Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de Soluções Simétricas e Não-Simétricas para uma Classe de Equações de Schrödinger Semilineares

por

Edjane Oliveira dos Santos †

sob a orientação do

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com o apoio financeiro da Capes

Existência de Soluções Simétricas e Não-Simétricas para uma Classe de Equações de Schrödinger Semilineares

por

Edjane Oliveira dos Santos

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB - Orientador

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro - UFPB - Examinador

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado - UnB - Examinador

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Maio de 2011

"Depois de escalar uma grande montanha, descobrimos apenas que há muitas outras montanhas para escalar."

Marianne Williamson

Agradecimentos

- A Deus acima de tudo, pois Ele supriu todas as minhas necessidades e me fez alcançar mais esta vitória.

- Ao meu Orientador, Professor Uberlandio Batista Severo, pelos conselhos, incentivo e amizade dedicados durante todo o período em que me orientou.("Para carregar peso, é preciso tirar os excessos").

- À minha família, pelo apoio e incentivo, sem os quais seria difícil enfrentar essa jornada e, em especial, a minha mãe, Merceis, pelo incentivo e amor dedicados durante esse período.

- Aos professores da pós-graduação, que contribuiram de forma essencial para a minha formação, em especial, ao João Marcos e ao Cleto Brasileiro ("O conhecimento tem que está no sangue").

- Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPB por ter me concedido a oportunidade de participar do mesmo. Agradeço também aos funcionários da Secretaria da PG-Mat pela atenção e cordialidade.

- Aos amigos de hoje e sempre, Teófilo, Maité Kulesza ("pra ser matemático tem-se que ter alma de matemático"), Nivaldo, Adriano Régis, Rodrigo Lustosa que sempre me incentivaram a prosseguir academicamente.

- Aos colegas de curso e amigos. Em especial, queria agradecer aos meus amigos Marco, Ana Karine (Iso) e Viviane pelos dias de estudo, incentivo e amizade e a Dani, Bruna, Jalman e Lili, pela convivência e paciência durante o mestrado. Sucesso a todos!

- A todos aqueles que de forma direta ou indireta contribuiram para a realização deste trabalho e que lamentavelmente não me recordo neste momento.

- Enfim, a Capes pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estabelecemos a existência de uma solução simétrica positiva, como também uma solução não-simétrica que muda de sinal, para o problema elíptico semilinear

$$-\Delta u + V(z)u = f(z, u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde $N \geq 4$, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é um potencial não-negativo e $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Para obtermos os resultados, usamos o Teorema do Passo da Montanha, o Princípio de Criticalidade e resultados de compacidade.

Palavras-Chave: Soluções simétricas e não-simétricas; Princípio de Criticalidade Simétrica; Teorema do Passo da Montanha.

Abstract

In this work, we establish the existence of a positive symmetric solution and a nonsymmetric solution which changes sing, for the semilinear elliptic problem

$$-\Delta u + V(z)u = f(z,u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

where $N \geq 4$, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ is a non-negative potential and $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function. To achieve these results, we use the Mountain Pass Theorem, the Principle of Symmetric Criticality and compactness results.

Keywords: Symmetric and nonsymmetric solutions; Principle of Symmetric Criticality; Mountain Pass Theorem.

Sumário

Notações

Neste trabalho, faremos uso da seguinte simbologia:

- $B(y, r)$ denota a bola aberta de centro y e raio r;
- $\rightharpoonup$ convergência fraca;
- $\hookrightarrow$ indica imersão;
- f' denota a derivada de Gâteaux e derivada de Fréchet da função f;
- $|\cdot|$ denota a norma euclidiana;
- $H^1_{rad}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ é o subespaço das funções radiais de $H^1(\mathbb{R}^N)$;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno;
- $c, C, C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots$ denotam constantes positivas (possivelmente diferentes);
- $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue de um subconjunto Ω em $\mathbb{R}^N$;
- $\operatorname{supp} f$ denota o suporte da função f;
- $O(N)$ é o grupo das transformações lineares ortogonais de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}^N$;
- Ω é um domínio de $\mathbb{R}^N$;
- $p' = p/(p-1)$ denota o expoente conjugado de p ;
- $\blacksquare$ final da demonstração;
- $q.t.p.$ quase todo ponto;

- $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$;
- $L^p(\Omega)$ é o espaço das funções mensuráveis u sobre Ω tais que $\displaystyle\int_\Omega |u|^p dx < \infty$, $1 \leq p < \infty$;
- $W^{1,p}(\Omega)$ é o espaço das funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que existem $g_1, g_2, \ldots, g_N \in L^p(\Omega)$ satisfazendo $\displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega g_i \varphi dx$, $\forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$ com $1 \leq p \leq \infty$;
- $|u|_p = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ denota a norma do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$;
- $|\nabla u|_p = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ norma do gradiente em $W_0^{1,p}(\Omega)$;
- $\|u\| = (|\nabla u|_2^2 + |u|_2^2)^{1/2}$ norma usual do espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$;
- $C(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas em Ω;
- $C_0(\Omega)$ são as funções contínuas de suporte compacto em Ω;
- $C^k(\Omega)$, $k \geq 1$ inteiro, denota o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω;
- $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 1} C^k(\Omega)$;
- $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{u \in C(\Omega);\ \sup\limits_{x,y \in \Omega} \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^2} < +\infty\}$ com $0 < \alpha < 1$;
- $C^{1,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^1(\Omega); D^i u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})\ \ \forall i, |i| \leq 1\}$;
- p^* é o expoente crítico de Sobolev definido por $p^* = \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p} & \text{se} \quad 1 \leq p < N, \\ \\ \infty & \text{se} \quad p \geq N. \end{cases}$

Introdução

Nesta dissertação, estudamos a existência de uma solução simétrica positiva, como também de uma solução não-simétrica que muda de sinal, para o problema elíptico semilinear

$$-\Delta u + V(z)u = f(z,u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \tag{P}$$

onde $N \geq 4$, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é um potencial contínuo não-negativo e $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Teremos, ainda, algumas hipóteses adicionais sobre as funçoes V e f ao longo deste trabalho.

Ao abordar a Equação (P), utilizamos métodos variacionais, ou seja, associamos a (P) o funcional energia $\varphi : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(z)u^2)dz - \int_{\mathbb{R}^N} F(z,u)dz, \tag{1}$$

onde

$$E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(z)u^2)dz < \infty \right\}.$$

e almejamos encontrar pontos críticos para φ, os quais serão as soluções fracas de (P).

Equações do tipo (P) estão relacionadas a muitos problemas da física-matemática. Por exemplo, as soluções de (P) estão associadas à existência de soluções do tipo onda estacionária para equações de Schrödinger não-lineares da forma

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\Delta \varphi + W(z)\varphi - g(|\varphi|)\varphi, \quad z \in \mathbb{R}^N,$$

onde $W : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é um potencial dado e g é uma função real conveniente. Entendemos por uma solução do tipo onda estacionária, uma função $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ do tipo

$$\varphi(t,z) = e^{iEt}u(z)$$

onde $E \in \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$ (para mais detalhes, confira, por exemplo, Berestycki-Lions [4], Liu-Wang [11], Rabinowitz [15] e Strauss [19]).

Se considerarmos o potencial $V(z) \equiv 1$ e $f(z,u) = |u|^{p-2}u$, $2 < p < 2^*$, um resultado de existência para equação (P) foi obtido por Strauss [19] (para $N \geq 2$) e Bartsch-Willem [3] (para $N = 4$ ou $N \geq 6$).

Nosso trabalho é constituído de três capítulos e três apêndices.

No *Capítulo 1*, apresentamos o conceito de função radial sob um enfoque algébrico; introduzimos o espaço $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ das funções radiais de $H^1(\mathbb{R}^N)$; apresentamos algumas definições importantes e estabelecemos alguns resultados de compacidade que foram utilizados no Capítulo 2. Por fim, apresentamos e demonstramos o Princípio da Criticalidade Simétrica de Palais.

No *Capítulo 2*, apresentamos os resultados de existência para o problema (P), segundo Bartsch-Willem [3], quando $V(z) \equiv 1$ e $f(z,u) = |u|^{p-2}u$, $2 < p < 2^*$, ou seja, consideramos o problema:

$$-\Delta u + u = |u|^{p-2}u, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{P_1}$$

No *Capítulo 3*, estabelecemos os resultados de existência para a equação (P) obtidos por Lorca-Ubilla [12]. Mais precisamente, estudamos (P) com as seguintes hipóteses na não-linearidade f e no potencial V:

(V_0) $\inf\limits_{z\in\mathbb{R}^N} V(z) := b_0 > 0;$

(f_1) $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{f(z,s)}{s} = 0$ uniformemente para $z \in \mathbb{R}^N$.

(f_2) $|f(z,s)| \leq a_1 + a_2|s|^p$ para todo $z \in \mathbb{R}^N$ e $s \in \mathbb{R}$, onde $a_1, a_2 > 0$ e $p \in \left(1, \frac{N+2}{N-2}\right)$.

(f_3) Existe uma constante $\mu > 2$ tal que $0 < \mu F(z,s) \leq sf(z,s)$ para todo $z \in \mathbb{R}^N$ e $s \neq 0$, onde $F(z,s) = \int_0^s f(z,t)dt$.

(f_4) $f(z,-s) = -f(z,s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}^N$.

(f_5) Seja $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{2M}$, onde $N_1 \geq 0$ e $M \geq 2$. Existe $T = (T_1, ..., T_{N_1}) \in \mathbb{R}^{N_1}$ onde $T_i \geq 0$ para $i = 1, ..., N_1$, tal que para $z = (x,y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{2M}$ e para todo $g \in O(2M)$, temos

$$f(x_1, ..., x_i + T_i, ..., x_{N_1}, y, u) = f(x, g(y), u),$$

$$V(x_1, ..., x_i + T_i, ..., x_{N_1}, y) = V(x, g(y)),$$

com, $i = 1, ..., N_1$, $x = (x_1, ..., x_{N_1})$ e $O(2M)$ é um grupo ortogonal em $\mathbb{R}^{2M}$.

Com base nas notações da hipótese (f_5), o principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 0.1 *Suponha que as hipóteses* $(V_0) - (f_5)$ *sejam satisfeitas e considere que* $N \geq 4$. *Então, o problema (P) tem duas soluções não-triviais em* $H^1(\mathbb{R}^N)$. *Uma solução é positiva em* $\mathbb{R}^N$ *e radial na variável* y. *A outra solução muda de sinal e é não radial na variável* y.

Para provarmos o Teorema 0.1, associamos à equação (P) o funcional energia φ dado em (1) que está bem definido em E e, mais ainda, é de classe C^1 (veja Apêndice B). Na prova da existência de uma solução não radial que muda de sinal, primeiro consideramos a involução τ definida em $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$, com $N_1 \geq 0$, $M \geq 2$, dada por

$$\tau(x, y_1, y_2) = (x, y_2, y_1).$$

Em seguida, definimos a ação do grupo $G_1 = \{id, \tau\}$ sobre E por

$$gu(x, y_1, y_2) = \begin{cases} u(x, y_1, y_2), & \text{se} \quad g = id \\ -u(\tau^{-1}(x, y_1, y_2)), & \text{se} \quad g = \tau. \end{cases}$$

Observamos que $u = 0$ é a única função em $E_{O(2M)} \cap E_{G_1}$, onde $E_{O(2M)}$ e E_{G_1} representam os espaços dos pontos fixos das ações de $O(2M)$ e G_1 sobre E respectivamente. Então, consideramos a ação do subgrupo $G = O(M) \times O(M)$ sobre E e Ψ a restrição do funcional φ ao espaço de Hilbert $W = E_{G_1} \cap E_G$ com a norma de E. A idéia é obter, via Teorema do Passo da Montanha, um ponto crítico não trivial u_0 do funcional Ψ. Em seguida, usando o Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais, que por (f_4) o funcional energia é invariante, concluimos que u_0 é um ponto crítico não-trivial de φ.

A fim de obtermos uma solução radial em y e positiva, consideramos $f(z, s) = 0$ para $s < 0$ e o funcional φ restrito ao espaço $E_{O(2M)}(\mathbb{R}^N)$. Procedendo analogamente ao caso anterior, estabelecemos a existência de um ponto crítico não-trivial v de φ restrito a $E_{O(2M)}(\mathbb{R}^N)$. Pelo Príncipio de Criticalidade Simétrica, v é um ponto crítico de φ, o qual é radial na variável y. Assim, para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla v dz + \int_{\mathbb{R}^N} V(z) w v dz - \int_{\mathbb{R}^N} f(z, w) v dz = 0.$$

Tomando $v = -w^-$, segue que $w = w^+ \geq 0$. Aplicando o Princípio do Máximo Forte, concluímos que $w > 0$ em $\mathbb{R}^N$.

No *Apêndice A*, temos alguns resultados utilizados ao longo dos Capítulos 1, 2 e 3. Nos *Apêndices B e C*, apresentamos alguns detalhes técnicos de fatos utilizados nos Capítulos 2 e 3, que estão divididos, respectivamente, por : Regularidade de Funcionais e Ações de Subgrupos de $O(N)$ sobre o $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo, estabelecemos alguns resultados que são usados nesta dissertação. Mais precisamente, na Seção 1.1, definimos função radial sob um enfoque algébrico, com o objetivo de obtermos compacidade das imersões $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$. Usaremos este fato no Lema 2.5 para provarmos a condição de Palais-Smale para o funcional associado ao problema. Na Seção 1.2, introduzimos o espaço $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ das funções radiais de $H^1(\mathbb{R}^N)$. A seguir, nas Seções 1.3 e 1.4, enunciamos e demonstramos um lema devido a Lions (Lema 1.5) e o Corolário de Strauss (Corolário 1.11), respectivamente. Finalmente, na Seção 1.5 apresentamos e demonstramos o Princípio da Criticalidade Simétrica.

1.1 Funções Radiais

Antes de definirmos função radial, precisamos saber o conceito de conjunto radialmente simétrico. Um subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é dito radialmente simétrico se é mensurável e satisfaz a propriedade:

$$\text{se} \;\; x_0 \in \Omega \;\; \text{e} \;\; |x| = |x_0| \;\; \text{então} \;\; x \in \Omega.$$

Uma bola, uma região anular e o $\mathbb{R}^N$ são exemplos de conjuntos radialmente simétricos.

