Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

O Teorema de Bohnenblust–Hille

Daniel Núñez Alarcón

2011

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

O Teorema de Bohnenblust–Hille

por

Daniel Núñez Alarcón

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Julho de 2011
João Pessoa-PB

O Teorema de Bohnenblust–Hille

por

Daniel Núñez Alarcón

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Mary Lilian Lourenço - USP

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna - UFPB (Suplente)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

N972t Núñez-Alarcón, Daniel.
O Teorema de Bohnenblust-Hille / Daniel Núñez Alarcón.- João Pessoa, 2011.
59f.
Orientador: Daniel Marinho Pellegrino
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1.Matemática. 2.Operadores múltiplo somantes. 3.Teorema de Bohnenblust-Hille.

UFPB/BC CDU: 51(043)

No, -A mi Madre y a mi Padre.-...

... -A mis Padres.- Así. Juntos.

Agradecimentos.

Muito obrigado a YHWH. É um prazer sentir a tua mão no meu ombro e me deixe saber que você se importa.

Muito obrigado ao professor Daniel Marinho Pellegrino por sua impecável labor de orientação.

Muito obrigado ao professor Pedro Hinojosa Vera por seu voto de confiança, e ao corpo docente do mestrado pela excelente instrução e qualidade humana incomparável.

Muito obrigado a meus pais, Hugo e Ana Delia, que com sua dedicação e paciência, cultivaram em mim seus nobres valores e me deram sempre força e apoio.

Muito Obrigado a Ddiana Marcela Serrano Rodríguez, sem você simplesmente nada disto teria acontecido. É um imenso prazer compartilhar cada detalhe desta vida contigo, eu te amo minha garota.

Muito Obrigado a minha família toda que me acompanhou e apoiou na distancia, especialmente a Tito, dom Juvenal e dona Graciela.

Muito Obrigado a Arnoldo, Mercaluz e Juliana, pelo lar e aconchego que me brindaram no verão de 2011 em Campinas.

Muito obrigado aos colegas do mestrado pela amizade e companhia, em particular a Valdecir, Diego, Mauricio e Roberto. Gente boa demais.

Muito obrigado à professora Mary Lilian e ao professor Everaldo, pela contribuição na melhora deste trabalho.

Muito obrigado a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

O Teorema de Bohnenblust–Hille, demonstrado em 1931 no prestigioso jornal Annals of Mathematics, garante que para toda forma n-linear $U : l_\infty^N \times \cdots \times l_\infty^N \longrightarrow \mathbb{K}$ e para qualquer inteiro positivo N, tem-se

$$\left(\sum_{i_1,...,i_n=1}^{N} |U(e_{i_1}, ..., e_{i_n})|^{\frac{2n}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \leq C_n \|U\|,$$

onde $C_n = n^{\frac{n+1}{2n}} 2^{\frac{n-1}{2}}$. Após um longo tempo esquecido, esse resultado tem sido bastante explorado nos últimos anos. Neste trabalho fazemos, com detalhes, uma bela demonstração do Teorema de Bohnenblust–Hille, devida a A. Defant, U. Schwarting e D. Popa. Também destacamos o cálculo de estimativas das constantes envolvidas e algumas informações assintóticas, de acordo com um recente trabalho de D. Pellegrino e J. Seoane-Sepúlveda.

Palavras-Chave:
Operadores múltiplo somantes, Teorema de Bohnenblust–Hille.

Abstract

The Bohnenblust–Hille Theorem, proved in 1931 in the prestigious journal Annals of Mathematics, asserts that if $U : l_\infty^N \times \cdots \times l_\infty^N \longrightarrow \mathbb{K}$ is an n-linear form and N is a positive integer N, then

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{N} |U(e_{i_1},...,e_{i_n})|^{\frac{2n}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \leq C_n \|U\|,$$

with $C_n = n^{\frac{n+1}{2n}} 2^{\frac{n-1}{2}}$. After a long time overlooked, this result has been explored in the recent years. In this work we detail a beautiful proof of the Bohnenblust–Hille Theorem, due to A. Defant, U. Schwarting and D. Popa. We also investigate the estimates of the constants involved and some asymptotic information, following a recent work of D. Pellegrino and J. Seoane-Sepúlveda.

Key-Words:
Multiple summing operators, Bohnenblust–Hille Theorem.

Sumário

Introdução

Uma das generalizações mais recentes da teoria de operadores absolutamente somantes é a teoria dos operadores multilineares múltiplo somantes, introduzida no ano 2003. É nesta teoria que o presente trabalho encontra-se imerso.

Para toda forma bilinear $U : l_\infty^N \times l_\infty^N \longrightarrow \mathbb{K}$ e para qualquer inteiro positivo N, tem-se

$$\left(\sum_{i,j=1}^{N} |U(e_i, e_j)|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} \leq \sqrt{2} \, \|U\| \, .$$

Esta afirmação é conhecida como a Desigualdade 4/3 de Littlewood , provada por J. E. Littlewood em 1930. No ano seguinte, esta afirmação foi estendida para formas m-lineares por H.F. Bohnenblust e E. Hille; eles provaram que para toda forma n-linear $U : l_\infty^N \times \cdots \times l_\infty^N \longrightarrow \mathbb{K}$ e para qualquer inteiro positivo N, tem-se

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{N} |U(e_{i_1}, ..., e_{i_n})|^{\frac{2n}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \leq C_n \, \|U\| \, ,$$

onde $C_n = n^{\frac{n+1}{2n}} 2^{\frac{n-1}{2}}$. Este resultado é atualmente conhecido como o Teorema de Bohnenblust–Hille e a constante C_n tem sido aos poucos melhorada.

O Teorema de Bohnenblust–Hille pode ser enunciado no contexto da teoria de operadores múltiplo somantes e recentemente, exatamente nesse novo ambiente, A. Defant, D. Popa e U. Schwarting, em 2010, exibiram uma nova demonstração para o Teorema de Bohnenblust–Hille que, além de generalizá-lo, parece ser a demonstração mais clara e moderna desse resultado. Curiosamente, além de todas essas vantagens, a demonstração de Defant–Popa–Schwarting, se explorada na maneira certa, gera constantes C_n muito boas. Esse fato não foi comentado no artigo original de Defant–Popa–Schwarting, talvez porque o trabalho não tinha como objetivo calcular constantes e também pelo fato de que as constantes que aparecem na demonstração eram aparentemente complicadas e de trabalhoso manuseio, sem fazer transparecer que seriam potencialmente boas constantes.

Logo em seguida, ainda em 2010, D. Pellegrino e J. Seoane-Sepúlveda usaram a demonstração de Defant–Popa–Schwarting e alguns outros ingredientes para estimar os melhores valores (menores valores) das constantes C_n que podem ser extraídas do teorema.

Nesse trabalho apresentaremos detalhadamente a demonstração de Defant *et al.* e o cálculo das constantes envolvidas.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

No Capítulo 1 faremos um breve histórico dos operadores multilineares múltiplo somantes e do Teorema de Bohnenblust–Hille, assim como destacaremos as definições e propriedades que consideramos necessárias para entender como o teorema de Bohnenblust–Hille pode ser interpretado no contexto dos operadores múltiplo somantes.

No Capítulo 2 enunciamos e demonstramos algumas desigualdades que serão utilizadas na demonstração do Teorema de Bohnenblust–Hille.

No Capítulo 3 faremos a demonstração do Teorema de Bohnenblust–Hille (devida a Defant *et al.*) e em seguida faremos uma variação dessa primeira demonstração, seguindo um preprint de D. Pellegrino e J. Seoane-Sepúlveda, para que sejam obtidas melhores constantes (tanto para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, como para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Forneceremos também uma tabela numérica comparativa do desenvolvimento histórico das constantes C_n. Finalmente apresentaremos uma espécie de versão vetorial do teorema, que chamaremos de Teorema de Defant–Popa–Schwarting.

Notação e Terminologia

- Em todo este texto, $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Os espaços vetoriais sempre serão considerados sobre $\mathbb{K}$.
- Usaremos o termo "operador" com o mesmo sentido de "função".
- Na maior parte deste texto, $X, Y, E, F, G, H, X_i, Y_i, ...$ denotarão espaços de Banach. A norma de um espaço de Banach X será usualmente denotada por $\|\cdot\|$; quando maior precisão for necessária, usaremos $\|\cdot\|_X$. O símbolo B_X denotará a bola unitária fechada $\{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ de um espaço de Banach X.
- O dual (topológico) de um espaço de Banach X será denotado por X'.
- Denotaremos por $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ o espaço de Banach de todas as aplicações m-lineares de $X_1 \times ... \times X_m$ em Y, com a norma usual do sup.
- Denotaremos por q' o conjugado de que q, isto é, $q' = \frac{q}{q-1}$.
- Chamaremos $l_\infty^k := \{(x_n)_{n=1}^\infty \in l_\infty, \text{ com } x_n = 0, \forall n > k\}$.
- O intervalo fechado $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ na maior parte deste texto será denotado por I.

Capítulo 1

O Teorema de Bohnenblust–Hille e operadores multilineares múltiplo somantes

No ano de 1930 o célebre matemático britânico John Edensor Littlewood, num artigo intitulado "On bounded bilinear forms in an infinite number of variables" [17], demonstrou a agora famosa desigualdade 4/3 de Littlewood, que afirma que

$$\left(\sum_{i,j=1}^{N} |U(e_i, e_j)|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} \leq \sqrt{2} \, \|U\| \tag{1.1}$$

para toda forma bilinear $U : l_\infty^N \times l_\infty^N \longrightarrow \mathbb{C}$ e para qualquer inteiro positivo N.

É natural que indaguemos sobre a existência de uma desigualdade análoga que generalize o resultado para toda forma *n-linear*

$$U : \underbrace{l_\infty^N \times \cdots \times l_\infty^N}_{n-vezes} \longrightarrow \mathbb{K}$$

e para qualquer inteiro positivo N.

A existência de uma tal desigualdade foi provada um ano depois em [3], por H.F. Bohnennbluste e E. Hille. Eles provaram que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{N} |U(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})|^{\frac{2n}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{2n}} \leq C_n \|U\| \tag{1.2}$$

para toda forma n-linear $U : l_\infty^N \times \cdots \times l_\infty^N \longrightarrow \mathbb{C}$ e para qualquer inteiro positivo N, onde $C_n = n^{\frac{n+1}{2n}} 2^{\frac{n-1}{2}}$.

Nos anos seguintes esta desigualdade foi esquecida, embora outros autores (como Davie [6] e Kaijser [15]) tenham trabalhado em problemas similares, mas aparentemente sem conhecer o resultado de Bohnenblust e Hille.

Nas próximas seções desenvolveremos conceitos essenciais para que possamos enunciar e demonstrar o Teorema de Bohnenblust–Hille, usando como ambiente a teoria de operadores múltiplo somantes.

1.1 Cotipo de um espaço de Banach

Nesta seção vamos introduzir as funções de Rademacher e o conceito de cotipo de um espaço de Banach; estas noções serão usadas em várias partes deste trabalho.

As *funções de Rademacher* são definidas por

$$\begin{aligned} r_n &: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \\ r_n(t) &:= sign\,(\sin 2^n \pi t) \end{aligned}$$

e têm a seguinte propriedade de ortogonalidade:

Se $0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ e $p_1, ..., p_k \geq 0$ são inteiros, então

$$\int_0^1 r_{n_1}^{p_1}(t) \cdot \ldots \cdot r_{n_k}^{p_k}(t)\, dt = \begin{cases} 1, & \text{se cada } p_j \text{ é par} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para detalhes sobre as funções de Rademacher sugerimos [28, Cap 1]. Uma consequência imediata é que as r_n formam sequência ortonormal em $L_2[0,1]$. Além disso,

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \tag{1.3}$$

para todo $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2$. De fato, considere a sequência $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k r_k$ e, para $n > m$, temos

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\|_{L_2[0,1]}^2 &= \left\| \sum_{k=m+1}^{n} a_k r_k \right\|_{L_2[0,1]}^2 = \int_0^1 \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k r_k(t) \right|^2 dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=m+1}^{n} a_i r_i(t) \right) \overline{\left(\sum_{j=m+1}^{n} a_j r_j(t) \right)} dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=m+1}^{n} a_i r_i(t) \right) \left(\sum_{j=m+1}^{n} \overline{a_j} r_j(t) \right) dt \\ &= \sum_{i,j=m+1}^{n} a_i \overline{a_j} \int_0^1 r_i(t)\, r_j(t)\, dt \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 \int_0^1 r_k^2(t)\, dt + \sum_{\substack{i,j=m+1 \\ i \neq j}}^{n} a_i \overline{a_j} \int_0^1 r_i r_j(t)\, dt \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 . \end{aligned}$$

Como $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2$, segue que $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $L_2[0,1]$, e portanto $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é convergente. O argumento usado acima e o fato de $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ ser convergente garantem que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = \lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \right\|_{L_2[0,1]}^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right\|_{L_2[0,1]}^2 = \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^2 dt,$$

como queríamos.

A seguir definimos cotipo, assim como algumas propriedades. Para mais detalhes recomendamos [9, Cap 11].

Definição 1.1.1 *Dizemos que um espaço de Banach X tem cotipo q se existir uma constante $C > 0$ tal que, para qualquer escolha finita de vetores $x_1, ..., x_n \in X$, tivermos*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j(t)\, x_j \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

onde para cada j natural, $r_j : [0,1] \to \mathbb{R}$ denota a função Rademacher.

Quando $q = \infty$ substituímos $\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^q \right)^{\frac{1}{q}}$ por $\max_{1 \leq j \leq n} \|x_j\|$. O ínfimo das constantes C, é denotado por $C_q(X)$ e será chamado de constante de cotipo.

Proposição 1.1.2 *[11, pág 37]*

a) Se X é um espaço de Banach com cotipo q, então $q \geq 2$.
b) Se X é um espaço de Banach com cotipo q, então X tem cotipo q' para todo $q' \geq q$.
c) Se X é um espaço de Hilbert, então X tem cotipo 2.
d) Se $1 \leq p \leq 2$ então l_p tem cotipo 2, e se $p > 2$ então l_p tem cotipo p.

1.2 Operadores absolutamente somantes

No ano de 1935, no Problema 122 do famoso "Scotish Book"(veja [19]), foi proposta a seguinte questão na Teoria dos Espaços de Banach:

Existe, em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita, uma série incondicionalmente convergente que não é absolutamente convergente?

Cerca de 15 anos depois, A. Dvoretzky e C. A. Rogers em [10] deram resposta à questão. O resultado apresentado por A. Dvoretzky e C. A. Rogers atraiu o interesse de Alexander Grothendieck; este último apresentou, em 1955, em [13], uma demonstração diferente do Teorema de Dvoretzky–Rogers e, em [12], deu início ao que hoje se conhece como a base da teoria dos operadores absolutamente somantes.

Porém, não foi Grothendieck quem introduziu o conceito de operador linear absolutamente somante, pelo menos com a formalização que conhecemos hoje; além disso, a notação utilizada por Grothendieck era muito complicada e as suas ideias ficaram algum tempo inexploradas. Apenas em 1966-1967 que B. Mitiagin e A. Pelczyński [20] e A. Pietsch [25] introduziram o conceito de operador linear absolutamente (q,p)-somante. Finalmente, no ano de 1968, J. Lindenstrauss e A. Pelczyński em [16] conseguiram apresentar a teoria de uma forma mais acessível, simplificando a apresentação original de Grothendieck. Desde então, a teoria dos operadores lineares absolutamente somantes tem sido estudada, ganhando uma posição de destaque na Análise Funcional.

A seguir vamos apresentar as definições básicas da teoria, assim como alguns dos resultados principais. Na maioria dos casos não apresentaremos as provas dos resultados. Porém, o leitor pode encontrar as provas detalhadas e muito mais ao respeito desta teoria em [9] e [28].

Definição 1.2.1 *Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é dita **absolutamente somável**, se a sequência de escalares correspondente $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ pertencer a l_1.*

*Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é dita **incondicionalmente somável**, se $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ converge (para o mesmo limite), sempre que $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ for uma bijeção.*

Teorema 1.2.2 (Dvoretzky–Rogers) *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Então, para qualquer escolha de $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ em l_2, existe uma sequência incondicionalmente somável $(x_n)_{n=1}^{\infty}$em X com $\|x_n\| = |\lambda_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, ao escolher $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2 - l_1$, obtemos uma sequência incondicionalmente somável que não é absolutamente somável.*

Definição 1.2.3 *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e X um espaço de Banach. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é **fortemente p-somável** se a sequência de escalares correspondente $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ estiver em l_p.*

O espaço vetorial de todas as sequências fortemente p-somáveis em X, com as operações usuais, é representado por $l_p(X)$. A seguinte norma

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

transforma $l_p(X)$ em um espaço de Banach. Se $p = \infty$ definimos

$$l_\infty(X) := \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}; \sup_n \|x_n\| < \infty\right\}$$

e, com a norma,

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty := \sup_n \|x_n\|$$

o espaço $l_\infty(X)$ também é espaço de Banach.

Definição 1.2.4 *Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é **fracamente p-somável** se a sequência de escalares $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty} \in l_p$ para todo $\varphi \in X'$.*

Denotamos por $l_p^w(X)$ o conjunto de todas as sequências fracamente p-somáveis e, com a norma,

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.4}$$

o espaço $l_p^w(X)$ é completo.

Ainda para $1 \leq p < \infty$, o espaço

$$l_p^u(X) = \left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(X); \lim_{n\to\infty} \left\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\right\|_{w,p} = 0\right\}$$

é um subespaço fechado de $l_p^w(X)$, que também é importante na teoria.

Definição 1.2.5 *Se $1 \leq q \leq p < \infty$ um operador linear contínuo $u : X \to Y$ é **absolutamente $(p;q)$-somante** (ou $(p;q)$-**somante**) se $(u(x_n))_{n=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ sempre que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_q^w(X)$.*

Teorema 1.2.6 *[28, Teorema 2.2.6] [Grothendieck]*
Todo operador linear contínuo de l_1 em l_2 é absolutamente $(1,1)$-somante.

O próximo resultado caracteriza os operadores absolutamente somantes através de desigualdades:

Proposição 1.2.7 *[28, Prop 2.3.10]*
Seja $u \in \mathcal{L}(X;Y)$. São equivalentes:
(i) u é $(p;q)$-somante;
(ii) Existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.5}$$

para quaisquer $x_1, ..., x_n$ em X e n natural;
(iii) Existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q^w(X)$.

(iv) Existe $K > 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \| u(x_k) \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q^u(X)$.

(v) $(u(x_k))_{k=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ *sempre que* $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q^u(X)$.

Denotamos por $\pi_{p,q}(u)$ *o ínfimo dos* K *tais que a desigualdade (1.5) continua válida. Denotamos ainda por* $\prod_{p,q}(X;Y)$ *o conjunto formado por todos os operadores* $(p;q)$*-somantes de* X *em* Y*. Quando* $p = q$*, escrevemos* $\prod_p(X;Y)$ *ao invés de* $\prod_{p,p}(X;Y)$.

Cálculos usuais mostram que $\left(\prod_{p,q}, \pi_{p,q}\right)$ é um espaço de Banach.

Definição 1.2.8 *Um* ***ideal de operadores*** $\mathcal{I}$ *é uma subclasse da classe* $\mathcal{L}$*, formada por todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach, tal que, para quaisquer espaços de Banach* E *e* F*, as componentes* $\mathcal{I}(E;F) = \mathcal{L}(E;F) \cap \mathcal{I}$ *satisfazem:*

(i) $\mathcal{I}(E;F)$ *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{L}(E;F)$ *que contém os operadores de posto finito.*

(ii) A propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(E;F)$*,* $v \in \mathcal{I}(F,G)$ *e* $t \in \mathcal{L}(G,H)$*, então a composição* tvu *está em* $\mathcal{I}(E;H)$.

Definição 1.2.9 *Um* ***ideal normado de operadores*** $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ *é um ideal de operadores* $\mathcal{I}$ *munido da função* $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \longrightarrow [0,\infty)$ *tal que:*

(i) $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ *restrita a* $\mathcal{I}(E;F)$ *é uma norma para quaisquer espaços de Banach* E *e* F*;*

(ii) $\|I_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$*, com* $I_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ *dada por* $I_{\mathbb{K}}(x) = x$*;*

(iii) Se $u \in \mathcal{L}(E;F)$*,* $v \in \mathcal{I}(F;G)$*, e* $t \in \mathcal{L}(G;H)$*, então* $\|tvu\|_{\mathcal{I}} \leq \|t\| \|v\|_{\mathcal{I}} \|u\|$.

Um ideal normado é um ***ideal de Banach*** *(ou* ***ideal completo****) se, para quaisquer espaços de Banach* E *e* F*, as componentes* $(\mathcal{I}(E;F), \|.\|_{\mathcal{I}})$ *forem completas.*

Teorema 1.2.10 *[28, Prop 2.3.22]*
Se $1 \leq q \leq p < \infty$*, então* $\left(\prod_{p,q}, \pi_{p,q}\right)$ *é um ideal de Banach.*

Teorema 1.2.11 (Pietsch) *[32, Teorema 1.2.9]*
Sejam $1 \leq p < \infty$ *e* $u : X \to Y$ *um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Então* u *é absolutamente* (p,p) *somante se, e somente se, existem uma constante* $C > 0$ *e uma medida de probabilidade* μ *de Borel de* $B_{X'}$*, com a topologia fraca estrela, tais que*

$$\| u(x) \| \leq C \left(\int_{B_{X'}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $x \in X$*, e* $\varphi \in B_{X'}$.

Os resultados abaixo mostram como o cotipo dos espaços de Banach tem efeito na teoria linear. Como veremos nas próximas seções e nos próximos capítulos, o conceito de cotipo também tem um papel importante na teoria multilinear. O primeiro resultado que destacamos é essencialmente uma observação relativamente simples:

Proposição 1.2.12 *Se* X *tem cotipo* $2 \leq q < \infty$ *então* $l_1^w(X) \subset l_q(X)$*. Em outras palavras,* I_X *é* $(q,1)$*-somante e a sua norma* $\pi_{(q,1)}(I_X) \leq C_q(X)$.

O próximo resultado é uma espécie de recíproca do resultado anterior. Sua demonstração, ao contrário do resultado anterior, é extremamente técnica:

Teorema 1.2.13 (Talagrand) *Seja X um espaço de Banach. Se $q > 2$ e I_X é $(q, 1)$-somante então X tem cotipo q.*

Dados espaços de Banach X e Y, uma pergunta natural é se todo operador linear contínuo de X em Y é absolutamente $(p; q)$-somante. Quando isso ocorre, chamamos de *resultado de coincidência.*

A seguir ilustramos como o cotipo dos espaços envolvidos propicia resultados de coincidência para a teoria:

Teorema 1.2.14 (Dubinsky - Pelczyński - Rosenthal - Maurey) *Seja Y um espaço de Banach com cotipo q, onde $2 \leq q < \infty$, e K um espaço de Hausdorff compacto.*

(a) Se $q = 2$, então

$$\mathcal{L}(C(K), Y) = \Pi_2(C(K), Y).$$

(b) Se $2 < q < \infty$, então

$$\mathcal{L}(C(K), Y) = \Pi_{q,p}(C(K), Y) = \Pi_r(C(K), Y)$$

para todo $p < q$ e $q < r < \infty$.

Teorema 1.2.15 (Maurey) *Sejam X e Y espaços de Banach.*

(a) Se X tem cotipo 2, então

$$\Pi_2(X, Y) = \Pi_1(X, Y).$$

(b) Se X tem cotipo $2 < q < \infty$, então

$$\Pi_r(X, Y) = \Pi_1(X, Y)$$

para todo $1 < r < q'$.

