

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Estudo de uma classe de equações elípticas semilineares em $\mathbb{R}^n$

Tatiane Carvalho Santos

2011

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Estudo de uma classe de equações elípticas semilineares em $\mathbb{R}^n$

por

Tatiane Carvalho Santos

sob orientação do

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros

Setembro de 2011
João Pessoa-PB

S237e Santos, Tatiane Carvalho.
Estudo de uma classe de equações elípticas semilineares
em $\mathbb{R}^n$ / Tatiane Carvalho Santos.- João Pessoa, 2011.
62f. : il.
Orientador: Everaldo Souto de Medeiros
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Existência. 3. Não Existência e Unicidade
de Solução. 4. Teorema do Ponto Fixo de Schauder. 5. Método
de sub e supersolução. 6. Estimativas integrais a priori.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Estudo de uma classe de equações elípticas semilineares em $\mathbb{R}^n$
por

Tatiane Carvalho Santos

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB (Orientador)

Prof. Dr^a. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes - UFPB

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB (Suplente)

À minha filha.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus.

Aos meus pais, pelo incentivo durante toda minha vida estudantil.

Ao meu noivo Maikon, pela força, incentivo, preocupação, compreensão, pelo companheirismo, carinho, enfim por tudo.

Aos professores da UFS (Universidade Federal de Sergipe) pelo apoio, em especial aos Professores Fabio Dos Santos e Paulo Rabelo.

Aos professores da UFPB (Universidade Federal da Paraíba), principalmente ao meu orientador Everaldo Medeiros, por ser um orientador presente, preocupado e dedicado.

A todos os amigos que fiz durante o mestrado, onde destaco alguns: Marco, Karine, Desterro, Suelen, Ricardo, Rodrigo, Pryscilla, Geraldo, Claudemir, Viviane, Bruna.

A mim.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram para mais essa conquista em minha vida acadêmica.

Resumo

Neste trabalho estudamos a equação elíptica semilinear $\Delta u + |u|^p + f(x) = 0$ em $\mathbb{R}^n$, onde $n \geq 3$, $p > n/(n-2)$ e f uma função Hölder contínua. Assumindo alguma condição de crescimento em f no infinito, discutiremos a existência de solução clássica. Além disso, mostraremos um princípio de comparação e como consequência obtemos resultados de não existência e de unicidade de solução clássica em uma certa classe de funções. Para obtermos o resultado de existência, usaremos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder. A não existência e unicidade de solução é obtida usando o método de sub e supersolução juntamente com estimativas integrais a priori.

Abstract

In this work we study the semilinear elliptic equation $\Delta u + |u|^p + f(x) = 0$ in $\mathbb{R}^n$, where $n \geq 3$, $p > n/(n-2)$ and f is a Hölder continuous function. Assuming a growth condition on f at infinity we discuss the existence of classical solution. Furthermore, we prove a comparison principle and as a consequence we obtain results of non-existence and uniqueness of classical solution in a certain class of functions. To get the result of existence, we use the Schauder Fixed Point Theorem. The non-existence and uniqueness of solution is obtained by using the method of sub and supersolution with a priori integral estimates.

Sumário

1	Resultados preliminares	1
1.1	Potencial Newtoniano	1
1.2	Teorema do Ponto Fixo de Schauder	11
2	Existência de solução	20
2.1	Resultados principais	20
2.2	Resultados auxiliares	21
2.3	Prova do Teorema 2.1.1	41
3	Resultados de não existência	43
3.1	Princípios do máximo e regularidade	44
3.2	Método de sub e supersolução	46
3.3	Média esférica	52
3.4	Lema auxiliar	55
3.5	Prova do Teorema 3.0.1	57
3.5.1	Prova do Corolário 3.0.2	59
3.5.2	Prova do Corolário 3.0.3	60

Introdução

O nosso objetivo neste trabalho é obter resultados de existência, não existência e unicidade de solução clássica para a seguinte equação elíptica semilinear não homogênea:

$$\Delta u + |u|^p + f(x) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

onde $n \geq 3$, $p > n/(n-2)$ e f é uma função Hölder contínua não identicamente nula.

Este tipo de equação aparece naturalmente na teoria da probabilidade no estudo de processos estocásticos. Em particular, a equação (1) surge como teoremas limites no estudo de movimentos super-Browniano, veja por exemplo Tzong-Yow Lee [12], Guy Bernard [2] e suas referências.

O problema (1) com $f \equiv 0$, que é o caso homogêneo, tem sido estudado extensivamente nos últimos anos, veja por exemplo [9], [10], [11], [12] e [13].

Uma das principais dificuldades no estudo de equações diferenciais definidas em todo o $\mathbb{R}^n$ é a falta de compacidade.

Baseado no artigo de Guy Bernard [1], estabelecemos existência de solução assumindo alguma condição de crescimento em f e no potencial Newtoniano w_f , ou seja assumindo que f satisfaz as hipóteses:

1. $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|y|^{n-2}} dy < \infty$;
2. $w_f(x) \leq \frac{\xi}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}}, \forall x \in \mathbb{R}^n$,

onde $w_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, é o potencial Newtoniano da função f , ξ é um parâmetro pequeno e p, δ pertence a algum intervalo. Neste caso, o nosso principal resultado concernente a existência de solução para (1) é:

Teorema 1 *Sejam $p > n/(n-2)$, com $n \geq 3$ e $\delta > 0$ satisfazendo $(n-2) - \frac{n}{p} < \delta \leq (n-2)p - n$. Suponha as seguintes condições no termo não homogêneo f :*

1. $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ com $0 < \alpha \leq 1$;
2. $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|y|^{n-2}} dy < \infty$;
3. $|w_f(x)| \leq \frac{\xi}{2(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Então, existe $\xi_0 > 0$ e $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ solução de (1) tal que

$$w_f(x) \leq u(x) \leq \frac{\xi}{(1 + |x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

e $0 < \xi \leq \xi_0$.

A prova deste resultado será obtida usando método de ponto fixo, ou seja, a solução é obtida aplicando o Teorema do Ponto Fixo de Schauder para a aplicação $\Phi : V_\xi \longrightarrow V_\xi$ definida por

$$\Phi u(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^p + f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy,$$

onde

$$V_\xi = \left\{ u \in C_B(\mathbb{R}^n); |u(x)| \leq \frac{\xi}{(1 + |x|^2)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}} \right\}.$$

Na segunda parte do nosso trabalho, estabelecemos condições necessárias e suficientes para que as soluções de (1) estejam ordenadas em uma certa classe de funções. Mais precisamente, considerando a classe de funções

$$S = \left\{ u \in C^2(\mathbb{R}^n); |u(x)| \leq \frac{\xi_2}{(1 + |x|^2)^{\frac{(1+\delta)}{(p-1)}}} \right\},$$

temos o seguinte resultado de comparação:

Teorema 2 *Seja $p > n/(n-2)$, com $n \geq 3$. Se $u_1, u_2 \in S$ são respectivamente soluções de*

$$\Delta u_1 + |u_1|^p + f_1(x) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n$$

e

$$\Delta u_2 + |u_2|^p + f_2(x) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n,$$

com $f_1, f_2 \in C(\mathbb{R}^n)$ e $f_1 \leq f_2$ em $\mathbb{R}^n$ então $u_1 \leq u_2$ em $\mathbb{R}^n$.

A principal ferramenta que usaremos na prova do Teorema 2 será o método de sub e supersolução combinado com estimativas integrais a priori.

Como consequência deste Teorema de Comparação temos o seguinte resultado de não existência.

Corolário 3 *Suponha que $p > n/(n-2)$, com $n \geq 3$. Se $f \in C(\mathbb{R}^n)$ e $f < 0$, então a equação (1) não possui solução em S .*

Ainda como consequência do Teorema 2, temos o seguinte resultado de unicidade.

Corolário 4 *Se $p > n/(n-2)$, com $n \geq 3$ e $f \in C(\mathbb{R}^n)$, então a equação (1) possui no máximo uma solução em S .*

Este trabalho está dividido em três capítulos como segue: No Capítulo 1, estabelecemos alguns resultados preliminares referentes a: regularidade do potencial Newtoniano, grau topológico de Brouwer e o Teorema do Ponto Fixo de Schauder. Estes resultados serão utilizados nos capítulos subsequentes. No Capítulo 2, apresentamos a prova do Teorema 1 usando o Teorema do Ponto Fixo de Schauder. Finalmente, no Capítulo 3, será apresentada a prova do Teorema 2.

Com o objetivo de tornar os capítulos independentes da introdução, enunciaremos novamente os resultados principais em cada capítulo.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Neste capítulo iremos abordar de forma sucinta os temas necessários para o desenvolvimento desta dissertação.

1.1 Potencial Newtoniano

Inicialmente, vamos definir a solução fundamental para a equação de Laplace:

$$\Delta u = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Vamos encontrar uma solução para a equação (1.1) da forma $u(x) = v(r)$, com $r = |x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Para $i = 1, \dots, n$, temos

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r},$$

$$u_{x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}$$

e

$$u_{x_i x_i} = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta u &= v''(r) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right) \\ &= v''(r) + v'(r) \left(\frac{n}{r} - \frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\Delta u = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

se, e somente se,

$$v''(r) + (n-1) \frac{v'(r)}{r} = 0; \quad r > 0.$$

Equivalentemente

$$(v' r^{n-1})' = 0.$$

Assim,

$$v' = \frac{c_1}{r^{n-1}}$$

e portanto

$$v(r) = \begin{cases} c_1 \ln r + c_2 & \text{se } n = 2 \\ \frac{c_1}{r^{n-2}} + c_2 & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

onde c_1 e c_2 são constantes. Escolhendo c_1 e c_2 constantes adequadas, temos a seguinte definição:

Definição 1.1.1 *A função*

$$\Gamma(x - y) = \Gamma(|x - y|) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x - y| & \text{se } n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} |x - y|^{2-n} & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

onde ω_n é a área da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$, definida para $x, y \in \mathbb{R}^n$ com $x \neq y$, é a solução fundamental da equação de Laplace.

Definição 1.1.2 *Dizemos que uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é Hölder contínua se existe $0 < \alpha \leq 1$ tal que*

$$\sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

Neste caso, denotaremos o espaço das funções Hölder contínuas por $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$, se $\alpha < 1$ e $C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ se $\alpha = 1$. Além disso, denotaremos também

$$[f]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Em particular

$$|f(x) - f(y)| \leq [f]_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} |x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Definição 1.1.3 *Dizemos que f é localmente Hölder contínua com expoente α , se f for uma função Hölder contínua com expoente α em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 1.1.4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então, para todo inteiro $k \geq 0$ e para todos $0 < \alpha < \beta < 1$ valem as seguintes imersões:*

$$\begin{aligned} C^{k+1}(\overline{\Omega}) &\hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}) \\ C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) &\hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}) \\ C^{k,\beta}(\overline{\Omega}) &\hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Além disso, se Ω é limitado então as duas últimas imersões são compactas.

Demonstração: Ver Teorema 1.31 em [14], pg. 11. ■

Definição 1.1.5 *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Hölder contínua e $n \geq 3$. Definimos o potencial Newtoniano de f por:*

$$w_f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y) f(y) dy,$$

ou seja,

$$w_f(x) = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-2}} dy. \quad (1.2)$$

A partir de agora, iremos considerar $C_n = \frac{1}{n(n-2)\omega_n}$, com $n \geq 3$. Observe que a partir da Definição 1.1.1, para $x \neq y$, temos que

$$D_{x_i} \Gamma(x - y) = \frac{-1}{n\omega_n} (x_i - y_i) |x - y|^{-n}$$

e

$$D_{x_i x_j} \Gamma(x - y) = \frac{1}{n\omega_n} \{ |x - y|^2 \delta_{ij} - n(x_i - y_i)(x_j - y_j) \} |x - y|^{-n-2}.$$

Dessa forma, obtemos as seguintes estimativas

$$|D_{x_i} \Gamma(x - y)| \leq \frac{1}{n\omega_n} |x - y|^{1-n}; \quad x \neq y \quad (1.3)$$

e

$$|D_{x_i x_j} \Gamma(x - y)| \leq \frac{1}{\omega_n} |x - y|^{-n}; \quad x \neq y. \quad (1.4)$$

O resultado que apresentaremos a seguir é uma versão do Lema 4.1 de [4].