Relembremos que uma transformação linear $S : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ chama-se ortogonal quando sua representação matricial A com relação a base canônica de $\mathbb{R}^N$ é uma matriz ortogonal, isto é, $AA^t = A^tA = I$, em que A^t denota a matriz transposta de A e I é a matriz identidade de ordem N (veja [5]).

Visto isto, definimos função radial sob um enfoque algébrico da seguinte maneira:

Definição 1.1 (Forma Algébrica) *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto radialmente simétrico e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dizemos que u é uma função radialmente simétrica se, para cada transformação linear ortogonal $S : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, a igualdade $u(Sx) = u(x)$ vale para quase todo $x \in \Omega$.*

A forma algébrica pode ser naturalmente generalizada ao conceito de funções invariantes pela ação de um dado subgrupo do grupo $O(N)$ (com operação de composição) de todas as transformações lineares ortogonais de $\mathbb{R}^N$ (veja a Seção 1.4).

1.2 O Espaço $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$

Ao utilizarmos métodos variacionais no estudo de equações diferenciais parciais, geralmente é necessário algum resultado de compacidade. Porém, nos problemas em $\mathbb{R}^N$, há uma perda de compacidade nas imersões de Sobolev e não conseguimos as limitações das sequências de Palais-Smale. A fim de contornarmos esse problema, vamos estudar o subespaço $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Definimos o espaço $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ por:

$$H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : u(Sx) = u(x), \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad S \in O(N)\}.$$

Mais adiante, trabalharemos com alguns subespaços convenientes de $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e precisaremos de algumas propriedades que as funções destes subespaços herdam das funções $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$.

Sabemos que $H^1(\mathbb{R}^N)$, munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + uv)dz, \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

é um espaço de Hilbert, cuja norma correspondente é

$$\|u\| = \left[\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |u|^2)dz\right]^{\frac{1}{2}}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Teorema 1.2 *$H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert.*

Prova. Como $H^1(\mathbb{R}^N)$ é Hilbert, basta mostrarmos que $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é um subespaço vetorial fechado de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Pela Definição 1.1, temos que $0 \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Sejam $u_1, u_2 \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N), \alpha \in \mathbb{R}$ e $S \in O(N)$. Temos que

$$(u_1 + \alpha u_2)(Sx) = u_1(Sx) + \alpha u_2(Sx) = u_1(x) + \alpha u_2(x) = (u_1 + \alpha u_2)(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

o que mostra que $u_1 + \alpha u_2 \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Então, $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ com a norma induzida por $H^1(\mathbb{R}^N)$ é um espaço vetorial normado.

Agora, nos resta mostar que $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é fechado. De fato, seja (u_n) uma sequência em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Basta mostrar que u é radial. Como $H^1(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^2(\mathbb{R}^N)$, temos que (u_n) também converge para u em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $u_n(x) \to u(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Portanto,

$$u(Sx) = \lim_{n\to\infty} u_n(Sx) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Logo, $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, o que mostra que $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é fechado e isto finaliza a prova. ∎

1.3 Lema de Lions

Nesta seção, apresentamos a prova de um resultado, devido a P. L. Lions [4], que será essencial para estabelecermos a compacidade de algumas imersões de subespaços de $H^1(\mathbb{R}^N)$ nos espaços de Lebesgue. Primeiramente, começamos com um resultado técnico (veja também [13]).

Lema 1.3 *Dado $r > 0$, existe uma cobertura enumerável de $\mathbb{R}^N$ por bolas abertas de raio r tal que cada ponto de $\mathbb{R}^N$ está, no máximo, em 4^N bolas da cobertura.*

Prova. Escrevamos $d = \frac{r}{2}$ e ponhamos

$$Q = \{(k_1 d, ..., k_N d) : k_1, ..., k_N \in \mathbb{Z}\}.$$

Consideremos a cobertura enumerável de $\mathbb{R}^N$ constituída das bolas abertas $B(q, r)$ com $q \in Q$. Dado $y = (y_1, ...y_N) \in \mathbb{R}^N$, sejam $\bar{k_1}, ..., \bar{k_N} \in \mathbb{Z}$ tais que

$$y \in [\bar{k_1} d, (\bar{k_1} + 1)d] \times ... \times [\bar{k_N} d, (\bar{k_N} + 1)d].$$

Dado $q = (k_1 d, ..., k_N d) \in Q$, se $k_j \leq \bar{k_j} - 2$ para algum $j \in \{1, ..., N\}$, então

$$|y - q| \geq |y_j - k_j d| \geq y_j - k_j d \geq \bar{k_j} d - k_j d = (\bar{k_j} - k_j)d \geq 2d = r,$$

de modo que, $y \notin B(q, r)$.

De maneira análoga, se $k_j \geq \bar{k_j} + 3$, então $y \notin B(q, r)$. Portanto, se $y \in B(q, r)$, então $\bar{k_j} - 1 \leq k_j \leq \bar{k_j} + 2$ para cada $j \in \{1, .., N\}$, de modo que existem, no máximo, 4^N bolas nas quais y possa estar. ∎

Na verdade, existe uma cobertura enumerável de $\mathbb{R}^N$ por bolas abertas de raio r tal que cada ponto de $\mathbb{R}^N$ está, no máximo, em $N + 1$ bolas da cobertura. Mas, o Lema acima é suficiente para nossos propósitos aqui. Uma cobertura como a do Lema 1.3 induz uma partição de $\mathbb{R}^N$. Vejamos o seguinte lema:

Lema 1.4 *Seja $(B(x,r))_{x\in X}$ uma cobertura de $\mathbb{R}^N$ por bolas de mesmo raio $r > 0$ tal que cada ponto de $\mathbb{R}^N$ esteja, no máximo, em K bolas da cobertura. Então, existe uma partição enumerável $(P_z)_{z\in Z}$ de $\mathbb{R}^N$, com Z enumerável, tal que*

(i) $P_z \cap B(x,r) = P_z$ ou $P_z \cap B(x,r) = \emptyset$ para cada $x \in X$ e cada $z \in Z$.

(ii) Para cada $z \in Z$, P_z está contido, no máximo, em K bolas da cobertura.

Prova. Para cada $x \in X$, seja

$$X_x = \{x' \in X : B_x \cap B_{x'} \neq \emptyset\}\backslash\{x\},$$

onde denotamos $B(x,r) = B_x$ para simplificarmos a notação. Para cada $z \in \mathbb{R}^N$, sejam $C_z \subseteq X$ o subconjunto dos centros das bolas da cobertura as quais z pertence,

$$Z_z := \bigcup_{x\in C_z} X_x - C_z$$

e definamos P_z por

$$P_z = \bigcap_{x\in C_z} B_x - \bigcup_{x\in Z_z} B_x.$$

Agora, dados $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^N$, mostremos que $P_{z_1} = P_{z_2}$ ou $P_{z_1} \cap P_{z_2} = \emptyset$. De fato, se existe $z_0 \in P_{z_1} \cap P_{z_2} \neq \emptyset$, então

$$z_0 \in P_{z_1} \subseteq \bigcup_{x\in C_{z_1}} B_x.$$

Logo $C_{z_1} \subseteq C_{z_0}$. Suponhamos, ao contrário, que $C_{z_0} \nsubseteq C_{z_1}$ e seja $x \in C_{z_0}\backslash C_{z_1}$. Temos que $z_0 \in B_x \cap B_{x'} \neq \emptyset$ para $x' \in C_{z_1}$, logo $x \in Z_{z_1}$. Então,

$$z_0 \notin P_{z_1} = \bigcap_{x'\in C_{z_1}} B_{y'} - \bigcup_{x'\in Z_{z_1}} B_{x'},$$

o que é uma contradição. Logo, $C_{z_1} = C_{z_0}$. Consequentemente, $Z_{z_1} = Z_{z_0}$, donde segue que $P_{z_1} = P_{z_0}$.

Analogamente, $P_{z_2} = P_{z_0}$. Portanto, $P_{z_1} = P_{z_2}$. Em virtude disso, a relação R definida por:

$$z_1 R z_2 \quad \text{se, e somente se} \quad P_{z_1} \cap P_{z_2} \neq \emptyset$$

é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}^N$. Seja $Z \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto formado por representantes distintos dois a dois das classes de equivalência determinadas pela relação. Então $(P_z)_{z\in Z}$ é uma partição de $\mathbb{R}^N$.

Note que, pelo Teorema de Lindelof segue que podemos considerar Z enumerável. Observe também que para cada $z \in Z$, o conjunto P_z é unicamente determinado por

C_z, o conjunto dos centros das bolas da cobertura que contém z, isto é, se $z_1, z_2 \in Z$ são distintos, então $C_{z_1} \neq C_{z_2}$. Como $C_z \subseteq X$ e $\wp(C_z) \leq K$ ($\wp(C_z)$ é a quantidade de subconjuntos dos centros das bolas as quais z pertence) para cada $z \in Z$, concluímos que Z tem uma quantidade enumerável de elementos.

Agora, sejam $z \in Z$ e $x \in X$ quaisquer. Como no começo da nossa demonstração, se $x \in C_z$ então $P_z \subseteq B_z$; em particular, $P_z \cap B_x = P_z$. Se $x \notin C_z$ então $P_z \cap B_x = \emptyset$. De fato, se existisse $z_0 \in P_z \cap B_x \neq \emptyset$, então teríamos $P_z = P_{z_0}$ *e* $C_z = C_{z_0}$, pois $z_0 \in P_z$, e também teríamos $x \in C_{z_0} = C_z$, pois $z_0 \in B_x$, o que é uma contradição. Isto prova (i). Pelo argumento acima, P_z está contido em exatamente $\wp \leq K$ bolas da cobertura, o que nos dá (ii) e finaliza a prova. ∎

Agora apresentamos e demonstramos um Lema de Lions:

Lema 1.5 (P. L. Lions, 1984.) *Sejam $r > 0$, $2 \leq q < 2^*$ e $N \geq 2$. Se (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e se*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |u_n|^q dz \to 0 \quad \textit{quando} \quad n \to \infty,$$

então $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$.

Prova. Sejam $q < s < 2^*$ e $N \geq 3$ (o caso $N = 2$ é tratado de forma análoga). Pela desigualdade de Hölder,

$$\|u_n\|_{L^s(B(y,r))} \leq \|u_n\|^{1-\gamma}_{L^q(B(y,r))} \|u_n\|^{\gamma}_{L^{2^*}(B(y,r))},$$

onde $0 < \gamma < 1$ satisfaz

$$\frac{1-\gamma}{q} + \frac{\gamma}{2^*} = \frac{1}{s}.$$

Pela imersão contínua de $H^1(B(y,r))$ em $L^{2^*}(B(y,r))$, obtemos

$$\|u_n\|_{L^s(B(y,r))} \leq C\|u_n\|^{1-\gamma}_{L^q(B(y,r))} \left[\int_{B(y,r)} (|u_n|^2 + |\nabla u_n|^2) dz\right]^{\gamma/2}.$$

Tomando

$$s = \frac{2}{2^*}(2^* - q) + q \in (q, 2^*)$$

temos que, $\gamma = \frac{2}{s}$ e daí

$$\int_{B(y,r)} |u_n|^s dz \leq C_1 \|u_n\|^{(1-\gamma)s}_{L^q(B(y,r))} \int_{B(y,r)} (|u_n|^2 + |\nabla u_n|^2) dz. \tag{1.1}$$

Pelo Lema 1.3, existe uma cobertura enumerável $(B(y_m, r))_{m\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^N$ tal que cada ponto de $\mathbb{R}^N$ está, no máximo, em 4^N bolas da cobertura. Usando o Lema 1.4, existe uma partição $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^N$ tal que

(i) $P_k \cap B(y_m, r) = P_k$ ou $P_k \cap B(y_m, r) = \emptyset$ para todos $m, k \in \mathbb{N}$;

(ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, P_k está contido, no máximo, em 4^N das bolas da cobertura.

Logo, por (1.1) segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^s dz &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \int_{B(y_m,r)} |u_n|^s dz \\
&\leq C_1 \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \|u_n\|_{L^q(B(y,r))}^{(1-\gamma)s} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \int_{B(y_m,r)} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) dz \\
&= C_1 \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \|u_n\|_{L^q(B(y,r))}^{(1-\gamma)s} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B(y_m,r) \cap P_k} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) dz \\
&\leq C_1 \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \|u_n\|_{L^q(B(y,r))}^{(1-\gamma)s} \right) \sum_{k=1}^{\infty} 4^N \int_{P_k} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) dz \\
&= 4^N C_1 \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \|u\|_{L^q(B(y,r))}^{(1-\gamma)s} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2) dz \\
&\leq C_2 \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \|u_n\|_{L^q(B(y,r))}^{(1-\gamma)s}.
\end{aligned}$$

Assim, $u_n \to 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$. Agora, vamos considerar os valores de p em $(2, s)$ e em $(s, 2^*)$. Suponhamos que $2 < p < s$. O caso $(s, 2^*)$ é tratado de modo análogo. Pela desigualdade de Hölder e Sobolev, temos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|u_n\|_2^{1-\gamma_1} \|u_n\|_s^{\gamma_1} \\
&\leq \left(C_2 \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \right)^{1-\gamma_1} \|u_n\|_s^{\gamma_1} \\
&\leq C \|u_n\|_s^{\gamma_1}.
\end{aligned}$$

onde

$$\gamma_1 = \frac{p-2}{s-2} \frac{s}{p}.$$

Logo, $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < s$, o que finaliza a prova do lema. ■

1.4 Compacidade nos Espaços de Lebesgue

Nesta seção, nosso objetivo é demonstrar um resultado de compacidade (Teorema 1.9), que garante que a imersão de certos subespaços de $H^1(\mathbb{R}^N)$ é compacta nos espaços de Lebesgue. Como consequência, obtemos um lema devido a Strauss [19] (Lema 1.11). Antes disso, precisamos de algumas definições.