(c) Se X e Y têm cotipo 2, então

$$\Pi_r(X, Y) = \Pi_1(X, Y)$$

para todo $1 < r < \infty$.

1.3 Operadores multilineares múltiplo somantes

O sucesso da teoria de operadores absolutamente somantes é uma das razões para um estudo sistemático de ideais de operadores entre espaços de Banach, que teve seu início na década de 80. A partir desta década, com o trabalho [24] de Pietsch começaram a ser investigadas generalizações do conceito "absolutamente somante" para ambientes mais gerais.

Nesta seção apresentaremos uma das generalizações mais naturais (para o contexto multilinear) do conceito de operador linear absolutamente somante, a saber a noção de operador múltiplo somante. Como na seção anterior, não apresentaremos as provas dos resultados; o leitor interessado pode encontrar os detalhes em [23, 30, 31].

Definição 1.3.1 *Se $1 \leq p_1, ..., p_n \leq q < \infty$, um operador $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y)$ é dito **múltiplo** $(q; p_1, ..., p_n)$**-somante** se existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m} \left\| T\left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)}\right) \right\|^q \right)^{1/q} \leq C \prod_{k=1}^{n} \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m} \right\|_{p_k}^{w} \tag{1.6}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e $x_j^{(k)} \in X_k$, $j = 1, ..., m$, $k = 1, ..., n$.

Neste caso escrevemos $T \in \prod_{(q;p_1,...,p_n)}^n (X_1, ..., X_n; Y)$ e o ínfimo dos C que satisfaz (1.6) define uma norma em $\prod_{(q;p_1,...,p_n)}^n (X_1, ..., X_n; Y)$, representada por $\pi_{(q;p_1,...,p_n)}(\cdot)$

O conceito de operadores múltiplo $(q; p_1, ..., p_n)$-somantes foi introduzido no ano 2003 por David Pérez-García em [23] e independentemente por Mário C. Matos em [18].

Observações:

· Quando um determinado operador for múltiplo $(q; p, ..., p)$-somante, será chamado de múltiplo $(q; p)$-somante e escreveremos $\pi_{(q;p)}(\cdot)$ para denotar a norma associada e $\prod_{(q;p)}^n$ para representar a classe. Além disso, se for múltiplo $(p; p)$-somante, será chamado de múltiplo p-somante e escreveremos $\pi_p(\cdot)$ como sendo a norma associada, e $\prod_p^n$ como sendo a classe.

· Se $n = 1$, temos a definição de operadores lineares absolutamente (q, p)-somantes.

· Se $p_j > q$ para algum $1 \leq j \leq n$, o único operador multilinear que verifica (1.6) é o operador identicamente nulo. Isto fica provado na seguinte proposição:

Proposição 1.3.2 *Seja $q < p_j$ para algum $1 \leq j \leq n$. Se $T \in \Pi_{q;p_1,...,p_n}^n (X_1, ..., X_n; Y)$ então T é o operador nulo.*

Demonstração. Se $q < p_j$ para algum $1 \leq j \leq n$, então $l_{p_j} \supset l_q$ e assim encontramos $\left(\alpha_{i_j}\right)_{i_j=1}^{\infty}$ em $l_{p_j} - l_q$. Tomando $x_j \in X_j$, com $x_j \neq 0$, temos $\left(\alpha_{i_j} x_j\right)_{k=1}^{\infty} \in l_{p_j}^w (X_j)$.

Vamos supor, por contradição, que exista $T \neq 0$ tal que $T \in \Pi_{q;p_1,...,p_n}^n (X_1, ..., X_n; Y)$. Logo, para quaisquer $x_{i_k}^k \in X_k$, temos

$$\left(\sum_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \left\| T\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_n}^n\right) \right\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \prod_{l=1}^{n} \left\| \left(x_{i_l}^l\right)_{i_l=1}^{\infty} \right\|_{p_l}^{w}.$$

Tomando $\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty} = (x_k, 0, ..., 0, ...)$, para cada $1 \leq k \leq n$, $k \neq j$, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \left\| T\left(x_{i_1}^1, ..., \alpha_{i_j} x_j, ..., x_{i_n}^n\right) \right\|^q \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{i_j=1}^{\infty} \left\| T\left(x_1, ..., \alpha_{i_j} x_j, ..., x_n\right) \right\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C \left(\prod_{k \neq j} \left\| \left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty} \right\|_{p_k}^{w} \right) \left\| \left(\alpha_{i_j} x_j\right)_{i_j=1}^{\infty} \right\|_{w,p_j}. \end{aligned}$$

Logo

$$\left\| T\left(x_1, ..., x_j, ..., x_n\right) \right\| \left(\sum_{i_j=1}^{\infty} \left|\alpha_{i_j}\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\prod_{k \neq j} \left\| \left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty} \right\|_{p_k}^{w} \right) \left|\varphi\left(x_j\right)\right| \left(\sum_{i_j=1}^{\infty} \left|\alpha_{i_j}\right|^{p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}} < \infty$$

e portanto

$$\left(\sum_{i_j=1}^{\infty} \left|\alpha_{i_j}\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Então, $\left(\alpha_{i_j}\right)_{i_j=1}^{\infty} \in l_q$, o que seria uma contradição. ■

Proposição 1.3.3 *Se* $T \in \Pi^n_{q;p_1,\dots,p_n}(X_1,...,X_n;Y)$, *então*

$$\|T\| \leq \pi_{(q;p_1,\dots,p_n)}(T).$$

Demonstração. Sejam $\left(x^j_{i_j}\right)_{i_j=1}^{\infty} \in l^w_{p_j}(X_j)$ para todo $j = 1,....,n$. Como $T \in \Pi^n_{q;p_1,\dots,p_n}(X_1,...,X_n;Y)$, então

$$\left(\sum_{i_1,\dots,i_n}^{\infty} \left\|T\left(x^1_{i_1},...,x^n_{i_n}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_{(q;p_1,\dots,p_n)}(T) \prod_{j=1}^{n} \left\|\left(x^j_{i_j}\right)_{i_j=1}^{\infty}\right\|_{w,p_j}.$$

Vamos tomar $\left(x^j_{i_j}\right)_{i_j=1}^{\infty} = (x_j, 0, ..., 0, ...)$, para cada $1 \leq j \leq n$; assim

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i_1,\dots,i_n}^{\infty} \left\|T\left(x^1_{i_1},...,x^n_{i_n}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\|T(x_1,...,x_n)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \pi_{(q;p_1,\dots,p_n)}(T) \prod_{j=1}^{n} \left\|\left(x^j_{i_j}\right)_{i_j=1}^{\infty}\right\|_{w,p_j}.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Como

$$\left\|\left(x^j_{i_j}\right)_{i_j=1}^{\infty}\right\|^w_{p_j} = \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \left(\sum_{i_j=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x^j_{i_j}\right)\right|^{p_j}\right)^{\frac{1}{p_j}},$$

então, pela escolha feita, temos

$$\left\|\left(x^j_{i_j}\right)_{i_j=1}^{\infty}\right\|_{w,p_j} = \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \left|\varphi\left(x_j\right)\right| \leq \|x_j\|.$$

Logo, em (1.7), temos

$$\|T(x_1,...,x_n)\| \leq \pi_{(q;p_1,\dots,p_n)}(T) \prod_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

e assim,

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\|x_j\|\leq 1} \|T(x_1,...,x_n)\| \\ &\leq \sup_{\|x_j\|\leq 1} \pi_{(q;p_1,\dots,p_n)}(T) \prod_{j=1}^{n} \|x_j\| \\ &= \pi_{(q;p_1,\dots,p_n)}(T).\end{aligned}$$

■

A seguir destacamos resultados importantes da teoria dos operadores múltiplo somantes. Talvez o resultado mais marcante da teoria de operadores multilineares múltiplo somantes seja a versão multilinear do Teorema 1.2.6:

Teorema 1.3.4 (Pérez-García, 2003) *([23, Corolario 5.24]) Se* $1 \leq p \leq 2$, *então*

$$\Pi^n_p(l_1; l_2) = \mathcal{L}(^n l_1; l_2).$$

O cotipo dos espaços envolvidos também desempenha papel central:

Teorema 1.3.5 (D. Pérez-García e M.L.V. Souza, 2003) *([23, 31]) Se* $n \geq 2$ *e* Y *tem cotipo finito* q, *então*

$$\Pi^n_{(q;1)}(X_1,...,X_n;Y) = \mathcal{L}(X_1,...,X_n;Y)$$

para todos espaços de Banach $X_1,...,X_n$.

Teorema 1.3.6 (Pérez-García, 2003) *([23, 22]) Se $n \geq 2$ e $1 \leq p \leq q < 2$, então*

$$\Pi_p^n(X_1, ..., X_n; Y) \subset \Pi_q^n(X_1, ..., X_n; Y).$$

Quando o contradomínio tem cotipo 2, vale um resultado mais abrangente:

Teorema 1.3.7 (Pérez-García, 2003) *([23, 22]) Se $n \geq 2$ e $1 \leq p \leq q \leq 2$, então*

$$\Pi_p^n(X_1, ..., X_n; Y) \subset \Pi_q^n(X_1, ..., X_n; Y)$$

para todo espaço de Banach Y de cotipo 2 e quaisquer espaços de Banach $X_1, ..., X_n$.

Mais recentemente, em 2008 e 2009, em trabalhos independentes, G. Botelho e D. Pellegrino [5] e D. Popa [26] mostraram que quando os espaços do domínio têm cotipo 2 as inclusões anteriores se transformam em igualdades (veja também [4]):

Teorema 1.3.8 (Botelho–Pellegrino, 2008 e Popa, 2009) *([5, 26]) Se $n \geq 2$ e $1 \leq p, q < 2$, então*

$$\Pi_p^n(X_1, ..., X_n; Y) = \Pi_q^n(X_1, ..., X_n; Y)$$

para quaisquer espaços de Banach $X_1, ..., X_n$ com cotipo 2 e todo espaço de Banach Y.

No trabalho [4] os autores mostram que uma versão mais geral do Teorema 1.3.7 é válida para o caso em que os espaços do domínio são espaços $\mathcal{L}_\infty$:

Teorema 1.3.9 (Botelho–Michels–Pellegrino, 2010) *Seja $n \geq 2$ e sejam $1 \leq p \leq q \leq \infty$ e $X_1, \ldots, X_n$ espaços $\mathcal{L}_\infty$. Então*

$$\Pi_p^n(X_1, \ldots, X_n; Y) \subset \Pi_q^n(X_1, \ldots, X_n; Y)$$

para todo espaço de Banach Y.

1.4 O Teorema de Bohnenblust–Hille no contexto dos operadores múltiplo somantes

Para demonstrar a desigualdade de Bohnenblust–Hille no contexto dos operadores múltiplo somantes (Teorema 1.4.4), precisamos de alguns resultados auxiliares:

Lema 1.4.1 *Se X é um espaço de Banach, $(x_n)_{n=1}^\infty \in l_1^w(X)$ e $(a_n)_{n=1}^\infty \in c_0$, então $S_n = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ converge.*

Demonstração. Para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $j > N$, então

$$|a_j| < \epsilon.$$

Assim, se $n > m > N$, temos

$$\begin{aligned}
\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{i=m+1}^n a_i x_i \right\| &= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left| \varphi \left(\sum_{i=m+1}^n a_i x_i \right) \right| \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{i=m+1}^n |a_i \varphi(x_i)| \\
&\leq \sup_{i \geq m+1} |a_i| \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{i=m+1}^n |\varphi(x_i)| \\
&\leq \sup_{i \geq m+1} |a_i| \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{i=1}^\infty |\varphi(x_i)| \\
&\leq \epsilon \left\| (x_n)_{n=1}^\infty \right\|_1^w
\end{aligned}$$

e portanto $(S_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em X. Logo $(S_n)_{n=1}^\infty$ converge. ∎

Lema 1.4.2 *Seja X um espaço de Banach. A correspondência $u \longmapsto (ue_n)_{n=1}^{\infty}$ produz um isomorfismo isométrico entre $\mathcal{L}(c_0; X)$ e $l_1^w(X)$.*

Demonstração. Seja
$$T : \mathcal{L}(c_0; X) \longrightarrow l_1^w(X)$$
dado por
$$Tu = (ue_n)_{n=1}^{\infty}.$$
Note que $(e_n)_{n=1}^{\infty} \in l_1^w(c_0)$ e
$$\|(e_n)_{n=1}^{\infty}\|_1^w = 1.$$
Segue facilmente que T está bem definido. De fato, se $\varphi \in X'$ temos
$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(ue_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi \circ u(e_n)| < \infty,$$
pois $\varphi \circ u \in c_0'$ e $(e_n)_{n=1}^{\infty} \in l_1^w(c_0)$.

É claro que T é linear. Vejamos que T é isometria sobre a imagem. De fato, temos, por um lado,
$$\begin{aligned}
\|Tu\|_1^w &= \|(ue_n)_{n=1}^{\infty}\|_1^w \\
&= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(ue_n)| = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi \circ u(e_n)| \\
&= \|u\| \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\varphi \circ u}{\|u\|}(e_n) \right| \\
&\leq \|u\| \sup_{\psi \in B_{c_0'}} \sum_{n=1}^{\infty} |\psi(e_n)| \\
&= \|u\| \sup_{\psi_n \in B_{l_1}} \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n| = \|u\|.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_1^w &= \|(ue_n)_{n=1}^{\infty}\|_1^w \\
&= \sup_{\varphi\in B_{X'}} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(ue_n)| = \sup_{\varphi\in B_{X'}} \|\varphi(ue_n)_{n=1}^{\infty}\|_1 \\
&\overset{\text{Hahn–Banach}}{=} \sup_{\varphi\in B_{X'}} \sup_{(y_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{l_\infty}} \left|\sum_{n=1}^{\infty} y_n\varphi(ue_n)\right| \\
&\geq \sup_{\varphi\in B_{X'}} \sup_{(y_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{c_0}} \left|\sum_{n=1}^{\infty} y_n\varphi(ue_n)\right| \\
&\overset{\text{Lema 1.4.1}}{=} \sup_{\varphi\in B_{X'}} \sup_{(y_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{c_0}} \left|\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n u(e_n)\right)\right| \\
&= \sup_{(y_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{c_0}} \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left|\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n u(e_n)\right)\right| \\
&= \sup_{(y_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{c_0}} \left\|\sum_{n=1}^{\infty} y_n u(e_n)\right\| \\
&= \sup_{(y_n)_{n=1}^{\infty}\in B_{c_0}} \left\|u\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n\right)\right\| \\
&= \|u\|.
\end{aligned}$$

Logo T é isometria sobre a imagem.

Por último, T é sobrejetiva. De fato, se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_1^w(X)$, tome $u \in \mathcal{L}(c_0; X)$ tal que

$$u((a_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Logo para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$u(e_n) = x_n.$$

Veja que u é está bem definido pelo Lema 1.4.1. Além disso u é contínuo, pois

$$\begin{aligned}
\|u((a_n)_{n=1}^{\infty})\| &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\| = \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left|\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right)\right| \\
&\leq \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n\varphi(x_n)|\right) \\
&\leq \|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_{c_0} \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|\right) \\
&= \|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_{c_0} \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_1^w.
\end{aligned}$$

Assim, T é sobrejetora e temos o resultado desejado. ■

Lema 1.4.3 *Os espaços l_1^N e $\left(l_\infty^N\right)'$ são isomorfos isometricamente.*

Demonstração. Defina

$$T : l_1^N \to \left(l_\infty^N\right)', \text{ dada por : } T(b) = T\left((b_j)_{j=1}^N\right) = \varphi_b,$$

onde

$$\varphi_b\left((a_j)_{j=1}^N\right)=\sum_{j=1}^N a_jb_j, \text{ para toda } (a_j)_{j=1}^N\in l_\infty^N.$$

É claro que está bem definida, pois se $(b_j)_{j=1}^N=(c_j)_{j=1}^N$, temos

$$\varphi_b\left((a_j)_{j=1}^N\right)=\sum_{j=1}^N a_jb_j=\sum_{j=1}^N a_jc_j=\varphi_c\left((a_j)_{j=1}^N\right),$$

para toda $(a_j)_{j=1}^N\in l_\infty^N$. Além disso, $\varphi_b\in\left(l_\infty^N\right)'$, pois

$$\begin{aligned}
&\varphi_b\left(\alpha\,(a_j)_{j=1}^N+(\hat{a}_j)_{j=1}^N\right)\\
&=\sum_{j=1}^N \alpha a_jb_j+\hat{a}_jb_j\\
&=\alpha\sum_{j=1}^N a_jb_j+\sum_{j=1}^N \hat{a}_jb_j\\
&=\alpha\varphi_b\left((a_j)_{j=1}^N\right)+\varphi_b\left((\hat{a}_j)_{j=1}^N\right),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_b\left((a_j)_{j=1}^N\right)\right|&=\sup_{\psi\in B_{\mathbb{C}'}}\left|\psi\circ\varphi_b\left((a_j)_{j=1}^N\right)\right|=\|\varphi_b\|\sup_{\psi\in B_{\mathbb{C}'}}\left|\frac{\psi\circ\varphi_b}{\|\varphi_b\|}\left((a_j)_{j=1}^N\right)\right|\\
&\leq\|\varphi_b\|\sup_{\Phi\in B_{(l_\infty^N)'}}\left|\Phi\left((a_j)_{j=1}^N\right)\right|=\|\varphi_b\|\left\|\left((a_j)_{j=1}^N\right)\right\|.
\end{aligned}$$

Logo $\varphi_b\in\left(l_\infty^N\right)'$, está bem definida.

Note ainda que T é linear, pois

$$\begin{aligned}
T\left(\alpha\,(b_j)_{j=1}^N+(d_j)_{j=1}^N\right)\left((a_j)_{j=1}^N\right)&=\varphi_{\alpha b+d}\left((a_j)_{j=1}^N\right)\\
&=\sum_{j=1}^N a_j\left(\alpha b_j+d_j\right)\\
&=\alpha\sum_{j=1}^N a_jb_j+\sum_{j=1}^N a_jd_j\\
&=\alpha\varphi_b\left((a_j)_{j=1}^N\right)+\varphi_d\left((a_j)_{j=1}^N\right)\\
&=\alpha T\left((b_j)_{j=1}^N\right)\left((a_j)_{j=1}^N\right)+T\left((d_j)_{j=1}^N\right)\left((a_j)_{j=1}^N\right).
\end{aligned}$$

Vejamos agora que $\left\|(b_j)_{j=1}^N\right\| \geq \|\varphi_b\|$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_b\| &= \sup_{(a_j)_{j=1}^N \in B_{l_\infty^N}} \left|\varphi_b\left((a_j)_{j=1}^N\right)\right| \\
&= \sup_{(a_j)_{j=1}^N \in B_{l_\infty^N}} \left|\sum_{j=1}^N a_j b_j\right| \\
&\leq \sup_{(a_j)_{j=1}^N \in B_{l_\infty^N}} \sum_{j=1}^N |a_j b_j| \\
&\leq \sup_{(a_j)_{j=1}^N \in B_{l_\infty^N}} \sum_{j=1}^N |a_j|\,|b_j| \\
&\leq \sum_{j=1}^N |b_j| = \left\|(b_j)_{j=1}^N\right\|.
\end{aligned}$$

Resta provar que $\left\|(b_j)_{j=1}^N\right\| \leq \|\varphi_b\|$.

Para fazer isto, tomemos $\varphi \in \left(l_\infty^N\right)'$. Consideremos a sequência $b = (\varphi(e_j))_{j=1}^N$ onde $(e_n)_{n=1}^N$ são os vetores unitários canônicos. Vamos provar que $b \in l_1^N$, $\varphi_b = \varphi$ e $\|b\| \leq \|\varphi_b\|$.

Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ a sequência $(\alpha_j)_{j=1}^N$ onde

$$\alpha_j = \frac{\overline{\varphi(e_j)}}{|\varphi(e_j)|}, \text{ se } \varphi(e_j) \neq 0 \text{ e } \alpha_j = 0 \text{ caso contrário.}$$

Assim, $|\alpha_j| \leq 1$ para todo $1 \leq j \leq N$. Note que se $\varphi(e_j) \neq 0$, então

$$\alpha_j \varphi(e_j) = \frac{\overline{\varphi(e_j)}}{|\varphi(e_j)|}.\varphi(e_j) = |\varphi(e_j)|,$$

e se $\varphi(e_j) = 0$ então

$$\alpha_j \varphi(e_j) = |\varphi(e_j)|.$$

Logo

$$\alpha_j \varphi(e_j) = |\varphi(e_j)|$$

para todo $1 \leq j \leq N$. Portanto

$$\begin{aligned}
\left\|(\varphi(e_j))_{j=1}^N\right\| &= \sum_{j=1}^N |\varphi(e_j)| = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi(e_j) = \varphi\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j e_j\right) \\
&\leq \|\varphi\| \left|\sum_{j=1}^N \alpha_j e_j\right| \\
&= \|\varphi\| . \max\{|\alpha_1|, ..., |\alpha_n|\} \leq \|\varphi\|
\end{aligned}$$

Logo $b \in l_1^N$ e

$$\|b\| \leq \|\varphi\|.$$

Seja $(a_j)_{j=1}^N \in l_\infty^N$; sabemos que $(a_j)_{j=1}^N = \sum\limits_{j=1}^N a_j e_j$, e portanto

$$\begin{aligned}\varphi\left((a_j)_{j=1}^N\right) &= \varphi\left(\sum_{j=1}^N a_j e_j\right)\\ &= \sum_{j=1}^N a_j \varphi(e_j)\\ &= \varphi_b\left((a_j)_{j=1}^N\right).\end{aligned}$$

Assim, $\varphi = \varphi_b$ e fica provado que $\left\|(b_j)_{j=1}^N\right\| \leq \|\varphi_b\|$. ■

Teorema 1.4.4 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Para todo inteiro positivo m, existe uma constante $C_m > 0$, tal que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^N |T(e_{i_1},...,e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_m \|T\|,$$

para toda forma m-linear $T : \underbrace{l_\infty^N \times \cdots \times l_\infty^N}_{m\text{-vezes}} \longrightarrow \mathbb{K}$ e para qualquer inteiro positivo N.

(ii) Para todo inteiro positivo m e espaços de Banach $X_1, ...X_m$,

$$\prod\nolimits^m_{(\frac{2m}{m+1};1)}(X_1,...,X_m;\mathbb{K}) = \mathcal{L}(X_1,...,X_m;\mathbb{K}),\ e\ \pi_{(\frac{2n}{n+1};1)}(\cdot) \leq C_m \|\cdot\|.$$

Note que (i) é o Teorema de Bohnenblust–Hille.

