i=1}^d \left[\frac{\partial H^*}{\partial y_i}(\varphi(t)) \left(\frac{\partial H^*}{\partial y_{i+d}}(\varphi(t)) + \lambda\varphi_i(t) \right) + \frac{\partial H^*}{\partial y_{i+d}}(\varphi(t)) \left(-\frac{\partial H^*}{\partial y_i}(\varphi(t)) + \lambda\varphi_{i+d}(t) \right) \right] + \\
 &+ \frac{\partial H^*}{\partial y_{n+1}}(\varphi(t))\lambda\varphi_{n+1}(t) = \\
 &= \lambda \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{\partial H^*}{\partial y_i}(\varphi(t))\varphi_i(t) \right). \tag{2.18}
 \end{aligned}$$

Utilizando o Teorema 2.1.1 obtemos,

$$\lambda \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{\partial H^*}{\partial y_i}(\varphi(t))\varphi_i(t) \right) = (m+1)\lambda H^*(\varphi(t)) = (m+1)\lambda j(t)$$

Logo $j'(t) = (m+1)\lambda j(t)$. Ora, exigir que $\varphi(t_0) \in \{H^* = 0\}$ é equivalente a dizer que $j(t_0) = 0$. Então temos uma equação diferencial ordinária onde

$$\begin{cases} j'(t) = (m+1)\lambda j(t) \\ j(t_0) = 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

que possui solução $j(t) = 0$.

Desta forma, $\varphi(t) \in \{H^* = 0\}, \forall t \in I$. Logo $\{H^* = 0\}$ é invariante sobre \tilde{X}_H

□

As Coordenadas Locais para o campo X_H

Sejam $(\mathcal{U}_i, \varphi_i), (\mathcal{V}_i, \gamma_i)$ cartas locais definidas como na seção anterior e X_H um campo vetorial polinomial hamiltoniano. Como vimos, a expressão para o campo \tilde{X} em \mathcal{U}_1 é dada por $(-z_1\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2, -z_2\tilde{P}_1 + \tilde{P}_3, \dots, -z_{n-1}\tilde{P}_1 + \tilde{P}_n, -z_n\tilde{P}_1)$. Então, para o campo \tilde{X}_H , teremos³

$$\begin{aligned}
 &\left(-z_1 \frac{\partial H^*}{\partial y_{d+1}} + \frac{\partial H^*}{\partial y_{d+2}}, \dots, -z_{d-1} \frac{\partial H^*}{\partial y_{d+1}} + \frac{\partial H^*}{\partial y_{2d}}, -z_d \frac{\partial H^*}{\partial y_{d+1}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial H^*}{\partial y_1}, \dots, -z_{2d-1} \frac{\partial H^*}{\partial y_{d+1}} - \frac{\partial H^*}{\partial y_d}, -z_{2d} \frac{\partial H^*}{\partial y_{d+1}} \right) \Bigg|_{(1, z_1, \dots, z_n)}, \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

onde $z_i = \frac{y_{i+1}}{y_1}, i = 1, 2, \dots, n$.

Observe que esta expressão para as coordenadas locais ainda depende explicitamente das coordenadas cartesianas. Portanto, nosso objetivo agora é escrever as coordenadas

³Note que $\frac{\partial H^*}{\partial y_i} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y_i}$

do campo \tilde{X}_H apenas nas coordenadas locais, em \mathcal{U}_1 :

Pela definição de H^* nós temos que

$$\begin{aligned} H^* \left(1, \frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_{n+1}}{y_1} \right) &= \left(\frac{y_{n+1}}{y_1} \right)^{m+1} H \left(\frac{y_1}{y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{n+1}} \right) = \\ &= \frac{1}{y_1^{m+1}} H^*(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Daí, tomando

$$\xi(z_1, \dots, z_n) = H^*(1, z_1, \dots, z_n)$$

teremos que $H^*(y_1, \dots, y_{n+1}) = y_1^{m+1} \xi(z_1, \dots, z_n)$.

Logo, ao derivarmos em relação a y_1 , obteremos⁴

$$\frac{\partial H^*}{\partial y_1}(y_1, \dots, y_{n+1}) = (m+1)y_1^m \xi(z_1, z_2, \dots, z_n) + y_1^{m+1} \sum_{i=1}^n \frac{-y_{i+1}}{y_1^2} \frac{\partial \xi}{\partial z_i}(z_1, \dots, z_n).$$

O valor da primeira entrada dessa matriz é justamente a segunda parcela da derivada de ξ em relação a y_1 .

Derivando ξ em relação a y_i , teremos que

$$\frac{\partial H^*}{\partial y_i}(y_1, \dots, y_{n+1}) = y_1^m \frac{\partial \xi}{\partial z_{i-1}}(z_1, \dots, z_n), i = 2, \dots, n$$

Assim,

$$\frac{\partial H^*}{\partial y_1}(1, z_1, \dots, z_n) = (m+1)\xi(z_1, z_2, \dots, z_n) - \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial \xi}{\partial z_i}(z_1, \dots, z_n)$$

e

$$\frac{\partial H^*}{\partial y_i}(1, z_1, \dots, z_n) = \frac{\partial \xi}{\partial z_{i-1}}(z_1, \dots, z_n)$$

Substituindo as expressões obtidas para $\frac{\partial H^*}{\partial y_1}$, $\frac{\partial H^*}{\partial y_i}$, na expressão 2.20, teremos a representação, em coordenadas locais, para o campo \tilde{X}_H é

$$\begin{aligned} &\left(-z_1 \frac{\partial \xi}{\partial z_d} + \frac{\partial \xi}{\partial z_{d+1}}, \dots, -z_{d-1} \frac{\partial \xi}{\partial z_d} + \frac{\partial \xi}{\partial z_{2d-1}}, -(m+1)\xi + \sum_{i=1, i \neq d}^n z_i \frac{\partial \xi}{\partial z_i}, \right. \\ &\left. , z_{d+1} \frac{\partial \xi}{\partial z_d} - \frac{\partial \xi}{\partial z_1}, \dots, -z_{2d-1} \frac{\partial \xi}{\partial z_d} - \frac{\partial \xi}{\partial z_{d-1}}, -z_{2d} \frac{\partial \xi}{\partial z_d} \right) \Bigg|_{(1, z_1, \dots, z_n)}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Analisemos agora as expressões em coordenadas locais para as demais vizinhanças $\mathcal{U}_i, i = 2, \dots, n+1$:

⁴para verificar a segunda parcela da igualdade acima, basta calcular $D[\xi(\varphi_1(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}))]$, onde $\varphi_1(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) = \left(\frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_{n+1}}{y_1} \right)$

- Em \mathcal{U}_2 temos que,

$$H^* \left(\frac{y_1}{y_2}, 1, \frac{y_3}{y_2}, \dots, \frac{y_{n+1}}{y_2} \right) = \left(\frac{y_{n+1}}{y_2} \right)^{m+1} H \left(\frac{y_1}{y_{n+1}}, \frac{y_2}{y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{n+1}} \right) = \frac{1}{y_2^{m+1}} H^*(y_1, \dots, y_{n+1}).$$

Para proporcionar uniformidade na notação para a expressão em coordenadas locais definamos $\xi(z_1, \dots, z_n) = H^*(z_1, 1, \dots, z_n)$, apesar da diferença na lei de formação de ξ em \mathcal{U}_1 e \mathcal{U}_2 . Desta forma

$$H^*(y_1, \dots, y_{n+1}) = y_2^{m+1} \xi(z_1, \dots, z_n).$$

Ao derivarmos H^* relação a cada uma das coordenadas obteremos que

$$\frac{\partial H^*}{\partial y_i}(y_1, \dots, y_{n+1}) = \frac{\partial}{\partial y_i} [y_2^{m+1}] \cdot \xi(z_1, \dots, z_n) + y_2^{m+1} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y_i}(z_1, \dots, z_n).$$

Mas a diferencial de ξ é dada por

$$\begin{aligned} D[\xi(z_1, z_2, \dots, z_n)] &= D[\xi(\varphi_2(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}))] & (2.23) \\ &= [D\xi](\varphi_2(y_1, y_2, \dots, y_n)) \cdot D[\varphi_2(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})] = \\ &= [D\xi](z_1, z_2, \dots, z_n) \cdot [D\varphi_2](y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial z_1} & \frac{\partial \xi}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial \xi}{\partial z_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{y_2} & -\frac{y_1}{y_2^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{y_3}{y_2^2} & \frac{1}{y_2} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & O & \ddots & \ddots & O & \dots & O \\ 0 & -\frac{y_{i+1}}{y_2^2} & 0 & \dots & \frac{1}{y_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & O & \dots & O & \ddots & O & O \\ 0 & -\frac{y_{n+1}}{y_2^2} & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{y_2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial z_1} \cdot \frac{1}{y_2} & - \left(\frac{\partial \xi}{\partial z_1} \cdot \frac{y_1}{y_2^2} + \sum_{j=2}^n \frac{\partial \xi}{\partial z_j} \cdot \frac{y_{j+1}}{y_2^2} \right) & \frac{\partial \xi}{\partial z_2} \cdot \frac{1}{y_2} & \dots & \frac{\partial \xi}{\partial z_n} \cdot \frac{1}{y_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^*}{\partial y_1} &= y_2^m \frac{\partial \xi}{\partial z_1} & (2.24) \\ \frac{\partial H^*}{\partial y_2} &= (m+1)y_2^m \cdot \xi(z_1, \dots, z_n) - y_2^{m+1} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z_1} \cdot \frac{y_1}{y_2^2} + \sum_{j=2}^n \frac{\partial \xi}{\partial z_j} \cdot \frac{y_{j+1}}{y_2^2} \right) \\ \frac{\partial H^*}{\partial y_i} &= y_2^m \frac{\partial \xi}{\partial z_{i-1}}, i = 3, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Como vimos anteriormente, as coordenadas para o campo $X = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ em \mathcal{U}_2 é $(-z_1 \tilde{P}_2 + \tilde{P}_1, -z_2 \tilde{P}_2 + \tilde{P}_3, \dots, -z_{n-1} \tilde{P}_2 + \tilde{P}_n, -z_n \tilde{P}_2)$. Segue então que as

coordenadas locais para o campo \tilde{X}_H são

$$\left(\begin{aligned} & \frac{\partial \xi}{\partial z_d} - z_1 \frac{\partial \xi}{\partial z_{d+1}}, \frac{\partial \xi}{\partial z_{d+2}} - z_2 \frac{\partial \xi}{\partial z_{d+1}}, \dots, -z_{d-1} \frac{\partial \xi}{\partial z_{d+1}} + \frac{\partial \xi}{\partial z_{2d-1}} - z_d \frac{\partial \xi}{\partial z_{d+1}} - \\ & - \frac{\partial \xi}{\partial z_1}, -(m+1)\xi + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq d+1}} z_i \frac{\partial \xi}{\partial z_i}, \dots, -z_{2d-1} \frac{\partial \xi}{\partial z_{d+1}} - \frac{\partial \xi}{\partial z_{d-1}}, -z_{2d} \frac{\partial \xi}{\partial z_{d+1}} \end{aligned} \right) \Big|_{(z_1, 1, \dots, z_n)} \quad (2.25)$$

Então, para $\mathcal{U}_i, i = 3, \dots, d-1, d$, teremos que

$$\xi(z_1, z_2, \dots, z_n) = H^*(z_1, \dots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \dots, z_n),$$

de onde se deduz que as expressões em coordenadas locais são análogas às obtidas anteriormente. Em particular, para $i = d$, obtemos

$$\left(\begin{aligned} & \frac{\partial \xi}{\partial z_d} - z_1 \frac{\partial \xi}{\partial z_{2d-1}}, \frac{\partial \xi}{\partial z_{d+1}} - z_2 \frac{\partial \xi}{\partial z_{2d-1}}, \dots, -z_{d-1} \frac{\partial \xi}{\partial z_{2d-1}} + \frac{\partial \xi}{\partial z_{2d-2}} - z_d \frac{\partial \xi}{\partial z_{2d-1}} - \\ & - \frac{\partial \xi}{\partial z_1}, -z_{d+1} \frac{\partial \xi}{\partial z_{2d-1}} - \frac{\partial \xi}{\partial z_2}, \dots, -(m+1)\xi + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2d-1}}^n z_i \frac{\partial \xi}{\partial z_i}, -z_{2d} \frac{\partial \xi}{\partial z_{2d-1}} \end{aligned} \right) \quad (2.26)$$

Para os demais valores de i , temos uma mudança na disposição dos termos nas coordenadas em virtude da própria natureza do campo X_H . Para $i = d+1$, temos:

$$\left(\begin{aligned} & (m+1)\xi - \sum_{i=2}^n z_i \frac{\partial \xi}{\partial z_i}, z_2 \frac{\partial \xi}{\partial z_1} + \frac{\partial \xi}{\partial z_{d+1}}, \dots, z_d \frac{\partial \xi}{\partial z_1} + \frac{\partial \xi}{\partial z_{2d-1}}, z_{d+1} \frac{\partial \xi}{\partial z_1} - \frac{\partial \xi}{\partial z_2}, \\ & z_{d+2} \frac{\partial \xi}{\partial z_1} - \frac{\partial \xi}{\partial z_3}, \dots, z_{2d-1} \frac{\partial \xi}{\partial z_1} - \frac{\partial \xi}{\partial z_d}, z_{2d} \frac{\partial \xi}{\partial z_1} \end{aligned} \right). \quad (2.27)$$

- Em $\mathcal{U}_{d+2}, \dots, \mathcal{U}_{2d-1}$ as expressões são análogas.
- Em \mathcal{U}_{2d} temos,

$$\left(\begin{aligned} & z_1 \frac{\partial \xi}{\partial z_d} + \frac{\partial \xi}{\partial z_{d+1}}, z_2 \frac{\partial \xi}{\partial z_d} + \frac{\partial \xi}{\partial z_{d+2}}, \dots, z_{d-1} \frac{\partial \xi}{\partial z_d} + \frac{\partial \xi}{\partial z_{d-1}}, (m+1)\xi - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq d}}^n z_i \frac{\partial \xi}{\partial z_i}, z_{d+1} \frac{\partial \xi}{\partial z_d} - \\ & - \frac{\partial \xi}{\partial z_1}, \dots, z_{2d-1} \frac{\partial \xi}{\partial z_d} - \frac{\partial \xi}{\partial z_{d-1}}, z_{2d} \frac{\partial \xi}{\partial z_d} \end{aligned} \right). \quad (2.28)$$

Para \mathcal{U}_{2d+1} , temos, pela observação 2.1.2, que que as coordenadas locais coincidem com o próprio campo X_H . Além disso $H^*(y_1, \dots, y_n) = y_{n+1}^{m+1} \xi(z_1, \dots, z_n)$ e portanto $\xi = H$

Segue da observação 2.1.2, item 5, que as expressões em coordenadas locais para o campo \tilde{X}_H nas vizinhanças \mathcal{V}_i são as mesmas obtidas acima, alteradas apenas pelo fator $(-1)^{m-1}$.

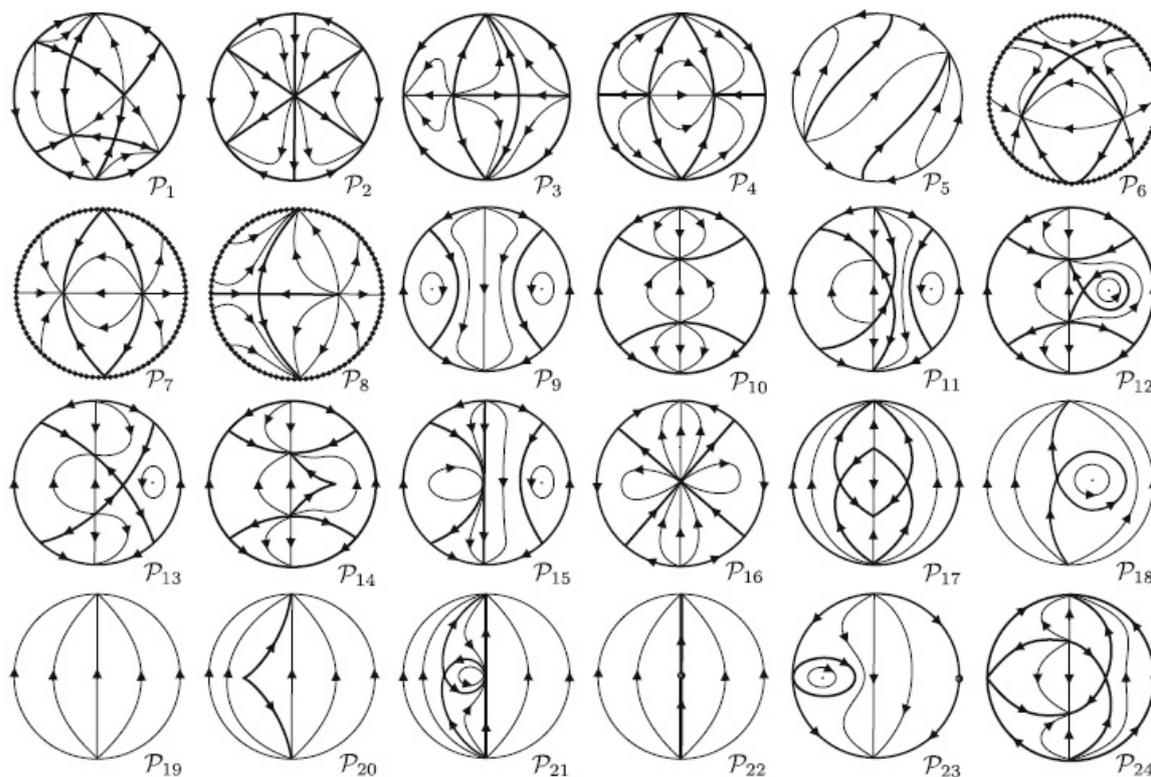
Capítulo 3

Campos Vetoriais Quadráticos

Neste capítulo classificamos o retrato de fase global no disco de Poincaré dos campos vetoriais polinomiais quadráticos que possuem integral primeira H , racional de grau 3, ou seja,

$$H = \frac{H_1}{H_2} = \frac{\sum_{i+j=0}^3 e_{ij}x^i y^j}{\sum_{i+j=0}^3 a_{ij}x^i y^j} \quad (3.1)$$

onde $e_{30}^2 + e_{21}^2 + e_{12}^2 + e_{03}^2 + a_{30}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{03}^2 \neq 0$, com H_1, H_2 não constantes. Nosso objetivo consiste em provar que existem 31 possibilidades para o retrato de fase de um campo vetorial quadrático não homogêneo sobre o disco \mathbb{D}^2 .



Fonte: Referência [10]

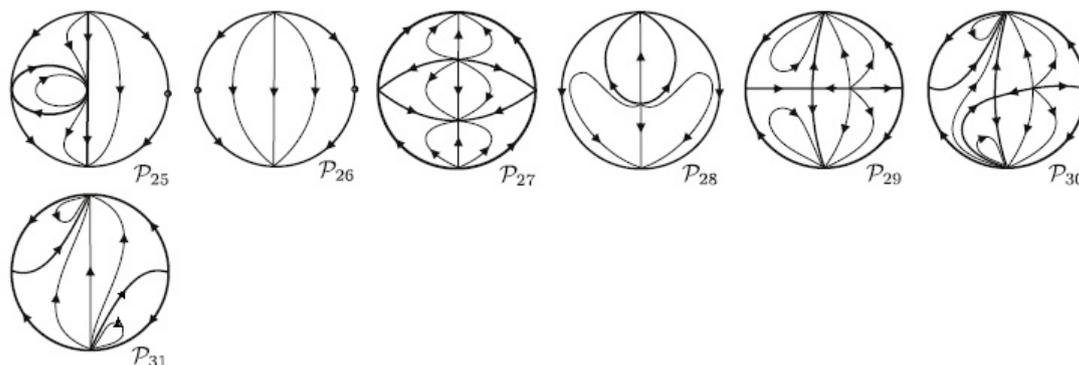


Figura 3.1: Retratos de Fase

Fonte: Referência [10]

Teorema 3.0.2. *O retrato de fase no disco de Poincaré de qualquer campo vetorial polinomial quadrático não homogêneo (\bar{P}, \bar{Q}) , com uma integral primeira racional de grau 3 e com \bar{P} e \bar{Q} primos entre si, ou o retrato de fase com sentido reverso em todas as órbitas, é topologicamente equivalente a um dos 31 retratos de fase descritos na figura acima.*

Ou seja, qualquer campo vetorial quadrático não homogêneo com integral primeira racional de grau 3 será topologicamente equivalente a um desses 31 retratos de fase, a menos do sentido.

Consideremos o sistema polinomial de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (3.2)$$

e $m = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}$ o grau do sistema 3.2. Um campo vetorial polinomial quadrático é um campo vetorial polinomial no qual $m = 2$.

Definição 3.0.3. *Seja U um aberto denso em \mathbb{R}^2 . Dizemos que uma função não constante $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma integral primeira do sistema 3.2 em U se $H(x(t), y(t))$ é constante para todos os valores de t nos quais $(x(t), y(t))$ é uma solução do sistema acima.*

Lema 3.0.1. *Seja $X = (P, Q)$ um campo vetorial polinomial e $R = \text{MDC}(P, Q)$, onde MDC é o Máximo divisor Comum. Então H é integral primeira para $X = (P, Q)$ se e somente se H é integral primeira para o campo $\bar{X} = (\frac{P}{R}, \frac{Q}{R})$*

Demonstração. Vimos anteriormente que H é integral primeira para uma campo $X = (P, Q)$ se e somente se $P \frac{\partial H}{\partial x} + Q \frac{\partial H}{\partial y} = 0$. Então $\frac{P}{R} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{Q}{R} \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{R} (P \frac{\partial H}{\partial x} + Q \frac{\partial H}{\partial y}) = 0$. Logo H também é integral primeira para \bar{X} . A recíproca é imediata. \square

Definição 3.0.4. *Seja $f \in \mathbb{R}[x, y]$, f não identicamente nula. A curva algébrica $f(x, y) = 0$ é uma curva algebricamente invariante do sistema polinomial 3.2 se para algum polinômio $K \in \mathbb{R}[x, y]$ temos*

$$X(f) = P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} = Kf$$

O polinômio K é chamado cofator da curva algébrica invariante $f = 0$.

Proposição 3.0.4. *Seja $f, g \in \mathbb{R}[x, y]$. Suponhamos que f e g sejam relativamente primos em $\mathbb{R}[x, y]$. Então para um sistema polinomial 3.2, $fg = 0$ é uma curva algébrica invariante de cofator K_{fg} se e somente se $f = 0$ e $g = 0$ são curvas algébricas invariantes de cofatores K_f e K_g , respectivamente. Além disso $K_{fg} = K_f + K_g$.*

Demonstração. Utilizando a definição de $X(f)$, temos que $X(fg) = X(f)g + X(g)f$. Suponhamos que $fg = 0$ é uma curva algebricamente invariante do sistema 3.2 com cofator K_{fg} . Então temos que $X(fg) = K_{fg}fg = (Xf)g + (Xg)f$. Como f e g são primos relativos, temos que f divide Xf e g divide Xg . Denotando por K_f o quociente $\frac{Xf}{f}$ e por K_g o quociente $\frac{Xg}{g}$. Então $f = 0$ e $g = 0$ são curvas algebricamente invariantes do sistema com cofatores K_f e K_g , respectivamente, onde $K_{fg} = K_f + K_g$.

A recíproca é imediata. □

Proposição 3.0.5. *H é uma integral primeira para 3.2 se e somente se $P(x, y)\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + Q(x, y)\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ aberto.*

Demonstração. Seja $(x_0, y_0) \in U$. Considere uma solução $(x(t), y(t))$ de 3.2 passando por (x_0, y_0) , em $t = 0$. Utilizando a regra da cadeia, segue o resultado. A recíproca é imediata. □

Observação 3.0.3.

Desta proposição também podemos inferir que se H é integral primeira para o sistema 3.2 então Hk , $H + k$ e $\frac{1}{H}$ também o são, com k constante real.

Proposição 3.0.6. *H é integral primeira do sistema 3.2 se e somente se, existe R tal que $P = -\frac{\partial H}{\partial y}R(x, y)$ e $Q = \frac{\partial H}{\partial x}R(x, y)$.*

Demonstração. De fato, se H é integral primeira de 3.2, pela Proposição anterior, temos que $P(x, y)\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + Q(x, y)\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = 0$. Daí, para cada (x_0, y_0) pertencente ao domínio de H , teremos que o vetor $(P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0))$ é ortogonal ao vetor $\left(\frac{\partial H}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$. Por outro lado, $\left(-\frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0), \frac{\partial H}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$ também é ortogonal ao vetor $\left(\frac{\partial H}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$. Portanto existe R tal que $(P(x, y), Q(x, y)) = R(x, y) \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \frac{\partial H}{\partial x}(x, y)\right)$. □

Vimos anteriormente que se $|DX(0, 0)| > 0$ e $tr(0, 0) = 0$, o ponto é um centro ou um foco fraco. Provaremos então que sob certas condições $(0, 0)$ não pode ser do tipo foco.