Lema 1.1.6 *Sejam f uma função Hölder contínua e $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|y|^{n-2}} dy < \infty$. Então $w_f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e para cada $i = 1, \dots, n$ temos*

$$D_{x_i} w_f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} D_{x_i} \Gamma(x - y) f(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Considere a função

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} D_{x_i} \Gamma(x - y) f(y) dy.$$

Afirmamos que v está bem definida. De fato, temos

$$|v(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |D_{x_i} \Gamma(x-y)| |f(y)| dy.$$

Por (1.3), obtemos

$$|v(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{n\omega_n |x-y|^{n-1}} dy.$$

Logo, usando que f é contínua, temos

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq \frac{1}{n\omega_n} \left[\int_{|y| \leq 2|x|} \frac{|f(x+y)|}{|y|^{n-1}} dy + \int_{|y| > 2|x|} \frac{|f(x+y)|}{|y|^{n-1}} dy \right] \\ &\leq \frac{1}{n\omega_n} \left[C_1(x) + \int_{|y| > 2|x|} \frac{|f(x+y)|}{|y|^{n-2} |y|} dy \right] \\ &\leq \frac{1}{n\omega_n} \left[C_1(x) + C_2(x) \int_{|y| > 2|x|} \frac{|f(x+y)|}{|y|^{n-2}} dy \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Afirmamos que se $|y| \geq 2|x|$, então $\frac{2^{n-2}}{|y|^{n-2}} \leq \frac{3^{n-2}}{|x+y|^{n-2}}$. De fato,

$$|y| = |x+y-x| \geq |x+y| - \frac{|y|}{2}.$$

Logo,

$$\frac{2^{n-2}}{|y|^{n-2}} \leq \frac{3^{n-2}}{|x+y|^{n-2}}. \quad (1.6)$$

Assim, de (1.6) e (1.5) temos

$$|v(x)| \leq \frac{1}{n\omega_n} \left[C_1(x) + C_2(x) \int_{|y| > 2|x|} \frac{|f(x+y)|}{|x+y|^{n-2}} dy \right] \leq C(x) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(z)|}{|z|^{n-2}} dz < \infty,$$

o que prova a afirmação. Mostraremos agora que $v = D_{x_i} w_f$. Para isso, fixe $\eta \in C^1(\mathbb{R})$, onde $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \eta' \leq 2$ e

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 1 \\ 1, & \text{se } t \geq 2. \end{cases}$$

Seja

$$w_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) \eta(y) f(y) dy,$$

onde $\eta_\epsilon = \eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)$. Pelo Teorema 6, pág. 630 de [3], temos que $w_\epsilon \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Note que

$$\begin{aligned} v(x) - D_{x_i} w_\epsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} D_{x_i} \Gamma(x-y) f(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} D_{x_i} (\Gamma(x-y) \eta) f(y) dy \\ &= \int_{\epsilon \leq |x-y| \leq 2\epsilon} D_{x_i} \{(1-\eta) \Gamma(x-y)\} f(y) dy. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |v(x) - D_{x_i} w_\epsilon(x)| &\leq \int_{\epsilon \leq |x-y| \leq 2\epsilon} |D_{x_i} \{(1-\eta) \Gamma(x-y)\}| |f(y)| dy \\ &\leq \int_{\epsilon \leq |x-y| \leq 2\epsilon} |D_{x_i} (1-\eta) \Gamma(x-y)| |f(y)| dy \\ &\quad + \int_{\epsilon \leq |x-y| \leq 2\epsilon} |(1-\eta) D_{x_i} \Gamma(x-y)| |f(y)| dy. \end{aligned}$$

Observe que

$$\eta \left(\frac{|x-y|}{\epsilon} \right) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x-y| \leq \epsilon \\ 1, & \text{se } |x-y| \geq 2\epsilon \end{cases}$$

e

$$D_{x_i} \eta \left(\frac{|x-y|}{\epsilon} \right) = \eta' \left(\frac{|x-y|}{\epsilon} \right) \frac{(x_i - y_i)}{\epsilon |x-y|} \leq \frac{2}{\epsilon}. \quad (1.7)$$

Logo,

$$|v(x) - D_{x_i} w_\epsilon(x)| \leq \sup_{\epsilon \leq |x-y| \leq 2\epsilon} |f(y)| \int_{\epsilon \leq |x-y| \leq 2\epsilon} \left(|D_{x_i} \Gamma(x-y)| + \frac{2}{\epsilon} |\Gamma(x-y)| \right) dy.$$

Agora, a estimativa (1.3) juntamente com a Definição 1.1.1, implica

$$\begin{aligned} &|v(x) - D_{x_i} w_\epsilon(x)| \\ &\leq \sup_{\epsilon \leq |x-y| \leq 2\epsilon} |f(y)| \int_{\epsilon \leq |x-y| \leq 2\epsilon} \left(\frac{1}{n\omega_n |x-y|^{n-1}} + \frac{2}{\epsilon(n-2)\omega_n n |x-y|^{n-2}} \right) dy. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned} |v(x) - D_{x_i} w_\epsilon(x)| &= \sup_{\epsilon \leq |x-y| \leq 2\epsilon} |f(y)| \int_{\epsilon}^{2\epsilon} \left(\frac{r^{n-1}}{nr^{n-1}} + \frac{2r^{n-1}}{\epsilon(n-2)nr^{n-2}} \right) dr \\ &= \sup_{\epsilon \leq |x-y| \leq 2\epsilon} |f(y)| \int_{\epsilon}^{2\epsilon} \left(\frac{1}{n} + \frac{2r}{\epsilon n(n-2)} \right) dr. \end{aligned}$$

Assim

$$|v(x) - D_{x_i} w_\epsilon(x)| \leq \sup_{\epsilon \leq |x-y| \leq 2\epsilon} |f(y)| \left(\frac{\epsilon}{n} + \frac{3\epsilon}{n(n-2)} \right).$$

Logo, w_ϵ e $D_{x_i} w_\epsilon$ convergem uniformemente para w_f e v em subconjuntos compactos, respectivamente quando $\epsilon \rightarrow 0$. Portanto $w_f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $v = D_{x_i} w_f$. $\blacksquare$

Lema 1.1.7 *Se f é uma função Hölder contínua e $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|y|^{n-2}} dy < \infty$. Então o potencial Newtoniano $w_f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e*

$$-\Delta w_f = f \quad \text{em } \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Ver Lema 4.2, pg. 55 de [4]. ■

Os resultados que apresentaremos a seguir podem ser encontrados em Li-Ni [5].

Lema 1.1.8 *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função localmente Hölder contínua com o seguinte decaimento no infinito*

$$|f(y)| \leq C |y|^l, \quad (1.8)$$

onde $C > 0$, $l < -2$ são constantes. Se $n \geq 3$ e w_f é o potencial Newtoniano de f , isto é,

$$w_f(x) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-2}} dy, \quad (1.9)$$

então w_f está bem definido e

$$|w_f(x)| \leq \begin{cases} C |x|^{2-n} & \text{se } l < -n \\ C |x|^{2-n} \ln |x| & \text{se } l = -n \\ C |x|^{2+l} & \text{se } -n < l < -2. \end{cases}$$

Demonstração: Primeiro, vamos mostrar que w_f está bem definido. De fato, por (1.8) existe $R > 0$ tal que

$$|f(y)| \leq C_1 |y|^l, \text{ para } |y| > R. \quad (1.10)$$

Além disso, desde que f é localmente Hölder contínua existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$|f(y)| \leq C_2, \text{ para } |y| \leq R. \quad (1.11)$$

Considere $K = \max\{C_1, C_2\}$. Logo por (1.10) e (1.11), temos que

$$|f(y)| \leq \begin{cases} K |y|^l & \text{se } |y| > R \\ K & \text{se } |y| \leq R. \end{cases}$$

Assim, se $|y| > R$ temos

$$(1 + |y|^{-l}) |f(y)| = |f(y)| + |f(y)| |y|^{-l} \leq K |y|^l + K \leq C_3, \text{ pois } l < -2.$$

Para $|y| \leq R$, temos

$$(1 + |y|^{-l}) |f(y)| \leq K + R^{-l} K \leq C_4.$$

Considerando $K_1 = \max\{C_3, C_4\}$, obtemos

$$(1 + |y|^{-l}) |f(y)| \leq K_1, \forall y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.12)$$

Logo

$$|w_f(x)| \leq C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{K_1}{|x - y|^{n-2} (1 + |y|^{-l})} dy.$$

Note que

$$\begin{aligned} |w_f(x)| &\leq C_n \int_{|x-y| \leq \frac{|x|}{2}} A dy + C_n \int_{\frac{|x|}{2} \leq |x-y| \leq 2|x|} A dy + C_n \int_{|x-y| \geq 2|x|} A dy \\ &= C_n [I_1 + I_2 + I_3], \end{aligned} \quad (1.13)$$

onde $A = \frac{K_1}{|x-y|^{n-2}(1+|y|^{-l})}$. Agora, vamos estimar I_1 , I_2 e I_3 :

Estimativa para I_1 : Seja $\Omega_1 = \left\{ y \in \mathbb{R}^n; |x-y| \leq \frac{|x|}{2} \right\}$. Se $y \in \Omega_1$, temos

$$|y| \geq |x| - |y-x| \geq \frac{|x|}{2}.$$

Assim

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{\Omega_1} \frac{K_1}{|x-y|^{n-2} \left[1 + \left(\frac{|x|}{2} \right)^{-l} \right]} dy \\ &\leq \frac{C_1}{|x|^{-l}} \int_{\Omega_1} \frac{K_1}{|x-y|^{n-2}} dy. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, obtemos

$$I_1 \leq \frac{C_2}{|x|^{-l}} \int_0^{\frac{|x|}{2}} \frac{r^{n-1}}{r^{n-2}} dr = C_3 |x|^{2+l}. \quad (1.14)$$

Estimativa para I_2 : Seja $\Omega_2 = \left\{ y \in \mathbb{R}^n; \frac{|x|}{2} \leq |y-x| \leq 2|x| \right\}$. Assim,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Omega_2} \frac{K_1}{|x-y|^{n-2} (1+|y|^{-l})} dy \\ &\leq \frac{2^{n-2} K_1}{|x|^{n-2}} \int_{\Omega_2} \frac{1}{(1+|y|^{-l})} dy. \end{aligned}$$

Desde que $y \in \Omega_2$, temos

$$|y| \leq |y-x| + |x| \leq 2|x| + |x| = 3|x|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{C_4}{|x|^{n-2}} \int_{|y| \leq 3|x|} \frac{1}{(1+|y|^{-l})} dy \\ &\leq C_4 |x|^{2-n} \left(\int_{|y| \leq 1} \frac{1}{(1+|y|^{-l})} dy + \int_{1 \leq |y| \leq 3|x|} \frac{1}{|y|^{-l}} dy \right). \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, temos

$$I_2 \leq K |x|^{2-n} \left(K + K \int_1^{3|x|} r^l r^{n-1} dr \right). \quad (1.15)$$

Primeiro, suponhamos que $n - 1 + l < -1$ ($n + l < 0$). Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \int_1^{3|x|} r^l r^{n-1} dr &= \left(\frac{r^{l+n}}{l+n} \Big|_1^{3|x|} \right) \\ &= -\frac{1}{l+n} \left(1 - \frac{1}{(3|x|)^{-(n+l)}} \right) \\ &\leq -\frac{1}{n+l} = K. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Se $n - 1 + l = -1$, temos

$$\int_1^{3|x|} r^l r^{n-1} dr = \int_1^{3|x|} \frac{1}{r} dr = \ln(3|x|). \quad (1.17)$$

Finalmente, suponhamos que $n - 1 + l > -1$ ($n + l > 0$). Neste caso, temos

$$\int_1^{3|x|} r^l r^{n-1} dr = \left(\frac{r^{l+n}}{l+n} \Big|_1^{3|x|} \right) = \frac{(3|x|)^{n+l}}{n+l} - \frac{1}{n+l} \leq K |x|^{n+l}. \quad (1.18)$$

Assim, por (1.15), (1.16), (1.17) e (1.18), concluimos que

$$I_2 \leq \begin{cases} K |x|^{2-n}, & \text{se } n - 1 + l < -1 \\ K |x|^{2-n} (K + \ln |x|), & \text{se } n - 1 + l = -1 \\ K |x|^{2-n} (K + K |x|^{n+l}), & \text{se } n - 1 + l > -1. \end{cases} \quad (1.19)$$

Estimativa para I_3 : Seja $\Omega_3 = \{y \in \mathbb{R}^n; 2|x| \leq |y - x|\}$. Assim, para $y \in \Omega_3$,

$$|y - x| \leq |y| + |x| \leq |y| + \frac{|y - x|}{2},$$

ou seja,

$$\frac{|y - x|}{2} \leq |y|.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \int_{\Omega_3} \frac{K}{|x - y|^{n-2} \left[1 + \left(\frac{|x-y|}{2} \right)^{-l} \right]} dy \\ &\leq \int_{\Omega_3} \frac{2^{-l} K}{|x - y|^{n-2} |x - y|^{-l}} dy. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, obtemos

$$I_3 \leq C_5 \int_{2|x|}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{n-2-l}} dr = C_5 \frac{r^{2+l}}{2+l} \Big|_{2|x|}^{\infty}.$$

Desde que $l < -2$, encontramos

$$I_3 \leq C_5 |x|^{2+l}. \quad (1.20)$$

Assim, para $|x|$ suficientemente grande, o resultado segue das estimativas (1.14), (1.19) e (1.20). ■

Quando f é uma função não negativa, temos a seguinte estimativa:

Lema 1.1.9 *Seja f localmente Hölder contínua. Se $f \geq 0$ em $\mathbb{R}^n$ e $f(y) \geq C |y|^l$ no infinito, onde $l < -2$, $C > 0$, então w_f tem a seguinte limitação no infinito:*

$$w_f(x) \geq \begin{cases} C |x|^{2-n} & \text{se } l < -n \\ C |x|^{2-n} \ln |x| & \text{se } l = -n \\ C |x|^{2+l} & \text{se } -n < l < -2. \end{cases}$$

Demonstração: Desde que $f \geq 0$ temos

$$w_f(x) \geq C_n \int_{\Omega_2} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy,$$

onde $\Omega_2 = \left\{ y \in \mathbb{R}^n; \frac{|x|}{2} \leq |y-x| \leq 2|x| \right\}$. Escolhamos R suficientemente grande, tal que $f \neq 0$ em $B_R(0)$ e $f(y) \geq C |y|^l$ se $|y| \geq R$. Assim, para $|x|$ suficientemente grande, temos

$$w_f(x) \geq C_n \left[\int_{\Omega_2} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy + \int_{\Omega_2 \setminus B_R(0)} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy \right].$$

Desde que

$$|y-x| \leq 2|x|,$$

então

$$w_f(x) \geq C_n \frac{|x|^{2-n}}{2^{n-2}} \left[\int_{\Omega_2} f(y) dy + \int_{\Omega_2 \setminus B_R(0)} f(y) dy \right].$$

Além disso, por hipótese, temos que $f(y) \geq C |y|^l$, para $|y| > R$ e $f \neq 0$ em $B_R(0)$. Logo usando que f é localmente Hölder contínua obtemos

$$w_f(x) \geq C_n \frac{|x|^{2-n}}{2^{n-2}} \left[C(R) + \int_{\Omega_2 \setminus B_R(0)} |y|^l dy \right]. \quad (1.21)$$

Agora, observe que

$$F = \left\{ y \in \mathbb{R}^n; R \leq |y| \leq \frac{|x|}{2} \right\} \subseteq \Omega_2 \setminus B_R(0), \quad (1.22)$$

De fato, se $y \in F$, temos

$$|y - x| \leq |x| + |y| \leq |x| + \frac{|x|}{2} = \frac{3|x|}{2} \leq 2|x|.$$

e

$$|x - y| \geq |x| - |y| = \frac{|x|}{2}.$$

Logo, $y \in \Omega_2 \setminus B_R(0)$. Por (1.21) e (1.22), obtemos

$$w_f(x) \geq C_n |x|^{2-n} \left(C(R) + \int_F |y|^l dy \right). \quad (1.23)$$

Suponhamos que $n - 1 + l < -1$. Neste caso temos:

$$w_f(x) \geq C(R) |x|^{2-n}. \quad (1.24)$$

Usando coordenadas polares, temos

$$w_f(x) \geq C_n |x|^{2-n} \left(C(R) + C(R) \int_R^{\frac{|x|}{2}} r^{n-1+l} dr \right). \quad (1.25)$$