Demonstração. (i)⇒(ii). Para cada $N \in \mathbb{N}$, consideramos para $1 \leq j \leq m$, sequências $\left(x_{i_i}^j\right)_{i_j=1}^N$ em X_j, $\left(x_{i_i}^j\right)_{i_j=1}^N = \left(x_1^j,...,x_N^j,0,0,...\right)$, com

$$\left\|\left(x_{i_i}^j\right)_{i_j=1}^N\right\|_1^\omega \leq 1.$$

Pelo Lema 1.4.2 o operador $u_j : c_0 \to X_j$ dado por $u_j\left(e_{i_j}\right) = x_{i_j}^j$ satisfaz

$$\|u_j\| = \left\|\left(x_{i_i}^j\right)_{i_j=1}^N\right\|_1^\omega.$$

Usando (i) com o operador multilinear

$$S = T \circ (u_1,...,u_m) : c_o \times \cdots \times c_o \to \mathbb{K},$$

obtemos

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^N \left|T(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m)^{\frac{2m}{m+1}}\right|\right)^{\frac{m+1}{2m}} = \left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^N \left|S\left(e_{i_1}^1,...,e_{i_m}^m\right)\right|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_m \|S\|.$$

Como

$$\|S\| = \|T \circ (u_1,...,u_m)\| \leq \|T\| \|(u_1,...,u_m)\| \leq \|T\| \|u_1\| ... \|u_m\|,$$

então

$$\left(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{N} \left| T(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m)^{\frac{2m}{m+1}} \right| \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_m \|T\| \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(x_{i_i}^j \right)_{i_j=1}^N \right\|_1^{\omega}$$

Logo $T : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{K}$ é *múltiplo* $\left(\frac{2m}{m+1}, 1\right)$ *somante. Além disso,*

$$\pi_{\left(\frac{2m}{m+1};1\right)}(T) \leq C_m \|T\|.$$

(ii)⇒(i). Para todo $m \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\prod\nolimits_{\left(\frac{2m}{m+1};1\right)}^{m}(l_\infty^N, ..., l_\infty^N; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(l_\infty^N, ..., l_\infty^N; \mathbb{K}),$$

e

$$\pi_{\left(\frac{2m}{m+1};1\right)}(\cdot) \leq C_m \|\cdot\|.$$

Logo se $T \in \mathcal{L}(l_\infty^N, ..., l_\infty^N; \mathbb{K})$, usando o Lema 1.4.3, temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{N} \left| T(e_{i_1}^1, ..., e_{i_m}^m)^{\frac{2m}{m+1}} \right| \right)^{\frac{m+1}{2m}} &\leq C_m \|T\| \prod_{j=1}^{m} \left\| \left(e_{i_j}^j \right)_{i_j=1}^N \right\|_1^{w} \\
&= C_m \|T\| \prod_{j=1}^{m} \sup_{\varphi \in B_{(l_\infty^N)'}} \sum_{i_j=1}^{N} \left| \varphi(e_{i_j}^j) \right| \\
&= C_m \|T\| \prod_{j=1}^{m} \sup_{\varphi \in B_{l_1^N}} \sum_{i_j=1}^{N} \left| \varphi(e_{i_j}^j) \right| \\
&= C_m \|T\| \prod_{j=1}^{m} \sup_{\varphi \in B_{l_1^N}} \sum_{i_j=1}^{N} \left| \varphi_{i_j} \right| \\
&= C_m \|T\| \prod_{j=1}^{m} \sup_{\varphi \in B_{l_1^N}} \left\| \left(\varphi_{i_j}^j \right)_{i_j=1}^N \right\|_{l_1^N} \\
&= C_m \|T\|.
\end{aligned}$$

Logo

$$\left(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{N} \left| T(e_{i_1}^1, ..., e_{i_m}^m)^{\frac{2m}{m+1}} \right| \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_m \|T\|.$$

■

Capítulo 2

Desigualdades auxiliares

Neste capítulo apresentaremos algumas desigualdades na forma de lemas, que serão fundamentais na demonstração do Teorema de Bohnenblust–Hille.

2.1 A Desigualdade de Minkowski para integrais

A Desigualdade de Minkowski é um resultado clássico devido ao matemático alemão Hermann Minkowski, que é muito usada na teoria da medida. Não daremos a demonstração, pois necessita de alguns resultados da teoria da medida, que estão longe de ser o objeto de estudo deste trabalho. Embora não façamos a demonstração, enunciaremos explicitamente pois várias desigualdades semelhantes são associadas a Minkowski. O leitor interessado pode encontrar uma prova desta em [29].

Lema 2.1.1 (Desigualdade de Minkowski para integrais) *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida sigma-finitos. Se $u : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ é $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$-mensurável, então*

$$\left(\int_X \left(\int_Y |u(x,y)| \, \nu(dy) \right)^p \mu(dx) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left(\int_X |u(x,y)|^p \, \mu(dx) \right)^{\frac{1}{p}} \nu(dy),$$

para todo $p \in [1, \infty)$, com a igualdade para $p = 1$.

2.2 A Desigualdade de Khinchin

A Desigualdade de Khinchin é um resultado surpreendente que mostra, como caso particular da Desigualdade de Kahane (ver [9, pag 211]), que para $0 < p, q < \infty$, existem constantes $K_{p,q}$ e $K_{q,p}$ tais que

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq K_{p,q} \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq K_{q,p} \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

para cualquer $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ em l_2.

O enunciado a seguir e a demonstração foram extraídos de [9, pag 10] e [28, Teorema 1.3.1].

Lema 2.2.1 (Desigualdade de Khinchin) *Para todo $0 < p < \infty$, existem constantes A_p e B_p tais que, para toda sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ em l_2, temos*

$$A_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1}$$

Demonstração. Faremos a demonstração em três etapas. Primeiro vamos demonstrar para o caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, em seguida para o caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ com $2 \leq p < \infty$, e finalmente para o caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ com $0 < p < 2$.

Etapa 1: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Tomemos uma sequência finita de escalares reais $(a_1, ..., a_m)$. Se $p \in \mathbb{N}$, vejamos que

$$|y|^p \leq p! \left(1 + \frac{|y|^p}{p!} \right) \leq p! e^{|y|}. \tag{2.2}$$

A primeira desigualdade é imediata; para verificar a segunda, basta usar a representação da função exponencial em série de Taylor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Agora, se considerarmos

$$f(t) = \sum_{n \leq m} a_n r_n(t),$$

onde as $r_n(t)$ são as funções Rademacher, vamos ter por (2.2),

$$\int_0^1 |f(t)|^p \, dt \leq p! \int_0^1 e^{|f(t)|} dt \leq p! \int_0^1 \left(e^{f(t)} + e^{-f(t)} \right) dt.$$

Consideremos ainda

$$g(t) = \frac{f(t)}{\|f\|_2} = \sum_{n \leq m} b_n r_n(t),$$

com $b_n = \frac{a_n}{\|f\|_2}$. Notemos que $\|g\|_2 = 1$ e

$$\int_0^1 e^{g(t)} dt = \int_0^1 e^{\sum_{n \leq m} b_n r_n(t)} dt = \int_0^1 \prod_{n \leq m} e^{b_n r_n(t)} dt.$$

Como as funções de Rademacher são variáveis aleatórias independentes, usando [1, Theorem 5.2.3 e Theorem 5.3.1], podemos transformar a integral em produto de integrais. Sejam, para cada inteiro positivo n,

$$B_n = \{ t \in [0,1] \, ; r_n(t) = 1 \}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{g(t)} dt &= \prod_{n \leq m} \int_0^1 e^{b_n r_n(t)} dt = \prod_{n \leq m} \left(\int_{B_n} e^{b_n} + \int_{[0,1] \setminus B_n} e^{-b_n} \right) dt \\ &= \prod_{n \leq m} \left(\frac{e^{b_n}}{2} + \frac{e^{-b_n}}{2} \right) = \prod_{n \leq m} \cosh(b_n). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{cases} \cosh(x) = \sum_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_n \frac{x^{2n}}{n! 2^n} \end{cases}$$

e como $(2n)! \geq n!2^n$, temos

$$\int_0^1 e^{g(t)} dt \leq \prod_{n \leq m} e^{\left(\frac{b_n^2}{2}\right)} = e^{\left(\sum_{n \leq m} \frac{b_n^2}{2}\right)} \overset{(1.3)}{=} \sqrt{e}.$$

Analogamente,

$$\int_0^1 e^{-g(t)} dt \leq \sqrt{e}.$$

Logo

$$\int_0^1 |g(t)|^p \, dt \leq p! \int_0^1 e^{|g(t)|} dt \leq p! \int_0^1 \left(e^{g(t)} + e^{-g(t)} \right) dt \leq 2p! \sqrt{e}$$

e, para $2 \leq p < \infty$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, segue, da monotonicidade das normas do $L_p[0,1]$ que

$$1 = \left(\sum_{n \leq m} |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| \sum_{n \leq m} b_n r_n \right\|_2 \leq \left\| \sum_{n \leq m} b_n r_n \right\|_p$$

e

$$\left\| \sum_{n \leq m} b_n r_n \right\|_p \leq \left\| \sum_{n \leq m} b_n r_n \right\|_k = \left(\int_0^1 |g(t)|^k \, dt \right)^{\frac{1}{k}} \leq \left(2k! \sqrt{e} \right)^{\frac{1}{k}},$$

onde k é o menor inteiro maior ou igual a p. Assim, temos

$$\left(\sum_{n \leq m} \frac{|a_n|^2}{\|f\|_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(2k! \sqrt{e} \right)^{\frac{1}{k}}$$

e então

$$\left(\sum_{n \leq m} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(2k! \sqrt{e} \right)^{\frac{1}{k}} \|f\|_2 .$$

Logo, por (1.3) e pela monotonicidade das normas em $L_p[0,1]$, temos

$$\left(\sum_{n \leq m} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_{n \leq m} a_n r_n \right\|_p \leq \left(2k! \sqrt{e} \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{n \leq m} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3}$$

Agora, considere a sequência $\left(S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \right)_{n=1}^{\infty}$ e, para $n > m$, temos

$$\|S_n - S_m\|_{L_p[0,1]} = \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k r_k(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \overset{(2.3)}{\leq} \left(2k! \sqrt{e} \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{k=m+1}^{n} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4}$$

Como $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, segue que $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequencia de Cauchy em $L_p[0,1]$ e portanto $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é convergente. Logo, fazendo $m \to \infty$, obtemos

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(2k! \sqrt{e} \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.5}$$

Etapa 2. Para $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (b_n)_{n=1}^{\infty} + i\,(c_n)_{n=1}^{\infty}$ em l_2, escrevemos

$$f(t) = \sum_{n\leq m} a_n r_n(t) = \sum_{n\leq m} b_n r_n(t) + i \sum_{n\leq m} c_n r_n(t).$$

Então

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(f(t)) = \sum\limits_{n\leq m} b_n r_n(t) \\ \operatorname{Im}(f(t)) = \sum\limits_{n\leq m} c_n r_n(t), \end{cases},$$

e como $2 \leq p < \infty$, usando (2.5) e (1.3), temos

$$\|\operatorname{Re}(f)\|_p \leq C_p \left(\sum_{n\leq m} |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C_p \|\operatorname{Re}(f)\|_2 \quad \text{e}$$

$$\|\operatorname{Im}(f)\|_p \leq C_p \left(\sum_{n\leq m} |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C_p \|\operatorname{Im}(f)\|_2 .$$

Portanto

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n\leq m} a_n r_n \right\|_2 &\leq \left\| \sum_{n\leq m} a_n r_n \right\|_p \\ &= \|f\|_p \leq \|\operatorname{Re}(f)\|_p + \|\operatorname{Im}(f)\|_p \\ &\leq C_p \|\operatorname{Re}(f)\|_2 + C_p \|\operatorname{Im}(f)\|_2 \\ &\leq 2C_p \|f\|_2 . \end{aligned}$$

Usando os mesmos argumentos de (2.4) garantimos que $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k r_k$ converge. Logo, fazendo $m \to \infty$, usando a monotonicidade das normas em $L_p[0,1]$ e (1.3), obtemos

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Etapa 3: Na Etapa 2 o resultado foi demonstrado para o caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $2 \leq p < \infty$; porém faremos os cálculos para o caso particular em que $p = 4$, a fim de estimar as constantes B_4 e A_4, as quais serão usadas para a demonstração da Etapa 3. Como nos casos anteriores tomamos uma sequência finita

$(a_1, a_2, ..., a_m)$ de escalares. Então

$$\int_0^1 \left| \sum_{n \leq m} a_n r_n(t) \right|^4 dt = \int_0^1 \left(\sum_{i \leq m} a_i r_i(t) \right) \overline{\left(\sum_{j \leq m} a_j r_j(t) \right)} \left(\sum_{k \leq m} a_k r_k(t) \right) \overline{\left(\sum_{l \leq m} a_l r_l(t) \right)} dt \tag{2.6}$$

$$= \sum_{i,j,k,l \leq m} a_i \overline{a_j} a_k \overline{a_l} \int_0^1 r_i(t) r_j(t) r_k(t) r_l(t) \, dt$$

$$\overset{(1.3)}{=} \sum_{\substack{i=j \\ k=l}} a_i \overline{a_j} a_l \overline{a_k} + \sum_{\substack{i=k \\ j=l}} a_i \overline{a_j} a_l \overline{a_k} + \sum_{\substack{i=l \\ j=k}} a_i \overline{a_j} a_l \overline{a_k} - 2 \sum_{i \leq m} |a_i|^4$$

$$= 2 \sum_{i,j \leq m} |a_i|^2 |a_j|^2 + \sum_{i,j \leq m} a_i^2 \overline{a_j}^2 - 2 \sum_{i \leq m} |a_i|^4$$

$$\leq 2 \left(\sum_{i \leq m} |a_i|^2 \right) \left(\sum_{j \leq m} |a_j|^2 \right) + \left(\sum_{i \leq m} a_i^2 \right) \overline{\left(\sum_{j \leq m} a_j^2 \right)}$$

$$= 2 \left(\sum_{n \leq m} |a_n|^2 \right)^2 + \left| \sum_{n \leq m} a_n^2 \right|^2$$

$$\leq 2 \left(\sum_{n \leq m} |a_n|^2 \right)^2 + \left(\sum_{n \leq m} |a_n|^2 \right)^2$$

$$= 3 \left(\sum_{n \leq m} |a_n|^2 \right)^2 .$$

Assim, da monotonicidade das normas de $L_p[0,1]$ e de (2.6), temos

$$\left(\sum_{n \leq m} |a_n|^2 \right)^2 = \left(\int_0^1 \left| \sum_{n \leq m} a_n r_n(t) \right|^2 dt \right)^2 \leq \int_0^1 \left| \sum_{n \leq m} a_n r_n(t) \right|^4 dt \leq 3 \left(\sum_{n \leq m} |a_n|^2 \right)^2$$

e consequentemente

$$\left(\sum_{n \leq m} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{n \leq m} a_n r_n(t) \right|^4 dt \right)^{\frac{1}{4}} \leq 3^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{n \leq m} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{2.7}$$

Agora, usando (2.4) para a sequência $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k r_k$ segue que esta é convergente. Logo, fazendo $m \to \infty$, obtemos

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^4 dt \right)^{\frac{1}{4}} \leq 3^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Com isso, $B_4 \leq 3^{\frac{1}{4}}$ e $A_4 \geq 1$. Mas, considerando

$$a_1 = 1, \, a_2 = 0, a_3 = 0, ...$$

em

$$A_4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^4 dt \right)^{\frac{1}{4}}$$

constatamos que $A_4 = 1$.

Seja $0 < \theta < 1$ dado por

$$\theta = \left(2 - \frac{p}{2}\right)^{-1}.$$

Assim,

$$p\theta + 4(1-\theta) = 2$$

e pela Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt &= \int_0^1 |f(t)|^{p\theta} |f(t)|^{4(1-\theta)} \, dt \\
&\leq \left(\int_0^1 \left[|f(t)|^{p\theta}\right]^{\frac{1}{\theta}}\right)^{\theta} \cdot \left(\int_0^1 \left[|f(t)|^{4(1-\theta)}\right]^{\frac{1}{1-\theta}}\right)^{1-\theta} \\
&= \left(\int_0^1 |f(t)|^p\right)^{\theta} \cdot \left(\int_0^1 |f(t)|^4\right)^{1-\theta} \\
&= \left[\left(\int_0^1 |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{p\theta} \cdot \left[\left(\int_0^1 |f(t)|^4\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{4(1-\theta)}.
\end{aligned}$$

Como para $p = 4$, sabemos que

$$\|f\|_4 \leq B_4 \|f\|_2 .$$

Logo

$$\|f\|_2^2 \leq \|f\|_p^{p\theta} \cdot (B_4 \|f\|_2)^{4(1-\theta)}$$

e

$$B_4^{\frac{4(\theta-1)}{p\theta}} \cdot \|f\|_2 \leq \|f\|_p .$$

Note que

$$\frac{4(\theta-1)}{p\theta} = 2 - \frac{4}{p}.$$

Com efeito,

$$\frac{4}{p}\left(\frac{\theta-1}{\theta}\right) = \frac{4}{p}\left(1 - \frac{1}{\theta}\right) = \frac{4}{p}\left[1 - \left(2 - \frac{p}{2}\right)\right] = \frac{4}{p}\left(\frac{p}{2} - 1\right) = 2 - \frac{4}{p}.$$

Assim,

$$B_4^{2-\frac{4}{p}} \cdot \|f\|_2 \leq \|f\|_p .$$

Por outro lado, da motonocidade das normas do $L_p[0,1]$, temos que $\|f\|_p \leq \|f\|_2$. Logo

$$B_4^{2-\frac{4}{p}} \cdot \|f\|_2 \leq \|f\|_p \leq \|f\|_2 ,$$

isto é,

$$B_4^{2-\frac{4}{p}} \cdot \left\|\sum_{n\leq m} a_n r_n(t)\right\|_2 \leq \left\|\sum_{n\leq m} a_n r_n(t)\right\|_p \leq \left\|\sum_{n\leq m} a_n r_n(t)\right\|_2$$

e, mais um vez, com os argumentos usados em (2.4), fazendo $m \to \infty$, obtemos

$$B_4^{2-\frac{4}{p}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

■

Observação 2.2.2 *É claro que* $B_2 = 1$. *De fato, como*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n r_n(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

e

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} dt = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

temos

$$B_2 = 1. \tag{2.8}$$

Por outro lado, de (2.1), temos

$$A_r \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}$$

e portanto

$$B_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq B_p A_r^{-1} \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right|^r dt\right).$$

e, como em (2.1), temos

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.9}$$

logo concluímos que

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p A_r^{-1} \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right|^r dt\right). \tag{2.10}$$

2.3 Um caso particular de uma desigualdade envolvendo cotipo

A seguinte desigualdade é um caso particular de uma desigualdade conhecida na literatura para espaços com cotipo finito (veja [26, Lema 3] e [21, Teorema 1.3]):

Teorema 2.3.1 *Seja* $1 \leq r \leq 2$ *e seja* $(y_{i_1 \dots i_m})_{i_1,\dots,i_m=1}^{N}$ *uma matriz em* $\mathbb{K}$. *Então existe uma constante* $A_{2,r}$ *tal que*

$$\left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{N} |(y_{i_1\dots i_m})|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq (A_{2,r})^m \left(\int_{I^m} \left|\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\dots r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1\dots i_m}\right|^r dt_1,\dots,dt_m\right)^{\frac{1}{r}}$$

onde

$$(A_{2,r}) \leq A_r^{-1} \tag{2.11}$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução. Vejamos o caso $m = 1$. Pelo Lema 2.2.1 sabemos que

$$\left(\sum_{i=1}^{N}|y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq A_r^{-1}\left(\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{N}y_i r_i(t)\right|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}$$

Vamos supor o resultado válido para $m-1$. Como

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N}|(y_{i_1\ldots i_m})|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i_1=1}^{N}\left(\left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}|(y_{i_1\ldots i_m})|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

e, pela hipótese de indução,

$$\left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}|(y_{i_1\ldots i_m})|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq (A_{2,r})^{m-1}\left(\int\limits_{I^{m-1}}\left|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}r_{i_2}(t_2)\ldots r_{i_m}(t_m)\,y_{i_1\ldots i_m}\right|^r dt_2,\ldots,dt_m\right)^{\frac{1}{r}}$$

então

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N}|(y_{i_1\ldots i_m})|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (A_{2,r})^{m-1}\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\int\limits_{I^{m-1}}\left|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}r_{i_2}(t_2)\ldots r_{i_m}(t_m)\,y_{i_1\ldots i_m}\right|^r dt_2,\ldots,dt_m\right)^{\frac{2}{r}}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{2.12}$$

Como $\frac{2}{r} \geq 1$, usando o Lema 2.1.1, temos

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\int\limits_{I^{m-1}}\left|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}r_{i_2}(t_2)\ldots r_{i_m}(t_m)\,y_{i_1\ldots i_m}\right|^r dt_2,\ldots,dt_m\right)^{\frac{2}{r}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\int\limits_{I^{m-1}}\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}r_{i_2}(t_2)\ldots r_{i_m}(t_m)\,y_{i_1\ldots i_m}\right|^{r.\frac{2}{r}}\right)^{\frac{r}{2}} dt_2\ldots dt_m\right]^{\frac{1}{r}}\end{aligned} \tag{2.13}$$

De (2.12) e (2.13), obtemos

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N}|(y_{i_1\ldots i_m})|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (A_{2,r})^{m-1}\left[\int\limits_{I^{m-1}}\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N}r_{i_2}(t_2)\ldots r_{i_m}(t_m)\,y_{i_1\ldots i_m}\right|^2\right)^{\frac{r}{2}} dt_2\ldots dt_m\right]^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

Agora, como $\mathbb{K}$ tem cotipo 2, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left|\sum_{i_2,\dots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2)\dots r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1\dots i_m}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_2(\mathbb{K})\left(\int_0^1\left|\sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\sum_{i_2,\dots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2)\dots r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1\dots i_m}\right|^2 dt_1\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^1\left|\sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\sum_{i_2,\dots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2)\dots r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1\dots i_m}\right|^2 dt_1\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{N}\left|(y_{i_1\dots i_m})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.14)\\
&\leq (A_{2,r})^{m-1}\left[\int_{I^{m-1}}\left(\int_0^1\left|\sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\sum_{i_2,\dots,i_m=1}^{N} r_{i_2}(t_2)\dots r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1\dots i_m}\right|^2 dt_1\right)^{\frac{r}{2}} dt_2\dots dt_m\right]^{\frac{1}{r}} \\
&= (A_{2,r})^{m-1}\left[\int_{I^{m-1}}\left(\int_0^1\left|\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\dots r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1\dots i_m}\right|^2 dt_1\right)^{\frac{r}{2}} dt_2\dots dt_m\right]^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

E, por (2.10),

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1\left|\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\dots r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1\dots i_m}\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.15)\\
&\leq B_2 A_r^{-1}\left(\int_0^1\left|\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\dots r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1\dots i_m}\right|^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= A_r^{-1}\left(\int_0^1\left|\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\dots r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1\dots i_m}\right|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Logo, de (2.14) e (2.15), temos

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N}|(y_{i_1\ldots i_m})|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq (A_{2,r})^{m-1}\left[\int\limits_{I^{m-1}} A_r^{-1}\left(\int\limits_0^1\left|\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\ldots r_{i_m}(t_m)\,y_{i_1\ldots i_m}\right|^r dt_1\right)^{\frac{r}{r}} dt_2\ldots dt_m\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$\leq \left(A_r^{-1}\right)^{m-1}\left[\int\limits_{I^{m-1}} A_r^{-1}\left(\int\limits_0^1\left|\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\ldots r_{i_m}(t_m)\,y_{i_1\ldots i_m}\right|^r dt_1\right)^{\frac{r}{r}} dt_2\ldots dt_m\right]^{\frac{1}{r}}$$

E, pelo Teorema de Fubini, obtemos

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N}|(y_{i_1\ldots i_m})|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(A_r^{-1}\right)^m\left[\int\limits_{I^m}\left|\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} r_{i_1}(t_1)\,r_{i_2}(t_2)\ldots r_{i_m}(t_m)\,y_{i_1\ldots i_m}\right|^r dt_1\ldots dt_m\right]^{\frac{1}{r}}.$$

■

2.4 Uma variação de uma desigualdade devida a R. Blei

Outra das desigualdades a serem utilizadas é uma variante de uma desigualdade devida a Ron Blei [2, Theorem 5 and 36.]. Esta variação foi concebida por A. Defant et al. [7, Lemma 3.1.].

