Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Resultados de coincidência para operadores multilineares múltiplo somantes

Diana Marcela Serrano Rodríguez

2011

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Resultados de coincidência para operadores multilineares múltiplo somantes

por

Diana Marcela Serrano Rodríguez

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Junho de 2011
João Pessoa-PB

Resultados de coincidência para operadores multilineares múltiplo somantes

por

Diana Marcela Serrano Rodríguez

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho - UFCG

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB (suplente)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

S487r Serrano-Rodríguez, Diana Marcela.

Resultados de coincidência para operadores multilineares múltiplo somantes / Diana Marcela Serrano-Rodríguez.-- João Pessoa, 2011.

59f.

Orientador: Daniel Marinho Pellegrino

Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Operadores absolutamente somantes. 3. Operadores multilineares múltiplo somantes. 4. Resultados de coincidência. 5. Cotipo. 6. Resultados de inclusão.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Meu apoio e orgulho, Juvenal Serrano e Graciela Rodríguez
Minha constante companhia, Karen Tatiana Serrano Rodríguez
Meu coração, Ddaniel Núñez Alarcón.
É por vocês e para vocês.

Agradecimentos.

Agradeço a Deus, meu senhor, por me mostrar que sempre estou nas Suas mãos e por me dar todas as ferramentas para atingir este objetivo.

Aos meus pais, Graciela Rodríguez Serrano e Juvenal Serrano Rodríguez, por todo o apoio, carinho e dedicação em cada momento da minha vida.

Ao professor Daniel Marinho Pellegrino por ter me aceitado como sua orientanda, pela atenção, paciência e acompanhamento em cada passo desta dissertação. Ele é sem dúvida um exemplo de competência e dedicação nesta profissão.

Ao amor da minha vida, Ddaniel Núñez Alarcón, por sua companhia, apoio e amor que coloca em cada momento que compartilhamos. Ninguém melhor que ele para viver esta experiência. Eu te amo muito meu baby!

A minha familia toda que me acompanhou e apoiou na distancia, especialmente Tito, Inta, Don Hugo e a Sra Ana. Muito obrigada por me guardar nas suas orações.

Aos meus amigos que, na distância, comprenderam a minha ausência e souberam alentar meu estado de ânimo com sua constante motivação.

Aos colegas do mestrado e ao povo brasileiro em geral por me brindarem a fantástica oportunidade de conhecer mais sobre sua cultura e seus costumes. Especialmente a Ivaldo, karine e Yane.

A Luis Alberto Alba Sarria, um anjo em nossa chegada ao Brasil. Seu apoio e companhia foram muito importantes nos primeiros meses em João Pessoa.

Ao professor Arnoldo Teherán e sua familia, Mercaluz Hernández e Juliana Teherán; pessoas maravilhosas que me acompanharam e compartilharam seu lar em Campinas.

A Oscar Leonardo Cárdenas Fonseca, você simplesmente mudou a minha vida.

Ao profesor Uberlandio Batista e Jaime Alves, pela contribuição na melhora deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo apoio financeiro.

Resumo

No presente trabalho, estudamos algumas propriedades dos operadores multilineares múltiplo somantes. Fazemos um resumo da teoria com o objetivo de apresentar com detalhes resultados recentes de coincidência, inclusão e resultados envolvendo cotipo.

Palavras-Chave:
Operadores absolutamente somantes, operadores multilineares múltiplo somantes, resultados de coincidência, cotipo, resultados de inclusão.

Abstract

In this work, we present some properties of the class of multiple summing multilinear operators. We summarize the theory with the aim of showing in details recent results such as coincidence results, inclusion results and results involving cotype.

Key-Words:
Absolutely summing operators, multiple summing operators, coincidence results, cotype, inclusion results.

Sumário

Introdução

Existe em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita uma série incondicionalmente convergente que não é absolutamente convergente? Podemos dizer que esta pergunta, apresentada em 1935 no "Scotish Book", deu inicio à teoria dos operadores absolutamente somantes, pois foi sua demonstração (dada por A. Dvoretzky e C. A. Rogers em [18]) que chamou a atenção de Alexander Grothendieck, dando início aos primórdios da teoria dos operadores absolutamente somantes. Grothendieck, mediante dois trabalhos importantes, [20] onde apresenta uma demonstração diferente à que foi dada por Dvoretzky e Rogers, e [21], publicado em 1956, começou o que hoje é visto como a base da teoria dos operadores absolutamente somantes. No entanto foi, apenas nos anos 60 que esta classe foi devidamente introduzida e divulgada, mediante o trabalho de diferentes matemáticos como Pietsch [35], Pełczyński [24, 32] e Lindenstrauss em [24].

Já nos anos 80, Pietsch [33] esboça a teoria multilinear dos operadores absolutamente somantes. Em 1989, Alencar e Matos [1] introduzem um novo conceito, que chamou a atenção de vários autores, procurando outras noções que também estendessem a teoria linear para o contexto não-linear. Em 2003, D. Pérez-García [30] e M.C. Matos [25], independentemente, definem os operadores múltiplo somantes, que constituem uma classe que mantém, sob certo sentido, a essência da teoria linear. Desde então, os operadores múltiplo somantes tem sido estudados por diversos autores.

É no contexto dos operadores múltiplo somantes que baseamos este trabalho, onde estudamos propriedades importantes e diferentes resultados de coincidência desta teoria, isto é, quando a classe dos operadores multilineares contínuos em certos espaços de Banach coincidem com a classe dos operadores múltiplo somantes. Estudamos também resultados de inclusão e conexões com o conceito de cotipo.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

No primeiro capítulo, resumiremos a teoria dos operadores absolutamente somantes e sua relação com o cotipo dos espaços de Banach. Neste capítulo, faremos também um resumo das diferentes generalizações dos operadores absolutamente somantes, apresentadas por diferentes autores.

No Capítulo 2, introduzimos a definição dos operadores múltiplo somantes e provamos algumas propriedades desta teoria. Em seguida começamos a estudar os resultados de coincidência apresentados por D. Pellegrino e G. Botelho em [8] e algumas situações envolvendo o conceito de cotipo.

No Capítulo 3, focamos nosso estudo nos operadores múltiplo somantes em espaços l_1. Começaremos fazendo um breve resumo da teoria do produto tensorial com o objetivo de estudar os resultados de coincidência existentes nos espaços l_1. Terminaremos o capítulo mostrando alguns resultados de inclusão, onde o conceito de cotipo é de fundamental importância.

Notação e Terminologia

- Em todo este texto, $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Os espaços vetoriais sempre serão considerados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, a menos que se mencione algo em contrário.

- Usaremos o termo "operador" com o mesmo sentido de "função".

- Na maior parte deste texto, $E_i, F_i, X_i, Y_i, ...$ denotarão espaços de Banach. A norma de um espaço de Banach (ou normado) X será denotada por $\|\cdot\|$ ou $\|\cdot\|_X$. O símbolo B_X denotará a bola unitária fechada $\{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ de um espaço de Banach X.

- O dual (topológico) de um espaço de Banach X será denotado por X'.

- Denotamos por q' o conjugado de que q, isto é, $q' = \frac{q}{q-1}$.

Capítulo 1

Operadores absolutamente somantes

Johan Dirichet (1805-1859), matemático alemão, demonstrou que uma sequência de escalares é absolutamente somante precisamente quando é incondicionalmente somante, e mediante ajustes feitos nesta demonstração, estendeu-se este resultado para qualquer espaço normado de dimensão finita. Anos depois, com o nascimento do matemático polonês Stefan Banach (1892-1945), surge a seguinte propriedade: um espaço normado é Banach se, e somente se, toda sequência absolutamente somável é incondicionalmente somável.

Nesta direção, a seguinte questão foi apresentada em 1932 por Banach, em seu livro *"Théorie des opérations linéaires"*, assim: *"Existe em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita uma série incondicionalmente convergente que não é absolutamente convergente?"*

Esta pergunta foi respondida vários anos depois por A. Dvoretzky e C. A. Rogers. Mais precisamente, Dvoretzky e Rogers mostraram em [18] que *"Séries incondicionalmente convergentes coincidem com séries absolutamente convergentes se, e somente se, o espaço de Banach tem dimensão finita"*. Este resultado chamou então a atenção de Alexander Grothendieck (1928-), que começou a trabalhar em problemas relacionados, exibindo, inclusive, outra demonstração para esse resultado. Assim, mediante diferentes trabalhos apresentados, Grothendieck, em certo sentido, pode ser considerado como o criador da teoria dos operadores absolutamente somantes. Entretanto, a noção de operadores absolutamente somantes, em sua formulação moderna, é devida a A. Pietsch em [35] e a B. Mitiagin e A. Pełczyński em [26]. Em 1968, um trabalho célebre de A. Pełczyński e Lindestrauss em [24] tornou a teoria de operadores absolutamente somantes mais popular e mostrou aplicações à teoria dos espaços de Banach.

1.1 Operadores absolutamente somantes

Nesta seção, vamos exibir um breve panorama da teoria dos operadores absolutamente somantes. Esta é a base da teoria de operadores multilineares múltiplo somantes, que será estudada nos próximos capítulos.

Definição 1.1.1 *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e X um espaço de Banach. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é fortemente p-somável se $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty} \in l_p$.*

Denotamos por $l_p(X)$ o espaço vetorial de todas as sequências fortemente p-somáveis em X. Em $l_p(X)$ definimos

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se $p = \infty$ definimos

$$l_\infty(X) := \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}; \sup_n \|x_n\| < \infty\right\}$$
$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty := \sup_n \|x_n\|.$$

Proposição 1.1.2 *Se $1 \leq p \leq \infty$ e X é um espaço de Banach, $\left(l_p(X), \|\cdot\|_p\right)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Faremos o caso $p < \infty$.

Seja $\left(x^k\right)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $l_p(X)$; isto é, $x^k = \left(x_1^k, x_2^k, x_3^k, \ldots\right) \in l_p(X)$. Com isso, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, k' \geq N \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\|x_n^k - x_n^{k'}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|x^k - x^{k'}\right\|_p < \varepsilon.$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$k, k' \geq N \Rightarrow \left\|x_n^k - x_n^{k'}\right\| < \varepsilon$$

e, portanto, $\left(x_n^k\right)_{k=1}^{\infty}$ são todas sequências de Cauchy em X, o que implica que são convergentes, pois X é completo). Digamos que $\left(x_n^k\right)_{k=1}^{\infty}$ convirja para x_n, e seja $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Vamos mostrar que $x \in l_p(X)$. Para cada m natural, temos

$$k, k' \geq N \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{m} \left\|x_n^k - x_n^{k'}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Fazendo $k' \to \infty$, obtemos

$$k \geq N \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{m} \left\|x_n^k - x_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

Fazendo agora $m \to \infty$, temos

$$\left\|x^k - x\right\|_p < \varepsilon \tag{1.1}$$

para todo $k \geq N$. Logo,

$$x^{(N)} - x = \left(x_n^{(N)} - x_n\right)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X).$$

Como $x^{(N)} \in l_p(X)$, obtemos

$$x = x^{(N)} - \left(x^{(N)} - x\right) = \left(x_n^{(N)}\right)_{n=1}^{\infty} - \left(x_n^{(N)} - x_n\right)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X),$$

e, de (1.1), temos $\lim_{k\to\infty} x^k = x$. ∎

Em $l_p(X)$, as sequências $(x_1, x_2, , \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ serão identificadas com as sequências finitas $(x_1, x_2, , \dots, x_n)$. O conjunto formado por essas sequências forma um subespaço denso em $l_p(X)$. De fato, dados $\varepsilon > 0$ e $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Agora, é só escolher a sequência finita $x' = (x_1, x_2, , \dots, x_N)$, e daí

$$\left\|x - x'\right\|_p = \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Definição 1.1.3 *Sejam $1 \le p \le \infty$ e X um espaço de Banach. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é fracamente p-somável se $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty} \in l_p$ para todo $\varphi \in X'$.*

Denotamos por $l_p^w(X)$ o conjunto de todas as sequências fracamente p-somáveis. Veremos, a seguir, que uma norma natural em $l_p^w(X)$ é dada por

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p^w := \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.2}$$

Onde $B_{X'}$ denota a bola fechada unitária em X'

Se $p = \infty$, definimos

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty,w} = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \|(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}\|_{\infty}.$$

Proposição 1.1.4 *$\left(l_p^w(X), \|\cdot\|_p^w\right)$ é um espaço de Banach para $1 \le p \le \infty$ e X um espaço de Banach.*

Demonstração. Antes de mais nada, mostremos que essa norma está bem definida. Para isso, usaremos o Teorema do Gráfico Fechado (TGF). Seja $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p^w(X)$; considere a função

$$u : X' \longrightarrow l_p$$
$$u(\varphi) = (\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}.$$

É claro que u está bem definida e é linear. Suponha que

$$\begin{cases} \varphi_k \to \varphi \in X' \\ u(\varphi_k) \to z_0 \in l_p \end{cases}$$

Vamos mostrar que $z_0 = u(\varphi)$. Como $u(\varphi_k) \to z_0$, temos

$$\lim_{k\to\infty} \left(\varphi_k\left(x_n\right)\right)_{n=1}^{\infty} = z_0 = (z_j)_{j=1}^{\infty},$$

e portanto

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k\left(x_n\right) = z_n$$

para todo n natural. Como $\varphi_k \to \varphi$, temos

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k\left(x_n\right) = \varphi(x_n)$$

e, consequentemente,

$$z_n = \varphi(x_n)$$

para todo n. Logo $z_0 = u(\varphi)$ e o TGF garante que u é limitado. A limitação de u garante que

$$\sup_{\varphi\in B_{X'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_n\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

As propriedades de norma são verificadas sem dificuldades. Agora, só nos resta provar a completude. Seja $\left(x^k\right)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $l_p^w\left(X\right)$. Note que, para cada k, temos $x^k = \left(x_1^k, x_2^k, x_3^k, \ldots\right) \in l_p^w\left(X\right)$. Como $\left(x^k\right)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, k' \geq N \Rightarrow \left\|x^k - x^{k'}\right\|_p^w < \varepsilon.$$

Com isso, dado $\varphi \in B_{X'}$, temos

$$k, k' \geq N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_n^k - x_n^{k'}\right)\right|^p < \varepsilon^p \tag{1.3}$$

e, como cada termo dessa série é dominado por ε^p, segue que (para todo n),

$$k, k' \geq N \Rightarrow \left\|x_n^k - x_n^{k'}\right\| = \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left|\varphi\left(x_n^k - x_n^{k'}\right)\right| \leq \varepsilon.$$

Portanto, para cada n, $\left(x_n^k\right)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em X e, consequentemente, convergente. Denotaremos por x_n o limite de $\left(x_n^k\right)_{k=1}^{\infty}$ e seja $x = \left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$. Vamos mostrar que $x \in l_p^w\left(X\right)$. De fato, usando o mesmo artifício usado na demonstração da Proposição 1.1.2, fazendo $k' \to \infty$ em (1.3), obtemos

$$k \geq N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_n^k - x_n\right)\right|^p \leq \varepsilon^p, \text{ para todo } \varphi \in B_{X'}.$$

Isso nos permite concluir que $x - x^{(N)} \in l_p^w(X)$. Logo,

$$x = \left(x - x^{(N)}\right) + x^{(N)} \in l_p^w(X).$$

Além disso,

$$k \geq N \Rightarrow \left\|x^k - x\right\|_p^w \leq \varepsilon,$$

ou seja, $\lim_{k\to\infty} x^k = x$. Portanto, $l_p^w(X)$ é espaço de Banach. ■

Note que $l_p(X) \subset l_p^w(X)$. De fato, se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$, então

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p^w &= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi\|^p \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p .
\end{aligned}$$

Veja tambem que se $X = \mathbb{K}$ temos facilmente o seguinte resultado:

Proposição 1.1.5 *$l_p^w(\mathbb{K}) = l_p(\mathbb{K})$ e as normas coincidem.*

Demonstração. Basta lembrar que o dual $\mathbb{K}$ é o próprio $\mathbb{K}$. Nesse caso tomando $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}
\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p^w &= \sup_{\varphi \in B_{\mathbb{K}'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{|\varphi|=1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi . x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p .
\end{aligned} \tag{1.4}$$

■

É fácil ver que, quando temos um operador u linear contínuo entre espaços de Banach X e Y, este leva sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$ em sequências $(ux_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ e, analogamente, se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p^w(X)$ então $(ux_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p^w(Y)$. Em melhores termos, se $u : X \to Y$ é um operador linear limitado entre espaços de Banach, a correspondência

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \to (ux_n)_{n=1}^{\infty}$$

sempre induz um operador linear limitado $\hat{u}^s : l_p(X) \to l_p(Y)$, como também um operador linear limitado $\hat{u}^w : l_p^w(X) \to l_p^w(Y)$. Em ambos os casos, temos

$$\|\hat{u}^s\| = \|\hat{u}^w\| = \|u\|.$$

De fato, se $\hat{u}^s : l_p(X) \rightarrow l_p(Y)$, então

$$\|\hat{u}^s\| = \sup_{\left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_p \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|ux_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_p \leq 1} \|u\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u\|$$

e

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|ux\| = \sup_{\left\|(y_n)_{n=1}^{\infty} = (x,0,0,\ldots)\right\|_p \leq 1} \left\|\hat{u}^s\left((y_n)_{n=1}^{\infty}\right)\right\|_p \leq \|\hat{u}^s\|.$$

Logo, $\|\hat{u}^s\| = \|u\|$. Com um raciocínio similar, é fácil mostrar que $\|\hat{u}^w\| = \|u\|$. Assim podemos falar normalmente que u, um operador linear contínuo, leva "forte em forte" e "fraco em fraco". Como $l_p(X) \subset l_p^w(X)$, então temos tambem que u, um operador linear contínuo, leva "forte em fraco". E "fraco em forte"? Esta questão nos leva então ao nascimento da teoria dos operadores absolutamente somantes:

Definição 1.1.6 (Operador absolutamente somante) *Sejam $1 \leq p, q < \infty$ e $u : X \longrightarrow Y$ um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Dizemos que u é absolutamente $(p;q)$-somante (ou simplesmente $(p;q)$-somante) se existe um operador induzido*

$$\begin{array}{rll} \hat{u}: & l_q^w(X) & \rightarrow l_p(Y) \\ & (x_n)_{n=1}^{\infty} & \rightarrow (ux_n)_{n=1}^{\infty} \end{array}$$

Denotamos por $\prod_{p,q}(X;Y)$ o conjunto formado por todos os operadores $(p;q)$-somantes de X em Y. Quando $p = q$, escrevemos $\prod_p(X;Y)$ no lugar de $\prod_{p,q}(X;Y)$. Quando $p = 1$, dizemos simplesmente que o operador é absolutamente somante. O espaço vetorial de todos os operadores lineares contínuos de X em Y será denotado por $\mathcal{L}(X;Y)$.

É importante perceber que se $p < q$ então somente o operador nulo pode ser $(p;q)$-somante. De fato, é claro que podemos supor $X \neq \{0\}$. Como $p < q$, sempre podemos encontrar $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ em $l_q - l_p$. Então, para $0 \neq x \in X$, $(\lambda_k x)_{k=1}^{\infty} \in l_q^w(X)$. Suponhamos que exista $u \neq 0$ absolutamente $(p;q)$-somante. Logo, vendo o resultado a seguir, temos que existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(\lambda_k x)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(\lambda_k x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

para todo n natural. Assim,

$$\|u(x)\| \left(\sum_{k=1}^{k} |\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} |\varphi(x)| \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

isto é,

$$\|u(x)\| \left(\sum_{k=1}^{k} |\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \|x\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Tomando $\sup_{\|x\| \leq 1}$, obtemos

$$\|u\| \left(\sum_{k=1}^{k} |\lambda_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

e concluímos que $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p$ (absurdo).