Proposição 3.0.7. *Seja X um campo vetorial polinomial planar com $H = \frac{H_1}{H_2}$ sua integral primeira, onde $H_1, H_2 \in \mathbb{R}[x, y]$. Se $(0, 0)$ é uma singularidade finita tal que $|DX(0, 0)| > 0$ e $tr(0, 0) = 0$, então $(0, 0)$ é um centro.*

Demonstração. Como as curvas de nível $H = k$, com $k \in \mathbb{R}$, $H_1 = 0$ e $H_2 = 0$ determinam todas são curvas invariantes de X , que são soluções, podemos tomar uma solução do sistema que passe pelo ponto $(0, 0)$. Se $(0, 0)$ fosse um foco, teríamos que as intercessões desta solução com a reta $y = 0$ determinaria um polinômio na variável x , que possui um número finito de raízes, o que é uma contradição, pois a espiral intercepta a reta $y = 0$ em infinitos pontos. Assim não podemos ter uma espiral como trajetória de um campo vetorial que possui integral primeira na forma dada por H . \square

3.1 Caracterização das Integrais Primeiras Racionais de Grau 3

Seja $X = (P, Q)$ um campo vetorial polinomial com integral primeira racional H de grau 3, como em 3.1, onde $P = (\frac{\partial H}{\partial y})H_2^2$ e $Q = (-\frac{\partial H}{\partial x})H_2^2$. Então

$$\begin{aligned}
P(x, y) &= (a_{21}b_{30} - a_{30}b_{21})x^5 + (a_{03}b_{12} - a_{12}b_{03})xy^4 & (3.3) \\
&+ (-a_{21}b_{12} + 3a_{03}b_{30} + a_{12}b_{21} - 3a_{30}b_{03})x^3y^2 + (-2a_{21}b_{03} + 2a_{03}b_{21})x^2y^3 \\
&+ (2a_{12}b_{30} - 2a_{30}b_{12})x^4y + (-a_{30}b_{11} - a_{20}b_{21} + a_{21}b_{20} + a_{11}b_{30})x^4 \\
&+ (-a_{02}b_{03} + a_{03}b_{02})y^4 + (-2a_{11}b_{03} + 2a_{03}b_{11})xy^3 \\
&+ (-2a_{30}b_{02} - 2a_{20}b_{12} + 2a_{02}b_{30} + 2a_{12}b_{20})x^3y \\
&+ (-3a_{20}b_{03} + 3a_{03}b_{20} + a_{12}b_{11} + a_{02}b_{21} - a_{21}b_{02} - a_{11}b_{12})x^2y^2 \\
&+ (-a_{20}b_{11} - a_{30}b_{01} + a_{21}b_{10} + a_{11}b_{20} - a_{10}b_{21} + a_{01}b_{30})x^3 \\
&+ (2a_{12}b_{10} + 2a_{02}b_{20} - 2a_{10}b_{12} - 2a_{20}b_{02})x^2y + (-2a_{01}b_{03} + 2a_{03}b_{01})y^3 \\
&+ (3a_{03}b_{10} - a_{01}b_{12} + a_{02}b_{11} + a_{12}b_{01} - a_{11}b_{02} - 3a_{10}b_{03})xy^2 \\
&+ (2a_{02}b_{10} - 2a_{10}b_{02} + 2a_{12}b_{00} - 2a_{00}b_{12})xy \\
&+ (-a_{10}b_{11} - a_{00}b_{21} - a_{20}b_{01} + a_{21}b_{00} + a_{11}b_{10} + a_{01}b_{20})x^2 \\
&+ (-a_{01}b_{02} + a_{02}b_{01} - 3a_{00}b_{03} + 3a_{03}b_{00})y^2 + (2a_{02}b_{00} - 2a_{00}b_{02})y \\
&+ (a_{01}b_{10} - a_{10}b_{01} + a_{11}b_{00} - a_{00}b_{11})x + (a_{01}b_{00} - a_{00}b_{01}) \\
Q(x, y) &= -((a_{12}b_{03} - a_{03}b_{12})y^5 + (a_{30}b_{21} - a_{21}b_{30})yx^4 & (3.4) \\
&+ (-a_{12}b_{21} + 3a_{30}b_{03} + a_{21}b_{12} - 3a_{03}b_{30})y^3x^2 + (-2a_{12}b_{30} + 2a_{30}b_{12})y^2x^3 \\
&+ (2a_{21}b_{03} - 2a_{03}b_{21})y^4x + (-a_{03}b_{11} - a_{02}b_{12} + a_{12}b_{02} + a_{11}b_{03})y^4 \\
&+ (-a_{20}b_{30} + a_{30}b_{20})x^4 + (-2a_{11}b_{30} + 2a_{30}b_{11})yx^3 \\
&+ (-2a_{03}b_{20} - 2a_{02}b_{21} + 2a_{20}b_{03} + 2a_{21}b_{02})y^3x \\
&+ (-3a_{02}b_{30} + 3a_{30}b_{02} + a_{21}b_{11} + a_{20}b_{12} - a_{12}b_{20} - a_{11}b_{21})y^2x^2 \\
&+ (-a_{02}b_{11} - a_{03}b_{10} + a_{12}b_{01} + a_{11}b_{02} - a_{01}b_{12} + a_{10}b_{03})y^3 \\
&+ (2a_{21}b_{01} + 2a_{20}b_{02} - 2a_{01}b_{21} - 2a_{02}b_{20})y^2x + (-2a_{10}b_{30} + 2a_{30}b_{10})x^3 \\
&+ (3a_{30}b_{01} - a_{10}b_{21} + a_{20}b_{11} + a_{21}b_{10} - a_{11}b_{20} - 3a_{01}b_{30})yx^2 \\
&+ (2a_{20}b_{01} - 2a_{01}b_{20} + 2a_{21}b_{00} - 2a_{00}b_{21})xy \\
&+ (-a_{01}b_{11} - a_{00}b_{12} - a_{02}b_{10} + a_{12}b_{00} + a_{11}b_{01} + a_{10}b_{02})y^2 \\
&+ (-a_{10}b_{20} + a_{20}b_{10} - 3a_{00}b_{30} + 3a_{30}b_{00})x^2 + (2a_{20}b_{00} - 2a_{00}b_{20})x \\
&+ (a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10} + a_{11}b_{00} - a_{00}b_{11})y + (a_{10}b_{00} - a_{00}b_{10}).
\end{aligned}$$

Com isso, observamos que nem todo o quociente de polinômios do terceiro grau tem como campo vetorial associado um campo de grau 2. Logo, temos duas possibilidades a considerar para caracterizar estes campos. Uma seria igualar a zero os coeficientes dos termos de grau maior que 2 e obter quais tipos de integrais primeiras tem campos associados com as características requeridas; e a outra seria quando P e Q possuem um fator R em comum de grau 1,2 ou 3 e o grau máximo entre $\frac{P}{R}$ e $\frac{Q}{R}$ é 2. A primeira possibilidade é bastante intuitiva, mas verificaremos que ela não é possível. Portanto nos restará apenas a segunda possibilidade, que nos fornece condições de classificar os campos vetoriais quadráticos.

Seja H a integral primeira de grau 3 de um campo vetorial polinomial quadrático $X = (P, Q)$, onde P, Q são dados por 3.3.

Proposição 3.1.1. *Todos os campos vetoriais X obtidos quando igualamos a zero os coeficientes de grau 3, 4 e 5 de P e Q não tem integral primeira racional de grau 3.*

Demonstração. De fato, ao igualarmos a zero os coeficientes dos termos de grau 3, 4 e 5 obteremos 28 equações

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{12}b_3 - a_3b_{12} = 0 \\ -a_3b_{11} + a_{12}b_2 - a_2b_{12} + a_{11}b_3 = 0 \\ -2a_3b_{21} + 2a_{21}b_3 = 0 \\ -3a_3b_{30} + 3a_{30}b_3 - a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} = 0 \\ a_{10}b_3 + a_{12}b_1 - a_3b_{10} + a_{11}b_2 - a_2b_{11} - a_1b_{12} = 0 \\ -2a_2b_{21} + 2a_{20}b_3 + 2a_{21}b_2 - 2a_3b_{20} = 0 \\ a_{21}b_{11} - a_{11}b_{21} + 3a_{30}b_2 - 3a_2b_{30} - a_{12}b_{20} + a_{20}b_{12} = 0 \\ 2a_{21}b_1 - 2a_2b_{20} - 2a_1b_{21} + 2a_{20}b_2 = 0 \\ 2a_{30}b_{12} - 2a_{12}b_{30} = 0 \\ -a_{10}b_{21} + a_{20}b_{11} - 3a_1b_{30} - a_{11}b_{20} + 3a_{30}b_1 + a_{21}b_{10} = 0 \\ -2a_{11}b_{30} + 2a_{30}b_{11} = 0 \\ -a_{21}b_{30} + a_{30}b_{21} = 0 \\ -a_{20}b_{30} + a_{30}b_{20} = 0 \\ 2a_{30}b_{10} - 2a_{10}b_{30} = 0 \\ a_{21}b_{30} - a_{30}b_{21} = 0 \\ -a_{30}b_{11} - a_{20}b_{21} + a_{21}b_{20} + a_{11}b_{30} = 0 \\ -a_{20}b_{11} - a_{30}b_1 + a_{21}b_{10} + a_{11}b_{20} - a_{10}b_{21} + a_1b_{30} = 0 \\ a_3b_{12} - a_{12}b_3 = 0 \\ -a_2b_3 + a_3b_2 = 0 \\ -2a_{21}b_3 + 2a_3b_{21} = 0 \\ -2a_{11}b_3 + 2a_3b_{11} = 0 \\ -2a_1b_3 + 2a_3b_1 = 0 \\ 2a_{12}b_{30} - 2a_{30}b_{12} = 0 \\ -2a_{30}b_2 - 2a_{20}b_{12} + 2a_2b_{30} + 2a_{12}b_{20} = 0 \\ 2a_{12}b_{10} + 2a_2b_{20} - 2a_{10}b_{12} - 2a_{20}b_2 = 0 \\ -a_{21}b_{12} + 3a_3b_{30} + a_{12}b_{21} - 3a_{30}b_3 = 0 \\ -3a_{20}b_3 + 3a_3b_{20} + a_{12}b_{11} + a_2b_{21} - a_{21}b_2 - a_{11}b_{12} = 0 \\ 3a_3b_{10} - a_1b_{12} + a_2b_{11} + a_{12}b_1 - a_{11}b_2 - 3a_{10}b_3 = 0. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Como devemos ter H_1 ou H_2 de grau 3, podemos adicionar ao sistema a condição $b_3^2 + b_3^2 + b_{12}^2 + b_{21}^2 + a_{30}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 \neq 0$. Com isso, ao resolvermos o sistema, obteremos 6 soluções:

1. Para $b_{30} \neq 0$, temos

$$\left\{ a_1 = \frac{a_{30}b_1}{b_{30}}; a_2 = \frac{a_{30}b_2}{b_{30}}; a_3 = \frac{a_{30}b_3}{b_{30}}; a_{10} = \frac{a_{30}b_{10}}{b_{30}}; a_{11} = \frac{a_{30}b_{11}}{b_{30}}; a_{12} = \frac{a_{30}b_{12}}{b_{30}}; a_{20} = \frac{a_{30}b_{20}}{b_{30}}; a_{21} = \frac{a_{30}b_{21}}{b_{30}} \right\}.$$

2. $\{b_1 = 0; b_2 = 0; b_3 = 0; b_{10} = 0; b_{11} = 0, b_{12} = 0, b_{20} = 0, b_{21} = 0, b_{30} = 0\}$.

3. Para $b_3 \neq 0$, temos

$$\left\{ a_1 = \frac{a_3b_1}{b_3}; a_2 = \frac{a_3b_2}{b_3}; a_{10} = \frac{a_3b_{10}}{b_3}; a_{11} = \frac{a_3b_{11}}{b_3}; a_{12} = \frac{a_3b_{12}}{b_3}; a_{20} = \frac{a_3b_{20}}{b_3}; a_{21} = \frac{a_3b_{21}}{b_3}, a_{30} = b_{30} = 0 \right\}$$

4. Para $b_{21} \neq 0$, temos

$$\left\{ a_1 = \frac{a_{21}b_1}{b_{21}}; a_2 = \frac{a_{21}b_2}{b_{21}}; a_3 = 0; a_{10} = \frac{a_{21}b_{10}}{b_{21}}; a_{11} = \frac{a_{21}b_{11}}{b_{21}}; a_{12} = \frac{a_{21}b_{12}}{b_{21}}; a_{20} = \frac{a_{21}b_{20}}{b_{21}}; a_{30} = b_3 = b_{30} = 0 \right\}$$

5. $\left\{ a_1 = \frac{b_1a_{20}}{b_{20}}; a_2 = \frac{a_{20}b_2}{b_{20}}; a_3 = 0; a_{10} = \frac{a_{20}b_{10}}{b_{20}}; a_{11} = \frac{a_{20}b_{11}}{b_{20}}; a_{12} = \frac{a_{20}b_{12}}{b_{20}}; a_{30} = b_3 = b_{21} = b_{30} = 0 \right\}$

6. $\left\{ a_1 = \frac{a_{12}b_1}{b_{12}}; a_2 = \frac{a_{12}b_2}{b_{12}}; a_3 = 0; a_{10} = \frac{a_{12}b_{10}}{b_{12}}; a_{11} = \frac{a_{12}b_{11}}{b_{12}}; a_{20} = a_{21} = a_{30} = b_3 = 0; b_{20} = b_{21} = b_{30} = 0 \right\}$
e $b_{12} \neq 0$

Ao substituirmos estas soluções obteremos integrais primeiras racionais de grau 3. Mas, para todas as soluções, ao subtrairmos uma constante conveniente às integrais primeiras, obtemos expressões não racionais de grau 3, que também são integrais primeiras para o sistema (ver observação 3.0.3). Logo temos o resultado. □

Observação 3.1.1.

Os Campos vetoriais quadráticos que possuem integral primeira polinomial foram completamente caracterizados por Chavarriga, Garcia e Llibre. Como os campos obtidos acima também possuem integral primeira polinomial, estes ficam completamente determinados. Assim, nosso objetivo aqui é classificar os campos vetoriais que possuem apenas integrais primeiras racionais de grau 3.

Proposição 3.1.2. *Seja H a integral primeira de grau 3 de um campo vetorial quadrático X . Então H pode ser escrito, após uma mudança de variáveis, em uma das seguintes formas*

$$(I^1) \quad \frac{(ax^3 + xy^2 + bx^2 + cx + dy + e)}{H_2(x, y)}$$

$$(I^2) \quad \frac{(ax^3 + y^2 + bx^2 + cx + d)}{H_2(x, y)}, a \neq 0$$

$$(I^3) \quad \frac{(ax^3 + xy + bx^2 + cx + d)}{H_2(x, y)}, a \neq 0$$

$$(I^4) \quad \frac{(ax^3 + y + bx^2 + cx + d)}{H_2(x, y)}, a \neq 0$$

$$(E) \quad \frac{(x^2 + y^2 - 1)(y - d)}{H_2(x, y)}$$

$$(CE) \quad \frac{(x^2 + y^2 + 1)(y - d)}{H_2(x, y)}$$

$$(P) \quad \frac{(x^2 - y)(ax + by + c)}{H_2(x, y)}$$

$$(H) \quad \frac{(x^2 - y^2 - 1)(ax + by + c)}{H_2(x, y)}$$

$$(p) \quad \frac{(x^2 + y^2)(y - d)}{H_2(x, y)}$$

$$(LV) \quad \frac{xy(ax + by + c)}{H_2(x, y)}$$

$$(PL) \quad \frac{(x^2 - 1)(ax + by + c)}{H_2(x, y)}$$

$$(CL) \quad \frac{(x^2 + 1)(y - d)}{H_2(x, y)}$$

$$(DL) \quad \frac{x^2(ax + by + c)}{H_2(x, y)},$$

onde H_2 , descrito em 3.1, denota um polinômio arbitrário de grau 3.

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos que H_1 em $H = \frac{H_1}{H_2}$ seja uma cúbica.

a) 1º caso

Se

$$H_1 = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fyx + gy^2 + hy + ix + j$$

é irreduzível e sua parte homogênea de maior grau $\tilde{H}_1(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ for a terceira potência de uma forma linear, teremos que $\tilde{H}_1 = (c_1x + c_2y)^3$. Então, ao fazermos uma rotação do plano xy por um ângulo $\theta = \arctan \frac{c_2}{c_1}$, teremos que $\tilde{H}_1(u, v) = au^3$, onde $a \neq 0$.

Assim¹

$$H(u, v) : au^3 + eu^2 + fuv + gv^2 + hv + iu + j = 0. \quad (3.6)$$

Se $g \neq 0$, teremos

$$v^2 + fuv + hv = au^3 + eu^2 + iu + j,$$

e completando o quadrado em v , temos

$$\left(v + \frac{f}{2}u + \frac{h}{2}\right)^2 = au^3 + \left(e + \frac{f^2}{4}\right)u^2 + \left(j + \frac{h^2}{4}\right) + \left(i + \frac{fh}{2}\right)u \quad (3.7)$$

Fazendo novamente uma rotação por um ângulo $\theta = \arctan(-\frac{f}{2})$ e usando uma substituição adequada, encontra-se

$$v^2 = au^3 + eu^2 + iu + j$$

Em 3.6, se $g = f = 0$, teremos

$$v = au^3 + eu^2 + iu + j$$

e se $g = h = 0$, mas $f \neq 0$, teremos

$$uv = au^3 + eu^2 + iu + j.$$

Com isso obtemos 3 formas padrão para uma cúbica cuja parte homogênea de grau 3 é redutível. Obtemos assim os resultados I^1 , I^2 e I^3 .

b) 2º caso:

Se $\tilde{H}_1(x, y)$ não for a terceira potência de uma forma linear então $H_1(x, y)$ pode ser reescrita como sendo $\tilde{H}_1(x, y) = xy^2 - ax^3$ (para detalhes, ver método da investigação Newton das curvas algébricas cúbicas em [3]). Desta forma $H_1(x, y) := xy^2 - ax^3 + ex^2 + fyx + gy^2 + hy + ix + j = 0$. Fazendo uma translação podemos eliminar, caso apareçam, os termos com xy e y^2 . Daí esta curva pode ser reescrita como sendo

$$xy^2 + hy = ax^3 + ex^2 + ix + j.$$

Se $H_1(x, y)$ for redutível, teremos que ela pode ser decomposta como o produto de fatores primos. Assim temos que que H_1 pode ser:

- O produto de três fatores de grau 1;
- O produto de um fator irredutível de grau 2 e 1 de grau 1.

¹Aqui, para mantermos a homogeneidade na escrita, conservamos a mesma notação para os coeficientes e variáveis, apesar de que, evidentemente, não serem os mesmos após a mudança de coordenadas.

Da classificação das cônicas podemos obter que os fatores do segundo grau são

- Elipses reais: $x^2 + y^2 - 1 = 0$;
- Conjunto vazio (elipses complexas) $x^2 + y^2 + 1 = 0$;
- Parábolas $x^2 - y = 0$;
- Hipérboles $x^2 - y^2 - 1 = 0$;
- Um ponto $x^2 + y^2 = 0$;
- 2 retas não paralelas $xy = 0$;
- Conjunto vazio (retas complexas) $x^2 + 1 = 0$;
- Reta dupla $x^2 = 0$;

Portanto todas as possibilidades para H_1 ficam determinadas.

□

Para cada uma das 13 possibilidades para H , temos $P = -\frac{\partial H}{\partial y} H_2^2$ e $Q = \frac{\partial H}{\partial x} H_2^2$. Além disso, pela Proposição 3.0.6 temos que elas possuem um fator R em comum. Daí podemos supor

$$\begin{cases} P(x, y) - R(x, y)\overline{P}(x, y) = 0 \\ Q(x, y) - R(x, y)\overline{Q}(x, y) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Como o grau máximo entre P e Q é 5 e desejamos obter $\overline{P}, \overline{Q}$ de grau no máximo 2, temos que $R(x, y)$ deve ter grau no máximo 3. Assim podemos tomar

$$\begin{cases} \overline{P}(x, y) = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 \\ \overline{Q}(x, y) = d_{00} + d_{10}x + d_{01}y + d_{20}x^2 + d_{11}xy + d_{02}y^2 \\ R(x, y) = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 \end{cases} \quad (3.9)$$

Lema 3.1.1. *Se H é $(I^2), (I^3)$ ou (I^4) então o campo vetorial quadrático que tem $H = \frac{H_1}{H_2}$ como uma integral primeira também tem uma integral primeira racional $\frac{\overline{H}_1}{\overline{H}_2}$ com \overline{H}_1 redutível.*

Demonstração. Provaremos apenas o caso (I^4) , os demais cálculos são totalmente similares. Temos que

$$\begin{aligned} P &= 2a_3y^3 + (3ca_3 + a_{12})xy^2 + 3ba_3x^2y^2 + 3aa_3x^3y^2 + 3da_3y^2 + 2aa_{12}x^4y + 2ca_{12}x^2y \\ &+ 2ba_{12}x^3y + 2da_{12}xy + aa_{21}x^5 + (ba_{21} + aa_{11})x^4 + (ca_{11} + ba_1 + da_{21})x^2 \\ &+ (ca_{21} + aa_1 - a_{30} + ba_{11})x^3 + (-a_{10} + ca_1 + da_{11})x + da_1 - a_0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
Q &= (-a_{12} + ca_3)y^3 + 2ba_3xy^3 + 3aa_3x^2y^3 + 2aa_{12}x^3y^2 - (a_{11} + da_{12})y^2 - 2a_{21}xy^2 \\
&+ ba_{12}x^2y^2 + (-ca_{21} - 3a_{30} + 3aa_1 + ba_{11})x^2y + 2aa_{11}x^3y + (-da_{11} - a_{10} + ca_1)y \\
&+ aa_{21}x^4y + (2ba_1 - 2da_{21})xy - ba_{30}x^4 + (3aa_0 - 3da_{30} + ba_{10})x^2 + (2aa_{10} - 2ca_{30})x^3 \\
&- da_{10} + ca_0 + 2ba_0x.
\end{aligned}$$

Resolvendo este sistema 3.8, encontramos 5 soluções:

1.

$$\{a_0 = da_1, a_2 = 0, a_3 = 0, a_{10} = ca_1, a_{11} = 0, a_{12} = 0, a_{20} = ba_1, a_{21} = 0, a_{30} = aa_1, c_0 = 0, \\
c_1 = 0, c_2 = 0, c_{10} = 0, c_{11} = 0, c_{20} = 0, d_0 = 0, d_1 = 0, d_2 = 0, d_{10} = 0, d_{11} = 0, d_{20} = 0\}.$$

Esta solução não serve, pois H é constante.

2.

$$\{a_0 = da_1, a_2 = 0, a_3 = 0, a_{10} = ca_1, a_{11} = 0, a_{12} = 0, a_{20} = ba_1, a_{21} = 0, a_{30} = aa_1, b_0 = 0, \\
b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 0, b_{10} = 0, b_{11} = 0, b_{12} = 0, b_{20} = 0, b_{21} = 0, b_{30} = 0\}.$$

Esta solução não serve, pois H é constante.

3.

$$\{a_0 = -b_0c_0 + da_1, a_2 = 0, a_3 = 0, a_{10} = ca_1, a_{11} = 0, a_{12} = 0, a_{20} = ba_1, a_{21} = 0, \\
a_{30} = aa_1, b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 0, b_{10} = 0, b_{11} = 0, b_{12} = 0, b_{20} = 0, b_{21} = 0, b_{30} = 0, \\
c_1 = 0, c_{10} = 0, c_{11} = 0, c_{20} = 0, d_0 = -cc_0, d_1 = 0, d_2 = 0, d_{10} = -2bc_0, d_{11} = 0, \\
d_{20} = -3ac_0\}.$$

Substituindo esta solução obtemos

$$\begin{aligned}
H &= \frac{ax^3 + y + bx^2 + cx + d}{-b_0c_0 + a_1(ax^3 + y + bx^2 + cx + d)} \\
&= \frac{b_0c_0}{a_1(-b_0c_0 + a_1(ax^3 + y + bx^2 + cx + d))} + \frac{1}{a_1}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Portanto $\overline{H} = ax^3 + y + bx^2 + cx + d$ também é uma integral primeira para o sistema. Logo esta solução também não serve.

4.

$$\left\{ \begin{aligned} a_0 &= \frac{2b_0^3c_{20}a - b_0^2c_{20}b + da_1ab_{10}^2}{ab_{10}^2}, a_2 = 0, a_3 = 0, a_{10} = \frac{3b_0^2c_{20}a - 2b_0c_{20}b_{10}b + ca_1ab_{10}}{ab_{10}}, \\ a_{11} &= 0, a_{12} = 0, a_{20} = \frac{b(aa_1 - b_{10}c_{20})}{a}, a_{21} = 0, a_{30} = aa_1 - b_{10}c_{20}, b_1 = 0, b_2 = 0, \\ b_3 &= 0, b_{11} = 0, b_{12} = 0, b_{20} = 0, b_{21} = 0, b_{30} = 0, c_0 = -\frac{b_0c_{20}(2b_0a - b_{10}b)}{ab_{10}^2}, c_1 = 0, c_2 = 0, \\ c_{10} &= -\frac{c_{20}(b_0a - b_{10}b)}{ab_{10}}, c_{11} = 0, d_0 = \frac{c_{20}(-3db_0b_{10}a + 2b_{10}^2db + 2cb_0^2a - b_0cb_{10}b)}{b_{10}^2a} \\ d_1 &= -\frac{c_{20}(3b_0a - 2b_{10}b)}{ab_{10}}, d_2 = 0, d_{10} = \frac{c_{20}(4bb_0^2a - 2b^2b_0b_{10} - 2b_{10}cb_0a + cb_{10}^2b + 3b_{10}^2da)}{b_{10}} \\ d_{11} &= 3c_{20}, d_{20} = \frac{2c_{20}(3b_0^2a - 2bb_0b_{10} + cb_{10}^2)}{b_{10}^2} \end{aligned} \right\}$$

Ao substituírmos esta solução obteremos

$$H = \frac{(ax^3 + y + bx^2 + cx + d)ab_{10}^2}{(-bb_{10}^3c_{20} + bb_{10}^2aa_1)x^2 + aa_1b_{10}^2y + (3b_{10}b_0^2c_{20}a - 2b_{10}^2b_0c_{20}b + b_{10}^2ca_1a)x + (a^2b_{10}^2a_1 - ab_{10}^3c_{20})x^3 + 2b_0^3c_{20}a - b_0^2c_{20}b_{10}b + da_1ab_{10}^2}$$

e

$$P = \frac{c_{20}}{ab_{10}^2}(b_{10}x + b_0)^2(ab_{10}x + b_{10}b - 2b_0a)$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{c_{20}}{ab_{10}^2}(b_{10}x + b_0)[(6a^2b_0^2 + 2acb_{10}^2 - 4abb_0b_{10})x^2 + 3ab_{10}^2xy \\ &\quad + (-2b_{10}b_0ac + 3b_{10}^2da + 4abb_0^2 + b_{10}^2cb - 2b^2b_0b_{10})x + (2b_{10}b - 3b_{10}b_0a)y \\ &\quad - 3b_0dab_{10} + 2cb_0^2a - b_0cb_{10}b + 2b_{10}^2db], \end{aligned}$$

que possuem fator comum $\frac{c_{20}}{ab_{10}^2}(b_{10}x + b_0)$. Assim nosso campo vetorial pode ser dado por

$$\begin{aligned} \bar{P} &= (b_{10}x + b_0)(ab_{10}x + b_{10}b - 2b_0a) \\ \bar{Q} &= (6a^2b_0^2 + 2acb_{10}^2 - 4abb_0b_{10})x^2 + 3ab_{10}^2xy + (2b_{10}b - 3b_{10}b_0a)y \\ &\quad + (-2b_{10}b_0ac + 3b_{10}^2da + 4abb_0^2 + b_{10}^2cb - 2b^2b_0b_{10})x - 3b_0dab_{10} + 2cb_0^2a - b_0cb_{10}b + 2b_{10}^2db. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Note que \bar{P} e \bar{Q} não dependem de a_1 e c_{20} , desta forma podemos tomar qualquer valor para estas constantes que não haverá alteração no campo vetorial, em particular $a_1 = \frac{b_{10}}{a}$, $c_{20} = 1$. Além disso temos que se H é integral primeira para um campo $X = (P, Q)$, então $kH, \frac{1}{H}$ e $k + H$ também são integrais primeiras, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Daí H será

$$\frac{y + ax^3 + bx^2 + cx + d}{2ab_0^3 - bb_0^2b_{10} + b_{10}^3d + (3ab_0^2b_{10} - 2bb_0b_{10}^2 + b_{10}^3c)x + b_{10}^3y}.$$

Logo

$$\bar{H} = H - \frac{1}{b_{10}^3} = \frac{(b_0 + b_{10}x)^2(-2ab_0 + bb_{10} + ab_{10}x)}{2ab_0^3 - bb_0^2b_{10} + b_{10}^3d + 3ab_0^2b_{10}x - 2bb_0b_{10}^2x + b_{10}^3cx + b_{10}^3y}.$$

5.

$$\begin{aligned}
 \{a_0 = \frac{1-b_{10}^3c_{10}+8da_1b_{20}^3}{8b_{20}^2}, a_2 = 0, a_3 = 0, a_{10} = \frac{1-3b_{10}^2c_{10}+4ca_1b_{20}}{4b_{20}}, \\
 a_{11} = 0, a_{12} = 0, a_{20} = ba_1 - \frac{3}{2}b_{10}c_{10}, a_{21} = 0, a_{30} = aa_1 - b_{20}c_{10}, b_0 = \frac{1}{4}\frac{b_{10}^2}{b_{20}} \\
 b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 0, b_{11} = 0, b_{12} = 0, b_{21} = 0, b_{30} = 0, c_0 = \frac{1}{2}\frac{b_{10}c_{10}}{b_{20}}, c_1 = 0, c_2 = 0, \\
 d_0 = -\frac{1}{2}\frac{c_{10}(-6db_{20}+b_{10}c)}{b_{20}}, d_1 = 3c_{10}, d_2 = 0, d_{10} = -\frac{c_{10}(b_{10}b-2cb_{20})}{b_{20}}, d_{11} = 0, \\
 c_{11} = 0, c_{20} = 0, d_{20} = -\frac{1}{2}\frac{c_{10}3ab_{10}-2b_{20}b}{b_{20}}\}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ao substituírmos esta solução obteremos

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{8b_{20}^2(ax^3+y+bx^2+cx+d)}{(8b_{20}^2aa_1-8b_{20}^3c_{10})x^3+(-12b_{20}^2b_{10}c_{10}+8b_{20}^2ba_1)x^2+8a_1b_{20}^2y+(-6b_{20}b_{10}^2c_{10}+8b_{20}^2ca_1)x-b_{10}^3c_{10}+8da_1b_{20}^2}, \\
 P &= \frac{1}{8}\frac{c_{10}(2b_{20}x+b_{10})^3}{b_{20}^2}, \\
 Q &= -\frac{c_{10}}{8b_{20}^2}(2b_{20}x+b_{10})^2[(3ab_{10}-2b_{20}b)x^2-6b_{20}y+(2b_{10}b-4cb_{20})x+b_{10}c-6db_{20}].
 \end{aligned}$$

Note que $\frac{c_{10}}{8b_{20}^2}(2b_{20}x+b_{10})^2$ é um fator comum entre P e Q . Daí

$$\begin{aligned}
 \bar{P} &= (2b_{20}x+b_{10}) \\
 \bar{Q} &= -[(3ab_{10}-2b_{20}b)x^2-6b_{20}y+(2b_{10}b-4cb_{20})x+b_{10}c-6db_{20}].
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

De forma análoga a solução anterior, temos que o campo não depende de c_{10} e a_1 . Então, tomando $a_1 = b_{20}$ e $c_{10} = a$, obteremos

$$H = \frac{d+cx+bx^2+ax^3+y}{-ab_{10}^3+8b_{20}^3d-6ab_{10}^2b_{20}x+8b_{20}^3cx-12ab_{10}b_{20}^2x^2+8bb_{20}^3x^2+8b_{20}^3y}$$

e portanto

$$\bar{H} = H - \frac{1}{8b_{20}^3} = \frac{(b_{10}+2b_{20}x)^3}{-ab_{10}^3+8b_{20}^3d+(-6ab_{10}^2b_{20}+8b_{20}^3c)x+(8bb_{20}^3-12ab_{10}b_{20}^2)x^2+8b_{20}^3y}.$$

□

Observação 3.1.2.