Definição 1.6 *(i) Sejam G um subgrupo de $O(N)$, $y \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$. Definimos*

$$m(y, r, G) := \sup\{n \in \mathbb{N} : \exists g_1, ..., g_n \in G : j \neq k \ \ \textit{implica} \ \ B(g_j y, r) \cap B(g_k y, r) = \emptyset\}$$

(ii) Um subconjunto Ω de $\mathbb{R}^N$ é G-invariante se $g\Omega = \Omega$ para todo $g \in G$.

(iii) Um subconjunto G-invariante Ω de $\mathbb{R}^N$ é compatível com G se, para algum $r > 0$,

$$\lim_{\substack{|y| \to \infty \\ dist(y,\Omega) \leq r}} m(y, r, G) = \infty.$$

Note que, que se $\Omega = \mathbb{R}^N$ então a condição $dist(y, \Omega) \leq r$ é dispensável. Por exemplo, $G = O(2)$ é compatível com o $\mathbb{R}^2$ pois à medida que o raio desta rotação cresce, o número de bolas disjuntas, como em (i), também cresce.

Definição 1.7 *(i) Uma ação de um grupo topológico[1] G sobre um espaço vetorial normado H é uma aplicação contínua $G \times H \to H$, $\ (g, u) = gu$ satisfazendo as seguintes condições:*

(a) $g : H \to H$ é linear

(b) $(gh)(u) = g(hu)$

(c) $1u = u$.

Se

(d) $\|gu\| = \|u\|$ para todo $u \in H$, a ação é dita isométrica.

Definição 1.8 *(i) Sejam G um subgrupo de $O(N)$ e Ω um conjunto aberto G-invariante de $\mathbb{R}^N$. A ação de G sobre $H_0^1(\Omega)$ é definida por*

$$gu(x) := u(g^{-1}x). \tag{1.2}$$

Note que a definição acima faz sentido, pois se $x \in \Omega$ então $g^{-1}x \in \Omega$. No Apêndice C, mostramos que, de fato, (1.2) é uma ação conforme a definição anterior.

(ii) O subespaço das funções invariantes de $H_0^1(\Omega)$ é definido por

$$H_{0,G}^1(\Omega) := \{u \in H_0^1(\Omega) : gu = u, \forall g \in G\}$$

Facilmente, temos que $H_{0,G}^1(\Omega)$ é um subespaço fechado de $H_0^1(\Omega)$(demonstração análoga ao Teorema 1.2). Logo, também é um espaço de Hilbert.

[1]Um grupo topológico é um grupo munido de uma topologia de modo que a multiplicação e a inversão sejam ambas contínuas.

Agora, vamos apresentar e demonstrar alguns resultados de compacidade que serão utilizados no Capítulo 2.

Teorema 1.9 *Se Ω é compatível com G, então as seguintes imersões são compactas*

$$H^1_{0,G}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 2 < p < 2^*.$$

Prova. Seja (u_n) em $H^1_{0,G}(\Omega)$ uma sequência limitada qualquer. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $u_n \rightharpoonup u \in H^1_{0,G}(\Omega)$. Note que, $v_n = u_n - u \rightharpoonup 0$, logo basta mostrarmos que $v_n \to 0$ em $L^p(\Omega)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos, usando o Teorema de Mudança de Variável,

$$\int_{B(y,r)} |v_n|^2 dz = \frac{1}{m(y,r,G)} \sum_{j=1}^{m(y,r,G)} \int_{B(g_j y,r)} |v_n|^2 dz \leq \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} \|v_n\|_2^2}{m(y,r,G)}. \tag{1.3}$$

Como G é compatível com Ω, temos que $m(y,r,G) \to \infty$, quando $|y| \to \infty$. Logo, pela desigualdade (1.3) segue que, para cada $\varepsilon > 0$, existe um $R = R(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\sup_{|y|\geq R} \int_{B(y,r)} |v_n|^2 dz \leq \varepsilon, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Pelo Teorema de Imersão de Rellich-Kondrachov (veja Teorema A.7 no apêndice A), temos também que

$$\int_{B(0,R+r)} |v_n|^2 dz \to 0.$$

Em particular, existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{B(y,r)} |v_n|^2 dz \leq \int_{B(0,R+r)} |v_n|^2 dz \leq \varepsilon, \quad \text{se} \ |y| \leq R \ \text{ e } \ n \geq n_0. \tag{1.5}$$

Combinando (1.4) e (1.5), obtemos

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |v_n|^2 dz \to 0, \quad \text{quando} \ \ n \to \infty$$

e o resultado segue pelo Lema 1.5 (Lema de Lions). ■

Corolário 1.10 *Sejam $N_j \in \mathbb{N}$, $N_j \geq 2$, $j = 1, ..., k$, $\sum_{j=1}^{k} N_j = N$ e*

$$G := O(N_1) \times O(N_2) \times ... \times O(N_k).$$

Então, as seguintes imersões são compactas

$$H^1_G(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 < p < 2^*.$$

Prova. Primeiramente, vamos mostrar que $G = O(2)$ é compatível com o $\mathbb{R}^2$. De fato, dados $n \in \mathbb{N}$ e $r > 0$, sejam

$$x_j = R\left(\cos\left(\frac{j2\pi}{n}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{j2\pi}{n}\right)\right), \ R > 0$$

e $g_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear ortogonal, mais precisamente, uma rotação que leva $(R, 0)$ a x_j, para $j = 0, 1, ..., n$. Logo,

$$\begin{aligned} |x_{j+1} - x_j|^2 &= 2R^2\left[1 - \left(\cos(j+1)\frac{2\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{j2\pi}{n}\right) + \left(\operatorname{sen}(j+1)\frac{2\pi}{n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{j2\pi}{n}\right)\right] \\ &= 2R^2\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) \to \infty, \quad \text{quando} \quad R \to \infty. \end{aligned}$$

Assim, para $R > 0$ suficientemente grande, temos que se $|y| \geq R$, $j_1, j_2 \in \{1, ..., n\}$ e $j_1 \neq j_2$, então $|x_{j_1} - x_{j_2}| \geq 2r$, de modo que $B(g_{j_1}y, r) \cap B(g_{j_2}y, r) = \emptyset$. Logo,

$$m(y, r, O(2)) \geq n \ \text{ sempre } \ \text{ que } \ |y| \geq R.$$

De maneira análoga, mostraremos que $G = O(M)$ é compatível com $\mathbb{R}^M$. Dado $y \in \mathbb{R}^M$ com $|y| \geq R$, consideremos uma circunferência de centro em 0 e passando por y. O grupo $O(M)$ contém todas as rotações dessa circunferência. Logo, se R é suficientemente grande, então podemos obter $g_1, ..., g_n \in O(M)$ tais que $B(g_{j_1}y, r) \cap B(g_{j_2}y, r) = \emptyset$ sempre que $j_1, j_2 \in \{1, ..., n\}$ e $j_1 \neq j_2$. Portanto, se $|y| \geq R$ então

$$m(y, r, O(M)) \geq n.$$

No caso geral, dado $y = (y_1, ..., y_k) \in \mathbb{R}^{N_1} \times ... \times \mathbb{R}^{N_k}$ com $|y| \geq R\sqrt{k} > 0$, existe $j \in \{1, ..., k\}$ tal que

$$|y_j|_{\mathbb{R}^{N_j}} \geq R.$$

Pelo paragráfo anterior, temos que

$$m(y_j, r, O(N_j)) \geq n.$$

Portanto, se $|y| \geq R\sqrt{k}$ então

$$m(y, r, O(N)) \geq m(y_j, r, O(N_j)) \geq n,$$

o que completa a demonstração. ∎

Corolário 1.11 (Strauss, 1977) *Seja $N \geq 2$. Então, as seguintes imersões são compactas*

$$H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 < p < 2^*.$$

Prova. Basta observarmos que, pela definição de função radial, $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) = H^1_{O(N)}(\mathbb{R}^N)$ e daí aplicamos o Corolário 1.10 com $N_1 = N$. ∎

1.5 Princípio de Criticalidade Simétrica

Antes de introduzirmos o Princípio da Criticalidade Simétrica, algumas definições são necessárias.

Definição 1.12 *Considere a ação de um grupo topológico G sobre um espaço vetorial normado H.*

(i) O espaço de pontos invariantes desta ação é o subespaço fechado de H definido por

$$Fix(G) = \{u \in H : gu = u, \forall g \in G\}$$

(ii) Um conjunto $A \subset H$ é G-invariante se $g(A) = A$, $\forall g \in G$.

(iii) Um funcional $J : H \to \mathbb{R}$ é G-invariante se $J \circ g = J, \forall g \in G$.

(iv) Uma aplicação $f : H \to H$ é G-invariante se $f \circ g = g \circ f, \forall g \in G$.

Teorema 1.13 (Princípio de Criticalidade Simétrica) *Assuma que a ação de um grupo topológico G sobre um espaço de Hilbert $(H, \langle , \rangle)$ seja isométrica. Se $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ é invariante e u é ponto crítico de I restrito a $Fix(G)$, então u é um ponto crítico de I em H.*

Prova. Note que, para cada $g \in G$ e $u \in H$,

$$\langle I'(gu), v\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{I(gu + tv) - I(gu)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{I(g(u + tg^{-1}v)) - I(gu)}{t},$$

e desde que I é invariante temos que

$$\langle I'(gu), v\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{I(u + tg^{-1}v) - I(u)}{t} = \langle I'(u), g^{-1}v\rangle. \tag{1.6}$$

Pelo Teorema da Representação de Riesz, podemos definir $\nabla I : H \to H$ por

$$\langle I'(u), v\rangle = \langle \nabla I(u), v\rangle \quad \text{e} \quad \|I'(u)\| = \|\nabla I(u)\| \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad v \in V.$$

Portanto,

$$\langle I'(gu), v\rangle = \langle \nabla I(gu), v\rangle \quad \text{e} \quad \langle I'(u), (g^{-1}v)\rangle = \langle \nabla I(u), g^{-1}v\rangle \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad v \in V.$$

Logo, por (1.6), segue que

$$\langle \nabla I(gu), v\rangle = \langle \nabla I(u), g^{-1}v\rangle. \tag{1.7}$$

Note que ∇I é invariante com relação a ação de grupo, isto é,

$$g \circ \nabla I = \nabla I \circ g, \forall g \in G.$$

De fato, temos que

$$\|\nabla I(u) + g^{-1}v\|^2 = \|\nabla I(u)\|^2 + 2\langle \nabla I(u), g^{-1}v\rangle + \|g^{-1}v\|^2$$

e como a ação é isométrica

$$\|\nabla I(u) + g^{-1}v\|^2 = \|\nabla I(u)\|^2 + 2\langle \nabla I(u), g^{-1}v\rangle + \|v\|^2. \tag{1.8}$$

Além disso, também temos

$$\begin{aligned} \|g\nabla I(u) + v\|^2 &= \|g\nabla I(u)\|^2 + 2\langle g\nabla I(u), v\rangle + \|gv\|^2, \\ &= \|\nabla I(u)\|^2 + 2\langle g\nabla I(u), v\rangle + \|v\|^2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Observando que

$$\begin{aligned} \|g\nabla I(u) + v\|^2 &= \|g\nabla I(u) + g(g^{-1}v)\|^2 \\ &= \|g(\nabla I(u)) + g^{-1}v\|^2 \\ &= \|\nabla I(u) + g^{-1}(v)\|^2, \end{aligned}$$

de (1.8) e (1.9) segue que

$$\langle \nabla I(u), g^{-1}v\rangle = \langle g\nabla I(u), v\rangle.$$

Por (1.7)

$$\langle \nabla I(gu), v\rangle = \langle g\nabla I(u), v\rangle \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad v \in V,$$

donde segue que,

$$\nabla I(gu) = g\nabla I(u). \tag{1.10}$$

Agora, vamos provar que u é um ponto crítico de I restrito a $Fix(G)$ em H. Como $u \in Fix(G)$, $g(u) = u, \forall g \in G$. Assim, por (1.10), temos que

$$\nabla I(u) \in Fix(G).$$

Como u é ponto crítico de I restrito a $Fix(G)$, temos

$$\langle \nabla I(u), v\rangle = \langle I'(u), v\rangle = 0, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad v \in Fix(G),$$

o que implica

$$\nabla I(u) \in Fix(G)^{\perp}.$$

Portanto,

$$\nabla I(u) \in Fix(G) \cap Fix(G)^{\perp},$$

mostrando que $\nabla I(u) = 0$ em H, donde segue que u é ponto crítico de I em H. ■

Capítulo 2

Potencial Constante e Não Linearidade do Tipo Potência Subcrítica

Neste capítulo, nosso objetivo é estabelecer a existência de uma solução radial positiva, bem como uma solução não radial que muda de sinal, para o problema elíptico (P) apresentado na Introdução, quando $V(z) \equiv 1$ e $f(z,u) = |u|^{p-2}u$, $2 < p < 2^*$. Mais precisamente, consideramos o problema

$$-\Delta u + u = |u|^{p-2}u, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{P_1}$$

Entendemos por uma solução radial ou (radialmente simétrica), uma solução que esteja em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Inicialmente, para a obtenção de uma solução radial positiva, podemos considerar $N \geq 2$. Dizemos que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca de (P_1) se ela satisfaz a igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + uv) dz = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} uv dz \quad \text{para todo} \quad v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Em um primeiro momento, como estamos interessados em soluções positivas, o funcional energia associado a (P_1) pode ser dado por

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^p dz, \tag{2.1}$$

o qual está bem definido e é de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$ (veja [21, pág. 9]). Além disso, sua derivada é dada por

$$\langle \varphi'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + uv) dz - \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{p-1} v dz \quad \text{para} \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{2.2}$$

Observação 2.1 *Notemos que se u é um ponto crítico do funcional φ, então u é uma solução fraca não negativa de (P_1). De fato, tomando $v = -u^- \in H^1(\mathbb{R}^N)$ em (2.2),* *temos que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla(u^+ - u^-)\nabla(-u^-) + (u^+ - u^-)(-u^-)]dz = \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{p-1}(-u^-)dz,$$

de onde obtemos que

$$\|u^-\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u^-|^2 + (u^-)^2]dz = 0,$$

ou seja, $u^- = 0$. *Logo,* $u = u^+ \geq 0$ *e de (2.2) segue que* u *é uma solução fraca de* (P_1).