Portanto, para evitar o caso trivial, neste capítulo vamos sempre supor que $p \geq q$. O próximo resultado caracteriza os operadores absolutamente $(p;q)$-somantes através de desigualdades:

Proposição 1.1.7 *Seja $u \in \mathcal{L}(X;Y)$. São equivalentes:*
(i) u é $(p;q)$-somante;
(ii) Existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.5}$$

para quaisquer $x_1, ..., x_n$ em X e n natural;
(iii) Existe $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q^w(X)$.
Denotamos por $\pi_{p,q}(u)$ o ínfimo dos K tais que a desigualdade (1.5) continua válida. Além disso, temos $\pi_{p,q}(u) = \|\hat{u}\|$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$. Suponha que u seja $(p;q)$-somante. Vamos mostrar que $\hat{u}$ tem gráfico fechado. De fato, suponha que $\left(x^k\right)_{k=1}^{\infty}$ convirja para $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $l_q^w(X)$ e que $\hat{u}\left(x^k\right)$ convirja para $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ em $l_p(Y)$. Como $\left(x^k\right)_{k=1}^{\infty}$ converge para $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, dado $\varepsilon > 0$, existe N natural tal que

$$k \geq N \Rightarrow \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_n^k - x_n\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left\|x^k - x\right\|_q^w < \varepsilon.$$

Assim, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_n^k - x_n\right)\right|^q < \varepsilon^q \text{ para todo } \varphi \in B_{X'}. \tag{1.6}$$

Como cada termo da série (1.6) é dominado por ε^q, segue que

$$k \geq N \Rightarrow \left\|x_n^k - x_n\right\| = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left|\varphi\left(x_n^k - x_n\right)\right| < \varepsilon$$

para todo n. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\left(x_n^k\right)_{k=1}^{\infty}$ converge para x_n em X. Como u é contínuo, segue que

$$\lim_{k \to \infty} u x_n^k = u x_n \tag{1.7}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $\left(\hat{u}\left(x^k\right)\right)_{k=1}^{\infty}$ converge para $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ em $l_p(Y)$, existe N' tal que

$$k \geq N' \Rightarrow \left\|\widehat{u} x^k - y\right\|_p < \varepsilon,$$

e portanto

$$k \geq N' \Rightarrow \left\| \left(u x_n^k \right)_{n=1}^{\infty} - (y_n)_{n=1}^{\infty} \right\|_p < \varepsilon,$$

ou ainda,

$$k \geq N' \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\| u x_n^k - y_n \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Consequentemente,

$$k \geq N' \Rightarrow \left\| u x_n^k - y_n \right\| < \varepsilon, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\lim_{k \to \infty} u x_n^k = y_n \tag{1.8}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e, de (1.7) e (1.8), temos

$$u x_n = y_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\widehat{u} x = (u x_n)_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty} = y.$$

Como $\hat{u}$ é linear, pelo Teorema do Gráfico Fechado segue que $\hat{u}$ é contínuo. Logo, para qualquer sequência finita $(x_j)_{j=1}^n$ em X, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n} \| u(x_k) \|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \| (u(x_k))_{k=1}^n \|_p = \| \hat{u} ((x_k)_{k=1}^n) \|_p \\ &\leq \| \hat{u} \| \, \| (x_k)_{k=1}^n \|_q^w = \| \hat{u} \| \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{n} | \varphi(x_k) |^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Note que de (1.9) temos

$$\pi_{p,q}(u) \leq \| \hat{u} \|.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Suponha que para quaisquer $x_1, ..., x_n$ em X e $n \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \| u(x_k) \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{n} | \varphi(x_k) |^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_q^w(X)$. Então,

$$\begin{aligned} \| (u(x_k))_{k=1}^{\infty} \|_p &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \| u(x_k) \|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} \| u(x_k) \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_n \left[K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{n} | \varphi(x_k) |^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] = K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} | \varphi(x_k) |^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} | \varphi(x_k) |^p \right)^{\frac{1}{q}} = K \| (x_n)_{n=1}^{\infty} \|_q^w. \end{aligned} \tag{1.10}$$

$(iii) \Rightarrow (i)$. Segue claramente de (iii) que $(u(x_n))_{n=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ sempre que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_q^w(X)$.

Note que

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\| &= \sup_{\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_q^w \leq 1} \|\hat{u}((x_n)_{n=1}^{\infty})\|_p = \sup_{\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_q^w \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|u(x_n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_q^w \leq 1} K \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_q^w = K. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Logo,

$$\|\hat{u}\| \leq \pi_{p,q}(u). \tag{1.12}$$

De (1.9) e (1.12) segue que $\pi_{p,q}(u) = \|\hat{u}\|$. ■

A seguir, veremos que $\pi_{p,q}(\cdot)$ é uma norma.

Proposição 1.1.8 $\left(\prod_{p,q}(X,Y), \pi_{p,q}(\cdot)\right)$ *é um espaço vetorial normado.*

Demonstração. Sejam $u, v \in \prod_{p,q}(X,Y)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Vamos mostrar que $u + \lambda v$ satisfaz (1.5).

Pela Proposição 1.1.7, temos

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(u) \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|v(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(v) \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

para qualquer escolha de $x_1, ..., x_m$ em X. A Desigualdade de Minkowski nos dá

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{m} \|(u + \lambda v)(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{m} \|v(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (\pi_{p,q}(u) + |\lambda| \pi_{p,q}(v)) \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Logo $u + \lambda v \in \prod_{p,q}(X,Y)$.

Sejam $u, v \in \prod_{p,q}(X,Y)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\pi_{p,q}(u) \geq 0$$

e

$$\pi_{p,q}(u) = 0 \Leftrightarrow \|\hat{u}\| = 0 \Leftrightarrow \hat{u} = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Além disso,

$$\pi_{p,q}(\lambda u) = \|\lambda \widehat{u}\| = |\lambda| \|\hat{u}\| = |\lambda| \pi_{p,q}(u)$$

De (1.13), podemos perceber que vale a desigualdade triangular, e daí segue que $\pi_{p,q}$ é uma norma. ■

Note que, como $\pi_{p,q}(u) = \|\widehat{u}\|$ e

$$\|\widehat{u}((x_k)_{k=1}^{\infty})\|_p \leq \|\widehat{u}\| \, \|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_q^w ,$$

temos

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(u) \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

e, portanto, o ínfimo $\pi_{p,q}(u)$ é assumido.

Observação 1.1.9 *Note que se* $u \in \prod_{p,q}(X,Y)$*, temos*

$$\|u\| \leq \pi_{p,q}(u).$$

De fato, tomando $n = 1$ *em (1.5), temos*

$$\|u\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \pi_{p,q}(u) \sup_{\varphi \in B_{X'}} |\varphi(x)| \leq \pi_{p,q}(u) \sup_{\|x\|\leq 1} \|x\| = \pi_{p,q}(u).$$

A seguir enunciamos alguns resultados clássicos da teoria de operadores absolutamente somantes. Para mais detalhes, sugerimos [16, Cap 1 e 2].

Teorema 1.1.10 (Grothendieck) *Todo operador linear contínuo de* l_1 *em* l_2 *é absolutamente somante e* $\pi_{1,1}(T) \leq K_G \|T\|$ *para cada* $T \in \mathcal{L}(l_1, l_2)$.

O Teorema de Grothendieck é fortemente baseado em uma desigualdade, conhecida como Desigualdade de Grothendieck, onde aparece a constante K_G (hoje conhecida como constante de Grothendieck). O valor exato de K_G não é conhecido, nem no caso real e nem tampouco no caso complexo. O próximo resultado é essencialmente uma recíproca do Teorema de Grothendieck:

Teorema 1.1.11 (Lindenstrauss-Pelczynski) *Se* E *e* F *são espaços de Banach de dimensão infinita,* E *tem base de Schauder incondicional e* $\prod_1(E;F) = \mathcal{L}(E;F)$ *então* $E = l_1$ *e* F *é um espaço de Hilbert.*

Teorema 1.1.12 (Teorema da Dominação de Pietsch) *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* $u : E \to F$ *um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Então* u *é absolutamente* p*-somante se, e somente se, existirem uma constante* C *e uma medida de probabilidade de Borel* μ *de* B_{E^*}*, com a topologia fraca estrela, tais que*

$$\|u(x)\| \leq C \left(\int_{B_{E^*}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $x \in E$.

Como consequência imediata do Teorema da Dominação de Pietsch temos o seguinte resultado:

Teorema 1.1.13 (Teorema de Inclusão) *Se* $1 \leq p \leq q < \infty$ *então*

$$\prod\nolimits_p \subset \prod\nolimits_q$$

Entretanto um resultado mais geral é válido. Faremos sua demonstração, pois, embora seja trabalhosa, é apenas uma aplicação da Desigualdade de Hölder.

Teorema 1.1.14 (Teorema de Inclusão generalizado) *Sejam X e Y espaços de Banach. Suponha que $1 \leq q_j \leq p_j < \infty$ $(j = 1, 2)$ satisfazem*

$$\begin{cases} q_1 \leq q_2 \\ p_1 \leq p_2 \\ \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{q_2} - \frac{1}{p_2}. \end{cases} \tag{1.14}$$

Então,

$$\prod\nolimits_{p_1,q_1}(X;Y) \subset \prod\nolimits_{p_2,q_2}(X;Y)$$

e, para cada $u \in \prod_{p_1,q_1}(X;Y)$, temos $\pi_{p_2,q_2}(u) \leq \pi_{p_1,q_1}(u)$.

Demonstração. Se $q_1 = q_2 = q$, então $\prod_{p_1,q}(X;Y) \subset \prod_{p_2,q}(X;Y)$. Isso é claro, pois nesse caso $l_{p_1}(Y) \subset l_{p_2}(Y)$.

Se $q_1 < q_2$ então $p_1 < p_2$. De fato, quando $q_1 < q_2$, temos

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \geq \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} > 0.$$

Sejam $1 < q, p < \infty$ dados por

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \text{ e } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}. \tag{1.15}$$

Sejam $u \in \prod_{p_1,q_1}(X;Y)$ e $x_1, ..., x_n$ em X, com $n \in \mathbb{N}$. Então, para

$$\lambda_k = \|ux_k\|^{p_2/p} \, (1 \leq k \leq n),$$

temos

$$\begin{aligned} \|u(\lambda_k x_k)\|^{p_1} &= \left\| u\left(\|ux_k\|^{p_2/p} x_k\right)\right\|^{p_1} \\ &= \left(\|ux_k\| \, \|ux_k\|^{p_2/p}\right)^{p_1} = \|ux_k\|^{(p_2p_1/p)+p_1} = \|ux_k\|^{p_2}. \end{aligned}$$

Como u é $(p_1; q_1)$-somante, então

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|ux_k\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} = \left(\sum_{k=1}^{n} \|u(\lambda_k x_k)\|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \pi_{p_1,q_1}(u) \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{q_1} |\varphi(x_k)|^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

e, como

$$\frac{1}{\frac{q}{q_1}} + \frac{1}{\frac{q_2}{q_1}} = 1,$$

pela Desigualdade de Hölder para os conjugados $\frac{q}{q_1}$ e $\frac{q_2}{q_1}$, segue que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}\|ux_k\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} &\leq \pi_{p_1,q_1}(u)\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k)|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}\\ &= \pi_{p_1,q_1}(u)\,\|(\lambda_k)_{k=1}^{n}\|_q\,\|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{q_2}^{w}.\end{aligned}$$

Como $p \leq q$, segue que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}\|ux_k\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} &\leq \pi_{p_1,q_1}(u)\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{q_2}^{w}\\ &= \pi_{p_1,q_1}(u)\left(\sum_{k=1}^{n}\|ux_k\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p}}\|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{q_2}^{w}.\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{p_2}=\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}$, obtemos

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|ux_k\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \pi_{p_1,q_1}(u)\,\|(x_k)_{k=1}^{n}\|_{q_2}^{w}.$$

Logo, $u \in \prod_{p_2,q_2}(X;Y)$ e $\pi_{p_2,q_2}(u) \leq \pi_{p_1,q_1}(u)$. ■

Teorema 1.1.15 (Teorema da Composição de Pietsch) *Se $p,q \in (1,\infty)$ e $r \in [1,\infty)$ são tais que $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, então*

$$\prod_q \circ \prod_p \subset \prod_r.$$

1.2 O cotipo e os operadores absolutamente somantes

O cotipo de um espaço de Banach tem um papel central na teoria de operadores lineares absolutamente somantes. A seguir, definimos cotipo e mostramos algumas de suas principais propriedades elementares.

As funções de Rademacher são dadas por

$$\begin{aligned} r_n &: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}\\ r_n(t) &:= sign\left(\sin 2^n\pi t\right).\end{aligned}$$

Se $0<n_1<n_2<\cdots<n_k$ e $p_1,...,p_k \geq 0$ são inteiros, então

$$\int_0^1 r_{n_1}^{p_1}(t)\cdot\ldots\cdot r_{n_k}^{p_k}(t)\,dt = \begin{cases} 1, & \text{se cada } p_j \text{ é par}\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

A propriedade acima garante, em particular, que as funções de Rademacher são ortogonais. Para mais detalhes veja [16]

Para entender um pouco o comportamento das funções Rademacher, apresentamos o seguinte gráfico

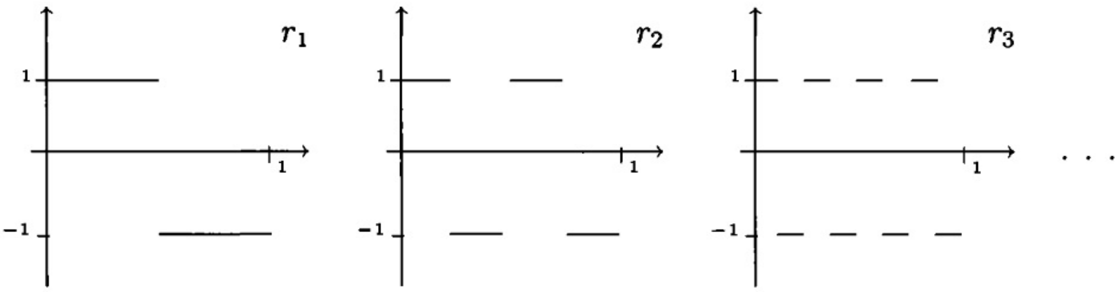

Figura 1.1: Funções Rademacher

Definição 1.2.1 ***(Cotipo)*** *Seja $2 \leq q \leq \infty$. Um espaço de Banach X tem cotipo q se existir uma constante $C > 0$ tal que, para qualquer escolha finita de vetores $x_1, ..., x_n \in X$,*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Quando $q = \infty$ substituímos $\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^q \right)^{\frac{1}{q}}$ por $\max_{1 \leq j \leq n} \|x_j\|$. O ínfimo das constantes C, é denotado por $C_q(X)$.

Os seguintes resultados estabelecem algumas propriedades básicas do conceito de cotipo, assim como o (menor) cotipo de alguns espaços de sequências clássicos e dos espaços de Hilbert.

Proposição 1.2.2 *Seja X um espaço de Banach.*

(a) Se X tem cotipo q, então X tem cotipo q' para todo $q' \geq q$.

(b) Se X é um espaço de Hilbert, então X tem cotipo 2.

Demonstração. *(a) Seja $q' \geq q$ e $x_1, ..., x_n \in X$. Pela monotonicidade das normas em l_k temos que*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Como X tem cotipo q, temos que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

para algum $C \geq 0$. Logo, X tem cotipo q'.

(b) Como X é um espaço de Hilbert e $x_1, ..., x_n \in X$, então sabemos que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} r_k(t)\, x_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k, \sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k \right\rangle$$

Então

$$\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\,x_k\right\|^2 dt = \int_0^1 \left(\left\langle \sum_{k=1}^n r_k(t)\,x_k, \sum_{k=1}^n r_k(t)\,x_k\right\rangle\right) dt$$
$$= \int_0^1 \left(\sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n r_{k_1}(t)\,r_{k_2}(t)\,\langle x_{k_1}, x_{k_2}\rangle\right) dt$$
$$= \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \langle x_{k_1}, x_{k_2}\rangle \int_0^1 r_{k_1}(t)\,r_{k_2}(t)\,dt$$
$$= \sum_{k=1}^n \langle x_k, x_k\rangle = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

Assim, sabemos que existe $C \geq 0$, *tal que* $\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\,x_k\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$.
Então X *tem cotipo* 2. ■

O cotipo dos espaços l_p é precisamente $\max\{p, 2\}$, isto é,

$$\min\{r;\ l_p \text{ tem cotipo } r\} = \max\{p, 2\}.$$

A seguir, mostramos este resultado para o caso $1 \leq p \leq 2$, mas primeiro enunciamos uma desigualdade usada na demonstração a seguir.

Lema 1.2.3 (Desigualdade de Khinchin) *Para todo* $0 < p < \infty$, *existem constantes* A_p *e* B_p *tais que, para toda sequência* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *em* l_2, *temos*

$$A_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposição 1.2.4 *Se* $1 \leq p \leq 2$, *então* l_p *tem cotipo* 2.

Demonstração. *Para cada* $k = 1, ..., n$ *vamos denotar* $x_k = (\xi_{k,i})_{i=1}^{\infty} \in l_p$. *Então,*

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\,x_k\right\|_{l_p}^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^n r_k(t)\,\xi_{k,i}\right|^p\right) dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^n r_k(t)\,\xi_{k,i}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.16}$$

Como $(\xi_{k,i})_{i=1}^{\infty} \in l_p$, *com* $1 \leq p \leq 2$, *então* $(\xi_{k,i})_{i=1}^{\infty} \in l_2$, *assim podemos usar a Desigualdade de Kinchin. Logo, existe* $\delta > 0$ *que satisfaz*

$$\delta^p\left(\sum_{k=1}^n |\xi_{k,i}|^2\right)^{\frac{p}{2}} \leq \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^n r_k(t)\,\xi_{k,i}\right|^p dt.$$

Logo

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\delta^{p}\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_{k,i}|^{2}\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}\int_{0}^{1}\left|\sum_{k=1}^{n}r_{k}(t)\,\xi_{k,i}\right|^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.17}$$
$$\overset{1.16}{=} \left(\int_{0}^{1}\left\|\sum_{k=1}^{n}r_{k}(t)\,x_{k}\right\|_{l_p}^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \left(\int_{0}^{1}\left\|\sum_{k=1}^{n}r_{k}(t)\,x_{k}\right\|_{l_p}^{2}dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por outro lado

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_{k,i}|^{2}\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_{k,i}|^{2.\frac{p}{p}}\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\left(|\xi_{k,i}|^{p}\right)_{k=1}^{n}\right\|_{l_{\frac{2}{p}}}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.18}$$
$$\geq \left(\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\left(|\xi_{k,i}|^{p}\right)_{k=1}^{n}\right\|_{l_{\frac{2}{p}}}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_{k,i}|^{p}\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_{k,i}|^{p}\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n}\|x_{k}\|_{l_p}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo, de (1.17) e (1.18) temos

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|x_{k}\|_{l_p}^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\delta}\left(\int_{0}^{1}\left\|\sum_{k=1}^{n}r_{k}(t)\,x_{k}\right\|_{l_p}^{2}dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo l_p tem cotipo 2. ■

O próximo teorema será muito útil nas demonstrações dos resultados principais deste trabalho. Mas, antes de apresentá-lo, precisaremos das seguintes desigualdades. A Desigualdade de Minkowski e a Desigualdade de Kahane, o leitor interessado pode encontrar sua demonstração em [38] e [16] respectivamente.

Lema 1.2.5 (Desigualdade de Minkowski para integrais) *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida sigma-finitos. Se $u : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ é $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$-mensurável então*

$$\left(\int_{X}\left(\int_{Y}|u(x,y)|\,\nu(dy)\right)^{p}\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{Y}\left(\int_{X}|u(x,y)|^{p}\,\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}}\nu(dy),$$

para todo $p \in [1, \infty)$, com a igualdade válida para $p = 1$.