Para os casos (I^2) , (I^3) os cálculos são inteiramente análogos ao caso (I^4) .

Proposição 3.1.3. *Seja X um campo vetorial polinomial quadrático com $H = \frac{H_1}{H_2}$ como uma integral primeira de grau 3 na qual H_1 é uma cúbica irredutível do tipo (I^1) . Então X pode ser escrito como*

$$\begin{cases} \dot{x} = 4(da - 2bx + cx^2) \\ \dot{y} = cd + 4by + 4ay^2 \end{cases}, \tag{3.15}$$

onde $a \neq 0$, b, c e d são parâmetros e

$$H = \frac{2db - cdx + 4day + 4axy^2}{4b^2 - cda - 2cbx + 8bay - 4caxy + 4a^2y^2} \quad (3.16)$$

Demonstração. Se H é da forma (I^1) , ao resolvermos o sistema

$$\begin{cases} P - R\bar{P} = 0 \\ Q - R\bar{Q} = 0 \end{cases},$$

onde P, Q, \bar{P}, \bar{Q} e R são como em 3.8 e 3.9. Assim única solução compatível com H ser racional de grau 3 é,

$$\begin{aligned} \{a = 0, b = 0, c = -\frac{1}{4} \frac{c_{20}d}{d_2}, e = \frac{1}{2} \frac{db_1}{b_2}, a_0 = -\frac{1}{4b_2} (db_2^2c_{20} - 4b_1^2d_2 - 2db_1a_{12}), a_1 = 2b_1d_2 + da_{12}, \\ a_2 = b_2d_2, a_3 = 0, a_{10} = -\frac{1}{4} \frac{c_{20}(2b_1d_2 + da_{12})}{d_2}, a_{11} = -b_2c_{20}, a_{20} = 0, a_{21} = 0, a_{30} = 0, \\ b_0 = \frac{1}{4} \frac{b_2c_{20}d}{d_2}, b_3 = 0, b_{10} = 0, b_{11} = 0, b_{12} = 0, b_{20} = 0, b_{21} = 0, b_{30} = 0, c_0 = dd_2, c_1 = 0, \\ c_2 = 0, c_{10} = -\frac{2b_1d_2}{b_2}, c_{11} = 0, d_0 = \frac{1}{4} dc_{20}, d_1 = \frac{b_1d_2}{b_2}, d_{10} = 0, d_{11} = 0, d_{20} = 0, a_{20} = 0\}. \end{aligned}$$

Desta forma, ao substituirmos esta solução, veremos que \bar{P}, \bar{Q} não dependem de a_{12} . Daí, podemos tomá-lo como sendo 0. Renomeando $d_2 = a, b_2 = a, b_1 = b, c_{20} = c$, teremos o resultado. □

Proposição 3.1.4. *Seja X um campo vetorial polinomial quadrático com integral primeira $H = \frac{H_1}{H_2}$ de grau 3 como na Proposição 3.1.2, com $H \neq I^j$ para $j = 1, 2, 3, 4$. Então X e H podem ser escritos como um dos seguintes sistemas:*

(S1)

$$\begin{aligned} X &= (ax + bx^2, -2ay - bxy + cy^2) \\ H &= \frac{x^2y}{2a + 2bx - cy} \end{aligned}$$

(S2)

$$\begin{aligned} X &= (abx + acx^2, -2aby + bdy^2) \\ H &= \frac{x^2y}{(2b^2a + 4bcax + 2c^2ax^2 - b^2dy - 2bcdxy)} \end{aligned}$$

(S3)

$$\begin{aligned} X &= (ax + bx^2 - cxy, -2y(a + cy)) \\ H &= \frac{x^2y}{(a + bx + cy)^2} \end{aligned}$$

(S4)

$$\begin{aligned} X &= (2ax + bx^2 - 2cxy, -4ay + bxy - 2cy^2) \\ H &= \frac{x^2y}{(8a^3 + 12a^2bx + 6ab^2x^2 + b^3x^3 + 12a^2cy + 12abcxy + 6ac^2y^2 + 3bcxy^2 + c^3y^3)} \end{aligned}$$

(S5)

$$\begin{aligned} X &= (abx + acx^2, cd + cex + 3bay + caxy) \\ H &= \frac{x^3}{2bcd + 3c^2dx + 3bcex + 6c^2ex^2 + 6b^2ay + 12bcaxy + 6c^2ax^2y} \end{aligned}$$

(S6)

$$\begin{aligned} X &= (2abx + 2acx^2, 3bd + ebx + 2dcx + 3aby + 2acxy) \\ H &= x^3/(d^2b + 2dbx + d^2cx + e^2bx^2 + 2decx^2 + 2daby + a^2by^2 + 2aebxy + 2dacxy \\ &\quad + 2aecx^2y + a^2cxy^2) \end{aligned}$$

(S7)

$$\begin{aligned} X &= (abx - bx^2, 2ac + a^2d - 3cx - 3dx - 3dx^2 + 2aby - 3bxy) \\ H &= \frac{x^2(x - a)}{2c + ad + 3dx + 2by} \end{aligned}$$

(S8)

$$\begin{aligned} X &= (-2adx + 2dx^2, -2ab + 3bx + cx^2 - 2ady + 3dxy) \\ H &= \frac{x^2(x - a)}{(b + cx + dy)^2} \end{aligned}$$

(S9)

$$\begin{aligned} X &= (6acx - 6cx^2, 2ab - 3bx - adx + 4acy - 6cxy) \\ H &= x^2(x - a)/(b^3 + 3b^2dx + 3bd^2x^2 + ad^3x^2 + 6b^2cy + 12cdxy + 6cd^2x^2y \\ &\quad + 12bc^2y^2 + 12c^2dxy^2 + 8c^3y^3) \end{aligned}$$

(S10)

$$\begin{aligned} X &= (2ex + 2ax^2 + 2bxy, 2f + 2cx + 6ey + 2dx^2 + 4axy + 3by^2) \\ H &= \frac{x^3}{(2f + 6ey + 3cx + 6dx^2 + 6axy + 3by^2)} \end{aligned}$$

Demonstração. De fato, na Proposição 3.1.2, verificamos que se $H = \frac{H_1}{H_2}$ com H_1 redutível, teremos que H_1 pode se apresentar de 9 formas distintas. Resta-nos dizer sob quais condições sobre os coeficientes de H as integrais primeiras tem um campo vetorial hamiltoniano quadrático associado. Para obtermos as condições, como vimos anterior-

mente, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} P - R\bar{P} = 0 \\ Q - R\bar{Q} = 0 \end{cases}, \quad (3.17)$$

onde P, Q, \bar{P}, \bar{Q} e R são como descritos acima. Ao resolvermos o sistema e tomarmos as soluções que tornam H racional de grau 3 com um campo quadrático associado, encontraremos que se $H \neq I^j$ para $j = 1, 2, 3, 4$, então H pode ser escrita da forma (DL) , semelhante ao que foi feito no lema 3.1.1. Logo é suficiente estudar os campos vetoriais quadráticos que possuem integral primeira na forma (DL) :

$$H = \frac{x^2(ax + by + c)}{H_2(x, y)},$$

onde $H_2(x, y) = \sum_{i+j=0}^3 a_{ij}x^i y^j$.

Fazendo a mudança de variável $(x, y) \mapsto (x, ax + by + c)$, $b \neq 0$, teremos que $H(x, y) = \frac{x^2 y}{H_2(x, y)}$. Como $P = -\frac{\partial H}{\partial y} H_2^2$ e $Q = \frac{\partial H}{\partial x} H_2^2$, encontramos

$$\begin{cases} P = -x^2(a_0 - a_{12}xy^2 + a_{10}x - 2a_3y^3 + a_{30}x^3 + a_{20}x^2 - a_2y^2) \\ Q = -xy(-2a_0 - a_{11}xy - a_{12}xy^2 - 2a_1y - a_{10}x - 2a_3y^3 + a_{30}x^3 - 2a_2y^2) \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema 3.17 obteremos 25 soluções, mas apenas 7 tornam H racional de grau 3 com um campo vetorial quadrático $X = (\bar{P}, \bar{Q})$ associado. Utilizando novamente o fato de que se H é integral primeira então Hk , $\frac{1}{H}$ e $H + k$ também são integrais primeiras para os sistema, e renomeando os coeficientes, obteremos os sistemas $(S1)$, $(S2)$, $(S3)$ e $(S4)$:

1. Para a 1ª solução obtemos

$$H = -\frac{x^2 y d_{10}}{b_{10}(d_{11}y + d_{10} + d_{20}x)^2}.$$

Se H é integral primeira então Hk também é, e podemos reescrever H como sendo

$$H = \frac{x^2 y}{(d_{11}y + d_{10} + d_{20}x)^2}.$$

Renomeando os coeficientes, teremos

$$H = \frac{x^2 y}{(cy + a + bx)^2}.$$

e

$$X = (ax + bx^2 - cxy, -2y(a + cy)).$$

Que é o caso $(S3)$

2. 2ª solução

$$H = -\frac{8d_{10}^2 x^2 y}{b_{10}(d_{11}y + 2d_{10})^3}$$

Eliminando algumas constantes e renomeando os coeficientes teremos,

$$H = \frac{x^2 y}{(cy + 2a)^3}.$$

Portanto

$$X = (-cxy + ax, -cy^2 - 2ay).$$

Que é o caso $S4$, quando $b = 0$.

3. 3ª solução

$$H = \frac{2x^2 y}{d_{10}(-2b_{10} + c_2 y + 2xc_{11})}$$

Eliminando algumas constantes e renomeando os coeficientes teremos

$$H = \frac{x^2 y}{(2a - cy + 2bx)}$$

e

$$X = (ax - bx^2, -2ay - bxy + cy^2),$$

que é $S1$.

4. Na 4ª solução se tomarmos $d_{10} = b, b_{10} = a, c_2 = d, d_{20} = c$, temos

$$H = -\frac{2x^2 y b}{(2b^2 a - 2cdxyb - b^2 dy + 4caxb + 2c^2 ax^2)}.$$

Assim

$$H = \frac{x^2 y}{(2b^2 a - 2cdxyb - b^2 dy + 4caxb + 2c^2 ax^2)}$$

e

$$X = (ax(b + cx), y(-2ba + bdy)),$$

que é $S2$.

5. Para a 5ª solução obtemos

$$H = -\frac{4x^2 y d_{12} d_{11}^4}{b_{10}(d_{11}^6 + 24d_{20}d_{12}^2 d_{11}^3 xy + 24d_{12}^3 d_{20}d_{11}^2 xy^2 + 6d_{11}^5 d_{12}y + 6d_{20}d_{12}d_{11}^4 x + 8d_{12}^3 d_{11}^3 y^3 + 8d_{12}^3 d_{20}^3 x^3 + 12d_{20}^2 d_{12}^2 d_{11}^2 x^2 + 12d_{12}^2 d_{11}^4 y^2)}.$$

Multiplicando por $-\frac{b_{10}}{4d_{12}d_{11}^4}$ e renomeando os coeficientes obteremos

$$H = \frac{x^2 y}{(8a^3 + 12a^2 bx + 6ab^2 x^2 + b^3 x^3 + 12a^2 cy + 12abcxy + 6ac^2 y^2 + 3bcxy^2 + c^3 y^3)}$$

e

$$X = (2ax + bx^2 - 2cxy, -4ay + bxy - 2cy^2),$$

que é (S4).

6. Para a 6ª solução obteremos

$$H = -\frac{8d_{10}^2 x^2 y}{b_{10}(d_{20}x + 2d_{10})^3}.$$

Assim, renomeando os coeficientes e multiplicando por uma constante conveniente

$$\begin{aligned} X &= (2ax + bx^2, -4ay + bxy). \\ H &= \frac{x^2 y}{(bx + 2a)^3}, \end{aligned}$$

que é o caso (S4), quando $c = 0$.

7. Para a 7ª solução temos

$$H = \frac{2d_{11}x^2y}{(c_2(d_{20}x + d_{11}y)^2)}.$$

Multiplicando por constantes convenientes e renomeando os coeficientes, obteremos

$$\begin{aligned} X &= (bx^2 - cxy, -2cy^2) \\ H &= \frac{x^2 y}{(bx + cy)^2}, \end{aligned}$$

que é o caso (S3) quando $a = 0$.

Se $b = 0$ teremos que $a \neq 0$, pois na Proposição 3.1.2 supomos que H_1 é uma cúbica e, portanto, $H = \frac{x^2(ax-c)}{H_2(x,y)}$. Procedendo de maneira análoga a anterior, obteremos os sistemas de (S5) a (S10).

Observação 3.1.3.

Para as demais soluções teremos que ou H será constante, ou polinomial ou racional de grau 2 ou ainda X não será quadrático.

□

Capítulo 4

Estudo dos Retratos de Fase

O objetivo deste capítulo é caracterizar os retratos de fase das 11 formas padrão dos campos vetoriais que possuem integral primeira racional de grau 3.

Vimos anteriormente que se H é uma integral primeira para um campo vetorial, então H é constante em cada solução $(x(t), y(t))$ do sistema de equações dado por $(\dot{x}, \dot{y}) = (P, Q)$. Assim, as curvas de nível $H(x, y) = k$, k -constante, são as soluções deste sistema. Além disso, se $f.g = 0$ é uma curva invariante do sistema, então $f = 0$ e $g = 0$ também o são. Tendo isto em vista este fato e a classificação dos pontos singulares, podemos determinar os retratos de fase para cada situação. Para um maior detalhamento sobre o “passo a passo” afim de traçar o retrato de fase no disco de Poincaré de um campo vetorial, ver apêndice.

4.1 Integral Primeira Irredutível

Na seção anterior, mostramos que se um campo vetorial quadrático X tem integral primeira da forma (I^1) , então as formas padrão de X e H são dadas, respectivamente, por

$$\begin{cases} \dot{x} = 4(da - 2bx + cx^2) \\ \dot{y} = cd + 4by + 4ay^2 \end{cases} \quad (4.1)$$

e

$$H = \frac{2db - cdx + 4day + 4axy^2}{4b^2 - cda - 2cbx + 8bay - 4caxy + 4a^2y^2}. \quad (4.2)$$

Assim,

1. Se $abcd \neq 0$ e $b^2 - acd > 0$ teremos como singularidades finitas

$$\left(\frac{b+\sqrt{b^2-acd}}{c}, \frac{-b+\sqrt{b^2-acd}}{2a} \right), \left(\frac{b+\sqrt{b^2-acd}}{c}, \frac{-b-\sqrt{b^2-acd}}{2a} \right), \left(\frac{b-\sqrt{b^2-acd}}{c}, \frac{-b+\sqrt{b^2-acd}}{2a} \right), \left(\frac{b-\sqrt{b^2-acd}}{c}, \frac{-b-\sqrt{b^2-acd}}{2a} \right).$$

Calculando o Jacobiano e o traço nestes pontos obteremos que $\left(\frac{b+\sqrt{b^2-acd}}{c}, \frac{-b+\sqrt{b^2-acd}}{2a}\right)$ e $\left(\frac{b-\sqrt{b^2-acd}}{c}, \frac{-b-\sqrt{b^2-acd}}{2a}\right)$ são do tipo nó (um atrator e o outro repulsor, dependendo do sinal de c) e os outros dois pontos são do tipo sela, pois o Jacobiano nestes pontos sempre é negativo.

Em \mathcal{U}_1 a compactificação para este campo tem como expressão

$$Z = (z_1, z_2) = \frac{1}{\Delta(z)}(-4cz_1 + 4az_1^2 + 12bz_1z_2 + cz_2^2 - 4daz_1z_2^2, -4z_2(c - 2bz_2 + daz_2^2))$$

Logo as singularidades infinitas são $(0, 0)$ e $(\frac{c}{a}, 0)$. Calculando o Jacobiano e o traço nestes pontos, teremos: $|JZ(0, 0)| = 16c^2$, $tr(0, 0) = -8c$ e $|JZ(\frac{c}{a}, 0)| = -16c^2$. Portanto $(\frac{c}{a}, 0)$ é um ponto do tipo sela e $(0, 0)$ é um nó.

Em \mathcal{U}_2 temos que a compactificação para este campo tem como expressão

$$Z = (z_1, z_2) = \frac{1}{\Delta(z)}(4daz_2^2 - 12bz_1z_2 + 4cz_1^2 - cdz_1z_2^2 - 4az_1, -z_2(4a + 4bz_2 + cdz_2^2)).$$

e as singularidades infinitas são $(0, 0)$ e $(\frac{a}{c}, 0)$.

Calculando a matriz Jacobiana nestes pontos obteremos $|JZ(0, 0)| = 16a^2$, $tr(0, 0) = -8a$ e $|JZ(\frac{a}{c}, 0)| = -16a^2$. Portanto $(0, 0)$ é nó e $(\frac{a}{c}, 0)$ é sela.

Além das curvas de nível de H , temos que a hipérbole $4b^2 - cda - 2cbx + 8bay - 4caxy + 4a^2y^2 = 0$, e as retas $x = \frac{b+\sqrt{b^2-acd}}{c}$, $x = \frac{b-\sqrt{b^2-acd}}{c}$, $y = \frac{-b+\sqrt{b^2-acd}}{2a}$, $y = \frac{-b-\sqrt{b^2-acd}}{2a}$ são curvas invariantes do sistema. Assim o retrato de fase do campo vetorial é equivalente a figura 3.1 item \mathcal{P}_1 .

2. Se $c = 0$ e $ab \neq 0$, temos dois pontos singulares finitos $(\frac{da}{2b}, 0)$ que é sela, $(\frac{da}{2b}, -\frac{b}{a})$ que é nó. Em \mathcal{U}_1 teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita. Como $JZ(0, 0) \equiv 0$ o ponto é linearmente nulo. Como as retas $y = 0$, $y = -\frac{b}{a}$, $x = \frac{ad}{2b}$ são curvas invariantes do sistema, segue que o retrato de fase do campo vetorial no disco de Poincaré é equivalente a figura 3.1 item \mathcal{P}_3 .
3. Se $b^2 - acd < 0$, não teremos pontos singulares finitos. Aqui as singularidades infinitas permanecem as mesmas do primeiro item. Traçando as curvas de nível de H , e sabendo que $4b^2 - cda - 2cbx + 8bay - 4caxy + 4a^2y^2 = 0$ é uma hipérbole, teremos que o retrato de fase do campo vetorial é equivalente a figura 3.1 item \mathcal{P}_5 .
4. Se $b^2 - acd = 0$ ou $c = b = 0$ então H tem grau 2.

Então temos a seguinte Proposição:

Proposição 4.1.1. *O retrato de fase de um campo vetorial polinomial quadrático com uma integral primeira racional de grau 3 $H = \frac{H_1}{H_2}$, onde H_1 é uma cúbica irredutível, é topologicamente equivalente a figura 3.1 item $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_3$ ou \mathcal{P}_5 .*

4.2 Integral Primeira Redutível

Anteriormente analisamos os possíveis retratos de fase para um campo vetorial que possui integral primeira da forma racional, onde o numerador é uma cúbica irredutível. Restamos agora analisar o comportamento dos campos vetoriais quadráticos não homogêneos que possuem integral primeira racional com numerador redutível.

Como vimos anteriormente, existem 10 possibilidades para a forma padrão de um campo vetorial e sua integral primeira redutível. Portanto é suficiente analisar o comportamento de cada um desses 10 campos vetoriais, com suas respectivas integrais primeiras.

(S1) Sejam

$$X = (ax + bx^2, -2ay - bxy + cy^2)$$

um campo vetorial, e

$$H = \frac{x^2y}{2a + 2bx - cy}$$

sua integral primeira.

Se $abc \neq 0$ os pontos singulares finitos são $(0, 0)$, $(0, \frac{2a}{c})$, $(-\frac{a}{b}, \frac{a}{c})$, $(-\frac{a}{b}, 0)$. Então temos

- $|JX(0, 0)| = -2a^2$ e portanto o ponto é do tipo sela;
- $|JX(-\frac{a}{b}, 0)| = a^2$ e $tr(-\frac{a}{b}, 0) = -2a$ e portanto ponto é um nó ;
- $|JX(-\frac{a}{b}, \frac{a}{c})| = -a^2$ e portanto o ponto é sela;
- $|JX(0, \frac{2a}{c})| = 2a^2$ e $tr(0, \frac{2a}{c}) = 3a$ e portanto o ponto é um nó.

Se $b = 0$, mas $ac \neq 0$, teremos que as singularidades finitas são $(0, 0)$ e $(0, \frac{2a}{c})$. Daí

- $|JX(0, 0)| = -2a^2$ e portanto o ponto é do tipo sela;
- $|JX(0, \frac{2a}{c})| = 2a^2$ e $tr(0, \frac{2a}{c}) = 3a$ e portanto o ponto é do tipo nó.

Se $c = 0$, mas $ab \neq 0$ teremos que as singularidades finitas são $(0, 0)$ e $(-\frac{a}{b}, 0)$. Daí

- $|JX(0, 0)| = -2a^2$ e portanto o ponto é do tipo sela;
- $|JX(-\frac{a}{b}, 0)| = 5a^2$ e $tr(-\frac{a}{b}, 0) = -2a$ e portanto o ponto é do tipo nó.

Não podemos ter $a = b = 0$ ou $a = c = 0$, pois H teria grau 2.

Temos que sua compactificação em \mathcal{U}_1 é

$$Z = (\dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{1}{\Delta(z)} (z_1(-3az_2 - 2b + cz_1), -z_2(az_2 + b)).$$

Portanto os pontos singulares infinitos¹ são $(0, 0)$, $(\frac{2b}{c}, 0)$, se $c \neq 0$. Mas se $c = 0$ temos apenas uma singularidade infinita em \mathcal{U}_1 : $(0, 0)$.

¹ $z_2 = 0$

- Se $c \neq 0$ e $b = 0$ teremos que a matriz Jacobiana em $(0, 0)$ será nula e portanto o ponto é linearmente nulo;
- Se $c = b = 0$, X não tem grau 2, logo não cabe análise;
- Se $bc \neq 0$, então $(0, 0)$ é um nó, e $(\frac{2b}{c}, 0)$ é do tipo sela.

A compactificação para este campo X em \mathcal{U}_2 é

$$Z = (\dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{1}{\Delta(z)} (z_1(3az_2 + 2bz_1 - c), z_2(2az_2 + bz_1 - c))$$

e os pontos singulares infinitos são $(\frac{c}{2b}, 0)$ e $(0, 0)$.

- Se $c \neq 0$ teremos $(0, 0)$ é um nó;
- Se $c = 0$ o ponto é linearmente nulo;
- Se $bc \neq 0$ teremos $|JZ(0, 0)| = -\frac{c^2}{2}$ e portanto o ponto é do tipo sela.

Utilizando a classificação dos pontos singulares, as curvas de nível de H e sabendo que $x = 0, y = 0, 2a + 2bx - cy = 0$ são curvas invariantes do sistema, teremos que os possíveis retratos de fase no disco de Poincaré para este campo vetorial são:

- Se $abc \neq 0$, o retrato de fase do campo vetorial será topologicamente equivalente ao retrato da figura 3.1 item \mathcal{P}_1 ;
- Se $a = 0$ então $bc \neq 0$ (caso contrário H teria grau 2) e portanto a única singularidade finita é $(0, 0)$, que é linearmente nulo. Assim o retrato de fase do campo vetorial é equivalente a figura 3.1 item \mathcal{P}_2 ;
- Se $bc = 0$ mas $b^2 + c^2 \neq 0$ e $a \neq 0$ teremos apenas 2 pontos singulares finitos dos quatro descritos acima, dependendo se c ou b é zero. Então o retrato de fase é topologicamente equivalente a figura 3.1 item \mathcal{P}_3 .

Isso demonstra a seguinte proposição:

Proposição 4.2.1. *O retrato de fase de um campo vetorial polinomial com uma integral primeira racional $H = \frac{H_1}{H_2}$ de grau 3, onde H é da forma $S1$, é topologicamente equivalente ao retrato de fase da figura 3.1 item \mathcal{P}_1 se $abc \neq 0$, a \mathcal{P}_2 se $a = 0$ e $bc \neq 0$ e \mathcal{P}_3 se $bc = 0$ mas $b^2 + c^2 \neq 0$ e $a \neq 0$.*

(S2) Seja

$$X = (abx + acx^2, -2aby + bdy^2)$$

um campo vetorial e

$$H = \frac{x^2y}{2b^2a + 4bcax + 2c^2ax^2 - b^2dy - 2cdxy}$$

sua integral primeira.