Suponhamos agora que $n - 1 + l = -1$. Tomemos $R > 1$ e $|x| > (2R)^2$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_R^{\frac{|x|}{2}} r^{n-1+l} dr &= \int_R^{\frac{|x|}{2}} \frac{1}{r} dr \\ &= \ln(|x|) - \ln(2R). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Como $|x|^{\frac{1}{2}} > 2R$, temos

$$\frac{1}{2} \ln(|x|) > \ln(2R).$$

Somando $(-\ln|x|)$ a ambos os lados da inequação acima, obtemos

$$\frac{1}{2} \ln(|x|) < \ln(|x|) - \ln(2R). \quad (1.27)$$

Assim, por (1.26) e (1.27) temos

$$\int_R^{\frac{|x|}{2}} \frac{1}{r} dr > \frac{1}{2} \ln(|x|). \quad (1.28)$$

Por (1.25) e (1.28), temos

$$w_f(x) \geq C(R) |x|^{2-n} \ln(|x|). \quad (1.29)$$

Suponhamos finalmente que $n - 1 + l > -1$. Neste caso

$$\int_R^{\frac{|x|}{2}} r^{n+l-1} dr = \frac{1}{n+l} \left[\left(\frac{|x|}{2} \right)^{n+l} - R^{n+l} \right].$$

Como $|x| > (2R)^2$ e $R > 1$, temos $\frac{|x|}{4} > R$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_R^{\frac{|x|}{2}} r^{n+l-1} dr &\geq \frac{1}{n+l} \left[\frac{\left(\frac{|x|}{2} \right)^{n+l}}{n+l} - \frac{\left(\frac{|x|}{4} \right)^{n+l}}{n+l} \right] \\ &= |x|^{n+l} \left[\frac{1}{n+l} \left(\frac{1}{2^{2(n+l)}} \right) \right] \\ &= C(R) |x|^{n+l}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Por (1.25) e (1.30), obtemos

$$w_f(x) \geq C(R) |x|^{2-n} |x|^{n+l} = C(R) |x|^{2+l}. \tag{1.31}$$

Por (1.24), (1.29) e (1.31), concluímos que

$$w_f(x) \geq \begin{cases} C(R) |x|^{2-n} & \text{se } n - 1 + l < -1 \\ C(R) |x|^{2-n} \ln |x| & \text{se } n - 1 + l = -1 \\ C(R) |x|^{2+l} & \text{se } n - 1 + l > -1, \end{cases}$$

o que prova o lema. ■

1.2 Teorema do Ponto Fixo de Schauder

O objetivo desta seção é demonstrarmos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder. Para isso, vamos relembrar a definição e algumas propriedades do grau topológico de Brouwer.

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado e $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ o espaço das funções k -vezes continuamente diferenciáveis em $\overline{\Omega}$ que possuem todas as derivadas até a ordem k , sendo restrições de funções contínuas definidas em $\overline{\Omega}$. Para o espaço $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ vamos considerar a seguinte norma

$$\|\varphi\|_k = \max_{0 \leq j \leq k} \sup_{x \in \Omega} \|D^{(j)}\varphi(x)\|.$$

Sejam $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $S_\varphi = \{x \in \Omega; J_\varphi(x) = 0\}$, onde J_φ representa o determinante da matriz jacobiana de φ . Seja $b \in \mathbb{R}^n$ com $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Se $x \in \varphi^{-1}(b)$ temos que $J_\varphi(x) \neq 0$, assim pelo Teorema da Aplicação Inversa φ é um difeomorfismo de uma

vizinhança U_x de x sobre uma vizinhança V de b , isto é, $\varphi|_U : U \rightarrow \varphi(U) = V$ é um difeomorfismo.

Observe que o conjunto $\varphi^{-1}(b)$ é finito. De fato, se $\varphi^{-1}(b)$ é um fechado em $\overline{\Omega}$, consequentemente é um fechado e limitado em $\mathbb{R}^n$, pois $\varphi^{-1}(b) \subset \overline{\Omega}$. Dessa forma, $\varphi^{-1}(b)$ é um compacto. Para cada $x \in \varphi^{-1}(b)$, considere $B_{R_x}(x) \subset U_x$. Assim

$$\varphi^{-1}(b) \subset \bigcup_{x \in \varphi^{-1}(b)} B_{R_x}(x).$$

Desde que $\{B_{R_x}(x)\}$ é uma cobertura de abertos para o compacto $\varphi^{-1}(b)$, temos pelo Teorema de Borel Lebesgue que podemos extrair uma subcobertura finita de maneira que

$$\varphi^{-1}(b) \subset \bigcup_{j=1}^k B_{R_j}(x_j),$$

mostrando que $\varphi^{-1}(b)$ é finito, pois sendo φ injetiva em cada $B_{R_j}(x_j)$ e $x_j \in \varphi^{-1}(b)$, então o único ponto de $B_{R_j}(x_j)$ tal que $\varphi(x) = b$ é $x = x_j$, ou seja $\varphi^{-1}(b) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, com $J_\varphi(x_i) \neq 0$, para todo $i = \{1, 2, 3, \dots, k\}$.

Inicialmente, vamos definir o grau para valores regulares de $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e depois estenderemos a definição para aplicações $\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Definição 1.2.1 (Caso Regular) *Sejam $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S_\varphi)$. Definimos o grau topológico de φ em relação a Ω no ponto b , como sendo o número inteiro*

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(b)} \text{sgn}(J_\varphi(\xi_i)).$$

Lema 1.2.2 (Invariância por Homotopia de Classe C^2) *Seja $H(x, t) \in (C^2\overline{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$, com $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$. Então,*

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b) \equiv \text{constante}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ e $r = \text{dist}(b, \varphi(\partial\Omega)) > 0$. Sendo $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ denso em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, devido ao Teorema de Aproximação de Weierstrass, existe $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ com $\|\varphi - \psi\|_\infty < \frac{r}{2}$. Fixando

$$U = \left\{ \psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n); \|\varphi - \psi\|_\infty < \frac{r}{2} \right\},$$

tem-se

$$d(\psi_1, \Omega, b) = d(\psi_2, \Omega, b), \quad \forall \psi_1 \text{ e } \psi_2 \in U.$$

De fato, defina a aplicação

$$\begin{aligned} H : \overline{\Omega} \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\longmapsto H(x, t) = t\psi_1(x) + (1-t)\psi_2(x) \end{aligned}$$

1.2. TEOREMA DO PONTO FIXO DE SCHAUDER

Observe que, $H \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$ e $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$. Vamos justificar que

$$b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1]).$$

Para $x \in \overline{\Omega}$, e para cada $t \in [0, 1]$ temos

$$|H(x, t) - \varphi(x)| = |t\psi_1 + (1-t)\psi_2(x) - t\varphi(x) - (1-t)\varphi(x)|,$$

que implica

$$|H(x, t) - \varphi(x)| = |t(\psi_1(x) - \varphi(x)) + (1-t)(\psi_2(x) - \varphi(x))|.$$

Portanto,

$$|H(x, t) - \varphi(x)| \leq t|(\psi_1(x) - \varphi(x))| + (1-t)|\psi_2(x) - \varphi(x)|, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Desde que

$$|\psi_1(x) - \varphi(x)| \leq \|\psi_1 - \varphi\|_\infty \text{ e } |\psi_2(x) - \varphi(x)| \leq \|\psi_2 - \varphi\|_\infty, \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

segue-se que

$$|H(x, t) - \varphi(x)| \leq t\|\psi_1 - \varphi\|_\infty + (1-t)\|\psi_2 - \varphi\|_\infty, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Logo

$$|H(x, t) - \varphi(x)| \leq t\frac{r}{2} + (1-t)\frac{r}{2},$$

implicando

$$|H(x, t) - \varphi(x)| < \frac{r}{2}$$

e consequentemente

$$b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1]),$$

pois caso contrário, existiria $x_0 \in \partial\Omega$ e $t_0 \in [0, 1]$ tais que $H(x_0, t_0) = b$, e com isso

$$|H(x_0, t_0) - \varphi(x_0)| < \frac{r}{2},$$

o que implicaria

$$|b - \varphi(x_0)| < \frac{r}{2}$$

o que é um absurdo, pois sendo $r = \text{dist}(b, \varphi(\partial\Omega))$, tem-se

$$|b - \varphi(x)| \geq r.$$

Portanto,

$$b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1]).$$

Pelo Lema (1.2.2) temos

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b) \equiv \text{constante}, \quad \forall t \in [0, 1],$$

o que implica

$$d(H(\cdot, 0), \Omega, b) = d(H(\cdot, 1), \Omega, b),$$

isto é,

$$d(\psi_2, \Omega, b) = d(\psi_1, \Omega, b).$$

Definição 1.2.3 Definimos o grau topológico de Brouwer para $\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ com $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, como sendo

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b), \forall \psi \in U,$$

onde $U = \{\psi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n); \|\varphi - \psi\|_\infty < \frac{r}{2}\}$ com $r = \text{dist}(b, \varphi(\partial\Omega)) > 0$.

Observação 1.2.4 Assim, para todo $\psi \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ com $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, temos que $d(\psi, \Omega, b)$ está bem definido e não depende da escolha de ψ .

Propriedades do grau de Brouwer

P_1) Invariância do grau por Homotopia. Sejam $H \in C(\bar{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$ e $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$. Então $d(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é constante para $t \in [0, 1]$.

P_2) Existência de solução. Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$ então, existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$.

P_3) Normalização. Seja I a identidade de $\bar{\Omega}$ em $\mathbb{R}^n$, isto é, $I(x) = x$, então

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1, & \text{se } b \in \Omega \\ 0, & \text{se } b \notin \Omega. \end{cases}$$

Para a prova do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, iremos usar um resultado que é muito útil em Análise.

Proposição 1.2.5 Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Então, existe uma aplicação contínua $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\tilde{f}(x) = f(x)$, para $x \in K$ dada por:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in K \\ \left(\sum_{i \geq 1} 2^{-i} \varphi_i(x) \right)^{-1} \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \varphi_i(x) f(a^i) & \text{se } x \notin K \end{cases} \quad (1.32)$$

em que $\{a^1, a^2, \dots\}$ é um subconjunto enumerável denso em K e

$$\varphi_i(x) = \max \left\{ 2 - \frac{\|x - a^i\|}{\text{dist}(x, K)}, 0 \right\},$$

para $x \notin K$, onde $\text{dist}(x, K) = \inf \{\|x - a\|; a \in K\}$.

Definição 1.2.6 Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo se para cada $x, y \in K$

$$(1 - t)x + ty \in K$$

para todo $t \in [0, 1]$.

Note que se $x_1, x_2, \dots, x_m \in K$ e $t_i \in [0, 1]$ tal que $\sum t_i = 1$ então $\sum_{i=1}^m t_i x_i \in K$.

Definição 1.2.7 O fecho convexo de K é a interseção de todos os conjuntos convexos que contém K . Denotaremos o fecho convexo de K por $\text{conv}(K)$.

Lema 1.2.8 Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto qualquer e B o conjunto de todas as combinações convexas de elementos de K , isto é,

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i; \lambda_i \in [0, 1], x^i \in K, e \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Então, $B = \text{conv}(K)$.

Demonstração: Claramente temos que $K \subset B$. Sejam

$$x = \sum_{i=1}^j \lambda_i x^i \text{ e } y = \sum_{i=1}^k \beta_i x^i$$

elementos de B . Para todo $t \in [0, 1]$, sabemos que $(1-t)x + ty$ é uma combinação linear de elementos de K . Assim, a soma dos coeficientes desta combinação é:

$$(1-t) \sum_{i=1}^j \lambda_i + t \sum_{i=1}^k \beta_i = (1-t) + t = 1.$$

Logo, o segmento que une x a y está totalmente contido em B , isto é, B é convexo. Como $K \subset B$, segue que $\text{conv}K \subset B$. Para mostrarmos que $B \subset \text{conv}K$, considere um convexo A que contém K . Vamos mostrar que $B \subset A$. Seja $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i \in B$. Como $x^i \in K$ e $K \subset A$, então $x^i \in A$. Logo, temos

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x^m = \theta \left(\frac{\lambda_1}{\theta} x^1 + \dots + \frac{\lambda_{m-1}}{\theta} x^{m-1} \right) + \lambda_m x^m$$

em que $\theta = \lambda_1 + \dots + \lambda_{m-1}$. Denote por x^θ o termo entre parênteses na expressão acima, então x^θ é uma combinação convexa de $m-1$ elementos de A . Assim, $x^\theta \in A$, pois A é convexo. Logo,

$$x = \theta x^\theta + \lambda_m x^m \in [x^\theta, x^m],$$

onde $[x^\theta, x^m]$ é o segmento que une os vetores x^θ e x^m . Daí, $[x^\theta, x^m] \subset A$. Dessa forma, $B \subset A$, donde $B \subset \text{conv}(K)$, pela definição de fecho convexo de um conjunto. Portanto $B = \text{conv}(K)$. ■

Relembremos o que é um ponto fixo de uma aplicação contínua.

Definição 1.2.9 Dada uma função contínua $f : K \rightarrow K$, um **ponto fixo** para f é um ponto $x \in K$ tal que $f(x) = x$.

Teorema 1.2.10 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer) Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ convexo e compacto. Se $f : K \rightarrow K$ é uma aplicação contínua, então f tem um ponto fixo.