Lema 1.2.6 (Desigualdade de Kahane) *Se X é um espaço de Banach e $0 < p, q < \infty$, então existe uma constante $K_{p,q} > 0$ para a qual*

$$\left(\int_{0}^{1}\left\|\sum_{k=1}^{n}r_{k}(t)\,x_{k}\right\|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq K_{p,q}\left(\int_{0}^{1}\left\|\sum_{k=1}^{n}r_{k}(t)\,x_{k}\right\|^{p}dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

quaisquer que sejam as escolhas do número finito de vetores $x_1, ..., x_n \in X$.

Teorema 1.2.7 *Sejam $2 \le q < \infty$ e $1 \le r \le q$. Se X tem cotipo q então, $L_r(\mu, X)$ tem cotipo q.*

Demonstração. Sejam $f_1, ..., f_n \in L_r(\mu, X)$. Usando a Desigualdade de Kahane, temos

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k\right\|_{L_r(\mu,X)}^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \le K_{2,r} \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k\right\|_{L_r(\mu,X)}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

donde

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k\right\|_{L_r(\mu,X)}^r dt\right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\int_0^1 \left(\int_\Omega \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k(\omega)\right\|_X^r d\mu(w)\right) dt\right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(\int_\Omega \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k(\omega)\right\|_X^r dt\right) d\mu(w)\right)^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

Usando novamente a Desigualdade de Kahane,

$$\begin{aligned}&\left(\int_\Omega \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k(\omega)\right\|_X^2 dt\right)^{\frac{r}{2}} d\mu(w)\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\le K_{r,2} \left(\int_\Omega \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k(\omega)\right\|_X^r dt\right) d\mu(w)\right)^{\frac{1}{r}}\end{aligned}$$

o que mostra que

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k\right\|_{L_r(\mu,X)}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\ge \frac{1}{K_{2,r}K_{r,2}} \left(\int_\Omega \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k(\omega)\right\|_X^2 dt\right)^{\frac{r}{2}} d\mu(w)\right)^{\frac{1}{r}}.\end{aligned} \tag{1.19}$$

Como X tem cotipo q, temos

$$\left(\sum_{k=1}^n \|f_k(\omega)\|_X^q\right)^{\frac{r}{q}} \le C_q^r(X) \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k(\omega)\right\|^2 dt\right)^{\frac{r}{2}}.$$

Substituindo em (1.19), segue que

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t) f_k\right\|_{L_r(\mu,X)}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \ge \frac{1}{K_{2,r}K_{r,2}C_q^r(X)} \left(\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^n \|f_k(\omega)\|_X^q\right)^{\frac{r}{q}} d\mu(w)\right)^{\frac{1}{r}}$$

e, usando a Desigualdade de Minkowski, o Lema 1.2.5, e considerando que $\frac{r}{q} \leq 1$, temos

$$\left(\int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{n} \| f_k(\omega) \|_X^q \right)^{\frac{r}{q}} d\mu(w) \right)^{\frac{1}{r}} \geq \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\int_{\Omega} \| f_k(\omega) \|_X^r \, d\mu(w) \right)^{\frac{q}{r}} \right)^{\frac{r}{q}} \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \| f_k \|_{L_r(\mu,X)}^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Logo

$$K_{2,r} K_{r,2} C_q^r(X) \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) f_k \right\|_{L_r(\mu,X)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \| f_k \|_{L_r(\mu,X)}^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Então, $L_r(\mu, X)$ tem cotipo q. ■

No seguinte lema queremos resaltar os items ii) e iv) os quais serão usados nos capítulos 2 e 3.

Lema 1.2.8 *Sejam X e Y espaços de Banach.*

(i) Para qualquer n natural e qualquer escolha finita de vetores $x_1, ..., x_n \in X$ a seguinte desigualdade é válida.

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j \right\| \leq \sup_{\varphi \in X'} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)| = \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_1^w$$

(ii) Se X tem cotipo $2 \leq q < \infty$ então toda sequência $l_1^w(X) \subset l_q(X)$. Mais precisamente, a função identidade $I : X \to X$ é $(q;1)$-somante e

$$\pi_{q;1}(I) \leq C_q(X).$$

(iii) Se o operador identidade de X é $(q;1)$-somante então

$$\Pi_{(q;1)}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y).$$

(iv) Se Y tem cotipo $2 \leq q < \infty$ então

$$\Pi_{(q;1)}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y).$$

e

$$\pi_{q;1}(u) \leq C_q(Y) \|u\|,$$

para todo $u \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Demonstração. *(i)* Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, ..., x_n \in X$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{n} r_j (t) x_j \right\| &= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left| \varphi \sum_{j=1}^{n} (r_j (t) x_j) \right| \\
&= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left| \sum_{j=1}^{n} r_j (t) \varphi (x_j) \right| \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j=1}^{n} |r_j (t)| |\varphi (x_j)| \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi (x_j)|
\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j (t) x_j \right\| \leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi (x_j)| .$$

(ii) Sabemos, por hipótese, que para qualquer escolha finita de vetores $x_1, ..., x_n \in X$ existe $C \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_k\|^q \right)^{\frac{1}{q}} &\leq C \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j (t) x_j \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.20) \\
&\leq C \left(\int_0^1 \sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j (t) x_j \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j (t) x_j \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C \sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j (t) x_j \right\| \\
&\overset{(i)}{\leq} C \left\| (x_j)_{j=1}^{n} \right\|_1^w
\end{aligned}$$

e portanto o operador identidade é $(q; 1)$-somante.

Sabemos que $C_q (X) = \inf\{C; C \text{ satisfaz } (1.20)\}$; então

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|I (x_j)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_q (X) \left\| (x_j)_{j=1}^{n} \right\|_1^w .$$

Como o operador I é $(q; 1)$-somante, segue então que

$$\pi_{q;1} (I) \leq C_q (X) .$$

(iii) Como o operador identidade é $(q;1)$-somante temos, pela Proposição 1.1.7,

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_{q;1}(I) \sup_{\varphi\in B_{X'}} \sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|$$

para quaisquer $x_1,...,x_n \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim, para $u \in \mathcal{L}(X,Y)$, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n}\|u(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\sum_{j=1}^{n}\|u\|^q\|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|u\|\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|u\|\,\pi_{q;1}(I) \sup_{\varphi\in B_{X'}} \sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|.\end{aligned}$$

Logo, $u \in \Pi_{(q;1)}(X,Y)$ e, portanto,

$$\Pi_{(q;1)}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\pi_{q;1}(u) &\leq \|u\|\,\pi_{q;1}(I) \\ &\leq \|u\|\,C_q(X).\end{aligned}$$

(iv) Se Y tem cotipo $2 \leq q < \infty$, por *(ii)* temos que a $I : Y \to Y$ é $(q;1)$-somante; logo se $u \in \mathcal{L}(X,Y)$, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n}\|u(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^{n}\|I(u(x_j))\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\overset{(ii)}{\leq} C_q(Y)\left\|(ux_j)_{j=1}^{n}\right\|_1^w \\ &= C_q(Y)\sup_{\|\varphi\|\leq 1}\sum_{j=1}^{n}|\varphi(ux_j)| \\ &= \|u\|\,C_q(Y)\sup_{\|\varphi\|\leq 1}\sum_{j=1}^{n}\left|\left(\varphi\circ\frac{u}{\|u\|}\right)(x_j)\right| \\ &\leq \|u\|\,C_q(Y)\sup_{\|\psi\|\leq 1}\sum_{j=1}^{n}|\psi(x_j)| \\ &= \|u\|\,C_q(Y)\left\|(x_j)_{j=1}^{n}\right\|_1^w.\end{aligned}$$

Logo $u \in \Pi_{(q;1)}(X,Y)$, isto é,

$$\Pi_{(q;1)}(X,Y) \supset \mathcal{L}(X,Y),$$

e portanto

$$\Pi_{(q;1)}(X,Y)=\mathcal{L}(X,Y).$$

Além disso, é claro que

$$\pi_{q;1}(u)\leq\|u\|\,C_q(Y).$$

■

Observação 1.2.9 *Da definição de cotipo, segue que se Y é subespaço de X e X tem cotipo q, então Y tem cotipo q e $C_q(Y)\leq C_q(X)$. Em particular, se X tem cotipo q, então $C_q(X)\leq C_q(l_r(X))$, sempre que $r\leq q$. De fato, como $r\leq q$, sabemos pelo Teorema 1.2.7 que $l_r(X)$ tem cotipo q. Além disso, sabemos que X é isometricamente isomorfo a um subespaço de $l_r(X)$. Portanto,*

$$C_q(X)\leq C_q(l_r(X)).$$

Os próximos dois resultados ilustram resultados de coincidência envolvendo cotipo:

Teorema 1.2.10 (Dubinsky, Pelczynski, Rosenthal, Maurey) *([16, pag. 223])Sejam Y um espaço de Banach com cotipo q e K um espaço de Hausdorff compacto.*

(a) Se $q=2$ então

$$\Pi_2(C(K);Y)=\mathcal{L}(C(K);Y).$$

(b) Se $2<q<\infty$ então

$$\Pi_{(q,p)}(C(K);Y)=\Pi_r(C(K);Y)=\mathcal{L}(C(K);Y)$$

para todo $p<q<r<\infty$.

Teorema 1.2.11 *([16, Corolário 11.16])Sejam X e Y espaços de Banach.*

(a) Se X tem cotipo 2 então $\Pi_2(X;Y)=\Pi_1(X;Y)$.
(b) Se X tem cotipo $2<q<\infty$, então $\Pi_r(X;Y)=\Pi_1(X;Y)$ para todo $1<r<q'$.
(c) Se X e Y têm cotipo 2 então $\Pi_r(X;Y)=\Pi_1(X;Y)$ para todo $1<r<\infty$.

1.3 Aplicações multilineares entre espaços de Banach

Antes de começarmos a trabalhar com os operadores multilineares múltiplo somantes, vamos fazer um pequeno resumo que envolve algumas propriedades sobre linearidade e continuidade em aplicações multilineares.

Definição 1.3.1 *Sejam $n\in\mathbb{N}$, $E_1,...,E_n,F$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que uma aplicação $A:E_1\times\cdots\times E_n\to F$ é $n-$linear (multilinear) se é linear em cada variável. Isto é, $A:E_1\times\cdots\times E_n\to F$ é n-linear se para todos $x_1\in E_1,...,x_n\in E_n$ e $i=1,...,n$, os operadores*

$$\begin{array}{rll} A_{(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)}: & E_i & \to F \\ & y & \mapsto A(x_1,...,x_{i-1},y,x_{i+1},....,x_n) \end{array}$$

são lineares.

Se $E_1, ..., E_n$ são espaços normados sobre $\mathbb{K}$, então $E_1 \times \cdots \times E_n$ é tambem um espaço normado considerando qualquer uma das normas naturais

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_{E_i},$$

$$\|x\|_p = \left(\|x_1\|_{E_i}^p + ... \|x_n\|_{E_n}^p \right)^{\frac{1}{p}}, (1 \leq p < \infty)$$

com $x = (x_1, ..., x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

O seguinte teorema mostra várias equivalências sobre a continuidade de uma aplicação multilinear.

Teorema 1.3.2 *Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $E_1, ..., E_n, F$ são espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é uma aplicação multilinear, então são equivalentes*
(a) A é contínua;
(b) A é contínua na origem;
(c) Existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|A(x_1, ..., x_n)\| \leq M \|x_1\| ... \|x_n\|$$

para qualquer $(x_1, ..., x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$;
(d) A é uniformemente contínua sobre subconjuntos limitados;
(e) A é limitada em toda bola de raio finito;
(f) A é limitada em alguma bola.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos o conjunto de todas as aplicações multilineares contínuas de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F por $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ e a aplicação

$$\begin{array}{rll} \|\cdot\| : & \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) & \to \mathbb{R} \\ & A & \mapsto \sup\{\|Ax\| ; x \in E_1 \times \cdots \times E_n, \|x\|_\infty \leq 1\} \end{array}$$

é uma norma em $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$.O espaço vetorial formado por todas as aplicações multilineares (não necessariamente contínuas) de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F é denotado por $L(E_1, ..., E_n; F)$.

Observação 1.3.3 *Geralmente, quando $E_1, ..., E_n, F$ são espaços normados sobre $\mathbb{K}$ não podemos afirmar que uma aplicação $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é contínua porque é contínua em cada variável, ao contrário da linearidade. Para afirmar isto, é preciso que $E_1, ..., E_n$ sejam espaços de Banach e F um espaço vetorial normado, neste caso temos então que $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é contínua se e somente se é contínua em cada variável .*

Os seguintes teoremas serão úteis no presente trabalho:

Teorema 1.3.4 (Teorema do Gráfico Fechado para Aplicações Multilineares) *Sejam $E_1, ..., E_n, F$ espaços de Banach e $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ uma aplicação multilinear de gráfico fechado, isto é, se $x_k^j \to x^j$ para $j = 1, ..., n$ e $A\left(x_k^1, ..., x_k^n\right) \to y$ implica que $y = A\left(x^1, ..., x^n\right)$. Então A é contínua.*

Teorema 1.3.5 (Teorema de Banach-Steinhaus para Aplicações Multilineares) *Sejam $E_1, ..., E_n$ espaços de Banach, F um espaço vetorial normado e $(A_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ tal que para cada $x_j \in E_j$ a sequência $(A_n(x_1, ..., x_n))_{m=1}^{\infty}$ é convergente. Se*

$$A(x_1, ..., x_n) = \lim_{m\to\infty} A_m(x_1, ..., x_n)$$

então $A \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$.

Corolário 1.3.6 *Se $n \in \mathbb{N}$ e F é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ é um espaço de Banach para quaisquer espaços normados $E_1, ..., E_n$.*

Para mais referências, sugerimos [4, 5, 19, 27].

1.4 Generalizações multilineares dos operadores absolutamente somantes

A classe dos operadores absolutamente somantes admite várias generalizações para o contexto multilinear. A seguir, listamos algumas dessas generalizações.

Definição 1.4.1 (Operadores multilineares dominados) *Se $p \geq 1$, um operador multilinear $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ é dito p-dominado ($T \in \mathcal{L}_{d,p}(E_1, ..., E_n; F)$) se $\left(T\left(x_j^1, ..., x_j^n\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in l_{\frac{p}{n}}(F)$ quando $\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(E_k)$.*

Os operadores multilineares dominados tem sua origem com A. Pietsch, na década de 80, e o termo "dominados" (aparentemente cunhado por M.C. Matos, alguns anos depois) é motivado pelo seguinte teorema de dominação:

Teorema 1.4.2 (Teorema de Dominação de Pietsch) *Um operador multilinear $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ é p-dominado se, e somente se, existem uma constante $C \geq 0$ e medidas de probabilidade μ_j nas σ-álgebras de Borel de $B_{E_j^{'}}$, $j = 1, ..., n$, munidas com as topologia fracas estrela, tais que*

$$\|T(x_1, ..., x_n)\| \leq C \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{B_{E_j^{'}}} |\varphi(x_j)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $x_j \in E_j$ e $j = 1, ..., n$.

O seguinte resultado mostra que a classe dos operadores multilineares dominados, sob certo sentido, é muito restritiva:

Teorema 1.4.3 (Jarchow, Palazuelos, Pérez-García, Villanueva, 2007) *([23]) Para todo $n \geq 3$, $p \geq 1$ e qualquer espaço de Banach de dimensão infinita E, existe $T \in \mathcal{L}(^nE;\mathbb{K})$ que não é p-dominado.*

Um conceito parecido é a noção de operadores multilineares semi-integrais, introduzidos por R. Alencar e M.C. Matos em 1989 (veja também [11]):

Definição 1.4.4 (*Operadores multilineares semi-integrais*) *Se $p \geq 1$, um operador multilinear $T \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ é p-semi-integral ($T \in \mathcal{L}_{si,p}(E_1,...,E_n;F)$) se existe $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\left\|T\left(x_j^1,...,x_j^n\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\sup_{(\varphi_1,...,\varphi_n)\in B_{E_1'}\times\cdots\times B_{E_n'}}\sum_{j=1}^{m}\left|\varphi_1\left(x_j^1\right)...\varphi_n\left(x_j^n\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, $x_j^l \in E_l$ com $l = 1,...,n$, e $j = 1,...,m$.

Não é difícil mostrar que $\mathcal{L}_{si,p}(E_1,...,E_n;F) \subset \mathcal{L}_{d,np}(E_1,...,E_n;F)$. De fato, se $T \in \mathcal{L}_{si,p}(E_1,...,E_n;F)$ então

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|T\left(x_j^1,...,x_j^n\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq C\left(\sup_{\varphi_l\in B_{E_l'},l=1,...,n}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi_1\left(x_j^1\right)...\varphi_n\left(x_j^n\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq C\sup_{\varphi_l\in B_{E_l'},l=1,...,n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi_1\left(x_j^1\right)\right|^{np}\right)^{\frac{1}{np}}...\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi_n\left(x_j^n\right)\right|^{np}\right)^{\frac{1}{np}}\\ &= C\left\|\left(x_j^1\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{np}^{w}...\left\|\left(x_j^n\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{np}^{w}.\end{aligned}$$

Como a classe dos operadores p-dominados é um tanto restritiva, a inclusão acima nos faz crer que a classe dos operadores semi-integrais também compartilha a mesma característica.

Assim como os operadores multilineares dominados, os operadores semi-integrais também têm um teorema de dominação (veja [1, 11]):

Teorema 1.4.5 *$T \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ é p-semi-integral se, e somente se, existem $C > 0$ e uma medida de probabilidade μ na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}\left(B_{E_1'}\times\cdots\times B_{E_n'}\right)$ de $B_{E_1'}\times\cdots\times B_{E_n'}$, munida com o produto das topologias fracas estrela $\sigma\left(E_l',E_l\right)$, $l = 1,...,n$, tais que*

$$\left\|T\left(x_1,...,x_n\right)\right\| \leq C\left(\int_{B_{E_1'}\times\cdots\times B_{E_n'}}\left|\varphi_1\left(x_1\right)...\varphi_n\left(x_n\right)\right|^p d\mu\left(\varphi_1,...,\varphi_n\right)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

No mesmo artigo em que é introduzido o conceito de operadores semi-integrais, Alencar e Matos tambem introduzem o conceito de operadores multilineares absolutamente somantes, embora este conceito tenha sido esboçado por Pietsch anos antes.

Definição 1.4.6 (Operadores multilineares absolutamente somantes) *Um operador multilinear* $T : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ *é absolutamente p-somante* $(T \in \mathcal{L}_{as,p}(E_1, ..., E_n; F))$ *se existir uma constante* $C \geq 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \left\| T\left(x_j^1, ..., x_j^n\right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{i=1}^{n} \left\| \left(x_j^i\right)_{j=1}^m \right\|_p^w$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, *e* $x_1^i, ..., x_m^i \in E_i$.

Esta classe foi explorada por diversos autores (veja, por exemplo, [1, 7, 29, 37]), mas, em certo sentido, se afasta bastante da essência do conceito linear. Por exemplo, esta classe é muito ampla no sentido em que admite resultados de coincidência sem o análogo linear; tem-se, por exemplo, que

$$\mathcal{L}_{as,1}\left({}^n l_1, F\right) = \mathcal{L}\left({}^n l_1, F\right)$$

para todo $n \geq 2$ e para todo F. Mas isto não é verdade para o caso $n = 1$.

Em 2003, V. Dimant [17] introduz mais uma generalização multilinear do conceito de operador absolutamente somante:

Definição 1.4.7 (*Operadores multilineares fortemente somantes*) *Se* $p \geq 1$, $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *é fortemente p-somante* $(T \in \mathcal{L}_{ss,p}(E_1, ..., E_n; F))$ *se existe uma constante* $C \geq 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \left\| T\left(x_j^1, ..., x_j^n\right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\sup_{\varphi \in B_{\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; \mathbb{K})}} \sum_{j=1}^{m} \left| \varphi\left(x_j^1, ..., x_j^n\right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, $x_j^l \in E_l$ *com* $l = 1, ..., n$, *e* $j = 1, ..., m$.