O campo vetorial X possui 4 singularidades finitas, se $dc \neq 0$,

$$(0, 0), \left(-\frac{b}{c}, 0\right), \left(-\frac{b}{c}, \frac{2a}{d}\right), \left(0, \frac{2a}{d}\right).$$

- O ponto $(0, 0)$ é um ponto do tipo sela, pois $|JX(0, 0)| = -2a^2b^2$.
- O ponto $(-\frac{b}{c}, 0)$ é um nó, pois $|JX(-\frac{b}{c}, 0)| = 2a^2b^2$ e $tr(-\frac{b}{c}, 0) = -3ab$.
- O ponto $(-\frac{b}{c}, \frac{2a}{d})$ é do tipo sela, pois $|JX(-\frac{b}{c}, \frac{2a}{d})| = -2a^2b^2$.
- O ponto $(0, \frac{2a}{d})$ é um nó, pois $|JX(0, \frac{2a}{d})| = 2a^2b^2$ e $tr(0, \frac{2a}{d}) = 3ab$.

Se $c = 0$ e $d \neq 0$ teremos como singularidades finitas $(0, 0)$ e $(0, \frac{2a}{d})$, que são uma sela e um nó, respectivamente.

Se $d = 0$, mas $c \neq 0$, teremos $(0, 0)$ e $(-\frac{b}{c}, 0)$ como singularidades finitas, que serão sela e nó, respectivamente.

A compactificação em \mathcal{U}_1 é

$$Z = (\dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{1}{\Delta(z)}(-z_1(3abz_2 - bdz_1 + ac), -z_2(abz_2 + ac)).$$

Em \mathcal{U}_1 temos como pontos singulares infinitos $(0, 0)$, $(\frac{ac}{bd}, 0)$.

- O ponto $(\frac{ac}{bd}, 0)$ é um ponto do tipo sela, pois $|JZ(\frac{ac}{bd}, 0)| = -a^2c^2$.
- O ponto $(0, 0)$ é um nó, pois $|JZ(0, 0)| = a^2c^2$ e $tr(0, 0) = -2ac$.

Já em \mathcal{U}_2 , a compactificação é

$$Z = (\dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{1}{\Delta(z)}(z_1(3abz_2 + acz_1 - bd), z_2(2abz_2 - bd))$$

e os pontos singulares infinitos são $(0, 0)$, $(\frac{bd}{ac}, 0)$.

- O ponto $(0, 0)$ é um nó, pois $|JZ(0, 0)| = b^2d^2$ e $tr(0, 0) = -2bd$.
- O ponto $(\frac{bd}{ac}, 0)$ é do tipo sela, pois $|JZ(\frac{bd}{ac}, 0)| = -b^2d^2$.

Observação 4.2.1.

Note que não podemos ter $c = d = 0$, pois H seria polinomial;

Também não podemos ter $b = 0$ ou $a = 0$, pois H teria grau 2;

Se tivermos apenas $d = 0$, em \mathcal{U}_2 apenas $(0, 0)$ é singularidade infinita, que seria linearmente nulo.

Utilizando as informações acima obtidas sobre os pontos singulares, utilizando as curvas de nível de H e sabendo que $x = 0$, $y = 0$ e a cônica $2b^2a + 4bcax + 2c^2ax^2 - b^2dy - 2cdxy = 0$ são curvas invariantes do sistema, obtemos:

- se $abcd \neq 0$, o retrato de fase do campo vetorial no disco de Poincaré é equivalente a figura 3.1 item \mathcal{P}_1
- se $cd = 0$, mas $d^2 + c^2 \neq 0$, o retrato de fase do campo vetorial será equivalente a figura 3.1 item \mathcal{P}_3 .

Isso resume a seguinte Proposição:

Proposição 4.2.2. *O retrato de fase de um campo vetorial polinomial quadrático com uma integral primeira $H = \frac{H_1}{H_2}$ de grau 3 onde H é como em S^2 , com $ab \neq 0$, é topologicamente equivalente ao retrato de fase da figura 3.1 item \mathcal{P}_1 se $cd \neq 0$ e \mathcal{P}_3 se $cd = 0$ e $c^2 + d^2 \neq 0$.*

(S3) Dado o sistema

$$X = (ax + bx^2 - cxy, -2y(a + cy)),$$

e sua integral primeira

$$H = \frac{x^2y}{(a + bx + cy)^2},$$

temos que as singularidades finitas são $(0, 0)$, $(-\frac{a}{b}, 0)$, $(0, -\frac{a}{c})$, $(-\frac{2a}{b}, -\frac{a}{c})$, se $abc \neq 0$

- $|JX(0, 0)| = -2a^2$ e portanto este ponto é do tipo sela;
- $|JX(-\frac{a}{b}, 0)| = 2a^2$ e $tr(-\frac{a}{b}, 0) = -3a$ de onde obtemos que o ponto é um nó;
- $|JX(0, -\frac{a}{c})| = 4a^2$ e $tr(0, -\frac{a}{c}) = 4a$ portanto $(0, -\frac{a}{c})$ um nó;
- $|JX(-\frac{2a}{b}, -\frac{a}{c})| = -4a^2$ daí este ponto é do tipo sela.

O campo X possui como compactificação em \mathcal{U}_1

$$Z = (\dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{1}{\Delta(z)}(z_1(-3az_2 - cz_1 - b), (-az_2 - b + cz_1)z_2).$$

Assim em \mathcal{U}_1 temos como singularidades infinitas $(0, 0)$, $(-\frac{b}{c}, 0)$, se $bc \neq 0$.

- $|JZ(0, 0)| = b^2$ e $tr(0, 0) = -2b$ e portanto o ponto é um nó, se $b \neq 0$;
- $|JZ(-\frac{b}{c}, 0)| = -2b^2$, de onde concluímos que o ponto é do tipo sela, se $cb \neq 0$.

A compactificação do campo X em \mathcal{U}_2 tem como expressão

$$Z = (\dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{1}{\Delta(z)}(z_1(3az_2 + bz_1 + c), 2z_2(az_2 + c))$$

e como pontos singulares infinitos $(0, 0)$, $(-\frac{c}{b}, 0)$, se $bc \neq 0$

- $|JZ(0, 0)| = 2c^2$ e $tr(0, 0) = 3c$ e portanto o ponto é do tipo nó, se $c \neq 0$.
- $|JZ(-\frac{c}{b}, 0)| = -2c^2$ daí o ponto é do tipo sela, se $c \neq 0$.

Observação 4.2.2.

Se $a = 0$ teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade finita, que é linearmente nulo. As singularidades infinitas permanecem as mesmas acima descritas;

Se $b = 0$ teremos apenas 2 das quatro singularidades finitas acima. No infinito teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita tanto em \mathcal{U}_1 quanto em \mathcal{U}_2

Se $c = 0$ teremos apenas 2 singularidades das 4 acima descritas; No infinito teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade, tanto em \mathcal{U}_1 quanto em \mathcal{U}_2 ;

Aqui sempre devemos ter $a^2 + b^2 \neq 0$ ou $a^2 + c^2 \neq 0$ ou $b^2 + c^2 \neq 0$, caso contrário H teria grau 2.

Então, observando as curvas de nível da integral primeira, e observando que $x = 0$, $y = 0$ e $a + bx + cy = 0$ também são curvas invariantes do sistema, teremos que os possíveis retratos de fase para este campo vetorial são:

- se $abc \neq 0$ será equivalente a \mathcal{P}_1
- se $a \neq 0$ e $bc = 0$ mas $b^2 + c^2 \neq 0$ teremos que o retrato de fase é equivalente a figura 3.1 item \mathcal{P}_3 ,
- se $a = 0$ e $bc \neq 0$ temos que o retrato de fase será equivalente a figura 3.1 item \mathcal{P}_2

Assim temos a seguinte Proposição:

Proposição 4.2.3. *O retrato de fase de um campo vetorial polinomial quadrático com integral primeira racional de grau 3 $H = \frac{H_1}{H_2}$ é topologicamente equivalente ao retrato de fase da figura 3.1 item \mathcal{P}_1 se $abc \neq 0$, \mathcal{P}_3 se $bc = 0$ mas $b^2 + c^2 \neq 0$ e $a \neq 0$ e \mathcal{P}_2 se $a = 0$ e $bc \neq 0$.*

(S4) Dado o campo vetorial $X = (2ax + bx^2 - 2cxy, -4ay + bxy - 2cy^2)$ e sua integral primeira

$$H = \frac{x^2y}{8a^3 + 12a^2bx + 6ab^2x^2 + b^3x^3 + 12a^2cy + 12abcxy + 6ac^2y^2 + 3bcxy^2 + c^3y^3},$$

temos que suas singularidades finitas são $(0, 0)$, $(0, -\frac{2a}{c})$, $(-\frac{2a}{b}, 0)$, $bc \neq 0$.

Se $abc \neq 0$ temos que

- $|JX(0, 0)| = -8a^2$. Então ponto é do tipo sela;
- $|JX(0, -\frac{2a}{c})| = 24a^2$ e $tr(0, -\frac{2a}{c}) = 10a$. Então o ponto é do tipo nó;
- $|JX(-\frac{2a}{b}, 0)| = 12a^2$ e $tr(-\frac{2a}{b}, 0) = -8a$. Então o ponto é do tipo nó.

Se $bc = 0$, mas $b^2 + c^2 \neq 0$, temos apenas duas das três singularidades finitas acima.

A compactificação para este campo em \mathcal{U}_1 é

$$Z = (\dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{1}{\Delta(z)}(-6az_1z_2, -z_2(2az_2 + b - 2cz_1))$$

e em \mathcal{U}_2

$$Z = (\dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{1}{\Delta(z)}(6az_1z_2, z_2(4az_2 - bz_1 + 2c)).$$

Portanto todo o equador é composto por singularidades.

Sabendo que $x = 0, y = 0$ e $8a^3 + 12a^2bx + 6ab^2x^2 + b^3x^3 + 12a^2cy + 12abcxy + 6ac^2y^2 + 3bcxy^2 + c^3y^3 = 0$ e as curvas de nível de H são curvas invariantes do sistema, temos que os possíveis retratos de fase do sistema são:

- se $abc \neq 0$ o retrato de fase será equivalente a figura 3.1 item \mathcal{P}_5 .
- se $bc = 0$, mas $b^2 + c^2 \neq 0$ teremos que o retrato de fase será equivalente a figura 3.1 item \mathcal{P}_8

Observação 4.2.3.

Não podemos ter $b = c = 0$, caso contrário o campo vetorial não seria quadrático.

Não podemos ter $a = 0$, caso contrário o campo se comportaria como um campo linear, uma vez que $bx - 2cy$ seria um fator comum às entradas.

Assim temos a seguinte proposição.

Proposição 4.2.4. *O retrato de fase de um campo vetorial polinomial quadrático com integral primeira $H = \frac{H_1}{H_2}$ de grau 3 onde H é como em S4 com $a \neq 0$, é topologicamente equivalente ao retrato de fase \mathcal{P}_5 da figura 3.1 se $bc \neq 0$ e ao \mathcal{P}_8 se $bc = 0$ mas $b^2 + c^2 \neq 0$.*

(S5) e (S6) Sejam os campo vetoriais

$$X = (abx + acx^2, cd + cex + 3aby + caxy)$$

e

$$\widehat{X} = (2abx + 2acx^2, 3bd + ebx + 2dcx + 3aby + 2acxy)$$

e suas respectivas integrais primeiras

$$H = \frac{x^3}{2bcd + 3c^2dx + 3bcex + 6c^2ex^2 + 6b^2ay + 12bcaxy + 6c^2ax^2y}$$

e

$$\widehat{H} = \frac{x^3}{d^2b + (2db + d^2c)x + (e^2b + 2dec)x^2 + 2daby + a^2by^2 + 2aebxy + 2dacxy + 2aecx^2y + a^2cxy}$$

Para o campo X , temos que os pontos singulares finitas são $(0, -\frac{cd}{3ab})$, $(-\frac{b}{c}, \frac{be-cd}{2ab})$.
Daí

- $|JX(0, 0)| = 3a^2b^2$ e $tr(0, 0) = 4ab$, portanto o ponto $(0, 0)$ é um nó.
- $|JX(-\frac{b}{c}, \frac{be-cd}{2ab})| = -2a^2b^2$ e portanto o ponto é do tipo sela.

A compactificação para o campo X em \mathcal{U}_1 tem como expressão

$$Z_X = (\dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{1}{\Delta(z)}(z_2(cdz_2 + ce + 2abz_1), -z_2a(bz_2 + c))$$

e em \mathcal{U}_2

$$Z_X = (\dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{1}{\Delta(z)}(-z_1z_2(2ab + cdz_2 + cez_1), -z_2(cdz_2^2 + cez_1z_2 + 3abz_2 + caz_1))$$

Note que em ambas compactificações z_2 é um fator comum às coordenadas dos campos vetoriais. Com isso todo ponto sobre o equador da esfera de Poincaré é um ponto singular. Ao dividirmos ambas coordenadas das compactificações pelo fator z_2 , fazemos uma alteração no campo vetorial mas não alteramos as trajetórias. Portanto nossa nova compactificação tem como expressão:

- em \mathcal{U}_1 ,

$$\frac{1}{\Delta(z)}(cdz_2 + ce + 2abz_1, -a(bz_2 + c))$$

- em \mathcal{U}_2 ,

$$\frac{1}{\Delta(z)}(-z_1(2ab + cdz_2 + cez_1), -cdz_2^2 - cez_1z_2 - 3abz_2 - caz_1).$$

Neste novo campo, observe que não há singularidades infinitas \mathcal{U}_1 . Por outro lado, em \mathcal{U}_2 , temos que $(0, 0)$ é ponto singular infinito, o qual é um nó atrator se $ab > 0$ ou repulsor se $ab < 0$.

Além das curvas de nível de H , temos que as retas $x = 0, x = -\frac{b}{c}$ são curvas invariantes do sistema. Portanto o retrato de fase de X no disco de Poincaré é equivalente a \mathcal{P}_8

Já para o sistema \widehat{X} temos que as singularidades finitas são $(0, -\frac{d}{a})$ e $(-\frac{b}{c}, \frac{eb-dc}{ac})$ onde o primeiro é um nó e o segundo um ponto de sela.

As compactificações para este campo são

$$\frac{z_2}{\Delta(z)}(z_1(3bdz_2 + abz_1 + eb + 2cdz_1), -2a(bz_2 + c)),$$

em \mathcal{U}_1 ,

e

$$-\frac{z_2}{\Delta(z)}(z_1(ab + 3bdz_2 + ebz_1 + 2dcz_1), 3bdz_2^2 + ebz_1z_2 + 2dcz_1z_2 + 3abz_2 + 2acz_1),$$

em \mathcal{U}_2 .

Analogamente ao campo anterior, temos que todo o equador da esfera é composto por pontos singulares. Segue que o retrato de fase para este campo é topologicamente equivalente ao anterior.

Observação 4.2.4.

Note que não podemos ter $c = 0$, $b = 0$ ou $d = 0$. Caso contrário o campo não seria de grau 2 ou a integral primeira não teria grau 3.

Proposição 4.2.5. *O retrato de fase de um campo vetorial polinomial planar quadrático com integral primeira racional $H = \frac{H_1}{H_2}$, de grau 3, onde H é da forma $S5$ ou $S6$ é topologicamente equivalente ao retrato de fase tipo \mathcal{P}_8 , na figura 3.1.*

$S7$ e $S8$ Dado o campo vetorial

$$X = (abx - bx^2, 2ac + a^2d - 3cx - 3dx - 3dx^2 + 2aby - 3bxy)$$

e sua integral primeira

$$H = \frac{x^2(x - a)}{2c + ad + 3dx + 2by},$$

temos que suas singularidades finitas são $(0, \frac{-2c-ad}{2b})$ e $(a, \frac{-c-2ad-3d}{b})$.

Calculando o Jacobiano e o traço em cada um desses pontos obtemos

- $|JX(a, \frac{-c-2ad-3d}{b})| = a^2b^2$ e $tr(a, \frac{-c-2ad-3d}{b}) = -2ab$, o que implica que o ponto é um nó;
- $|JX(0, \frac{-2c-ad}{2b})| = 2a^2b^2$ e $tr(0, \frac{-2c-ad}{2b}) = 3ab$ e portanto o ponto é um nó.

A compactificação para este campo, em \mathcal{U}_1 , tem como expressão

$$Z(z_1, z_2) = \frac{1}{\Delta(z)}((2ac + a^2d)z_2^2 + abz_1z_2 + (-3c - 3d)z_2 - 2bz_1 - 3d, -z_2b(az_2 - 1))$$

que possui como ponto singular infinito $(-\frac{3d}{2b}, 0)$, o qual é do tipo sela, pois $|JX(-\frac{3d}{2b}, 0)| = -2b^2$.

Por outro lado, a compactificação em \mathcal{U}_2 tem como expressão

$$Z(z_1, z_2) = \frac{1}{\Delta(z)}(3dz_1^3 + 2bz_1^2 + (3c + 3d)z_2z_1^2 - abz_1z_2 + (-2ac - a^2d)z_2^2z_1, 3dz_2z_1 - 1^2 + (3c + 3d)z_1z_2^2 + 3bz_1z_2 + (-2ac - a^2d)z_2^3 - 2abz_2^2),$$

que possui como singularidades infinitas $(0, 0)$ e $(-\frac{2b}{3a}, 0)$.

O ponto $(-\frac{2b}{3a}, 0)$ é do tipo sela. Já o ponto $(0, 0)$ é linearmente nulo, pois $JX(0, 0) \equiv 0$. Fazendo *Blowing Up*, obteremos

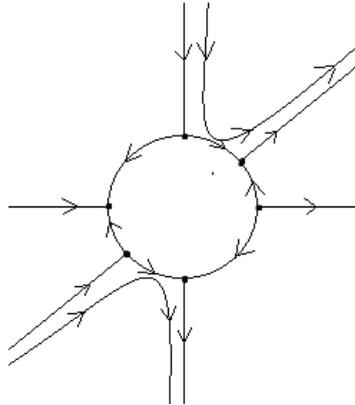


Figura 4.1: Blowing Up

e portanto na vizinhança de $(0, 0)$ o retrato de fase é equivalente a

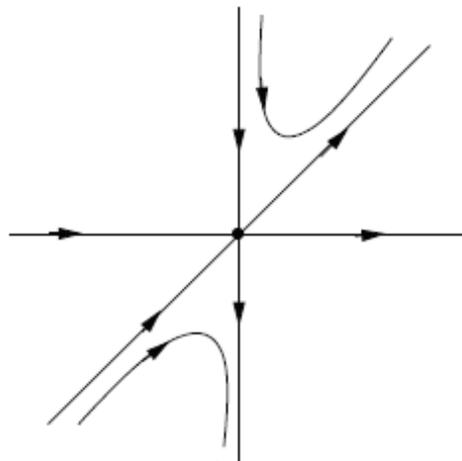


Figura 4.2: Blowing Down

Fonte:Extraída e modificada da Referência [10]

Observe que as retas $x = 0$, $x = a$ e $2c + ad + 3dx + 2by = 0$ são curvas invariantes do sistema, além é claro das curvas de nível de H . Então o retrato de fase desse campo no disco de Poincaré é topologicamente equivalente a figura 3.1 item \mathcal{P}_4 .

Para o campo vetorial (S8), $X = (-2adx + 2dx^2, -2ab + 3bx + cx^2 - 2ady + 3dxy)$, o retrato de fase é o mesmo do anterior, pois as expressões são praticamente as mesmas.

Observação 4.2.5.

Não podemos ter $ab = 0$ em $S7$, pois o sistema teria fatores em comum.

Analogamente, não podemos ter $ad = 0$ em $S8$, pois o sistema teria fatores em comum.

Proposição 4.2.6. *O retrato de fase de um campo vetorial polinomial quadrático com integral primeira racional de grau 3 $H = \frac{H_1}{H_2}$ com H da forma (S7) ou S8 e $ab \neq 0$ em S7 e $ad \neq 0$ em S8 é topologicamente equivalente ao retrato de fase \mathcal{P}_4 , na figura 3.1.*

(S9) Para o sistema

$$X = (6acx - 6cx^2, 2ab - 3bx - adx + 4acy - 6cxy)$$

e sua integral primeira

$$H = \frac{x^2(x-a)}{b^3 + 3b^2dx + 3bd^2x^2 + ad^3x^3 + 6b^2cy + 12bcdxy + 6cd^2x^2y + 12bc^2y^2 + 12c^2dxy^2 + 8c^3y^3}$$

temos que as singularidades finitas são $(0, -\frac{b}{2c})$ e $(a, -\frac{b+ad}{c})$ que são nós.

A compactificação de Poincaré para este campo em \mathcal{U}_1 é

$$Z = (\dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{\dot{z}_2}{\Delta(z)}(2abz_2 - 3b - ad - 2acz_1, -6c(az_2 - 1)).$$

e em \mathcal{U}_2 é

$$Z = (\dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{-\dot{z}_2}{\Delta(z)}(z_1(-2ac + 2abz_2 - 3bz_1 - adz_1), 2abz_2^2 - 3bz_1z_2 - adz_1z_2 + 4acz_2 - 6cz_1).$$

De onde obtemos que todo o equador de \mathbb{S}^2 é constituído de pontos singulares, sendo que $(0, 0)$ é um ponto do tipo sela em \mathcal{U}_2 , pois após eliminarmos o fator comum z_2 obteremos que $|JZ(0, 0)| = -8a^2c^2$.

Temos que as retas $x = 0$, $x = a$ e a curva $b^3 + 3b^2dx + 3bd^2x^2 + ad^3x^3 + 6b^2cy + 12bcdxy + 6cd^2x^2y + 12bc^2y^2 + 12c^2dxy^2 + 8c^3y^3 = 0$ são invariantes do sistema, além é claro das curvas de nível de H . Segue daí que o retrato de fase no disco de Poincaré para este campo vetorial é equivalente a \mathcal{P}_7 , na figura 3.1.

Observação 4.2.6. *Note que devemos ter $ac \neq 0$, caso contrário X não seria de grau 2.*

Com isso temos a Proposição:

Proposição 4.2.7. *O retrato de fase de um campo vetorial polinomial quadrático com integral primeira racional $H = \frac{H_1}{H_2}$ de grau 3 onde H é da forma S9, com $ac \neq 0$ é topologicamente ao retrato de fase \mathcal{P}_7 , na figura 3.1.*

(S10.1) Se $e = f = 0$ em (S10), teremos como campo vetorial $X = (2ax^2 + 2bxy, 2cx + 2dx^2 + 4axy + 3by^2)$ e sua integral primeira

$$H = \frac{x^3}{cx + 2dx^2 + 2axy + by^2}.$$

Os pontos singulares finitos são $(0, 0)$, $(\frac{2cb}{a^2-2db}, -\frac{2ac}{a^2-2db})$, se $a^2 - 2db \neq 0$, portanto,

- $|JX(0, 0)| = tr(0, 0) = 0$ mas $JX(0, 0) \neq 0$ se $c \neq 0$. Então o ponto é do tipo nilpotente²(ver Proposição 1.3.2). Se $c = 0$ teremos uma única singularidade finita $(0, 0)$ e o ponto será linearmente nulo.
- $|JX(\frac{2cb}{a^2-2db}, -\frac{2ac}{a^2-2db})| = \frac{8b^2c^2}{a^2-2db}$ e $tr(\frac{2cb}{a^2-2db}, -\frac{2ac}{a^2-2db}) = 0$. Então se $a^2 - 2db < 0$ teremos que o ponto é do tipo sela. Se $a^2 - 2db > 0$ teremos que o ponto é do tipo centro.

A compactificação para este campo vetorial, em \mathcal{U}_1 , tem como expressão

$$Z = (\dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{1}{\Delta(z)}(2cz_2 + 2d + 4az_1 + 3bz_1^2 - z_1(2a + 2bz_1), -2z_2(a + bz_1)).$$

Assim as singularidades infinitas, em \mathcal{U}_1 , são $(\frac{-a+\sqrt{a^2-2bd}}{b}, 0)$ e $(\frac{-a-\sqrt{a^2-2bd}}{b}, 0)$, se $a^2 - 2bd > 0$ e $b \neq 0$. Se $a^2 - 2bd = 0$ temos apenas uma singularidade finita no ponto $(-\frac{a}{b}, 0)$. Se $a^2 - 2bd < 0$, não existem pontos singulares infinitos.

- Se $a^2 - 2bd > 0$ ambos os pontos singulares infinitos em \mathcal{U}_1 são do tipo sela, pois $|JZ(\frac{-a\pm\sqrt{a^2-2bd}}{b}, 0)| = -4(a^2 - 2bd)$;
- Se $a^2 - 2bd = 0$ teremos $(-\frac{a}{b}, 0)$ é linearmente nulo.

A compactificação para o campo X em \mathcal{U}_2 tem como expressão

$$Z = (\dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{1}{\Delta(z)}(-2az_1^2 - bz_1 - 2cz_1^2z_2 - 2dz_1^3, -z_2(2cz_1z_2 + 2dz_1^2 + 4az_1 + 3b))$$

Assim as singularidades infinitas, em \mathcal{U}_2 , são $(0, 0)$, $(\frac{-a\pm\sqrt{a^2-2db}}{2b}, 0)$:

- $|JZ(0, 0)| = 3b^2$ e $tr(0, 0) = -4b$. Portanto $(0, 0)$ é um nó.

Se $a^2 - 2bd > 0$ e $c \neq 0$ temos que o retrato de fase é topologicamente equivalente a \mathcal{P}_{15} , na figura 3.1.

Se $a^2 - 2db < 0$ e $c \neq 0$, não temos singularidades infinitas, em \mathcal{U}_1 , mas temos uma única em \mathcal{U}_2 . Portanto o retrato de fase do campo vetorial será equivalente a \mathcal{P}_{21} , na figura 3.1.

²Devido a extensão e repetição dos cálculos para a determinação do retrato de fase na vizinhança dos pontos nilpotentes, os mesmos foram aqui omitidos neste item e nos demais

Se $a^2 - 2bd = 0$ e $c \neq 0$ temos apenas uma singularidade finita e 4 singularidades infinitas e portanto o retrato de fase será equivalente a \mathcal{P}_{25} , na figura 3.1.

Se $c = 0$ e $a^2 - 2bd < 0$ temos apenas uma singularidade finita e 2 singularidades infinitas e portanto será equivalente a \mathcal{P}_{22} , na figura 3.1.

Se $c = 0$ e $a^2 - 2bd > 0$ temos apenas uma singularidade finita 6 singularidades infinitas e portanto o retrato de fase será equivalente a \mathcal{P}_{16} , na figura 3.1.

Observação 4.2.7.

Não podemos ter $c = a^2 - 2bd = 0$, caso contrário o sistema seria linear.

S10.2

Suponhamos $ef \neq 0$

1. 1º caso: $abcd \neq 0$

(a) Se $9e^2 - 6bf > 0$ os pontos $\left(0, \frac{1}{3} \frac{-3e + \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b}\right)$ e $\left(0, \frac{1}{3} \frac{-3e - \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b}\right)$ são singularidades finitas. Se também tivermos $c^2 a^2 b^2 - 4ca^3 be + e^2 a^4 + 6e^2 a^2 db - 4db^2 f a^2 + 2ba^4 f > 0$ e $(-2db + a^2) \neq 0$ também teremos

$$A = \left(-\frac{2ea^2 - cab + \sqrt{a^2(c^2b^2 - 4cabe + e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)}}{(-2db + a^2)a}, \frac{-cab + ea^2 + 2deb}{b(-2db + a^2)} + \frac{\sqrt{c^2a^2b^2 - 4ca^3be + e^2a^4 + 6e^2a^2db - 4db^2fa^2 + 2ba^4f}}{b(-2db + a^2)} \right);$$

$$B = \left(\frac{-2ea^2 + cab + \sqrt{a^2(c^2b^2 - 4cabe + e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)}}{(-2db + a^2)a}, \frac{cab - ea^2 - 2deb}{b(-2db + a^2)} - \frac{\sqrt{c^2a^2b^2 - 4ca^3be + e^2a^4 + 6e^2a^2db - 4db^2fa^2 + 2ba^4f}}{b(-2db + a^2)} \right)$$

como singularidades finitas.