2.1 Solução Radial Positiva

Um dos principais resultados deste capítulo é o seguinte:

Teorema 2.2 (Strauss [19]) *Se* $N \geq 2$ *e* $2 < p < 2^*$, *então o problema* (P_1) *possui uma solução clássica radialmente simétrica e positiva.*

Para demonstrarmos este teorema, vamos estabelecer alguns lemas.

Lema 2.3 *Se* u *é solução fraca de* (P_1), *então* $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, *ou seja, toda solução fraca é uma solução clássica.*

Prova. Suponha que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaça

$$-\Delta u = |u|^{p-2}u - u \text{ em } \mathbb{R}^N \text{ (no sentido fraco).}$$

Logo, se escrevermos $\psi(x,s) := |s|^{p-2}s - s$ segue que

$$|\psi(x,s)| \leq a(x)(1 + |s|) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N \text{ e } s \in \mathbb{R},$$

onde $a(x) := ||u(x)|^{p-2} - 1|$. Agora, se $K \subset \mathbb{R}^N$ é um compacto, temos que

$$\int_K ||u(x)|^{p-2} - 1|^{N/2}dx \leq C|K| + \int_K |u(x)|^{(p-2)N/2}dx < \infty,$$

pois $(p-2)N/2 < 2^*$. Portanto, $a(x)$ está em $L^{N/2}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e aplicando o Teorema de Brézis-Kato (veja Teorema A.7 do Apêndice A), podemos concluir que $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \geq 1$. Usando o resultado de regularidade de Agmon, Douglas e Nirenberg (veja Teorema A.8 do Apêndice A), $u \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \geq 1$. Assim, para p suficientemente grande segue, das imersões de Sobolev, que $u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, o que implica que $|u|^{p-2}u - 1$ também está em $C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Finalmente, pela teoria de regularidade de Schauder (veja Teorema A.9 do Apêndice A), $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e a prova está finalizada. ■

Definição 2.4 *Sejam X um espaço de Banach e $J : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 em X. Uma sequência (u_n) em X é dita de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$ para J (sequência $(PS)_c$ para resumir), se*

$$J(u_n) \to c \ \ e \ \ J'(u_n) \to 0.$$

Dizemos que o funcional verifica a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$ (condição $(PS)_c$ para resumir) se toda sequência $(PS)_c$ para J possui uma subsequência convergente em X. O funcional J satisfaz a condição de Palais-Smale (condição (PS)) se satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Neste ponto, vamos considerar a ação definida em (1.2) do grupo $G = O(N)$ sobre $H^1(\mathbb{R}^N)$ e trabalhar com o funcional φ, definido em (2.1), restrito a $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Vamos denotar $\Psi = \varphi|_{H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)}$.

Lema 2.5 *O funcional Ψ satisfaz a condição (PS).*

Prova. Sejam $c \in \mathbb{R}$ e (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para Ψ. Para n suficientemente grande, temos

$$\Psi(u_n) - \frac{1}{p}\langle \Psi'(u_n), u_n\rangle \leq c + 1 + \|u_n\|.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \Psi(u_n) - \frac{1}{p}\langle \Psi'(u_n), u_n\rangle &= \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(u_n^+)^p dz - \frac{1}{p}\|u_n\|^2 + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(u_n^+)^p dz \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$c + 1 + \|u_n\| \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)\|u_n\|^2.$$

Logo, (u_n) deve ser limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato, suponha que não seja. Então, a menos de subsequência, $\|u_n\| \to +\infty$. Dividindo a desigualdade anterior por $\|u_n\|^2$, obtemos

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \leq \frac{c+1}{\|u_n\|^2} + \frac{1}{\|u_n\|}$$

e fazendo $n \to \infty$ tem-se que $1/2 - 1/p \leq 0$, isto é, $p \leq 2$, o que é uma contradição. Desde que $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Pelo Corolário 1.11, $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 < p < 2^*$. Logo, a menos de subsequência, $u_n \to u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e existe $h \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que $|u_n| \leq h$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Daí, temos que

$$|u_n^+|^{p-1} \leq |u_n|^{p-1} \leq h^{p-1} \in L^q(\mathbb{R}^N),$$

onde $q = \frac{p}{p-1}$. Em seguida, notemos que

$$\begin{aligned}\|u_n - u\|^2 &= \|u_n\|^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_n \nabla u + u_n u)dz + \|u\|^2 \\ &= \langle \Psi'(u_n), u_n - u\rangle - \langle \Psi'(u), u_n - u\rangle + \int_{\mathbb{R}^N} [(u_n^+)^{p-1} - (u^+)^{p-1}](u_n - u)dz.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder e usando o fato que $(u^+)^{p-1} \in L^q(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N} [(u_n^+)^{p-1} - (u^+)^{p-1}](u_n - u)dz\right| &\leq |(u_n^+)^{p-1} - (u^+)^{p-1}|_q |u_n - u|_p \\ &\leq (|h^{p-1}|_q + |(u^+)^{p-1}|_q)|u_n - u|_p \to 0\end{aligned}$$

Agora, desde que $\Psi'(u_n) \to 0$ e (u_n) é limitada

$$|\langle \Psi'(u_n), u_n - u\rangle| \leq \|\Psi'(u_n)\| \|u_n - u\| \to 0,$$

Ademais, $\langle \Psi'(u), u_n - u\rangle \to 0$ pela convergência fraca $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, $\|u_n - u\| \to 0$ e a prova está concluída. ■

Prova do Teorema 2.2. Para obtermos um ponto crítico para Ψ, nosso intuito é aplicar o Teorema do Passo da Montanha (veja Teorema A.3 do Apêndice A). Para isto, falta apenas verificarmos que Ψ satisfaz a *geometria do passo da montanha* (condições (i) e (ii) do Teorema A.3).

Como $(u^+)^p \leq |u|^p$, segue que

$$\begin{aligned}\Psi(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^p dz \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p\end{aligned} \tag{2.3}$$

Pela desigualdade de Sobolev, existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$|u|_p \leq C_0\|u\|.$$

Assim, de (2.3), obtemos

$$\begin{aligned}\Psi(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{C_0^p}{p}\|u\|^p \\ &= \|u\|^2\left(\frac{1}{2} - \frac{C}{p}\|u\|^{p-2}\right).\end{aligned}$$

Se $\|u\| = r$ então

$$\Psi(u) \geq r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{C}{p}r^{p-2}\right).$$

Logo, se r é suficientemente pequeno, temos que

$$\rho := r^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{C}{p} r^{p-2} \right) > 0.$$

Portanto, $\inf\limits_{\|u\|=r} \Psi(u) \geq \rho > 0$. Agora, se $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, $u^+ \neq 0$ e $t > 0$ então

$$\begin{aligned} \Psi(tu) &= \frac{1}{2}\|tu\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (tu^+)^p dz \\ &= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \frac{t^p}{p}|u^+|_p^p, \end{aligned}$$

o que implica que $\Psi(tu) < 0$ para t suficientemente grande. Tomando $e = tu$, concluímos a prova da geometria do passo da montanha. Assim, pelo Teorema do Passo da Montanha, obtemos um ponto crítico não trivial u de Ψ. Como a ação de $G = O(N)$ sobre $H^1(\mathbb{R}^N)$ é isométrica (caso análogo ao Exemplo 1 no Apêndice C), pelo Princípio de Criticalidade Simétrica, temos que u é um ponto crítico não trivial de φ. Pelo Lema 2.3 e pela Observação 2.1, u é uma solução clássica radial não-trivial e não-negativa de (P_1).

Agora, mostremos que $u(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Suponha, por contradição, que exista $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $u(x_0) = 0$. Considere $B(x_0, r)$ uma bola aberta arbitrária centrada em x_0. Desde que

$$-\Delta u + u \geq 0 \text{ em } B(x_0, r),$$

devemos ter, pelo Princípio do Máximo Forte (veja Teorema A.5 do Apêndice A), $u \equiv 0$ em $B(x_0, r)$. Como a bola é arbitrária, então $u = 0$, o que é um absurdo. Portanto, temos a positividade de u e a prova do teorema está completa. ■

2.2 Solução Não Radial que Muda de Sinal

Nesta seção, vamos demonstrar um resultado (veja Bartsch-Willem [3]) que afirma que o problema (P_1) também tem solução não radial para $N = 4$ ou $N \geq 6$. Note que, o caso $N = 5$ não é considerado, pois há uma limitação dos metódos utilizados por estes autores. Mais precisamente, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.6 (Bartsch-Willem, 1993) *Se $N = 4$ ou $N \geq 6$ e $2 < p < 2^*$, então o problema (P_1) tem uma solução não radial clássica que muda de sinal.*

Prova. Aqui, vamos considerar o funcional φ dado por

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dz, \tag{2.4}$$

o qual está bem definido, é de classe C^1 em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e tem derivada dada por

$$\langle \varphi'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + uv)dz - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uvdz \quad \text{para} \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{2.5}$$

Observemos que um ponto crítico de φ corresponde a uma solução fraca de (P_1). Se $N = 4$ ou $N \geq 6$, então é possível encontrarmos $m \geq 2$ tal que $N - 2m = 0$ ou $N - 2m \geq 2$. Neste caso, vamos considerar a ação do subgrupo $G = O(m) \times O(m) \times O(N - 2m)$ sobre $H^1(\mathbb{R}^N)$ definida, como antes, por

$$(gu)(x) = u(g^{-1}x).$$

Se olharmos para $\mathbb{R}^N$ como sendo o espaço $\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{N-2m}$, podemos ver G como a classe das transformações ortogonais pelas quais cada uma das três parcelas é um subespaço invariante. As matrizes representando elementos de G são matrizes em que a diagonal principal contém três blocos de tamanho m, m *e* $N - 2m$, respectivamente, e o restante das entradas é 0. Pelo Corolário 1.10, a imersão

$$H^1_G(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 < p < 2^*$$

é compacta. Relembremos que, $H^1_G(\mathbb{R}^N)$ é o subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$ constituído pelas funções invariantes pela ação descrita acima. Agora, consideremos a transformação $\tau \in O(N)$, definida sobre $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{N-2m}$, por

$$\tau(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3)$$

e a ação do subgrupo $H = \langle id, \tau\rangle$ sobre $H^1_G(\mathbb{R}^N)$ definida por

$$(hu)(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se} \quad h = id \\ -u(h^{-1}x), & \text{se} \quad h = \tau. \end{cases} \tag{2.6}$$

Note que esta ação está bem definida e é isométrica (veja o Exemplo 1 no Apêndice C). Observemos que

$$W \equiv Fix_{H^1_G(\mathbb{R}^N)}(H) = \{u \in H^1_G(\mathbb{R}^N) : \tau u = u\} \neq \{0\}.$$

Por exemplo, tomando $\psi_1, \psi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N-2m})$ e radiais, e $\psi_3 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, não-negativa e radial, temos que $\psi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-2m} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = log\frac{1 + \psi_3(x_1)\psi_1(x_3)}{1 + \psi_3(x_2)\psi_2(x_3)}, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-2m}$$

está em W. De fato,

$$\begin{aligned}
\tau\psi(x_1,x_2,x_3) &= -\psi(\tau^{-1}(x_1,x_2,x_3))\\
&= -\psi(\tau(x_1,x_2,x_3))\\
&= -\psi(x_2,x_1,x_3)\\
&= -log\frac{1+\psi_3(x_2)\psi_2(x_3)}{1+\psi_3(x_1)\psi_1(x_3)}\\
&= log\frac{1+\psi_3(x_1)\psi_1(x_3)}{1+\psi_3(x_2)\psi_2(x_3)}\\
&= \psi(x_1,x_2,x_3).
\end{aligned}$$

Além disso, a única função radial em W é a função identicamente nula. Com efeito, se $u_0 \in W$ é radial, então

$$u_0(x) = -u_0(\tau^{-1}x) = -u_0(x)$$

para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^N$, o que mostra que $u_0 = 0$. Como W é um subespaço fechado de $H^1_G(\mathbb{R}^N)$, as imersões

$$W \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}), \quad 2 < p < 2^*$$

são também compactas. Como na prova do Teorema 2.2, o funcional Ψ satifaz a condição (PS) e possui a geometria do passo da montanha. Logo, pelo Teorema do Passo da Montanha, Ψ tem um ponto crítico não-trivial $u \in W$. Usando o Princípio de Criticalidade Simétrica, u é um ponto crítico de φ e, portanto, uma solução fraca não-trivial de (P_1). Do Lema 2.3, segue u é uma solução clássica não nula de (P_1) pertencente a W. Assim, u é não radial e, desde que $u(x) = -u(\tau^{-1}x)$ temos que u muda de sinal, o que completa a demonstração. ■

Capítulo 3

Potencial e Não Linearidade Parcialmente Periódicos e Radiais

Neste capítulo, baseados no trabalho de (Lorca-Ubilla [12]), vamos estabelecer a existência de uma solução simétrica positiva, bem como uma solução não simétrica, que muda de sinal, para o problema elíptico semilinear

$$-\Delta u + V(z)u = f(z,u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \tag{P}$$

onde $N \geq 4$, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é um potencial contínuo não-negativo e $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Mais precisamente, as funções V e f satisfazem as seguintes hipóteses:

(V_0) $\inf\limits_{z \in \mathbb{R}^N} V(z) := b_0 > 0$;

(f_1) $\lim\limits_{s \to 0} \dfrac{f(z,s)}{s} = 0$ uniformemente para $z \in \mathbb{R}^N$.

(f_2) Existem constantes $a_1, a_2 > 0$ tais que

$$|f(z,s)| \leq a_1 + a_2|s|^p \ \text{ com } \ 1 < p < 2^* - 1,$$

para todo $z \in \mathbb{R}^N$ e $s \in \mathbb{R}$;

(f_3) Existe uma constante $\mu > 2$ tal que $0 < \mu F(z,s) \leq sf(z,s)$ para todo $z \in \mathbb{R}^N$ e $s \neq 0$, onde $F(z,s) = \int_0^s f(z,t)dt$.

(f_4) $f(z,-s) = -f(z,s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}^N$.