A classe dos operadores fortemente somantes apresenta várias características similares ao ideal de operadores absolutamente somantes, tais como um teorema do tipo Grothendieck, um teorema de dominação e um teorema do tipo Dvoretzky-Rogers. Para mais detalhes, sugerimos que o leitor veja [17]

Ainda em 2003, foram introduzidos os operadores múltiplo somantes, que serão discutidos e investigados nos próximos capítulos.

Capítulo 2

Operadores multilineares múltiplo somantes

Em 2003 Pérez-García [30] e M.C. Matos [25], de forma independente, apresentaram uma nova abordagem multilinear para os operadores absolutamente somantes, (os operadores múltiplo somantes). Esta nova classe de operadores passou a ser intensamente explorada e, desde então, é considerada como uma das extensões mais fiéis ao espírito linear.

2.1 Definições e propriedades básicas

Definição 2.1.1 (Operador múltiplo somante) *Sejam $1 \leq p_j \leq q < \infty$, $1 \leq j \leq n$. Uma aplicação multilinear $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ é **múltiplo** $(q; p_1, ..., p_n)$**-somante** se existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m_1,...m_n} \left\| T\left(x_{j_1}^1, ..., x_{j_n}^n\right) \right\|^q \right)^{1/q} \leq C \prod_{k=1}^{n} \left\| \left(x_j^k\right)_{j=1}^{m_k} \right\|_{p_k}^w \tag{2.1}$$

para cada escolha de sequências $\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{m_j}$ em E_j.

Se $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ é múltiplo $(q; p_1, ..., p_n)$-somante, escrevemos $T \in \Pi_{q;p_1,...,p_n}^n(E_1, ..., E_n; F)$, onde $\Pi_{q;p_1,...,p_n}^n(E_1, ..., E_n; F)$ denota a classe de tais operadores. O ínfimo dos C que satisfazem (2.1) é representado por $\pi_{q;p_1,...,p_n}(T)$.

Se $p_1 = ... = p_n = p$ dizemos que T é múltiplo $(q; p)$-somante, e escrevemos $T \in \Pi_{q;p}^n(E_1, ..., E_n; F)$; se $E_1 = ...E_n = E$, escrevemos simplesmente $\Pi_{q;p_1,...,p_n}^n(^nE; F)$, e se $F = \mathbb{K}$ escrevemos $\Pi_{q;p_1,...,p_n}^n(E_1, ..., E_n)$. Assim, as seguintes notações ficam óbvias:

$$\Pi_{q;p}^n(^nE; F);\ \Pi_{q;p}^n(E_1, ..., E_n);\ \Pi_{q;p}^n(^nE);\ \Pi_{q;p_1,...,p_n}^n(^nE);\ \Pi_p^n(E_1, ..., E_n).$$

É fácil ver que o conjunto $\Pi^n_{q;p_1,\dots,p_n}(E_1,...,E_n;F)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$. Com efeito, se $T_1,T_2 \in \Pi^n_{q;p_1,\dots,p_n}(E_1,...,E_n;F)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,\dots,j_n}^{m_1,\dots,m_n} \left\|T_1+\alpha T_2\left(x^1_{j_1},...,x^n_{j_n}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{j_1,\dots,j_n}^{m_1,\dots,m_n} \left\|T_1\left(x^1_{j_1},...,x^n_{j_n}\right)+\alpha T_2\left(x^1_{j_1},...,x^n_{j_n}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{j_1,\dots,j_n}^{m_1,\dots,m_n} \left\|T_1\left(x^1_{j_1},...,x^n_{j_n}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{j_1,\dots,j_n}^{m_1,\dots,m_n} \left\|\alpha T_2\left(x^1_{j_1},...,x^n_{j_n}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\overset{(2.1)}{\leq} C_1 \prod_{k=1}^n \left\|\left(x^k_j\right)_{j=1}^{m_k}\right\|^w_{p_k} + |\alpha|\, C_2 \prod_{k=1}^n \left\|\left(x^k_j\right)_{j=1}^{m_k}\right\|^w_{p_k} \\
&\leq C \prod_{k=1}^n \left\|\left(x^k_j\right)_{j=1}^{m_k}\right\|^w_{p_k}
\end{aligned}$$

Logo, $T_1+\alpha T_2 \in \Pi^n_{q;p_1,\dots,p_n}(E_1,...,E_n;F)$.

Proposição 2.1.2 *$\pi_{q;p_1,\dots,p_n}$ é uma norma em $\Pi^n_{q;p_1,\dots,p_n}(E_1,...,E_n;F)$.*

Demonstração. Sejam $\left(x^j_{i_j}\right)_{i_j=1}^{m_j} \subset E_j$, com $1 \leq j \leq n$ e $T \in \Pi^n_{q;p_1,\dots,p_n}(E_1,...,E_n;F)$. Se $\pi_{q;p_1,\dots,p_n}(T)=0$, então

$$\left(\sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{m_1,\dots m_n} \left\|T\left(x^1_{j_1},...,x^n_{j_n}\right)\right\|^q\right)^{1/q} \leq 0,$$

para quaisquer $m_1,...m_n$ e daí segue facilmente que $T=0$. Por outro lado, se T é o operador nulo, é claro que $\pi_{q;p_1,\dots,p_n}(T)=0$.

Vejamos agora que $\pi_{q;p_1,\dots,p_n}(\alpha T)=|\alpha|\,\pi_{q;p_1,\dots,p_n}(T)$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{m_1,\dots m_n} \left\|\alpha T\left(x^1_{j_1},...,x^n_{j_n}\right)\right\|^q\right)^{1/q} &= \left(\sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{m_1,\dots m_n} \left\|T\left(x^1_{j_1},...,x^k_{j_k},...,\alpha x^n_{j_n}\right)\right\|^q\right)^{1/q} \\
&\leq \pi_{q;p_1,\dots,p_n}(T)\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left\|\left(x^k_j\right)_{j=1}^{m_k}\right\|^w_{p_k}\right)\left\|\left(\alpha x^n_j\right)_{j=1}^{m_n}\right\|^w_{p_n} \\
&\leq |\alpha|\,\pi_{q;p_1,\dots,p_n}(T)\prod_{k=1}^n\left\|\left(x^k_j\right)_{j=1}^{m_k}\right\|^w_{p_k}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\pi_{q;p_1,\dots,p_n}(\alpha T) \leq |\alpha|\,\pi_{q;p_1,\dots,p_n}(T). \tag{2.2}$$

Por outro lado,

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m_1,...m_n}\left\|\alpha T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{1/q}=|\alpha|\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m_1,...m_n}\left\|T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{1/q}$$

e

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m_1,...m_n}\left\|\alpha T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{1/q}\leq\pi_{q;p_1,...,p_n}(\alpha T)\prod_{k=1}^{n}\left\|\left(x_j^k\right)_{j=1}^{m_k}\right\|_{p_k}^{w}.$$

Logo,

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m_1,...m_n}\left\|T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{1/q}\leq\frac{1}{|\alpha|}\pi_{q;p_1,...,p_n}(\alpha T)\prod_{k=1}^{n}\left\|\left(x_j^k\right)_{j=1}^{m_k}\right\|_{p_k}^{w}$$

Então,

$$\pi_{q;p_1,...,p_n}(T)\leq\frac{1}{|\alpha|}\pi_{q;p_1,...,p_n}(\alpha T)\tag{2.3}$$

e, portanto, de (2.2) e (2.3), obtemos

$$\pi_{q;p_1,...,p_n}(\alpha T)=|\alpha|\,\pi_{q;p_1,...,p_n}(T).$$

Resta-nos provar a desigualdade triangular. Note que se $T_1,T_2\in\Pi^n_{q;p_1,...,p_n}(E_1,...,E_n;F)$, então

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m_1,...m_n}\left\|(T_1+T_2)\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{1/q}\\&=\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m_1,...m_n}\left\|T_1\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)+T_2\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{1/q}\\&\leq\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m_1,...m_n}\left\|T_1\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{1/q}+\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m_1,...m_n}\left\|T_2\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{1/q}\\&\leq\left(\pi_{q;p_1,...,p_n}(T_1)+\pi_{q;p_1,...,p_n}(T_2)\right)\prod_{k=1}^{n}\left\|\left(x_j^k\right)_{j=1}^{m_k}\right\|_{p_k}^{w}.\end{aligned}$$

e, finalmente, temos

$$\pi_{q;p_1,...,p_n}(T_1+T_2)\leq\pi_{q;p_1,...,p_n}(T_1)+\pi_{q;p_1,...,p_n}(T_2).$$

■

É importante mencionar que em algumas demonstrações deste trabalho consideramos

$$\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m}\left\|T\left(x_{j_1}^1,...,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

em vez de

$$\left(\sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{m_1,\dots m_n}\left\|T\left(x_{j_1}^1,\dots,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{1/q}.$$

Neste caso, estamos tomando m como sendo o máximo dos $m_1,...,m_n$. Veja que esta mudança não afeta em sentido algum a condição de um operador ser múltiplo somante. Desde que,

$$\left(\sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{m_1,\dots m_n}\left\|T\left(x_{j_1}^1,\dots,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{1/q}=\left(\sum_{j_1=1}^{m_1}\sum_{j_2=1}^{m_2}\dots\sum_{j_n=1}^{m_n}\left\|T\left(x_{j_1}^1,\dots,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{1/q} \tag{2.4}$$

E se tomarmos $m=m_k=\max(m_1,...,m_n)$, para algum $k\in\{1,...,n\}$, temos

$$\left(\sum_{j_i=1}^{m_k}\left\|T\left(x_{j_1}^1,\dots,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\sum_{j_i=1}^{m_i}\left\|T\left(x_{j_1}^1,\dots,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{j_i=m_i+1}^{m_k}\left\|T\left(x_{j_1}^1,\dots,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

para qualquer $i\neq k$. Como

$$\left(\sum_{j_i=m_i+1}^{m_k}\left\|T\left(x_{j_1}^1,\dots,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}=0,$$

então

$$\left(\sum_{j_i=1}^{m_k}\left\|T\left(x_{j_1}^1,\dots,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\sum_{j_i=1}^{m_i}\left\|T\left(x_{j_1}^1,\dots,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Logo, em (2.4), obtemos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j_1=1}^{m_1}\dots\sum_{j_n=1}^{m_n}\left\|T\left(x_{j_1}^1,\dots,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{1/q}&=\left(\sum_{j_1=1}^{m_k}\dots\sum_{j_n=1}^{m_k}\left\|T\left(x_{j_1}^1,\dots,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{1/q}\\&=\left(\sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{m}\left\|T\left(x_{j_1}^1,\dots,x_{j_n}^n\right)\right\|^q\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Em termos mais precisos, a Definição 2.1.1 pode ser reescrita com um único m ao invés de $m_1,...,m_k$.

Como vimos nos operadores absolutamente somantes, podemos trabalhar com sequências tanto finitas como infinitas. A seguinte propriedade nos mostra que acontece o mesmo com os operadores múltiplo somantes:

Proposição 2.1.3 *Sejam $1\leq p_1,...,p_n\leq q<\infty$ e $T\in\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *T é múltiplo $(q;p_1,...,p_n)$-somante.*

(ii) *Para cada escolha de sequências* $\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty} \in l_{p_j}^w\left(E_j\right)$, *temos*

$$\left(T\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,...,i_n}^{\infty} \in l_q\left(\mathbb{N}^n;F\right).$$

Nesse caso, o operador multilinear associado

$$\hat{T}: l_{p_1}^w\left(E_1\right)\times\cdots\times l_{p_n}^w\left(E_n\right)\to l_q\left(\mathbb{N}^n;F\right)$$

dado por

$$\hat{T}\left(\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty},...,\left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right)=\left(T\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty}$$

é contínuo e

$$\left\|\hat{T}\right\|=\pi_{(q;p_1,...,p_n)}\left(T\right).$$

Demonstração. $(i)\Longrightarrow(ii)$ Se $\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty}\in l_{p_j}^w\left(E_j\right)$, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i_1,...,i_n}^{\infty}\left\|T\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_n}^n\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \sup_m\left(\sum_{i_1,...,i_n}^{m}\left\|T\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_n}^n\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \pi_{(q;p_1,...,p_n)}\left(T\right)\sup_m\left(\prod_{j=1}^n\left\|\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^m\right\|_{p_j}^w\right)\\ &= \pi_{(q;p_1,...,p_n)}\left(T\right)\left(\prod_{j=1}^n\left\|\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty}\right\|_{p_j}^w\right)<\infty.\end{aligned}$$

Para provarmos que $(ii)\Longrightarrow(i)$ é preciso notar que o operador $\hat{T}$, como foi definido, é contínuo. Seja $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}\subset l_{p_1}^w\left(E_1\right)\times\cdots\times l_{p_n}^w\left(E_n\right)$, com

$$(x_m)=\left(\left(x_{m,i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty},\left(x_{m,i_2}^2\right)_{i_2=1}^{\infty},...,\left(x_{m,i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right),$$

e

$$x_m\overset{m\to\infty}{\to}x\in l_{p_1}^w\left(E_1\right)\times\cdots\times l_{p_n}^w\left(E_n\right),$$

onde

$$x=\left(\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty},\left(x_{i_2}^2\right)_{i_2=1}^{\infty},...,\left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right).$$

Suponhamos ainda que

$$\hat{T}\left(x_m\right)\overset{m\to\infty}{\to}z\in l_q\left(\mathbb{N}^n;Y\right),$$

com $z=\left(z_{i_1},...,z_{i_n}\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty}$.Verifiquemos que

$$\hat{T}\left(x\right)=z,$$

isto é, que o operador $\hat{T}$ tem gráfico fechado e, portanto, é contínuo. (Veja o Teorema 1.3.4)

Como $x_m \overset{m\to\infty}{\to} x$, temos a convergência coordenada a coordenada, isto é,

$$\left(x_{m,i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty} \overset{m\to\infty}{\to} \left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty} \in l_{p_j}^w\left(E_j\right),$$

para cada $j \in \{1,...,n\}$. Assim, para cada j temos que, como $\left(x_{m,i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty}$ converge para $\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty}$, dado $\varepsilon > 0$, existe N natural tal que

$$k \geq N \Rightarrow \sup_{\varphi \in B_{E_j'}} \left(\sum_{i_j=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_{k,i_j}^j - x_{i_j}^j\right)\right|^{p_j}\right)^{\frac{1}{p_j}} = \left\|x_m^j - x^j\right\|_{p_j}^w < \varepsilon.$$

Com isso, obtemos

$$\sum_{i_j=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_{k,i_j}^j - x_{i_j}^j\right)\right|^{p_j} < \varepsilon^{p_j} \text{ para todo } \varphi \in B_{E_j'}. \tag{2.5}$$

Como cada termo da série (2.5) é dominado por ε^{p_j}, segue que

$$k \geq N \Rightarrow \left\|x_{k,i_j}^j - x_{i_j}^j\right\|_{E_j} = \sup_{\varphi \in B_{E_j'}} \left|\varphi\left(x_{k,i_j}^j - x_{i_j}^j\right)\right| < \varepsilon$$

para todo i_j. Logo,

$$x_{m,i_j}^j \overset{m\to\infty}{\to} x_{i_j}^j \in E_j,$$

para cada $j \in \{1,...,n\}$, para todo $i_j \in \mathbb{N}$ e assim

$$\left(x_{m,i_1}^1, x_{m,i_2}^2, ..., x_{m,i_n}^n\right) \overset{m\to\infty}{\to} \left(x_{i_1}^1, x_{i_2}^2, ..., x_{i_n}^n\right) \in E_1 \times \cdots \times E_n \tag{2.6}$$

para todo $i_1, ..., i_n \in \mathbb{N}^n$. Pela continuidade de T temos

$$T\left(x_{m,i_1}^1, x_{m,i_2}^2, ..., x_{m,i_n}^n\right) \overset{m\to\infty}{\to} T\left(x_{i_1}^1, x_{i_2}^2, ..., x_{i_n}^n\right) \in F$$

para todo $i_1, ..., i_n \in \mathbb{N}^n$. Como

$$\left(\left(x_{m,i_1}^1\right)_{m=1}^{\infty}, ..., \left(x_{m,i_n}^n\right)_{m=1}^{\infty}\right) \in l_{p_1}^w\left(E_1\right) \times \cdots \times l_{p_n}^w\left(E_n\right),$$

temos, para cada $i_1, ..., i_n$,

$$\hat{T}\left(\left(x_{m,i_1}^1\right)_{m=1}^{\infty}, ..., \left(x_{m,i_n}^n\right)_{m=1}^{\infty}\right) = \left(T\left(x_{m,i_1}^1, x_{m,i_2}^2, ..., x_{m,i_n}^n\right)\right)_{m=1}^{\infty}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \hat{T}\left(\left(x_{m,i_1}^1\right), ..., \left(x_{m,i_n}^n\right)\right) &= \lim_{m\to\infty} T\left(x_{m,i_1}^1, x_{m,i_2}^2, ..., x_{m,i_n}^n\right) \\ &= T\left(x_{i_1}^1, x_{i_2}^2, ..., x_{i_n}^n\right), \end{aligned}$$

para todo $i_1, ..., i_n \in \mathbb{N}^n$. Mas, por hipótese, temos

$$\hat{T}\left(x_m\right) \overset{m\to\infty}{\to} \left(z_{i_1}, ..., z_{i_n}\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty}.$$

Logo, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que se $m \geq N$, tem-se

$$\left\| \hat{T}\left(\left(x_{m,i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty}, \left(x_{m,i_2}^2\right)_{i_2=1}^{\infty}, ..., \left(x_{m,i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty} \right) - \left(z_{i_1}, ..., z_{i_n}\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \right\|_q < \epsilon$$

e assim, se $m \geq N$, temos

$$\left\| \left(T\left(x_{m,i_1}^1, ..., x_{m,i_n}^n\right)\right)_{i_1,...,i_n=1} - \left(z_{i_1}, ..., z_{i_n}\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \right\|_q < \epsilon,$$

ou ainda

$$\left(\sum_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \left\| T\left(x_{m,i_1}^1, ..., x_{m,i_n}^n\right) - \left(z_{i_1}, ..., z_{i_n}\right) \right\|^q \right) < \epsilon^q.$$

Logo, para cada $i_1, ..., i_n \in \mathbb{N}^n$, obtemos

$$\left\| T\left(x_{m,i_1}^1, ..., x_{m,i_n}^n\right) - \left(z_{i_1}, ..., z_{i_n}\right) \right\| < \epsilon, \text{ sempre que } m \geq N,$$

e finalmente

$$\lim_{m\to\infty} T\left(x_{m,i_1}^1, ..., x_{m,i_n}^n\right) = \left(z_{i_1}, ..., z_{i_n}\right),$$

para cada $i_1, ..., i_n \in \mathbb{N}^n$. Assim, pela unicidade do limite, temos

$$\left(z_{i_1}, ..., z_{i_n}\right) = T\left(x_{i_1}^1, x_{i_2}^2, ..., x_{i_n}^n\right), \text{ para todo } i_1, ..., i_n \in \mathbb{N}^n.$$

Logo,

$$\hat{T}\left(x_m\right) \overset{m\to\infty}{\to} \left(T\left(x_{i_1}^1, x_{i_2}^2, ..., x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} = \hat{T}\left(x\right)$$

e

$$\hat{T}\left(x\right) = z.$$

Portanto, $\hat{T}$ é contínuo e

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i_1,...,i_n}^{\infty} \left\| T\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_n}^n\right) \right\|^q \right)^{\frac{1}{q}} &= \left\| T\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_n}^n\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \right\|_q \\
&= \left\| \hat{T}\left(\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty} \right) \right\| \\
&\leq \left\| \hat{T} \right\| \prod_{j=1}^{n} \left\| \left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty} \right\|_{p_j}^{w} < \infty.
\end{aligned}$$