Demonstração: Suponha inicialmente que $K = \overline{B_R}(0)$ e que f não possua pontos fixos na fronteira de K . Defina $h : [0, 1] \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$, por

$$h(t, x) = x - tf(x).$$

Afirmamos que $0 \notin h([0, 1] \times \partial K)$. De fato, se tivéssemos $x_0 \in \partial K$ e $t_0 \in [0, 1]$ tais que $h(t_0, x_0) = 0$, obteríamos

$$R = |x_0| = t_0 |f(x_0)| \leq t_0 R \Rightarrow R \leq t_0 R \Rightarrow t_0 = 1.$$

Daí, $h(1, x_0) = x_0 - f(x_0) = 0$, o que acarreta, $f(x_0) = x_0$, o que é um absurdo visto que estamos supondo que f não tem ponto fixo na fronteira de K . Assim, por P_1 , P_2 e P_3) temos que

$$d(I - f, \text{int}K, 0) = d(I, B_r(0), 0) = 1 \neq 0.$$

Logo, a equação $x - f(x) = 0$ possui pelo menos uma solução em K e esta é exatamente o ponto fixo que procurávamos. Para o caso de um domínio K mais geral, considere a função $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada em (1.32) e denote por $X = \text{conv}f(K)$. Mostraremos que

$$\tilde{f}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{X}.$$

Se $x \in K$, então $\tilde{f}(x) = f(x)$ e, portanto $\tilde{f}(x) \in \overline{X}$, pois $f(x) \in f(K) \subset X \subset \overline{X}$, já que K é convexo. Agora, se $x \notin K$, note que

$$\tilde{f}(x) = \lim S_m,$$

onde

$$S_m = \left[\sum_{i \geq 1} 2^{-i} \varphi_i(x) \right]^{-1} \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \varphi_i(x) f(a^i).$$

Observe que S_m é uma combinação convexa de $f(a^1), f(a^2), \dots, f(a^m)$, que são elementos de $f(K)$. Assim, $S_m \in X$, e portanto $\tilde{f}(x)$ é o limite de uma sequência de elementos de X . Podemos concluir, então que

$$\tilde{f}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{X} = \overline{\text{conv}f(K)}.$$

Como $f(K) \subset K$ e K é convexo e compacto, fica provado que $\tilde{f}(\mathbb{R}^n) \subset K$. Tome agora R suficientemente grande de forma que $K \subset \overline{B_R}(0)$. Pela primeira parte, sabemos que existe $x \in \overline{B_R}(0)$ tal que $\tilde{f}(x) = x$. Mas $\tilde{f}(x) \in K$, daí $x \in K$. Assim,

$$\tilde{f}(x) = f(x) = x,$$

isto é, f tem um ponto fixo. ■

Lema 1.2.11 *Seja K um compacto de E , onde E é um espaço vetorial normado. Para todo $\epsilon > 0$, existe um subespaço de dimensão finita $F_\epsilon \subset E$ e uma aplicação $g_\epsilon \in C(K, F_\epsilon)$ tal que*

$$\|x - g_\epsilon(x)\| < \epsilon, \forall x \in K.$$

Demonstração: Sendo K compacto, dado $\epsilon > 0$, existem pontos $y_1, \dots, y_p \in E$ tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^p B_\epsilon(y_i).$$

Seja F_ϵ o subespaço gerado por $\{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ e definamos a função

$$b_i : K \rightarrow \mathbb{R},$$

por

$$b_i(x) = \begin{cases} \epsilon - \|x - y_i\|, & \text{se } x \in B_\epsilon(y_i) \\ 0, & \text{se } x \notin B_\epsilon(y_i). \end{cases}$$

Observe que

$$b_i(x) \geq 0, \forall x \in E$$

e

$$\sum_{i=1}^p b_i(x) > 0, \forall x \in K.$$

Agora, considere a função

$$g_\epsilon : K \rightarrow F_\epsilon,$$

definida por

$$g_\epsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^p b_i(x)y_i}{\sum_{i=1}^p b_i(x)} \in \text{conv}\{y_1, y_2, \dots, y_p\}.$$

Note que g_ϵ está bem definida, isto é, $\forall x \in K$, temos que $g_\epsilon(x) \in F_\epsilon$, pois $g_\epsilon(x)$ é uma combinação dos y_i 's. A aplicação $g_\epsilon \in C(K, F_\epsilon)$, pois g_ϵ é um quociente de funções contínuas, onde $\sum_{i=1}^p b_i(x) > 0$, para todo $x \in K$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} \|x - g_\epsilon(x)\| &= \left\| \frac{\sum_{i=1}^p b_i(x)x}{\sum_{i=1}^p b_i(x)} - \frac{\sum_{i=1}^p b_i(x)y_i}{\sum_{i=1}^p b_i(x)} \right\| \\ &\leq \frac{1}{\sum_{i=1}^p b_i(x)} \sum_{i=1}^p b_i(x) \|x - y_i\|. \end{aligned}$$

Note que se $\|x - y_i\| \geq \epsilon$ então $b_i(x) = 0$, portanto,

$$\|x - g_\epsilon(x)\| < \epsilon, \forall x \in K,$$

o que completa a prova do lema. ■

Temos a seguinte versão do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em dimensão infinita.

Teorema 1.2.12 (Ponto Fixo de Schauder) *Seja K um convexo compacto de E , onde E é um espaço vetorial normado. Se $T : K \rightarrow K$ é uma aplicação contínua, então T admite um ponto fixo.*

Demonstração: Seja ϵ um número positivo. Como K é compacto, então existem $y_1, y_2, \dots, y_p$ tal que $K \subset B(y_i, \epsilon)$, com $i = 1, \dots, p$. Considere $E_\epsilon = \overline{\text{conv}}\{y_1, \dots, y_p\}$. Afirmamos que E_ϵ é convexo e compacto. De fato, sabemos que

$$\text{conv}A = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i a_i, t_i \in [0, 1], a_i \in A, \text{ e } \sum_{i=1}^n t_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Agora, sejam x e $z \in E_\epsilon$, daí $x = \lim x_k$ e $z = \lim z_k$, onde x_k e $z_k \in \text{conv}\{y_1, \dots, y_p\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \alpha)x_k + \alpha z_k = (1 - \alpha)x + \alpha z \in \overline{\text{conv}}\{y_1, \dots, y_p\} = E_\epsilon$$

isto é,

$$(1 - \alpha)x + \alpha z \in \overline{\text{conv}}\{y_1, \dots, y_p\}.$$

Veja que E_ϵ é compacto, pois $E_\epsilon \subset K$, onde E_ϵ é fechado e K é compacto. Além disso, temos que E_ϵ está contido no subespaço F_ϵ de dimensão finita gerado por $\{y_1, \dots, y_p\}$. Considere a aplicação $g_\epsilon \circ T|_{E_\epsilon} : E_\epsilon \rightarrow E_\epsilon$, onde $g_\epsilon : K \rightarrow F_\epsilon$ é a função dada no Lema 1.2.11. Note que essa aplicação é contínua, pois é uma composição de funções contínuas. Logo, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer $g_\epsilon \circ T$ admite um ponto fixo em E_ϵ , ou seja,

$$\exists y_\epsilon \in E_\epsilon \subset K \text{ tal que } g_\epsilon \circ T(y_\epsilon) = y_\epsilon.$$

Sendo K compacto, existe uma subsequência (y_{ϵ_n}) que converge para um ponto de K , ou seja, $y_{\epsilon_n} \rightarrow y \in K$. Assim,

$$\begin{aligned} \|y - T(y)\| &= \|y - y_{\epsilon_n} + y_{\epsilon_n} - T(y_{\epsilon_n}) + T(y_{\epsilon_n}) - T(y)\| \\ &\leq \|y - y_{\epsilon_n}\| + \|g_{\epsilon_n} T(y_{\epsilon_n}) - T(y_{\epsilon_n})\| + \|T(y_{\epsilon_n}) - T(y)\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Logo

$$Ty = y,$$

o que completa a prova do teorema. ■

Corolário 1.2.13 *Seja Q um convexo fechado limitado de E , onde E é um espaço vetorial normado e $S : Q \rightarrow Q$ um operador compacto, então S admite um ponto fixo em Q .*

Demonstração: Como $S : Q \rightarrow Q$ é um operador compacto, então $\overline{S(Q)}$ é compacto. Assim, $K = \overline{\text{conv}}[S(Q)]$ é convexo compacto e além disso $K \subset Q$, pois Q é convexo e fechado. Logo, $S(K) \subset K$, pois $S(K) \subset S(Q) \subset K$. Agora, considerando a aplicação contínua, temos pelo Teorema 1.2.12 que S tem um ponto fixo em $K \subset Q$. ■

Capítulo 2

Existência de solução

2.1 Resultados principais

Neste capítulo iremos usar métodos de ponto fixo para obter existência de solução clássica para a equação

$$\Delta u + |u|^p + f(x) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

onde $p > n/(n-2)$ e f é uma função Hölder contínua.

Lembremos que uma solução clássica de (2.1) é uma função $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz a mesma no sentido usual.

O resultado de existência de solução pode ser encontrado em Guy Bernard [1], onde iremos abordar o caso $p > n/(n-2)$. Mais precisamente, temos:

Teorema 2.1.1 *Sejam $p > n/(n-2)$, com $n \geq 3$ e $\delta > 0$ satisfazendo $(n-2) - \frac{n}{p} < \delta \leq (n-2)p - n$. Suponha as seguintes condições no termo não-homogêneo f :*

1. $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ com $0 < \alpha \leq 1$;
2. $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|y|^{n-2}} dy < \infty$;
3. $|w_f(x)| \leq \frac{\xi}{2(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Então, existe $\xi_0 > 0$ e $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ solução de (2.1) tal que

$$w_f(x) \leq u(x) \leq \frac{\xi}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}}, \quad (2.2)$$

para todo $0 < \xi \leq \xi_0$.

Observe que o problema (2.1) não tem estrutura variacional, pois $f \notin H^{-1}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, se $f \geq 0$ é uma função não identicamente nula, segue de (2.2) e do Princípio do Máximo que a solução então a solução de (2.1) obtida é positiva.
estritamente positiva.

2.2 Resultados auxiliares

Para a prova do Teorema 2.1.1, iremos considerar a aplicação $\Phi : V_\xi \longrightarrow V_\xi$ definida por:

$$\Phi u(x) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^p + f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy, \quad (2.3)$$

onde

$$V_\xi = \left\{ u \in C_B(\mathbb{R}^n); |u(x)| \leq \frac{\xi}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}} \right\},$$

para $(n-2) - \frac{n}{p} < \delta \leq (n-2)p - n$.

No que segue, considere $C_B(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções contínuas limitadas em $\mathbb{R}^n$ munido da norma do supremo, isto é,

$$\|v\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |v(x)|.$$

Lema 2.2.1 *Fixado $\xi > 0$, o conjunto*

$$V_\xi = \left\{ u \in C_B(\mathbb{R}^n); |u(x)| \leq \frac{\xi}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}} \right\}$$

é convexo e fechado em $C_B(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Inicialmente, mostraremos que V_ξ é convexo. Com efeito, sejam $u, v \in V_\xi$, então $(1-t)u + tv \in C_B(\mathbb{R}^n)$, pois $u, v \in C_B(\mathbb{R}^n)$ e

$$\begin{aligned} |(1-t)u + tv| &\leq |(1-t)u| + |tv| \\ &= (1-t)|u| + t|v| \\ &\leq (1-t) \frac{\xi}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}} + t \frac{\xi}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}} \\ &= \frac{\xi}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}}, \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Além disso, V_ξ é fechado. Com efeito, seja $u \in C_B(\mathbb{R}^n)$ e $(u_k) \subset V_\xi$ tal que

$$\|u_k - u\| \rightarrow 0.$$

Dessa forma, $u_k \rightarrow u$ uniformemente

Desde que, $u_k \in V_\xi$, temos

$$|u_k(x)| \leq \frac{\xi}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}}. \quad (2.4)$$

Logo, tomando o limite em (2.4), obtemos

$$|u(x)| \leq \frac{\xi}{(1 + |x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}},$$

o que prova o lema. ■

Lema 2.2.2 Se $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ e

$$w_f(x) \leq \frac{\xi}{(1 + |x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

então $w_f \in C(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Seja $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ tal que $x_k \rightarrow x$ em $\mathbb{R}^n$. Logo, existe $R > 1$ tal que $|x_k| \leq R, \forall k \in \mathbb{N}$. Mostraremos que $w_f(x_k) \rightarrow w_f(x)$. Observemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x_k - y|^{n-2}} dy &= \int_{|y| \leq 2R} \frac{f(y)}{|x_k - y|^{n-2}} dy + \int_{|y| \geq 2R} \frac{f(y)}{|x_k - y|^{n-2}} dy \\ &= I_1^k + I_2^k. \end{aligned}$$

Primeiro mostraremos que

$$I_1^k \rightarrow \int_{|y| \leq 2R} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-2}} dy. \quad (2.5)$$

De fato, fazendo a mudança de variável $z = x_k - y$ temos

$$\begin{aligned} \int_{|y| < 2R} \frac{f(y)}{|x_k - y|^{n-2}} &= \int_{B(x_k, 2R)} \frac{f(x_k - z)}{|z|^{n-2}} \\ &= \int_{B(0, 3R)} \frac{f(x_k - z)}{|z|^{n-2}} \chi_{B(x_k, 2R)} dz. \end{aligned}$$

Como $z \in B(x_k, R)$, então $|z| \leq |x_k| + |y| < R + 2R$. Assim $z \in B(0, R)$.

Logo

$$\begin{aligned} |g_k(z)| &= \left| \frac{f(x_k - z)}{|z|^{n-2}} \chi_{B(x_k, R)} \right| \\ &\leq \frac{C_R}{|z|^{n-2}} \in L^1(B_{3R}(0)), \text{ para } z \neq 0. \end{aligned}$$

Vejamos agora que

$$\chi_{B(x_k, R)} \rightarrow \chi_{B(x, R)}.$$

De fato, se $z \in B(x, R)$, então $\chi_{B(x, R)}(z) = 1$. Como $x_k \rightarrow x$, temos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_k - x\| < d(z, \partial B(x, R)) = R \quad \forall k \geq k_0.$$

Logo, $z \in B(x_k, R)$ para todo $k \geq k_0$. O que mostra que

$$\chi_{B(x_k, R)}(z) \rightarrow 1 = \chi_{B(x, R)}(z),$$

para todo $k \geq k_0$.