Teorema 2.4.1 (Blei, Defant et al.) *Sejam A, B dois conjuntos finitos não vazios, e $(a_{ij})_{i,j\in A\times B}$ uma matriz escalar com entradas positivas, e denotemos suas colunas e linhas por $\alpha_j = (a_{ij})_{i\in A}$ e $\beta_i = (a_{ij})_{j\in B}$ respetivamente. Então, para $q, r_1, r_2 \geq 1$, com $q > \max(r_1, r_2)$, tem-se*

$$\left(\sum_{(i,j)\in A\times B} a_{ij}^{\omega(r_1,r_2)}\right)^{\frac{1}{\omega(r_1,r_2)}} \leq \left(\sum_{i\in A}\|\beta_i\|_q^{r_1}\right)^{\frac{f(r_1,r_2)}{r_1}}\left(\sum_{j\in B}\|\alpha_j\|_q^{r_2}\right)^{\frac{f(r_2,r_1)}{r_2}},$$

com

$$\omega : [1,q)^2 \to [0,\infty)\,,\ \omega(x,y) := \frac{q^2(x+y)-2qxy}{q^2-xy},$$

$$f : [1,q)^2 \to [0,\infty)\,,\ f(x,y) := \frac{q^2x-qxy}{q^2(x+y)-2qxy}.$$

Demonstração. Definamos os parâmetros α, β, p, s por

$$\alpha = \frac{qr_1(q-r_2)}{q^2-r_1r_2}, \beta = \frac{qr_2(q-r_1)}{q^2-r_1r_2}, p = \frac{q^2-r_1r_2}{r_1(q-r_2)}, s = \frac{q^2-r_1r_2}{q(q-r_2)}$$

Observemos que $\alpha+\beta = \omega(r_1, r_2)$, pois

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= \frac{qr_1(q-r_2)+qr_2(q-r_1)}{q^2-r_1r_2}\\ &= \frac{q^2r_1-qr_1r_2+q^2r_2-qr_1r_2}{q^2-r_1r_2}\\ &= \frac{q^2(r_1+r_2)-2qr_1r_2}{q^2-r_1r_2}\\ &= \omega(r_1,r_2).\end{aligned}$$

Por outro lado, $p > 1$. Com efeito, como $q > r_1$, temos $q^2 > qr_1$ e, subtraindo r_1r_2 em ambos os lados, obtemos

$$q^2 - r_1r_2 > r_1(q - r_2),$$

e portanto

$$1 < \frac{q^2 - r_1r_2}{r_1(q - r_2)} = p.$$

Assim, pela Desigualdade de Hölder, para cada $i \in A$, temos

$$\sum_{j\in B} a_{ij}^{\alpha} a_{ij}^{\beta} \leq \left(\sum_{j\in B} a_{ij}^{\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j\in B} a_{ij}^{\beta p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Sejam $X_i = \sum\limits_{j\in B} a_{ij}^{\alpha p}$ e $Y_i = \sum\limits_{j\in B} a_{ij}^{\beta p^*}$; assim

$$\sum_{j\in B} a_{ij}^{\alpha+\beta} = \sum_{j\in B} a_{ij}^{\alpha} a_{ij}^{\beta} \leq X_i^{\frac{1}{p}} Y_i^{\frac{1}{p^*}}. \tag{2.16}$$

Note que $s > 1$, pois

$$qr_2 > r_1r_2,$$

e daí temos

$$q^2 - r_1r_2 > q(q - r_2),$$

o que implica em

$$1 < \frac{q^2 - r_1r_2}{q(q - r_2)} = s.$$

Então, de (2.16), e pela Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\sum_{(i,j)\in A\times B} a_{ij}^{\alpha+\beta} = \sum_{i\in A}\left(\sum_{j\in B} a_{ij}^{\alpha} a_{ij}^{\beta}\right) \leq \sum_{i\in A} X_i^{\frac{1}{p}} Y_i^{\frac{1}{p^*}} \leq \left(\sum_{i\in A} X_i^{\frac{s}{p}}\right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{i\in A} Y_i^{\frac{s^*}{p^*}}\right)^{\frac{1}{s^*}}.$$

Assim

$$\sum_{(i,j)\in A\times B} a_{ij}^{\alpha+\beta} \leq \left(\sum_{i\in A}\left(\sum_{j\in B} a_{ij}^{\alpha p}\right)^{\frac{s}{p}}\right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{i\in A}\left(\sum_{j\in B} a_{ij}^{\beta p^*}\right)^{\frac{s^*}{p^*}}\right)^{\frac{1}{s^*}} \tag{2.17}$$

e como $q > r_1 > 0$, temos $\frac{1}{q} < \frac{1}{r_1}$, e daí $s < p$. Logo

$$\frac{1}{s} > \frac{1}{p}$$

e

$$\frac{p^*}{s^*} > 1.$$

Note que

$$\left(\sum_{i\in A}\left(\sum_{j\in B}a_{ij}^{\beta p^*}\right)^{\frac{s^*}{p^*}}\right)^{\frac{1}{s^*}} = \left[\left(\sum_{i\in A}\left(\sum_{j\in B}a_{ij}^{\beta p^*}\right)^{\frac{s^*}{p^*}}\right)^{\frac{p^*}{s^*}}\right]^{\frac{1}{p^*}} \tag{2.18}$$

$$= \left[\left\|\left(\sum_{j\in B}a_{ij}^{\beta p^*}\right)_{i\in A}\right\|_{\frac{s^*}{p^*}}\right]^{\frac{1}{p^*}} \tag{2.19}$$

$$= \left[\left\|\sum_{j\in B}\left(a_{ij}^{\beta p^*}\right)_{i\in A}\right\|_{\frac{s^*}{p^*}}\right]^{\frac{1}{p^*}}$$

$$\overset{\text{Des. Triang}}{\leq} \left[\sum_{j\in B}\left\|\left(a_{ij}^{\beta p^*}\right)_{i\in A}\right\|_{\frac{s^*}{p^*}}\right]^{\frac{1}{p^*}}$$

$$= \left[\sum_{j\in B}\left(\sum_{i\in A}\left(a_{ij}^{\beta p^*}\right)^{\frac{s^*}{p^*}}\right)^{\frac{p^*}{s^*}}\right]^{\frac{1}{p^*}}$$

$$= \left[\sum_{j\in B}\left(\sum_{i\in A}a_{ij}^{\beta s^*}\right)^{\frac{p^*}{s^*}}\right]^{\frac{1}{p^*}}.$$

De (2.18) e (2.17), temos

$$\sum_{(i,j)\in A\times B}a_{ij}^{\alpha+\beta} \leq \left(\sum_{i\in A}\left(\sum_{j\in B}a_{ij}^{\alpha p}\right)^{\frac{s}{p}}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\sum_{j\in B}\left(\sum_{i\in A}a_{ij}^{\beta s^*}\right)^{\frac{p^*}{s^*}}\right)^{\frac{1}{p^*}}$$

e como

$$\begin{aligned}\alpha p &= q,\\ \frac{s}{p} &= \frac{r_1}{q},\\ \beta s^* &= q,\\ \frac{p^*}{s^*} &= \frac{r_2}{q},\end{aligned}$$

temos

$$\sum_{(i,j)\in A\times B}a_{ij}^{\alpha+\beta} \leq \left(\sum_{i\in A}\left(\sum_{j\in B}a_{ij}^{q}\right)^{\frac{r_1}{q}}\right)^{\frac{1}{s}}\left(\sum_{j\in B}\left(\sum_{i\in A}a_{ij}^{q}\right)^{\frac{r_2}{q}}\right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Lembrando que $\alpha+\beta=\omega\left(r_1,r_2\right)$, obtemos

$$\left(\sum_{(i,j)\in A\times B}a_{ij}^{\omega(r_1,r_2)}\right)^{\frac{1}{\omega(r_1,r_2)}} \leq \left(\sum_{i\in A}\|\beta_i\|_q^{r_1}\right)^{\frac{1}{s\omega(r_1,r_2)}}\left(\sum_{j\in B}\|\alpha_j\|_q^{r_2}\right)^{\frac{1}{p^*\omega(r_1,r_2)}}. \tag{2.20}$$

Como

$$\frac{f(r_1,r_2)}{r_1}=\frac{\frac{q^2r_1-qr_1r_2}{q^2(r_1+r_2)-2qr_1r_2}}{r_1}=\frac{q-r_2}{q(r_1+r_2)-2r_1r_2},$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{s\omega(r_1,r_2)}&=\frac{1}{\frac{q^2-r_1r_2}{q(q-r_2)}.\frac{q^2(r_1+r_2)-2qr_1r_2}{q^2-r_1r_2}}\\&=\frac{(q(q-r_2))\left(q^2-r_1r_2\right)}{(q^2-r_1r_2)\left(q^2(r_1+r_2)-2qr_1r_2\right)}\\&=\frac{q-r_2}{q(r_1+r_2)-2r_1r_2},\end{aligned}$$

e

$$p=\frac{q^2-r_1r_2}{r_1(q-r_2)},$$

temos

$$\frac{1}{p^*}=1-\frac{r_1(q-r_2)}{q^2-r_1r_2}=\frac{q^2-r_1r_2-r_1q+r_1r_2}{q^2-r_1r_2}=\frac{q^2-r_1q}{q^2-r_1r_2}$$

e portanto

$$p^*=\frac{q^2-r_1r_2}{q^2-qr_1}$$

e

$$\frac{1}{p^*\omega(r_1,r_2)}=\frac{1}{\frac{q^2-r_1r_2}{q^2-qr_1}.\frac{q^2(r_1+r_2)-2qr_1r_2}{q^2-r_1r_2}}=\frac{q-r_1}{q(r_1+r_2)-2r_1r_2}.$$

Como

$$\frac{f(r_2,r_1)}{r_2}=\frac{\frac{q^2r_2-qr_2r_1}{q^2(r_2+r_1)-2qr_2r_1}}{r_2}=\frac{q-r_1}{q(r_2+r_1)-2r_2r_1}$$

obtemos

$$\frac{f(r_1,r_2)}{r_1}=\frac{1}{s\omega(r_1,r_2)}$$

e

$$\frac{1}{p^*\omega(r_1,r_2)}=\frac{f(r_2,r_1)}{r_2}.$$

Pelos resultados acima, e de (2.20), obtemos

$$\left(\sum_{(i,j)\in A\times B}a_{ij}^{\omega(r_1,r_2)}\right)^{\frac{1}{\omega(r_1,r_2)}}\leq\left(\sum_{i\in A}\|\beta_i\|_q^{r_1}\right)^{\frac{f(r_1,r_2)}{r_1}}\left(\sum_{j\in B}\|\alpha_j\|_q^{r_2}\right)^{\frac{f(r_2,r_1)}{r_2}}.$$

■

Capítulo 3

O Teorema de Bohnenblust–Hille e o Teorema de Defant–Popa–Schwarting

3.1 Demonstração do Teorema de Bohnenblust–Hille

De acordo com o Teorema 1.4.4, o Teorema de Bohnenblust–Hille é equivalente ao seguinte teorema, para o qual daremos uma demonstração detalhada a partir da demonstração de Defant, Popa e Scwarting. O resultado abaixo, a rigor, é uma versão particular do resultado demonstrado por Defant, Popa e Schwarting:

Teorema 3.1.1 (Defant et al. (estimativas das constantes por Pellegrino e Seoane-Sepúlveda)) *Para todo inteiro positivo m e espaços de Banach $X_1, ...X_m$,*

$$\prod\nolimits^{m}_{(\frac{2m}{m+1};1)}(X_1, ..., X_m; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; \mathbb{K}) \ e \ ,$$

$$\pi_{(\frac{2m}{m+1};1)}(\cdot) \leq C_m \|\cdot\|$$

onde

$$C_m = 2^{\frac{m-1}{2m}} \left(\frac{C_{m-1}}{A_{\frac{2m-2}{m}}} \right)^{\frac{m-1}{m}} \quad para\ todo\ m \geq 2,$$

com $A_{\frac{2m-2}{m}}$ como no Lema 2.2.1. Em particular, para $m \in \{2, ..., 13\}$

$$C_m = 2^{\frac{m^2+m-2}{4m}}.$$

Demonstração. Para o caso $m = 1$, é claro que $\prod^{1}_{(1;1)}(X_1; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(X_1; \mathbb{K})$ e, além disso, $\pi_{(1;1)}(\cdot) = \|\cdot\|$ .A

Vamos usar indução. Para provar o caso m, vamos supor o resultado válido para $m - 1$.

Seja $U \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; \mathbb{K})$ e N um inteiro positivo qualquer. Para cada $1 \leq k \leq m$ considere $x_1^{(k)}, ..., x_N^{(k)} \in X_k$ tais que

$$\left\| \left(x_j^{(k)} \right)_{j=1}^{N} \right\|_1^w \leq 1,$$

para $k = 1, ..., m$.

Consideremos na notação do Teorema 2.4.1,

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{2(m-1)}{(m-1)+1} = \frac{2m-2}{m}, \\
r_2 &= 1, \\
\omega(r_1, r_2) &= \frac{2m}{m+1}, \\
f(r_1, r_2) &= \frac{1}{m}, \\
f(r_2, r_1) &= \frac{m-1}{m}, \\
q &= 2.
\end{aligned}$$

Note que se

$$\begin{aligned}
A &= \{(i_1, ..., i_{m-1}) \in \{1, ..., N\}^{m-1}\}, \\
B &= \{i_m \in \{1, ..., N\}\},
\end{aligned}$$

temos, do Teorema 2.4.1,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} \left| U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right) \right|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} &= \left(\sum_{(i,j)\in A\times B} a_{ij}^{\omega(r_1,r_2)} \right)^{\frac{1}{\omega(r_1,r_2)}} \\
&\leq \left(\sum_{i\in A} \|\beta_i\|_q^{r_1} \right)^{\frac{f(r_1,r_2)}{r_1}} \left(\sum_{j\in B} \|\alpha_j\|_q^{r_2} \right)^{\frac{f(r_2,r_1)}{r_2}}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N} \left| U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right) \right|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \qquad (3.1) \\
&\leq \left(\sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{N} \left\| \left(U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right) \right)_{i_m=1}^{N} \right\|_2^{\frac{2m-2}{m}} \right)^{\frac{f(r_1,r_2)}{\frac{2m-2}{m}}} \cdot \left(\sum_{i_m=1}^{N} \left\| \left(U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right) \right)_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{N} \right\|_2^{1} \right)^{\frac{f(r_2,r_1)}{1}}.
\end{aligned}$$

Precisamos calcular os dois fatores acima. Para o primeiro fator em (3.1) escrevemos $dt := dt_m$, e para cada $i_1, ..., i_{m-1}$ fixo, temos do Teorema 2.3.1,

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right) \right)_{i_m=1}^{N} \right\|_2^{\frac{2m-2}{m}} \\
&\leq \left(A_{2,\frac{2m-2}{m}}^1 \right)^{\frac{2m-2}{m}} \int_{[0,1]} \left| \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}(t_m) U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right) \right|^{\frac{2m-2}{m}} dt \\
&= \left(A_{2,\frac{2m-2}{m}} \right)^{\frac{2m-2}{m}} \int_{[0,1]} \left| U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_{m-1}}^{m-1}, \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}(t_m) x_{i_m}^m \right) \right|^{\frac{2m-2}{m}} dt.
\end{aligned}$$

Somando em $i_1, ..., i_{m-1} = 1, ..., N$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{N} \left\| \left(U\left(x_{i_1}^{1}, ..., x_{i_m}^{m}\right)\right)_{i_m=1}^{N} \right\|_2^{\frac{2m-2}{m}} \qquad (3.2)\\
&\leq \left(A_{2,\frac{2m-2}{m}}\right)^{\frac{2m-2}{m}} \sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{N} \left(\int_{[0,1]} \left| U\left(x_{i_1}^{1}, ..., x_{i_{m-1}}^{m-1}, \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}\left(t_m\right) x_{i_m}^{m}\right)\right|^{\frac{2m-2}{m}} dt \right)\\
&= \left(A_{2,\frac{2m-2}{m}}\right)^{\frac{2m-2}{m}} \int_{[0,1]} \left(\sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{N} \left| U\left(x_{i_1}^{1}, ..., x_{i_{m-1}}^{m-1}, \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}\left(t_m\right) x_{i_m}^{m}\right)\right|^{\frac{2m-2}{m}} \right) dt
\end{aligned}
$$

e, usando a hipótese de indução no integrando, segue que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{N} \left| U\left(x_{i_1}^{1}, ..., x_{i_{m-1}}^{m-1}, \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}\left(t_m\right) x_{i_m}^{m}\right)\right|^{\frac{2m-2}{m}} \qquad (3.3)\\
&\leq \left(\pi_{\left(\frac{2m-2}{m},1\right)} \left(U\left(\cdot, ..., \cdot, \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}\left(t_m\right) x_{i_m}^{m}\right)\right) \left\| \left(x_{i_1}^{1}\right)_{i_1=1}^{N} \right\|_1^{w} \cdots \left\| \left(x_{i_{m-1}}^{m-1}\right)_{i_{m-1}=1}^{N} \right\|_1^{w} \right)^{\frac{2m-2}{m}}\\
&\leq \left(C_{m-1} \left\| U\left(\cdot, ..., \cdot, \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}\left(t_m\right) x_{i_m}^{m}\right)\right\| \right)^{\frac{2m-2}{m}}\\
&\leq \left(C_{m-1} \left\| U \right\| \left\| \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}\left(t_m\right) x_{i_m}^{m} \right\| \right)^{\frac{2m-2}{m}}\\
&\leq \left(C_{m-1} \left\| U \right\| \left\| \left(x_{i_m}^{m}\right)_{i_m=1}^{N} \right\|_1^{w} \right)^{\frac{2m-2}{m}}\\
&\leq \left(C_{m-1} \left\| U \right\| \right)^{\frac{2m-2}{m}}.
\end{aligned}
$$

Assim, de (3.3) e (3.2) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{N} \left\| \left(U\left(x_{i_1}^{1}, ..., x_{i_m}^{m}\right)\right)_{i_m=1}^{N} \right\|_2^{\frac{2m-2}{m}}\\
&\leq \left(A_{2,\frac{2m-2}{m}}\right)^{\frac{2m-2}{m}} \int_{[0,1]} \left(C_{m-1} \left\| U \right\| \right)^{\frac{2m-2}{m}} dt\\
&= \left(\left(A_{2,\frac{2m-2}{m}}\right) C_{m-1} \left\| U \right\| \right)^{\frac{2m-2}{m}}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\left(\sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{N} \left\| \left(U\left(x_{i_1}^{1}, ..., x_{i_m}^{m}\right)\right)_{i_m=1}^{N} \right\|_2^{\frac{2m-2}{m}} \right)^{\frac{m}{2m-2}} \leq \left(A_{2,\frac{2m-2}{m}}\right) C_{m-1} \left\| U \right\|. \qquad (3.4)
$$

Para o segundo fator em (3.1), fixamos i_m e escrevemos $dt = dt_1, ..., dt_{m-1}$. Pelo Teorema 2.3.1,

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(U \left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m \right) \right)_{i_1,...,i_{m-1}=1}^N \right\|_2^1 \\
&\leq \left(A_{2,1}^{m-1} \right)^1 \left(\int\limits_{I^{m-1}} \left| \sum_{i_1,...,i_{m-1}=1}^N r_{i_1}(t_1) ... r_{i_{m-1}}(t_{m-1}), U \left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m \right) \right|^1 dt \right) \\
&= \left(A_{2,1}^{m-1} \right) \left(\int\limits_{I^{m-1}} \left| U \left(\sum_{i_1=1}^N r_{i_1}(t_1) x_{i_1}^1, ..., \sum_{i_{m-1}=1}^N r_{i_{m-1}}(t_{m-1}) x_{i_{m-1}}^{m-1}, x_{i_m}^m \right) \right| dt \right).
\end{aligned}$$

Somando sob todos os $i_m = 1, ..., N$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_m=1}^N \left\| \left(U \left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m \right) \right)_{i_1,...,i_{m-1}=1}^N \right\|_2^1 \qquad (3.5) \\
&\leq \left(A_{2,1}^{m-1} \right) \sum_{i_m=1}^N \left(\int\limits_{I^{m-1}} \left| U \left(\sum_{i_1=1}^N r_{i_1}(t_1) x_{i_1}^1, ..., \sum_{i_{m-1}=1}^N r_{i_{m-1}}(t_{m-1}) x_{i_{m-1}}^{m-1}, x_{i_m}^m \right) \right| dt \right) \\
&= \left(A_{2,1}^{m-1} \right) \int\limits_{I^{m-1}} \left(\sum_{i_m=1}^N \left| U \left(\sum_{i_1=1}^N r_{i_1}(t_1) x_{i_1}^1, ..., \sum_{i_{m-1}=1}^N r_{i_{m-1}}(t_{m-1}) x_{i_{m-1}}^{m-1}, x_{i_m}^m \right) \right| \right) dt.
\end{aligned}$$

Usando o caso $m = 1$ no integrando, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_m=1}^N \left| U \left(\sum_{i_1=1}^N r_{i_1}(t_1) x_{i_1}^1, ..., \sum_{i_{m-1}=1}^N r_{i_{m-1}}(t_{m-1}) x_{i_{m-1}}^{m-1}, x_{i_m}^m \right) \right| \right) \qquad (3.6) \\
&\leq \left(\pi_{(1,1)} \right) \left(U \left(\sum_{i_1=1}^N r_{i_1}(t_1) x_{i_1}^1, ..., \sum_{i_{m-1}=1}^N r_{i_{m-1}}(t_{m-1}) x_{i_{m-1}}^{m-1}, \cdot \right) \right) \left\| \left(x_{i_m}^m \right)_{i_m=1}^N \right\|_1^w \\
&\leq 1 \left\| U \left(\sum_{i_1=1}^N r_{i_1}(t_1) x_{i_1}^1, ..., \sum_{i_{m-1}=1}^N r_{i_{m-1}}(t_{m-1}) x_{i_{m-1}}^{m-1}, \cdot \right) \right\| \\
&\leq \|U\| \left\| \sum_{i_1=1}^N r_{i_1}(t_1) x_{i_1}^1 \right\| ... \left\| \sum_{i_{m-1}=1}^N r_{i_{m-1}}(t_{m-1}) x_{i_{m-1}}^{m-1} \right\| \\
&\leq \|U\| \left\| \left(x_{i_1}^1 \right)_{i_1=1}^N \right\|_1^w ... \left\| \left(x_{i_{m-1}}^{m-1} \right)_{i_{m-1}=1}^N \right\|_1^w \\
&\leq \|U\|.
\end{aligned}$$

Assim, de (3.5) e (3.6) temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_m=1}^N \left\| \left(U \left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m \right) \right)_{i_1,...,i_{m-1}=1}^N \right\|_2^1 \\
&\leq \left(A_{2,1}^{m-1} \right) \int\limits_{I^{m-1}} \|U\| \, dt \\
&= \left(A_{2,1}^{m-1} \right) \|U\|
\end{aligned}$$

e portanto

$$\left(\sum_{i_m=1}^{N}\left\|\left(U\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m\right)\right)_{i_1,...,i_{m-1}=1}^{N}\right\|_2^1\right)^{\frac{1}{1}} \leq \left(A_{2,1}^{m-1}\right)\|U\|. \tag{3.7}$$

Logo, de (3.1), (3.4) e (3.7) temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i_1,...,i_n=1}^{N}\left|U\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m\right)\right|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} &\leq \left(\left(A_{2,\frac{2m-2}{m}}\right)C_{m-1}\|U\|\right)^{f(r_1,r_2)}\left(\left(A_{2,1}^{m-1}\right)\|U\|\right)^{f(r_2,r_1)}\\ &= \left(\left(A_{2,\frac{2m-2}{m}}\right)C_{m-1}\|U\|\right)^{\frac{m-1}{m}}\left(\left(A_{2,1}^{m-1}\right)\|U\|\right)^{\frac{1}{m}}\\ &\leq 2^{\frac{m-1}{2m}}\left(C_{m-1}\right)^{\frac{m-1}{m}}\left(A_{2,\frac{2m-2}{m}}\right)^{\frac{m-1}{m}}\|U\|\\ &\overset{(2.11)}{\leq} 2^{\frac{m-1}{2m}}\left(C_{m-1}\right)^{\frac{m-1}{m}}\left(A_{\frac{2m-2}{m}}^{-1}\right)^{\frac{m-1}{m}}\|U\|\\ &= 2^{\frac{m-1}{2m}}\left(\frac{C_{m-1}}{A_{\frac{2m-2}{m}}}\right)^{\frac{m-1}{m}}\|U\|.\end{aligned}$$

De acordo com [14], sabemos que $A_p = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$, sempre que $p \leq 1,487$. Logo, como

$$\frac{2m-2}{m} < 1,487$$

para todo $m \in \{2,...,13\}$, temos que . Assim, para $m \in \{2,...,13\}$, temos

$$\begin{aligned}2^{\frac{m-1}{2m}}\left(\frac{C_{m-1}}{A_{\frac{2m-2}{m}}}\right)^{\frac{m-1}{m}} &= 2^{\frac{m-1}{2m}}\left(\frac{C_{m-1}}{2^{\frac{1}{2}-\frac{m}{2m-2}}}\right)^{\frac{m-1}{m}}\\ &= 2^{\frac{m-1}{2m}}\left(\frac{C_{m-1}}{2^{\frac{-1}{2m-2}}}\right)^{\frac{m-1}{m}}\\ &= 2^{\frac{1}{2}}\left(C_{m-1}\right)^{\frac{m-1}{m}}.\end{aligned}$$

Logo $C_2 = 2^{\frac{1}{2}}$, $C_3 = 2^{\frac{5}{6}}$, $C_4 = 2^{\frac{18}{16}}$ e, em geral,

$$C_m = 2^{\frac{m^2+m-2}{4m}},$$

para $m \in \{2,...,13\}$. ■

Observemos que para o caso $m = 2$, obtemos uma prova da Desigualdade 4/3 de Littlewwod.