A matriz jacobiana associada a X é

$$JX(p, q) = \begin{bmatrix} 2e + 4ap + 2bq & 2bp \\ 2c + 4dp + 4aq & 6e + 4ap + 6bq \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\left| JX \left(0, \frac{1}{3} \frac{-3e + \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b} \right) \right| = 12e^2 - 8bf, \quad tr \left(0, \frac{1}{3} \frac{-3e + \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b} \right) = \frac{8}{3} \sqrt{9e^2 - 6bf},$$

$$\left| JX \left(0, \frac{1}{3} \frac{-3e - \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b} \right) \right| = 12e^2 - 8bf, \quad tr \left(0, \frac{1}{3} \frac{-3e - \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b} \right) = -\frac{8}{3} \sqrt{9e^2 - 6bf}.$$

$$|JX(A)| = \frac{4}{a^2(-2db + a^2)} \left(-2ea^2 + cab + \sqrt{a^2(c^2b^2 - 4cabe + e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)} \right) \\ \cdot \sqrt{a^2(c^2b^2 - 4cabe + e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)}$$

$$tr(A) = 0$$

$$|JX(B)| = \frac{4}{a^2(-2db + a^2)} \left(2ea^2 - cab + \sqrt{a^2(c^2b^2 - 4cabe + e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)} \right) \\ \cdot \sqrt{a^2(c^2b^2 - 4cabe + e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)}$$

$$tr(B) = 0$$

Como sabemos, dependendo dos valores de $|JX(p)|$ e de $tr(p)$ podemos classificar a singularidade. Então para os pontos A e B temos

- Se $9e^2 - 6bf > 0$ e $a^2 - 2bd > 0$ teremos $a^2(-3e^2 + 2bf)(-2db + a^2) < 0$ de onde obtemos $\sqrt{a^2(c^2b^2 - 4cabe + e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)} < |-2ea^2 + cab|$. Daí, se $-2ea^2 + cab < 0$ obteremos que $|JX(A)| < 0$ e o ponto será de sela. Se $-2ea^2 + cab > 0$ termos que $|JX(A)| > 0$ e o ponto será centro.
- Se $9e^2 - 6bf > 0$ e $a^2 - 2bd > 0$ teremos $a^2(-3e^2 + 2bf)(-2db + a^2) < 0$ de onde obtemos $\sqrt{a^2(c^2b^2 - 4cabe + e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)} < |2ea^2 - cab|$. Daí se $2ea^2 - cab < 0$ $|JX(B)| < 0$ e o ponto será de sela. Se $2ea^2 - cab > 0$ termos que $|JX(B)| > 0$ e o ponto será centro ou foco fraco.
- Se $9e^2 - 6bf > 0$ e $a^2 - 2bd < 0$ teremos $a^2(-3e^2 + 2bf)(-2db + a^2) > 0$ de onde obtemos que $\sqrt{a^2(c^2b^2 - 4cabe + e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)} > |-2ea^2 + cab|$. Se $-2ea^2 + cab > 0$ ou $-2ea^2 + cab < 0$ teremos que $|JX(A)| < 0$ e o ponto será de sela.
- Se $9e^2 - 6bf > 0$ e $a^2 - 2bd < 0$ teremos $a^2(-3e^2 + 2bf)(-2db + a^2) > 0$ de onde obtemos que $\sqrt{a^2(c^2b^2 - 4cabe + e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)} > |2ea^2 - cab|$. Se $2ea^2 - cab > 0$ ou $2ea^2 - cab < 0$ teremos que $|JX(B)| < 0$ e o ponto será de sela.

O ponto $\left(0, \frac{1}{3} \frac{-3e + \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b}\right)$ é um nó estável e $\left(0, \frac{1}{3} \frac{-3e - \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b}\right)$ é um nó instável.

- (b) Se $9e^2 - 6bf > 0$, e $c^2a^2b^2 - 4ca^3be + e^2a^4 + 6e^2a^2db - 4db^2fa^2 + 2ba^4f < 0$ teremos apenas $\left(0, \frac{1}{3} \frac{-3e + \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b}\right)$ e $\left(0, \frac{1}{3} \frac{-3e - \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b}\right)$ como singularidades finitas, que vimos acima que são nós.

Afirmção 1. Se $9e^2 - 6bf < 0$ e $a^2 - 2bd > 0$ então $c^2b^2 - 4cabe + e^2a^2 +$

$$6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f > 0$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} & a^2(c^2b^2 - 4cbea + e^2a^2 + 2a^2fb - 4b^2df + 6bde^2) - (2ea^2 - cab)^2 = \\ & = -3a^4e^2 + 2a^4fb - 4a^2b^2df + 6a^2bde^2 \\ & = a^2(-3e^2 + 2fb)(-2bd + a^2) > 0. \end{aligned}$$

$$\text{Daí, } a^2(c^2b^2 - 4cbea + e^2a^2 + 2a^2fb - 4b^2df + 6bde^2) > (2ea^2 - cab)^2 \geq 0 \quad \square$$

Da afirmação anterior segue que sempre teremos exatamente 2 pontos singulares finitos se $9e^2 - 6bf < 0$ e $a^2 - 2bd > 0$.

- (c) Se $9e^2 - 6bf < 0$ e $(a^2 - 2db) > 0$ teremos apenas A e B como singularidades finitas. Vimos anteriormente que

$$|JX(A)| = \frac{4}{a^2(-2db + a^2)} \left(-2ea^2 + cab + \sqrt{a^2(c^2b^2 - 4cabe + e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)} \right) \\ \cdot \sqrt{a^2(c^2b^2 - 4cabe + e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)}$$

$$tr(A) = 0$$

$$|JX(B)| = \frac{4}{a^2(-2db + a^2)} \left(2ea^2 - cab + \sqrt{a^2(c^2b^2 - 4cabe + e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)} \right) \\ \cdot \sqrt{a^2(c^2b^2 - 4cabe + e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)}$$

$$tr(B) = 0$$

e como $\sqrt{a^2(c^2b^2 - 4cabe + e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)} > |-2ea^2 + cab|$, teremos que A e B são centros.

- (d) Se $9e^2 - 6bf < 0$ e $a^2 - 2bd < 0$ teremos A e B como singularidades se $c^2a^2b^2 - 4ca^3be + e^2a^4 + 6e^2a^2db - 4db^2fa^2 + 2ba^4f > 0$. Daí

- teremos que $a^2(-3e^2 + 2bf)(-2db + a^2) < 0$ e, portanto,

$$\sqrt{a^2(c^2b^2 - 4cabe + e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)} < |-2ea^2 + cab|.$$

Logo, se $-2ea^2 + cab > 0$, $|JX(A)| < 0$ e o ponto será de sela. Se $-2ea^2 + cab < 0$ termos que $|JX(A)| > 0$ e o ponto será centro ou foco fraco.

- teremos $a^2(-3e^2 + 2bf)(-2db + a^2) < 0$ de onde obteremos

$$\sqrt{a^2(c^2b^2 - 4cabe + e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)} < |2ea^2 - cab|.$$

Daí, se $2ea^2 - cab > 0$, $|JX(B)| < 0$ e o ponto será de sela. Se $2ea^2 - cab < 0$ termos que $|JX(B)| > 0$ e o ponto será centro ou foco fraco.

A compactificação para este campo vetorial em \mathcal{U}_1 tem como expressão

$$Z = (\dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{1}{\Delta(z)}(2fz_2^2 + 2cz_2 + 4ez_1z_2 + 2d + 2az_1 + bz_1^2, -2z_2(ez_2 + a + bz_1)).$$

Disso segue que as singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 são $(\frac{-a+\sqrt{a^2-2bd}}{b}, 0)$ e $(\frac{-a-\sqrt{a^2-2bd}}{b}, 0)$, se $a^2 - 2bd > 0$. Se $a^2 - 2bd < 0$ não teremos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 .

A matriz Jacobiana em um ponto (p, q) tem como expressão

$$\begin{bmatrix} 4eq + 2a + 2bp & 4fq + 2c + 4ep \\ -2bq & -4eq - 2a - 2bp \end{bmatrix}$$

Portanto

$$\left| JZ \left(\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 2bd}}{b}, 0 \right) \right| = -4(a^2 - 2db) < 0$$

de onde temos que ambos os pontos são selas.

A compactificação para o campo X em \mathcal{U}_2 é

$$Z = \frac{1}{\Delta(z)}(-z_1(4ez_2 + 2az_1 + b + 2fz_2^2 + 2z_1cz_2 + 2dz_1^2), -z_2(2fz_2^2 + 2z_1cz_2 + 6ez_2 + 2dz_1^2 + 4az_1 + 3b)).$$

Assim, as singularidades infinitas em \mathcal{U}_2 são $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}\frac{-a+\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0)$ e $(\frac{1}{2}\frac{-a-\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0)$, se $a^2 - 2bd > 0$. Se $a^2 - 2bd < 0$ teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita em \mathcal{U}_2 .

Calculando a matriz Jacobiana de Z no ponto (p, q) ,

$$JZ(p, q) = \begin{bmatrix} 4eq - 4ap - b - 2fq^2 - 4pcq - 6dp^2 & -p(4e + 4fq + 2pc) \\ -q(2cq + 4dp + 4a) & -6fq^2 - 4pcq - 12eq - 2dp^2 - 4ap - 3b \end{bmatrix}$$

Daí

- $|JZ(0, 0)| = 3b^2$ e $tr(0, 0) = -4b$ e portanto o ponto é um nó estável se $b > 0$ ou instável se $b < 0$;
- $\left| JZ\left(\frac{1}{2}\frac{-a+\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0\right) \right| = \frac{2(a^2-2bd)(a\sqrt{a^2-2bd}+bd-a^2)}{d^2}$ e $tr\left(\frac{1}{2}\frac{-a+\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0\right) = 0$.
- $\left| JZ\left(\frac{1}{2}\frac{-a-\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0\right) \right| = -\frac{2(a^2-2bd)(a\sqrt{a^2-2bd}+a^2-bd)}{d^2}$ e $tr\left(\frac{1}{2}\frac{-a-\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0\right) = 0$.

Note que se $a^2 - 2bd > 0$ também teremos $a^2 - bd > 0$. Disso segue que $a\sqrt{a^2 - 2bd} < a^2 - bd$ e, portanto, $\left| JZ\left(\frac{1}{2}\frac{-a+\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0\right) \right| < 0$. Dessa forma o ponto é do tipo sela.

Verifica-se que se $a^2 - 2bd > 0$ então $a\sqrt{a^2 - 2bd} \leq |a|\sqrt{a^2 - 2bd} < a^2 - bd$ e $0 < a\sqrt{a^2 - 2bd} + a^2 - bd$. Portanto $-\frac{2}{d^2}(a^2 - 2bd)(a\sqrt{a^2 - 2bd} + a^2 - bd) < 0$. Disso segue que o ponto é sela.

Então temos que os possíveis retratos de fase para este campo vetorial podem ser:

- i. Se $9e^2 - 6bf > 0$, $c^2a^2b^2 - 4ca^3be + e^2a^4 + 6e^2a^2db - 4db^2fa^2 + 2ba^4f > 0$ e $a^2 - 2bd > 0$ teremos um ponto de sela, um centro e 2 nós como singularidades finitas. Já no infinito teremos 2 pontos singulares de sela em \mathcal{U}_1 . Em \mathcal{U}_2 temos 3 pontos singulares infinitos onde um é um nó e os outros dois são pontos de sela. Assim o retrato de fase do campo vetorial é equivalente ao \mathcal{P}_{11} ou \mathcal{P}_{12} .
- ii. Se $9e^2 - 6bf > 0$ e $a^2 - 2bd < 0$ teremos 2 pontos do tipo sela e 2 nós. Aqui não temos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 e em \mathcal{U}_2 teremos apenas $(0, 0)$ que é um nó. Portanto o retrato de fase para este campo vetorial é equivalente ao retrato \mathcal{P}_{17} .
- iii. Se $9e^2 - 6bf > 0$, $c^2a^2b^2 - 4ca^3be + e^2a^4 + 6e^2a^2db - 4db^2fa^2 + 2ba^4f < 0$ e $a^2 - 2bd > 0$ teremos apenas 2 pontos singulares finitos que serão nós. Já no infinito teremos 2 pontos singulares de sela em \mathcal{U}_1 . Em \mathcal{U}_2 temos 3 pontos singulares infinitos onde um é um nó e os outros dois são pontos de sela. Assim o retrato de fase do campo vetorial é equivalente ao \mathcal{P}_{10} .
- iv. Se $9e^2 - 6bf > 0$, e $a^2 - 2bd < 0$ teremos 4 pontos singulares finitos, onde 2 são nós e 2 são selas nós. Aqui não temos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 e em \mathcal{U}_2 teremos apenas $(0, 0)$ que é um nó. Daí o retrato de fase do campo vetorial no disco de Poincaré será equivalente ao \mathcal{P}_{17} .
- v. Se $9e^2 - 6bf < 0$ e $a^2 - 2bd < 0$ teremos apenas duas singularidades finitas que serão uma sela e um centro. Aqui não temos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 . Em \mathcal{U}_2 teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que será um nó. Portanto o retrato de fase será do tipo \mathcal{P}_{18} .
- vi. Se $9e^2 - 6bf < 0$ e $a^2 - 2bd = 0$ teremos apenas uma única singularidade finita que será um centro. Em \mathcal{U}_1 teremos uma única singularidade infinita que será nilpotente³(ver Proposição 1.3.2). Em \mathcal{U}_2 temos duas singularidades infinitas que serão um nó e uma nilpotente. Daí o retrato de fase do campo vetorial será do tipo \mathcal{P}_{23} .
- vii. Se $9e^2 - 6bf > 0$ e $a^2 - 2bd = 0$ teremos 3 singularidades finitas, onde uma será sela, os outros dois serão nós. Em \mathcal{U}_1 teremos apenas uma singularidade finita que será nilpotente. Já em \mathcal{U}_2 teremos duas singularidades onde uma será um nó e a outra nilpotente. Daí o retrato de fase do campo vetorial no disco de Poincaré será do tipo \mathcal{P}_{24} .
- viii. Se $9e^2 - 6bf = 0$ e $a^2 - 2bd = 0$ teremos apenas uma singularidade finita, a qual será nilpotente. Em \mathcal{U}_2 temos apenas uma singularidade infinita, que

³Devido a extensão e repetição dos cálculos para a determinação do retrato de fase na vizinhança dos pontos nilpotentes, os mesmos foram aqui omitidos neste item e nos demais

é um nó. Em \mathcal{U}_1 temos uma única singularidade infinita que é nilpotente. Daí o retrato de fase é do tipo \mathcal{P}_{25} .

- ix. Se $9e^2 - 6bf < 0$ e $a^2 - 2bd > 0$ teremos apenas dois pontos singulares finitos que serão centros. Em \mathcal{U}_1 teremos 2 pontos singulares infinitos que serão selas. Em \mathcal{U}_2 teremos 3 pontos singulares, onde 2 são selas e o outro ponto será um nó. portanto o retrato de fase é do tipo \mathcal{P}_9 .

2. 2º caso $acdef \neq 0$ e $b = 0$.

- (a) Temos que $(0, \frac{-f}{3e})$ e $(\frac{-e}{a}, \frac{-(fa^2 - cea + de^2)}{ea^2})$ são as únicas singularidades finitas.
- $|JX(0, \frac{-f}{3e})| = 12e^2$ e $tr(0, \frac{-f}{3e}) = 8e$. Se $e > 0$ o ponto um nó instável. Se $e < 0$ o ponto é um nó estável.
 - $|JX(\frac{-e}{a}, \frac{-(fa^2 - cea + de^2)}{ea^2})| = -4e^2$ e portanto o ponto é de sela.

A compactificação para o campo X em \mathcal{U}_1 é

$$Z = \frac{1}{\Delta(z)}(2fz_2^2 + 2cz_2 + 4ez_1z_2 + 2d + 2az_1, -2z_2(ez_2 + a)),$$

de onde obtemos uma única singularidade infinita em \mathcal{U}_1 : $(-\frac{d}{a}, 0)$.

Calculando o Jacobiano neste ponto obteremos $|JZ(-\frac{d}{a}, 0)| = -4a^2$ e portanto o ponto é de sela.

A compactificação em \mathcal{U}_2 é

$$Z = \frac{1}{\Delta(z)}(-2z_1(2ez_2 + az_1 + fz_2^2 + cz_1z_2 + dz_1^2), -2z_2(fz_2^2 + cz_1z_2 + 3ez_2 + dz_1^2 + 2az_1)),$$

onde as singularidades infinitas são $(0, 0)$ e $(\frac{-a}{d}, 0)$.

Assim,

- $|JZ(0, 0)| = tr(0, 0) = 0$ e portanto o ponto é linearmente nulo⁴, uma vez que $JZ(0, 0) \equiv 0$.
- $|JZ(-\frac{a}{d}, 0)| = -\frac{4a^4}{d^2}$, de onde concluímos que o ponto é de sela.

Portanto o retrato de fase do campo vetorial é da forma \mathcal{P}_{30}

3. 3º Caso: $bcdef \neq 0$ e $a = 0$.

- (a) Se $9e^2 - 6bf > 0$ temos como pontos singulares finitos $(0, \frac{1}{3} \frac{-3e + \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b})$ e $(0, -\frac{1}{3} \frac{3e + \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b})$. Se também tivermos $c^2b^2 - 4db^2f + 6dbe^2 > 0$ também teremos $(\frac{1}{2} \frac{-cb + \sqrt{c^2b^2 - 4db^2f + 6dbe^2}}{db}, -\frac{e}{b})$ e $(-\frac{1}{2} \frac{cb + \sqrt{c^2b^2 - 4db^2f + 6dbe^2}}{db}, -\frac{e}{b})$ como singularidades finitas.

⁴Aqui e nos demais casos que seguem, os Blow ups e Blowing Downs foram omitidos, devido a extensão e repetição dos cálculos

Calculando a matriz Jacobiana em cada um desses pontos obteremos

$$\begin{aligned} |JX(\frac{1}{2}\frac{-cb+\sqrt{c^2b^2-4db^2f+6dbe^2}}{db}, -\frac{e}{b})| &= -\frac{2(-cb+\sqrt{b(c^2b-4dbf+6de^2)})\sqrt{b(c^2b-4dbf+6de^2)}}{db}; \\ |JX(-\frac{1}{2}\frac{cb+\sqrt{c^2b^2-4db^2f+6dbe^2}}{db}, -\frac{e}{b})| &= -\frac{2(cb+\sqrt{b(c^2b-4dbf+6de^2)})\sqrt{b(c^2b-4dbf+6de^2)}}{db}; \\ |JX(0, \frac{1}{3}\frac{-3e+\sqrt{9e^2-6bf}}{b})| &= 12e^2-8bf; \text{tr}(0, \frac{1}{3}\frac{-3e+\sqrt{9e^2-6bf}}{b}) = -8e+\frac{8}{3}\sqrt{9e^2-6bf}; \\ |JX(0, -\frac{1}{3}\frac{3e+\sqrt{9e^2-6bf}}{b})| &= 12e^2-8bf; \text{tr}(0, -\frac{1}{3}\frac{3e+\sqrt{9e^2-6bf}}{b}) = -8e-\frac{8}{3}\sqrt{9e^2-6bf}. \end{aligned}$$

- i. Se $\sqrt{c^2b^2 - 4db^2f + 6dbe^2} > |cb|$ teremos 2 pontos de sela e 2 nós, pois teríamos $bd > 0$. Por outro lado não temos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 , e, em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que será um nó. Daí, temos que o retrato de fase é do tipo \mathcal{P}_{17} , na figura 3.1.
 - ii. Se $\sqrt{c^2b^2 - 4db^2f + 6dbe^2} < |cb|$, teremos um centro uma sela e dois nós, pois $bd < 0$. Analogamente teremos 2 singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 , onde ambas serão selas. Já em \mathcal{U}_2 , teremos 3 singularidades infinitas, onde duas são selas e uma é um nó. Daí segue que o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{11} , como na figura 3.1.
- (b) Se $9e^2 - 6bf < 0$ a análise das singularidades pode ser feita com base nos cálculos anteriores.
- i. Assim, temos dois pontos singulares finitos, que serão ambos centros se $bd < 0$. No infinito teremos 2 singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 onde ambas serão selas. Da mesma forma, em \mathcal{U}_2 , teremos 3 singularidades infinitas onde 1 será um nó e os outros demais serão selas. Daí o retrato de fase do campo vetorial será do tipo \mathcal{P}_9 , como na figura 3.1.
 - ii. Se $bd > 0$ teremos 2 singularidades finitas que serão um ponto de sela e um centro. Aqui não temos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 e em \mathcal{U}_2 teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita e que é um nó. Daí o retrato de fase será do tipo \mathcal{P}_{18} , como na figura 3.1.
 - iii. Se tivermos $c^2b^2 - 4db^2f + 6dbe^2 < 0$ não teremos singularidades finitas. Então $db > 0$ e o campo vetorial tem apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é um nó, em \mathcal{U}_2 . Não teremos singularidade infinita em \mathcal{U}_1 . Daí o retrato de fase deste campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{19} , como na figura 3.1.
- (c) Se $9e^2 - 6bf > 0$ e $c^2b^2 - 4db^2f + 6dbe^2 < 0$ e apenas duas singularidades finitas que serão nós. Aqui devemos ter necessariamente $db < 0$ e portanto temos três singularidades infinitas e \mathcal{U}_2 , onde teremos que uma singularidade é um nó os outros dois são selas. Em \mathcal{U}_1 , temos duas singularidades infinitas que são pontos de sela. Portanto, o retrato de fase do campo vetorial é equivalente ao retrato \mathcal{P}_{10} , como na figura 3.1.
- (d) se $9e^2 - 6bf = 0$ teremos apenas dois pontos singulares finitos onde um

ponto será uma singularidade semi-hiperbólica e o outro será uma sela se $db > 0$. Portanto o retrato de fase é equivalente ao \mathcal{P}_{21} , como na figura 3.1.

Se $db < 0$ teremos um centro e uma singularidade semi-hiperbólica e portanto o retrato de fase será equivalente ao retrato de fase \mathcal{P}_{15} , como na figura 3.1.

4. 4º caso: $abdef \neq 0$ e $c = 0$

(a) Se $9e^2 - 6bf > 0$ os pontos $\left(0, \frac{1}{3} \frac{-3e + \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b}\right)$ e $\left(0, \frac{1}{3} \frac{-3e - \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b}\right)$ são singularidades finitas. Se também tivermos $e^2a^4 + 6e^2a^2db - 4db^2fa^2 + 2ba^4f > 0$ e $(-2db + a^2) \neq 0$ também teremos

$$A = \left(-\frac{2ea^2 + \sqrt{a^2(e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)}}{(-2db + a^2)a}, \frac{ea^2 + 2deb}{b(-2db + a^2)} + \frac{\sqrt{e^2a^4 + 6e^2a^2db - 4db^2fa^2 + 2ba^4f}}{b(-2db + a^2)} \right);$$

$$B = \left(\frac{-2ea^2 + \sqrt{a^2(e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)}}{(-2db + a^2)a}, -\frac{ea^2 - 2deb}{b(-2db + a^2)} - \frac{\sqrt{e^2a^4 + 6e^2a^2db - 4db^2fa^2 + 2ba^4f}}{b(-2db + a^2)} \right)$$

como singularidades finitas.

A matriz jacobiana associada a X é

$$JX(p, q) = \begin{bmatrix} 2e + 4ap + 2bq & 2bp \\ 4dp + 4aq & 6e + 4ap + 6bq \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\left| JX \left(0, \frac{1}{3} \frac{-3e + \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b} \right) \right| = 12e^2 - 8bf, \quad \text{tr} \left(0, \frac{1}{3} \frac{-3e + \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b} \right) = \frac{8}{3} \sqrt{9e^2 - 6bf},$$

$$\left| JX \left(0, \frac{1}{3} \frac{-3e - \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b} \right) \right| = 12e^2 - 8bf, \quad \text{tr} \left(0, \frac{1}{3} \frac{-3e - \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b} \right) = -\frac{8}{3} \sqrt{9e^2 - 6bf}.$$

$$|JX(A)| = \frac{4}{a^2(-2db + a^2)} \left(-2ea^2 + \sqrt{a^2(e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)} \right) \cdot \sqrt{a^2(e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)}.$$

$$\text{tr}(A) = 0.$$

$$|JX(B)| = \frac{4}{a^2(-2db + a^2)} \left(2ea^2 + \sqrt{a^2(e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)} \right) \cdot \sqrt{a^2(e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)}.$$

$$tr(B) = 0.$$

Como sabemos, dependendo dos valores de $|JX(p)|$ e de $tr(p)$ podemos classificar a singularidade. Então para os pontos A e B temos

- Se $9e^2 - 6bf > 0$ e $a^2 - 2bd > 0$ teremos $a^2(-3e^2 + 2bf)(-2db + a^2) < 0$ de onde obtemos $\sqrt{a^2(e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)} < |-2ea^2|$. Daí, se $-2ea^2 < 0$ obteremos que $|JX(A)| < 0$ e o ponto será de sela. Se $-2ea^2 > 0$, teremos $|JX(A)| > 0$ e o ponto será centro.
- Se $9e^2 - 6bf > 0$ e $a^2 - 2bd > 0$ teremos $a^2(-3e^2 + 2bf)(-2db + a^2) < 0$ de onde obtemos $\sqrt{a^2(e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)} < |2ea^2|$. Daí se $2ea^2 < 0$ $|JX(B)| < 0$ e o ponto será de sela. Se $2ea^2 > 0$, teremos $|JX(B)| > 0$ e o ponto será centro ou foco fraco.
- Se $9e^2 - 6bf > 0$ e $a^2 - 2bd < 0$ teremos $a^2(-3e^2 + 2bf)(-2db + a^2) > 0$ de onde obtemos $\sqrt{a^2(e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)} > |-2ea^2|$. Se $-2ea^2 > 0$ ou $-2ea^2 < 0$ teremos que $|JX(A)| < 0$ e o ponto será de sela.
- Se $9e^2 - 6bf > 0$ e $a^2 - 2bd < 0$ teremos $a^2(-3e^2 + 2bf)(-2db + a^2) > 0$ de onde obtemos $\sqrt{a^2(e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)} > |2ea^2|$. Se $2ea^2 > 0$ ou $2ea^2 < 0$, teremos $|JX(B)| < 0$ e o ponto será de sela.

O ponto $\left(0, \frac{1}{3} \frac{-3e + \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b}\right)$ é um nó estável e $\left(0, \frac{1}{3} \frac{-3e - \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b}\right)$ é um nó instável.

- (b) Se $9e^2 - 6bf > 0$, e $e^2a^4 + 6e^2a^2db - 4db^2fa^2 + 2ba^4f < 0$, teremos apenas $\left(0, \frac{1}{3} \frac{-3e + \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b}\right)$ e $\left(0, \frac{1}{3} \frac{-3e - \sqrt{9e^2 - 6bf}}{b}\right)$ como singularidades finitas, que vimos acima que são nós.