(f_5) Seja $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{2M}$, onde $N_1 \geq 0$ e $M \geq 2$. Existe $T = (T_1, ..., T_{N_1}) \in \mathbb{R}^{N_1}$ onde $T_i \geq 0$ para $i = 1, ..., N_1$, tal que para $z = (x,y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{2M}$ e para todo $g \in O(2M)$, temos

$$f(x_1, ..., x_i + T_i, ..., x_{N_1}, y, u) = f(x, g(y), u),$$

$$V(x_1, ..., x_i + T_i, ..., x_{N_1}, y) = V(x, g(y)),$$

com $i = 1, ..., N_1, \quad x = (x_1, ..., x_{N_1})$ e $O(2M)$ o grupo ortogonal em $\mathbb{R}^{2M}$.

Com base na notação da condição (f_5), o principal resultado deste capítulo é enunciado como segue:

Teorema 3.1 *Suponha que as hipóteses* $(V_0), (f_1) - (f_5)$ *sejam satisfeitas e considere que* $N \geq 4$. *Então, o problema (P) tem duas soluções não-triviais em* $H^1(\mathbb{R}^N)$. *Uma solução é positiva em* $\mathbb{R}^N$ *e radial na variável* y. *A outra solução muda de sinal e é não-radial na variável* y.

No Capítulo 2, não pudemos considerar o caso em que a dimensão era $N = 5$, quando estávamos buscando a existência de solução não radiais. Neste capítulo, mostraremos que é possível encontrarmos soluções não-simétricas para o problema (P) para todo $N \geq 4$. O argumento aqui nos permite considerar o caso $N = 5$, pois buscamos soluções que são não-simétricas na variável $y \in \mathbb{R}^{2M}$.

3.1 Resultados Preliminares

O funcional de Euler-Lagrange $\varphi : E \to \mathbb{R}$ associado a (P) pode ser definido por

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(z)u^2)dz - \int_{\mathbb{R}^N} F(z, u)dz,$$

onde

$$E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(z)u^2 dz < \infty \right\}.$$

O espaço E acima, munido com o produto interno e a correspondente norma dados, respectivamente, por

$$\langle u, v \rangle_E = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(z)uv)dz \quad \text{e} \quad \|u\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(z)u^2)dz$$

é um espaço de Hilbert (veja teorema abaixo). Note que quando o potencial $V(z)$ é limitado, temos que E coincide com o $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 3.2 *O espaço* $(E, \|\cdot\|_E)$ *é de Banach.*

Prova. É imediato concluir que E é um espaço vetorial normado com a norma $\|\cdot\|_E$. Vamos verificar que E é completo. Seja $(u_n) \subset E$ uma sequência de Cauchy. Portanto,

$$\|u_n - u_m\|_E^2 = |\nabla u_n - \nabla u_m|_2^2 + |(V(z)^{\frac{1}{2}}u_n) - (V(z)^{\frac{1}{2}}u_m)|_2^2 \to 0, \quad m, n \to \infty.$$

Assim, (u_n) é de Cauchy em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\{V(z)^{\frac{1}{2}}u_n\}$ é de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Logo, existem $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ verificando $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $V(z)^{\frac{1}{2}}u_n \to v$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Como $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ continuamente, temos que $u_n \to u$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e daí, a menos de subsequência,

$$u_n \to u \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Por outro lado,

$$V(z)^{\frac{1}{2}}u_n \to v \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

e com isso, $v = V(z)^{\frac{1}{2}}u$, mostrando que $\int_{\mathbb{R}^N} V(z)u^2dz < \infty$, ou seja, $u \in E$. Assim, segue que (u_n) converge para u em E, verificando que E é um espaço de Banach. ■

Observemos que pela hipótese (V_0),

$$\begin{aligned}\|u\|^2 = |\nabla u|_2^2 + |u|_2^2 &\leq |\nabla u|_2^2 + \frac{1}{b_0}|V(z)\nabla u|_2^2 \\ &\leq \min\{1, 1/b_0\}\|u\|_E^2,\end{aligned}$$

o que implica que E está imerso continuamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e portanto em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq p \leq 2^*$. Além disso, o funcional φ está bem definido em E e, mais ainda, é de classe C^1 em E (veja o Apêndice B).

Para obtermos uma sequência de Palais-Smale para o funcional φ, vamos usar a seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha (veja [21]), que não requer a condição de Palais-Smale. Apesar desta versão não garantir ponto crítico, ela garante uma sequência (PS) no nível do passo da montanha.

Teorema 3.3 *Sejam H um espaço de Hilbert, $\psi \in C^1(H, \mathbb{R})$, $e \in H$ e $r > 0$ tais que*

$$\|e\| > r \quad e \quad \inf_{\|u\|=r} \psi(u) > \psi(0) \geq \psi(e).$$

Então, existe uma sequência (u_n) tal que

$$\psi(u_n) \to c \quad e \quad \psi'(u_n) \to 0$$

onde

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Psi(\gamma(t)) > 0 \quad e \quad \Gamma = \{\gamma : [0, 1] \to H : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Os lemas a seguir são essenciais para obtermos um resultado de compacidade relacionado ao problema (P).

Lema 3.4 *Seja $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos abertos de $\mathbb{R}^{N_1}$ tais que*
(a) $\mathbb{R}^{N_1} = \cup_{j\in\mathbb{N}}\bar{A}_j$ *e* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *se* $i \neq j$;
(b) *Existe uma constante $C_0 > 0$ tal que, para todo $j \in \mathbb{N}$,*

$$\|u\|_{L^{2^*}(A_j)} \leq C_0\|u\|_{H^1(A_j)}, \ \textit{para todo} \ \ u \in H^1(A_j).$$

Seja (u_n) uma sequência limitada de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Se

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \int_{A_j\times\mathbb{R}^{2M}} |u_n|^q dz \to 0, \quad q \in [2, 2^*) \ \textit{fixo},$$

então $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $2 < p < 2^*$.

Prova. Sejam $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $q < s < 2^*$, onde $s = (1-\lambda)q + \lambda 2^*$ com $0 < \lambda < 1$. Pela desigualdade de Hölder

$$\|u_n\|^s_{L^s(A_j\times\mathbb{R}^{2M})} \leq \|u_n\|^{q(1-\lambda)}_{L^q(A_j\times\mathbb{R}^{2M})}\|u_n\|^{2^*\lambda}_{L^{2^*}(A_j\times\mathbb{R}^{2M})}.$$

Agora, usando a desigualdade de Sobolev, obtemos

$$\|u_n\|^s_{L^s(A_j\times\mathbb{R}^{2M})} \leq C_0^{2^*\lambda}\|u_n\|^{q(1-\lambda)}_{L^q(A_j\times\mathbb{R}^{2M})}\left[\int_{A_j\times\mathbb{R}^{2M}} (u_n^2 + |\nabla u_n|^2)dz\right]^{2^*\frac{\lambda}{2}}.$$

Escolhendo $\lambda = \frac{2}{2^*}$, temos

$$\int_{A_j\times\mathbb{R}^{2M}} |u_n|^s dz \leq C_0^2\|u_n\|^{\frac{2q}{N}}_{L^q(A_j\times\mathbb{R}^{2M})}\int_{A_j\times\mathbb{R}^{2M}} (u_n^2 + |\nabla u_n|^2)dz.$$

Desde que $\cup_{j\in\mathbb{N}}\overline{A_j} = \mathbb{R}^{N_1}$, tomando o supremo, usando o fato que (u_n) é limitada, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^{N_1}\times\mathbb{R}^{2M}} |u_n|^s dz \leq C_0^2\left[\sup_{j\in\mathbb{N}}\int_{A_j\times\mathbb{R}^{2M}} |u_n|^q dz\right]^{\frac{2}{N}},$$

o que mostra que $u_n \to 0$ em $L^s(\mathbb{R}^{N_1}\times\mathbb{R}^{2M})$. Argumentando como na parte final da prova do Lema 1.5, usando a desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev, $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \in (2, 2^*)$. ■

Agora, vamos fazer algumas definições semelhantes às da Seção 1.4.

Definição 3.5 **(i)** *Seja G um subgrupo de $O(2M)$. Dizemos que $\mathbb{R}^{2M}$ é compatível com G se, para algum $r > 0$, $\lim_{|y|\to\infty} m(y, r, G) = +\infty$, onde*

$$m(y, r, G) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{n \in \mathbb{N} : \exists g_1, ..., g_n \in G : j \neq k \ \ \textit{então} \ \ B(g_j(y), r) \cap B(g_k(y), r) = \emptyset\}$$

e $B(g_k(y), r) \subset \mathbb{R}^{2M}$ é uma bola de raio r e centro $g_k(y)$.

(**ii**) *Se $\mathbb{R}^{2M}$ é compatível com G, consideramos a ação isométrica de G sobre E dada por*

$$(gu)(x,y) = u(x, g^{-1}y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{2M} \quad e \quad g \in G.$$

(**iii**) *Denotamos por E_G o subespaço das funções invariantes pela ação definida sobre E, isto é,*

$$E_G = \{u \in E : gu = u, \forall g \in G\}.$$

Temos o seguinte resultado de compacidade, que será essencial em nossos propósitos:

Lema 3.6 *Se $\mathbb{R}^{2M}$ é compatível com G, a imersão $E_G \hookrightarrow L^p(\Omega \times \mathbb{R}^{2M})$ é compacta para todo domínio limitado Ω do $\mathbb{R}^{N_1}$ e todo $p \in (2, 2^*)$.*

Prova. Suponha que $u_n \rightharpoonup 0$ em E_G e seja r um número dado pela Definição 3.5. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} m(y,r,G) \int_{\Omega \times B(y,r)} u_n^2 dz &= \sum_{i=1}^{m(y,r,G)} \int_{\Omega \times B(g_i(y))} u_n^2 dz \\ &\leq \int_{\Omega \times \mathbb{R}^{2M}} u_n^2 dz \\ &\leq \sup_n |u_n|_2^2. \end{aligned}$$

Por esta desigualdade e desde que $\mathbb{R}^{2M}$ é compatível com G, dado $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$\sup_{|y| > R} \int_{\Omega \times B(y,r)} u_n^2 dz \leq \varepsilon$$

Pela imersão compacta de E em $L^2(\Omega \times B(0, r+R))$,

$$\sup_{|y| \leq R} \int_{\Omega \times B(y,r)} u_n^2 dz \to 0.$$

Assim, obtemos

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^{2M}} \int_{\Omega \times B(y,r)} u_n^2 dz \to 0.$$

Pelo Lema 3.4, concluímos que $u_n \to 0$ em $L^p(\Omega \times \mathbb{R}^{2M})$ para $2 < p < 2^*$. ∎

3.2 Resultado Principal

Antes de proceder com na demonstração do Teorema 3.1, precisamos do seguinte lema que é uma consequência da condição (f_3).

Lema 3.7 *Seja $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha que*

$$0 < \mu F(x,t) \leq tf(x,t), \tag{3.1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \neq 0$, onde $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$. Se $K \subset \mathbb{R}^N$ é um compacto, então existe constante $C > 0$ tal que

$$|F(x,t)| \geq C|t|^\mu - C,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in K$. A condição (3.1) é conhecida como a condição clássica de Ambrosetti-Rabinowitz.

Prova. Por (3.1), para $t > 1$ e $x \in K$ temos que

$$0 < \frac{\mu}{t} \leq \frac{f(x,t)}{F(x,t)},$$

e integrando obtemos

$$\int_1^t \frac{\mu}{z} dz \leq \int_1^t \frac{f(x,z)}{F(x,z)} dz.$$

Logo,

$$\mu \ln t \leq \ln F(x,t) - \ln F(x,1).$$

Assim, obtemos $\ln t^\mu \leq \ln[F(x,t)/F(x,1)]$ e daí

$$F(x,t) \geq F(x,1)t^\mu \geq C_1 t^\mu \quad \text{para } t > 1 \quad \text{e} \quad x \in K, \tag{3.2}$$

onde $C_1 = \min\limits_{x \in K} F(x,1) > 0$. Usando novamente (3.1), para $t < -1$ e $x \in K$, temos

$$\frac{f(x,t)}{F(x,t)} \leq \frac{\mu}{t},$$

o que implica

$$\int_t^{-1} \frac{f(x,z)}{F(x,z)} dz \leq \int_t^{-1} \frac{\mu}{z} dz, \quad t < -1, \quad x \in K.$$

Portanto, como anteriormente, segue que

$$F(x,t) \geq F(x,-1)|t|^\mu \geq C_2|t|^\mu \quad \text{para } t < -1 \quad \text{e} \quad x \in K. \tag{3.3}$$

onde $C_2 = \min\limits_{x \in K} F(x,-1) > 0$. Agora, para $t \in [-1,1]$ segue que $C|t|^\mu \leq C$. Portanto, para $t \in [-1,1]$ $x \in K$,

$$F(x,t) \geq 0 \geq C|t|^\mu - C.$$

Combinando (3.2), (3.3) e a desigualdade anterior, concluímos que

$$|F(x,t)| \geq C|t|^{\mu} - C,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in K$. ■

Prova do Teorema 3.1. Primeiro, vamos provar a existência de uma solução não radial que muda de sinal. Seja τ a involução definida em $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$, com $N_1 \geq 0$, $M \geq 2$, dada por

$$\tau(x, y_1, y_2) = (x, y_2, y_1).$$

Definimos a ação do grupo $G_1 = \{id, \tau\}$ sobre E por

$$gu(x,y_1,y_2) = \begin{cases} u(x,y_1,y_2), & \text{se} \quad g = id \\ -u(\tau^{-1}(x,y_1,y_2)), & \text{se} \quad g = \tau. \end{cases}$$

Note que, $u = 0$ é a única função em $E_{O(2M)} \cap E_{G_1}$. Com efeito, se $u \in E_{O(2M)} \cap E_{G_1}$, temos que

$$u(x,y_1,y_2) = -u(\tau^{-1}(x,y_1,y_2)) = -u(x,y_1,y_2),$$

isto é, $u = 0$. Então, consideremos a ação do subgrupo $G = O(M) \times O(M)$ sobre E e Ψ a restrição do funcional φ, definido na seção anterior, ao espaço de Hilbert $W = E_{G_1} \cap E_G$ com a norma de E (note que a ação de G_1 sobre W está bem definida e é isométrica, conforme o Apêndice C). A idéia é obter, via Teorema do Passo da Montanha, um ponto crítico não trivial u_0 do funcional Ψ. Em seguida, usando o Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais, poderemos concluir que u_0 é um ponto crítico não-trivial de φ.