Logo, $\left(T\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,...,i_n}^{\infty} \in l_q\left(\mathbb{N}^n; F\right)$, isto é, T é múltiplo $\left(q; p_1, ..., p_n\right)$ −somante e, além disso,

$$\pi_{(q;p_1,...,p_n)}\left(T\right) \leq \left\| \hat{T} \right\|. \tag{2.7}$$

Desde que

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{T}\right\| &= \sup_{\left\|\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty}\right\|_{p_j}^w \leq 1} \left\|\hat{T}\left(\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right)\right\|_q \\
&= \sup_{\left\|\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty}\right\|_{p_j}^w \leq 1} \left(\sum_{i_1,...,i_n}^{\infty} \left|T\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_n}^n\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sup_{\left\|\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty}\right\|_{p_j}^w \leq 1} \pi_{(q;p_1,...,p_n)}(T) \prod_{j=1}^{n} \left\|\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty}\right\|_{p_j}^w \\
&= \pi_{(q;p_1,...,p_n)}(T)
\end{aligned}$$

temos

$$\left\|\hat{T}\right\| \leq \pi_{(q;p_1,...,p_n)}(T)$$

e, por (2.7), concluímos que

$$\pi_{(q;p_1,...,p_n)}(T) = \left\|\hat{T}\right\|.$$

■

É importante mencionar que como no caso dos operadores absolutamente somantes, a teoria dos operadores múltiplo somantes só faz sentido quando $q \geq p_j$, para todo $1 \leq j \leq n$:

Proposição 2.1.4 *Seja $q < p_j$ para algum $1 \leq j \leq n$. Se $T \in \Pi^n_{q;p_1,...,p_n}(E_1, ..., E_n; F)$, então, T é o operador nulo.*

Demonstração. De fato, se $q < p_j$ para algum $1 \leq j \leq n$, então podemos encontrar $\left(\alpha_{i_j}\right)_{i_j=1}^{\infty}$ em $l_{p_j} - l_q$. Assim, tomando $x_j \in E_j$, com $x_j \neq 0$, temos $\left(\alpha_{i_j} x_j\right)_{i_j=1}^{\infty} \in l_{p_j}^w(E_j)$ pois, para todo $\varphi \in E_j^{'}$,

$$\sum_{i_j=1}^{\infty} \left|\varphi\left(\alpha_{i_j} x_j\right)\right|^{p_j} \leq \sum_{i_j=1}^{\infty} \left(\|\varphi\| \left|\alpha_{i_j} x_j\right|\right)^{p_j} = \|\varphi\|^{p_j} \|x_j\|^{p_j} \sum_{i_j=1}^{\infty} \left|\alpha_{i_j}\right|^{p_j} < \infty.$$

Logo, segue que

$$\left(\alpha_{i_j} x_j\right)_{i_j=1}^{\infty} \in l_{p_j}^w(E_j).$$

Vamos supor que existe $T \neq 0$ tal que $T \in \Pi^n_{q;p_1,...,p_n}(E_1, ..., E_n; F)$. Neste caso,

$$\left(\sum_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \left\|T\left(x_{i_1}^1, ..., \alpha_{i_j} x_j, ..., x_{i_n}^n\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} \left\|\left(x_{i_l}^l\right)_{i_l=1}^{\infty}\right\|_{p_l}^w\right) \cdot \left\|\left(\alpha_{i_j} x_j\right)_{i_j=1}^{\infty}\right\|_{p_j}^w.$$

Tomando $\left(x_{i_l}^l\right)_{i_l=1}^{\infty}=(x_l,0,...,0,...)$, para cada $1\leq l\leq n$, $l\neq j$, temos

$$\left(\sum_{i_1,...,i_n=1}^{\infty}\left\|T\left(x_{i_1}^1,...,\alpha_{i_j}x_j,...,x_{i_n}^n\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\sum_{i_j=1}^{\infty}\left\|T\left(x_1,...,\alpha_{i_j}x_j,...,x_n\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq C\left(\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}\left\|\left(x_{i_l}^l\right)_{i_l=1}^{\infty}\right\|_{p_l}^{w}\right)\cdot\left\|\left(\alpha_{i_j}x_j\right)_{i_j=1}^{\infty}\right\|_{p_j}^{w}.$$

Logo

$$\left\|T\left(x_1,...,x_j,...,x_n\right)\right\|\left(\sum_{i_j=1}^{\infty}\left|\alpha_{i_j}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq C\left(\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}\left\|\left(x_{i_l}^l\right)_{i_l=1}^{\infty}\right\|_{p_l}^{w}\right)\left|\varphi\left(x_j\right)\right|\left(\sum_{i_j=1}^{\infty}\left|\alpha_{i_j}\right|^{p_j}\right)^{\frac{1}{p_j}}<\infty.$$

Portanto,

$$\left(\sum_{i_j=1}^{\infty}\left|\alpha_{i_j}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}<\infty,$$

o que nos leva a uma contradição. ■

Veja que, para cada $T\in\Pi_{q;p_1,...,p_n}^n(E_1,...,E_n;F)$, quando consideramos o operador multilinear contínuo associado

$$\hat{T}:l_{p_1}^w\left(E_1\right)\times\cdots\times l_{p_n}^w\left(E_n\right)\to l_q\left(\mathbb{N}^n;F\right)$$

dado por

$$\hat{T}\left(\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty},...,\left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right)=\left(T\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty},$$

estamos induzindo uma aplicação

$$\begin{array}{rll}\overset{\wedge}{\theta}: & \Pi_{q;p_1,...,p_n}^n(E_1,...,E_n;F) & \to\mathcal{L}^n\left(l_{p_1}^w\left(E_1\right),...,l_{p_n}^w\left(E_n\right);l_q\left(\mathbb{N}^n;F\right)\right)\\ & T & \to\hat{T}\end{array}$$

É claro que o operador $\overset{\wedge}{\theta}$ definido acima é linear e isométrico, pois já sabemos que $\pi_{(q;p_1,...,p_n)}(T) = \left\|\hat{T}\right\|$ e, além disso,

$$\begin{aligned}
\overset{\wedge}{\theta}(T + \alpha T_2) &= (T + \alpha T_2)^{\wedge}\left(\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right) \\
&= \left((T + \alpha T_2)\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \\
&= \left(T_1\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_n}^n\right) + \alpha T_2\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \\
&= \left(T_1\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} + \left(\alpha T_2\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \\
&= \overset{\wedge}{T_1}\left(\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right) + \alpha\overset{\wedge}{T_2}\left(\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty}, ..., \left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right) \\
&= \overset{\wedge}{T_1} + \alpha\overset{\wedge}{T_2}.
\end{aligned}$$

O próximo lema é importante para a demonstração da próxima proposição.

Lema 2.1.5 *Se* $T \in \Pi^n_{q;p_1,...,p_n}(E_1, ..., E_n; F)$*, então*

$$\|T\| \leq \pi_{(q;p_1,...,p_n)}(T).$$

Demonstração. Sejam $\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty} \in l_{p_j}^w(E_j)$. Como $T \in \Pi^n_{q;p_1,...,p_n}(E_1, ..., E_n; F)$, então

$$\left(\sum_{i_1,...,i_n}^{\infty} \left\|T\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_n}^n\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_{(q;p_1,...,p_n)}(T)\prod_{j=1}^{n}\left\|\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty}\right\|_{p_j}^{w}$$

Vamos tomar $\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty} = (x_j, 0, ..., 0, ...)$, para cada $1 \leq j \leq n$. Assim

$$\left(\sum_{i_1,...,i_n}^{\infty} \left\|T\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_n}^n\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\|T(x_1, ..., x_n)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_{(q;p_1,...,p_n)}(T)\prod_{j=1}^{n}\left\|\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty}\right\|_{p_j}^{w} \quad (2.8)$$

Pela escolha feita, temos

$$\left\|\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty}\right\|_{p_j}^{w} = \sup_{\|\varphi\|\leq 1}\left|\varphi\left(x_j\right)\right| = \|x_j\|$$

Logo, em (2.8) temos, precisamente,

$$\|T(x_1, ..., x_n)\| \leq \pi_{(q;p_1,...,p_n)}(T)\prod_{j=1}^{n}\|x_j\|$$

Assim, usando a definição de $\|T\|$, obtemos

$$\|T\| \leq \pi_{(q;p_1,...,p_n)}(T).$$

■

Vejamos agora que o espaço $\Pi^n_{q;p_1,...,p_n}(E_1, ..., E_n; F)$ com a norma associada $\pi_{(q;p_1,...,p_n)}(T)$ é Banach.

Proposição 2.1.6 $\left(\Pi^n_{q;p_1,...,p_n}(E_1,...,E_n;F),\pi_{(q;p_1,...,p_n)}(.)\right)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\Pi^n_{q;p_1,...,p_n}(E_1,...,E_n;F)$. Pelo Lema *2.1.5* $(T_k)_{k=1}^{\infty}$, tambem será de Cauchy em $\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$. Portanto, $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ converge para $T\in\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$. Vamos considerar agora o operador definido acima,

$$\begin{array}{lll}\overset{\wedge}{\theta}: & \Pi^n_{q;p_1,...,p_n}(E_1,...,E_n;F) & \to \mathcal{L}\left({}^n l^w_{p_1}(E_1),...,l^w_{p_n}(E_n);l_q(\mathbb{N}\times\cdots\times\mathbb{N};F)\right) \\ & T & \to \hat{T}\end{array}$$

Como $\overset{\wedge}{\theta}$ é uma isometria $\left(\hat{T}_k\right)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}\left({}^n l^w_{p_1}(E_1),...,l^w_{p_n}(E_n);l_q(\mathbb{N}^n;F)\right)$. Sendo $\mathcal{L}\left({}^n l^w_{p_1}(E_1),...,l^w_{p_n}(E_n);l_q(\mathbb{N}^n;F)\right)$ completo, pois $l_q(\mathbb{N}^n;F)$ é Banach, (veja o Corolário 1.3.6) temos que $\left(\hat{T}_k\right)_{k=1}^{\infty}$ converge para $S\in\mathcal{L}\left({}^n l^w_{p_1}(E_1),...,l^w_{p_n}(E_n);l_q(\mathbb{N}^n;F)\right)$.

Vamos tomar agora a projeção

$$\begin{array}{lll}P_{k_1,...,k_n}: & l_q(\mathbb{N}^n;F) & \to F \\ & \left(z_{i_1,...,i_j}\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} & \to z_{k_1,...,k_n}.\end{array}$$

Então,

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}P_{k_1,...,k_n}\left(\hat{T}_k\left(\left(x^1_{i_1}\right)_{i_1=1}^{\infty},...,\left(x^n_{i_n}\right)_{i_n=1}^{\infty}\right)\right) \\ &= P_{k_1,...,k_n}\left(S\left(\left(x^1_{i_1}\right)_{i_1=1}^{\infty},...,\left(x^n_{i_n}\right)_{in=1}^{\infty}\right)\right).\end{aligned} \tag{2.9}$$

E, por outro lado, temos $T_k\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}T$, e portanto

$$\lim_{k\to\infty}\left(T_k\left(x^1_{i_1},...,x^n_{i_n}\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty}=\left(T\left(x^1_{i_1},...,x^n_{i_n}\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty}. \tag{2.10}$$

Então,

$$\begin{aligned}P_{k_1,...,k_n}\left(\hat{T}_k\left(\left(x^1_{i_1}\right)_{i_1=1}^{\infty},...,\left(x^n_{i_n}\right)_{in=1}^{\infty}\right)\right) &= P_{k_1,...,k_n}\left(T_k\left(x^1_{i_1},...,x^n_{i_n}\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \\ &= T_k\left(x^1_{k_1},...,x^n_{k_n}\right).\end{aligned} \tag{2.11}$$

Portanto, de (2.9), (2.10) e (2.11), temos

$$\begin{array}{ccc}\lim_{k\to\infty}P_{k_1,...,k_n}\left(\hat{T}_k\left(\left(x^1_{i_1}\right)_{i_1=1}^{\infty},...,\left(x^n_{i_n}\right)_{i_n=1}^{\infty}\right)\right) & \longrightarrow & P_{k_1,...,k_n}\left(S\left(\left(x^1_{i_1}\right)_{i_1=1}^{\infty},...,\left(x^n_{i_n}\right)_{in=1}^{\infty}\right)\right) \\ \shortparallel & & \\ \lim_{k\to\infty}P_{k_1,...,k_n}\left(T_k\left(x^1_{i_1},...,x^n_{i_n}\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} & & \\ \downarrow & & \\ P_{k_1,...,k_n}\left(T\left(x^1_{i_1},...,x^n_{i_n}\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} & = & T\left(x^1_{k_1},...,x^n_{k_n}\right),\end{array}$$

isto é,

$$P_{k_1,...,k_n}\left(S\left(\left(x^1_{i_1}\right)_{i_1=1}^{\infty},...,\left(x^n_{i_n}\right)_{i_n=1}^{\infty}\right)\right)=T\left(x^1_{k_1},...,x^n_{k_n}\right).$$

Então, temos a igualdade para todo $(k_1,...,k_n)\in\mathbb{N}^n$. Logo,

$$S\left(\left(x^1_{i_1}\right)_{i_1=1}^{\infty},...,\left(x^n_{i_n}\right)_{i_n=1}^{\infty}\right)=\left(T\left(x^1_{i_1},...,x^n_{i_n}\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty}.$$

Daí $T \in \mathcal{L}^n\left(l_{p_1}^w(E_1), ..., l_{p_n}^w(E_n); l_q(\mathbb{N}^n; F)\right)$ e, portanto, $T \in \Pi_{q;p_1,...,p_n}^n(E_1, ..., E_n; F)$. Assim, temos que

$$T_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} T \in \Pi_{q;p_1,...,p_n}^n(E_1, ..., E_n; F),$$

ou seja, $\left(\Pi_{q;p_1,...,p_n}^n(E_1, ..., E_n; F), \pi_{(q;p_1,...,p_n)}(\cdot)\right)$ é um espaço de Banach. ■

2.2 Resultados de coincidência para operadores múltiplo somantes

Nesta seção, demonstramos alguns resultados de coincidência recentes envolvendo a classe dos operadores multilineares múltiplo somantes. Estes ilustram como muitos resultados da teoria linear têm análogos na teoria dos operadores multilineares múltiplo somantes. A principal fonte de referência da presente seção foi o artigo [8].

Um primeiro resultado que faz parte do folclore da teoria ilustra como resultados de coincidência para operadores múltiplo somantes “descem” para o caso linear:

Proposição 2.2.1 *Se*

$$\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) = \Pi_{q;p_1,...,p_n}^n(E_1, ..., E_n; F),$$

então

$$\mathcal{L}(E_j; F) = \Pi_{q;p_j}(E_j; F), \ j = 1, ..., n.$$

Demonstração. Sabemos já que $\Pi_{q;p_j}(E_j; F) \subset \mathcal{L}(E_j; F)$; vejamos que $\mathcal{L}(E_j; F) \subset \Pi_{q;p_j}(E_j; F)$. Sem perda de generalidade, tomemos $j = 1$.

Sejam $T_1 \in \mathcal{L}(E_1; F)$, $T_1 : E_1 \to F$, linear e contínua, e as sequências $\left(x_{i_2}^2\right)_{i_2=1}^{m_2}, ..., \left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{m_n}$ tal que $\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{m_k} = (a_k, 0, 0, ...)$, $k \in \{2, ..., n\}$. Vamos tomar para cada $i \in \{2, ..., n\}$ o operador $\varphi_i \in E_i'$, $\varphi_i : E_i \to \mathbb{K}$ linear e contínuo, tal que $\varphi_i \neq 0$ e $\varphi_i(a_i) = 1$. Seja então

$$T : E_1 \times \cdots \times E_n \to F, \text{ com } T(x_1, ..., x_n) = T_1(x_1)\varphi_2(x_2)...\varphi_n(x_n).$$

É claro que $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ e, pela hipótese, $T \in \Pi_{q;p_1,...,p_n}^n(E_1, ..., E_n; F)$. Então,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i_1,...,i_n=1}^{m_1,...,m_n} \left\|T_1\left(x_{i_1}^1\right)\varphi_2\left(x_{i_2}^2\right)...\varphi_n\left(x_{i_n}^n\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{i_1,...,i_n=1}^{m_1,...,m_n} \left\|T\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_n}^n\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq K \prod_{k=1}^{n} \left\|\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{m_k}\right\|_{p_k}^w \\
&= K \left\|\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{m_1}\right\|_{p_1}^w \|a_2\| ... \|a_n\|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\sum_{i_1=1}^{m_1} \left\|T_1\left(x_{i_1}^1\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq K \left\|\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{m_1}\right\|_{p_1}^w$$

e, pela Proposição 1.1.7, segue que $T_1 \in \Pi_{q;p_1}(E_1; F)$. ■

Teorema 2.2.2 (Botelho–Pellegrino) *Seja* $p, r \in [1, q]$ *e* F *um espaço de Banach. Seja* $B(p, q, r, F)$ *a coleção de todos os espaços de Banach* E *tais que*

$$\mathcal{L}(E; F) = \Pi_{q;p}(E; F)$$

e

$$\mathcal{L}(E; l_q(F)) = \Pi_{q;r}(E; l_q(F)).$$

Então, para todo $n \geq 2$,

$$\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F) = \Pi^n_{q;r,...r,p}(E_1, ..., E_n; F)$$

sempre que $E_1, ..., E_n \in B(p, q, r, F)$.

Demonstração. Vamos trabalhar por indução sobre n. Primeiro provaremos o caso $n = 2$. Sejam $E_1, E_2 \in B(p, q, r, F)$. Considere as funções identidade

$$I_1 : \mathcal{L}(E_2; F) \to \Pi_{q,p}(E_2; F),$$

$$I_2 : \mathcal{L}(E_1, l_q(F)) \to \Pi_{q,r}(E_1; l_q(F)).$$

Como I_1, I_2 são funções lineares, contínuas, bijetoras entre espaços de Banach, o Teorema da Aplicação Aberta garante que I_1 e I_2 são isomorfismos. Daí, para quaisquer $T_1 \in \mathcal{L}(E_2; F)$ e $T_2 \in \mathcal{L}(E_1, l_q(F))$, existem constantes C_1,$C_2 > 0$ tais que

$$\pi_{q;p}(T_1) \leq C_1 \|T_1\|,$$

$$\pi_{q;r}(T_2) \leq C_2 \|T_2\|. \tag{2.12}$$

Por outro lado, seja $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$. Dadas duas sequências $\left(x_j^1\right)_{j=1}^{\infty} \in l_r^w(E_1)$ e $\left(x_j^2\right)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(E_2)$, fixemos $m \in \mathbb{N}$ e consideremos o operador linear contínuo

$$A_1^{(m)} : E_1 \to l_q(F) : A_1^{(m)}(x) = \left(A\left(x, x_1^{(2)}\right), ..., A\left(x, x_m^{(2)}\right), 0, ...0, ...\right).$$

Então, por hipótese, $A_1^{(m)}$ é $(q; r)$-somante e

$$\pi_{q;r}\left(A_1^{(m)}\right) \overset{(2.12)}{\leq} C_2 \left\|A_1^{(m)}\right\|.$$

Agora, para cada $x \in B_{E_1}$, consideremos o operador linear contínuo

$$A_x : E_2 \to F : A_x(y) = A(x, y).$$

Novamente, usando a hipótese, A_x é $(q; p)$-somante e

$$\pi_{q;p}(A_x) \overset{(2.12)}{\leq} C_1 \|A_x\| \leq C_1 \|A\| \|x\| \leq C_1 \|A\|. \tag{2.13}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left\|A\left(x_j^{(1)},x_k^{(2)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^{m}\left\|A_1^{(m)}\left(x_j^{(1)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\overset{(2.1)}{\leq} \pi_{q;r}\left(A_1^{(m)}\right)\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_r^w \\
&\leq C_2\left\|A_1^{(m)}\right\|\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_r^w \\
&= C_2\sup_{x\in B_{E_1}}\left\|A_1^{(m)}(x)\right\|\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_r^w \\
&= C_2\sup_{x\in B_{E_1}}\left(\sum_{k=1}^{m}\left\|A\left(x,x_k^{(2)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_r^w \\
&\overset{(2.1)}{\leq} C_2\sup_{x\in B_{E_1}}\pi_{q;p}(A_x)\left\|\left(x_k^{(2)}\right)_{k=1}^{m}\right\|_p^w\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_r^w \\
&\overset{(2.13)}{\leq} C_1C_2\|A\|\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_r^w\left\|\left(x_k^{(2)}\right)_{k=1}^{m}\right\|_p^w.
\end{aligned}$$

Portanto A é múltiplo $(q;r,p)$-somante e

$$\pi_{q;r,p}(A)\leq C_1C_2\|A\|.$$

Suponhamos, agora, o resultado certo para n, isto é,

$$\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)=\Pi^n_{q;r,...r,p}(E_1,...,E_n;F),$$

para quaisquer $E_1,...,E_n\in B(p,q,r;F)$ e vamos provar para o caso $n+1$.