Afirmção 2. Se $9e^2 - 6bf < 0$ e $a^2 - 2bd > 0$ então $e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f > 0$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} & a^2(e^2a^2 + 2a^2fb - 4b^2df + 6bde^2) - (2ea^2)^2 = \\ & = -3a^4e^2 + 2a^4fb - 4a^2b^2df + 6a^2bde^2 \\ & = a^2(-3e^2 + 2fb)(-2bd + a^2) > 0. \end{aligned}$$

Daí, $a^2(e^2a^2 + 2a^2fb - 4b^2df + 6bde^2) > (2ea^2)^2 \geq 0$. □

Da afirmação anterior segue-se que sempre teremos exatamente dois pontos singulares finitos se $9e^2 - 6bf < 0$ e $a^2 - 2bd > 0$.

- (c) Se $9e^2 - 6bf < 0$ e $(a^2 - 2db) > 0$, teremos apenas A e B como singularidades finitas, que já classificamos acima.
- (d) Se $9e^2 - 6bf < 0$ e $a^2 - 2bd < 0$, teremos A e B como singularidades se $e^2a^4 + 6e^2a^2db - 4db^2fa^2 + 2ba^4f > 0$. Daí
- teremos que $a^2(-3e^2 + 2bf)(-2db + a^2) < 0$ e, portanto,

$$\sqrt{a^2(e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)} < |-2ea^2|.$$

Logo, se $-2ea^2 > 0$, $|JX(A)| < 0$ e o ponto será de sela. Se $-2ea^2 < 0$, temos $|JX(A)| > 0$ e o ponto será centro ou foco fraco.

- teremos $a^2(-3e^2 + 2bf)(-2db + a^2) < 0$ de onde obteremos

$$\sqrt{a^2(e^2a^2 + 6e^2db - 4db^2f + 2ba^2f)} < |2ea^2|.$$

Daí, se $2ea^2 > 0$, $|JX(B)| < 0$ e o ponto será de sela. Se $2ea^2 < 0$, temos $|JX(B)| > 0$ e o ponto será centro ou foco fraco.

A compactificação para este campo vetorial, em \mathcal{U}_1 , tem como expressão

$$Z = (\dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{1}{\Delta(z)}(2fz_2^2 + 4ez_1z_2 + 2d + 2az_1 + bz_1^2, -2z_2(ez_2 + a + bz_1)).$$

Disso, segue que as singularidades infinitas, em \mathcal{U}_1 , são $(\frac{-a+\sqrt{a^2-2bd}}{b}, 0)$ e $(\frac{-a-\sqrt{a^2-2bd}}{b}, 0)$, se $a^2 - 2bd > 0$. Se $a^2 - 2bd < 0$ não teremos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 .

A matriz Jacobiana em um ponto (p, q) tem como expressão

$$\begin{bmatrix} 4eq + 2a + 2bp & 4fq + 4ep \\ -2bq & -4eq - 2a - 2bp \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\left| JZ \left(\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 2bd}}{b}, 0 \right) \right| = -4(a^2 - 2db) < 0,$$

de onde temos que ambos os pontos são selas.

A compactificação para o campo X , em \mathcal{U}_2 , é

$$Z = \frac{1}{\Delta(z)}(-z_1(4ez_2 + 2az_1 + b + 2fz_2^2 + 2dz_1^2), -z_2(2fz_2^2 + 6ez_2 + 2dz_1^2 + 4az_1 + 3b)).$$

Assim, as singularidades infinitas, em \mathcal{U}_2 , são $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}\frac{-a+\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0)$ e $(\frac{1}{2}\frac{-a-\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0)$, se $a^2 - 2bd > 0$. Se $a^2 - 2bd < 0$ teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita em \mathcal{U}_2 .

Calculando a matriz Jacobiana de Z no ponto (p, q) ,

$$JZ(p, q) = \begin{bmatrix} 4eq - 4ap - b - 2fq^2 - 6dp^2 & -p(4e + 4fq) \\ -q(4dp + 4a) & -6fq^2 - 12eq - 2dp^2 - 4ap - 3b \end{bmatrix}.$$

Daí,

- $|JZ(0, 0)| = 3b^2$ e $tr(0, 0) = -4b$ e portanto o ponto é um nó estável se $b > 0$ ou instável se $b < 0$;
- $\left| JZ\left(\frac{1}{2}\frac{-a+\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0\right) \right| = \frac{2(a^2-2bd)(a\sqrt{a^2-2bd}+bd-a^2)}{d^2}$ e $tr\left(\frac{1}{2}\frac{-a+\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0\right) = 0$.
- $\left| JZ\left(\frac{1}{2}\frac{-a-\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0\right) \right| = -\frac{2(a^2-2bd)(a\sqrt{a^2-2bd}+a^2-bd)}{d^2}$ e $tr\left(\frac{1}{2}\frac{-a-\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0\right) = 0$.

Note que se $a^2 - 2bd > 0$ também teremos $a^2 - bd > 0$. Disso segue que $a\sqrt{a^2 - 2bd} < a^2 - bd$ e, portanto, $\left| JZ\left(\frac{1}{2}\frac{-a+\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0\right) \right| < 0$. Dessa forma o ponto é do tipo sela.

Verifica-se que se $a^2 - 2bd > 0$ então $a\sqrt{a^2 - 2bd} \leq |a|\sqrt{a^2 - 2bd} < a^2 - bd$ e $0 < a\sqrt{a^2 - 2bd} + a^2 - bd$. Portanto $-\frac{2}{d^2}(a^2 - 2bd)(a\sqrt{a^2 - 2bd} + a^2 - bd) < 0$, o que caracteriza ponto de sela.

Então temos que os possíveis retratos de fase para este campo vetorial podem ser:

- i. Se $9e^2 - 6bf > 0$, $e^2a^4 + 6e^2a^2db - 4db^2fa^2 + 2ba^4f > 0$ e $a^2 - 2bd > 0$ teremos um ponto de sela, um centro e dois nós como singularidades finitas. Já no infinito teremos dois pontos singulares de sela em \mathcal{U}_1 . Em \mathcal{U}_2 temos três pontos singulares infinitos onde um é um nó e os outros dois são pontos de sela. Assim o retrato de fase do campo vetorial é equivalente ao \mathcal{P}_{11} ou \mathcal{P}_{12} .
- ii. Se $9e^2 - 6bf > 0$ e $a^2 - 2bd < 0$, teremos dois pontos do tipo sela e dois nós. Aqui não temos singularidades infinitas, em \mathcal{U}_1 , e, em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$, que é um nó. Portanto o retrato de fase para este campo vetorial é equivalente o retrato \mathcal{P}_{17} .
- iii. Se $9e^2 - 6bf > 0$, $e^2a^4 + 6e^2a^2db - 4db^2fa^2 + 2ba^4f < 0$ e $a^2 - 2bd > 0$ teremos apenas dois pontos singulares finitos, que serão nós. Já no infinito teremos dois pontos singulares de sela, em \mathcal{U}_1 . Em \mathcal{U}_2 temos três pontos singulares infinitos, onde um é um nó e os outros dois são pontos de sela. Assim o retrato de fase do campo vetorial é equivalente ao \mathcal{P}_{10} .
- iv. Se $9e^2 - 6bf > 0$, e $a^2 - 2bd < 0$ teremos quatro pontos singulares finitos, onde dois são nós e dois são selas-nós. Aqui não temos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 , e em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$, que é um nó. Daí o retrato de fase do campo vetorial no disco de Poincaré será equivalente a \mathcal{P}_{17} .
- v. Se $9e^2 - 6bf < 0$ e $a^2 - 2bd < 0$, teremos apenas duas singularidades finitas

que serão uma sela e um centro. Aqui não teremos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 . Em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que será um nó. Portanto o retrato de fase será do tipo \mathcal{P}_{18} .

- vi. Se $9e^2 - 6bf < 0$ e $a^2 - 2bd = 0$, teremos apenas uma única singularidade finita que será um centro. Em \mathcal{U}_1 teremos uma única singularidade infinita que será nilpotente. Em \mathcal{U}_2 temos duas singularidades infinitas, que serão um nó e um ponto nilpotente. Daí o retrato de fase do campo vetorial será do tipo \mathcal{P}_{23} .
- vii. Se $9e^2 - 6bf > 0$ e $a^2 - 2bd = 0$ teremos três singularidades finitas, onde uma será sela, os outros dois serão nós. Em \mathcal{U}_1 , teremos apenas uma singularidade finita que será nilpotente. Já em \mathcal{U}_2 teremos duas singularidades onde uma será um nó e a outra nilpotente. Daí o retrato de fase do campo vetorial no disco de Poincaré será do tipo \mathcal{P}_{24} .
- viii. Se $9e^2 - 6bf = 0$ e $a^2 - 2bd = 0$, teremos apenas uma singularidade finita, a qual será nilpotente. Em \mathcal{U}_2 temos apenas uma singularidade infinita, que é um nó. Em \mathcal{U}_1 temos uma única singularidade infinita que é nilpotente. Daí o retrato de fase é do tipo \mathcal{P}_{25} .

5. 5º Caso: $abcfe \neq 0$ e $d = 0$.

A análise das singularidade pode ser feita utilizando os cálculos feitos no primeiro item

- (a) Se $9e^2 - 6bf > 0$ e $c^2b^2 - 4cbea + e^2a^2 + 2ba^2f > 0$ teremos quatro singularidades finitas. Uma singularidade será uma sela, outra será um centro e as outras duas singularidades serão nós. Daí o retrato de fase será do tipo \mathcal{P}_{11} ou \mathcal{P}_{12} .
- (b) Se $9e^2 - 6bf < 0$, teremos apenas duas singularidades finitas, que serão centros. No infinito teremos duas singularidades infinitas, onde ambas serão selas. Em \mathcal{U}_2 teremos duas singularidades, onde uma será um nó e a outra uma sela. Daí segue que o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_9 .
- (c) se $9e^2 - 6bf = 0$ teremos duas singularidades finitas. Onde uma é uma ponto nilpotente e a outra é um centro. No infinito temos como singularidades em \mathcal{U}_1 duas selas. Em \mathcal{U}_2 temos duas singularidades infinitas onde uma é um nó e a outra é uma sela. Segue daí e das curvas de nível que o retrato de fase para este campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{15} .

6. 6º Caso: $cdf e \neq 0$ e $a = b = 0$.

- (a) Então temos uma única singularidade finita, a qual é um nó. No infinito não temos singularidades em \mathcal{U}_1 . Em \mathcal{U}_2 temos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, a qual é linearmente nula. Disso segue que o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{28} .

7. 7º Caso: $dbfe \neq 0$ e $a = c = 0$.

- (a) Se $9e^2 - 6bf > 0$ e $db > 0$ teremos dois nós e 2 selas como singularidades finitas. Não temos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 . Em \mathcal{U}_2 temos uma única singularidade que é um nó. Portanto o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{17} .
- (b) Se $9e^2 - 6bf > 0$ e $db < 0$ teremos apenas duas singularidades finitas que serão nós. No infinito teremos três singularidades infinitas, em \mathcal{U}_2 , onde uma será um nó, e as outras duas são selas. Em \mathcal{U}_1 teremos duas singularidades que serão ambas selas. Daí o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{10} .
- (c) Se $9e^2 - 6bf < 0$ e $db > 0$ não teremos singularidades finitas. Em \mathcal{U}_1 não temos singularidades infinitas. Em \mathcal{U}_2 teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, o qual é um nó. Portanto o retrato de fase é do tipo \mathcal{P}_{19} .
- (d) Se $9e^2 - 6bf < 0$ e $db < 0$ teremos duas singularidades que serão centros. Teremos duas singularidades infinitas, em \mathcal{U}_1 , que serão selas. Em \mathcal{U}_2 teremos três singularidades infinitas, onde uma será nó e as outras duas serão selas. Daí, o retrato de fase será do tipo \mathcal{P}_9 .
- (e) Se $9e^2 - 6bf = 0$ teremos apenas uma única singularidade finita, a qual será linearmente nula. No infinito, em \mathcal{U}_2 , se $df < 0$, teremos três singularidades infinitas, onde $(0, 0)$ será um nó e as demais serão selas. Em \mathcal{U}_1 teremos duas singularidades que são, ambas, selas. Daí o retrato de fase será do tipo \mathcal{P}_{16} .
- (f) Se $9e^2 - 6bf = 0$, teremos apenas $(0, -\frac{2f}{3e})$ como singularidade finita, a qual será linearmente nula. Se $df > 0$ não temos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 . Em \mathcal{U}_2 teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que será um nó. Portanto o retrato de fase será do tipo \mathcal{P}_{22} .

8. 8º Caso: agora $bcef \neq 0$ e $a = d = 0$

- (a) Se $9e^2 - 6bf > 0$, teremos três singularidades finitas, onde duas são nós e uma é sela. No infinito temos $(0, 0)$ como singularidade infinita em \mathcal{U}_1 , a qual é nilpotente. Em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita que é um nó. Daí o retrato de fase será do tipo \mathcal{P}_{24} .
- (b) Se $9e^2 - 6bf < 0$, teremos uma única singularidade finita, que será centro. No infinito temos $(0, 0)$ como singularidade infinita em \mathcal{U}_1 , o qual é nilpotente. Em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita que é um nó. Daí o retrato de fase será do tipo \mathcal{P}_{23} .
- (c) Se $9e^2 - 6bf = 0$, teremos apenas $(0, -\frac{2f}{3e})$ como singularidade finita, que é nilpotente. Em \mathcal{U}_1 , temos $(0, 0)$ como singularidade infinita nilpotente. Em \mathcal{U}_2 teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade finita, que é um nó. Portanto o retrato de fase será do tipo \mathcal{P}_{25} .

9. 9º Caso: $efad \neq 0$ e $b = c = 0$.

- (a) Aqui teremos duas singularidades finitas $(0, -\frac{f}{e})$ e $(-\frac{e}{a}, -\frac{fa^2+de^2}{ea^2})$. A primeira é um nó e a segunda uma sela. Em \mathcal{U}_1 , teremos $(-\frac{d}{a}, 0)$ como singularidade infinita que é uma sela. Em \mathcal{U}_2 , temos $(0, 0)$ e $(-\frac{a}{d}, 0)$ como singularidades infinitas onde a primeira é linearmente nula e a segunda é uma sela. Portanto o retrato de fase é da forma \mathcal{P}_{30} .

10. 10º Caso: $acef \neq 0$ e $b = d = 0$

- (a) Aqui temos $(0, -\frac{f}{3e})$ e $(-\frac{e}{a}, -\frac{fa-ce}{ea})$ como singularidades finitas, onde a primeira singularidade é um nó e a segunda uma sela. Em \mathcal{U}_1 , temos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é uma sela. Em \mathcal{U}_2 , temos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é linearmente nula. Portanto o retrato de fase deste campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{30} .

11. 11º Caso: $abfe \neq 0$ e $c = d = 0$.

- (a) Se $-\frac{1}{2}e^2 < bf < \frac{3}{2}e^2$, teremos quatro singularidades finitas: $(0, \frac{-3e+\sqrt{9e^2-6bf}}{3b})$ e $(0, -\frac{3e+\sqrt{9e^2-6bf}}{3b})$ que são nós, $(-\frac{2e+\sqrt{e^2+2bf}}{a}, \frac{e+\sqrt{e^2+2bf}}{b})$ e $(\frac{-2e+\sqrt{e^2+2bf}}{a}, -\frac{-e+\sqrt{e^2+2bf}}{b})$ que são centros, se $e > -\frac{1}{2}\sqrt{e^2-2bf}$, ou selas, caso contrário. Em \mathcal{U}_1 , teremos duas singularidades infinitas: $(0, 0)$ que é uma sela, e $(-\frac{2a}{b}, 0)$ que é também é uma sela. Em \mathcal{U}_2 , teremos $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é um nó, e $(\frac{-b}{2a}, 0)$ que é uma sela. Portanto o retrato de fase deste campo vetorial é \mathcal{P}_{11} ou \mathcal{P}_{12} .
- (b) Se $bf < -\frac{1}{2}e^2$ ou $bf > \frac{3}{2}e^2$, teremos duas singularidades finitas, que serão ambas nós ou ambas centros, respectivamente. Em \mathcal{U}_1 , teremos duas singularidades infinitas: $(0, 0)$, que é uma sela, e $(-\frac{2a}{b}, 0)$ que é também é uma sela. Em \mathcal{U}_2 teremos $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é um nó, e $(\frac{-b}{2a}, 0)$ que é uma sela. Portanto o retrato de fase para este campo vetorial é \mathcal{P}_9 se as singularidades finitas forem centros ou \mathcal{P}_{10} se as singularidades finitas forem nós.
- (c) Se $bf = -\frac{1}{2}e^2$, teremos três singularidades finitas $(0, \frac{2}{3e}(3+2\sqrt{3})f)$, $(0, \frac{2}{3e}(3-2\sqrt{3})f)$ que são nós e $(-\frac{2e}{a}, -\frac{2f}{e})$ que é nilpotente. Em \mathcal{U}_2 , teremos $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é um nó, e $(\frac{e^2}{4af}, 0)$ que é uma sela. Em \mathcal{U}_1 , teremos duas singularidades infinitas: $(0, 0)$ que é uma sela e $(\frac{4af}{e^2}, 0)$ que também é uma sela. Daí, o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{14} .
- (d) Se $bf = \frac{3}{2}e^2$, teremos apenas duas singularidades finitas $(0, -\frac{2f}{3e})$, que é nilpotente, e $(-\frac{4e}{a}, \frac{2f}{e})$ que é centro. Em \mathcal{U}_1 , teremos $(0, 0)$ e $(-\frac{4af}{3e^2}, 0)$ como singularidades infinitas onde ambos são selas. Em \mathcal{U}_2 , teremos $(0, 0)$ e $(-\frac{3e^2}{4af}, 0)$

como singularidades infinitas onde a primeira é um nó e a segunda uma sela. Portanto o retrato de fase é do tipo \mathcal{P}_{15} .

12. 12º caso: $ae f \neq 0$ e $b = c = d = 0$.

(a) Aqui teremos $(0, -\frac{f}{3e})$, $(-\frac{e}{a}, -\frac{f}{e})$ como singularidades finitas, onde o primeiro é um nó e o segundo é sela. Em \mathcal{U}_1 temos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita que é uma sela. Em \mathcal{U}_2 teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita que é linearmente nulo. Portanto o retrato de fase deste campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{30} .

13. 13º Caso: $de f \neq 0$ e $a = b = c = 0$.

(a) Aqui teremos apenas $(0, -\frac{f}{3e})$ como singularidade finita que vem a ser um nó. Em \mathcal{U}_1 , não teremos singularidades infinitas. Em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é linearmente nula. Daí segue que o campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{28} .

14. 14º caso: $be f \neq 0$ e $a = c = d = 0$.

(a) Se $9e^2 - 6bf > 0$, teremos $(0, \frac{1}{3b}(-3e + \sqrt{-6bf + 9e^2}))$ e $(0, -\frac{1}{3b}(3e + \sqrt{-6bf + 9e^2}))$ como singularidades finitas, que são ambos nós. Em \mathcal{U}_1 , teremos apenas $(0, 0)$ que é linearmente nula. Em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade que é um nó. Assim teremos que o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{27} .

(b) Se $9e^2 - 6bf < 0$, não teremos singularidades finitas. Em \mathcal{U}_1 , teremos apenas $(0, 0)$ que é linearmente nulo. Em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade, que é um nó. Portanto o retrato de fase é do tipo \mathcal{P}_{26} .

Observação 4.2.8.

- Se $9e^2 - 6bf = 0$, a expressão do campo vetorial teria um fator em comum. Portanto, o campo vetorial resultante após a divisão por este fator, não seria quadrático.
- Não podemos ter $a = b = d = 0$, pois o campo não seria quadrático.

Suponhamos agora $e = 0$ e $f \neq 0$.

1. 1º caso $abcd f \neq 0$ e $e = 0$.

(a) Se $bf < 0$, teremos $(0, \frac{1}{3b}\sqrt{-6bf})$, $(0, -\frac{1}{3b}\sqrt{-6bf})$ como singularidades finitas, que são nós. Se além disso, tivermos $(a^2 - 2db) \neq 0$ e $b(c^2b - 4fdb + 2fa^2) > 0$, teremos também como singularidades finitas

$$C = \left(-\frac{-cb + \sqrt{b(c^2b - 4fdb + 2fa^2)}}{a^2 - 2bd}, \frac{a(-cb + \sqrt{b(c^2b - 4fdb + 2fa^2)})}{b(a^2 - 2bd)} \right)$$

e

$$D = \left(\frac{cb + \sqrt{b(c^2b - 4fdb + 2fa^2)}}{a^2 - 2bd}, -\frac{a(cb + \sqrt{b(c^2b - 4fdb + 2fa^2)})}{b(a^2 - 2bd)} \right).$$

Como $|JX(D)| = \frac{4}{a^2 - 2bd}(cb + \sqrt{b(c^2b - 4fdb + 2fa^2)})\sqrt{b(c^2b - 4fdb + 2fa^2)}$,
 $tr(D) = 0$, $|JX(C)| = \frac{4}{a^2 - 2bd}(-cb + \sqrt{b(c^2b - 4fdb + 2fa^2)})\sqrt{b(c^2b - 4fdb + 2fa^2)}$
e $tr(C) = 0$ teremos,

- i. se $cb + \sqrt{b(c^2b - 4fdb + 2fa^2)} < 0$ e $a^2 - 2bd > 0$, o ponto D é sela e C é centro. Teremos $(-\frac{a + \sqrt{a^2 - 2db}}{b}, 0)$ e $(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 2db}}{b}, 0)$ como singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 , que serão ambas selas. Em \mathcal{U}_2 , teremos três singularidades infinitas, onde $(0, 0)$ é um nó, $(\frac{1}{2d}(-a + \sqrt{a^2 - 2db}), 0)$ e $(-\frac{1}{2d}(a + \sqrt{a^2 - 2db}), 0)$ são selas. Portanto, o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{11} ou \mathcal{P}_{12} .
 - ii. Se $cb + \sqrt{b(c^2b - 4fdb + 2fa^2)} > 0$ e $a^2 - 2bd > 0$, o ponto D será centro e C será sela. Teremos $(-\frac{a + \sqrt{a^2 - 2db}}{b}, 0)$ e $(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 2db}}{b}, 0)$ como singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 , que serão ambas selas. Em \mathcal{U}_2 , teremos três singularidades infinitas onde $(0, 0)$ é um nó, $(\frac{1}{2d}(-a + \sqrt{a^2 - 2db}), 0)$ e $(-\frac{1}{2d}(a + \sqrt{a^2 - 2db}), 0)$ são selas. Portanto o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{11} ou \mathcal{P}_{12} .
 - iii. Se $cb + \sqrt{b(c^2b - 4fdb + 2fa^2)} > 0$ e $a^2 - 2bd < 0$, D e C são selas. Aqui não temos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 . Em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é um nó. Segue que o retrato de fase deste campo vetorial é da forma \mathcal{P}_{17} .
- (b) Se $bf > 0$ e $(a^2 - 2db) < 0$ mas $b(c^2b - 4fdb + 2fa^2) > 0$, teremos apenas C, D como singularidades finitas. Se $cb + \sqrt{b(c^2b - 4fdb + 2fa^2)} < 0$, teremos que $-cb + \sqrt{b(c^2b - 4fdb + 2fa^2)} > 0$ e, portanto, D será centro e C será sela. Se $cb + \sqrt{b(c^2b - 4fdb + 2fa^2)} > 0$ e $-cb + \sqrt{b(c^2b - 4fdb + 2fa^2)} < 0$, teremos que D é sela e C é centro.
- Aqui não teremos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 . Por outro lado, em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é nó. Segue que o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{18} .
- (c) Se $bf > 0$ e $a^2 - 2bd > 0$, teremos $b(c^2b - 4fdb + 2fa^2) > 0$. Portanto $cb + \sqrt{b(c^2b - 4fdb + 2fa^2)} > 0$ e $-cb + \sqrt{b(c^2b - 4fdb + 2fa^2)} > 0$, donde concluímos que C e D são centros. Teremos $(-\frac{a + \sqrt{a^2 - 2db}}{b}, 0)$ e $(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 2db}}{b}, 0)$ como singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 , que serão ambas selas. Em \mathcal{U}_2 teremos três singularidades infinitas: $(0, 0)$ que é um nó, $(\frac{1}{2d}(-a + \sqrt{a^2 - 2db}), 0)$ e $(-\frac{1}{2d}(a + \sqrt{a^2 - 2db}), 0)$ que são selas. Daí o retrato de fase é do tipo \mathcal{P}_9 .
 - (d) Se $bf > 0$, $(a^2 - 2db) \neq 0$ e $b(c^2b - 4fdb + 2fa^2) < 0$, não teremos singularidades finitas. Aqui necessariamente devemos ter $a^2 - 2bd < 0$, caso contrário não

teríamos $b(c^2b - 4fdb + 2fa^2) < 0$. Portanto não temos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 . Mas em \mathcal{U}_2 teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que será um nó. Portanto o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{19} .

- (e) Suponhamos que $bf > 0$ e $a^2 - 2bd = 0$. Então $b = \frac{a^2}{2d}$ e $\frac{f}{2d} > 0$, e existe uma única singularidade finita $(-\frac{f}{c}, \frac{2df}{ca})$ que é centro. Em \mathcal{U}_1 teremos apenas $(-\frac{2d}{a}, 0)$, que é nilpotente. Em \mathcal{U}_2 , teremos $(0, 0)$ como singularidade infinita, que será um nó, e $(-\frac{a}{2d}, 0)$, que é nilpotente. Daí o retrato de fase é do tipo \mathcal{P}_{23} .
- (f) Suponhamos $bf < 0$ e $a^2 - 2bd = 0$. Então teremos que $b = \frac{a^2}{2d}$ e $\frac{f}{2d} < 0$. Assim teremos como singularidades finitas $(0, \frac{2}{3a}\sqrt{-3fd})$, $(0, -\frac{2}{3a}\sqrt{-3fd})$ que serão nós e $(-\frac{f}{c}, \frac{2df}{ca})$ que é sela. Em \mathcal{U}_1 , temos $(-\frac{2d}{a}, 0)$ como singularidade infinita, que é nilpotente. Em \mathcal{U}_2 , teremos $(0, 0)$ como singularidade infinita que será um nó, e $(-\frac{a}{2d}, 0)$ que é nilpotente. Assim o retrato de fase será \mathcal{P}_{24} .

2. 2º caso: $bcd \neq 0$ e $e = a = 0$.

- (a) Se $bf > 0$ e $c^2 - 4fd < 0$ não teremos singularidades finitas. Disso segue que $db > 0$ e portanto não teremos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 . Em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ que é um nó. Assim o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{19} .
- (b) Se $bf > 0$ e $c^2 - 4fd > 0$, teremos $(\frac{1}{2d}(-c + \sqrt{c^2 - 4fd}), 0)$ e $(-\frac{1}{2d}(c + \sqrt{c^2 - 4fd}), 0)$ como singularidades finitas:
- i. Se $|c| < \sqrt{c^2 - 4fd}$, então $df < 0$ e $db < 0$. Neste caso, ambos os pontos são centros. Em \mathcal{U}_1 , teremos duas singularidades infinitas, que serão selas. Em \mathcal{U}_2 , teremos três singularidades infinitas, onde $(0, 0)$ é nó e as duas restantes são selas. Daí segue que o retrato de fase é do tipo \mathcal{P}_9 .
 - ii. se $|c| > \sqrt{c^2 - 4fd}$, então $fd > 0$ e $db > 0$. Daí teremos um centro e uma sela. Em \mathcal{U}_1 não temos singularidades infinitas. Em \mathcal{U}_2 temos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é um nó. Segue que o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{18} .
- (c) Se $bf < 0$ e $c^2 - 4fd > 0$ teremos quatro singularidades finitas: $(\frac{1}{2d}(-c + \sqrt{c^2 - 4fd}), 0)$, $(-\frac{1}{2d}(c + \sqrt{c^2 - 4fd}), 0)$, $(0, \frac{1}{3b}\sqrt{-6bf})$ e $(0, -\frac{1}{3b}\sqrt{-6bf})$
- i. Se $|c| < \sqrt{c^2 - 4fd}$ então $df < 0$ e $bd > 0$. Portanto $(\frac{1}{2d}(-c + \sqrt{c^2 - 4fd}), 0)$ e $(-\frac{1}{2d}(c + \sqrt{c^2 - 4fd}), 0)$ são selas, e $(0, \frac{1}{3b}\sqrt{-6bf})$, $(0, -\frac{1}{3b}\sqrt{-6bf})$ que são nós. Aqui não teremos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 . Em \mathcal{U}_2 , teremos uma única singularidade finita, que é um nó. Portanto o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{17} .
 - ii. Se $|c| > \sqrt{c^2 - 4fd}$, então $fd > 0$ e $bd < 0$. Portanto teremos que $(0, \frac{1}{3b}\sqrt{-6bf})$ e $(0, -\frac{1}{3b}\sqrt{-6bf})$ são nós e $(\frac{1}{2d}(-c + \sqrt{c^2 - 4fd}), 0)$ e $(-\frac{1}{2d}(c + \sqrt{c^2 - 4fd}), 0)$ são selas.