Pelas condições sobre f, vamos verificar que Ψ verifica as hipóteses do Teorema 3.3. Já temos que Ψ é de classe C^1 e mostremos que Ψ possui a geometria do passo da montanha. Primeiramente, por (f_1) e (f_2) temos que dado $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|f(z,s)| \leq \epsilon|s| + C_\epsilon|s|^p \tag{3.4}$$

para todo $z \in \mathbb{R}^N$ e $s \in \mathbb{R}$. Consequentemente,

$$|F(z,s)| \leq \frac{\epsilon}{2}|s|^2 + \frac{C_\epsilon}{p+1}|s|^{p+1} \quad \text{para todo} \quad z \in \mathbb{R}^N, \;\; s \in \mathbb{R}.$$

Logo, usando a imersão contínua de E em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(z)u^2)dz - \int_{\mathbb{R}^N} F(z,u)dz \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_E^2 - \frac{\epsilon}{2}|u|_2^2 - \frac{C_\epsilon}{p+1}|u|_{p+1}^{p+1} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}C_1\right)\|u\|_E^2 - C_2\|u\|_E^{p+1} \\ &= \|u\|_E^2(C_3 - \|u\|_E^{p-1}), \end{aligned}$$

onde escolhemos $\epsilon > 0$ de modo que $C_3 := 1/2 - \epsilon/2 > 0$. Se $\|u\|_E = \rho$ então

$$\Psi(u) \geq \rho^2(C_3 - \rho^{p+1})$$

e se ρ é suficientemente pequeno, temos que

$$\alpha := \rho^2(C_3 - \rho^{p+1}) > 0.$$

Portanto,

$$\inf_{\|u\|=\rho} \Psi(u) \geq \alpha > 0.$$

Agora, consideremos $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ satisfazendo $\text{supp}(\psi) = \overline{B(1,0)} =: K$ e $0 \leq \varphi(z) \leq 1$ para todo $z \in B_1$. Pelo Lema 3.7, existem $C > 0$ tal que, para todo $s \in \mathbb{R}$ e $z \in K$, tem-se

$$|F(z,s)| \geq C|s|^\mu - C.$$

Logo, para $t > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Psi(t\psi) &= \frac{1}{2}\|t\psi\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(z,t\psi)dz \\
&= \frac{t^2}{2}\|\psi\|_E^2 - \int_K F(z,t\psi)dz \\
&\leq \frac{t^2}{2}\|\psi\|_E^2 - Ct^\mu \int_K |\psi|^\mu dz + C\int_K dz \\
&= \frac{t^2}{2}\|\psi\|_E^2 - Ct^\mu \int_K |\psi|^\mu dz + C|K| \\
&= t^2\left[\frac{\|\psi\|_E^2}{2} - Ct^{\mu-2}\int_K |\psi|^\mu dz + \frac{C}{t^2}|K|\right],
\end{aligned}$$

com $\psi \neq 0$. Portanto, $\lim_{t\to\infty} \Psi(t\psi) = -\infty$. Para t suficientemente grande, $e := t\psi$ satisfaz

$$\Psi(e) < 0 \quad e \quad \|e\|_E = t\|u\|_E > \rho.$$

Assim, usando o Teorema 3.3, existe uma sequência (u_n) em W tal que

$$\Psi(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \Psi'(u_n) \to 0,$$

onde

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \Psi(\gamma(t)) > 0 \quad \text{e} \quad \Gamma = \{\gamma : [0,1] \to E : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Agora, fazemos a seguinte afirmação:

Afirmação 1: A sequência (u_n) é limitada em W.

De fato, por (f_3) e para n suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned} c+1+\|u_n\|_E &\geq \Psi(u_n) - \frac{1}{\mu}\langle \Psi'(u_n), u_n\rangle \\ &= \frac{1}{2}\|u_n\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(z,u_n)dz - \frac{1}{\mu}\|u_n\|_E^2 + \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}^N} f(z,u_n)u_n dz \\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|_E^2 + \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}^N} \left[f(z,u_n)u_n - \mu F(z,u_n)\right] dz \\ &\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|_E^2. \end{aligned}$$

Se (u_n) não fosse limitada, a menos de subsequência, teríamos $\|u_n\|_E \to \infty$. Dividindo a desigualdade anterior por $\|u_n\|_E^2$, obteríamos

$$\frac{c+1}{\|u_n\|_E^2} + \frac{1}{\|u_n\|_E} \quad \geq \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu},$$

donde fazendo $n \to \infty$ chegaríamos a $\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \leq 0$, ou seja, $\mu \leq 2$, o que é uma contradição. Note que, toda sequência (PS) para Ψ é limitada.

Nosso objetivo agora é mostrarmos que (u_n) não converge para zero em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Para isto, pelo fato de (u_n) ser limitada e da igualdade

$$\langle \Psi'(u_n), u_n\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + V(z)u_n^2)dz - \int_{\mathbb{R}^N} f(z,u_n)u_n dz, \tag{3.5}$$

temos a seguinte estimativa:

$$\|u_n\|_E^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(z,u_n)u_n dz + C\|\Psi'(u_n)\|.$$

Usando (3.4), dado $\epsilon > 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \|u_n\|_E^2 &\leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} u_n^2 + C_\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dz + C\|\Psi'(u_n)\| \\ &\leq \epsilon C_1 \|u_n\|_E^2 + C_\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dz + C\|\Psi'(u_n)\|. \end{aligned}$$

Daí,

$$(1-\epsilon C_1)\|u_n\|_E^2 \leq C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dz + C\|\Psi'(u_n)\|,$$

o que implica que

$$\|u_n\|_E^2 \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p+1} dz + C_2\|\Psi'(u_n)\|.$$

Agora, se (u_n) convergisse para zero $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ teríamos $\|u_n\|_E^2 \to 0$ pois $\|\Psi'(u_n)\| \to 0$ e por (3.5) concluiríamos que $\int_{\mathbb{R}^N} f(z,u_n)u_n dz \to 0$ e, consequentemente, por (f_3) $\int_{\mathbb{R}^N} F(z,u_n)dz \to 0$. Portanto, teríamos que $\Psi(u_n) \to 0$, o que é um absurdo, pois $\Psi(u_n) \to c > 0$.

Agora, seja $\{A_J\}_{J\in\mathbb{Z}^{N_1}}$ uma sequência de conjuntos abertos de $\mathbb{R}^{N_1}$ dada por

$$A_J = (j_1T_1, (j_1+1)T_1) \times ... \times (j_{N_1}, (j_{N_1}+1)T_{N_1}),$$

onde $J = (j_1, ..., j_{N_1})$ e $T = (T_1, ..., T_{N_1})$ como dado em (f_5). Desde que (u_n) não converge para zero em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ e $p+1 \in (2, 2^*)$, segue, do Lema 3.4, que dado $q \in [2, 2^*)$ existe uma subsequência de (u_n), que denotaremos da mesma maneira, e um número positivo σ tais que

$$\sup_{J\in\mathbb{Z}^{N_1}} \int_{A_J\times\mathbb{R}^{2M}} |u_n(x,y)|^q dz > \sigma.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam A_{J_n} um retângulo tal que

$$\int_{A_{J_n}\times\mathbb{R}^{2M}} |u_n(x,y)|^q dz > \frac{\sigma}{2},$$

e $d_n := (j_{1,n}T_1, ..., j_{N_1,n}T_{N_1})$ o vértice principal de A_{J_n}. Realizando a mudança de variável $x = x' + d_n$, obtemos

$$\int_{A_0\times\mathbb{R}^{2M}} |u_n(x'+d_n, y)|^q dz' > \frac{\sigma}{2}, \quad z' = (x', y),$$

onde A_0 é o retângulo dado por $(0, T_1) \times ... \times (0, T_{N_1})$. Agora, consideremos a sequência definida por $w_n(x', y) = u_n(x' + d_n, y)$. Logo, obtemos

$$\int_{A_0\times\mathbb{R}^{2M}} |w_n(x', y)|^q dz' > \frac{\alpha}{2} \tag{3.6}$$

Observando que os vértices principais d_n são múltiplos do período T, usando a mudança de variável $x' + d_n$ e a hipótese de peridiocidade (f_5) sobre V e f, segue que w_n é também uma sequência do Passo da Montanha para Ψ e, portanto, também é limitada. Logo, desde que W é um espaço de Hilbert $w_n \rightharpoonup w$ em W e pelo Lema 3.6, $w_n \to w$ em $L^q(A_0 \times \mathbb{R}^{2M})$. Consequentemente, passando o limite em (3.6) obtemos

$$\int_{A_0\times\mathbb{R}^{2M}} |w(x', y)|^q dz' > \frac{\alpha}{2}$$

o que mostra que $w \neq 0$. Por (3.4) e usando a desigualdade de Hölder, o fato que $w_n \to w$ em $L^q(K)$ para K domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(z, w_n)\phi dz \to \int_{\mathbb{R}^N} f(z, w)\phi dz,$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W$. Portanto,

$$\langle \Psi'(w_n), \phi\rangle - \langle \Psi'(w), \phi\rangle \to 0$$

de onde obtemos $\langle \Psi'(w), \phi \rangle = 0$ para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W$. Neste ponto, vamos considerar o seguinte fato:

Afirmação 2: $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W$ é denso em W.

Admitindo, por enquanto, este resultado, segue que $w \in W$ é um ponto crítico de Ψ, isto é, w é um ponto crítico de φ restrito a W. Como as condições do Princípio de Criticalidade Simétrica são satisfeitas, temos que w é um ponto crítico não trivial de φ. Pela definição de W, a função w muda de sinal e não é radial na variável y.

A fim de obtermos uma solução radial em y e positiva, consideramos $f(z,s) = 0$ para $s < 0$ e o funcional φ restrito ao espaço $E_{O(2M)}(\mathbb{R}^N)$. Procedendo analogamente ao caso anterior, estabelecemos a existência de um ponto crítico não-trivial v de φ restrito a $E_{O(2M)}(\mathbb{R}^N)$. Pelo Príncipio de Criticalidade Simétrica, v é um ponto crítico de φ, o qual é radial na variável y. Assim, para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla v dz + \int_{\mathbb{R}^N} V(z) w v dz - \int_{\mathbb{R}^N} f(z,w) v dz = 0.$$

Como no Capítulo 2, tomando $v = -w^-$, segue que $\|w^-\|_E = 0$ e, portanto, $w^- = 0$. Logo, $w = w^+ \geq 0$. Considerando

$$\Psi(z,u) := f(z,u) - V(z)u,$$

por (3.4) segue que

$$\begin{aligned} |\Psi(z,u)| &\leq |u| + C_1|u|^p + V(z)|u| \\ &= (1 + C_1|u|^{p-1} + V(z))|u| \\ &\leq a(z)(1+|u|), \end{aligned}$$

onde $a(z) := 1 + C_1|u(z)|^{p-1} + V(z)$. Como no Capítulo 2 (Lema 2.3), $a(z)$ está em $L^{\frac{N}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e, procedendo, analogamente como na prova do Lema 2.3, teremos que w é uma solução clássica de (P). Aqui, precisa-se que a função f seja localmente Hölder contínua. Agora, desde que $f(z,u) \geq 0$ então, argumentando como na prova do Teorema 2.2, segue pelo Princípio do Máximo Forte, que $w > 0$ em $\mathbb{R}^N$ e a prova está completa.

Para finalizarmos este capítulo, vamos demonstrar a Afirmação 2:

Prova da Afirmação 2. Primeiro, seja $u \in W$ com suporte $K = \text{supp}(u)$ compacto. Consideremos ρ_n uma sequência regularizante radial em $\mathbb{R}^N$. Agora, definamos $\psi_n = \rho_n * u$.

Como $u \in W$ e ρ_n é radial tem-se que $\psi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W$ (veja Observação 3.8 no final). Além disso, como $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ temos que

$$\psi_n \to u \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial x_i} = \rho_n * \frac{\partial u}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^N).$$

Notemos que existe algum compacto K_1 tal que $K \cup \operatorname{supp}(\psi_n) \subset K_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(z)|\psi_n - u|^2 dz = \int_{K_1} V(z)|\psi_n - u|^2 dz \leq \max_{z \in K_1} V(z) \int_{K_1} |\psi - u|^2 dz,$$

de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(z)|\psi_n - u| dz \to 0.$$

Além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi_n - \nabla u|^2 dz = \sum_{i=1}^{N} \Big| \frac{\partial \psi_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|_2^2 \to 0,$$

donde

$$\|\psi_n - u\|_E \to 0.$$

Agora, dada $u \in W$, definamos $u_n(z) = M_n(z)u(z)$ com $M_n(z) = M\left(\frac{z}{n}\right)$ e M é uma função de truncamento radial em $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ definida por

$$M(x) = \begin{cases} 1, & x \in B(1,0) \\ 0, & x \in B(2,0)^c. \end{cases}$$

Novamente, temos que $u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W$ (veja Observação 3.8). É claro que $|u_n| \leq |u|$ e $u_n \to u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Logo,

$$V(z)|u_n - u|^2 \leq 2V(z)u^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

e

$$V(z)|u_n - u|^2 \to 0 \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Daí, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(z)|u_n - u|^2 dz \to 0.$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} = \frac{1}{n}\frac{\partial M}{\partial x_i}u + M_n\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

e com isso

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^2 dz \leq 2\left(\int_{\mathbb{R}^N}\Big|\frac{1}{n}\frac{\partial M}{\partial x_i}u\Big|^2 + \int_{\mathbb{R}^N}\Big|M_n\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^2\right)dz.$$

Desde que

$$\Big|M_n\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^2 \to 0 \ \text{ q.t.p. } \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N$$

e

$$\Big|M_n\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^2 \leq 2\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

obtemos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$M_n\frac{\partial u}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \ \text{ em } \ L^2(\mathbb{R}^N).$$

Resta mostrarmos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big|\frac{1}{n}\frac{\partial M}{\partial x_i}u\Big|^2 dz \to 0.$$

Observemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big|\frac{1}{n}\frac{\partial M}{\partial x_i}u\Big|^2 dz = \int_{B_{2n}\backslash B_n}\Big|\frac{1}{n}\frac{\partial M}{\partial x_i}u\Big|^2 dz \leq \frac{C}{n^2}\int_{B_{2n}\backslash B_n}|u|^2 dz \to 0,$$

onde $B_{2n} = B(0,2n)$ e $B_n = B(0,n)$. Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{N}{N-2}$ e $\frac{N}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_{2n}\backslash B_n} u^2 dz &\leq m(B_{2n}\backslash B_n)^{\frac{2}{N}}\left(\int_{B_{2n}\backslash B_n}|u|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} dz \\ &\leq (\omega_N(2n)^N)^{\frac{2}{N}}\left(\int_{B_{2n}\backslash B_n}|u|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} dz,\end{aligned}$$

o que implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big|\frac{1}{n}\frac{\partial M}{\partial x_i}u\Big|^2 dz \leq 4C\omega_N^{\frac{2}{n}}\left(\int_{B_{2n}\backslash B_n}|u|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} dz \to 0,$$

pois $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, para $i = 1, \ldots, N$, temos

$$\Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|_2^2 \to 0,$$

mostrando que

$$\|u-u_n\|_E^2 = \sum_{i=1}^{N} \Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^N} V(z)|u_n-u|^2 dz \to 0,$$

ou seja,

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad W.$$

■

Observação 3.8 *I) Se $u \in W$ então $\psi_n := \rho_n * u \in W$. De fato, usando o Teorema de Mudança de Variáveis e o fato que ρ_n é radial em $\mathbb{R}^N$, temos, denotando $t = (\tilde{t}, t_1, t_2)$, que*

$$\begin{aligned}
(\rho_n * u)(x, y_2, y_1) &= \int_{\mathbb{R}^N} u(t)\rho_n[(x,y_2,y_1) - (\tilde{t}, t_1, t_2)]dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u(\tilde{t}, t_1, t_2)\rho_n(x-\tilde{t}, y_2 - t_1, y_1 - t_2) d(\tilde{t}, t_1, t_2) \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} u(\tilde{t}, t_2, t_1)\rho_n(x-\tilde{t}, y_1 - t_2, y_2 - t_1) d(\tilde{t}, t_1, t_2) \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} u(\tilde{t}, t_2, t_1)\rho_n[(x, y_1, y_2) - (\tilde{t}, t_2, t_1)] d(\tilde{t}, t_2, t_1) \\
&= (\rho_n * u)(x, y_1, y_2),
\end{aligned}$$

para todo $(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^N$. Logo, $\tau\psi_n = \psi_n$. Se $g = (g_1, g_2) \in O(M) \times O(M)$ então

$$\begin{aligned}
(\rho_n * u)(x, g_1^{-1}y_1, g_2^{-1}y_2) &= \int_{\mathbb{R}^N} u(t)\rho_n[(x, g_1^{-1}y_1, g_2^{-1}y_2) - (\tilde{t}, t_1, t_2)]dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u(t)\rho_n(x-\tilde{t}, g_1^{-1}y_1 - t_1, g_2^{-2}y_2 - t_2)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u(t)\rho_n(x-\tilde{t}, g_1^{-1}(y_1 - g_1 t_1), g_2^{-1}(y_2 - g_2 t_2))dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u(\tilde{t}, t_1, t_2)\rho_n(x-\tilde{t}, y_1 - g_1 t_1, y_2 - g_2 t_2) d(\tilde{t}, t_1, t_2) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u(\tilde{t}, g_1 t_1, g_2 t_2)\rho_n((x, y_1, y_2) - (\tilde{t}, g_1 t_1, g_2 t_2)) d(\tilde{t}, g_1 t_1, g_2 t_2) \\
&= (\rho_n * u)(x, y_1, y_2),
\end{aligned}$$

de onde concluímos que $(g\psi_n)(x, y_1, y_2) = \psi_n(x, y_1, y_2)$ para todo $(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^N$. Assim, $g\psi_n = u_n$ para todo $g \in O(M) \times O(M)$. Resumindo, $\psi_n \in W$.

II) Se $u \in W$ então $u_n(z) := M_n(z)u(z)$ também está em W. Com efeito, desde que M_n

é radial em $\mathbb{R}^N$*, temos*

$$\begin{aligned}
u_n(x, y_1, y_2) &= M_n(x, y_1, y_2)u(x, y_1, y_2)\\
&= -M_n(x, y_1, y_2)u(x, y_2, y_1)\\
&= -M_n(x, y_2, y_1)u(x, y_2, y_1)\\
&= -u_n(x, y_2, y_1) = (\tau u_n)(x, y_1, y_2),
\end{aligned}$$

para todo $(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^N$*. Assim,* $\tau u_n = u_n$*. Agora, se* $g = (g_1, g_2) \in O(M) \times O(M)$

$$\begin{aligned}
(gu_n)(x, y_1, y_2) = u_n(x, g^{-1}y_1, g_2^{-1}y_2) &= M_n(x, g_1^{-1}y_1, g_2^{-1}y_2)u(x, g^{-1}y_1, g_2^{-1}y_2)\\
&= M_n(x, y_1, y_2)u(x, y_1, y_2)\\
&= u_n(x, y_1, y_2)
\end{aligned}$$

para todo $(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^N$*, donde* $gu_n = u_n$ *para todo* $g \in O(M) \times O(M)$*. Portanto,* $u_n \in W$*.*

$\blacksquare$

Apêndice A

Alguns Resultados Utilizados

Neste apêndice, enunciaremos os principais lemas e teoremas (alguns já adaptados ao nosso contexto) que foram utilizados em nosso trabalho.

Teorema A.1 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) *Suponha $1 \leq p < N$. Existe uma constante C, que depende apenas de p e N, tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

(Ver [9], pág. 73)

Teorema A.2 (Desigualdade de Hölder) *Sejam Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$, $1 < p < +\infty$ e $1 < q < +\infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então*

$$f.g \in L^1(\Omega) \quad e \quad \int_\Omega |f.g|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

(Ver [6], pág. 56)

Teorema A.3 (Teorema do Passo da Montanha) *Seja E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição Palais-Smale . Suponha que $I(0) = 0$ e que as seguintes condições sejam sastisfeitas:*

(i) Existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho} > \alpha$;

(ii) Existe $e \in E \backslash \bar{B}_\rho$ tal que $I(e) < 0$. Então, I possui um valor crítico $c \geq \alpha$, em que

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} I(u)$$

e

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], E) : g(0) = 0 \quad e \quad g(1) = e\}.$$

(Ver [9], pág. 51)

Teorema A.4 (Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções de* $L^1(\Omega)$. *Suponhamos que*

$(i) f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω,

(ii)*Existe* $g \in L^1(\Omega)$ *tal que, para cada* n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *q.t.p. em* Ω;

Então, $f \in L^1(\Omega)$ *e* $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$.

(Ver [6], pág. 54)

Teorema A.5 (Princípio do Máximo Forte) *Suponhamos que* Ω *seja um aberto conexo e limitado de* $\mathbb{R}^N$. *Se* $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *satisfaz* $Lv \geq 0$ *em* Ω, *onde* $Lv := -\Delta v + c(x)v$, $c \in C(\Omega)$ *é limitada e* $c \geq 0$ *em* Ω, *então* v *não pode atingir um mínimo não-positivo no interior de* Ω, *a menos que* v *seja constante.*

(Ver [8], pág. 35)

Teorema A.6 (Rellich-Kondrachov) *Sejam* $N \geq 2$ *e* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado. Então* $H^1(\Omega)$ *está imerso compactamente em* $L^p(\Omega)$ *para todo* $p \in [1, 2^*)$.

(Ver [13], pág. 83)

Teorema A.7 (Brézis-Kato) *Sejam* Ω *um domínio em* $\mathbb{R}^N$ *e* $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função Carathéodory tal que, para quase todo ponto* x,

$$|g(x, u)| \leq a(x)(1 + |u|),$$

para alguma função $a \in L^{\frac{N}{2}}_{loc}(\Omega)$. *Também seja* $u \in H^{1,2}_{loc}(\Omega)$ *uma solução fraca de*

$$-\Delta u = g(x, u), \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Então, $u \in L^q_{loc}(\Omega)$ *para todo* $q < \infty$. *Se* $u \in H^1_0(\Omega)$ *e* $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$, *então* $u \in L^q(\Omega)$ *para todo* $q < \infty$.

(Ver [20], pág. 218)

Teorema A.8 (Agmon-Douglas-Nirenberg) *Suponhamos que Ω é um aberto de classe C^2 com $\Gamma = \partial\Omega$ limitada. Seja $1 < p < \infty$. Então, para toda $f \in L^p(\Omega)$ existe uma única solução $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ da equação*

$$-\Delta u + u = f \quad em \ \ \Omega.$$

Também, se Ω é de classe C^{m+2} e se $f \in W^{m,p}(\Omega)$ (m inteiro ≥ 1), então

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega) \quad e \quad \|u\|_{W^{m+2,p}} \leq C\|f\|_{W^{m,p}}.$$

(Ver [6], pág. 197)

Teorema A.9 (Teorema de Regularidade de Schauder) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave e $f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$. Então, existe $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x), \quad \Omega \\ \quad u &= 0, \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, existe $C > 0$ (independente de u) tal que

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C\|f\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}.$$

(Ver [20], pág 216)

Apêndice B

Regularidade de Funcionais

Neste apêndice, iremos provar a regularidade C^1 do funcional $\varphi = \frac{1}{2}J_0 - J$, onde $J_0, J : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ são definidos, respectivamente, por

$$J_0(u) = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(z)|u|^2)dz \quad \text{e} \quad J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(z,u)dz,$$

com $F(x,z) = \int_0^z f(x,t)dt$ e a função $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz algumas propriedades que serão introduzidas a seguir. Além disso, veremos que J tem derivada dada por

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(z,u)vdz, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Em se tratando de norma proveniente de um produto interno, é fácil ver que, na verdade, $J_0 \in C^\infty(E, \mathbb{R})$. Então, com respeito a regularidade de φ, iremos apenas nos atentar ao operador J definido acima. Temos, nesta direção, o seguinte resultado:

Teorema B.1 *Suponha que $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja contínua, $1 \leq q \leq 2^* - 1$ e que existam constantes $a, b > 0$ tais que*

$$|f(z,s)| \leq a|s| + b|s|^q \quad \textit{para} \quad \textit{todo} \quad (z,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Então, o funcional $J : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, definido acima, está em $C^1(H^1(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(z,u)vdz, \quad \textit{para} \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Prova.

Existência da derivada de Gâteaux. Sejam $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Então, para $|t| \leq 1$, $t \neq 0$, temos

$$\frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^N} [F(z, u+tv) - F(z,u)]dz.$$

Pelo Teorema do Valor Médio,

$$F(z,u+tv)-F(z,u)=f(z,u+\theta v)tv$$

para algum $\theta=\theta(z)$ entre 0 e t. Logo,

$$\frac{J(u+tv)-J(u)}{t}=\int_{\mathbb{R}^N} f(z,u+\theta v)vdz.$$

Quando $t\to 0$ temos que $f(z,u+\theta v)v\to f(z,u)v$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}|f(z,u+\theta v)v| &\leq a|u+\theta v||v|+b|u+\theta v|^q|v|\\ &\leq a|u||v|+a|v|^2+C_1|u|^q|v|+C_1|v|^{q+1}\\ &\leq a|u|^2+2a|v|^2+C_2|u|^{q+1}+C_3|v|^{q+1} \quad \in L^1(\mathbb{R}^N),\end{aligned}$$

pois $u,v\in L^2(\mathbb{R}^N)\cap L^{q+1}(\mathbb{R}^N)$. Logo, $|f(z,u+\theta v)v|$ é limitada por uma função integrável. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(z,u+\theta v)vdz\to\int_{\mathbb{R}^N} f(z,u)vdz \quad \text{quando} \quad t\to 0.$$

Portanto,

$$\langle J'(u),v\rangle=\int_{\mathbb{R}^N} f(z,u)vdz.$$

Claramente, $J'(u)$ é um funcional linear sobre $H^1(\mathbb{R}^N)$ e, além disso, para $v\in H^1(\mathbb{R}^N)$ tem-se

$$\begin{aligned}|\langle J'(u),v\rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^N}|f(x,u)||v|dz\\ &\leq a\int_{\mathbb{R}^N}|u||v|dz+b\int_{\mathbb{R}^N}|u|^q|v|dz.\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder com os expoentes $q+1$ e $\frac{q+1}{q}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u||v|dz\leq|u|_2|v|_2\leq C|u|_2\|v\|$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^q|v|dz\leq|u|_{q+1}^q|v|_{q+1}\leq C|u|_{q+1}^q\|v\|,$$

onde usamos a imersão contínua de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e em $L^{q+1}(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$|\langle J'(u),v\rangle|\leq C\|v\|,$$

mostrando que $J'(u):H^1(\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R}$ é linear e contínuo para cada $u\in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Continuidade da derivada de Gâteaux: Sejam $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ não nula. Temos que

$$|\langle J'(u_n) - J'(u), v\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(z,u_n) - f(z,u)||v|dz \tag{B.1}$$

Consideremos $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ definida por: $\psi(s) \equiv 1$ para $s \in [-1,1]$ e $\psi(s) \equiv 0$ para $|s| \geq 2$. A partir daí, definamos para $\in u \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$g(z,u) = \psi(u)f(z,u) \quad e \quad h(z,u) = (1-\psi(u))f(z,u).$$

Assim, usando a hipótese de crescimento de $f(z,s)$ e a definição de ψ, obtemos

$$|g(z,u)| \leq C_1|u| \quad e \quad |h(z,u)| \leq C_2|u|^q.$$

Agora, afirmamos que $g(z,u_n) \to g(z,u)$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e $h(z,u_n) \to h(z,u)$ em $L^{(q+1)/q}(\mathbb{R}^N)$. Vamos mostrar a segunda convergência, pois a primeira é análoga e mais simples. Como $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ então $u_n \to u$ em $L^{q+1}(\mathbb{R}^N)$. Daí, a menos de subsequência, $u_n \to u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e existe $w \in L^{q+1}(\mathbb{R}^N)$ tal que $|u_n| \leq w$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Assim,

$$\begin{aligned}|h(z,u_n) - h(z,u)|^{(q+1)/q} &\leq C_3|h(z,u_n)|^{(q+1)/q} + C_3|h(z,u)|^{(q+1)/q}\\ &\leq C_4|u_n|^{q+1} + C_4|u|^{q+1}\\ &\leq C_4|w|^{q+1} + C_4|u|^{q+1} \in L^1(\mathbb{R}^N)\end{aligned}$$

e, além disso, $|h(z,u_n) - h(z,u)|^{(q+1)/q} \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Logo, usando novamente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, a nossa afirmação está provada. Desta forma, por (B.1) e observando que $f(z,u) = g(z,u) + h(z,u)$, temos, pela Desigualdade de Hölder e pelas imersões de Sobolev, que

$$\begin{aligned}|\langle J'(u_n) - J'(u), v\rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |g(z,u_n) - g(z,u)||v|dz + \int_{\mathbb{R}^N} |h(z,u_n) - h(z,u)||v|dz\\ &\leq |g(z,u_n) - g(z,u)|_2|v|_2 + |h(z,u_n) - h(z,u)|_{(q+1)/q}|v|_{q+1}\\ &\leq C[|g(z,u_n) - g(z,u)|_2 + |h(z,u_n) - h(z,u)|_{(q+1)/q}]\|v\|,\end{aligned}$$

de onde concluímos

$$\begin{aligned}\|J'(u_n) - J'(u)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} &= \sup_{v\neq 0} \frac{|\langle J'(u_n) - J'(u), v\rangle|}{\|v\|}\\ &\leq C(|g(z,u_n) - g(z,u)|_2 + |h(z,u_n) - h(z,u)|_{(q+1)/q})\\ &\longrightarrow 0,\end{aligned}$$

o que mostra a continuidade da derivada de Gâteaux de J e finaliza a prova do teorema.