3.2 Melhorando as constantes para o caso real

Como consequência de [15], pode-se ver que as constantes $C_m = m^{\frac{m+1}{2m}}2^{\frac{m-1}{2}}$ podem ser substituídas por $C_m = 2^{\frac{m-1}{2}}$, o que significa uma notável melhora das constantes. Vamos denotar as constantes de Bohnenblust–Hille para o caso real por $C_{\mathbb{R},m}$, e para o caso complexo $C_{\mathbb{C},m}$. A demonstração original do Teorema de Bohnenblust–Hille devida a Defant, Popa e Schwarting [7] permite melhorar ainda mais tais constantes. A rigor, o método da demonstração dá margem a uma família de possíveis constantes. A constante obtida da forma mais direta é a mesma que foi apresentada na demonstração anterior:

$$C_{\mathbb{R},m} = 2^{\frac{m-1}{2m}}\left(\frac{C_{\mathbb{R},m-1}}{A_{\frac{2m-2}{m}}}\right)^{\frac{m-1}{m}},$$

e, para $2 \leq m \leq 13$,

$$C_{\mathbb{R},m} = 2^{\frac{m^2+m-2}{4m}}.$$

Pellegrino e Seoane-Sepúlveda [21, Theorem 2.2] exploraram o resultado de Defant, Popa e Schwarting, mostrando que na demonstração por indução, fazendo uma conveniente combinação dos casos 2 e $m-2$, ao invés dos casos 1 e $m-1$, consegue-se melhorar ainda mais as constantes. Faremos a seguir a demonstração do Teorema de Bohnenblust–Hille com a mencionada combinação a fim de proporcionar a fórmula para as novas constantes e, posteriormente faremos uma tabela comparativa das constantes, destacando o desenvolvimento histórico das constantes, assim como quão significativas têm sido as melhoras. O leitor perceberá que a demonstração do Teorema 3.2.1 é essencialmente a mesma do Teorema 3.1.1. Entretanto, preferimos fazer ambas detalhadamente para que suas pequenas diferenças sejam realçadas com mais facilidade.

Deve-se enfatizar que a demonstração de Defant-Popa-Schwarting, por sua extrema generalidade, contém implicitamente quaisquer escolhas possíveis de combinações para o processo de indução. Mas, nenhum estudo qualitativo e nem tampouco quantitativo das possíveis constantes é feito.

Teorema 3.2.1 (Defant et al. (estimativas por Pellegrino e Seoane-Sepúlveda)) *Para todo inteiro positivo m e espaços de Banach $X_1, ...X_m$,*

$$\prod\nolimits_{(\frac{2m}{m+1};1)}^{m}(X_1, ..., X_m; \mathbb{R}) = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; \mathbb{R}) \text{ e,}$$

$$\pi_{(\frac{2m}{m+1};1)}(\cdot) \leq C_{\mathbb{R},m} \left\|\cdot\right\|$$

com

$$C_{\mathbb{R},2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$C_{\mathbb{R},m} = 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{C_{\mathbb{R},m-2}}{A^2_{\frac{2m-4}{m-1}}} \right)^{\frac{m-2}{m}} \quad \text{para } m \geq 3 \tag{3.8}$$

Em particular, se $2 \leq m \leq 14$,

$$C_{\mathbb{R},m} = 2^{\frac{m^2+6m-8}{8m}} \quad \text{se } m \text{ é par,} \tag{3.9}$$

e

$$C_{\mathbb{R},m} = 2^{\frac{m^2+6m-7}{8m}} \quad \text{se } m \text{ é ímpar.} \tag{3.10}$$

Demonstração. Sabemos que

$$\prod\nolimits_{(1;1)}^{1}(X_1; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(X_1; \mathbb{K}),$$

em particular para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Além disso, foi encontrado que para o caso $m = 2$ é precisamente a Desigualdade de Littlewood.

Para o caso m vamos trabalhar por indução, como foi dito, combinando os casos 2 e $m-2$, isto é, vamos supor certo para 2 e $m-2$ e provar para m.

Seja $U \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; \mathbb{R})$ e N um inteiro positivo qualquer. Para cada $1 \leq k \leq m$ considere $x_1^{(k)}, ..., x_N^{(k)} \in X_k$ tais que

$$\left\| \left(x_j^{(k)} \right)_{j=1}^{N} \right\|_1^w \leq 1,$$

para $k = 1, ..., m$.

Consideremos, na notação do Teorema 2.4.1,

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{2(m-2)}{(m-2)+1} = \frac{2m-4}{m-1}, \\
r_2 &= \frac{4}{3}, \omega(r_1, r_2) = \frac{2m}{m+1}, \\
f(r_1, r_2) &= \frac{m-2}{m}, \\
f(r_2, r_1) &= \frac{2}{m} \\
q &= 2.
\end{aligned}$$

Note que se

$$\begin{aligned}
A &= \{(i_1, ..., i_{m-2}) \in \{1, ..., N\}^{m-2}\} \\
B &= \{(i_{m-1}, i_m) \in \{1, ..., N\}^2\},
\end{aligned}$$

temos, do Teorema 2.4.1,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{N} \left| U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right) \right|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} &= \left(\sum_{(i,j)\in A\times B} a_{ij}^{\omega(r_1,r_2)} \right)^{\frac{1}{\omega(r_1,r_2)}} \\
&\leq \left(\sum_{i\in A} \|\beta_i\|_q^{r_1} \right)^{\frac{f(r_1,r_2)}{r_1}} \left(\sum_{j\in B} \|\alpha_j\|_q^{r_2} \right)^{\frac{f(r_2,r_1)}{r_2}}
\end{aligned}$$

e

$$\left(\sum_{i_1,...,i_n=1}^{N} \left| U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right) \right|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \tag{3.11}$$

$$\leq \left(\sum_{i_1,...,i_{m-2}=1}^{N} \left\| \left(U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right)\right)_{i_{m-1},i_m=1}^{N} \right\|_2^{r_1} \right)^{\frac{\frac{m-2}{m}}{r_1}} \left(\sum_{i_{m-1},i_m=1}^{N} \left\| \left(U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right)\right)_{i_1,...,i_{m-2}=1}^{N} \right\|_2^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{\frac{2}{m}}{r_2}}$$

Precisamos calcular os dois fatores acima. Para o primeiro fator em (3.11) escrevemos $dt := dt_1, ..., dt_{m-2}$. Para cada i_{m-1}, i_m fixos, temos, do Teorema 2.3.1,

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right)\right)_{i_{m-1},i_m=1}^{N} \right\|_2^{\frac{2m-4}{m-1}} \\
&\leq \left(A_{2,\frac{2m-4}{m-1}}^2 \right)^{\frac{2m-4}{m-1}} \int_{I^2} \left| \sum_{i_{m-1},i_m=1}^{N} r_{i_{m-1}}(t_{m-1})\, r_{i_m}(t_m)\, U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right) \right|^{\frac{2m-4}{m-1}} dt \\
&= \left(A_{2,\frac{2m-4}{m-1}}^2 \right)^{\frac{2m-4}{m-1}} \int_{I^2} \left| U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_{m-2}}^{m-2}, \sum_{i_{m-1}=1}^{N} r_{i_{m-1}}(t_{m-1})\, x_{i_{m-1}}^{m-1}, \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}(t_m)\, x_{i_m}^m \right) \right|^{\frac{2m-4}{m-1}} dt
\end{aligned}$$

Somando em $i_1, ..., i_{m-2} = 1, ..., N$ obtemos

$$\sum_{i_1,\ldots,i_{m-2}=1}^{N} \left\| \left(U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right)\right)_{i_{m-1},i_m=1}^{N} \right\|_2^{r_1} \tag{3.12}$$
$$\leq \left(A_{2,r_1}^2\right)^{r_1} \sum_{i_1,\ldots,i_{m-2}=1}^{N} \left(\int_{I^2} \left| U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_{m-2}}^{m-2}, \sum_{i_{m-1}=1}^{N} r_{i_{m-1}}\left(t_{m-1}\right) x_{i_{m-1}}^{m-1}, \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}\left(t_m\right) x_{i_m}^m \right) \right|^{r_1} dt \right)$$
$$= \left(A_{2,r_1}^2\right)^{r_1} \int_{I^2} \left(\sum_{i_1,\ldots,i_{m-2}=1}^{N} \left| U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_{m-2}}^{m-2}, \sum_{i_{m-1}=1}^{N} r_{i_{m-1}}\left(t_{m-1}\right) x_{i_{m-1}}^{m-1}, \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}\left(t_m\right) x_{i_m}^m \right) \right|^{r_1} \right) dt.$$

Usando a hipótese de indução no integrando concluímos que

$$\sum_{i_1,\ldots,i_{m-2}=1}^{N} \left| U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_{m-2}}^{m-2}, \sum_{i_{m-1}=1}^{N} r_{i_{m-1}}\left(t_{m-1}\right) x_{i_{m-1}}^{m-1}, \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}\left(t_m\right) x_{i_m}^m \right) \right|^{\frac{2m-4}{m-1}} \tag{3.13}$$
$$\leq \left(\pi_{\left(\frac{2m-4}{m-1},1\right)} \left(U\left(\cdot, ..., \cdot, \sum_{i_{m-1}=1}^{N} r_{i_{m-1}}\left(t_{m-1}\right) x_{i_{m-1}}^{m-1}, \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}\left(t_m\right) x_{i_m}^m \right)\right) \prod_{j=1}^{m-2} \left\| \left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{N} \right\|_1^w \right)^{\frac{2m-4}{m-1}}$$
$$\leq \left(C_{\mathbb{R},m-2} \left\| U\left(\cdot, ..., \cdot, \sum_{i_{m-1}=1}^{N} r_{i_{m-1}}\left(t_{m-1}\right) x_{i_{m-1}}^{m-1}, \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}\left(t_m\right) x_{i_m}^m \right) \right\| \right)^{\frac{2m-4}{m-1}}$$
$$\leq \left(C_{\mathbb{R},m-2} \left\|U\right\| \left\| \sum_{i_{m-1}=1}^{N} r_{i_{m-1}}\left(t_{m-1}\right) x_{i_{m-1}}^{m-1} \right\| \left\| \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}\left(t_m\right) x_{i_m}^m \right\| \right)^{\frac{2m-4}{m-1}}$$
$$\leq \left(C_{\mathbb{R},m-2} \left\|U\right\| \left\| \left(x_{i_{m-1}}^{m-1}\right)_{i_{m-1}=1}^{N} \right\|_1^w \left\| \left(x_{i_m}^m\right)_{i_m=1}^{N} \right\|_1^w \right)^{\frac{2m-4}{m-1}}$$
$$\leq \left(C_{\mathbb{R},m-2} \left\|U\right\|\right)^{\frac{2m-4}{m-1}}.$$

Assim, de (3.13) e (3.12) obtemos

$$\sum_{i_1,\ldots,i_{m-2}=1}^{N} \left\| \left(U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right)\right)_{i_{m-1},i_m=1}^{N} \right\|_2^{\frac{2m-4}{m-1}}$$
$$\leq \left(A_{2,\frac{2m-4}{m-1}}^2\right)^{\frac{2m-4}{m-1}} \int_{I^2} \left(C_{\mathbb{R},m-2} \left\|U\right\|\right)^{\frac{2m-4}{m-1}} dt$$
$$= \left(\left(A_{2,\frac{2m-4}{m-1}}^2\right) \left(C_{\mathbb{R},m-2} \left\|U\right\|\right)\right)^{\frac{2m-4}{m-1}}$$

e portanto

$$\sum_{i_1,\ldots,i_{m-2}=1}^{N} \left\| \left(U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right)\right)_{i_{m-1},i_m=1}^{N} \right\|_2^{\frac{2m-4}{m-1}} \leq \left(\left(A_{2,\frac{2m-4}{m-1}}^2\right) \left(C_{\mathbb{R},m-2} \left\|U\right\|\right)\right)^{\frac{2m-4}{m-1}}. \tag{3.14}$$

Para o segundo fator em (3.11) escrevemos $dt := dt_{m-1}, dt_m$. Para cada $i_1, \ldots, i_{m-2}$ fixos, temos, do

Teorema 2.3.1,

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(U\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m\right)\right)_{i_1,...,i_{m-2}=1}^N\right\|_2^{\frac{4}{3}} \\
&\leq \left(A_{2,\frac{4}{3}}^{m-2}\right)^{\frac{4}{3}}\left(\int\limits_{I^{m-2}}\left|\sum_{i_1,...,i_{m-2}=1}^N r_{i_1}\left(t_1\right)...r_{i_{m-2}}\left(t_{m-2}\right), U\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m\right)\right|^{\frac{4}{3}} dt\right) \\
&= \left(A_{2,\frac{4}{3}}^{m-2}\right)^{\frac{4}{3}}\left(\int\limits_{I^{m-2}}\left|U\left(\sum_{i_1=1}^N r_{i_1}\left(t_1\right)x_{i_1}^1,...,\sum_{i_{m-2}=1}^N r_{i_{m-2}}\left(t_{m-2}\right)x_{i_{m-2}}^{m-2}, x_{i_{m-1}}^{m-1}, x_{i_m}^m\right)\right|^{\frac{4}{3}} dt\right).
\end{aligned}
$$

Somando em $i_{m-1}, i_m = 1, ..., N$ obtemos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i_{m-1},i_m=1}^N\left\|\left(U\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m\right)\right)_{i_1,...,i_{m-2}=1}^N\right\|_2^{\frac{4}{3}} \qquad (3.15)\\
&\leq \left(A_{2,\frac{4}{3}}^{m-2}\right)^{\frac{4}{3}}\sum_{i_{m-1},i_m=1}^N\left(\int\limits_{I^{m-2}}\left|U\left(\sum_{i_1=1}^N r_{i_1}\left(t_1\right)x_{i_1}^1,...,\sum_{i_{m-2}=1}^N r_{i_{m-2}}\left(t_{m-2}\right)x_{i_{m-2}}^{m-2}, x_{i_{m-1}}^{m-1}, x_{i_m}^m\right)\right|^{\frac{4}{3}} dt\right) \\
&= \left(A_{2,\frac{4}{3}}^{m-2}\right)^{\frac{4}{3}}\int\limits_{I^{m-2}}\left(\sum_{i_{m-1},i_m=1}^N\left|U\left(\sum_{i_1=1}^N r_{i_1}\left(t_1\right)x_{i_1}^1,...,\sum_{i_{m-2}=1}^N r_{i_{m-2}}\left(t_{m-2}\right)x_{i_{m-2}}^{m-2}, x_{i_{m-1}}^{m-1}, x_{i_m}^m\right)\right|^{\frac{4}{3}}\right) dt
\end{aligned}
$$

e, usando o caso $m = 2$ no integrando, temos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i_{m-1},i_m=1}^N\left|U\left(\sum_{i_1=1}^N r_{i_1}\left(t_1\right)x_{i_1}^1,...,\sum_{i_{m-2}=1}^N r_{i_{m-2}}\left(t_{m-2}\right)x_{i_{m-2}}^{m-2}, x_{i_{m-1}}^{m-1}, x_{i_m}^m\right)\right|^{\frac{4}{3}} \qquad (3.16)\\
&\leq \left(\left(\pi_{\left(\frac{4}{3},1\right)}\right)\left(U\left(\sum_{i_1=1}^N r_{i_1}\left(t_1\right)x_{i_1}^1,...,\sum_{i_{m-2}=1}^N r_{i_{m-2}}\left(t_{m-2}\right)x_{i_{m-2}}^{m-2},\cdot,\cdot\right)\right)\prod_{k=m-1}^m\left\|\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^N\right\|_1^w\right)^{\frac{4}{3}} \\
&\leq \left(2^{\frac{1}{2}}\left\|U\left(\sum_{i_1=1}^N r_{i_1}\left(t_1\right)x_{i_1}^1,...,\sum_{i_{m-2}=1}^N r_{i_{m-2}}\left(t_{m-2}\right)x_{i_{m-2}}^{m-2},\cdot,\cdot\right)\right\|\right)^{\frac{4}{3}} \\
&\leq \left(2^{\frac{1}{2}}\left\|U\right\|\left\|\sum_{i_1=1}^N r_{i_1}\left(t_1\right)x_{i_1}^1\right\|...\left\|\sum_{i_{m-2}=1}^N r_{i_{m-2}}\left(t_{m-2}\right)x_{i_{m-2}}^{m-2}\right\|\right)^{\frac{4}{3}} \\
&\leq \left(2^{\frac{1}{2}}\left\|U\right\|\left\|\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^N\right\|_1^w...\left\|\left(x_{i_{m-2}}^{m-2}\right)_{i_{m-2}=1}^N\right\|_1^w\right)^{\frac{4}{3}} \\
&\leq \left(2^{\frac{1}{2}}\left\|U\right\|\right)^{\frac{4}{3}}.
\end{aligned}
$$

Assim, de (3.15) e (3.16) temos

$$
\sum_{i_{m-1},i_m=1}^N\left\|\left(U\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m\right)\right)_{i_1,...,i_{m-1}=1}^N\right\|_2^{\frac{4}{3}} \leq \left(A_{2,\frac{4}{3}}^{m-2}\right)^{\frac{4}{3}}\int\limits_{I^{m-2}}\left(2^{\frac{1}{2}}\left\|U\right\|\right)^{\frac{4}{3}} dt
$$

e consequentemente

$$\sum_{i_{m-1},i_m=1}^{N} \left\| \left(U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right)\right)_{i_1,...,i_{m-1}=1}^{N} \right\|_2^{\frac{4}{3}} \leq \left(\left(A_{2,\frac{4}{3}}^{m-2} \right) 2^{\frac{1}{2}} \|U\| \right)^{\frac{4}{3}}. \tag{3.17}$$

Assim, de (3.11), (3.14) e (3.17), temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1,...,i_n=1}^{N} \left| U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right)\right|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \\
&\leq \left(\left(A_{2,\frac{2m-4}{m-1}}^{2} \right) C_{\mathbb{R},m-2} \|U\| \right)^{f(r_1,r_2)} \left(\left(A_{2,\frac{4}{3}}^{m-2} \right) 2^{\frac{1}{2}} \|U\| \right)^{f(r_2,r_1)} \\
&= \left(\left(A_{2,\frac{2m-4}{m-1}}^{2} \right) C_{\mathbb{R},m-2} \|U\| \right)^{\frac{m-2}{m}} \left(\left(A_{2,\frac{4}{3}}^{m-2} \right) 2^{\frac{1}{2}} \|U\| \right)^{\frac{2}{m}} \\
&\leq \left(\left(A_{2,\frac{2m-4}{m-1}}^{2} \right) C_{\mathbb{R},m-2} \|U\| \right)^{\frac{m-2}{m}} \left(\left(A_{2,\frac{4}{3}} \right)^{m-2} 2^{\frac{1}{2}} \|U\| \right)^{\frac{2}{m}} \\
&\overset{(2.11)}{\leq} \left(\left(A_{\frac{2m-4}{m-1}}^{-1} \right)^{2} C_{\mathbb{R},m-2} \right)^{\frac{m-2}{m}} \left(\left(A_{\frac{4}{3}}^{-1} \right)^{m-2} 2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{2}{m}} \|U\| \\
&= 2^{\frac{1}{m}} \left(A_{\frac{2m-4}{m-1}}^{-1} . A_{\frac{4}{3}}^{-1} \right)^{\frac{2m-4}{m}} \left(C_{\mathbb{R},m-2} \right)^{\frac{m-2}{m}} \|U\| \\
&= 2^{\frac{1}{m}} \left(2^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{2m-4}{m}} \left(A_{\frac{2m-4}{m-1}}^{-1} \right)^{\frac{2m-4}{m}} \left(C_{\mathbb{R},m-2} \right)^{\frac{m-2}{m}} \|U\| \\
&= 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{C_{\mathbb{R},m-2}}{A_{\frac{2m-4}{m-1}}^{2}} \right)^{\frac{m-2}{m}} \|U\| .
\end{aligned}$$

Em particular, como para $m \in \{2, ..., 14\}$ a desigualdade abaixo é válida

$$\frac{2m-4}{m-1} < 1,487,$$

novamente usando as estimativas de [14], sabemos que $A_p = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$, para $p = \frac{2m-4}{m-1}$. Logo, para $m \in \{3, ..., 14\}$, temos

$$\begin{aligned}
2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{C_{\mathbb{R},m-2}}{A_{\frac{2m-4}{m-1}}^{2}} \right)^{\frac{m-2}{m}} &= 2^{\frac{1}{2}} \left(2^{\frac{m-1}{2m-4}-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{m-2}{m}} \left(C_{\mathbb{R},m-2} \right)^{\frac{m-2}{m}} \\
&= 2^{\frac{1}{2}} \left(2^{\frac{1}{2m-4}} \right)^{\frac{m-2}{m}} \left(C_{\mathbb{R},m-2} \right)^{\frac{m-2}{m}} \\
&= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2m}} \left(C_{\mathbb{R},m-2} \right)^{\frac{m-2}{m}} \\
&= 2^{\frac{m+2}{2m}} \left(C_{\mathbb{R},m-2} \right)^{\frac{m-2}{m}} .
\end{aligned}$$