No caso em que $z \notin B(x, R)$, então $\chi_{B(x, R)}(z) = 0$. Como $|z - x| > R$ e $x_k \rightarrow x$, temos que existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_k - x| < (|z - x| - R) \quad \forall k \geq k_1.$$

Então

$$\begin{aligned} |x_k - z| &\geq |x - z| - |x - x_k| \\ &> |x - z| - (|z - x| - R) = R \quad \forall k \geq k_1. \end{aligned}$$

Logo, $z \in B(x_k, R)$ e $\chi_{B(x_k, R)}(z) = 0$. Portanto, quando k converge para zero, temos que

$$\chi_{B(x_k, R)}(z) \rightarrow 0 = \chi_{B(x, R)}(z),$$

para todo $k \geq k_1$. Claramente, temos que

$$\frac{f(y)}{|x_k - y|^{n-2}} \rightarrow \frac{f(y)}{|x - y|^{n-2}} \quad \text{q.t.p em } B_R(0).$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos (2.5).

Agora, mostraremos que

$$I_2^k \rightarrow \int_{|y| \geq 2R} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-2}} dy. \quad (2.6)$$

Considere a sequência de funções

$$F_k(y) = \left(\frac{f(y)}{|x_k - y|^{n-2}} - \frac{f(y)}{|x - y|^{n-2}} \right), \quad |y| \geq 2R.$$

Afirmamos que existe $g \in L^1(B_{2R}^c(0))$ tal que $|F_k(y)| \leq g(y)$ em $B_{2R}^c(0)$. De fato,

$$F_k(y) = \frac{f(y) [|x - y|^{n-2} - |x_k - y|^{n-2}]}{|x_k - y|^{n-2} |x - y|^{n-2}}$$

e

$$\left| \frac{[|x - y|^{n-2} - |x_k - y|^{n-2}]}{|x_k - y|^{n-2}} \right| \leq 1 + \left(\frac{|x - y|}{|x_k - y|} \right)^{n-2}. \quad (2.7)$$

Notemos que

$$\frac{|x - y|}{|x_k - y|} = \frac{|x - x_k + x_k - y|}{|x_k - y|} \leq \frac{|x - x_k| + |x_k - y|}{|x_k - y|} = \frac{|x - x_k|}{|x_k - y|} + 1.$$

Como $|x_k - y| \geq |y| - |x_k| \geq 2R - R = R$, temos que $\frac{1}{|x_k - y|} \leq \frac{1}{R}$. Assim,

$$\frac{|x - y|}{|x_k - y|} \leq \frac{|x - x_k|}{R} + 1 \leq \frac{|x| + R}{R} + 1 = R^{-1}|x| + 2. \quad (2.8)$$

Por (2.7) e (2.8) temos que

$$\left| \frac{[|x - y|^{n-2} - |x_k - y|^{n-2}]}{|x_k - y|^{n-2}} \right| < C,$$

onde C independe de k . Logo,

$$|F_k(y)| \leq C \frac{f(y)}{|x - y|^{n-2}} = g(y), \text{ para } |y| \geq 2R,$$

onde C é uma constante que depende de x e n . Logo, por hipótese, temos que $g \in L^1(B_{2R}^c(0))$. Desta forma, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\int_{|y| \geq 2R} F_k(y) \rightarrow 0.$$

Portanto,

$$\int_{|y| \geq 2R} \frac{f(y)}{|x_k - y|^{n-2}} dy \rightarrow \int_{|y| \geq 2R} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-2}} dy,$$

ou seja, temos (2.6). Logo, por (2.5) e (2.6) temos que

$$w_f(x_k) \rightarrow w_f(x),$$

o que conclui a prova do lema. ■

Lema 2.2.3 *Seja $g \in C(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$0 \leq g(y) \leq \frac{C}{|y|^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)p}}}$$

com $p > n/(n-2)$ e $n \geq 3$. Então $w_g \in C(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Seja $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ tal que $x_k \rightarrow x$ em $\mathbb{R}^n$. Logo, existe $R > 1$ tal que $|x_k| < R$. Mostraremos que $w_g(x_k) \rightarrow w_g(x)$. Observemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(y)}{|x_k - y|^{n-2}} dy &= \int_{|y| \leq 2R} \frac{g(y)}{|x_k - y|^{n-2}} dy + \int_{|y| \geq 2R} \frac{g(y)}{|x_k - y|^{n-2}} dy \\ &= J_1^k + J_2^k. \end{aligned}$$

Como no lema anterior, temos

$$J_1^k \rightarrow \int_{|y| \leq 2R} \frac{g(y)}{|x-y|^{n-2}} dy. \quad (2.9)$$

Agora, mostraremos que

$$J_2^k \rightarrow \int_{|y| \geq 2R} \frac{g(y)}{|x-y|^{n-2}} dy. \quad (2.10)$$

Temos que

$$J_2^k = \int_{|y| \geq 2R} \frac{g(y)}{|x_k-y|^{n-2}} dy.$$

Como $g(y) \leq \frac{C}{|y|^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}}$ e $|x_k - y| \geq |y| - |x_k| \geq 2R - R$, temos que

$$\frac{g(y)}{|x_k - y|^{n-2}} \leq \frac{C_1}{|x_k - y|^{n-2} |y|^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}} \leq \frac{C_2}{|y|^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}}, \quad \forall y \in B^c(0, 2R).$$

Afirmamos que $n - \frac{(2+\delta)}{(p-1)}p < 0$ e $n - \frac{(2+\delta)}{(p-1)}p \neq -1$. De fato, inicialmente mostraremos que $n - \frac{(2+\delta)}{(p-1)}p < 0$. Como $n - 2 - \frac{n}{p} < \delta$, então

$$np - n - (2 + \delta)p < 0.$$

Logo

$$n(p-1) - (2 + \delta)p < 0.$$

Para mostrar o caso em que $n - \frac{(2+\delta)}{(p-1)}p \neq -1$, suponha por absurdo que $n - \frac{(2+\delta)}{(p-1)}p = -1$. Assim,

$$n(p-1) - (2 + \delta)p = -p + 1.$$

Dessa forma,

$$\delta p = np - n + p - 1 - 2p.$$

Logo

$$\begin{aligned} \delta &= \left[(n-2) - \frac{n}{p} \right] - \frac{1}{p} \\ &< (n-2) - \frac{n}{p} \\ &< \delta. \end{aligned}$$

O que é um absurdo. Portanto $n - \frac{(2+\delta)}{(p-1)}p \neq -1$.

Usando coordenadas polares, temos

$$\int_{B^c(0, 2R)} \frac{1}{|y|^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}} \leq C_2 \int_{2R}^{\infty} r^{n-1-\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p} \quad (2.11)$$

Como $n - \frac{(2+\delta)}{(p-1)}p \neq -1$, temos

$$C_2 \int_{2R}^{\infty} r^{n-1-\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p} = C_2 \frac{r^{n-\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}}{n - \frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}.$$

Além disso, sendo $n - \frac{(2+\delta)}{(p-1)}p < 0$, obtemos

$$C_2 \frac{r^{n-\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}}{n - \frac{(2+\delta)}{(p-1)}p} \Big|_{2R}^{\infty} = -C_2 \left[\frac{(2R)^{n-\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}}{n - \frac{(2+\delta)}{(p-1)}p} \right] < \infty.$$

Logo, concluímos que

$$\frac{C}{|y|^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}} \in L^1(B_{2R}^c(0)).$$

Notemos que

$$\frac{g(y)}{|x_k - y|^{n-2}} \rightarrow \frac{g(y)}{|x - y|^{n-2}} \text{ q.t.p em } B_{2R}^c(0).$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos (2.10). Logo por (2.9) e (2.10) temos

$$w_g(x_k) \rightarrow w_g(x),$$

o que conclui a demonstração do lema. ■

Lema 2.2.4 *Existe $\xi_0 > 0$ tal que $\Phi(V_\xi) \subset V_\xi$ para todo $0 \leq \xi \leq \xi_0$, onde $|w_f(x)| \leq \frac{\xi}{2(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}}$.*

Demonstração: Para a prova deste lema, iremos considerar dois casos, a saber:

Caso 1: $|x| \geq \frac{1}{4}$. Note que

$$\Phi u(x) = \Phi_1 u(x) + \Phi_2 u(x) + \Phi_3 u(x) + w_f(x),$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi_1 u(x) &= C_n \int_{|x-y| \leq \frac{|x|}{2}} \frac{|u|^p(y)}{|x-y|^{n-2}} dy \\ \Phi_2 u(x) &= C_n \int_{\frac{|x|}{2} \leq |x-y| \leq 2|x|} \frac{|u|^p(y)}{|x-y|^{n-2}} dy \\ \Phi_3 u(x) &= C_n \int_{2|x| \leq |x-y|} \frac{|u|^p(y)}{|x-y|^{n-2}} dy. \end{aligned}$$

Iremos analisar cada operador Φ_i separadamente, $i = 1, 2, 3$. Se $u \in V_\xi$ temos

$$\Phi_1 u(x) \leq C_n \int_{|x-y| \leq \frac{|x|}{2}} \frac{\xi^p}{|x-y|^{n-2} (1+|y|)^{\frac{(2+\delta)p}{(p-1)}}} dy.$$

Se $|x-y| \leq \frac{|x|}{2}$ então $\frac{1}{1+|y|} \leq \frac{2}{1+|x|}$. De fato,

$$|x| - |y| \leq |x-y| \leq \frac{|x|}{2}$$

ou seja,

$$|x| \leq 2|y|.$$

Assim

$$1 + |x| \leq 1 + 2|y| \leq 2(1 + |y|).$$

Logo

$$\begin{aligned} \Phi_1 u(x) &\leq C_n \xi^p 2^{\frac{(2+\delta)p}{(p-1)}} \int_{|x-y| \leq \frac{|x|}{2}} \frac{1}{|x-y|^{n-2} (1+|x|)^{\frac{(2+\delta)p}{(p-1)}}} dy \\ &= \frac{C_n \xi^p 2^{\frac{(2+\delta)p}{(p-1)}}}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)p}{(p-1)}}} \int_{|x-y| \leq \frac{|x|}{2}} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dy. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned} \Phi_1 u(x) &= C_n \omega_n \xi^p 2^{\frac{(2+\delta)p}{(p-1)}} \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)p}{(p-1)}}} \int_{r=0}^{\frac{|x|}{2}} \frac{r^{n-1}}{r^{n-2}} dr \\ &= C_n \omega_n \xi^p 2^{\frac{(2+\delta)p}{(p-1)}-3} \frac{|x|^2}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)p}{(p-1)}}}. \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\frac{|x|^2}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)p}{(p-1)}}} \leq \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}}. \quad (2.12)$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} |x|^2 &\leq (1+|x|)^{2+\delta} \\ &= (1+|x|)^{\frac{(2+\delta)(p-1)}{(p-1)}} \\ &= (1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p - \frac{(2+\delta)}{(p-1)}} \\ &= \frac{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}}. \end{aligned}$$

Por (2.12), obtemos

$$\Phi_1 u(x) \leq \frac{\xi^p 2^{\frac{(2+\delta)p}{(p-1)}-3}}{(n-2)} \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}}. \quad (2.13)$$

Agora, vamos estimar Φ_2 . Para isto, note que $\frac{1}{|x-y|} \leq \frac{2}{|x|}$, pois $\frac{|x|}{2} \leq |x-y|$. Além disso, $|y| \leq |x-y| + |x| \leq 3|x|$, pois $|x-y| \leq 2|x|$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \Phi_2 u(x) &\leq C_n 2^{n-2} \int_{\frac{|x|}{2} \leq |x-y| \leq 2|x|} \frac{|u|^p(y)}{|x|^{n-2}} dy \\ &\leq \frac{C_n \xi^p 2^{n-2} \omega_n}{|x|^{n-2}} \int_{|y| \leq 3|x|} \frac{1}{(1+|y|)^{\frac{(2+\delta)p}{(p-1)}}} dy, \end{aligned}$$

onde na última integral usamos que $u \in V_\xi$. Usando coordenadas polares, temos

$$\Phi_2 u(x) \leq \frac{C_n \xi^p 2^{n-2}}{|x|^{n-2}} \int_0^{3|x|} \frac{r^{n-1}}{(1+r)^{\frac{(2+\delta)p}{(p-1)}}} dr.$$

Agora, desde que $4|x| \geq 1$, tem-se

$$\frac{5^{n-2}}{(1+|x|)^{n-2}} \geq \frac{1}{|x|^{n-2}}. \quad (2.14)$$

De fato,

$$\begin{aligned} (1+|x|)^{n-2} &\leq (4|x| + |x|)^{n-2} \\ &= 5^{n-2} |x|^{n-2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Phi_2 u(x) &\leq \frac{\xi^p 10^{n-2}}{(n-2)(1+|x|)^{n-2}} \int_0^{3|x|} \frac{(1+r)^{n-1}}{(1+r)^{\frac{(2+\delta)p}{(p-1)}}} dr \\ &= \frac{\xi^p 10^{n-2}}{(n-2)(1+|x|)^{n-2}} \int_0^{3|x|} (1+r)^{n-1-\frac{2+\delta}{p-1}p} dr. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $1 + r = s$, temos

$$\begin{aligned}
 \Phi_2 u(x) &\leq \frac{\xi^p 10^{n-2}}{(n-2)(1+|x|)^{n-2}} \int_1^{1+3|x|} s^{n-1-\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p} ds \\
 &= \frac{\xi^p 10^{n-2}}{(n-2)(1+|x|)^{n-2}} \frac{s^{n-\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}}{n-\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p} \Big|_1^{1+3|x|} \\
 &= \frac{\xi^p 10^{n-2}}{(n-2)(1+|x|)^{n-2}} \frac{1}{n-\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p} \left[(1+3|x|)^{n-\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p} - 1 \right] \\
 &= \frac{\xi^p 10^{n-2}}{(n-2)(1+|x|)^{n-2}} \frac{1}{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p - n} \left[1 - (1+3|x|)^{n-\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p} \right].
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Como

$$n - \frac{(2+\delta)}{(p-1)}p < 0,$$

então $1 - (1+3|x|)^{n-\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p} < 1$ e assim,

$$\Phi_2 u(x) \leq \frac{\xi^p 10^{n-2}}{(n-2)(1+|x|)^{n-2}} \frac{1}{\left[\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p - n \right]}.$$

Além disso, temos que $\frac{(2+\delta)}{(p-1)} \leq (n-2)$, pois $\delta \leq (n-2)p - n$. Neste caso

$$\Phi_2 u(x) \leq \frac{\xi^p 10^{n-2}}{(n-2)(1+|x|)^{n-2}} \frac{1}{\left[\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p - n \right]} \tag{2.16}$$

$$\leq \frac{\xi^p 10^{n-2}}{(n-2)(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}} \frac{1}{\left[\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p - n \right]}. \tag{2.17}$$