$\sqrt{c^2 - 4fd}$, 0) são uma sela e um centro, respectivamente. Em \mathcal{U}_1 , teremos $(\frac{\sqrt{-2bd}}{b}, 0)$ e $(-\frac{\sqrt{-2bd}}{b}, 0)$ como singularidades infinitas, que são, ambas, selas. Em \mathcal{U}_2 , teremos $(0, 0)$, $(\frac{1}{2d}\sqrt{-2db}, 0)$, $(-\frac{1}{2d}\sqrt{-2db}, 0)$ como singularidades infinitas, onde o primeiro será um nó e os dois outros serão selas. Daí o retrato de fase do campo vetorial é \mathcal{P}_{11} ou \mathcal{P}_{12} .

- (d) Se $bf < 0$ e $c^2 - 4fd < 0$, teremos $(0, \frac{1}{3b}\sqrt{-6bf})$ e $(0, -\frac{1}{3b}\sqrt{-6bf})$ como singularidades finitas que são nós. Aqui teremos $bd < 0$ e, portanto, em \mathcal{U}_1 teremos $(\frac{\sqrt{-2bd}}{b}, 0)$ e $(-\frac{\sqrt{-2bd}}{b}, 0)$ como singularidades infinitas que são selas. Em \mathcal{U}_2 , teremos $(0, 0)$, $(\frac{1}{2d}\sqrt{-2db}, 0)$, $(-\frac{1}{2d}\sqrt{-2db}, 0)$ como singularidades infinitas, onde o primeiro será um nó e os dois outros serão selas. Portanto o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{10} .
- (e) se $bf < 0$ e $c^2 - 4fd = 0$, então $bd < 0$ e teremos $(0, -\frac{c}{\sqrt{-6bd}})$, $(0, \frac{c}{\sqrt{-6bd}})$ e $(-\frac{c}{2d}, 0)$ como singularidades finitas, onde $(0, -\frac{c}{\sqrt{-6bd}})$, $(0, \frac{c}{\sqrt{-6bd}})$ são nós e $(-\frac{c}{2d}, 0)$ é nilpotente. Em \mathcal{U}_1 , teremos $(\frac{\sqrt{-2bd}}{b}, 0)$ e $(-\frac{\sqrt{-2bd}}{b}, 0)$ que são ambos selas. Em \mathcal{U}_2 , teremos $(0, 0)$, $(\frac{1}{2d}\sqrt{-2db}, 0)$, $(-\frac{1}{2d}\sqrt{-2db}, 0)$ como singularidades infinitas, onde o primeiro será um nó e os dois outros serão selas. Daí segue que o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{14} .
- (f) Se $bf > 0$ e $c^2 - 4fd = 0$, então $bd > 0$ e teremos uma única singularidade finita $(-\frac{c}{2d}, 0)$, que é nilpotente. Não teremos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 . Em \mathcal{U}_2 teremos $(0, 0)$ como uma única singularidade infinita, que é um nó. Daí segue que o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{20} .

3. 3º Caso: $acdf \neq 0$ e $e = b = 0$.

- (a) Aqui não temos singularidades finitas. Em \mathcal{U}_1 , teremos $(\frac{-d}{a}, 0)$ como singularidade infinita, que é uma sela. Em \mathcal{U}_2 , teremos $(0, 0)$ e $(\frac{-a}{d}, 0)$ como singularidades finitas, onde $(0, 0)$ é linearmente nula e $(\frac{-a}{d}, 0)$ é sela. Daí segue que o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{31} .

4. 4º caso: $abdf \neq 0$ e $e = c = 0$

- (a) Se $bf > 0$ e $a^2 - 2bd > 0$, teremos dois pontos singulares finitos: $(-\frac{\sqrt{2bf(-2db+a^2)}}{a^2-2db}, \frac{a\sqrt{bf(-2db+a^2)}}{b(a^2-2db)})$ e $(\frac{\sqrt{2bf(-2db+a^2)}}{a^2-2db}, -\frac{a\sqrt{bf(-2db+a^2)}}{b(a^2-2db)})$ que são centros. Em \mathcal{U}_1 , teremos $(\frac{-a+\sqrt{-2db+a^2}}{b}, 0)$ e $(-\frac{a+\sqrt{-2db+a^2}}{b}, 0)$ que são selas. Em \mathcal{U}_2 , teremos que $(0, 0)$ que é um nó e $(\frac{-a+\sqrt{a^2-2bd}}{2d}, 0)$ e $(-\frac{-a+\sqrt{a^2-2bd}}{2d}, 0)$ que são selas. Daí, o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_9 .
- (b) Se $bf < 0$ e $a^2 - 2bd > 0$, teremos $(0, \frac{\sqrt{-6bf}}{3b})$ e $(0, -\frac{\sqrt{-6bf}}{3b})$ como singularidades finitas, que são nós. Em \mathcal{U}_1 , teremos $(\frac{-a+\sqrt{-2db+a^2}}{b}, 0)$ e $(-\frac{a+\sqrt{-2db+a^2}}{b}, 0)$ como singularidades infinitas, que são ambas selas. Em \mathcal{U}_2 , teremos três singularidades infinitas: $(0, 0)$ que é um nó, $(\frac{-a+\sqrt{a^2-2bd}}{2d}, 0)$ e $(-\frac{-a+\sqrt{a^2-2bd}}{2d}, 0)$ que são selas. Daí os retratos de fase são do tipo \mathcal{P}_{10} .

- (c) Se $bf < 0$ e $a^2 - 2bd < 0$, teremos como singularidades finitas: $(0, \frac{\sqrt{-6bf}}{3b})$, $(0, -\frac{\sqrt{-6bf}}{3b})$ que são nós, $(-\frac{\sqrt{2bf(-2db+a^2)}}{a^2-2db}, \frac{a\sqrt{bf(-2db+a^2)}}{b(a^2-2db)})$ e $(\frac{\sqrt{2bf(-2db+a^2)}}{a^2-2db}, -\frac{a\sqrt{bf(-2db+a^2)}}{b(a^2-2db)})$ são selas. Em \mathcal{U}_1 não temos singularidades infinitas. Em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita que é um nó. Portanto teremos que o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{17} .
- (d) Se $bf > 0$ e $a^2 - 2bd < 0$, não teremos singularidades finitas. Não temos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 . Em \mathcal{U}_2 temos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é um nó. Daí o retrato de fase é do tipo \mathcal{P}_{19} .
- (e) Se $bf > 0$ e $a^2 - 2bd = 0$, teremos que $fd > 0$ e não teremos singularidades finitas. Em \mathcal{U}_1 teremos $(-2\frac{d}{a}, 0)$ como singularidade infinita, que é linearmente nula. Em \mathcal{U}_2 teremos como singulares infinitas $(0, 0)$, que é um nó, e $(-\frac{a}{2d}, 0)$ que é linearmente nulo. Assim o retrato de fase é do tipo \mathcal{P}_{26} .
- (f) Se $bf < 0$ e $a^2 - 2bd = 0$ então $fd < 0$ e portanto teremos duas singularidades finitas: $(0, -\frac{2}{3a}\sqrt{-3fd})$ e $(0, \frac{2}{3a}\sqrt{-3fd})$ que são ambas nós. Em \mathcal{U}_1 teremos $(-2\frac{d}{a}, 0)$ como singularidade infinita, que é linearmente nula. Em \mathcal{U}_2 teremos como singulares infinitos $(0, 0)$, que é um nó, e $(-\frac{a}{2d}, 0)$ que é linearmente nula. Portanto o retrato de fase é do tipo \mathcal{P}_{27} .

5. 5º caso: $abc f \neq 0$ e $e = d = 0$.

- (a) Se $bf > 0$, teremos como singularidades finitas $(-\frac{(-cb+\sqrt{c^2b^2+2ba^2f})}{a^2}, \frac{-cb+\sqrt{c^2b^2+2ba^2f}}{ba})$, $(\frac{(cb+\sqrt{c^2b^2+2ba^2f})}{a^2}, -\frac{cb+\sqrt{c^2b^2+2ba^2f}}{ba})$. Aqui $|cb| < \sqrt{c^2b^2 + 2ba^2f}$ e portanto ambos os pontos são centros. Em \mathcal{U}_1 teremos que $(-\frac{2a}{b}, 0)$ e $(0, 0)$ são singularidades infinitas, onde ambos os pontos são selas. Em \mathcal{U}_2 teremos $(0, 0)$ e $(-\frac{b}{2a}, 0)$ como singularidades infinitas, onde $(0, 0)$ é um nó e $(-\frac{b}{2a}, 0)$ é uma sela. Segue que o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_9 .
- (b) Se $bf < 0$ e $c^2b^2 + 2ba^2f > 0$, então $|cb| > \sqrt{c^2b^2 + 2ba^2f}$. Aqui teremos quatro pontos singulares finitos: $(-\frac{(-cb+\sqrt{c^2b^2+2ba^2f})}{a^2}, \frac{-cb+\sqrt{c^2b^2+2ba^2f}}{ba})$, $(\frac{(cb+\sqrt{c^2b^2+2ba^2f})}{a^2}, -\frac{cb+\sqrt{c^2b^2+2ba^2f}}{ba})$ que são um centro e uma sela, respectivamente, e $(0, \frac{\sqrt{-6bf}}{3b})$, $(0, -\frac{\sqrt{-6bf}}{3b})$ que são ambos nós. Em \mathcal{U}_1 teremos que $(-\frac{2a}{b}, 0)$ e $(0, 0)$ são singularidades infinitas, onde ambos os pontos são selas. Em \mathcal{U}_2 teremos $(0, 0)$ e $(-\frac{b}{2a}, 0)$ como singularidades infinitas, onde $(0, 0)$ é um nó e $(-\frac{b}{2a}, 0)$ é uma sela. Portanto o retrato de fase do campo vetorial é equivalente a \mathcal{P}_{11} ou \mathcal{P}_{12} .
- (c) Se $bf < 0$ e $c^2b^2 + 2ba^2f < 0$, teremos duas singularidades finitas $(0, \frac{\sqrt{-6bf}}{3b})$, $(0, -\frac{\sqrt{-6bf}}{3b})$ que são ambos nós. Em \mathcal{U}_1 teremos que $(-\frac{2a}{b}, 0)$ e $(0, 0)$ são singularidades infinitas, onde ambos os pontos são selas. Em \mathcal{U}_2 teremos $(0, 0)$ e $(-\frac{b}{2a}, 0)$ como singularidades infinitas, onde $(0, 0)$ é um nó e $(-\frac{b}{2a}, 0)$ é uma sela. Daí o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{10} .
- (d) Se $c^2b^2 + 2ba^2f = 0$, teremos como singularidades finitas $(0, \frac{\sqrt{3c}}{3a})$, $(0, -\frac{\sqrt{3c}}{3a})$, que são nós, e $(\frac{bc}{a^2}, -\frac{c}{a})$ que é nilpotente. Em \mathcal{U}_1 teremos que $(-\frac{2a}{b}, 0)$ e $(0, 0)$ são singularidades infinitas, onde ambos os pontos são selas. Em \mathcal{U}_2 teremos $(0, 0)$ e $(-\frac{b}{2a}, 0)$ como singularidades infinitas, onde $(0, 0)$ é um nó e $(-\frac{b}{2a}, 0)$ é uma sela. Portanto o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{14} .

6. 6º caso: $cdf \neq 0$ e $a = c = e = 0$.

- (a) Se $bf < 0$ e $df < 0$, então $bd > 0$. Segue que $(0, \frac{1}{3b}\sqrt{-6bf})$, $(0, -\frac{1}{3b}\sqrt{-6bf})$, $(\frac{\sqrt{-df}}{d}, 0)$ e $(-\frac{\sqrt{-df}}{d}, 0)$ são singularidades finitas, onde os dois primeiros são nós e os dois últimos são selas. Além disso não teremos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 , pois teremos $bd > 0$. Em \mathcal{U}_2 , temos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é um nó. Daí o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{17} .
- (b) Se $bf > 0$ e $df > 0$ não teremos singularidades finitas e teremos $bd > 0$. Assim não teremos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 . Em \mathcal{U}_2 teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é um nó. Portanto o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{19} .
- (c) Se $bf > 0$ e $df < 0$, teremos $db < 0$ e apenas $(\frac{\sqrt{-df}}{d}, 0)$ e $(-\frac{\sqrt{-df}}{d}, 0)$ como singularidades finitas que são centros. Portanto temos duas singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 : $(\frac{\sqrt{-2bd}}{b}, 0)$ e $(-\frac{\sqrt{-2bd}}{b}, 0)$ que são selas. Em \mathcal{U}_2 teremos três singularidades infinitas: $(0, 0)$, que é um nó, $(\frac{\sqrt{-2db}}{2d})$ e $(-\frac{\sqrt{-2db}}{2d})$ que são selas. Daí o retrato de fase do campo vetorial é \mathcal{P}_9 .
- (d) Se $bf < 0$ e $df > 0$, teremos apenas $(0, \frac{1}{3b}\sqrt{-6bf})$, $(0, -\frac{1}{3b}\sqrt{-6bf})$ como singularidades finitas que são nós. Além disso teremos $db < 0$ e portanto teremos duas singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 : $(\frac{\sqrt{-2bd}}{b}, 0)$ e $(-\frac{\sqrt{-2bd}}{b}, 0)$, que são selas. Em \mathcal{U}_2 teremos três singularidades infinitas: $(0, 0)$ que é um nó, $(\frac{\sqrt{-2db}}{2d})$ e $(-\frac{\sqrt{-2db}}{2d})$ que são selas. Daí o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{10} .

7. 7º Caso: $bcf \neq 0$ e $a = d = e = 0$.

- (a) Se $bf < 0$, teremos três singularidades finitas: $(0, \frac{1}{3b}\sqrt{-6bf})$, $(0, -\frac{1}{3b}\sqrt{-6bf})$ que são nós, e $(-\frac{f}{c}, 0)$ que é sela. Em \mathcal{U}_1 teremos $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é nilpotente. Em \mathcal{U}_2 teremos $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é um nó. Disso segue que o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{24} .
- (b) Se $bf > 0$, teremos uma única singularidade finita: $(0, -\frac{1}{3b}\sqrt{-6bf})$, que é um centro. Em \mathcal{U}_1 teremos $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é nilpotente. Em \mathcal{U}_2 teremos $(0, 0)$ como singularidade infinita que é um nó. Daí o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{23} .

8. 8º caso: $adf \neq 0$ e $b = c = e = 0$.

- (a) Aqui não teremos singularidades finitas. Em \mathcal{U}_1 teremos uma única singularidade infinita, $(-\frac{d}{a}, 0)$, que é uma sela. Em \mathcal{U}_2 teremos duas singularidades infinitas, $(0, 0)$, que é linearmente nula, e $(-\frac{a}{d}, 0)$ que é uma sela. Daí segue que o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{31} .

9. 9º caso: $acf \neq 0$ e $b = d = e = 0$.

- (a) Aqui novamente não teremos singularidades finitas. Em \mathcal{U}_1 teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita que é uma sela. Em \mathcal{U}_2 teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é linearmente nula. Assim o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{31} .

10. 10º caso: $abf \neq 0$ e $d = c = e = 0$.

- (a) Se $bf < 0$, teremos duas singularidades finitas: $(0, \frac{\sqrt{-6bf}}{3b})$ e $(0, -\frac{\sqrt{-6bf}}{3b})$, que são nós. Em \mathcal{U}_1 teremos duas singularidades infinitas: $(0, 0)$ e $(-\frac{2a}{b}, 0)$ que são selas. Em \mathcal{U}_2 teremos duas singularidades: $(0, 0)$ que é um nó e $(-\frac{b}{2a}, 0)$ que é uma sela. Segue que o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{10} .
- (b) Se $bf > 0$, teremos duas singularidades finitas $(\frac{\sqrt{2bf}}{a}, -\frac{\sqrt{2bf}}{b})$, $(-\frac{\sqrt{2bf}}{a}, \frac{\sqrt{2bf}}{b})$ que são ambos centros. Em \mathcal{U}_1 , teremos duas singularidades infinitas: $(0, 0)$ e $(-\frac{2a}{b}, 0)$, que são selas. Em \mathcal{U}_2 teremos duas singularidades: $(0, 0)$ que é um nó e $(-\frac{b}{2a}, 0)$ que é uma sela. Portanto o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_9 .

11. 11º caso: $bf \neq 0$ e $a = c = d = e = 0$.

- (a) Se $bf < 0$ teremos duas singularidades finitas: $(0, \frac{\sqrt{-6bf}}{3b})$ e $(0, -\frac{\sqrt{-6bf}}{3b})$, que são nós. Em \mathcal{U}_1 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é linearmente nula. Em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade que é um nó. Daí o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{27} .
- (b) Se $bf > 0$, não teremos singularidades finitas. Em \mathcal{U}_1 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é linearmente nula. Em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade, que é um nó. Daí o retrato de fase do campo vetorial é equivalente a \mathcal{P}_{26} .

12. 12º Caso: $af \neq 0$ e $b = c = d = 0$

Não teremos singularidades finitas. Em \mathcal{U}_1 teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é uma sela. Em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é linearmente nula. Disso segue que o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{31} .

Observação 4.2.9.

Não podemos ter $a = b = e = 0$, pois nesse caso $P \equiv 0$;

Suponhamos agora $f = 0$ e $e \neq 0$

1. 1º caso: $abcde \neq 0$ e $f = 0$.

- (a) Se $a^2(c^2b^2 - 4acbe + e^2a^2 + 6e^2db) > 0$ e $a^2 - 2bd \neq 0$, teremos quatro pontos singulares finitos:

$$A = (0, 0),$$

$$B = (0, -\frac{2e}{b}),$$

$$C = \left(-\frac{(2ea^2 - cab + \sqrt{a^2(c^2b^2 - 4acbe + e^2a^2 + 6e^2db)})}{(-2bd + a^2)a}, -\frac{cab + ea^2 + 2deb + \sqrt{c^2a^2b^2 - 4ca^3be + e^2a^4 + 6e^2a^2db}}{b(-2bd + a^2)} \right),$$

$$D = \left(-\frac{-2ea^2 + cab + \sqrt{a^2(c^2b^2 - 4acbe + e^2a^2 + 6e^2db)}}{(-2bd + a^2)a}, -\frac{cab - ea^2 - 2deb + \sqrt{c^2a^2b^2 - 4ca^3be + e^2a^4 + 6e^2a^2db}}{b(-2bd + a^2)} \right).$$

Os pontos A e B são nós.

$$|JX(C)| = \frac{4}{a^2(-2db + a^2)} \left(-2ea^2 + cab + \sqrt{a^2(c^2b^2 - 4acbe + e^2a^2 + 6e^2db)} \right) \cdot \sqrt{a^2(c^2b^2 - 4acbe + e^2a^2 + 6e^2db)}.$$

$$tr(C) = 0.$$

$$|JX(D)| = \frac{4}{a^2(-2db + a^2)} \left(2ea^2 - cab + \sqrt{a^2(c^2b^2 - 4acbe + e^2a^2 + 6e^2db)} \right) \cdot \sqrt{a^2(c^2b^2 - 4acbe + e^2a^2 + 6e^2db)}.$$

$$tr(D) = 0.$$

- i. Se $a^2 - 2bd > 0$, teremos $a^2(-3e^2)(-2db + a^2) < 0$, de onde obtemos

$$\sqrt{a^2(c^2b^2 - 4acbe + e^2a^2 + 6e^2db)} < |-2ea^2 + cab|.$$

Daí, se $-2ea^2 + cab < 0$, obteremos $|JX(A)| < 0$ e o ponto será de sela. Se $-2ea^2 + cab > 0$, teremos $|JX(A)| > 0$ e o ponto será centro.

- ii. Se $a^2 - 2bd > 0$, teremos $a^2(-3e^2)(-2db + a^2) < 0$, de onde obtemos

$$\sqrt{a^2(c^2b^2 - 4acbe + e^2a^2 + 6e^2db)} < |2ea^2 - cab|.$$

Daí se $2ea^2 - cab < 0$, inferiremos que $|JX(B)| < 0$ e o ponto será de sela. Se $2ea^2 - cab > 0$ teremos $|JX(B)| > 0$ e o ponto será centro.

- iii. Se $a^2 - 2bd < 0$, teremos $a^2(-3e^2)(-2db + a^2) > 0$, de onde obtemos que

$$\sqrt{a^2(c^2b^2 - 4acbe + e^2a^2 + 6e^2db)} > |-2ea^2 + cab|.$$

Se $-2ea^2 + cab > 0$ ou $-2ea^2 + cab < 0$ teremos $|JX(A)| < 0$ e o ponto será de sela.

- iv. Se $a^2 - 2bd < 0$ teremos $a^2(-3e^2)(-2db + a^2) > 0$ de onde obtemos que

$$\sqrt{a^2(c^2b^2 - 4acbe + e^2a^2 + 6e^2db)} > |2ea^2 - cab|.$$

Se $2ea^2 - cab > 0$ ou $2ea^2 - cab < 0$ teremos que $|JX(B)| < 0$ e o ponto será de sela. A compactificação para este campo vetorial, em \mathcal{U}_1 , tem como expressão

$$Z = (\dot{z}_1, \dot{z}_2) = \frac{1}{\Delta(z)} (2cz_2 + 4ez_1z_2 + 2d + 2az_1 + bz_1^2, -2z_2(ez_2 + a + bz_1)).$$

Disso segue que as singularidades infinitas, em \mathcal{U}_1 , são $(\frac{-a+\sqrt{a^2-2bd}}{b}, 0)$ e $(\frac{-a-\sqrt{a^2-2bd}}{b}, 0)$, se $a^2 - 2bd > 0$. Se $a^2 - 2bd < 0$, não teremos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 . A matriz Jacobiana em um ponto (p, q) tem como expressão

$$\begin{bmatrix} 4eq + 2a + 2bp & 4fq + 2c + 4ep \\ -2bq & -4eq - 2a - 2bp \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$\left| JZ \left(\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 2bd}}{b}, 0 \right) \right| = -4(a^2 - 2bd) < 0,$$

de onde temos que ambos os pontos são selas.

A compactificação para o campo X em \mathcal{U}_2 é,

$$Z = \frac{1}{\Delta(z)} (-z_1(4ez_2 + 2az_1 + b + 2z_1cz_2 + 2dz_1^2), -z_2(2z_1cz_2 + 6ez_2 + 2dz_1^2 + 4az_1 + 3b)).$$

Assim, as singularidades infinitas, em \mathcal{U}_2 , são $(0, 0)$, $(\frac{1}{2} \frac{-a+\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0)$ e $(\frac{1}{2} \frac{-a-\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0)$,

se $a^2 - 2bd > 0$. Se $a^2 - 2bd < 0$, teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, em \mathcal{U}_2 .

Calculando a matriz Jacobiana de Z no ponto (p, q) , chega-se a

$$JZ(p, q) = \begin{bmatrix} 4eq - 4ap - b - 4pcq - 6dp^2 & -p(4e + 2pc) \\ -q(2cq + 4dp + 4a) & -6fq^2 - 4pcq - 12eq - 2dp^2 - 4ap - 3b \end{bmatrix}$$

Daí

- $|JZ(0, 0)| = 3b^2$ e $tr(0, 0) = -4b$. Portanto o ponto $(0, 0)$ é um nó estável se $b > 0$ ou instável se $b < 0$;
- $\left| JZ \left(\frac{1}{2} \frac{-a+\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0 \right) \right| = \frac{2(a^2-2bd)(a\sqrt{a^2-2bd}+bd-a^2)}{d^2}$ e $tr \left(\frac{1}{2} \frac{-a+\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0 \right) = 0$.
- $\left| JZ \left(\frac{1}{2} \frac{-a-\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0 \right) \right| = -\frac{2(a^2-2bd)(a\sqrt{a^2-2bd}+a^2-bd)}{d^2}$ e $tr \left(\frac{1}{2} \frac{-a-\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0 \right) = 0$.

Note que se $a^2 - 2bd > 0$ também teremos $a^2 - bd > 0$. Disso segue que $a\sqrt{a^2 - 2bd} < a^2 - bd$ e, portanto, $\left| JZ \left(\frac{1}{2} \frac{-a+\sqrt{-2db+a^2}}{d}, 0 \right) \right| < 0$. Dessa forma o ponto é do tipo sela.

Verifica-se que se $a^2 - 2bd > 0$ então $a\sqrt{a^2 - 2bd} \leq |a|\sqrt{a^2 - 2bd} < a^2 - bd$ e $0 < a\sqrt{a^2 - 2bd} + a^2 - bd$. Portanto $-\frac{2}{d^2}(a^2 - 2bd)(a\sqrt{a^2 - 2bd} + a^2 - bd) < 0$. Disso segue que o ponto é sela.

Então os possíveis retratos de fase, para este campo vetorial, podem ser:

- A. Se $c^2a^2b^2 - 4ca^3be + e^2a^4 + 6e^2a^2db > 0$ e $a^2 - 2bd > 0$, teremos um ponto de sela, um centro e dois nós como singularidades finitas. Já no infinito teremos dois pontos singulares de sela, em \mathcal{U}_1 . Em \mathcal{U}_2 , temos três pontos singulares infinitos onde um é nó e os outros dois são pontos de sela. Assim o retrato de fase do campo vetorial é equivalente ao \mathcal{P}_{11} ou \mathcal{P}_{12} .
- B. Se $a^2 - 2bd < 0$, teremos dois pontos do tipo sela e dois nós. Aqui não temos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 , e em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ que é um nó. Portanto o retrato de fase para este campo vetorial é equivalente ao retrato \mathcal{P}_{17} .
- C. Se $c^2a^2b^2 - 4ca^3be + e^2a^4 + 6e^2a^2db < 0$ e $a^2 - 2bd > 0$ teremos apenas dois pontos singulares finitos, que serão nós. Já no infinito teremos dois pontos singulares de sela em \mathcal{U}_1 . Em \mathcal{U}_2 , temos três pontos singulares infinitos onde um é nó e os outros dois são pontos de sela. Assim o retrato de fase do campo vetorial é equivalente ao \mathcal{P}_{10} .
- D. Se $a^2 - 2bd < 0$ teremos quatro pontos singulares finitos, onde dois são nós e dois são selas-nós. Aqui não temos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 , e em \mathcal{U}_2 , teremos

apenas $(0, 0)$ que é um nó. Daí o retrato de fase do campo vetorial no disco de Poincaré será equivalente a \mathcal{P}_{17} .