Sejam $E_1,...,E_{n+1}\in B(p,q,r;F)$. Como $E_2,...,E_{n+1}$ são espaços de Banach em $B(p,q,r;F)$, temos

$$\mathcal{L}(E_2,...,E_{n+1};F)=\Pi^n_{q;r,...r,p}(E_2,...,E_{n+1};F)$$

e, analogamente temos que, existe uma constante C_1 tal que

$$\pi_{q;r,...,r,p}(T)\leq C_1\|T\|\text{, para todo }T\in\mathcal{L}(E_2,...,E_{n+1};F).$$

Como $E_1\in B(p,q,r;F)$, existe uma constante C_2 tal que

$$\pi_{q;r}(T)\leq C_2\|T\|\text{, para todo }T\in\mathcal{L}(E_1,l_q(F)).$$

Seja $A\in\mathcal{L}(E_1,...,E_{n+1};F)$. Como trabalhamos anteriormente, vamos tomar as sequências $\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\in l_r^w(E_1),...,\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\in l_r^w(E_n),\left(x_j^{(n+1)}\right)_{j=1}^{\infty}\in l_p^w(E_{n+1})$. Fixemos $m\in\mathbb{N}$ e consideremos o operador linear contínuo

$$A_1^{(m)}:E_1\to l_q(F):A_1^{(m)}(x)=\left(A\left(x,x_{j_2}^{(2)},...,x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)_{j_2,...,j_{n+1}}^{m},0,0,...\right).$$

Então, $A_1^{(m)}$ é $(q;r)$-somante e

$$\pi_{q;r}\left(A_1^{(m)}\right) \leq C_2 \left\|A_1^{(m)}\right\|.$$

Agora, para cada $x \in B_{E_1}$, consideremos a aplicação n-linear

$$A_x^n : E_2 \times \cdots \times E_{n+1} \rightarrow F : A_x^n\left(x_2, ..., x_{n+1}\right) = A\left(x, x_2, ..., x_{n+1}\right)$$

e, portanto,

$$\pi_{q;r,\ldots,r,p}\left(A_x^{(n)}\right) \leq C_1 \left\|A_x^{(n)}\right\| \leq C_1 \left\|A\right\|.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1=1}^{m} \cdots \sum_{j_{n+1}=1}^{m} \left\|A(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m} \left\|A_1^{(m)}\left(x_j^{(1)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \pi_{q;r}\left(A_1^{(m)}\right) \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_r^w \\
&\leq C_2 \left\|A_1^{(m)}\right\| \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_r^w \\
&= C_2 \sup_{x \in B_{E_1}} \left(\sum_{j_2=1}^{m} \cdots \sum_{j_{n+1}=1}^{m} \left\|A_x^n\left(x_{j_2}^{(2)}, ..., x_{j_{n+1}}^{(n+1)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_r^w \\
&\leq C_2 \sup_{x \in B_{E_1}} \pi_{q;r,\ldots,r,p}\left(A_x^n\right) \left(\prod_{k=2}^{n} \left\|\left(x_j^k\right)_{j=1}^{m}\right\|_r^w\right) \left\|\left(x_j^{(n+1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p^w \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_r^w \\
&\leq C_1 C_2 \left\|A\right\| \left(\prod_{k=1}^{n} \left\|\left(x_j^k\right)_{j=1}^{m}\right\|_r^w\right) \left\|\left(x_j^{(n+1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p^w
\end{aligned}$$

e o resultado segue. ■

O próximo resultado é uma versão mais precisa do teorema anterior (agora com estimativa para as normas) para o caso em que os espaços do domínio são iguais.

Teorema 2.2.3 *Sejam $p, r \in [1, q]$ e E, F espaços de Banach tais que*

$$\mathcal{L}\left(E; F\right) = \Pi_{q;p}\left(E; F\right)$$

e

$$\mathcal{L}\left(E; l_q\left(F\right)\right) = \Pi_{q;r}\left(E; l_q\left(F\right)\right),$$

com

$$\pi_{q;p}\left(T\right) \leq C_1 \left\|T\right\|, \textit{ para todo } T \in \mathcal{L}\left(E; F\right),$$
$$\pi_{q;r}\left(T\right) \leq C_2 \left\|T\right\|, \textit{ para todo } T \in \mathcal{L}\left(E; l_q\left(F\right)\right).$$

Então, para todo $n \geq 2$

$$\mathcal{L}\left({}^{n}E;F\right) = \Pi^{n}_{q;r,\dots,r,p}\left({}^{n}E;F\right) \ \ e$$
$$\pi_{q;r,\dots,r,p}\left(A\right) \leq C_1 C_2^{n-1} \left\|A\right\|,$$

para todo $A \in \mathcal{L}\left({}^{n}E;F\right)$.

Demonstração. A primeira parte é resultado do teorema anterior, considerando $E_1 = \cdots = E_n = E$. Para demonstrar a relação entre as normas, vamos argumentar por indução. Vamos supor o resultado válido para $n-1$ e demonstrar para n.

Sejam $A \in \mathcal{L}\left({}^{n}E;F\right)$ e $\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_r^w\left(E_1\right), \dots, \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty} \in l_r^w\left(E_n\right)$. Fixemos $m \in \mathbb{N}$ e consideremos o operador

$$A_1^{(m)} : E^1 \to l_q\left(F\right) : A_1^{(m)}\left(x\right) = \left(A\left(x, x_{j_2}^{(2)}, \dots, x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_2,\dots,j_n=1}^{m}, 0, \dots\right).$$

Como $A_1^{(m)}$ é linear e contínuo, então

$$A_1^{(m)} \in \mathcal{L}\left(E^1; l_q\left(F\right)\right).$$

Como $E_1 \in B\left(p,q,r,F\right)$, usando a hipótese de indução, temos

$$\pi_{q;r}\left(A_1^{(m)}\right) \leq C_2 \left\|A_1^{(m)}\right\|. \tag{2.14}$$

Para cada $x \in B_{E_1}$, consideremos a aplicação $(n-1)$-linear contínua

$$A_x^{n-1} : E_2 \times \cdots \times E_n \to F : A_x^{n-1}\left(x_2, \dots, x_n\right) = A\left(x, x_2, \dots, x_n\right).$$

Pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned} \pi_{q;r,\dots r,p}\left(A_x^{n-1}\right) &\leq C_1 C_2^{n-2} \left\|A_x^{n-1}\right\| \\ &\leq C_1 C_2^{n-2} \left\|A\right\| \left\|x\right\| \left\|x_2\right\| \dots \left\|x_n\right\| \\ &\leq C_1 C_2^{n-2} \left\|A\right\|. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1=1}^{m}...\sum_{j_n=1}^{m}\left\|A\left(x_{j_1}^{(1)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&=\left(\sum_{j=1}^{m}\left\|A_1^{(m)}\left(x_j^{(1)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\overset{(2.1)}{\leq}\pi_{q;r}\left(A_1^{(m)}\right)\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_r^w\\
&\overset{(2.14)}{\leq}C_2\left\|A_1^{(m)}\right\|\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_r^w\\
&=C_2\sup_{x\in B_{E^1}}\left(\sum_{j_2=1}^{m}...\sum_{j_n=1}^{m}\left\|A\left(x,x_{j_2}^{(2)},...,x_{j_n}^{(n)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_r^w\\
&\leq C_2\sup_{x\in B_{E^1}}\pi_{q;r,...,r,p}\left(A_x^{n-1}\right)\prod_{k=2}^{n-1}\left\|\left(x_j^{k}\right)_{j=1}^{m}\right\|_r^w\left\|\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p^w\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_r^w\\
&\overset{(2.15)}{\leq}C_1C_2C_2^{n-2}\left\|A\right\|\prod_{k=1}^{n-1}\left\|\left(x_j^{k}\right)_{j=1}^{m}\right\|_r^w\left\|\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p^w\\
&\leq C_1C_2^{n-1}\left\|A\right\|\prod_{k=1}^{n-1}\left\|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_r^w\left\|\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_p^w\\
&\leq C_1C_2^{n-1}\left\|A\right\|.
\end{aligned}
$$

■

Corolário 2.2.4 *Para $1\leq r\leq q$, seja $B(r,q)$ a coleção de todos os espaços de Banach E tais que*

$$\mathcal{L}(E;l_q)=\Pi_{q;r}(E;l_q).$$

Então, para todo $n\geq 2$,

$$\mathcal{L}(E_1,...,E_n)=\Pi_{q;r,...,r,q}^{n}(E_1,...,E_n)$$

quando $E_1,...,E_n\in B(r,q)$

Demonstração. Pela Proposição 1.1.5, temos $\mathcal{L}(E;\mathbb{K})=\Pi_{q;q}(E;\mathbb{K})$ isometricamente e, assim, podemos usar o Teorema 2.2.2 ■

Corolário 2.2.5 *Seja $1\leq r\leq q$ e seja E um espaço de Banach tal que $\mathcal{L}(E;l_q)=\Pi_{q;r}(E;l_q)$ com*

$$\pi_{q;r}(T)\leq C\left\|T\right\|$$

para todo $T\in\mathcal{L}(E;l_q)$. Então, para todo $n\geq 2$,

$$
\begin{gathered}
\mathcal{L}(^nE)=\Pi_{q;r,...,r,q}^{n}(^nE),\ e\\
\pi_{q;r,...,r,q}(A)\leq C^{n-1}\left\|A\right\|,\ para\ todo\ A\in\mathcal{L}(^nE)
\end{gathered}
$$

Demonstração. Sabemos pela Proposição 1.1.5 que $\mathcal{L}(E;\mathbb{K}) = \Pi_{q;q}(E;\mathbb{K})$ isometricamente. Assim, tomando $T : E \to \mathbb{K}$ é um operador linear contínuo, temos $T \in \Pi_{q;q}(E;\mathbb{K})$ e

$$\pi_{q;q}(T) = \|T\|. \tag{2.16}$$

Agora, pelo corolário, anterior temos

$$\mathcal{L}(^nE) = \Pi^n_{q;r,\dots,r,q}(^nE).$$

Usando o Teorema *2.2.3* na hipótese $\pi_{q;r}(.) \leq C\|.\|$ e (2.16) concluímos que

$$\pi_{q;r,\dots,r,q}(A) \leq C^{n-1}\|A\|, \text{ para todo } A \in \mathcal{L}(^nE).$$

■

2.3 Algumas aplicações envolvendo cotipo

Nesta seção, destacamos alguns resultados recentes que mostram que, assim como na teoria linear, a teoria de operadores múltiplo somantes é bastante influenciada pelo conceito de cotipo.

O próximo resultado foi originalmente demonstrado independentemente por D. Pérez-García e M.L.V. Souza em suas teses de doutorado, [30, 42]. A próxima demonstração é devida a G. Botelho e D. Pellegrino, mas as constantes que encontramos são ligeiramente diferentes.

Teorema 2.3.1 *[10, Teorema 3.2] Se F tem cotipo q e $E_1,\dots,E_n$ são espaços de Banach arbitrários, então*

$$\mathcal{L}(E_1,\dots,E_n;F) = \Pi^n_{q;1}(E_1,\dots,E_n;F), \text{ e}$$
$$\pi_{q;1}(A) \leq C_q(l_q(F))^n\|A\|,$$

opara todo $A \in \mathcal{L}(E_1,\dots,E_n;F)$.

Demonstração. Como F tem cotipo q, sabemos, pelo Teorema *1.2.7,* que $l_q(F)$ tambem tem cotipo q. Assim, usando o Lema 1.2.8 obtemos

$$\mathcal{L}(E_j;F) = \Pi_{q;1}(E_j;F)$$

e

$$\mathcal{L}(E_j;l_q(F)) = \Pi_{q;1}(E_j;l_q(F)), \text{ para } j \in \{1,\dots,n\}.$$

Logo, pelo Teorema *2.2.2* , concluímos que

$$\mathcal{L}(E_1,\dots,E_n;F) = \Pi^n_{q;1}(E_1,\dots,E_n;F).$$

Agora, usando novamente o Lema 1.2.8 sabemos que

$$\pi_{q;1}(U) \leq C_q(F)\|U\|, \text{ para todo } U \in \mathcal{L}(E;F),$$
$$\pi_{q;1}(V) \leq C_q(l_q(F))\|V\|, \text{ para todo } V \in \mathcal{L}(E;l_q(F))$$

e, pela Observação 1.2.9, concluímos que

$$\pi_{q;1}(U) \leq C_q(l_q(F)) \|U\|, \text{ para todo } U \in \mathcal{L}(E;F).$$

Segue então do Teorema 2.2.3 a desigualdade desejada. ■ Como consequência dos resultados anteriores, temos uma demonstração simples de [10, Teorema 3.1]:

Teorema 2.3.2 *([10, Teorema 3.1]) Se F tem cotipo 2 e K é um espaço de Hausdorff compacto, então*

$$\mathcal{L}({}^nC(K);F) = \Pi_{2;2}^n({}^nC(K);F)$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.2.7, sabemos que F e $l_2(F)$ têm cotipo 2. Usando o item (a) do Teorema 1.2.10 temos

$$\mathcal{L}(C(K);F) = \Pi_{2;2}(C(K);F), \text{ e}$$
$$\mathcal{L}(C(K);l_2(F)) = \Pi_{2;2}(C(K);l_2(F)).$$

Logo, usando o Teorema *2.2.2* temos

$$\mathcal{L}({}^nC(K);F) = \Pi_{2;2}^n(C(K);F).$$

■

Mediante uma pequena modificação na demonstração anterior, obtemos o seguinte teorema:

Teorema 2.3.3 *([8])Se F tem cotipo $q > 2$ e $r < q$, então*

$$\mathcal{L}({}^nC(K);F) = \Pi_{q;r}^n(C(K);F).$$

Demonstração. Pelo Teorema 1.2.7, sabemos que F e $l_q(F)$ têm cotipo q. Usando o item (b) do Teorema 1.2.10 temos

$$\mathcal{L}(C(K);F) = \Pi_{q;r}(C(K);F), \text{ e}$$
$$\mathcal{L}(C(K);l_q(F)) = \Pi_{q;r}(C(K);l_q(F)).$$

Logo, usando o Teorem*a 2.2.2 , obtemos*

$$\mathcal{L}({}^nC(K);F) = \Pi_{q;r}^n(C(K);F).$$

■

O próximo resultado é uma reformulação (para o contexto de operadores múltiplo somantes), devida a Pérez-García [30, Teorema 5.5], de um resultado clássico de H.F. Bohnenblust e E. Hille [6]:

Teorema 2.3.4 (Teorema de Bohnenblust–Hille) *Sejam $E_1, ..., E_n$ espaços de Banach. Cada operador multilinear $T : E_1 \times \cdots \times E_n \to \mathbb{K}$ é múltiplo $\left(\frac{2n}{n+1}, 1\right)$-somante e satisfaz*

$$\pi_{\left(\frac{2n}{n+1},1\right)}(T) \leq 2^{\frac{n-1}{2}} \|T\|.$$

Para mais detalhes sobre este teorema veja [13, 14, 15] e, no idioma português, veja [28].

Como $\frac{2n}{n+1} < 2$ para todo n, o próximo resultado complementa, em certo sentido, o teorema anterior:

Teorema 2.3.5 (Botelho–Pellegrino) *Sejam $E_1, ..., E_n$ espaços de Banach arbitrários e $q \geq 2$. Então,*

$$\mathcal{L}(E_1, ..., E_n) = \Pi^n_{q;1,...,1,q}(E_1, ..., E_n), \text{ e}$$
$$\pi_{q;1,...,1,q}(T) \leq C_q(l_q)^{n-1} \|T\|$$

para todo $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n)$.

Demonstração. Sabemos que l_q tem cotipo q. Assim, usando o item *(iv)* do Lema 1.2.8 temos

$$\Pi_{(q;1)}(E_i, l_q) = \mathcal{L}(E_i, l_q) \text{ e} \quad (2.17)$$
$$\pi_{q;1}(V) \leq C_q(l_q) \|V\|$$

para todo $V \in \mathcal{L}(E_i; l_q)$. Logo, por meio do Corolário *2.2.4,* temos

$$\mathcal{L}(E_1, ..., E_n) = \Pi^n_{q;1,...,1,q}(E_1, ..., E_n).$$

Usando (2.16) temos

$$\pi_{q;q}(u) \leq \|u\|$$

para todo $u \in \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ e, usando essencialmente o Teorema *2.2.3 e* (2.17) obtemos

$$\pi_{q;1,...,1,q}(T) \leq C_q(l_q)^{n-1} \|T\|,$$

para todo $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n)$. ∎

Capítulo 3

Operadores múltiplo somantes em l_1 e resultados de inclusão

Os resultados do presente capítulo necessitam de algumas propriedades da teoria de produtos tensoriais entre espaços de Banach. A próxima seção faz um breve resumo da teoria de produtos tensoriais, com especial ênfase ao produto tensorial de espaços l_1.

3.1 Produtos tensoriais em espaços l_1

Dados um número $n \in \mathbb{N}$ e os espaços vetoriais $X_1, ..., X_n$, seja $\mathcal{L}(X_1, ..., X_n, \mathbb{K})'$, o dual topológico do espaço $\mathcal{L}(X_1, ..., X_n, \mathbb{K})$, isto é,

$$\mathcal{L}(X_1, ..., X_n, \mathbb{K})' = \{\varphi : \mathcal{L}(X_1, ..., X_n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K} \ ; \ \varphi \text{ é linear e contínuo}\}.$$

O produto tensorial de $X_1, ..., X_n$ será definido a partir de elementos específicos de $\mathcal{L}(X_1, ..., X_n, \mathbb{K})'$. Dados $x_1 \in X_1, ..., x_n \in X_n$, considere

$$\begin{array}{rrcl} x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : & \mathcal{L}(X_1, ..., X_n, \mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & A & \mapsto & (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)(A) = A(x_1, ..., x_n). \end{array}$$

O operador $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ é linear. De fato, vamos tomar $A, B \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n, \mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)(A + \alpha B) &= (A + \alpha B)(x_1, ..., x_n) = A(x_1, ..., x_n) + (\alpha B)(x_1, ..., x_n) \\ &= A(x_1, ..., x_n) + \alpha B(x_1, ..., x_n) \\ &= (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)(A) + \alpha (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)(B) \end{aligned}$$

para todo escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e todas as aplicações n-lineares $A, B \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n, \mathbb{K})$.