Assim $C_{\mathbb{R},3} = 2^{\frac{20}{24}}$, $C_{\mathbb{R},4} = 2^{\frac{32}{32}}$, $C_{\mathbb{R},5} = 2^{\frac{48}{40}}$, $C_{\mathbb{R},6} = 2^{\frac{64}{48}}$ e, indutivamente, para $m \in \{2, ..., 14\}$:

$$C_{\mathbb{R},m} = 2^{\frac{m^2+6m-8}{8m}} \text{se } m \text{ é par,}$$

$$C_{\mathbb{R},m} = 2^{\frac{m^2+6m-7}{8m}} \text{se } m \text{ é ímpar.}$$

■

Abaixo exibimos uma tabela comparativa das constantes:

m	$C_{\mathbb{R},m}$ Usando (3.8), (3.9) e (3.10)	Constantes de [7]	Constantes de [15]
3	$2^{\frac{20}{24}} \approx 1.782$	$2^{\frac{5}{6}} \approx 1.782$	$2^{\frac{2}{2}} = 2$
4	$2^{\frac{32}{32}} = 2$	$2^{\frac{18}{16}} \approx 2.181$	$2^{\frac{3}{2}} \approx 2.828$
5	$2^{\frac{48}{40}} \approx 2.298$	$2^{\frac{28}{20}} \approx 2.639$	$2^{\frac{4}{2}} = 4$
6	$2^{\frac{64}{48}} \approx 2.520$	$2^{\frac{40}{24}} \approx 3.175$	$2^{\frac{5}{2}} \approx 5.657$
7	$2^{\frac{84}{56}} \approx 2.828$	$2^{\frac{54}{28}} \approx 3.807$	$2^{\frac{6}{2}} = 8$
8	$2^{\frac{104}{64}} \approx 3.084$	$2^{\frac{70}{32}} \approx 4.555$	$2^{\frac{7}{2}} \approx 11.314$
9	$2^{\frac{128}{72}} \approx 3.429$	$2^{\frac{88}{36}} \approx 5.443$	$2^{\frac{8}{2}} = 16$
10	$2^{\frac{152}{80}} \approx 3.732$	$2^{\frac{108}{40}} \approx 6.498$	$2^{\frac{9}{2}} \approx 22.627$
11	$2^{\frac{180}{88}} \approx 4.128$	$2^{\frac{130}{44}} \approx 7.752$	$2^{\frac{10}{2}} = 32$
12	$2^{\frac{208}{96}} \approx 4.490$	$2^{\frac{154}{48}} \approx 9.243$	$2^{\frac{11}{2}} = 45.255$
13	$2^{\frac{240}{104}} \approx 4.950\,9$	$2^{\frac{180}{52}} \approx 11.016$	$2^{\frac{12}{2}} = 64$
14	$2^{\frac{272}{112}} \approx 5.384$	$2^{\frac{13}{28}} \left(\frac{2^{\frac{180}{52}}}{A_{\frac{26}{14}}} \right)^{1-\frac{1}{14}} \approx 13.126$	$2^{\frac{13}{2}} \approx 90.510$
15	$2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2^{\frac{240}{104}}}{A^2_{\frac{26}{14}}} \right)^{\frac{13}{15}} \approx 5.9253$	$2^{\frac{14}{30}} \left(\frac{C_{14}}{A_{\frac{28}{15}}} \right)^{\frac{14}{15}} \approx 15.638$	$2^{\frac{14}{2}} = 128$
16	$2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2^{\frac{272}{112}}}{A^2_{\frac{28}{15}}} \right)^{\frac{14}{16}} \approx 6.4439$	$2^{\frac{15}{32}} \left(\frac{C_{15}}{A_{\frac{30}{16}}} \right)^{\frac{15}{16}} \approx 18.627$	$2^{\frac{15}{2}} \approx 181.02$
17	$2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{C_{\mathbb{R},15}}{A^2_{\frac{30}{16}}} \right)^{\frac{15}{17}} \approx 7.0827$	$2^{\frac{16}{34}} \left(\frac{C_{16}}{A_{\frac{32}{17}}} \right)^{\frac{16}{17}} \approx 22.185$	$2^{\frac{16}{2}} = 256$
18	$2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{C_{\mathbb{R},16}}{A^2_{\frac{32}{17}}} \right)^{\frac{16}{18}} \approx 7.7035$	$2^{\frac{17}{36}} \left(\frac{C_{17}}{A_{\frac{34}{18}}} \right)^{\frac{17}{18}} \approx 26.419$	$2^{\frac{17}{2}} \approx 362.04$
19	$2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{C_{\mathbb{R},17}}{A^2_{\frac{34}{18}}} \right)^{\frac{17}{19}} \approx 8.4585$	$2^{\frac{18}{38}} \left(\frac{C_{18}}{A_{\frac{36}{19}}} \right)^{\frac{18}{19}} \approx 31.458$	$2^{\frac{18}{2}} = 512$
20	$2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{C_{\mathbb{R},18}}{A^2_{\frac{36}{19}}} \right)^{\frac{18}{20}} \approx 9.201$	$2^{\frac{19}{40}} \left(\frac{C_{19}}{A_{\frac{38}{20}}} \right)^{\frac{19}{20}} \approx 37.454$	$2^{\frac{19}{2}} \approx 724.08$
21	$2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{C_{\mathbb{R},19}}{A^2_{\frac{38}{20}}} \right)^{\frac{19}{21}} \approx 10.095$	$2^{\frac{20}{42}} \left(\frac{C_{20}}{A_{\frac{40}{21}}} \right)^{\frac{20}{21}} \approx 44.589$	$2^{\frac{20}{2}} = 1024$
22	$2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{C_{\mathbb{R},20}}{A^2_{\frac{40}{21}}} \right)^{\frac{20}{22}} \approx 10.982$	$2^{\frac{21}{44}} \left(\frac{C_{21}}{A_{\frac{42}{22}}} \right)^{\frac{21}{22}} \approx 53.079$	$2^{\frac{21}{2}} \approx 1448.2$
23	$2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{C_{\mathbb{R},21}}{A^2_{\frac{42}{22}}} \right)^{\frac{21}{23}} \approx 12.0411$	$2^{\frac{22}{46}} \left(\frac{C_{22}}{A_{\frac{44}{23}}} \right)^{\frac{22}{23}} \approx 63.182$	$2^{\frac{22}{2}} = 2048$
24	$2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{C_{\mathbb{R},22}}{A^2_{\frac{44}{23}}} \right)^{\frac{22}{24}} \approx 13.101$	$2^{\frac{23}{48}} \left(\frac{C_{23}}{A_{\frac{46}{24}}} \right)^{\frac{23}{24}} \approx 75.203$	$2^{\frac{23}{2}} \approx 2896.3$

Os valores a partir de $m = 15$, são calculados mediante o valor exato de $A_{\frac{2m-4}{m-1}}$, que pode ser encontrado em [14]. Este valor exato é:

$$A_{\frac{2m-4}{m-1}} = \sqrt{2} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\frac{2m-4}{m-1}+1}{2} \right)}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{m-1}{2m-4}},$$

onde Γ denota a famosa Função Gama, que é definida para valores reais positivos por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Observação 3.2.2 *Ressaltamos que embora o trabalho de Defant, Popa e Schwarting não calcule constantes, todas as constantes calculadas por Pellegrino e Seoane-Sepúlveda usam a demonstração de Defant, Popa e Schwarting como ferramenta central. Os outros ingredientes adicionados pelo trabalho de Pellegrino e Seoane-Sepúlveda foram uma escolha adequada do procedimento de indução e uma busca na literatura por valores ótimos das constantes da Desigualdade de Khinchin.*

3.3 Melhorando as constantes para o caso complexo

Para o caso das constantes Bohnenblust–Hille no caso complexo, as constantes $C_m = 2^{\frac{m-1}{2}}$ foram melhoradas por Queffélec e Defant e Sevilla-Peris (veja [8] e [27]). Eles observaram que $C_m = 2^{\frac{m-1}{2}}$ podia ser substituída por $C_m = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1}$. Observemos que na prova do Teorema 3.2.1, não foi utilizado a hipótese de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, logo a mesma prova pode ser feita supondo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, obtendo a seguinte expressão para as constantes:

$$D_{\mathbb{C},m} = 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{D_{\mathbb{C},m-2}}{A^2_{\frac{2m-4}{m-1}}} \right)^{\frac{m-2}{m}} \text{ para } m \geq 3.$$

Em particular, se $2 \leq m \leq 14$

$$D_{\mathbb{C},m} = 2^{\frac{m^2+6m-8}{8m}} \text{ se } m \text{ é par,}$$

e

$$D_{\mathbb{C},m} = 2^{\frac{m^2+6m-7}{8m}} \text{ se } m \text{ é impar.}$$

No entanto, estas constantes não são melhores que $C_m = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1}$. Basta observar a seguinte tabela:

m	$D_{\mathbb{C},m}$	$C_m = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1} m.$ [8] e [27]
3	$2^{\frac{20}{24}} \approx 1.782$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{2} = 1.2732$
4	$2^{\frac{32}{32}} = 2$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{3} = 1.4367$
5	$2^{\frac{48}{40}} \approx 2.298$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{4} = 1.6211$
6	$2^{\frac{64}{48}} \approx 2.520$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{5} = 1.8293$
7	$2^{\frac{84}{56}} \approx 2.828$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{6} = 2.0641$
8	$2^{\frac{104}{64}} \approx 3.084$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{7} = 2.3291$
9	$2^{\frac{128}{72}} \approx 3.429$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{8} = 2.6281$
10	$2^{\frac{152}{80}} \approx 3.732$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{9} = 2.9655$
11	$2^{\frac{180}{88}} \approx 4.128$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{10} = 3.3462$
12	$2^{\frac{208}{96}} \approx 4.490$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{11} = 3.7758$
13	$2^{\frac{240}{104}} \approx 4.9509$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{12} = 4.2605$
14	$2^{\frac{272}{112}} \approx 5.384$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{13} = 4.8075$
15	$2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2^{\frac{240}{104}}}{A^2_{\frac{26}{14}}}\right)^{\frac{13}{15}} \approx 5.9253$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{14} = 5.4246$
16	$2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2^{\frac{272}{112}}}{A^2_{\frac{28}{15}}}\right)^{\frac{14}{16}} \approx 6.4439$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{15} = 6.121$
17	$2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{D_{\mathbb{K},15}}{A^2_{\frac{30}{16}}}\right)^{\frac{15}{17}} \approx 7.0827$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{16} = 6.9069$
18	$2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{D_{\mathbb{K},16}}{A^2_{\frac{32}{17}}}\right)^{\frac{16}{18}} \approx 7.7035$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{17} = 7.7936$
19	$2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{D_{\mathbb{K},17}}{A^2_{\frac{34}{18}}}\right)^{\frac{17}{19}} \approx 8.4585$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{18} = 8.7941$
20	$2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{D_{\mathbb{K},18}}{A^2_{\frac{36}{19}}}\right)^{\frac{18}{20}} \approx 9.201$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{19} = 9.9231$
21	$2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{D_{\mathbb{K},19}}{A^2_{\frac{38}{20}}}\right)^{\frac{19}{21}} \approx 10.095$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{20} = 11.197$
22	$2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{D_{\mathbb{K},20}}{A^2_{\frac{40}{21}}}\right)^{\frac{20}{22}} \approx 10.982$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{21} = 12.634$

Porém, podemos observar nesta tabela que a partir de $m = 18$, as constantes $D_{\mathbb{C},m}$, começam a ser melhores. Observemos ainda que, na prova do Teorema 3.2.1, as $D_{\mathbb{C},m}$ são definidas de forma recorrente. Isto nos leva a pensar que se mudássemos $D_{\mathbb{C},2} \approx 1.4142$ pela constante de Grothendieck $K_G \leq 1.4049$ (que sabemos ser válida para o caso complexo com $m = 2$), obteríamos melhores constantes, quiçá para algum $m < 18$. Melhor ainda, como $C_2 = 1.1284 \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} < K_G$, mudemos as "primeiras"$D_{\mathbb{C},m}$ pelas C_m, a procura de obter melhores constantes a partir de algum $m < 18$. Este foi o procedimento usado em [21, Theorem 3.2.] para obter melhores constantes no caso complexo.

Usaremos o seguinte lema simples:

Lema 3.3.1 *Seja* $m \in \{3,4,5,...\}$. *Se* $a \in \mathbb{R}^+$ *satisfaz*

$$a < \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-3},$$

então

$$\frac{2^{\frac{m+4}{2m}}}{\pi^{\frac{1}{m}}} a^{\left(\frac{-2}{m}\right)} < \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2.$$

Demonstração. Como $m \geq 3$, então

$$\frac{4-2m}{m} > \frac{16-7m}{2m}$$

e

$$2^{\frac{16-7m}{2m}} < \pi^{\frac{4-2m}{m}}.$$

Assim

$$2^{\frac{4-3m}{2m}+\frac{6-2m}{m}} < \pi^{\frac{1-m}{m}+\frac{3-m}{m}}.$$

Logo

$$2^{\frac{4-3m}{2m}} \frac{2^{\frac{2(3-m)}{m}}}{\pi^{\frac{3-m}{m}}} < \pi^{\frac{1-m}{m}},$$

e

$$2^{\frac{4-3m}{2m}} \left(\left(\frac{2}{\pi}\right)^{(m-3)}\right)^{\left(\frac{-2}{m}\right)} < \pi^{\frac{1-m}{m}}. \tag{3.18}$$

Aplicando a hipótese em (3.18) chegamos ao resultado. ■

Teorema 3.3.2 (Defant *et al.* (estimativas de Pellegrino e Seoane-Sepúlveda)) *Para todo inteiro positivo* m *e espaços de Banach complexos* $X_1,...X_m$,

$$\Pi^m_{\left(\frac{2m}{m+1};1\right)}(X_1,...,X_m;\mathbb{C}) = \mathcal{L}(X_1,...,X_m;\mathbb{C}) \text{ e } \pi_{\left(\frac{2m}{m+1};1\right)}(\cdot) \leq C_{\mathbb{C},m}\|\cdot\|$$

com

$$C_{\mathbb{C},m} = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1}, \text{ para } m = 2,3,4,5,6,7.$$

$$C_{\mathbb{C},m} = \frac{2^{\frac{m+2}{2m}}}{\pi^{\frac{1}{m}}}\left(\frac{1}{A^2_{\frac{2m-4}{m-1}}}\right)^{\frac{m-2}{m}} (C_{\mathbb{C},m-2})^{\frac{m-2}{m}} \text{ para } m > 7. \tag{3.19}$$

Em particular, se $8 \leq m \leq 14$,

$$C_{\mathbb{C},m} = \left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{m}}}\right) 2^{\frac{m+4}{2m}} (C_{\mathbb{C},m-2})^{\frac{m-2}{m}}. \tag{3.20}$$

Demonstração. Sabemos que para o caso $m = 1$,

$$\Pi^1_{(1,1)}(X_1;\mathbb{C}) = \mathcal{L}(X_1;\mathbb{C})$$

e, para o caso bilinear,

$$\Pi^2_{\left(\frac{4}{3},1\right)}(X_1,X_2;\mathbb{C}) = \mathcal{L}(X_1,X_2;\mathbb{C})$$

e $\pi_{(1;1)}(\cdot) \leq C_{\mathbb{C},1}\|\cdot\|$, onde $C_{\mathbb{C},1} = 1$, e $C_{\mathbb{C},2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

Para o caso m, vamos supor o resultado válido para $m-2$, e provar que se $U \in \mathcal{L}(X_1,...,X_m;\mathbb{C})$, então $U \in \Pi^2_{\left(\frac{2m}{m+1};1\right)}(X_1,...,X_m;\mathbb{C})$.

Seja N um inteiro positivo qualquer. Para cada $1 \leq k \leq m$ considere $x_1^{(k)}, ..., x_N^{(k)} \in X_k$ tais que

$$\left\| \left(x_j^{(k)} \right)_{j=1}^{N} \right\|_1^w \leq 1,$$

para $k = 1, ..., m$.

Novamente na notação do Teorema 2.4.1, escolha

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{2\,(m-2)}{(m-2)+1} = \frac{2m-4}{m-1}, \\ r_2 &= \frac{4}{3}, \\ \omega\,(r_1, r_2) &= \frac{2m}{m+1}, \\ f\,(r_1, r_2) &= \frac{m-2}{m}, \\ f\,(r_2, r_1) &= \frac{2}{m}, \\ q &= 2. \end{aligned}$$

Obtemos

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i_1,...,i_n=1}^{N} \left| U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m \right) \right|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \\ &\leq \left(\sum_{i_1,...,i_{m-2}=1}^{N} \left\| \left(U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m \right) \right)_{i_{m-1},i_m=1}^{N} \right\|_2^{r_1} \right)^{\frac{\frac{m-2}{m}}{r_1}} \left(\sum_{i_{m-1},i_m=1}^{N} \left\| \left(U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m \right) \right)_{i_1,...,i_{m-2}=1}^{N} \right\|_2^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{\frac{2}{m}}{r_2}}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Para o primeiro fator em (3.21) escrevemos $dt := dt_1, ..., dt_{m-2}$. Para cada i_{m-1}, i_m fixos temos, do Teorema 2.3.1,

$$\begin{aligned} &\sum_{i_1,...,i_{m-2}=1}^{N} \left\| \left(U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m \right) \right)_{i_{m-1},i_m=1}^{N} \right\|_2^{r_1} \\ &\leq \left(A_{2,r_1}^2 \right)^{r_1} \sum_{i_1,...,i_{m-2}=1}^{N} \left(\int_{I^2} \left| U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_{m-2}}^{m-2}, \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_{m-1}}(t_{m-1})\, x_{i_{m-1}}^{m-1}, \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}(t_m)\, x_{i_m}^m \right) \right|^{r_1} dt \right) \\ &= \left(A_{2,r_1}^2 \right)^{r_1} \int_{I^2} \left(\sum_{i_1,...,i_{m-2}=1}^{N} \left| U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_{m-2}}^{m-2}, \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_{m-1}}(t_{m-1})\, x_{i_{m-1}}^{m-1}, \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}(t_m)\, x_{i_m}^m \right) \right|^{r_1} \right) dt. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Usando o caso $m-2$ no integrando obtemos

$$\sum_{i_1,\ldots,i_{m-2}=1}^{N}\left|U\left(x_{i_1}^1,\ldots,x_{i_{m-2}}^{m-2},\sum_{i_m=1}^{N}r_{i_{m-1}}\left(t_{m-1}\right)x_{i_{m-1}}^{m-1},\sum_{i_m=1}^{N}r_{i_m}\left(t_m\right)x_{i_m}^{m}\right)\right|^{\frac{2m-4}{m-1}} \tag{3.23}$$

$$\leq\left(\pi_{\left(\frac{2m-4}{m-1},1\right)}\left(U\left(\cdot,\ldots,\cdot,\sum_{i_{m-1}=1}^{N}r_{i_{m-1}}\left(t_{m-1}\right)x_{i_{m-1}}^{m-1},\sum_{i_m=1}^{N}r_{i_m}\left(t_m\right)x_{i_m}^{m}\right)\right)\prod_{j=1}^{m-2}\left\|\left(x_{i_j}^{j}\right)_{i_j=1}^{N}\right\|_1^w\right)^{\frac{2m-4}{m-1}}$$

$$\leq\left(C_{\mathbb{C},m-2}\left\|U\left(\cdot,\ldots,\cdot,\sum_{i_{m-1}=1}^{N}r_{i_{m-1}}\left(t_{m-1}\right)x_{i_{m-1}}^{m-1},\sum_{i_m=1}^{N}r_{i_m}\left(t_m\right)x_{i_m}^{m}\right)\right\|\right)^{\frac{2m-4}{m-1}}$$

$$\leq\left(C_{\mathbb{C},m-2}\left\|U\right\|\left\|\sum_{i_{m-1}=1}^{N}r_{i_{m-1}}\left(t_{m-1}\right)x_{i_{m-1}}^{m-1}\right\|\left\|\sum_{i_m=1}^{N}r_{i_m}\left(t_m\right)x_{i_m}^{m}\right\|\right)^{\frac{2m-4}{m-1}}$$

$$\leq\left(C_{\mathbb{C},m-2}\left\|U\right\|\left\|\left(x_{i_{m-1}}^{m-1}\right)_{i_{m-1}=1}^{N}\right\|_1^w\left\|\left(x_{i_m}^{m}\right)_{i_m=1}^{N}\right\|_1^w\right)^{\frac{2m-4}{m-1}}$$

$$\leq\left(C_{\mathbb{C},m-2}\left\|U\right\|\right)^{\frac{2m-4}{m-1}}.$$

Assim, de (3.22) e (3.23), temos

$$\begin{aligned}&\sum_{i_1,\ldots,i_{m-2}=1}^{N}\left\|\left(U\left(x_{i_1}^1,\ldots,x_{i_m}^m\right)\right)_{i_{m-1},i_m=1}^{N}\right\|_2^{\frac{2m-4}{m-1}}\\&\leq\left(A_{2,\frac{2m-4}{m-1}}^{2}\right)^{\frac{2m-4}{m-1}}\int_{I^2}\left(C_{\mathbb{C},m-2}\left\|U\right\|\right)^{\frac{2m-4}{m-1}}dt\\&=\left(\left(A_{2,\frac{2m-4}{m-1}}^{2}\right)\left(C_{\mathbb{C},m-2}\left\|U\right\|\right)\right)^{\frac{2m-4}{m-1}}\end{aligned}$$

e portanto

$$\sum_{i_1,\ldots,i_{m-2}=1}^{N}\left\|\left(U\left(x_{i_1}^1,\ldots,x_{i_m}^m\right)\right)_{i_{m-1},i_m=1}^{N}\right\|_2^{\frac{2m-4}{m-1}}\leq\left(\left(A_{2,\frac{2m-4}{m-1}}^{2}\right)\left(C_{\mathbb{C},m-2}\left\|U\right\|\right)\right)^{\frac{2m-4}{m-1}}. \tag{3.24}$$

Para o segundo fator em (3.21) escrevemos $dt := dt_{m-1}, dt_m$. Para cada $i_1,\ldots,i_{m-2}$ fixos temos, do Teorema 2.3.1,

$$\sum_{i_{m-1},i_m=1}^{N}\left\|\left(U\left(x_{i_1}^1,\ldots,x_{i_m}^m\right)\right)_{i_1,\ldots,i_{m-2}=1}^{N}\right\|_2^{\frac{4}{3}} \tag{3.25}$$

$$\leq\left(A_{2,\frac{4}{3}}^{m-2}\right)^{\frac{4}{3}}\sum_{i_{m-1},i_m=1}^{N}\left(\int_{I^{m-2}}\left|U\left(\sum_{i_1=1}^{N}r_{i_1}\left(t_1\right)x_{i_1}^1,\ldots,\sum_{i_{m-2}=1}^{N}r_{i_{m-2}}\left(t_{m-2}\right)x_{i_{m-2}}^{m-2},x_{i_{m-1}}^{m-1},x_{i_m}^{m}\right)\right|^{\frac{4}{3}}dt\right)$$

$$=\left(A_{2,\frac{4}{3}}^{m-2}\right)^{\frac{4}{3}}\int_{I^{m-2}}\left(\sum_{i_{m-1},i_m=1}^{N}\left|U\left(\sum_{i_1=1}^{N}r_{i_1}\left(t_1\right)x_{i_1}^1,\ldots,\sum_{i_{m-2}=1}^{N}r_{i_{m-2}}\left(t_{m-2}\right)x_{i_{m-2}}^{m-2},x_{i_{m-1}}^{m-1},x_{i_m}^{m}\right)\right|^{\frac{4}{3}}\right)dt.$$

Usando o caso $m = 2$ no integrando, e procedendo como antes obtemos

$$\sum_{i_{m-1}, i_m = 1}^{N} \left| U \left(\sum_{i_1=1}^{N} r_{i_1}(t_1) x_{i_1}^1, ..., \sum_{i_{m-2}=1}^{N} r_{i_{m-2}}(t_{m-2}) x_{i_{m-2}}^{m-2}, x_{i_{m-1}}^{m-1}, x_{i_m}^m \right) \right|^{\frac{4}{3}} \tag{3.26}$$
$$\leq \left(C_{\mathbb{C},2} \|U\| \right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \|U\| \right)^{\frac{4}{3}}.$$