■

Apêndice C

Ações de Subgrupos de $O(N)$ sobre $H^1(\mathbb{R}^N)$

Neste apêndice, vamos mostrar que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} G \times H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & H_0^1(\Omega) \\ (g,u) & \longmapsto & gu, \qquad gu(x) = u(g^{-1}x), \quad x \in \Omega, \end{array}$$

onde G é um subgrupo de $O(N)$ e Ω é um aberto de $\mathbb{R}^N$ G-invariante, é uma ação de grupo topológico sobre um espaço vetorial normado, conforme a definição 1.7. Não é difícil verificar que se $g \in O(N)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ então $gu \in H_0^1(\Omega)$. Aqui, vamos considerar G com a topologia induzida de $\mathbb{R}^{N^2}$.

Primeiramente, mostremos que a aplicação acima é contínua. Sejam (g_n, u_n) em $G \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(g_n, u_n) \to (g, u) \in G \times H_0^1(\Omega).$$

Logo, $g_n \to g$ em G e $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$. Vamos verificar que

$$\|g_n u_n - gu\|_{H_0^1} \to 0 \tag{C.1}$$

Afirmação 1: $\langle gu, gv \rangle_{H_0^1} = \langle u, v \rangle_{H_0^1}$ para $g \in G$ e $u, v \in H_0^1(\Omega)$.
De fato,

$$\begin{aligned} \langle gu, gv \rangle_{H_0^1} &= \int_\Omega \nabla(gu)\nabla(gv) + \int_\Omega gugv \\ &= \int_{g\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{g\Omega} uv \\ &= \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \langle u, v \rangle_{H_0^1}, \end{aligned}$$

onde usamos o Teorema da Mudança de Variáveis, o fato que Ω é G-invariante e que g é uma transformação ortogonal em $\mathbb{R}^N$. A Afirmação 1 implica em particular, que

$\|gu\|_{H_0^1} = \|u\|_{H_0^1}$. Agora, observemos que se $g \in G$ e $u, v \in H_0^1(\Omega)$ então

$$\begin{aligned} g(u+v)(x) = (u+v)(g^{-1}x) &= u(g^{-1}x) + v(g^{-1}x) \\ &= gu(x) + gv(x) \\ &= (gu+gv)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{C.2}$$

donde $g(u+v) = gu + gv$.

Afirmação 2: Para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\quad g_n\varphi \to g\varphi$ em $H_0^1(\Omega)$.

Com efeito, temos que

$$\begin{aligned} \|g_n\varphi - g\varphi\|_{H_0^1}^2 &= \langle g_n\varphi - g\varphi, g_n\varphi - g\varphi\rangle \\ &= \langle g_n\varphi, g_n\varphi\rangle - 2\langle g_n\varphi, g\varphi\rangle + \langle g\varphi, g\varphi\rangle \\ &= 2\|\varphi\|_{H_0^1}^2 - 2\langle g_n\varphi, g\varphi\rangle. \end{aligned}$$

Portanto, basta mostrarmos que

$$\langle g_n\varphi, g\varphi\rangle \to \|g\varphi\|_{H_0^1}^2 = \|\varphi\|_{H_0^1}^2. \tag{C.3}$$

Desde que $g_n \to g$ em G, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, segue que

$$\nabla(g_n\varphi)\nabla(g\varphi) \to |\nabla g\varphi|^2 \;\text{ e }\; g_n\varphi \to (g\varphi)^2 \;\text{ q.t.p em }\; \Omega.$$

Além disso,

$$|\nabla(g_n\varphi)\nabla(g\varphi)| \leq C_1 \;\text{ e }\; |g_n\varphi| \leq C_2 \;\text{ q.t.p. sobre }\; K = \text{supp}\varphi.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega \nabla(g_n\varphi)\nabla(g\varphi) = \int_K \nabla(g_n\varphi)\nabla(g\varphi) \to \int_K |\nabla g\varphi|^2 = \int_\Omega |\nabla(g\varphi)|^2$$

e

$$\int_\Omega (g_n\varphi)^2 = \int_K (g_n\varphi)^2 \to \int_K (g\varphi)^2 = \int_\Omega (g\varphi)^2,$$

o que mostra (C.3) e conclui a prova da Afirmação 2.

A fim de mostrarmos a convergência (C.3), dado $\varepsilon > 0$ considere $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\|u - \varphi\|_{H_0^1} < \varepsilon$. Daí,

$$\begin{aligned} \|g_nu_n - gu\|_{H_0^1} &= \|g_nu_n - g_nu + g_nu - g_n\varphi + g_n\varphi - g\varphi + g\varphi - gu\| \\ &\leq \|g_nu_n - g_nu\|_{H_0^1} + \|g_nu - g_n\varphi\|_{H_0^1} + \|g_n\varphi - g\varphi\|_{H_0^1} + \|g\varphi - gu\|_{H_0^1} \\ &= \|u_n - u\|_{H_0^1} + \|u - \varphi\|_{H_0^1} + \|g_n\varphi - g\varphi\|_{H_0^1} + \|u - \varphi\|_{H_0^1} \\ &\leq \|u_n - u\|_{H_0^1} + \|g_n\varphi - g\varphi\|_{H_0^1} + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n u_n - gu\|_{H_0^1} \leq 2\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, a convergência (C.1) vale e a continuidade está provada.

Por (C.2), temos que fixado $g \in G$, a aplicação de $G \times H_0^1(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$ é aditiva e, se $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$g(\alpha u)(x) = (\alpha u)(g^{-1}x) = \alpha u(g^{-1}x) = \alpha(gu)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

donde $g(\alpha u) = \alpha(gu)$. Logo, para $g \in G$ fixado, temos que a aplicação é linear. Além disso, se $g, h \in G$ e $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} g(hu)(x) = (hu)(g^{-1}x) &= u(h^{-1}(g^{-1}x)) \\ &= u((gh)^{-1}x) \\ &= (gh)u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

o que mostra que $g(hu) = (gh)u$. E se I_N é a identidade em G, segue que

$$(I_N u)(x) = u({I_N}^{-1}x) = u(I_N x) = u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

donde $I_N u = u \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$. Portanto, a aplicação definida acima é uma ação como queríamos mostrar. Ademais, a afirmação 1 mostra que esta ação é isométrica.

Vejamos no Exemplo 1 abaixo, que a ação (C.4) definida no Teorema 2.6 está bem definida e é isométrica:

Exemplo 1: Na demonstração do Teorema 2.6, consideramos a ação do subgrupo $G = O(m) \times O(m) \times O(N-2m)$ sobre $H^1(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$gu(x) = u(g^{-1}x)$$

e a ação do subgrupo $H = \langle id, \tau \rangle$ sobre $H_G^1(\mathbb{R}^N)$ definida por

$$(hu)(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se} \quad h = id \\ -u(h^{-1}x), & \text{se} \quad h = \tau, \end{cases} \tag{C.4}$$

onde $\tau \in O(N)$, definida sobre $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{N-2m}$, tem a expressão

$$\tau(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3).$$

Primeiro, vamos mostrar que esta ação está bem definida. Para justificarmos este fato, primeiramente, observemos que se $g = (g_1, g_2, g_3) \in G$ e $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{N-2m}$, então

$$\begin{aligned}\tau(g(x_1,x_2,x_3)) = \tau((g_1,g_2,g_3)(x_1,x_2,x_3)) &= \tau(g_1x_1,g_2x_2,g_3x_3)\\ &= (g_2x_2,g_1x_1,g_3x_3)\\ &= (g_2,g_1,g_3)(x_2,x_1,x_3)\\ &= \tilde{g}(\tau(x_1,x_2,x_3)),\end{aligned}$$

onde denotamos $\tilde{g} = (g_2,g_1,g_3) \in G$. Logo, $\tau g = \tilde{g}\tau$. Portanto, se $u \in H^1_G(\mathbb{R}^N)$ e $g \in G$, temos

$$\begin{aligned}g(\tau u)(x) &= \tau u(g^{-1}x) = -u(\tau^{-1}(g^{-1}x))\\ &= -u((\tau g^{-1})(x))) = -u((\widetilde{g^{-1}}\tau)(x))\\ &= -u((\widetilde{g}^{-1}\tau)(x)) = -u(\widetilde{g}^{-1}(\tau x)) = -u(\tau x) = -u(\tau^{-1}x) = (\tau u)(x).\end{aligned}$$

Assim, $g(\tau u)(x) = (\tau u)(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ o que mostra que $g(\tau u) = \tau u$, isto é, $\tau u \in H^1_G(\mathbb{R}^N)$.

Agora, vamos mostrar que a ação definida por (C.4) é isométrica. Com efeito, como na demonstração do Teorema 2.6 consideramos

$$W \equiv Fix_{H^1_G(\mathbb{R}^N)}(H) = \{u \in H^1_G(\mathbb{R}^N) : \tau u = u\} \neq \{0\}.$$

Note que $\Psi = \varphi|_W : W \longrightarrow \mathbb{R}$ é invariante pela ação de H. De fato, como $f(u) = |u|^{p-2}u$ é ímpar com respeito a u, temos que sua primitiva $F(u) = \dfrac{|u|^p}{p}$ é par com respeito a u. Assim, usando o Teorema de Mudança de Variáveis, temos

$$\begin{aligned}2\Psi(\tau u) &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(\tau u)(z)|^2 + ((\tau u)(z))^2 - 2F(\tau u(z))dz\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u(\tau^{-1}z)|^2 + (u(\tau^{-1}z))^2 - 2F(u(\tau^{-1}z))dz\\ &= 2\Psi(u),\end{aligned}$$

donde $\Psi(\tau u) = \Psi(u)$ para todo $u \in W$. Analogamente, tem-se $\|\tau u\| = \|u\|$ para todo $u \in W$, mostrando que a ação, definida em (C.4), é isométrica.

Referências Bibliográficas

[1] **Adams, R.**, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, (1975).

[2] **Alves, C. O.**, *Introdução às Equações Elípticas,* I ENAMA, Mini-Curso II, UFRJ (2007).

[3] **Bartsch, T.** & **Willem, M.** *Infinitely Many Nonradial Solutions of a Euclidean Field Equation*, Journal of Functional Analysis **117**, 447-460, (1993).

[4] **Berestycki, H** & **Lions, P. L.**, *Nonlinear Scalar Field Equations I, II.* Arch. Rational Mech. Anal. 82 (1983) 313-345, 347-375.

[5] **Boldrini, J.** & **Figueiredo, V.**, *Álgebra Linear*, UNICAMP, (1989).

[6] **Brezis, H.**, *Analyse Fonctionelle, Theorie et Applications*, Masson, Paris, (1987).

[7] **Evans, Lawrence C.**, *Partial Differential Equations*, Rhode Island: American Math. Society (1999).

[8] **Gilbarg, D.** & **Trudinger, N. S.**, Elliptic Partial Diferential Equations of Second Order, Springer-Verlag, Berlin, (1984).

[9] **Kesavan, S.**, *Nonlinear Functional Analysis,* Hindustan Agência Book, (1905).

[10] **Lima. E. L.**, *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, (2005).

[11] **Liu, Z.** & **Wang, Z. Q.**, *Schrödinger Equations with Concave and Convex Nonlinearities*, Z. Angew. Math. Phys. **56** (4), 609-629, (2005).

[12] **Lorca, S.** & **Ubilla, P.** *Symmetric and nonsymmetric solutions for an elliptic equation on* $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Analysis **58**, 961-968, (2004).

[13] **Marcondes, M.**, *Simetria, Compacidade e Multiplicidade de Soluções para um Problema Eliptíco Semilinear em* $\mathbb{R}^N$, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática de Brasília, UnB (2008).

[14] **Medeiros, L. A.** & **Miranda, M. M.**, *Iniciação aos Problemas Elíticos Não Homogêneos,* Apostila Espaço de Sobolev, UFRJ, (2000).

[15] **Rabinowitz, P. H.**, *On a Class of Nonlinear Schrödinger Equations*, Z. Angew. Math. Phys. **43**, 270-291, (1992).

[16] **Royden, H. L.** Real Analysis, Macmillan, New York (1968).

[17] **Rudin, W.**, Funcional Analysis, Mc Graw-Hill, New York (1973).

[18] **Spivak, M.**, *Calculus on Manifolds*, Benjamim, New York, (1965).

[19] **Strauss, A. Walter**, *Existence of Solitary Waves in Higher Dimensions.* Commun. math. Phys. **55** (1977), 149-162.

[20] **Struwe, M.**,*Variational Methods*, Springer Verlag, (1996).

[21] **Willem, M.**, *Minimax Theorems*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlim, (1996).