E. Se $a^2 - 2bd = 0$, teremos três singularidades finitas, onde uma será sela. as outras duas serão nós. Em \mathcal{U}_1 , teremos apenas uma singularidade finita que será nilpotente. Já em \mathcal{U}_2 , teremos duas singularidades onde uma será um nó e a outra nilpotente. Daí o retrato de fase do campo vetorial, no disco de Poincaré, será do tipo \mathcal{P}_{24} .

2. 2º caso: $bcd \neq 0$ e $a = f = 0$.

(a) Se $c^2b^2 + 6e^2db > 0$, teremos quatro pontos singulares finitos: $(0, 0)$, $(0, -\frac{2e}{b})$, que são nós, $(\frac{1}{2bd}(-cb + \sqrt{c^2b^2 + 6e^2db}), -\frac{e}{b})$ e $(-\frac{1}{2bd}(cb + \sqrt{c^2b^2 + 6e^2db}), -\frac{e}{b})$.

i. Se $bd > 0$ teremos

$$(\frac{1}{2bd}(-cb + \sqrt{c^2b^2 + 6e^2db}), -\frac{e}{b})$$

e

$$(-\frac{1}{2bd}(cb + \sqrt{c^2b^2 + 6e^2db}), -\frac{e}{b})$$

são selas.

Em \mathcal{U}_1 não teremos singularidades infinitas. Em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é um nó. Segue que o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{17} .

ii. Se $bd < 0$, teremos $|cb| > \sqrt{c^2b^2 + 6e^2db}$ e portanto

$$(\frac{1}{2bd}(-cb + \sqrt{c^2b^2 + 6e^2db}), -\frac{e}{b})$$

e

$$(-\frac{1}{2bd}(cb + \sqrt{c^2b^2 + 6e^2db}), -\frac{e}{b}),$$

que serão uma sela e um centro, respectivamente. Em \mathcal{U}_1 teremos duas singularidades infinitas: $(\pm\frac{\sqrt{-2bd}}{b}, 0)$, que serão selas. Em \mathcal{U}_2 teremos três singularidades infinitas: $(0, 0)$ que é um nó, $(\pm\frac{\sqrt{-2db}}{2d})$ que são selas. Segue que o retrato de fase do campo vetorial é equivalente a \mathcal{P}_{11} ou \mathcal{P}_{12} .

(b) Se $c^2b^2 + 6e^2db < 0$, teremos apenas $(0, 0)$ e $(0, -\frac{2e}{b})$ como singularidades finitas, que são nós. Em \mathcal{U}_1 teremos duas singularidades infinitas: $(\pm\frac{\sqrt{-2bd}}{b}, 0)$, que serão selas. Em \mathcal{U}_2 , teremos três singularidades infinitas: $(0, 0)$ que é um nó, $(\pm\frac{\sqrt{-2db}}{2d})$ que são selas. Segue que o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{10} .

(c) Se $c^2b^2 + 6e^2db = 0$, teremos três singularidades finitas: $(0, 0)$, $(0, -\frac{2e}{b})$ que são nós, e $(\frac{3e^2}{cb}, -\frac{e}{b})$ que é nilpotente. Em \mathcal{U}_1 , teremos $(\pm\frac{\sqrt{3}}{3e}c, 0)$ como singularidades infinitas, que são ambas selas. Em \mathcal{U}_2 , teremos $(0, 0)$ que é um nó, e

$(\pm\sqrt{3}\frac{e}{c}, 0)$ que são selas. Disso segue que o retrato de fase do campo vetorial é equivalente ao retrato \mathcal{P}_{14} .

3. 3º Caso: $acde \neq 0$ e $b = f = 0$.

Teremos $(0, 0)$ e $(\frac{-e}{a}, \frac{ca-de}{a^2})$ como singularidades finitas, onde a primeira é um nó e a segunda uma sela. Em \mathcal{U}_1 , $(-\frac{d}{a}, 0)$ como singularidade finita, que é uma sela. Em \mathcal{U}_2 teremos $(0, 0)$ e $(-\frac{a}{d}, 0)$ como singularidades finitas, onde a primeira é linearmente nula e a segunda é uma sela. Segue que o retrato de fase do campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{30} .

4. 4º caso: $abde \neq 0$ e $c = f = 0$.

(a) Se $bd > 0$ e $a^2 - 2bd > 0$ teremos quatro singularidades finitas:

$$A = (0, 0), B = (0, -\frac{2e}{b}), C = \left(-\frac{e(2a^2 + \sqrt{a^2(a^2 + 6bd)})}{(-2bd + a^2)a}, \frac{e(a^2 + 2bd + \sqrt{a^4 + 6ba^2d})}{b(-2bd + a^2)} \right) \text{ e}$$

$$D = \left(\frac{e(-2a^2 + \sqrt{a^2(a^2 + 6bd)})}{(-2bd + a^2)a}, \frac{-e(-a^2 - 2bd + \sqrt{a^4 + 6ba^2d})}{b(-2bd + a^2)} \right).$$

Os pontos A e B são nós, C é um centro e D é sela. Em \mathcal{U}_1 teremos duas singularidades infinitas $(\frac{-a + \sqrt{-2bd + a^2}}{b}, 0)$ e $(\frac{-a - \sqrt{-2bd + a^2}}{b}, 0)$, que são ambas selas. Em \mathcal{U}_2 , teremos $(0, 0)$ que é um nó, $(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 2db}}{2d}, 0)$ e $(\frac{-a - \sqrt{a^2 - 2db}}{2d}, 0)$ que são ambas selas. Então o retrato de fase do campo vetorial é equivalente a \mathcal{P}_{11} ou \mathcal{P}_{12} .

(b) Se $bd > 0$ e $a^2 - 2bd < 0$, teremos que C e D são selas. Os pontos A e B são nós. Não teremos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 . Em \mathcal{U}_2 teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é um nó. Assim o retrato de fase do campo vetorial é equivalente a \mathcal{P}_{17} .

(c) Se $bd < 0$, teremos $a^2 - 2bd > 0$. Se além disso tivermos $a^2 + 6bd > 0$, teremos A, B, C, D como singularidades finitas, onde A e B são nós, C é centro e D é sela. Em \mathcal{U}_1 , teremos duas singularidades infinitas $(\frac{-a + \sqrt{-2bd + a^2}}{b}, 0)$ e $(\frac{-a - \sqrt{-2bd + a^2}}{b}, 0)$ que são ambas selas. Em \mathcal{U}_2 , teremos $(0, 0)$ que é um nó, $(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 2db}}{2d}, 0)$ e $(\frac{-a - \sqrt{a^2 - 2db}}{2d}, 0)$ que são ambas selas. Então o retrato de fase do campo vetorial é equivalente a \mathcal{P}_{11} ou \mathcal{P}_{12} .

(d) Se $a^2 - 2bd = 0$, teremos três singularidades finitas: $(0, 0), (0, \frac{-4de}{a^2})$ que são nós, e $(-\frac{3e}{4a}, -\frac{de}{a^2})$ que é sela. Em \mathcal{U}_1 , teremos apenas $(-\frac{2d}{a}, 0)$ como singularidade infinita, que é nilpotente. Em \mathcal{U}_2 , teremos duas singularidades infinitas: $(0, 0)$ que é um nó e $(-\frac{a}{2d}, 0)$ que é nilpotente. Disso segue que o retrato de fase do campo vetorial é equivalente a \mathcal{P}_{24} .

5. 5º Caso: $abce \neq 0$ $d = f = 0$.

(a) Observe que $(cb - 2ea)^2 > c^2b^2 - 4bace + e^2a^2$ e se $c^2b^2 - 4bace + e^2a^2 > 0$, teremos $|-2ea + cb| > \sqrt{c^2b^2 - 4bace + e^2a^2}$. Daí podemos afirmar que

$$\left(-\frac{2ea - cb + \sqrt{c^2b^2 - 4bace + e^2a^2}}{a^2}, \frac{-cb + ea + \sqrt{c^2b^2 - 4bace + e^2a^2}}{ba} \right)$$

e

$$\left(\frac{-2ea + cb + \sqrt{c^2b^2 - 4bace + e^2a^2}}{a^2}, -\frac{cb - ea + \sqrt{c^2b^2 - 4bace + e^2a^2}}{ba} \right)$$

são singularidades finitas um centro e uma sela, respectivamente. Também temos como singularidades finitas $(0, 0)$ e $(0, -\frac{2e}{b})$, que são nós. Em \mathcal{U}_1 , teremos $(0, 0)$ e $(\frac{-2a}{b}, 0)$ como singularidades finitas, que são selas. Em \mathcal{U}_2 , teremos

duas singularidades infinitas: $(0, 0)$ que é um nó, e $(-\frac{b}{2a}, 0)$ que é sela. Assim o retrato de fase do campo vetorial é equivalente a \mathcal{P}_{11} ou \mathcal{P}_{12}

- (b) Se $c^2b^2 - 4bace + e^2a^2 < 0$, temos como singularidades finitas $(0, 0)$ e $(0, -\frac{2e}{b})$, que são nós. Em \mathcal{U}_1 , teremos $(0, 0)$ e $(-\frac{2a}{b}, 0)$ como singularidades finitas, que são selas. Em \mathcal{U}_2 teremos duas singularidades infinitas: $(0, 0)$, que é um nó, e $(-\frac{b}{2a}, 0)$, que é sela. Assim o retrato de fase do campo vetorial é equivalente a \mathcal{P}_{10} .
- (c) Se $c^2b^2 - 4bace + e^2a^2 = 0$ teremos três singularidades finitas: $(0, 0)$, $(0, -\frac{2e}{b})$ que são nós e $(\frac{e^2\sqrt{3}(-2+\sqrt{3})}{cb}, \frac{e(-1+\sqrt{3})}{b})^5$ que é nilpotente. Em \mathcal{U}_1 teremos duas singularidades infinitas: $(0, 0)$ e $(-\frac{2c(2+\sqrt{3})}{e}, 0)$ que são selas. Em \mathcal{U}_2 , teremos $(0, 0)$ que é um nó, e $(-\frac{e}{2c}(2 - \sqrt{3}), 0)$ que é uma sela. Segue que o retrato de fase do campo vetorial no disco de Poincaré é equivalente a \mathcal{P}_{14} .

6. 6º caso: $a = b = f = 0$ e $cde \neq 0$.

Teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade finita, que é um nó. Não temos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 . Em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é linearmente nula. Assim o campo vetorial é do tipo \mathcal{P}_{28} .

7. 7º caso: $a = c = f = 0$ e $bde \neq 0$.

- (a) Se $bd > 0$ teremos como singularidades finitas $(0, 0)$, $(0, -\frac{2e}{b})$ que são nós, e $(\frac{\pm\sqrt{6bde}}{bd}, -\frac{e}{b})$ que são selas. Em \mathcal{U}_1 , não temos singularidades infinitas. Em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é um nó. Segue que o retrato de fase do campo vetorial no disco de Poincaré é equivalente ao \mathcal{P}_{27} .
- (b) Se $bd < 0$, teremos apenas $(0, 0)$, $(0, -\frac{2e}{b})$ como singularidades finitas, que são nós. Em \mathcal{U}_1 , teremos duas singularidades infinitas $(\frac{\pm\sqrt{-2bd}}{b}, 0)$, que são selas. Em \mathcal{U}_2 , teremos $(0, 0)$ que é um nó, $(\frac{\pm\sqrt{-2db}}{2d}, 0)$ que são selas. Segue que o retrato de fase do campo vetorial é equivalente a \mathcal{P}_{10} .

8. 8º Caso: $a = d = f = 0$ e $cbe \neq 0$.

Teremos $(0, 0)$, $(0, -\frac{2e}{b})$ que são nós, e $(\frac{3e^2}{2cb}, -\frac{e}{b})$, que é sela. Em \mathcal{U}_1 , temos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é nilpotente. Em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é um nó. Segue que o retrato de fase do campo vetorial é equivalente a \mathcal{P}_{24} .

9. 9º caso: $b = c = f = 0$ e $ade \neq 0$.

Teremos duas singularidades finitas $(0, 0)$ que é um nó, e $(-\frac{e}{a}, -\frac{de}{a^2})$, que é sela. Em \mathcal{U}_1 , teremos $(-\frac{d}{a}, 0)$ como singularidade infinita, que é uma sela. Em \mathcal{U}_2 , teremos $(0, 0)$ que é linearmente nulo, e $(-\frac{a}{d}, 0)$ que é uma sela, como singularidades infinitas. Assim o retrato de fase no disco de Poincaré é equivalente a \mathcal{P}_{30} .

⁵ou $(\frac{e^2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{cb}, -\frac{e(1+\sqrt{3})}{b})$

10. 10º caso: $b = d = f = 0$ e $ace \neq 0$.

Teremos como singularidades $(0, 0)$, que é um nó, e $(-\frac{e}{a}, \frac{e}{a})$ que é uma sela. Em \mathcal{U}_1 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é uma sela. Em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é linearmente nula. Daí teremos que o retrato de fase do campo vetorial é equivalente \mathcal{P}_{30} .

11. 11º caso: $c = d = f = 0$ e $abe \neq 0$.

Teremos como singularidades $(0, 0)$ e $(0, -\frac{2e}{b})$ que são nós, e $(-\frac{e}{a}, 0)$ que é sela e $(-\frac{3e}{a}, \frac{2e}{b})$ que é centro. Em \mathcal{U}_1 teremos duas singularidades infinitas: $(0, 0)$ e $(-\frac{2a}{b})$ que são ambas selas. Em \mathcal{U}_2 , teremos $(0, 0)$ que é um nó, e $(-\frac{b}{2a}, 0)$ que é uma sela. Aqui temos como curvas invariantes $x = 0$, $y = 0$, $by + 2ax + 2e = 0$. Disso segue que o retrato de fase do campo vetorial é equivalente a \mathcal{P}_{13} .

12. 12º caso: $a = b = c = f = 0$ e $de \neq 0$.

Teremos apenas $(0, 0)$, como singularidade finita, que é um nó. Como curvas invariantes, temos $x = 0$, $ey + dx^2 = 0$ que são uma reta e uma parábola, respectivamente. Não temos singularidades infinitas em \mathcal{U}_1 . Em \mathcal{U}_2 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade finita, que é linearmente nulo. Assim obtemos que o retrato de fase do campo vetorial é equivalente a \mathcal{P}_{28} .

13. 13º caso: $a = c = d = f = 0$ e $be \neq 0$.

Teremos $(0, 0)$ e $(0, -\frac{2e}{b})$ que são nós, como singularidades finitas. Em \mathcal{U}_1 , teremos $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é linearmente nulo. Em \mathcal{U}_2 , teremos $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é um nó. Temos as retas $x = 0$, $y = 0$ e $2e + by = 0$ como curvas invariantes do sistema. Assim o retrato de fase é do tipo \mathcal{P}_{27} .

14. 14º caso: $b = c = d = f = 0$ e $ae \neq 0$.

Teremos $(0, 0)$, que é um nó, e $(-\frac{e}{a}, 0)$, que é uma sela, como singularidades finitas. Em \mathcal{U}_1 , teremos apenas $(0, 0)$ como singularidade infinitas, que é uma sela. Em \mathcal{U}_2 , teremos $(0, 0)$ como singularidade infinita, que é linearmente nulo. Como curvas invariantes teremos $x = 0$, $y = 0$ e $e + ax = 0$ como curvas invariantes do sistema. Assim o retrato de fase do campo vetorial é equivalente a \mathcal{P}_{27} .

Observação 4.2.10.

Aqui não podemos ter $a = b = d = f = 0$, pois o campo seria linear;

Conclusão

Com a classificação dos campos vetoriais quadráticos não homogêneos com integral primeira racional de grau três descritos acima, obtivemos o comportamento global destes campos vetoriais, que podem se apresentar de trinta e uma maneiras distintas, dependendo das singularidades.

Assim, sempre que houver a necessidade de estudar um campo vetorial quadrático não homogêneo com integral primeira de grau 3, basta observar a qual forma padrão ele se corresponde e em seguida a qual retrato de fase no disco de Poincaré. Com isso temos a possibilidade de fazer uma análise simplificada das suas trajetórias globais, prevendo comportamentos em determinadas regiões do plano muito distantes da origem.

Apêndice

Apêndice A

Revisão sobre a Classificação das Cônicas

Aqui foi inserido um breve resumo sobre a classificação das cônicas com o intuito de facilitar a determinação de qual curva é invariante nos campos vetoriais e assim facilitar a determinação dos retratos de fase.

Considere a equação $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$, onde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Escrevendo q sob a forma matricial, obteremos

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, da matriz simétrica $M = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}$ associada, definimos $D = \det(M)$, $t = a + c$ e os cofatores $D_{11} = cf - e^2$, $D_{22} = af - d^2$ e $D_{33} = ac - b^2$. Com isso temos a seguinte classificação para as cônicas

Condição 1	Condição 2	Condição 3	Cônica
$D_{33} > 0$	$D \neq 0$	$t \cdot D > 0$	Conjunto vazio
$D_{33} > 0$	$D \neq 0$	$t \cdot D < 0$	Elipse
$D_{33} < 0$	$D \neq 0$		Hipérbole
$D_{33} > 0$	$D = 0$		Um ponto
$D_{33} < 0$	$D = 0$		2 retas concorrentes
$D_{33} = 0$	$D \neq 0$		Parábola
$D_{33} = 0$	$D = 0$	$D_{11} + D_{22} = 0$	Uma reta
$D_{33} = 0$	$D = 0$	$D_{11} + D_{22} > 0$	Conjunto vazio
$D_{33} = 0$	$D = 0$	$D_{11} + D_{22} < 0$	2 retas paralelas

temos o resultado.

Apêndice B

Campos vetoriais no disco de Poincaré: construção

Nosso objetivo nesta seção é descrever sobre a esfera de Poincaré o comportamento dos campos vetoriais Hamiltonianos no “infinito”, para o caso bidimensional, observando onde as singularidades estão presentes.

Tendo em vista a construção feita anteriormente, teremos que para um campo $X = (P_1, P_2)$, as expressões em coordenadas locais serão,

- Em \mathcal{U}_1

$$\frac{z_2^m}{\Delta(z)^{m-1}} \left(-z_1 P_1 \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) + P_2 \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right), -z_2 P_1 \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2} \right) \right)$$

- Em \mathcal{U}_2

$$\frac{z_2^m}{\Delta(z)^{m-1}} \left(-z_1 P_1 \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right) + P_2 \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right), -z_2 P_1 \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2} \right) \right)$$

- Em \mathcal{U}_3

$$\frac{z_2^m}{\Delta(z)^{m-1}} (P_1(z_1, z_2), P_2(z_1, z_2)).$$

Exemplo B.0.1. *Considere a função polinomial racional*

$$H(x, y) = \frac{x^3 + y^2 - 1}{y^2 + 1}$$

e suas derivadas parciais $H_x = \frac{3x^2(y^2+1)}{(y^2+1)^2}$ e $H_y = \frac{4y-2x^3y}{(y^2+1)^2}$. Portanto o campo vetorial Hamiltoniano correspondente é

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2x^3y \\ \dot{y} = -3x^2(y^2 + 1) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

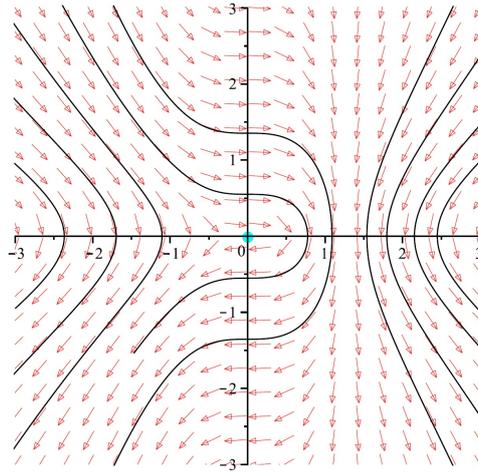


Figura B.1

- Em \mathcal{U}_1

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1^2 + 3z_2^2 - 4z_1^2 z_2^3 \\ \dot{z}_2 = -2z_2 z_1 (2z_2^3 - 1) \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Já em \mathcal{U}_2 teremos

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 3z_2^2 + 2z_1^2 \\ \dot{z}_2 = -2z_1 z_2. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Disso segue que a compactificação de Poincaré para o campo B.1 é

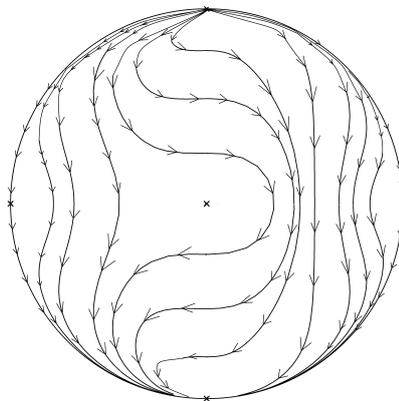


Figura B.2

Dada a função racional $H(x, y) = \frac{ax+by+c}{Ax+By+C}$, temos que

$$\begin{cases} H_x = (aB - Ab)y + aC - Ac \\ H_y = (bA - Ba)x + bC - Bc. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Portanto o campo vetorial Hamiltoniano associado é

$$\begin{cases} \dot{x} = (Ab - Ba)x + bC - Bc \\ \dot{y} = (Ab - Ba)y - aC + Ac. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Assim as órbitas deste campo que passam pelo ponto $x(0) = d, y(0) = p$ são dados por

$$\begin{cases} x(t) = \frac{(-dbA+dBa-bC+Bc)}{Ba-bA}e^{(Ab-Ba)t} + \frac{bC-Bc}{Ba-bA} \\ y(t) = \frac{(Ac-aC-paB+pAb)}{Ab-aB}e^{(Ab-Ba)t} + \frac{aC-Ac}{Ab-aB} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

as quais são semirretas passando pelo ponto (d, p) , $d, p \in \mathbb{R}$. Observe que as órbitas “nascem” ou “morrem” no ponto $(\frac{bC-Bc}{Ba-bA}, \frac{aC-Ac}{Ab-aB})$ dependendo do sinal de $Ab - Ba$.

Determinando a expressão para este campo em coordenadas locais, obteremos que

- Em $\mathcal{U}_1 = \{(y_1, y_2, y_3) \in S^2 | y_1 > 0\}$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2[Ac - aC - z_1(bC - Bc)] \\ \dot{z}_2 = -(Ab - Ba)z_2 - (bC - Bc)z_2^2. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

- Em $\mathcal{U}_2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in S^2 | y_2 > 0\}$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2(bC - Bc) + (aC - Ac)z_1z_2 \\ \dot{z}_2 = -(Ab - Ba)z_2 + (aC - Ac)z_2^2. \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Daí segue que todos os pontos do equador são pontos críticos.

Exemplo B.0.2. *Tomando*

$$\begin{cases} a = 1, b = 2, c = 3 \\ A = 4, B = 1, C = 1, \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

teremos que o campo Hamiltoniano correspondente tem coordenadas

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x - 1 \\ \dot{y} = 7y + 11, \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

cuja solução é

$$\begin{cases} x(t) = \frac{(7d-1)e^{7t}+1}{7} \\ y(t) = \frac{(11+7p)e^{7t}-11}{7} \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

sendo (d, p) a posição no instante $t = 0$. Logo seu retrato de fase fica completamente determinado.

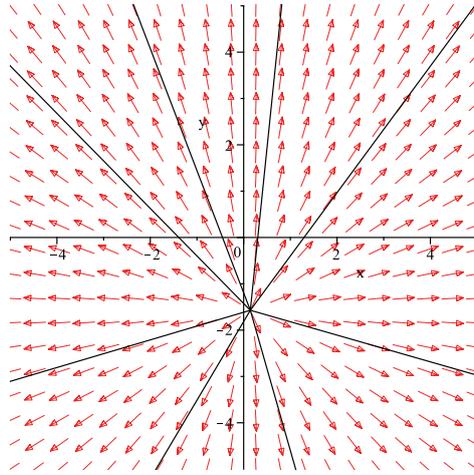


Figura B.3

Determinemos agora seu retrato de fase na esfera de Poincaré

- Em \mathcal{U}_1

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = 11z_2 + z_1z_2 \\ \dot{z}_2 = -7z_2 + z_2^2. \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

- Em \mathcal{U}_2

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_2 - 11z_1z_2 \\ \dot{z}_2 = -7z_2 - 11z_2^2. \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Com isso todo ponto sobre o equador da esfera é ponto crítico. Logo sua compactificação fica completamente determinada.

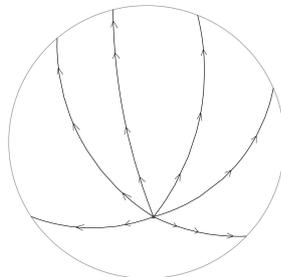


Figura B.4

Assim o retrato de fase para o campo representado pela equação B.5 é análogo ao da figura B.4, variando apenas a localização do ponto onde “nascem” ou “morrem” as órbitas.

Referências Bibliográficas

- [1] A.A.Andronov, E.A.Leontovich,I.I,Gordon,A.L. Maier, Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems, Wiley, New York,1973.
- [2] BRAUN, Francisco. Compactificação de Poincaré de Campos Polinomiais-*Dissertação de Mestrado*. Universidade Federal de São Carlos, 2007.
- [3] BRIESKORN, Egbert. Knörrer, Horst. Plane Algebraic Curves. Boston:Birkhäuser Verlag, 1986.
- [4] COX,David. LITTLE,John. O'SHEA,Donal: *Ideals, Varieties, and algorithms*, An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. Second Edition, New York: Springer,1997
- [5] LLIBRE, Jaume. Qualitative Theory of Planar Differential Systems, Springer:2006
- [6] B. Garcia, J. Llibre, J.S. Pérez del Rio. Phase Portraits of the quadratics vector fields with a polinomial first integral, Rend. circ. Mat. Palermo A 55 (2006) 420-440.
- [7] HARTMAN, Philip. *Ordinary Differential Equations*, New York: John Wiley & Sons, 1964.
- [8] J.Delgado, E.A.LACOMBA, J.LIBRE AND E.PÉREZ: *Poincaré Compactification of hamilton Polynomial Vector Fields (1992)*. In: *HAMILTONIAN DYNAMICAL SYSTEMS, History, Theory and Applications*, New York: Springer, 1995. pág 99-114
- [9] J. Chavarriga, B. Garcia, J. Llibre, J.S. Pérez del Rio, J.A. Rodriguez. Polynomial first integrals of quadratic vector fields, J. Differential Equations 230 (2006) 393-421
- [10] LLIBRE, Jaume. Oliveira, Regilene D.S., Phase Portraits of quadratic polynomial vector fields having a rational first integral of degree 3. Nonlinear Analysis 70 (2009) 3549-3560
- [11] L. Cairó, J. Llibre. Phase portraits of quadratic polynomial vector fields having racional first integral of degree 2, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 67 (2007) 327-348.

- [12] BIX, Robert. *Conics and Cubics: A Concrete Introduction to Algebraic Curves*. New York: Springer, 2006
- [13] PERUZZI, Daniela. *Estudo dos Retratos de Fase dos Campos de Vetores Polinomiais Quadráticos com Integral Primeira Racional de grau 2*. Dissertação de Mestrado: ICMC-USP 2009.
- [14] SOTOMAYOR, Jorge. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. (Projeto Euclides)
- [15] Ye Yanquain, et al., *Theory of Limit Cycles*, in *Transl. Math. Monographs*, vol 66, Amer. Math. Soc. Providence, 1984