Assim, de (3.25) e (3.26), temos

$$\begin{aligned} &\sum_{i_{m-1}, i_m = 1}^{N} \left\| \left(U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right)\right)_{i_1, ..., i_{m-1}=1}^{N} \right\|_2^{\frac{4}{3}} \\ &\leq \left(A_{2,\frac{4}{3}}^{m-2} \right)^{\frac{4}{3}} \int_{I^{m-2}} \left(2^{\frac{1}{2}} \|U\| \right)^{\frac{4}{3}} dt \\ &= \left(A_{2,\frac{4}{3}}^{m-2} \right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \|U\| \right)^{\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{i_{m-1}, i_m = 1}^{N} \left\| \left(U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right)\right)_{i_1, ..., i_{m-1}=1}^{N} \right\|_2^{\frac{4}{3}} \leq \left(\left(A_{2,\frac{4}{3}}^{m-2} \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \|U\| \right)^{\frac{4}{3}}. \tag{3.27}$$

Assim, de (3.21), (3.24) e (3.27), temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i_1, ..., i_n = 1}^{N} \left| U\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m\right) \right|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} &\leq \left(\left(A_{2,\frac{2m-4}{m-1}}^{2} \right) C_{\mathbb{C},m-2} \|U\| \right)^{f(r_1,r_2)} \left(\left(A_{2,\frac{4}{3}}^{m-2} \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \|U\| \right)^{f(r_2,r_1)} \\ &= \left(\left(A_{2,\frac{2m-4}{m-1}}^{2} \right) C_{\mathbb{C},m-2} \|U\| \right)^{\frac{m-2}{m}} \left(\left(A_{2,\frac{4}{3}}^{m-2} \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \|U\| \right)^{\frac{2}{m}} \\ &\leq \left(\left(A_{2,\frac{2m-4}{m-1}}^{2} \right) C_{\mathbb{C},m-2} \|U\| \right)^{\frac{m-2}{m}} \left(\left(A_{2,\frac{4}{3}} \right)^{m-2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \|U\| \right)^{\frac{2}{m}} \\ &\overset{(2.11)}{\leq} \left(\left(A_{\frac{2m-4}{m-1}}^{-1} \right)^{2} C_{\mathbb{C},m-2} \right)^{\frac{m-2}{m}} \left(\left(A_{\frac{4}{3}}^{-1} \right)^{m-2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{2}{m}} \|U\| \\ &= \left(\left(A_{\frac{2m-4}{m-1}}^{-1} \right)^{2} C_{\mathbb{C},m-2} \right)^{\frac{m-2}{m}} \left(\left(2^{\frac{m-2}{4}} \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{2}{m}} \|U\| \\ &= \left(\left(A_{\frac{2m-4}{m-1}}^{-1} \right)^{2} C_{\mathbb{C},m-2} \right)^{\frac{m-2}{m}} \left(\left(2^{\frac{m+2}{4}} \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{2}{m}} \|U\| \\ &= \frac{2^{\frac{m+2}{2m}}}{\pi^{\frac{1}{m}}} \left(\frac{1}{A_{\frac{2m-4}{m-1}}^{2}} \right)^{\frac{m-2}{m}} \left(C_{\mathbb{C},m-2} \right)^{\frac{m-2}{m}} \|U\|. \end{aligned}$$

Como nos teoremas anteriores, usando [14], sabemos que $A_p = 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$, sempre que $p \leq 1,487$. Logo, para $m \in \{3, ..., 14\}$, temos

$$
\begin{aligned}
C_{\mathbb{C},m} &= \frac{2^{\frac{m+2}{2m}}}{\pi^{\frac{1}{m}}}\left(\frac{1}{A^2_{\frac{2m-4}{m-1}}}\right)^{\frac{m-2}{m}}(C_{\mathbb{C},m-2})^{\frac{m-2}{m}} = \frac{2^{\frac{m+2}{2m}}}{\pi^{\frac{1}{m}}}\left(\left(2^{\frac{m-1}{2m-4}-\frac{1}{2}}\right)^2\right)^{\frac{m-2}{m}}(C_{\mathbb{C},m-2})^{\frac{m-2}{m}} \\
&= \frac{2^{\frac{m+2}{2m}}}{\pi^{\frac{1}{m}}}\left(2^{\frac{1}{m-2}}\right)^{\frac{m-2}{m}}(C_{\mathbb{C},m-2})^{\frac{m-2}{m}} \\
&= \frac{2^{\frac{m+2}{2m}+\frac{1}{m}}}{\pi^{\frac{1}{m}}}(C_{\mathbb{C},m-2})^{\frac{m-2}{m}} \\
&= \frac{2^{\frac{m+4}{2m}}}{\pi^{\frac{1}{m}}}(C_{\mathbb{C},m-2})^{\frac{m-2}{m}}.
\end{aligned}
$$

Porém, para $m = 3$ obtemos

$$C_{\mathbb{C},3} = \frac{2^{\frac{7}{6}}}{\pi^{\frac{1}{3}}}(C_{\mathbb{C},1})^{\frac{1}{3}} = \frac{2^{\frac{7}{6}}}{\pi^{\frac{1}{3}}}(1)^{\frac{1}{3}} = \frac{2^{\frac{7}{6}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} \approx 1.5328$$

e, por outro lado, sabemos que

$$C_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \approx 1.2732.$$

Certamente para o caso $m = 3$, convém adotar a constante $\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2$, pois esta é menor. Fazemos

$$C_{\mathbb{C},3} = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2.$$

Se continuamos calculando e comparando, obteremos a seguinte tabela:

m	$\overline{C}_{\mathbb{C},m-2} = \frac{2^{\frac{m+4}{2m}}}{\pi^{\frac{1}{m}}}(C_{m-2})^{\frac{m-2}{m}}$	$C_{\mathbb{C},m-2} = \frac{2^{\frac{m+4}{2m}}}{\pi^{\frac{1}{m}}}(C_{\mathbb{C},m-2})^{\frac{m-2}{m}}$	$C_m = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1}$. [8] e [27].
2	1.4367	1.4367	1.4367
3	$\frac{2^{\frac{7}{6}}}{\pi^{\frac{1}{3}}}(C_1)^{\frac{1}{3}} = 1.5328$	$\frac{2^{\frac{7}{6}}}{\pi^{\frac{1}{3}}}(C_{\mathbb{C},1})^{\frac{1}{3}} = 1.5328$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 1.2732$
4	$\frac{2^{\frac{8}{8}}}{\pi^{\frac{1}{4}}}(C_2)^{\frac{2}{4}} = 1.5958$	$\frac{2^{\frac{8}{8}}}{\pi^{\frac{1}{4}}}(C_{\mathbb{C},2})^{\frac{2}{4}} = 1.5958$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^3 = 1.4367$
5	$\frac{2^{\frac{9}{10}}}{\pi^{\frac{1}{5}}}(C_3)^{\frac{3}{5}} = 1.7157$	$\frac{2^{\frac{9}{10}}}{\pi^{\frac{1}{5}}}(C_{\mathbb{C},3})^{\frac{3}{5}} = 1.9177$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^4 = 1.6211$
6	$\frac{2^{\frac{10}{12}}}{\pi^{\frac{1}{6}}}(C_4)^{\frac{4}{6}} = 1.8746$	$\frac{2^{\frac{10}{12}}}{\pi^{\frac{1}{6}}}(C_{\mathbb{C},4})^{\frac{4}{6}} = 2.0106$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^5 = 1.8293$
7	$\frac{2^{\frac{11}{14}}}{\pi^{\frac{1}{7}}}(C_5)^{\frac{5}{7}} = 2.0671$	$\frac{2^{\frac{11}{14}}}{\pi^{\frac{1}{7}}}(C_{\mathbb{C},5})^{\frac{5}{7}} = 2.3307$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^6 = 2.0641$
8	$\frac{2^{\frac{12}{16}}}{\pi^{\frac{1}{8}}}(C_6)^{\frac{6}{8}} = 2.2927$	$\frac{2^{\frac{12}{16}}}{\pi^{\frac{1}{8}}}(C_{\mathbb{C},6})^{\frac{6}{8}} = 2.4611$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^7 = 2.3291$
9	$\frac{2^{\frac{13}{18}}}{\pi^{\frac{1}{9}}}(C_7)^{\frac{7}{9}} = 2.5525$	$\frac{2^{\frac{13}{18}}}{\pi^{\frac{1}{9}}}(C_{\mathbb{C},7})^{\frac{7}{9}} = 2.8054$	$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^8 = 2.6281$

Então, com o objetivo de melhorar as nossas constantes (as da coluna no meio), escolhemos $C_{\mathbb{C},m} = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1}$, para $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ e para todo $m \geq 8$,

$$C_{\mathbb{C},m} = \frac{2^{\frac{m+4}{2m}}}{\pi^{\frac{1}{m}}}(C_{\mathbb{C},m-2})^{\frac{m-2}{m}}.$$

Para concluir a demonstração, afirmamos que

$$C_{\mathbb{C},m} = \frac{2^{\frac{m+4}{2m}}}{\pi^{\frac{1}{m}}}(C_{\mathbb{C},m-2})^{\frac{m-2}{m}} < \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1}$$

para todo $m \geq 8$.

A prova da afirmação é por indução. Para $m = 8, 9$, temos da tabela

$$\frac{2^{\frac{12}{16}}}{\pi^{\frac{1}{8}}} (C_{\mathbb{C},6})^{\frac{6}{8}} = \frac{2^{\frac{12}{16}}}{\pi^{\frac{1}{8}}} (C_6)^{\frac{6}{8}} = 2.2927 < 2.3291 = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{7}, \text{ e}$$
$$\frac{2^{\frac{13}{18}}}{\pi^{\frac{1}{9}}} (C_{\mathbb{C},7})^{\frac{7}{9}} = \frac{2^{\frac{13}{18}}}{\pi^{\frac{1}{9}}} (C_7)^{\frac{7}{9}} = 2.5525 < 2.6281 = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{8}.$$

Para o caso m, suponhamos certo para $m-2$ e verifiquemos que

$$\frac{2^{\frac{m+4}{2m}}}{\pi^{\frac{1}{m}}} (C_{\mathbb{C},m-2})^{\frac{m-2}{m}} < \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1}.$$

Isso é facilmente verificado por indução, usando o Lema 3.3.1. ■

A seguir exibimos uma tabela comparativa para observar as constantes para o caso complexo:

m	$C_{\mathbb{C},m} = \frac{2^{\frac{m+2}{2m}}}{\pi^{\frac{1}{m}}} \left(\frac{(C_{\mathbb{C},m-2})}{A^2_{\frac{2m-4}{m-1}}}\right)^{\frac{m-2}{m}}$	$C_m = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{m-1}$ [8] e [27]	$C_m = 2^{\frac{m-1}{2}}$ [15]
8	≈ 2.2927	≈ 2.3290	≈ 11.3137
9	≈ 2.5525	≈ 2.6280	$= 16$
10	≈ 2.8137	≈ 2.9654	≈ 22.6274
11	≈ 3.1119	≈ 3.3461	$= 32$
12	≈ 3.4171	≈ 3.7757	≈ 45.2548
13	≈ 3.7650	≈ 4.2605	$= 64$
14	≈ 4.1251	≈ 4.8074	≈ 90.5096
15	≈ 4.5350	≈ 5.4246	$= 128$
16	≈ 4.9625	≈ 6.1210	≈ 181.0193
17	≈ 5.4474	≈ 6.9068	$= 256$
18	≈ 5.9559	≈ 7.7935	$\approx 362,0386$
19	≈ 6.5307	≈ 8.7940	$= 512$
20	≈ 7.1361	≈ 9.9230	≈ 724.0773
21	≈ 7.8184	≈ 11.196	$= 1,024$
22	≈ 8.5395	≈ 12.634	$\approx 1,448.154$
23	≈ 9.3501	≈ 14.256	$= 2,048$
24	≈ 10.209	≈ 16.086	$\approx 2,896.309$
25	≈ 11.173	≈ 18.151	$= 4,096$
26	≈ 12.196	≈ 20.482	$\approx 5,792.618$
27	≈ 13.342	≈ 23.111	$= 8,192$
28	≈ 14.561	≈ 26.078	$\approx 11,585.23$
29	≈ 15.924	≈ 29.426	$= 16,384$
30	≈ 17.376	≈ 33.204	$\approx 23,170.47$
31	≈ 18.997	≈ 37.467	$= 32,768$
32	≈ 20.727	≈ 42.277	$\approx 46,340.95$
33	≈ 22.655	≈ 47.704	$= 65,536$
34	≈ 24.716	≈ 53.829	$\approx 92,681.90$
50	≈ 100	≈ 371.9	$\approx 23,726,566$
100	$\approx 7,761$	$\approx 155,973.5$	$\approx 7.96131459 \times 10^{14}$

Tanto na última linha, como na coluna da direita, usamos a vírgula como separador de mil.

3.4 Comportamento assintótico das constantes

O conteúdo da presente seção é baseado em resultados ainda não publicados de D. Pellegrino e J. Seoane-Sepúlveda. As estimativas obtidas por computador foram gentilmente fornecidas pelo Prof. J. Seoane-Sepúlveda.

Nesta seção pretendemos observar o comportamento assintótico das constantes de Bohnenblust–Hille obtidas nas seções anteriores para o caso real e complexo. Para isso fazemos os quocientes $\frac{C_{\mathbb{R},m}}{C_{\mathbb{R},m-2}}$ e $\frac{C_{\mathbb{C},m}}{C_{\mathbb{C},m-2}}$. Assim, para $m = 17, 18, ..., 24$ obtemos:

m	$\frac{C_{\mathbb{R},m}}{C_{\mathbb{R},m-2}}$	$\frac{C_{\mathbb{C},m}}{C_{\mathbb{C},m-2}}$
17	1.195327748	1.202966617
18	1.195470889	1.200187343
19	1.194247955	1.200269151
20	1.194394172	1.198162452
21	1.193438608	1.198307271
22	1.193580366	1.196660521
23	1.192814857	1.196833271
24	1.192949227	1.195514114

Como podemos observar, os quocientes comportam-se de forma alternada, isto é, crescem e decrescem alternadamente. Isto nos leva a separar os casos m é par e m ímpar, para poder apreciar melhor o comportamento dos quocientes. Obtemos a seguinte tabela:

m	$\frac{C_{\mathbb{R},m+1}}{C_{\mathbb{R},m-1}}$	$\frac{C_{\mathbb{R},2m+2}}{C_{\mathbb{R},2m}}$	$\frac{C_{\mathbb{C},2m+1}}{C_{\mathbb{C},2m-1}}$	$\frac{C_{\mathbb{C},2m+2}}{C_{\mathbb{C},2m}}$
11	1.192814857	1.192949227	1.196833271	1.195514114
12	1.19232356	1.192449333	1.19569673	1.194618355
13	1.191929066	1.192045934	1.194800955	1.193904224
14	1.191607218	1.191715363	1.194081904	1.193325268
15	1.191340898	1.191441067	1.1934955	1.192849291
16	1.191117894	1.191210636	1.19301077	1.192452859
17	1.190929099	1.191015079	1.192605229	1.192119033
18	1.190767853	1.190847758	1.192262463	1.191835319
19	1.190628855	1.19070307	1.191969929	1.19159173
20	1.190508318	1.190577325	1.191718366	1.191381238
21	1.190402767	1.190467259	1.191500104	1.191197998
22	1.190309983	1.190370317	1.19130966	1.191037442
23	1.190227937	1.190284418	1.191142439	1.19089589
24	1.190155008	1.190207962	1.190994779	1.19077047
25	1.190089898	1.190139635	1.190863741	1.190658832
26	1.190031323	1.190078264	1.19074671	1.19055897
27	1.189978608	1.19002289	1.190641923	1.190469233
28	1.189931052	1.189972736	1.190547781	1.190388275
29	1.189887782	1.189927374	1.190462669	1.19031519
30	1.189848398	1.189885813	1.190385561	1.190248592
31	1.189812536	1.189848027	1.190315571	1.190188118
32	1.189779531	1.189813242	1.19025159	1.19013271
33	1.189749383	1.189781465	1.190193243	1.19008213
34	1.189721508	1.189751993	1.190139623	1.190035468
35	1.189695844	1.189724993	1.190090391	1.189992712
36	1.189672158	1.18969984	1.190045075	1.18995308
37	1.189650082	1.189676596	1.190003101	1.189916502
38	1.189629707	1.189655128	1.189964379	1.189882725
39	1.189610701	1.189634902	1.18992842	1.189851116

Podemos ver que em todas as colunas os valores decrescem. Podemos ainda observar que a rapidez com que decrescem é cada vez menor, o que nos leva a pensar que vão convergir para algum valor. Suspeitamos que o valor para o qual convergem é: $\sqrt[4]{2} \approx 1.18920711500272106$.

Sabemos, do Teorema 3.3.2, que para as constantes no caso complexo,

$$\frac{C_{\mathbb{C},m}}{(C_{\mathbb{C},m-2})^{\frac{m-2}{m}}} = \frac{2^{(m+2)/(2m)}}{\pi^{1/m}} \cdot \left(\frac{1}{A^2_{\frac{2m-4}{m-1}}}\right)^{\frac{m-2}{m}}$$

Como

$$A_p = \sqrt{2}\left(\frac{\Gamma((p+1)/2)}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/p},$$

temos

$$\frac{C_{\mathbb{C},m}}{(C_{\mathbb{C},m-2})^{\frac{m-2}{m}}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{(m-3)/(2m)} \cdot 2^{3/(2m)} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3m-5}{2m-2}\right)^{(m-1)/m}}.$$

Usando a continuidade da função Gama, e sabendo que $\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, obtemos

$$\lim_m \frac{C_{\mathbb{C},m}}{C_{\mathbb{C},m-2}^{\frac{m-2}{m}}} = \lim_m \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{(m-3)/(2m)} \cdot 2^{3/(2m)}}{\Gamma\left(\frac{3m-5}{2m-2}\right)^{(m-1)/m}} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \cdot 2^0}{\Gamma(3/2)} = \sqrt{2}.$$

Com a ajuda do computador, o quociente $C_{\mathbb{C},m}/C_{\mathbb{C},m-2}$ foi estimado para valores de m ainda maiores.

Quociente para valores pares de m :

m	$C_{\mathbb{C},m}/C_{\mathbb{C},m-2}$
90	1.189740377355245
100	1.1896441400362776
150	1.1894103048624871
200	1.1893250962444895
250	1.189284484445071
300	1.1892619113916707
400	1.1892388951399333
450	1.1892325371219878
500	1.1892279336837004
$\downarrow$	$\downarrow$
∞	$2^{1/4} \approx 1.189207115$?

Quociente para valores ímpares de m :

m	$C_{\mathbb{C},m}/C_{\mathbb{C},m-2}$
81	1.189839918
91	1.189715208
101	1.18962454
151	1.189402677
201	1.189321124
251	1.189282069
301	1.189260294
401	1.189238029
451	1.189231865
501	1.189227397
$\downarrow$	$\downarrow$
∞	$2^{1/4} \approx 1.189207115$?

3.5 O Teorema de Defant–Popa–Schwarting

O resultado que dá nome à presente seção se assemelha a uma versão vetorial do Teorema de Bohnenblust–Hille. A demonstração é bastante parecida àquela do Teorema de Bohnenblust–Hille. Entretanto, preferimos chamar o resultado de Teorema de Defant–Popa–Schwarting, em homenagem aos seus autores.

Precisaremos de alguns resultados conhecidos da teoria dos operadores múltiplo somantes, a saber a Desigualdade de Kahane e uma versão general da Desigualdade 2.3.1:

Lema 3.5.1 (Desigualdade de Kahane) *Se X é um espaço de Banach e $0 < p, q < \infty$, então existe uma constante $K_{p,q} > 0$ para a qual*

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, x_k\right\|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq K_{p,q} \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, x_k\right\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

quaisquer que sejam as escolhas do número finito de vetores $x_1, ..., x_n \in X$.

Uma demonstração detalhada desta desigualdade pode ser encontrada em [9].

Apresentamos agora uma versão geral da Desigualdade 2.3.1, que é essencialmente conhecida no folclore da teoria:

Teorema 3.5.2 (Desigualdade de cotipo) *Seja Y um espaço de Banach com cotipo q, com $1 \leq r \leq q$ e seja $(y_{i_1 \ldots i_m})_{i_1,\ldots,i_m}^{N_1,\ldots,N_m}$ uma matriz em Y. Então*

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N_1,\ldots,N_m} \|(y_{i_1 \ldots i_m})\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq A_{q,r}^m (Y)\, \rho_r \left((y_{i_1 \ldots i_m})_{i_1,\ldots,i_m}^{N_1,\ldots,N_m} \right)$$

onde $A_{q,r}^m (Y) := C_q (Y)^m K_{r.2}^m$ e

$$\rho_r \left((y_{i_1 \ldots i_m})_{i_1,\ldots,i_m}^{N_1,\ldots,N_m} \right) := \left(\int_0^1 \ldots \int_0^1 \left\| \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N_1,\ldots,N_m} r_{i_1}(t_1) \ldots r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1 \ldots i_m} \right\|^r dt_1 \ldots dt_m \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução em m. Comecemos com o caso $m = 1$. Como Y tem cotipo q, temos

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \|y_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_q (Y)\, \rho_2 \left((y_i)_{i=1}^N \right)$$

e

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \|y_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_q (Y) \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{N} r_i (t)\, y_i \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

E, pela Desigualdade de Kahane,

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{N} r_i (t)\, y_i \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq K_{r,2} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{N} r_i (t)\, y_i \right\|^r dt \right)^{\frac{1}{r}},$$

e portanto temos

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \|y_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_q (Y)\, K_{r,2} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{N} r_i (t)\, y_i \right\|^r dt \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Vamos supor o resultado válido para $m - 1$. Note que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N_1,\ldots,N_m} \|(y_{i_1 \ldots i_m})\|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left[\sum_{i_1=1}^{N_1} \left(\left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N_2,\ldots,N_m} \|(y_{i_1 \ldots i_m})\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)^q \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Usando a hipótese de indução, temos

$$\left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N_2,\ldots,N_m} \|(y_{i_1 \ldots i_m})\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq A_{q,r}^{m-1} (Y)\, \rho_r \left((y_{i_1 \ldots i_m})_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N_2,\ldots,N_m} \right)$$

$$= C_q^{m-1} (Y)\, K_{r,2}^{m-1} \left(\int_{I^{m-1}} \left\| \sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N_2,\ldots,N_m} r_{i_2}(t_2) \ldots r_{i_m}(t_m)\, y_{i_1 \ldots i_m} \right\|^r dt_2 \ldots dt_m \right)^{\frac{1}{r}}$$

e portanto

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N_1,\ldots,N_m}\|(y_{i_1\ldots i_m})\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.28}$$

$$\leq C_q^{m-1}(Y)\,K_{r,2}^{m-1}\left(\sum_{i_1=1}^{N_1}\left(\int\limits_{I^{m-1}}\left\|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N_2,\ldots,N_m} r_{i_2}(t_2)\ldots r_{i_m}(t_m)\,y_{i_1\ldots i_m}\right\|^r dt_2\ldots dt_m\right)^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Como $\frac{q}{r}\geq 1$, usamos o Lema 2.1.1 para obter

$$\left(\sum_{i_1=1}^{N_1}\left(\int\limits_{I^{m-1}}\left\|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N_2,\ldots,N_m} r_{i_2}(t_2)\ldots r_{i_m}(t_m)\,y_{i_1\ldots i_m}\right\|^r dt_2\ldots dt_m\right)^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.29}$$

$$\leq \left[\int\limits_{I^{m-1}}\left(\sum_{i_1=1}^{N_1}\left\|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N_2,\ldots,N_m} r_{i_2}(t_2)\ldots r_{i_m}(t_m)\,y_{i_1\ldots i_m}\right\|^{r.\frac{q}{r}}\right)^{\frac{r}{q}} dt_2\ldots dt_m\right]^{\frac{1}{r}}.$$