Definição 3.1.1 (Produto tensorial) *O subespaço vetorial de* $\mathcal{L}(X_1, ..., X_n, \mathbb{K})'$ *gerado por*

$$D := \{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : x_1 \in X_1, ..., x_n \in X_n\}$$

será chamado de ***produto tensorial*** *de* $X_1, ..., X_n$ *e será denotado por* $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$. *Mais precisamente*

$$X_1 \otimes \cdots \otimes X_n = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \left(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right) : k \in \mathbb{N}, \alpha_j \in \mathbb{K}, \ x_i^j \in X_i, i = 1, ..., n \ e \ j = 1, ..., k \right\}.$$

O produto tensorial permite que aplicações multilineares sejam "linearizadas"; o próximo teorema torna preciso o que queremos dizer por "linearizadas". Para tanto, necessitamos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \sigma_n : \quad & X_1 \times ... \times X_n && \to X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \\ & (x_1, ..., x_n) && \mapsto \sigma_n (x_1, ..., x_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n. \end{aligned}$$

É fácil ver que a aplicação σ_n é linear e contínua, isto é, $\sigma_n \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; X_1 \otimes \cdots \otimes X_n)$.

Teorema 3.1.2 *Sejam $X_1, ..., X_n$ espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Para cada aplicação $n-$linear $A : X_1 \times ... \times X_n \to Y$, existe um único operador linear $A_L : X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \to Y$, dado por*

$$A_L \left(\sum_{j=1}^{k} x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right) = \sum_{j=1}^{k} A \left(x_1^j, ..., x_n^j \right)$$

*tal que $A = A_L \circ \sigma_n$. Mas ainda, a correspondência $A \leftrightarrow A_L$ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $L(X_1, ..., X_n; Y)$ e $L(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n; Y)$. O operador linear A_L e chamado de **linearização** da aplicação n-linear A.*

Por meio do teorema anterior, vemos como podemos associar um operador linear a uma aplicação multilinear. Assim, aproveitamos todas as propriedades da Álgebra Linear em aplicações multilineares. Embora, esta ferramenta seja muito importante, também é válido observar que, ao mesmo tempo que simplificamos a aplicação (de multilinear para linear), passamos de um espaço vetorial simples no domínio (o produto cartesiano) para um espaço vetorial mais complicado (o produto tensorial).

A menos do isomorfismo descrito no teorema podemos escrever

$$L(X_1, ..., X_n; Y) = L(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n; Y).$$

Quando $Y = \mathbb{K}$, obtemos algebricamente (não topologicamente) que

$$(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n)' = L(X_1, ..., X_n; \mathbb{K}).$$

A propriedade do produto tensorial descrita no teorema se chama *propriedade universal dos produtos tensoriais.* Além disto, o produto tensorial é o único espaço vetorial com essa propriedade.

Tomando agora $E_1, ..., E_n$ espaços vetoriais normados, a norma que definiremos a seguir em $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ realiza a linearização das aplicações multilineares contínuas definidas em $E_1 \times \cdots \times E_n$, ou seja, esta norma em $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ é tal que para todo espaço normado F, uma aplicação n-linear $A : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é contínua se, e somente se, $A_L : E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \to F$ é um operador linear contínuo com respeito a essa norma.

Definição 3.1.3 *Sejam $E_1, ..., E_n$ espaços vetoriais normados sobre o corpo $\mathbb{K}$. Para cada tensor $x \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$, define-se*

$$\pi(x) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{k} \left\| x_1^j \right\| ... \left\| x_n^j \right\| : x = \sum_{j=1}^{k} x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right\}.$$

Proposição 3.1.4 *Sejam $E_1, ..., E_n$ espaços vetoriais normados. Então, π como foi definida é uma norma em $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. Esta norma é conhecida como a norma projetiva. Além disso,*

$$\pi\left(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n\right) = \|x_1\| ... \|x_n\|$$

para todos $x_1 \in E_1, ..., x_n \in E_n$.

O produto tensorial de $E_1, ..., E_n$ dotado com a norma π será denotado por $E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_n$.

Definição 3.1.5 *O completamento do espaço $E_1 \otimes_\pi ... \otimes_\pi E_n$ será denotado por $E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_n$. O espaço de Banach $E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_n$ será chamado de produto tensorial projetivo dos espaços vetoriais normados $E_1, ..., E_n$.*

Um resultado bastante útil para a próxima seção afirma que o produto tensorial de espaços l_1 com a norma projetiva, é isometricamente isomorfo ao l_1 (veja [39, Cap 2]).

Teorema 3.1.6 *$l_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi l_1$ é isometricamente isomorfo a l_1.*

Para mais detalhes, em idioma português, sobre a teoria de produtos tensoriais no contexto da Análise Funcional, sugerimos [41].

3.2 Operadores múltiplo somantes em l_1

Assim como na teoria linear, o espaço l_1 tem um papel de destaque na teoria de operadores múltiplo somantes. Na presente seção, apresentamos alguns resultados de coincidência para operadores múltiplo somantes com o domínio sendo um produto cartesiano de espaços l_1.

O seguinte teorema, devido a Bennett [3], é um resultado da teoria linear que será importante no decorrer da seção.

Teorema 3.2.1 (Bennet) *Seja $1 \leq q, s \leq \infty$. Então todo operador linear contínuo de l_1 em l_q é absolutamente (r, s)-somante se*
(i) $r^{-1} \leq s^{-1} - \left|2^{-1} - q^{-1}\right|$, quando $s \leq 2$;
(ii) $r \geq \frac{q^* s}{2}$, quando $q \leq 2 \leq s$;
(iii) $r = s$, quando $2 \leq q < s$;
(iv) $r \geq q$, quando $2 \leq s < q$;
(v) $r > s$, quando $2 < q = s < \infty$;
(vi) $r = \infty$, quando $q = s = \infty$.

O próximo resultado será demonstrado usando a teoria do Capítulo 2 e o teorema anterior.

Teorema 3.2.2 (Botelho–Pellegrino) *Seja $n \geq 2$. Então,*
(a) $\mathcal{L}\left({}^n l_1; l_2\right) = \Pi^n_{q;1,...,1,q}\left({}^n l_1; l_2\right)$ para qualquer $q \geq 2$.
(b) $\mathcal{L}\left({}^n l_1; l_q\right) = \Pi^n_{q;1,...,1,r}\left({}^n l_1; l_q\right)$ para qualquer $2 \leq r \leq q$.

Demonstração. (a) Pelo Teorema de Grothendieck, sabemos que

$$\mathcal{L}(l_1; l_2) = \Pi_1(l_1; l_2)$$

e, pelo Teorema de Inclusão, temos $\Pi_1(l_1; l_2) \subset \Pi_q(l_1; l_2)$. Logo,

$$\mathcal{L}(l_1; l_2) = \Pi_q(l_1; l_2).$$

Como $l_q(l_2)$ tem cotipo 2 (veja o Teorema 1.2.7), então $l_q(l_2)$ tem cotipo $q \geq 2$ e, pelo Teorema 2.3.1, obtemos

$$\mathcal{L}(l_1; l_q(l_2)) = \Pi_{q;1}(l_1; l_q(l_2)).$$

Assim, usando o Teorema *2.2.2* obtemos o resultado.

(b) Pelo Teorema *3.2.1* temos

$$\mathcal{L}(l_1; l_q) = \Pi_{q;r}(l_1; l_q).$$

Como l_q tem cotipo q, usando o Lema *1.2.8* temos

$$\mathcal{L}(l_1; l_q(l_q)) = \Pi_{q;1}(l_1; l_q(l_q)).$$

Logo, por meio do Teorema *2.2.2* concluímos que

$$\mathcal{L}({}^n l_1; l_q) = \Pi^n_{q;1,\ldots,1,r}({}^n l_1; l_q).$$

■

O teorema abaixo é devido a D. Pérez-García, em [10] :

Teorema 3.2.3 (Pérez-García) *Se $1 \leq p \leq 2$, toda aplicação multilinear $T : l_1 \times \cdots \times l_1 \to \mathbb{K}$ é múltiplo p-somante e $\pi_p(T) \leq K_G^{2n-2}\|T\|$, onde K_G é a constante de Grothendieck.*

Usando o resultado anterior, podemos provar o seguinte lema técnico, que nos será útil para demonstrar o Teorema 3.2.5.

Lema 3.2.4 *Se $\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m_1}, \ldots, \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{m_n}$ são sequências finitas em l_1 e $1 \leq p \leq 2$, então*

$$\left\|\left(x_{j_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m_1,\ldots,m_n}\right\|_p^w \leq K_G^{2n-2}\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m_1}\right\|_p^w \ldots \left\|\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{m_n}\right\|_p^w.$$

Demonstração. Vamos proceder por indução sobre n. Demonstramos primeiro o caso $n = 2$. Denotando por σ a aplicação bilinear canônica de $l_1 \times l_1$ em $l_1 \hat{\otimes}_\pi l_1$ dada por $\sigma(x, y) = x \otimes y$, e tomando o supremo sobre todos $\varphi \in B_{l_1 \hat{\otimes}_\pi l_1}$, temos

$$\left\|\left(x_{j_1}^{(1)} \otimes x_{j_2}^{(2)}\right)_{j_1,j_2=1}^{m_1,m_2}\right\|_p^w = \sup_\varphi \left(\sum_{j_1,j_2=1}^{m_1,m_2}\left|\varphi\left(x_{j_1}^{(1)} \otimes x_{j_2}^{(2)}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1}$$

$$= \sup_\varphi \left(\sum_{j_1,j_2=1}^{m_1,m_2}\left|\varphi \circ \sigma\left(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $\varphi \circ \sigma \in \mathcal{L}\left({}^2 l_1\right)$ temos pelo Teorema *3.2.3,* que $\varphi \circ \sigma$ é múltiplo p-somante. Assim,

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\varphi}\left(\sum_{j_1,j_2=1}^{m_1,m_2}\left|\varphi \circ \sigma\left(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\varphi} \pi_{p;p}\left(\varphi \circ \sigma\right)\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m_1}\right\|_p^w \left\|\left(x_j^{(2)}\right)_{j=1}^{m_2}\right\|_p^w \\
&\overset{\text{Teorema 3.2.3}}{\leq} K_G^2 \sup_{\varphi}\left\|\varphi \circ \sigma\right\| \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m_1}\right\|_p^w \left\|\left(x_j^{(2)}\right)_{j=1}^{m_2}\right\|_p^w \\
&\leq K_G^2 \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m_1}\right\|_p^w \left\|\left(x_j^{(2)}\right)_{j=1}^{m_2}\right\|_p^w .
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Vamos agora supor o resultado válido para um certo k e demonstrá-lo para $k+1$. Suponhamos então que

$$
\left\|\left(x_{j_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes x_{jk}^{k}\right)_{j_1,\ldots,j_k=1}^{m_1,\ldots,m_k}\right\|_p^w \leq K_G^{2k-2}\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m_1}\right\|_p^w \cdots \left\|\left(x_j^{k}\right)_{j=1}^{m_k}\right\|_p^w .
$$

Como $\hat{\otimes}_\pi^k l_1$ é isometricamente isomorfo a l_1, temos

$$
\left\|\left(x_{j_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes x_{jk}^{k} \otimes x_{j_{k+1}}^{(k+1)}\right)_{j_1,\ldots,j_{k+1}=1}^{m_1,\ldots,m_{k+1}}\right\|_p^w = \left\|\left(\overbrace{\left(x_{j_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes x_{jk}^{k}\right)}^{\in l_1} \otimes x_{j_{k+1}}^{(k+1)}\right)_{j_1,\ldots,j_{k+1}=1}^{m_1,\ldots,m_{k+1}}\right\|_p^w .
$$

De (3.1), (3.2) e da hipótese de indução, temos

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(x_{j_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes x_{jk}^{k} \otimes x_{j_{k+1}}^{(k+1)}\right)_{j_1,\ldots,j_{k+1}=1}^{m_1,\ldots,m_{k+1}}\right\|_p^w \\
&\overset{(3.2)}{\leq} K_G^2\left\|\left(x_{j_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes x_{jk}^{k}\right)_{j_1,\ldots,j_k=1}^{m_1,\ldots,m_k}\right\|_p^w \left\|\left(x_j^{(k+1)}\right)_{j=1}^{m_{k+1}}\right\|_p^w \\
&\leq K_G^2 K_G^{2k-2}\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m_1}\right\|_p^w \cdots \left\|\left(x_j^{(k+1)}\right)_{j=1}^{m_{k+1}}\right\|_p^w \\
&= K_G^{2(k+1)-2}\left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m_1}\right\|_p^w \cdots \left\|\left(x_j^{(k+1)}\right)_{j=1}^{m_{k+1}}\right\|_p^w .
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

■

Teorema 3.2.5 (Botelho–Pellegrino) *Sejam* $r \geq s \geq 1$ *e* $p = \min\{s, 2\}$*. Se*

$$
\mathcal{L}\left(l_1; F\right) = \Pi_{r;s}\left(l_1; F\right),
$$

então

$$
\mathcal{L}\left({}^n l_1; F\right) = \Pi_{r;p,\ldots,p}^n\left({}^n l_1; F\right)
$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Sejam $A \in \mathcal{L}\left({}^n l_1; F\right)$ e A_L a linearização de A, isto é,

$$A_L \in \mathcal{L}\left(\hat{\otimes}_\pi^n l_1; F\right) \text{ e } A_L\left(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n\right) = A\left(x_1, ..., x_n\right).$$

Como $\hat{\otimes}_\pi^n l_1$ é isometricamente isomorfo a l_1 e desde que, por hipótese, $\mathcal{L}\left(l_1; F\right) = \Pi_{r;s}\left(l_1; F\right)$, então A_L é $(r; s)$-somante e

$$\pi_{r;s}\left(A_L\right) \leq M \left\|A_L\right\| = M \left\|A\right\|.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m_1,...,m_n} \left\|A\left(x_{j_1}^{(1)}, ..., x_{j_n}^{(n)}\right)\right\|^r\right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\sum_{j_1,...,j_n=1}^{m_1,...,m_n} \left\|A_L\left(x_{j_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes x_{j_n}^{(n)}\right)\right\|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \pi_{r,s}\left(A_L\right) \left\|\left(x_{j_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_1,...,j_n=1}^{m_1,...,m_n}\right\|_s^w \\
&\overset{p\leq s}{\leq} \pi_{r,s}\left(A_L\right) \left\|\left(x_{j_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes x_{j_n}^{(n)}\right)_{j_1,...,j_n=1}^{m_1,...,m_n}\right\|_p^w \\
&\leq M \left\|A\right\| K_G^{2n-2} \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m_1}\right\|_p^w ... \left\|\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{m_n}\right\|_p^w,
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o Lema 3.2.4. ∎

Corolário 3.2.6 *Sejam $1 \leq p \leq 2$, F um espaço de Banach e $r \geq p$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\mathcal{L}\left(l_1; F\right) = \Pi_{r;p}\left(l_1; F\right)$;

(b) $\mathcal{L}\left({}^n l_1; F\right) = \Pi_{r;p}^n\left({}^n l_1; F\right)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(c) $\mathcal{L}\left({}^n l_1; F\right) = \Pi_{r;p}^n\left({}^n l_1; F\right)$*, para algum* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. (a)$\Longrightarrow$*(b).* Nas condições do Teorema 3.2.5, perceba que $1 \leq p \leq 2$ e $r \geq p$. Por *(a) e pelo* Teorema *3.2.5,* segue que

$$\mathcal{L}\left({}^n l_1; F\right) = \Pi_{r;p}^n\left({}^n l_1; F\right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(b)$\Longrightarrow$(c) é trivial.

(c)$\Longrightarrow$a) Pela Proposição *2.2.1 é claro que* se a igualdade é válida para algum $n \in \mathbb{N}$ então é válida para $n = 1$. ∎

Corolário 3.2.7 *Seja $1 \leq q < \infty$. Então,*

$$\mathcal{L}\left({}^n l_1; l_q\right) = \Pi_{r;s}^n\left({}^n l_1; l_q\right), \text{ se}$$

(a) $q < 2$, $r \geq q^*$ e $s = 2$, quando $\frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1$, ou

(b) $q > 2$, $r \geq q$ e $s = 2$, ou

(c) $q = 2$ e $1 \leq s \leq r \leq 2$.

Demonstração. Sob as condições do item (a), é fácil ver que $r \geq \frac{q^* s}{2}$ com $q < 2 = s$, isto é, a condição (ii) do Teorema *3.2.1.* Assim, temos $\mathcal{L}\left(l_1, l_q\right) = \Pi_{r;s}\left(l_1, l_q\right)$ e pelo Teorema *3.2.5*

$$\mathcal{L}\left({}^n l_1; l_q\right) = \Pi_{r;s}^n\left({}^n l_1; l_q\right).$$

Rescrevendo as condições do item (b), temos $s < q,\ r \geq q$, isto é, a condição (iv) do Teorema 3.2.1. Daí o resultado segue.

Agora, sob c), tomando $1 \leq s \leq r \leq 2$, obtemos que $r \geq \frac{2s}{2}$, então novamente estamos na condição (ii) do Teorema *3.2.1*, e analogamente obtemos o resultado desejado. ∎

3.3 Resultados de inclusão

Embora a teoria dos operadores múltiplo somantes seja uma importante generalização dos operadores absolutamente somantes, é interessante lembrar que não existe um teorema de inclusão geral para esta classe, isto é, se $p \leq q$ então não podemos afirmar que $\Pi_{p;p}^{n} \subset \Pi_{q;q}^{n}$, ao contrário do que ocorre no caso linear.

Pérez-García [30, pag 98] mostrou que se $2 < q < \infty$, existe uma forma bilinear $T : l_1 \times l_1 \to \mathbb{K}$ que não é múltiplo q-somante (este resultado naturalmente se generaliza para formas n-lineares com $n \geq 2$). Este resultado permite mostrar que não existe um teorema de inclusão geral nos operadores múltiplo somantes, pois como consequência do Teorema 3.2.3, temos

$$\mathcal{L}\left({}^2l_1\right) = \Pi_{2;2}\left({}^2l_1\right)$$

e, se houvesse um teorema de inclusão, tomando $2 < q$, obteríamos

$$\mathcal{L}\left({}^2l_1\right) = \Pi_{2;2}^{2}\left({}^2l_1\right) \subset \Pi_{q;q}^{2}\left({}^2l_1\right),$$

chegando a uma contradição.

A seguinte proposição é uma consequência simples dos resultados da seção anterior:

Proposição 3.3.1 *Se $2 \leq r < q$. Então,*

$$\mathcal{L}\left({}^nl_1\right) = \Pi_{q;r,\ldots,r,q}^{n}\left({}^nl_1\right).$$

Demonstração. Como $2 \leq r < q$, o Teorema *3.2.1 garante que*

$$\mathcal{L}\left(l_1; l_q\right) = \Pi_{q;r}\left(l_1; l_q\right)$$

e, pelo Corolário *2.2.4, temos*

$$\mathcal{L}\left({}^nl_1\right) = \Pi_{q;r,\ldots,r,q}^{n}\left({}^nl_1\right).$$

■

Pela proposição anterior e pelos resultados de Pérez-García mencionados no começo da seção, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(l_1, l_1\right) &= \Pi_{2;2}^{n}\left({}^nl_1\right) \\
\mathcal{L}\left({}^nl_1\right) &= \Pi_{q;q}^{n}\left({}^nl_1\right), \text{ para todo } 1 \leq q \leq 2 \\
\mathcal{L}\left({}^nl_1\right) &= \Pi_{q;r,q}^{n}\left({}^nl_1\right), \text{ para todo } 2 \leq r < q \\
\mathcal{L}\left({}^nl_1, l_1\right) &\neq \Pi_{q;q}^{n}\left({}^nl_1\right), \text{ para todo } 2 < q,
\end{aligned}$$

o que mostra que a proposição acima é ótima no sentido que se r for substituído por q, a igualdade não é mais verdadeira.