Agora, vamos estimar o operador Φ_3 . Sendo $2|x| \leq |x-y|$, temos $\frac{1}{|x-y|} \leq \frac{1}{2|x|}$. Dessa forma,

$$\Phi_3 u(x) \leq \frac{C_n}{2^{n-2}|x|^{n-2}} \int_{2|x| \leq |x-y|} |u|^p(y) dy.$$

Desde que $u \in V_\xi$, temos

$$\Phi_3 u(x) \leq \frac{C_n \xi^p}{2^{n-2}|x|^{n-2}} \int_{2|x| \leq |x-y|} \frac{1}{(1+|y|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}} dy.$$

Por (2.14), temos

$$\Phi_3 u(x) \leq \frac{C_n \xi^p 5^{n-2}}{2^{n-2}(1+|x|)^{n-2}} \int_{2|x| \leq |x-y|} \frac{1}{(1+|y|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}} dy.$$

Usando coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned}\Phi_3 u(x) &\leq \frac{C_n \xi^p 5^{n-2} \omega_n}{2^{n-2} (1 + |x|)^{n-2}} \int_{r=|x|}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}} dr \\ &= \frac{C_n \xi^p 5^{n-2} \omega_n}{2^{n-2} (1 + |x|)^{n-2}} \int_{r=|x|}^{\infty} r^{n-1-\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p} dr.\end{aligned}\quad (2.18)$$

Veja que

$$\begin{aligned}\int_{r=|x|}^{\infty} r^{n-1-\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p} dr &= \left. \frac{r^{n-\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}}{n-\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p} \right|_{r=|x|}^{\infty} \\ &= \frac{|x|^{n-\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}}{\left[\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p - n \right]}.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Por (2.18) e (2.19), temos

$$\Phi_3 u(x) \leq \frac{\xi^p 5^{n-2}}{(n-2)2^{n-2} (1 + |x|)^{n-2}} \frac{|x|^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p-n}}{\left[\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p - n \right]}.$$

Como $\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p - n < 0$, temos $|x|^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p-n} \leq 1$. Assim

$$\Phi_3 u(x) \leq \frac{\xi^p 5^{n-2}}{(n-2)2^{n-2} (1 + |x|)^{n-2}} \frac{1}{\left[\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p - n \right]}.$$

Por fim, temos que $\frac{(2+\delta)}{(p-1)} \leq n-2$. Logo,

$$\Phi_3 u(x) \leq \frac{\xi^p 3^{n-2}}{(n-2) (1 + |x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}} \frac{1}{\left[\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p - n \right]}.\quad (2.20)$$

Agora, escolha $\xi > 0$ suficientemente pequeno tal que a soma das constantes nas estimativas (2.13), (2.17) e (2.20), satisfaça a seguinte desigualdade

$$\xi^p K_1 \leq \frac{\xi}{2},\quad (2.21)$$

onde

$$K_1 = \left\{ \frac{2^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p-3}}{n-2} + \frac{10^{n-2}}{(n-2) \left[p^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}} - n \right]} + \frac{3^{n-2}}{(n-2) \left[p^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}} - n \right]} \right\}.$$

Observe que (2.21) é equivalente a

$$\xi \leq \left(\frac{1}{2K_1} \right)^{\frac{1}{(p-1)}}. \quad (2.22)$$

Das estimativas (2.13), (2.17) e (2.20), temos

$$\begin{aligned} \Phi u(x) &\leq \frac{2^{\frac{(2+\delta)p}{(p-1)}-3}}{(n-2)} \frac{\xi^p}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}} + \frac{10^{n-2}}{(n-2) \left[\frac{(2+\delta)p}{(p-1)} - n \right]} \frac{\xi^p}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}} \\ &\quad + \frac{3^{n-2}}{(n-2) \left[\frac{(2+\delta)p}{(p-1)} - n \right]} \frac{\xi^p}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}} + w_f(x). \end{aligned}$$

Assim, usando a hipótese sobre o potencial Newtoniano e (2.21), temos que

$$\Phi u(x) \leq \xi \left(\frac{1}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}} \right). \quad (2.23)$$

Caso 2: $|x| < \frac{1}{4}$. Vamos escrever

$$\Phi u(x) = \Psi_1 u(x) + \Psi_2 u(x) + \Psi_3 u(x) + w_f(x),$$

onde

$$\begin{aligned} \Psi_1 u(x) &= C_n \int_{|x-y| \leq \frac{|x|}{2}} \frac{|u|^p(y)}{|x-y|^{n-2}} dy \\ \Psi_2 u(x) &= C_n \int_{\frac{|x|}{2} \leq |x-y| \leq 1} \frac{|u|^p(y)}{|x-y|^{n-2}} dy \\ \Psi_3 u(x) &= C_n \int_{1 \leq |x-y|} \frac{|u|^p(y)}{|x-y|^{n-2}} dy. \end{aligned}$$

Observe que Ψ_1 é igual a Φ_1 e não usamos o fato de $|x| \geq \frac{1}{4}$ para estimar Φ_1 . Por (2.13), obtemos

$$\Psi_1 u(x) \leq \frac{\xi^p 2^{\frac{(2+\delta)p}{(p-1)}-3}}{(n-2)} \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}}. \quad (2.24)$$

Para o operador Ψ_2 , vamos escolher $\xi > 0$ tal que

$$\frac{\xi^p}{2(n-2)} \leq \frac{\xi}{4} \left(\frac{4}{5} \right)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}, \quad (2.25)$$

que é equivalente a

$$\xi \leq \left[\frac{(n-2)}{2} \left(\frac{4}{5} \right)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}} \right]^{\frac{1}{(p-1)}}. \quad (2.26)$$

Se $u \in V_\xi$ temos

$$\Psi_2 u(x) \leq C_n \int_{\frac{|x|}{2} \leq |x-y| \leq 1} \frac{\xi^p}{|x-y|^{n-2} (1+|y|)^{\frac{(2+\delta)p}{(p-1)}}} dy.$$

Desde que

$$\frac{1}{1+|y|} \leq 1,$$

temos

$$\Psi_2 u(x) \leq C_n \xi^p \int_{\frac{|x|}{2} \leq |x-y| \leq 1} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} dy.$$

Usando coordendas polares, obtemos

$$\begin{aligned} \Psi_2 u(x) &\leq C_n \xi^p \omega_n \int_{r=\frac{|x|}{2}}^1 \frac{r^{n-1}}{r^{n-2}} dr \\ &= C_n \xi^p \omega_n \int_{r=\frac{|x|}{2}}^1 r dr. \end{aligned}$$

Integrando

$$\Psi_2 u(x) \leq \frac{C_n \xi^p \omega_n}{2} \left(\frac{4 - |x|^2}{4} \right).$$

Logo, por (2.25), obtemos

$$\Psi_2 u(x) \leq \frac{\xi}{4} \left(\frac{4}{5} \right)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}} \left(\frac{4 - |x|^2}{4} \right). \quad (2.27)$$

Afirmamos que se $|x| < \frac{1}{4}$, então

$$\left(\frac{4}{5} \right)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}} \left(\frac{4 - |x|^2}{4} \right) \leq \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}}. \quad (2.28)$$

De fato, como $|x| < \frac{1}{4}$, então $1 + |x| < \frac{5}{4}$, ou seja, $\frac{4}{5} (1 + |x|) \leq 1$. Assim, temos

$$\left(\frac{4}{5} \right)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}} (1 + |x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}} \leq 1$$

Além disso, temos que

$$\frac{4 - |x|^2}{4} \leq 1$$

Logo

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}} (1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}} \left(\frac{4-|x|^2}{4}\right) \leq 1,$$

consequentemente

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}} \left(\frac{4-|x|^2}{4}\right) \leq \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}}. \quad (2.29)$$

O que prova nossa afirmação. Portanto, por (2.27) e (2.29), concluímos que

$$\Psi_2 u(x) \leq \left(\frac{\xi}{4}\right) \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}}. \quad (2.30)$$

Agora vamos estimar o operador Ψ_3 , para $u \in V_\xi$ temos

$$\Psi_3 u(x) \leq C_n \int_{1-|x| \leq |y|} \frac{\xi^p}{|x-y|^{n-2} (1+|y|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}} dy.$$

Afirmamos que se $|x| < \frac{1}{4}$ e $1-|x| \leq |y|$, então $\frac{|y|}{2} \leq |x-y|$. De fato, observe que

$$4|x| < 1 \leq |x| + |y|.$$

Dessa forma,

$$|x-y| \geq |y| - \frac{|y|}{3} = \frac{|y|}{2}.$$

Com esta última afirmação, obtemos

$$\Psi_3 u(x) \leq C_n 2^{n-2} \xi^p \int_{1 \leq |x-y|} \frac{1}{|y|^{n-2} (1+|y|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}} dy.$$

Usando coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned} \Psi_3 u(x) &\leq C_n 2^{n-2} \xi^p \omega_n \int_{r=1-|x|}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{n-2} (1+r)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}} dr \\ &= C_n 2^{n-2} \xi^p \omega_n \int_{r=1-|x|}^{\infty} \frac{r}{(1+r)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}} dr \\ &\leq C_n 2^{n-2} \xi^p \omega_n \int_{r=1-|x|}^{\infty} \frac{1+r}{(1+r)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}} dr \\ &= C_n 2^{n-2} \xi^p \omega_n \int_{r=1-|x|}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p-1}} dr. \end{aligned}$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \int_{r=1-|x|}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p-1}} dr &= \frac{1}{(1+r)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p-2} \left[2 - \frac{(2+\delta)}{(p-1)}p \right]} \Bigg|_{1-|x|}^{\infty} \\ &= \frac{1}{(2-|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p-2} \left[\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p - 2 \right]}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Assim, por (2.30)

$$\Psi_3 u(x) \leq \frac{2^{n-2} \xi^p}{(n-2) (2-|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p-2} \left[\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p - 2 \right]}.$$

Sabendo que $1+|x| \leq 2-|x|$, pois $|x| < \frac{1}{4}$, temos

$$\Psi_3 u(x) \leq \frac{2^{n-2} \xi^p}{(n-2) (1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p-2} \left[\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p - 2 \right]}. \quad (2.32)$$

Desde que

$$\frac{(2+\delta)}{(p-1)} (p-1) \geq 2,$$

temos

$$\frac{(2+\delta)}{(p-1)} - 2 \geq \frac{(2+\delta)}{(p-1)}.$$

Logo, por (2.32), obtemos

$$\Psi_3 u(x) \leq \frac{2^{n-2} \xi^p}{(n-2) (1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p-2} \left[\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p - 2 \right]}. \quad (2.33)$$

Agora, escolha $\xi > 0$ suficientemente pequeno tal que satisfaça a desigualdade (2.16) e que a soma das constantes nas estimativas (2.24), (2.30) e (2.32) verifica a seguinte desigualdade

$$\frac{2^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p-3} \xi^p}{(n-2)} + \frac{\xi}{4} + \frac{2^{n-2} \xi^p}{(n-2) \left[\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p - 2 \right]} \leq \frac{\xi}{2}. \quad (2.34)$$

Logo,

$$\xi^p K_2 \leq \frac{\xi}{4}, \quad (2.35)$$

onde

$$K_2 = \frac{2^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p-3}}{(n-2)} + \frac{2^{n-2}}{(n-2) \left[\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p - 2 \right]}. \quad (2.36)$$

Veja que (2.35) é equivalente a

$$\xi \leq \left(\frac{1}{4K_2} \right)^{\frac{1}{(p-1)}}. \quad (2.37)$$

Por (2.24), (2.30) e (2.33), temos

$$\begin{aligned} \Phi u(x) &\leq \frac{\xi p 2^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p-3}}{(n-2)} \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}} + \left(\frac{\xi}{4} \right) \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}} \\ &\quad + \frac{2^{n-2}\xi^p}{(n-2)(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}} \left[\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p - 2 \right]} + w_f(x). \end{aligned}$$

Usando a hipótese do potencial Newtoniano, temos

$$\begin{aligned} \Phi u(x) &\leq \left\{ \frac{\xi p 2^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p-3}}{(n-2)} + \left(\frac{\xi}{4} \right) + \frac{2^{n-2}\xi^p}{(n-2) \left[\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p - 2 \right]} \right\} \frac{1}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}} \\ &\quad + \frac{\xi}{2(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Finalmente por (2.34), concluímos

$$\Phi u(x) \leq \frac{\xi}{(1+|x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}},$$

o que demonstra o lema. ■

Lema 2.2.5 *A aplicação $\Phi : V_\xi \longrightarrow V_\xi$ é contínua para todo $\xi > 0$.*

Demonstração: Sejam $u, v \in V_\xi$. Como

$$\Phi u(x) - \Phi v(x) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^p - |v(y)|^p}{|x-y|^{n-2}} dy.$$

Utilizando o Teorema do Valor Médio para a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t^p$, temos

$$\begin{aligned} ||u(y)|^p - |v(y)|^p| &= p\theta(y)^{p-1} |u(y) - v(y)| \\ &\leq \max [(u(y), v(y))]^{p-1} p |u(y) - v(y)|. \end{aligned}$$

Considerando $h(y) = \max [(u(y), v(y))]$, obtemos

$$||u(y)|^p - |v(y)|^p| \leq h(y)^{p-1} p |u(y) - v(y)|.$$

Dessa forma

$$|\Phi u(x) - \Phi v(x)| \leq \frac{p \|u - v\|_\infty}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{h(y)^{p-1}}{|x-y|^{n-2}} dy. \quad (2.39)$$

Como

$$v(y) \leq h(y) \leq u(y) \leq \frac{\xi}{(1+|y|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}}$$

então

$$|\Phi u(x) - \Phi v(x)| \leq \frac{p \|u - v\|_\infty}{(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{3^{p-1} \xi^{p-1}}{|x-y|^{n-2} (1+|y|)^{2+\delta}} dy.$$

Agora, considere

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy,$$

onde $f(y) = \frac{1}{(1+|y|)^{2+\delta}}$. Como

$$|f(y)| \leq \frac{1}{(1+|y|)^{2+\delta}} \leq |y|^{-2-\delta}$$

e $l = -2 - \delta < -2$, então, pelo Lema 1.1.8, obtemos $|G(x)| \leq \frac{c}{|x|^\delta}$ para $|x|$ grande. Assim, para $|x| \geq R_0$ temos $|G(x)| \leq c_1$, se $|x| \leq R_0$, $|G(x)| \leq c_1$, pois G é contínua pelo Lema 1.1.6. Considerando $c = \max\{c_1, c_2\}$, temos

$$|G(x)| \leq c, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.40)$$

Dessa forma, de (2.39) e 2.40, obtemos

$$|\Phi u(x) - \Phi v(x)| \leq C_n c p 3^{p-1} \xi^{p-1} \|u - v\|_\infty,$$

consequentemente

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_\infty \leq C \|u - v\|_\infty$$

o que mostra que $\Phi : V_\xi \longrightarrow V_\xi$ é uma aplicação contínua, para todo $0 < \xi \leq \xi_0$. ■

Lema 2.2.6 $\Phi(V_\xi)$ é uma família de funções uniformemente equicontínua quando restrita à bola fechada em $\mathbb{R}^n$ centrada na origem.