De (3.28) e (3.29) segue que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N_1,\ldots,N_m}\|(y_{i_1\ldots i_m})\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C_q^{m-1}(Y)\,K_{r,2}^{m-1}\left[\int\limits_{I^{\ m-1}}\left(\sum_{i_1=1}^{N_1}\left\|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N_2,\ldots,N_m} r_{i_2}(t_2)\ldots r_{i_m}(t_m)\,y_{i_1\ldots i_m}\right\|^{q}\right)^{\frac{r}{q}}\right]^{\frac{1}{r}}$$

e, como Y tem cotipo q,

$$\left(\sum_{i_1=1}^{N_1}\left\|\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N_2,\ldots,N_m} r_{i_2}(t_2)\ldots r_{i_m}(t_m)\,y_{i_1\ldots i_m}\right\|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C_q(Y)\left(\int_0^1\left\|\sum_{i_1=1}^{N_1} r_{i_1}(t_1)\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N_2,\ldots,N_m} r_{i_2}(t_2)\ldots r_{i_m}(t_m)\,y_{i_1\ldots i_m}\right\|^2 dt_1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N_1,\ldots,N_m}\|(y_{i_1\ldots i_m})\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.30}$$

$$\leq C_q^{m-1}(Y)\,K_{r,2}^{m-1}\left[\int\limits_{I^{m-1}} C_q^r(Y)\left(\int_0^1\left\|\sum_{i_1=1}^{N_1} r_{i_1}(t_1)\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{N_2,\ldots,N_m} r_{i_2}(t_2)\ldots r_{i_m}(t_m)\,y_{i_1\ldots i_m}\right\|^2 dt_1\right)^{\frac{r}{2}}\right]^{\frac{1}{r}}$$

e, pela Desigualdade de Kahane,

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N_1,\ldots,N_m} r_{i_1}(t_1) r_{i_2}(t_2) \ldots r_{i_m}(t_m) y_{i_1\ldots i_m} \right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.31}$$
$$\leq K_{r,2} \left(\int_o^1 \left\| \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N_1,\ldots,N_m} r_{i_1}(t_1) r_{i_2}(t_2) \ldots r_{i_m}(t_m) y_{i_1\ldots i_m} \right\|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Logo, de (3.30) e (3.31) temos

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N_1,\ldots,N_m} \|(y_{i_1\ldots i_m})\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq C_q^{m-1}(Y) K_{r,2}^{m-1} C_q(Y) \left[\int_{I^{m-1}} K_{r,2}^r \int_o^1 \left\| \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N_1,\ldots,N_m} r_{i_1}(t_1) r_{i_2}(t_2) \ldots r_{i_m}(t_m) y_{i_1\ldots i_m} \right\|^r dt\right]^{\frac{1}{r}}$$

e, pelo Teorema de Fubini, obtemos

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N_1,\ldots,N_m} \|(y_{i_1\ldots i_m})\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_q^m(Y) K_{r,2}^m \left[\int_{I^m} \left\| \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N_1,\ldots,N_m} r_{i_1}(t_1) r_{i_2}(t_2) \ldots r_{i_m}(t_m) y_{i_1\ldots i_m} \right\|^r dt\right]^{\frac{1}{r}}.$$

■

Agora segue o resultado principal desta seção:

Teorema 3.5.3 (Teorema de Defant–Popa–Schwarting) *Considere ω, f como no Teorema 2.4.1. Seja $U \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; Y)$, com o cotipo de Y igual a q, e C_1,C_2 subconjuntos não vazios de $\{1, \ldots, m\}$, com $C_1 \cap C_2 = \varnothing$ e $C_1 \cup C_2 = \{1, \ldots, m\}$. Se $1 \leq r_1, r_2 < q$, e U é múltiplo $(r_1; 1)$-somante nas C_1 coordenadas e múltiplo $(r_2; 1)$-somante nas C_2 coordenadas, então U é múltiplo $(w(r_1, r_2); 1)$-somante, e*

$$\pi_{(w(r_1,r_2);1)}(U)$$
$$\leq \left(\sigma_1 \left\|U^{C_1} : X^{C_2} \to \Pi_{(r_1,1)}^{|C_1|}\left(X^{C_1}; Y\right)\right\|\right)^{f(r_1,r_2)} \left(\sigma_2 \left\|U^{C_2} : X^{C_1} \to \Pi_{(r_2,1)}^{|C_2|}\left(X^{C_2}; Y\right)\right\|\right)^{f(r_2,r_1)}$$

onde

$$\sigma_1 = A_{q,r_1}^{|C_2|}(Y),\ \sigma_2 = A_{q,r_2}^{|C_1|}(Y)\ ,$$

com $(A_{q,r_1}(Y))$ e $A_{q,r_2}(Y)$ como no Teorema 3.5.2.

Para dar uma prova deste teorema, precisamos do seguinte lema:

Lema 3.5.4 *Nas hipóteses do teorema anterior, o operador*

$$\begin{array}{llllll} U^{C_i}: & X^{\complement C_i} & \to & \Pi_{(r_i,1)}^{|C_i|}\left(X^{C_i}; Y\right), & \textit{dado por} & \\ & X^{\complement C_i} \ni x^{\complement C_i} & \mapsto & U^{C_i}\left(x^{\complement C_i}\right): & X^{C_i} \to & Y \\ & & & & x^{C_i} \mapsto & U(x_1, \ldots, x_m),\ \textit{com } x^{\complement C_i}\textit{, fixo,} \end{array}$$

é limitado na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X^{\complement C_i}, \Pi_{(r_i,1)}^{|C_i|}(X^{C_i};Y))}$ para $i = \{1, 2\}$.

Demonstração. Claramente o operador está bem definido. Vejamos que é $\left|\complement C_i\right|$-linear para $i = \{1, 2\}$. Sem perda da generalidade, vamos provar que U^{C_1} é $|C_2|$-linear. Suponhamos ainda que C_1 são as primeiras coordenadas. Seja $j \in C_2$, vejamos que para qualquer escalar α e x_j, $\hat{x}_j \in X_j$, temos

$$\begin{aligned}
& U^{C_1}\left(x_{|C_1|+1}, ..., \alpha x_j + \hat{x}_j, ..., x_m\right)\left(x^{C_1}\right) \\
& = U\left(x^{C_1}, x_{|C_1|+1}, ..., \alpha x_j + \hat{x}_j, ..., x_m\right) \\
& \overset{U \text{ é } m\text{-linear}}{=} \alpha U\left(x^{C_1}, x_{|C_1|+1}, ..., x_j, ..., x_m\right) + U\left(x^{C_1}, x_{|C_1|+1}, ..., \hat{x}_j, ..., x_m\right) \\
& = \alpha U^{C_1}\left(x_{|C_1|+1}, ..., x_j, ..., x_m\right)\left(x^{C_1}\right) + U^{C_1}\left(x_{|C_1|+1}, ..., \hat{x}_j, ..., x_m\right)\left(x^{C_1}\right)
\end{aligned}$$

para todo $x^{C_1} \in X^{C_1}$; logo

$$\begin{aligned}
U^{C_1}\left(x_{|C_1|+1}, ..., \alpha x_j + \hat{x}_j, ..., x_m\right) = \alpha U^{C_1}\left(x_{|C_1|+1}, ..., x_j, ..., x_m\right) + \\
U^{C_1}\left(x_{|C_1|+1}, ..., +\hat{x}_j, ..., x_m\right).
\end{aligned}$$

Assim U^{C_1} é $|C_2|$-linear. Em geral, U^{C_i} é $\left|\complement C_i\right|$-linear para $i = \{1, 2\}$.

Finalmente, U^{C_i} é contínuo pois, se

$$x_n^{\complement C_i} \overset{\|\cdot\|_{X^{\complement C_i}}}{\to} x^{\complement C_i},$$

e

$$U^{C_i}(x_n^{\complement C_i}) \overset{\pi_{(r_i,1)}(X^{C_i};Y)}{\to} v \in \Pi_{(r_i,1)}^{|C_i|}\left(X^{C_i}; Y\right),$$

como sabemos que

$$\left\|U^{C_i}(x_n^{\complement C_i})\right\|_{\mathcal{L}(X^{C_i};Y)} \leq \pi_{(r_i,1)}(U^{C_i}(x_n^{\complement C_i})),$$

temos que se $U^{C_i}(x_n^{\complement C_i})$ converge em $\pi_{(r_i,1)}(\cdot)$, então $U^{C_i}(x_n^{\complement C_i})$ converge em $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X^{C_i};Y)}$.

Como:

$$\begin{array}{lcl}
U^{C_i}(x_n^{\complement C_i})(x^{C_i}) & = & U(x^{C_i}, x_n^{\complement C_i}) \\
\downarrow & & \downarrow U \text{ contínuo} \\
v(x^{C_i}) & & U(x^{C_i}, x^{\complement C_i}),
\end{array}$$

temos que

$$U^{C_i}(x^{\complement C_i}) = v.$$

Pelo Teorema do Gráfico Fechado U^{C_i} é contínuo.

■

Agora, voltamos à demonstração do Teorema 3.5.3.

Demonstração. Seja N um inteiro positivo qualquer. Para cada $1 \leq k \leq m$ considere $x_1^{(k)}, ..., x_N^{(k)} \in X_k$ tais que

$$\left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^N\right\|_1^w \leq 1,$$

para $k = 1, ..., m$. Sem perda da generalidade, vamos supor que U é múltiplo $(r_1; 1)$-somante nas primeiras $|C_1|$ coordenadas e múltiplo $(r_2; 1)$-somante nas últimas $|C_2|$ coordenadas.

Na notação do Teorema 2.4.1, temos

$$\omega\left(r_1, r_2\right) = \frac{q^2\left(r_1 + r_2\right) - 2qr_1r_2}{q^2 - r_1r_2},$$

$$f\left(r_1, r_2\right) = \frac{q^2r_1 - qr_1r_2}{q^2\left(r_1 + r_2\right) - 2qr_1r_2}$$

e

$$f(r_2,r_1)=\frac{q^2r_2-qr_1r_2}{q^2(r_1+r_2)-2qr_1r_2}.$$

Note que se

$$A=\{(i_1,...,i_{|C_1|})\in\{1,...,N\}^{|C_1|}\}$$

e

$$B=\{(i_{|C_1|+1},...,i_m)\in\{1,...,N\}^{|C_2|}\}$$

temos, do Teorema 2.4.1,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{N}\left\|U\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m\right)\right\|^{\frac{q^2(r_1+r_2)-2qr_1r_2}{q^2-r_1r_2}}\right)^{\frac{q^2-r_1r_2}{q^2(r_1+r_2)-2qr_1r_2}}\\
&=\left(\sum_{(i,j)\in A\times B}a_{ij}^{\omega(r_1,r_2)}\right)^{\frac{1}{\omega(r_1,r_2)}}\\
&\leq\left(\sum_{i\in C_1}\|\beta_i\|_q^{r_1}\right)^{\frac{f(r_1,r_2)}{r_1}}\left(\sum_{j\in C_2}\|\alpha_j\|_q^{r_2}\right)^{\frac{f(r_2,r_1)}{r_2}}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1,...,i_m=1}^{N}\left\|U\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m\right)\right\|^{\omega(r_1,r_2)}\right)^{\frac{1}{\omega(r_1,r_2)}} &(3.32)\\
&\leq\left(\sum_{i_1,...,i_{|C_1|}=1}^{N}\left\|\left(U\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m\right)\right)_{i_{|C_1|+1},...,i_m=1}^{N}\right\|_q^{r_1}\right)^{\frac{f(r_1,r_2)}{r_1}}\\
&\cdot\left(\sum_{i_{|C_1|+1},...,i_m=1}^{N}\left\|\left(U\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m\right)\right)_{i_1,...,i_{|C_1|}=1}^{N}\right\|_q^{r_2}\right)^{\frac{f(r_2,r_1)}{r_2}}.
\end{aligned}$$

Para o primeiro fator em (3.32) escrevemos $dt:=dt_{|C_1|+1},...,dt_m$. Para cada $i_1,...,i_{|C_1|}$ fixos, temos, do Teorema 3.5.2,

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(U\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m\right)\right)_{i_{|C_1|+1},...,i_m=1}^{N}\right\|_q^{r_1}\\
&\leq\left(A_{q,r_1}^{|C_2|}(Y)\right)^{r_1}\int_{I^{|C_1|}}\left\|\sum_{i_{|C_1|+1},...,i_m=1}^{N}r_{i_{|C_1|+1}}\left(t_{|C_1|+1}\right)...r_{i_m}(t_m)\,U\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_m}^m\right)\right\|^{r_1}dt\\
&=\left(A_{q,r_1}^{|C_2|}(Y)\right)^{r_1}\int_{I^{|C_1|}}\left\|U\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_{|C_1|}}^{|C_1|},\sum_{i_{|C_1|+1}=1}^{N}r_{i_{|C_1|+1}}\left(t_{|C_1|+1}\right)x_{i_{|C_1|+1}}^{|C_1|+1},...,\sum_{i_m=1}^{N}r_{i_m}(t_m)\,x_{i_m}^m\right)\right\|^{r_1}dt.
\end{aligned}$$

Somando em $i_1, ..., i_{|C_1|} = 1, ..., N$ obtemos

$$\sum_{i_1,...,i_{|C_1|}=1}^{N} \left\| \left(U \left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m \right) \right)_{i_{|C_1|+1},...,i_m=1}^{N} \right\|_q^{r_1} \tag{3.33}$$

$$\leq \sigma_1^{r_1} \sum_{i_1,...,i_{|C_1|}=1}^{N} \left(\int_{I^{|C_1|}} \left\| U \left(x^{C_1}, \sum_{i_{|C_1|+1}=1}^{N} r_{i_{|C_1|+1}} \left(t_{|C_1|+1} \right) x_{i_{|C_1|+1}}^{|C_1|+1}, ..., \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m} \left(t_m \right) x_{i_m}^m \right) \right\|^{r_1} dt \right)$$

$$= \sigma_1^{r_1} \int_{I^{|C_1|}} \left(\sum_{i_1,...,i_{|C_1|}=1}^{N} \left\| U \left(x^{C_1}, \sum_{i_{|C_1|+1}=1}^{N} r_{i_{|C_1|+1}} \left(t_{|C_1|+1} \right) x_{i_{|C_1|+1}}^{|C_1|+1}, ..., \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m} \left(t_m \right) x_{i_m}^m \right) \right\|^{r_1} \right) dt.$$

Como U é múltiplo $(r_1; 1)$-somante nas primeiras $|C_1|$ coordenadas,

$$\sum_{i_1,...,i_{|C_1|}=1}^{N} \left\| U \left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_{|C_1|}}^{|C_1|}, \sum_{i_{|C_1|+1}=1}^{N} r_{i_{|C_1|+1}} \left(t_{|C_1|+1} \right) x_{i_{|C_1|+1}}^{(|C_1|+1)}, ..., \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m} \left(t_m \right) x_{i_m}^m \right) \right\|_q^{r_1} \tag{3.34}$$

$$\leq \pi_{(r_1,1)} \left(U \left(\cdot, ..., \cdot, \sum_{i_{|C_1|+1}=1}^{N} r_{i_{|C_1|+1}} \left(t_{|C_1|+1} \right) x_{i_{|C_1|+1}}^{(|C_1|+1)}, ..., \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m} \left(t_m \right) x_{i_m}^m \right) \right)^{r_1} \prod_{k=1}^{|C_1|} \left\| \left(x_{i_k}^k \right)_{i_k=1}^{N} \right\|_1^w$$

$$\leq \pi_{(r_1,1)} \left(U \left(\cdot, ..., \cdot, \sum_{i_{|C_1|+1}=1}^{N} r_{i_{|C_1|+1}} \left(t_{|C_1|+1} \right) x_{i_{|C_1|+1}}^{(|C_1|+1)}, ..., \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m} \left(t_m \right) x_{i_m}^m \right) \right)^{r_1}$$

$$\leq \left\| U^{C_1} : X^{C_2} \to \Pi_{(r_1,1)}^{|C_1|} \left(X^{C_1}; Y \right) \right\|^{r_1} \left(\prod_{k=|C_1|+1}^{m} \left\| x_{i_m}^m \right\|_1^w \right)^{r_1}$$

$$\leq \left\| U^{C_1} : X^{C_2} \to \Pi_{(r_1,1)}^{|C_1|} \left(X^{C_1}; Y \right) \right\|^{r_1}.$$

Assim, de (3.34) e (3.33), temos

$$\begin{aligned} &\sum_{i_1,...,i_{|C_1|}=1}^{N} \left\| \left(U \left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m \right) \right)_{i_{|C_1|+1},...,i_m=1}^{N} \right\|_q^{r_1} \\ &\leq \left(A_{q,r_1}^{|C_2|} (Y) \right)^{r_1} \int_{I^{|C_1|}} \left\| U^{C_1} : X^{C_2} \to \Pi_{(r_1,1)}^{|C_1|} \left(X^{C_1}; Y \right) \right\|^{r_1} dt \\ &= \left(\left(A_{q,r_1}^{|C_2|} (Y) \right) \left\| U^{C_1} : X^{C_2} \to \Pi_{(r_1,1)}^{|C_1|} \left(X^{C_1}; Y \right) \right\| \right)^{r_1}. \end{aligned}$$

Logo

$$\left(\sum_{i_1,...,i_{|C_1|}=1}^{N} \left\| \left(U \left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m \right) \right)_{i_{|C_1|+1},...,i_m=1}^{N} \right\|_q^{r_1} \right)^{\frac{1}{r_1}} \leq A_{q,r_1}^{|C_2|} \left\| U^{C_1} : X^{C_2} \to \Pi_{(r_1,1)}^{|C_1|} \left(X^{C_1}; Y \right) \right\|. \tag{3.35}$$

Para o segundo fator em (3.32) fixe $i_{|C_1|+1}, ..., i_m$ e $dt = dt_1, ..., dt_{|C_1|}$ e procedemos analogamente para obter

$$\left(\sum_{i_{|C_1|+1},...,i_m=1}^{N} \left\| \left(U \left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_m}^m \right) \right)_{i_1,...,i_{|C_1|}=1}^{N} \right\|_q^{r_2} \right)^{\frac{1}{r_2}} \leq \left(A_{q,r_2}^{|C_1|} (Y) \right) \left\| U^{C_2} : X^{C_1} \to \Pi_{(r_2,1)}^{|C_2|} \left(X^{C_2}; Y \right) \right\|. \tag{3.36}$$

Logo, de (3.32), (3.35) e (3.36) temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{N}\left\|U\left(x_{i_1}^{1},...,x_{i_m}^{m}\right)\right\|^{\omega(r_1,r_2)}\right)^{\frac{1}{\omega(r_1,r_2)}}\\
&\leq\left(\left(A_{q,r_1}^{|C_2|}\left(Y\right)\right)\left\|U^{C_1}:X^{C_2}\to\Pi_{(r_1,1)}^{|C_1|}\left(X^{C_1};Y\right)\right\|\right)^{f(r_1,r_2)}\\
&\cdot\left(\left(A_{q,r_2}^{|C_1|}\left(Y\right)\right)\left\|U^{C_2}:X^{C_1}\to\Pi_{(r_2,1)}^{|C_2|}\left(X^{C_2};Y\right)\right\|\right)^{f(r_2,r_1)}.
\end{aligned}$$

■

Referências Bibliográficas

[1] H. Bauer, *Probability Theory and Elements of Measure Theory,* Academic Press, 1981.

[2] R. Blei, *Analysis in Integer and Fractional Dimensions,* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 71, Cambridge University Press, 2001.

[3] H. F. Bohnenblust, E. Hille, *On the absolute convergence of Dirichlet series,* Ann. of Math. (2) **32** (1931) 600-622.

[4] G. Botelho, C. Michels e D. Pellegrino, *Complex interpolation and summability properties of multilinear operators,* Rev. Matem. Complutense. **23** (2010), 139-161.

[5] G. Botelho and D. Pellegrino, *Coincidences for multiple summing mappings,* In: II ENAMA, 27–28,. João Pessoa, Brazil (2008).

[6] A. M. Davie, *Quotient algebras of uniform algebras,* J. London Math. Soc. **7** (1973), 31-40.

[7] A. Defant, D. Popa, U. Schwarting, *Coordinatewise multiple summing operators in Banach spaces,* J. Funct. Anal. **259** (2010), 220-242.

[8] A. Defant and P. Sevilla-Peris, *A new multilinear insight on Littlewood's 4/3-inequality,* J. Funct. Anal. **256** (2009), 1642-1664.

[9] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely summing operators,* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol 43, Cambridge University Press, 1995.

[10] A. Dvoretzky and C. A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed spaces,* Proc. Nat. Acad. Sci. USA **36** (1950), 192 -197.

[11] V. V. Favaro, *Tipo e cotipo de espaços de Banach e espaços L_p de Banach,* Dissertação de Mestrado, UNICAMP, 2005.

[12] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques,* Bol. Soc. Mat. São Paulo **8** (1956), 1-79.

[13] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiqueset espaces nucléaires,* Memoirs Acad. Math. Soc. 16, 1955.

[14] U. Haagerup, *The best constants in Khinchine inequality,* Studia Math. **70** (1982), 231-283.

[15] S. Kaijser, *Some results in the metric theory of tensor products,* Studia Math. **63** (1978), 157-170.

[16] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in L_p spaces and their applications,* Studia Math. **29** (1968), 276-326.

[17] J. E. Littlewood, *On bounded bilinear forms in an infinite number of variables,* Quart. J. Math., Oxford Ser. (1930) 164-174.

[18] M. C. Matos. *Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings,* Collect. Math. **54** (2003) 111-136.

[19] R. D. Mauldin, *The Scottish book,* Birkhauser, 1982.

[20] B. Mitjagin and A. Pełczyński, *Nuclear operators and approximative dimension,* Proc. of ICM, Moscow, 1966, 366-372.

[21] D. M. Pellegrino and J. B. Seoane-Sepulveda, *Some improvements on the constants for the real Bohnenblust–Hille inequality,* arXiv:1009.2717v3, 2010.

[22] D. Pérez-García, *The inclusion theorem for multiple summing operators,* Studia Math. **165** (2004), 275-290.

[23] D. Pérez-García, *Operadores multilineales absolutamente sumantes,* Tesis, 2003.

[24] A. Pietsch, *Ideals of multilinear functionals,* Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in theoretical Physics, 185-199, Teubner-Texte, Leipzig, 1983.

[25] A. Pietsch, *Absolut p–summierende Abbildungen in normieten Räumen,* Studia Math. **27** (1967), 333- 353

[26] D. Popa, *Reverse inclusions for multiple summing operators,* J. Math. Anal. Appl. **350** (2009), 360-368.

[27] H. Queffélec, *H. Bohr's vision of ordinary Dirichlet series; old and new results,* J. Anal. 3 (1995), 43-60. MR 1340125. Zbl 0881.11068.

[28] J. Santos, *Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes,* Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.

[29] R. L. Schilling, *Measures, Integrals and Martingales.* Cambridge University Press, 2005.

[30] D. M. Serrano-Rodríguez, *Resultados de coincidência para operadores multilineares múltiplo somantes,* Dissertação de Mestrado, UFPB, 2011.

[31] M. L. V. Souza, *Aplicações multilineares completamente absolutamente somantes,* Tese, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2003.

[32] T. G. Velanga, *O Teorema da Dominação de Pietsch Unificado,* Dissertação de Mestrado, UFPB, 2010.