Antes de apresentar alguns resultados de inclusão para os operadores múltiplo somantes, destacamos dois lemas que serão úteis nas demonstrações.

Lema 3.3.2 *Seja* $\left(a^1_{i_1}\right)_{i_1=1}^{\infty}, ..., \left(a^k_{i_k}\right)_{i_k=1}^{\infty} \in l_p$, $1 \leq p < \infty$, *então*

$$\left(a^1_{i_1} \cdots a^k_{i_k}\right)_{i_1,...,i_k=1}^{\infty} \in l_p.$$

Demonstração. Vamos considerar o caso $k = 2$. É claro que

$$\sum_{i_1,i_2=1}^{n} \left|a^1_{i_1} a^2_{i_2}\right|^p = \left(\sum_{i_1=1}^{n} \left|a^1_{i_1}\right|^p\right)\left(\sum_{i_2=1}^{n} \left|a^2_{i_2}\right|^p\right)$$

e, fazendo $n \to \infty$, temos

$$\sum_{i_1,i_2=1}^{\infty} \left|a^1_{i_1} a^2_{i_2}\right|^p = \left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left|a^1_{i_1}\right|^p\right)\left(\sum_{i_2=1}^{\infty} \left|a^2_{i_2}\right|^p\right) < \infty.$$

O caso $n > 2$ é similar. ■

O próximo resultado é de fundamental importância para a demonstração dos resultados principais desta seção:

Lema 3.3.3 (Arregui–Blasco) *[2, Prop. 6] Seja X um espaço de Banach.*
(a) Se X tem cotipo 2, então $l_1^w(X) = l_2 l_2^w(X)$.
(b) Se X tem cotipo $q > 2$, então $l_1^w(X) = l_r l_{r'}^w(X)$ para todo $r > q$.

O seguinte resultado está intimamente relacionado com o Teorema 1.2.11:

Teorema 3.3.4 *Se $E_1, ..., E_n$ tem cotipo 2, então*

$$\Pi_2^n(E_1, ..., E_n; F) \subset \Pi_1^n(E_1, ..., E_n; F).$$

Demonstração. Sejam $A \in \Pi_2^n(E_1, ..., E_n; F)$ e $\left(x^j_{i_j}\right)_{i_j=1}^{\infty} \in l_1^w(E_j)$, $j = 1, ..., n$. Como E_j tem cotipo 2 então, pelo Lema *3.3.3,* temos

$$l_1^w(E_j) = l_2 l_2^w(E_j)$$

para cada $j = 1, ..., n$. Logo, tomando $\left(a^j_{i_j}\right)_{i_j=1}^{\infty} \in l_2$ e $\left(y^j_{i_j}\right)_{i_j=1}^{\infty} \in l_2^w(E_j)$, temos

$$\left(x^j_{i_j}\right)_{i_j=1}^{\infty} = \left(a^j_{i_j} y^j_{i_j}\right)_{i_j=1}^{\infty} \in l_2 l_2^w(E_j)$$

e

$$\begin{aligned}\left(A\left(x^1_{i_1}, ..., x^n_{i_n}\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} &= \left(A\left(a^1_{i_1} y^1_{i_1}, ..., a^n_{i_n} y^n_{i_n}\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \\ &= \left(a^1_{i_1} \cdots a^n_{i_n} A\left(y^1_{i_1}, ..., y^n_{i_n}\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty}.\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder obtemos

$$\sum_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \left\| a_{i_1}^1 \cdots \ a_{i_n}^n A\left(y_{i_1}^1, ..., y_{i_n}^n\right) \right\|$$

$$\leq \left(\sum_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \left| a_{i_1}^1 \cdots \ a_{i_n}^n \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \left\| A\left(y_{i_1}^1, ..., y_{i_n}^n\right) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e usando o Lema *3.3.2* segue que

$$\left(a_{i_1}^1 \cdots \ a_{i_n}^n\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \in l_2.$$

Como $A \in \Pi_2^n (E_1, ..., E_n; F)$, concluímos que

$$\sum_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \left\| a_{i_1}^1 \cdots \ a_{i_n}^n A\left(y_{i_1}^1, ..., y_{i_n}^n\right) \right\| < \infty.$$

Logo,

$$\left(A\left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \in l_1 (F)$$

e assim segue que $A \in \Pi_1^n (E_1, ..., E_n; F)$. ■

- Uma consequência do Teorema 1.2.11 é que se X tem cotipo 2, então $\Pi_p (E; F) = \Pi_r (E; F)$ para todo $1 \leq p \leq r \leq 2$, pois basta observar a seguinte cadeia de inclusões:

$$\Pi_1 (E; F) \subset \Pi_p (E; F) \subset \Pi_r (E; F) \subset \Pi_2 (E; F) \overset{(1.2.11)}{\subset} \Pi_1 (E; F) \subset \Pi_p (E; F) \subset \Pi_r (E; F).$$

Para operadores múltiplo somantes, temos um resultado similar, exceto, talvez, para o caso $r = 2$, como veremos no Teorema 3.3.6.

Antes de fazer a demonstração, vamos enunciar um teorema apresentado por Pérez-García em [30, pag 59], o que garante parte deste resultado, cuja demonstração vai além dos objetivos desse texto.

Teorema 3.3.5 (Pérez-García) *Sejam* $1 \leq p \leq q < 2$ *e* $E_1, ..., E_n, F$ *espaços de Banach. Se* $A \in \Pi_p^n (E_1, ..., E_n; F)$ *então* $A \in \Pi_q^n (E_1, ..., E_n; F)$.

O próximo resultado, provado independentemente em [9, 7, 36], complementa o resultado de Pérez-García.

Teorema 3.3.6 (Pérez-García, Botelho–Pellegrino, Popa) *Se* $E_1, ..., E_n$ *têm cotipo* 2 *então*

$$\Pi_p^n (E_1, ..., E_n; F) = \Pi_r^n (E_1, ..., E_n; F)$$

para todo $1 \leq p \leq r < 2$.

Demonstração. Vejamos que

$$\Pi_p^n(E_1,...,E_n;F) \supset \Pi_r^n(E_1,...,E_n;F).$$

A outra inclusão já é conhecida. É suficiente provar o resultado para $p=1$.

Sejam $A \in \Pi_r^n(E_1,...,E_n;F)$ e $\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty} \in l_1^w(E_j)$, $j=1,...,n$. Como E_j tem cotipo 2, E_j tambem tem cotipo q com $r' > q > 2$, (pois, como $r < 2$ então $r' > 2$). Logo, usando o Lema *3.3.3,* temos

$$l_1^w(E_j) = l_{r'} l_r^w(E_j), \; j=1,...,n,$$

donde

$$\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty} = \left(a_{i_j}^j y_{i_j}^j\right) \in l_{r'} l_r^w(E_j).$$

Assim, trabalhando como no teorema anterior, temos

$$\left(A\left(x_{i_1}^1,...,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \in l_1(F)$$

e

$$A \in \Pi_1^n(E_1,...,E_n;F).$$

Logo, $\Pi_r^n(E_1,...,E_n;F) \subset \Pi_1^n(E_1,...,E_n;F)$. ∎

Corolário 3.3.7 *Se $E_1,...,E_n$ têm cotipo 2 então*

$$\Pi_2^n(E_1,...,E_n;F) \subset \Pi_p^n(E_1,...,E_n;F)$$

para todo $1 \leq p < 2$.

Demonstração. Pelo Teorema *3.3.4* , temos

$$\Pi_2^n(E_1,...,E_n;F) \subset \Pi_1^n(E_1,...,E_n;F)$$

e pelo Teorema *3.3.6 sabemos que*, para $1 \leq p < 2$, vale

$$\Pi_1^n(E_1,...,E_n;F) = \Pi_p^n(E_1,...,E_n;F).$$

Logo,

$$\Pi_2^n(E_1,...,E_n;F) \subset \Pi_p^n(E_1,...,E_n;F),$$

para todo $1 \leq p \leq 2$. ∎

Até agora, estivemos trabalhando com espaços de Banach no domínio cujo cotipo é 2. O seguinte teorema mostra um resultado de coincidência quando é o contradomínio que tem cotipo 2. Para apresentá-lo, precisaremos do seguinte teorema:

Teorema 3.3.8 (Pérez-García) *([30, Theorem 4.18]) Se $1 \leq p \leq q \leq 2$, F tem cotipo 2 e $A \in \Pi_p^n(E_1,...,E_n;F)$, então $A \in \Pi_q^n(E_1,...,E_n;F)$.*

Teorema 3.3.9 *Se $E_1,...,E_n$ e F têm cotipo 2 então*

$$\Pi_p^n(E_1,...,E_n;F) = \Pi_r^n(E_1,...,E_n;F),$$

para todo $1 \leq p \leq r \leq 2$.

Demonstração. Se $r = 2$, como $E_1, ..., E_n$ têm cotipo 2, sabemos, pelo corolário anterior, que

$$\Pi_2^n (E_1, ..., E_n; F) \subset \Pi_p^n (E_1, ..., E_n; F)$$

quando $1 \leq p \leq 2$. Como F tem cotipo 2 o resultado anterior garante que

$$\Pi_p^n (E_1, ..., E_n; F) \subset \Pi_2^n (E_1, ..., E_n; F) .$$

Logo,

$$\Pi_p^n (E_1, ..., E_n; F) = \Pi_2^n (E_1, ..., E_n; F) .$$

Se $r < 2$, temos o *teorema 3.3.6* ■

Sabemos que qualquer espaço de Banach tem cotipo $q \geq 2$; nos resultados anteriores temos trabalhado só com espaços de Banach cujo cotipo é exatamente 2. Nos seguintes resultados vamos mostrar o que acontece quando o cotipo nos espaços de Banach envolvidos finito e maior que 2.

Reescrevendo o item (b) do Teorema *1.2.11*, temos

- Se X tem cotipo $2 < q < \infty$, então $\Pi_r (X; Y) = \Pi_1 (X; Y)$ para todo $1 < r < \frac{q}{q-1}$.

Assim, podemos deduzir que se X tem cotipo $2 < q < \infty$, tem-se que

$$\Pi_r (X; Y) = \Pi_s (X; Y)$$

para todo $1 \leq s \leq r < \frac{q}{q-1}$, pois $\Pi_s (X; Y) = \Pi_1 (X; Y)$. Vejamos que este resultado se pode generalizar para o caso multilinear:

Teorema 3.3.10 (Botelho–Pellegrino, Popa) *Se $E_1, .., E_n$ têm cotipo $q > 2$ então*

$$\Pi_s^n (E_1, ..., E_n; F) \subset \Pi_1^n (E_1, ..., E_n; F)$$

para todo $1 \leq s < \frac{q}{q-1} = q'$.

Demonstração. Sejam $A \in \Pi_s (E_1, ..., E_n; F)$ e $\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty} \in l_1^w (E_j)$, $j = 1, ..., n$. Como E_j tem cotipo $q > 2$, pelo Lema *3.3.3,*

$$l_1^w (E_j) = l_{s'} l_s^w (E_j) ,$$

pois $s' > q$. Então,

$$\left(x_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty} = \left(a_{i_j}^j y_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty} ,$$

para algum $\left(a_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty} \in l_{s'}$ e $\left(y_{i_j}^j\right)_{i_j=1}^{\infty} \in l_s^w (E_j)$. Logo,

$$\begin{aligned} \left(A \left(x_{i_1}^1, ..., x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} &= \left(A \left(a_{i_1}^1 y_{i_1}^1, ..., a_{i_n}^n y_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} \\ &= \left(a_{i_1}^1 \cdots\ a_{i_n}^n A \left(y_{i_1}^1, ..., y_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,...,i_n=1}^{\infty} . \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} \left\| a_{i_1}^1 \cdots \ a_{i_n}^n A\left(y_{i_1}^1, ..., y_{i_n}^n\right)\right\| \\
&\leq \left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} \left|a_{i_1}^1 \cdots \ a_{i_n}^n\right|^{s'}\right)^{\frac{1}{s'}} \left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} \left\|A\left(y_{i_1}^1, ..., y_{i_n}^n\right)\right\|^{s}\right)^{\frac{1}{s}}
\end{aligned}$$

e usando o Lema *3.3.2*, temos

$$\left(a_{i_1}^1 \cdots \ a_{i_n}^n\right)_{i_1,\ldots.,i_n=1}^{\infty} \in l_{s'}.$$

Pela hipótese concluímos que

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} \left\| a_{i_1}^1 \cdots \ a_{i_n}^n A\left(y_{i_1}^1, ..., y_{i_n}^n\right)\right\| < \infty.$$

Logo,

$$\left(a_{i_1}^1 \cdots \ a_{i_n}^n A\left(y_{i_1}^1, ..., y_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} \in l_1\left(F\right).$$

Assim, temos $A \in \Pi_1^n\left(E_1, ..., E_n; F\right)$ e, portanto,

$$\Pi_s^n\left(E_1, ..., E_n; F\right) \subset \Pi_1^n\left(E_1, ..., E_n; F\right).$$

■

Agora segue a generalização do Teorema *1.2.11:*

Corolário 3.3.11 *Se $E_1, ..., E_n$ têm cotipo $q > 2$ então*

$$\Pi_s^n\left(E_1, ..., E_n; F\right) = \Pi_p^n\left(E_1, ..., E_n; F\right)$$

para todo $1 \leq s \leq p < \frac{q}{q-1}$.

Demonstração. Como $\frac{q}{q-1} < 2$, pelo Teorema *3.3.5*, temos

$$\begin{aligned}
&\Pi_s^n\left(E_1, ..., E_n; F\right) \subset \Pi_p^n\left(E_1, ..., E_n; F\right) \text{ e} \\
&\Pi_1^n\left(E_1, ..., E_n; F\right) \subset \Pi_s^n\left(E_1, ..., E_n; F\right)
\end{aligned}$$

Usando o teorema anterior, obtemos

$$\Pi_p^n\left(E_1, ..., E_n; F\right) \subset \Pi_1^n\left(E_1, ..., E_n; F\right).$$

Logo, temos a seguinte cadeia de inclusões:

$$\Pi_p^n\left(E_1, ..., E_n; F\right) \subset \Pi_1^n\left(E_1, ..., E_n; F\right) \subset \Pi_s^n\left(E_1, ..., E_n; F\right) \subset \Pi_p^n\left(E_1, ..., E_n; F\right).$$

Daí, concluímos que

$$\Pi_p^n\left(E_1, ..., E_n; F\right) = \Pi_s^n\left(E_1, ..., E_n; F\right).$$

■

Referências Bibliográficas

[1] R. Alencar e M. Matos, *Some classes of multilinear mappings between Banach spaces*, Publ. Dep. Analisis Mat. Universidad Complutense de Madrid **12** (1989), 1–34.

[2] J.L. Arregui e O. Blasco, *(q,p)-summing sequences*, J. Math. Anal. Appl. **274** (2002), 812–827.

[3] G. Bennett. *Schur Multipliers*, Duke Math. Journal **44** (1977), 603–639.

[4] A. T. Bernardino, *Ideais de aplicações multilineares e polinômios entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, 2008.

[5] A.T. Bernardino, *A simple natural approach to the uniform boundedness principle for multilinear mappings*. Proyecciones (Antofagasta. Impresa), **28** (2009), 203–207.

[6] H. F. Bohnenblust, E. Hille, *On the absolute convergence of Dirichlet series*, Ann. of Math. (2) **32** (1931) 600–622.

[7] G. Botelho, C. Michels e D. Pellegrino, *Complex interpolation and summability properties of multilinear operators*, Rev. Matem. Complutense. **23** (2010), 139–161.

[8] G. Botelho e D. Pellegrino, *When every multilinear mapping is multiple summing.* Math.Nachr. **282** (2009), 1414–1422.

[9] G. Botelho e D. Pellegrino, *Coincidences for multiple summing mappings*, In: Segundo Enama, 27–28,. João Pessoa, Brazil (2008)

[10] F. Bombal, D. Pérez-García e I. Villanueva, *Multilinear extensions of a Grothendieck's theorem*, Q. J. Math. **55** (2004), 441–450.

[11] E. Çaliskan e D.M. Pellegrino, *On the multilinear generalizations of the concept of absolutely summing operators*, R. Mount. J. Math. **37** (2007), 1137–1154.

[12] A. Defant e K. Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1993.

[13] A. Defant, D. Popa e U. Schwarting, *Coordinatewise multiple summing operators in Banach spaces*, J. Funct. Anal. **259** (2010), 220–242.

[14] A. Defant e P. Sevilla-Peris, *A new multilinear insight on Littlewood's 4/3-inequality*, J. Funct. Anal. **256** (2009), 1642–1664.

[15] A. Defant, L. Frerick, J. Ortega-Cerdà, M. Ounaïes, K. Seip, *The Bohnenblust-Hille inequality for homogeneous polynomials is hypercontractive*, Ann. of Math. (2) **174** (2011), 485–497

[16] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 43, 1995.

[17] V. Dimant, *Strongly p-summing multilinear operators*, J. Math. Anal. Appl. **278** (2003), 182–193.

[18] A. Dvoretzky e C. A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **36** (1950), 192–197.

[19] C. Fernandez, *The closed graph theorem for multilinear mappings*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **19** (1996), 407–408.

[20] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs Acad. Math. Soc. **16**, 1955.

[21] A. *Grothendieck, Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. São Paulo **8** (1956), 1-79.

[22] S. Kwapień, *On a theorem of L. Schwarz and its applications to absolutely summing operators*, Studia Math. **38** (1970), 193-201.

[23] H. Jarchow, C. Palazuelos, D. Pérez-García e I. Villanueva, *Hahn-Banach extensions of multilinear forms and summability*, J. Math. Anal. Appl. **336** (2007), 1161–1177.

[24] J. Lindenstrauss e A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in L_p spaces and their applications*, Studia Math. **29** (1968), 276–326.

[25] M. C. Matos, *Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mapping.* Collect. Math. **54**, (2003),111–136.

[26] B. Mitjagin e A. Pełczyński, *Nuclear operators and approximative dimension*, Proc. of ICM, Moscow, 1966, 366–372.

[27] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, Dover Publications, 2010.

[28] D. Núñez-Alarcón, *O Teorema de Bohnenblust-Hille.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba. 2011.

[29] D. Pérez-García, *Operadores multilineales absolutamente sumantes*, Dissertação, Universidad Complutense de Madrid, 2002.

[30] D. Pérez-García, *Operadores multilineales absolutamente sumantes*, Tese, Universidad Complutense de Madrid, 2003.

[31] D. Pérez-García, *The inclusion theorem for multiple summing operators*, Studia Math. **165** (2004), 275-290.

[32] A. Pełczyński, *A characterization of Hilbert-Schmidt operators*, Studia Math. **28** (1967), 355-360.

[33] A. Pietsch, *Ideals of multilinear functionals*, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in theoretical Physics, 185-199, Teubner-Texte, Leipzig, 1983.

[34] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North–Holland, 1980.

[35] A. Pietsch, *Absolut p–summierende Abbildungen in normieten Räumen*, Studia Math. **27** (1967), 333- 353.

[36] D. Popa, *Reverse inclusions for multiple summing operators*, J. Math. Anal. Appl. **350** (2009), 360-368.

[37] D. Popa, *Multilinear variants of Pietsch's composition theorem*, J. Math. Anal. Appl. **370** (2010), 415-430.

[38] L. René Schilling, *Measures, Integrals and Martingales.* Cambridge University Press, 2005.

[39] R. Ryan. *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces.* National University of Ireland. Department of Mathematics. 2002.

[40] J. Santos, *Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, 2008.

[41] A.R. Silva, *Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2010.

[42] M.L.V. Souza, *Aplicações multilineares completamente absolutamente somantes*, Thesis, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2003.