Demonstração: Observe que, pelo Lema 1.1.7 já temos que $w_f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, com isso é suficiente mostrar que $H(V_\xi)$ é uma família de funções equicontínuas restrita a bola fechada em $\mathbb{R}^n$ centrada na origem, onde

$$Hu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^p}{|x-y|^{n-2}} dy.$$

Assim, sejam $x_1, x_2 \in \overline{B}_R(0)$, com $x_1 \neq x_2$ e considere $B_1 = B_{2|x_1-x_2|}(x_1)$ e $B_2 = B_{2|x_1-x_2|}(x_2)$, daí

$$\begin{aligned} |Hu(x_1) - Hu(x_2)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^p \left| \frac{1}{|x_1 - y|^{n-2}} - \frac{1}{|x_2 - y|^{n-2}} \right| dy \\ &\leq \int_{\overline{B}_1} |u(y)|^p \left| \frac{1}{|x_1 - y|^{n-2}} - \frac{1}{|x_2 - y|^{n-2}} \right| dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_1} |u(y)|^p \left| \frac{1}{|x_1 - y|^{n-2}} - \frac{1}{|x_2 - y|^{n-2}} \right| dy. \end{aligned}$$

Note que

$$\int_{\overline{B}_1} |u(y)|^p \left| \frac{1}{|x_1 - y|^{n-2}} - \frac{1}{|x_2 - y|^{n-2}} \right| dy \leq \int_{\overline{B}_1} \frac{|u(y)|^p}{|x_1 - y|^{n-2}} dy + \int_{\overline{B}_1} \frac{|u(y)|^p}{|x_2 - y|^{n-2}} dy.$$

Além disso, $u \in V_\xi$, daí

$$\begin{aligned} \int_{\overline{B}_1} \frac{|u(y)|^p}{|x_1 - y|^{n-2}} dy &\leq \int_{\overline{B}_1} \frac{\xi^p}{|x_1 - y|^{n-2} (1 + |y|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)p}}} dy \\ &\leq \int_{\overline{B}_1} \frac{\xi^p}{|x_1 - y|^{n-2}} dy \end{aligned}$$

onde na última desigualdade, usamos que $\frac{1}{(1+|y|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)p}}} \leq 1$. Logo, usando coordenadas polares juntamente com o fato de y pertencer a $\overline{B}_1$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\overline{B}_1} \frac{\xi^p}{|x_1 - y|^{n-2}} dy &= \int_0^{2|x_1-x_2|} \frac{\xi^p r^{n-1} \omega_n}{r^{n-2}} dr \\ &= \xi^p \omega_n 2 |x_1 - x_2|^2. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Desde que $\overline{B}_1 \subset \overline{B}_2$, então

$$\int_{\overline{B}_1} \frac{|u(y)|^p}{|x_2 - y|^{n-2}} dy \leq \int_{\overline{B}_2} \frac{|u(y)|^p}{|x_2 - y|^{n-2}} dy.$$

Análogo ao que foi feito na integral anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\overline{B}_2} \frac{|u(y)|^p}{|x_2 - y|^{n-2}} dy &\leq \int_{\overline{B}_2} \frac{\xi^p}{|x_2 - y|^{n-2} (1 + |y|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)p}}} dy \\ &= \xi^p \omega_n \int_0^{3|x_1-x_2|} r dr \\ &\leq \xi^p \omega_n 5 |x_1 - x_2|^2. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Agora, vamos calcular

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_1} |u(y)|^p \left| \frac{1}{|x_1 - y|^{n-2}} - \frac{1}{|x_2 - y|^{n-2}} \right| dy. \quad (2.43)$$

Inicialmente, vamos usar o Teorema do Valor Médio para estimar

$$\left| \frac{1}{|x_1 - y|^{n-2}} - \frac{1}{|x_2 - y|^{n-2}} \right|.$$

Para isso, considere a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{|x - y|^{n-2}}$.

Assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(x_1 + \theta(x_2 - x_1)) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 + \theta(x_2 - x_1)) (x_2 - x_1)_i \\ &= \sum_{i=1}^n [(-n+2) |\bar{x} - y|^{-n} (\bar{x}_i - \bar{y}_i)] (x_2 - x_1)_i. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} |\nabla f(\bar{x})|^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n ((2-n) (\bar{x}_i - \bar{y}_i) |\bar{x} - y|^{-n})^2 \\ &= (2-n)^2 (|\bar{x} - y|^{-n})^2 \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - \bar{y}_i)^2 \\ &= (n-2)^2 (|\bar{x} - y|^{-n})^2 |\bar{x} - y|^2, \end{aligned}$$

com $\bar{x} = x_1 + \theta(x_2 - x_1)$. O que implica que

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) &= (n-2) |\bar{x} - y|^{-n} |\bar{x} - y| \\ &= (n-2) |\bar{x} - y|^{-n+1} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |\nabla f(x_1 + \theta(x_2 - x_1))| |x_1 - x_2|,$$

Logo, por (2.44), temos

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (n-2) |\bar{x} - y|^{-n+1} |x_1 - x_2|. \quad (2.45)$$

Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_1} |u(y)|^p \left| \frac{1}{|x_1 - y|^{n-2}} - \frac{1}{|x_2 - y|^{n-2}} \right| dy \leq (n-2) |x_1 - x_2| \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_1} \frac{|u(y)|^p}{|\bar{x} - y|^{n-1}} dy. \quad (2.46)$$

Afirmamos que se $y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_1$, então

$$\frac{1}{2} |y - x_1| \leq |y - \bar{x}| \leq 2 |y - x_1|.$$

De fato, como $y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_1$, então

$$\begin{aligned} |\theta(x_1 - x_2)| &= \theta |(x_1 - x_2)| \\ &\leq |y - x_1|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |y - \bar{x}| &= |y - x_1 - \theta(x_1 - x_2)| \\ &\leq |y - x_1| + |\theta(x_1 - x_2)| \\ &\leq 2 |y - x_1|. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |y - \bar{x}| &= |y - x_1 - \theta(x_1 - x_2)| \\ &\geq |y - x_1| - |x_2 - x_1| \\ &= \frac{1}{2} |y - x_1| + \frac{1}{2} |y - x_1| - |x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Sendo

$$\frac{1}{2} |y - x_1| - |x_2 - x_1| \geq 0,$$

temos

$$|y - \bar{x}| \geq \frac{1}{2} |y - x_1| \quad (2.47)$$

o que prova a afirmação. Por (2.46) e (2.47) e usando o fato de que $u \in V_\xi$, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_1} |u(y)|^p \left| \frac{1}{|x_1 - y|^{n-2}} - \frac{1}{|x_2 - y|^{n-2}} \right| \\ &\leq 2^{n-1} (n-2) \xi^p |x_1 - x_2| \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_1} \frac{1}{|y - x_1|^{n-1} (1 + |y|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)p}}} dy, \end{aligned} \quad (2.48)$$

com

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_1} \frac{1}{|y - x_1|^{n-1} (1 + |y|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)p}}} dy &\leq \int_{(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_1) \cap \{|y| \leq 2R\}} \frac{1}{|y - x_1|^{n-1} (1 + |y|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)p}}} dy \\ &\quad + \int_{(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_1) \cap \{|y| \geq 2R\}} \frac{1}{|y - x_1|^{n-1} (1 + |y|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)p}}} dy \\ &= I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Note que se $|y| \leq 2R$, então

$$\frac{1}{(1 + |y|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}} \leq 1.$$

Além disso, se $y \in (\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1})$ e $x_1 \in \overline{B_R}(0)$, então

$$\begin{aligned} 2|x_1 - x_2| &\leq |y - x_1| \\ &\leq 3R. \end{aligned}$$

Logo, usando coordenadas polares, temos

$$I_3 \leq \omega_n \int_0^{3R} dr. \quad (2.49)$$

Agora, vamos calcular I_4 , para isso afirmamos que se $y \in (\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1}) \cap \{|y| \geq 2R\}$, então

$$\frac{1}{|y - x_1|} \leq \frac{2}{|y|}.$$

De fato, observe que

$$|x_1| \leq R \leq \frac{|y|}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |y - x_1| &\geq |y| - |x_1| \\ &\geq |y| - \frac{|y|}{2}. \end{aligned}$$

consequentemente

$$\begin{aligned} I_4 &\leq \int_{|y| \geq 2R} \frac{2^{n-1}}{(1 + |y|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p} |y|^{n-1}} dy \\ &\leq \int_{|y| \geq 2R} \frac{2^{n-1}}{(|y|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p} |y|^{n-1}} dy \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares temos

$$\begin{aligned} I_4 &\leq \omega_n \int_{2R}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(|y|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p}} dr \\ &= \omega_n \frac{2^{n-1}}{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p-1} \frac{1}{(2R)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}p-1}}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Logo, por (2.41), (2.42), (2.48), (2.49) e (2.50) obtemos

$$|Hu(x_1) - Hu(x_2)| \leq C |x_1 - x_2|,$$

onde $C(R, p, n, \delta, \xi)$, o que demonstra o lema. ■

Lema 2.2.7 $\Phi(V_\xi)$, com $0 < \xi \leq \xi_0$ é pré-compacto em $C_B(\mathbb{R}^n)$

Demonstração: Seja (u_k) uma sequência de funções em V_ξ . Desde que $\Phi(V_\xi)$ é uniformemente limitada, pois $\Phi(V_\xi) \subset V_\xi$ e que V_ξ é equicontínua, pelo Lema 2.2.6, temos pelo Teorema de Arzela-Ascoli que existe uma subsequência $(\Phi u_{1k}) \subset (\Phi u_k)$ que converge uniformemente em $\overline{B}_1(0) \subset \overline{B}_2(0)$. Sendo (Φu_{1k}) equicontínua e equilimitada em $\overline{B}_2(0)$, temos novamente pelo Teorema de Arzela-Ascoli que existe uma subsequência $(\Phi u_{2k}) \subset (\Phi u_{1k})$ que converge uniformemente em $\overline{B}_2(0) \subset \overline{B}_3(0)$. Continuando dessa forma, construímos uma subsequência $(\Phi u_{(j-1)k}) \subset (\Phi u_{jk})$ que converge uniformemente em $\overline{B}_{j-1}(0) \subset \overline{B}_j(0)$. Dessa forma, considerando a subsequência diagonal $(\Phi u_{kk}) \subset (\Phi u_k)$, temos por argumento de diagonal que (Φu_{kk}) converge pontualmente, digamos $(\Phi u_{kk})(x) \rightarrow v(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e algum $v \in V_\xi$.

Afirmamos que (Φu_{kk}) converge uniformemente para $v \in C_B(\mathbb{R}^n)$. De fato, temos que

$$\begin{aligned} \|v - \Phi u_{kk}\|_\infty &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |v(x) - \Phi u_{kk}(x)| \\ &\leq \sup_{|x| \leq R} |v(x) - \Phi u_{kk}(x)| + \sup_{|x| \geq R} |v(x) - \Phi u_{kk}(x)| \\ &\leq \sup_{|x| \leq R} |v(x) - \Phi u_{kk}(x)| + 2 \sup_{|x| \geq R} \frac{1}{(1 + |x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}}, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos que $(\Phi u_{kk}) \subset V_\xi$ para $|x| \geq R$. Como $(\Phi u_{kk})(x) \rightarrow v(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e algum $v \in V_\xi$, então

$$\sup_{|x| \leq R} |v(x) - \Phi u_{kk}(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Além disso,

$$\sup_{|x| \geq R} \frac{1}{(1 + |x|)^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}} \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Assim,

$$\|v - \Phi u_{kk}\|_\infty \leq \epsilon.$$

Com isso, mostramos que (Φu_k) possui subsequência convergente para toda sequência limitada $(u_k) \subset V_\xi$. ■

2.3 Prova do Teorema 2.1.1

Nesta seção apresentaremos a prova do Teorema 2.1.1, para isso utilizaremos o Corolário 1.2.13.

Demonstração: Temos pelo Lema 2.2.1 que o conjunto V_ξ é convexo e fechado. Além disso, por definição V_ξ é um subconjunto limitado de $C_B(\mathbb{R}^n)$, temos também pelo Lema

2.2.7 que $\Phi(V_\xi) \subset V_\xi$ é pré-compacto em V_ξ . Logo pelo Corolário 1.2.13 temos que a aplicação $\Phi : V_\xi \rightarrow V_\xi$ definida em (2.3) tem um ponto fixo em V_ξ , ou seja, existe $u \in V_\xi$ tal que

$$u(x) = \Phi u(x) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^p + f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy = w_h(x),$$

onde $h(y) = |u(y)|^p + f(y)$, consequentemente pelo Lema 1.1.7 temos que

$$-\Delta w_h = h = |u(y)|^p + f(y), \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Logo,

$$\Delta u + |u(y)|^p + f(y) = 0, \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Além disso, note que

$$u(x) = \Phi u(x) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^p + f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy \geq C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy = w_f(x).$$

Temos também que f é localmente Hölder contínua em $\mathbb{R}^n$, logo pelo Lema 1.1.3 temos que $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Portanto u é solução clássica para a equação

$$\Delta u + |u|^p + f(x) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n$$

e $u(x) \geq w_f(x)$ e isto completa a prova. ■

Capítulo 3

Resultados de não existência

Neste capítulo estabelecemos sob que condições as soluções da equação

$$\Delta u + |u|^p + f(x) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

estão ordenadas e como consequência mostraremos não-existência e unicidade de solução em uma certa classe de funções, para isso iremos usar o método de sub e supersolução. Mais precisamente, temos o seguinte resultado, devido a Guy Bernard [1].

Teorema 3.0.1 *Seja $p > n/(n-2)$, com $n \geq 3$. Considere*

$$S = \left\{ u \in C^2(\mathbb{R}^n); |u(x)| \leq \frac{\xi_2}{(1 + |x|^2)^{\frac{(1+\delta)}{(p-1)}}} \right\},$$

onde

$$\xi_2 = \left\{ \frac{n}{p(p-1)} \left[\frac{p(n-2)-2}{(p-1)n} \right] \right\}^{\frac{1}{(p-1)}} \text{ e } \delta > 0.$$

Se $u_1, u_2 \in S$ são respectivamente soluções de

$$\Delta u_1 + |u_1|^p + f_1(x) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n \quad (3.2)$$

e

$$\Delta u_2 + |u_2|^p + f_2(x) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n, \quad (3.3)$$

com $f_1, f_2 \in C(\mathbb{R}^n)$ e

$$f_1 \leq f_2 \quad \text{em } \mathbb{R}^n$$

então

$$u_1 \leq u_2 \quad \text{em } \mathbb{R}^n.$$

Como consequência deste teorema temos o seguinte resultado de não existência de solução.

Corolário 3.0.2 *Suponha que $p > n/(n-2)$, com $n \geq 3$. Se $f \in C(\mathbb{R}^n)$ e $f < 0$, então a equação (3.1) não possui solução positiva em S .*

Ainda como consequência do Teorema 3.0.1 temos o seguinte resultado de unicidade de solução.

Corolário 3.0.3 *Se $p > n/(n-2)$, com $n \geq 3$ e $f \in C(\mathbb{R}^n)$, então a equação (3.1) possui no máximo uma solução em S .*

3.1 Princípios do máximo e regularidade

Para esta seção consideraremos operadores lineares de segunda ordem da forma

$$Lu = -\Delta u + c(x)u,$$

com $c \in C(\overline{\Omega})$ onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Lembrando que a fronteira de Ω satisfaz a condição da esfera interior em x_0 se existe uma bola $B \subset \Omega$ com $x_0 \in \partial B$.

Teorema 3.1.1 *Suponha Ω conexo. Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $c \geq 0$ em Ω , então:*

- i) *Se $Lu \leq 0$ em Ω e u atinge um máximo não negativo sobre $\overline{\Omega}$ em um ponto interior, então u é constante em Ω .*
- ii) *Do mesmo modo, se $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge um mínimo não positivo sobre $\overline{\Omega}$ em um ponto interior, então u é constante em Ω .*

Demonstração: Ver Teorema 4 em [3], pg.333. ■

Teorema 3.1.2 *Sejam $\Omega = B_R(0)$ e $L = \Delta + k(x)$, com $k(x) \geq 0$. Se w e v são funções de classe C^2 tais que*

$$Lv \leq Lw \quad \text{em } \Omega.$$

com $v > 0$ em $\overline{\Omega}$, então $u = \frac{w}{v}$ não pode atingir um máximo em Ω , a menos que u seja uma constante.

Demonstração: Ver Teorema 10, em [7], pg. 73. ■

Teorema 3.1.3 *Seja*

$$Lu = -\Delta u + c(x)u$$

um operador estritamente elíptico num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $c \leq 0$. Suponha que f e que os coeficientes de L sejam limitados e pertençam a $C^\alpha(\Omega)$. Suponha ainda que Ω satisfaz a condição da esfera exterior para todo ponto da fronteira. Se φ é contínua sobre $\partial\Omega$, então o problema de Dirichlet,

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma única solução $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$.

3.1. PRINCÍPIOS DO MÁXIMO E REGULARIDADE

Demonstração: Ver Teorema 6.13 em [4], pg. 106. ■

Teorema 3.1.4 (Agmon, Douglas, Nirenberg) Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é de classe C^2 com fronteira limitada. Seja $1 < p < \infty$. Então para todo $f \in L^p(\Omega)$ existe uma única solução $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ da equação

$$-\Delta u + u = f \quad \text{em } \Omega.$$

Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e se $f \in W^{m,p}(\Omega)$, com $m \geq 1$ um inteiro, então

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad \|u\|_{W^{m+2,p}} \leq C \|f\|_{W^{m,p}}.$$

Demonstração: Ver Teorema 9.32 em [8], pg. 316. ■

Teorema 3.1.5 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira de classe C^1 . Suponha que $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

i Se $k < \frac{n}{p}$, então $u \in L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$. Além disso,

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

onde $C = C(k, p, n, \Omega) > 0$.

ii Se $k > \frac{n}{p}$, então $u \in C^{k - [\frac{n}{p}] - 1, \alpha}(\overline{\Omega})$, onde

$$\alpha = \begin{cases} \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p}, & \text{se } \frac{n}{p} \text{ não é inteiro} \\ \text{qualquer } \alpha < 1, & \text{se } \frac{n}{p} \text{ é um inteiro.} \end{cases}$$

Além disso,

$$\|u\|_{C^{k - [\frac{n}{p}] - 1, \alpha}(\overline{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

onde $C = C(k, p, n, \alpha, \Omega) > 0$.

Demonstração: Ver Teorema 6 de [3], pg.270. ■

Teorema 3.1.6 (Schauder) Suponha que Ω é limitado e de classe $C^{2,\alpha}$ com $0 < \alpha < 1$. Então para cada $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ existe uma única solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, se Ω é de classe $C^{m+2,\alpha}$, com $m \geq 1$ um inteiro e se $f \in C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$, então

$$u \in C^{m+2,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{com} \quad \|u\|_{C^{m+2,\alpha}} \leq C \|f\|_{C^{m,\alpha}}.$$

Demonstração: Ver Teorema 9.33 em [8], pg. 317. ■

3.2 Método de sub e supersolução

Nesta seção vamos mostrar o método de sub e supersolução. Para isso, iremos considerar o seguinte problema de Dirichlet não linear

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.4)$$

onde Ω é um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^n$ e $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Hölder contínua em relação a x e de classe C^1 em relação a segunda variável.

Definição 3.2.1 Uma função $\underline{u}$ ($\bar{u}$) $\in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ é dita uma **subsolução** (**supersolução**) do problema (3.4) se satisfaz respectivamente

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \leq f(x, \underline{u}) & \text{em } \Omega \\ \underline{u} \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.5)$$

e

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} \geq f(x, \bar{u}) & \text{em } \Omega \\ \bar{u} \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.6)$$

A demonstração do teorema que apresentaremos a seguir pode ser encontrada em [6].

Proposição 3.2.2 Se $\underline{u}$ e $\bar{u}$ forem, respectivamente, subsolução e supersolução do problema (3.4) tal que $\underline{u} \leq \bar{u}$ em Ω , então, existe uma solução u de (3.4) satisfazendo $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ em Ω .

Demonstração: Definamos $g(x, u) = f(x, u) + au$, onde $a \in \mathbb{R}$. Podemos escolher $a \geq 0$ suficientemente grande de modo que a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi_x : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \Psi_x(u) = g(x, u). \end{aligned}$$

seja crescente em $[\underline{u}(x), \bar{u}(x)]$, $\forall x \in \bar{\Omega}$.

Desta forma, devemos ter

$$0 \leq \frac{\partial \Psi_x}{\partial u} = \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} = f_u(x, u) + a.$$

Logo,

$$a \geq -f_u(x, u).$$

Assim, basta tomarmos

$$a \geq 0$$

e

$$a \geq \max \{ -f_u(x, u); x \in \bar{\Omega} \text{ e } u \in [\underline{u}(x), \bar{u}(x)] \}.$$

Note que $\max \{ -f_u(x, u); x \in \bar{\Omega} \text{ e } u \in [\underline{u}(x), \bar{u}(x)] \}$ existe, pois $f \in C^1$ com relação a segunda variável e $\bar{\Omega} \times [\underline{u}(x), \bar{u}(x)]$ é compacto. Definamos ainda a sequência de funções, $u_k \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ como segue: seja $u_0 = \bar{u}$ e, para todo $k \geq 1$, u_k é a solução única do problema linear

$$\begin{cases} -\Delta u_k + au_k = g(x, u_{k-1}) & \text{em } \Omega \\ u_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.7)$$

A sequência (u_k) está bem definida, isto é, o problema (3.7) admite uma única solução. Para isto, basta justificar que o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + av = h(x) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $h \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, admite uma única solução. Mas isto segue do Teorema 3.1.3.

Mostraremos por indução que

$$\underline{u} \leq \dots \leq u_{k+1} \leq u_k \leq \dots \leq u_0 = \bar{u}. \quad (3.8)$$

Afirmamos que a propriedade (3.8) é válida para $k = 1$, ou seja $\underline{u} \leq u_1 \leq \bar{u}$. De fato, pela definição de u_1 , temos

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + au_1 = g(x, u_0) = g(x, \bar{u}) & \text{em } \Omega \\ u_1 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.9)$$

Além disso, como $\bar{u}$ é supersolução para o problema (3.9), temos

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} + a\bar{u} \geq g(x, \bar{u}) = -\Delta u_1 + au_1 & \text{em } \Omega \\ \bar{u} \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.10)$$

Daí, por (3.9) e (3.10), obtemos

$$\begin{cases} -\Delta(\bar{u} - u_1) + a(\bar{u} - u_1) \geq 0 & \text{em } \Omega \\ \bar{u} - u_1 \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Teorema 3.1.1 temos que

$$u_1 \leq \bar{u} \quad \text{em } \Omega. \quad (3.11)$$

Vejamos que $\underline{u} \leq u_1$. Com efeito, pela definição de subsolução temos que

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} + a\underline{u} \leq g(x, \underline{u}) & \text{em } \Omega \\ \underline{u} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.12)$$

Por (3.9), (3.12) e usando o fato de g ser crescente na segunda entrada, juntamente com o fato de $\underline{u} \leq \bar{u}$, obtemos

$$\begin{cases} -\Delta(\underline{u} - u_1) - a(\underline{u} - u_1) \leq 0 & \text{em } \Omega \\ \underline{u} - u_1 \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Teorema 3.1.1 temos

$$\underline{u} \leq u_1 \text{ em } \Omega. \quad (3.13)$$

Por (3.11) e (3.13), concluímos que

$$\underline{u} \leq u_1 \leq \bar{u} \text{ em } \Omega.$$

Agora, vamos assumir que a propriedade (3.8) vale para algum $k \in \mathbb{N}$, ou seja

$$\underline{u} \leq u_k \leq u_{k-1} \leq \dots \leq u_0 = \bar{u} \text{ em } \Omega,$$

e mostraremos que (3.8) vale para $k+1$, ou seja,

$$\underline{u} \leq u_{k+1} \leq u_k.$$

Vamos mostrar primeiro que $u_{k+1} \leq u_k$. Com efeito, sabemos que

$$\begin{cases} -\Delta u_k + a u_k = g(x, u_{k-1}) & \text{em } \Omega \\ u_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.14)$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u_{k+1} + a u_{k+1} = g(x, u_k) & \text{em } \Omega \\ u_{k+1} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.15)$$

Por (3.14) de (3.15), obtemos

$$\begin{cases} -\Delta(u_k - u_{k+1}) + a(u_k - u_{k+1}) = g(x, u_{k-1}) - g(x, u_k) & \text{em } \Omega \\ u_k - u_{k+1} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como, $u_{k-1} \geq u_k$ (por hipótese de indução), então $g(x, u_{k-1}) \geq g(x, u_k)$, pois g é crescente em $[\underline{u}(x), \bar{u}(x)]$. Daí,

$$\begin{cases} -\Delta(u_k - u_{k+1}) + a(u_k - u_{k+1}) \geq 0 & \text{em } \Omega \\ u_k - u_{k+1} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Teorema 3.1.1 temos

$$u_k \geq u_{k+1} \text{ em } \Omega. \quad (3.16)$$

Por outro lado, como $\underline{u}$ é uma subsolução temos

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} + a \underline{u} \leq g(x, \underline{u}) & \text{em } \Omega \\ \underline{u} \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.17)$$

Agora, pela definição de u_{k+1} , implica que

$$\begin{cases} -\Delta u_{k+1} + a u_{k+1} = g(x, u_k) & \text{em } \Omega \\ u_{k+1} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.18)$$

Por (3.18) e (3.17) temos

$$\begin{cases} -\Delta(u_{k+1} - \underline{u}) + a(u_{k+1} - \underline{u}) \geq g(x, u_k) - g(x, \underline{u}) & \text{em } \Omega \\ u_{k+1} - \underline{u} \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.19)$$

Sendo $\underline{u} \leq u_k$ (por hipótese de indução) e, novamente pela monotonicidade da g temos que

$$g(x, u_k) \geq g(x, \underline{u}),$$

consequentemente

$$g(x, u_k) - g(x, \underline{u}) \geq 0. \quad (3.20)$$

Logo, por (3.19) e (3.20)

$$\begin{cases} -\Delta(u_{k+1} - \underline{u}) + a(u_{k+1} - \underline{u}) \geq 0 & \text{em } \Omega \\ u_{k+1} - \underline{u} \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Novamente pelo Teorema 3.1.1 temos que

$$u_{k+1} \geq \underline{u} \text{ em } \Omega. \quad (3.21)$$

Logo, por (3.16) e (3.21) que a propriedade (3.8) vale para todo $k + 1$, e portanto, é válida para todo $k \in \mathbb{N}$. Concluimos então que a sequência (u_k) é limitada e decrescente em Ω . Portanto, existe u tal que para cada $x \in \Omega$ fixado

$$u_k(x) \searrow u(x) \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (3.22)$$

Nosso objetivo é mostrar que podemos passar o limite em (3.7), para concluir que u definida em (3.22) é solução do problema (3.4). Para isto, precisamos mostrar que $u_k \rightarrow u \in C^2(\overline{\Omega})$. Seja

$$g_k(x) = g(x, u_k(x)). \quad (3.23)$$

Note que a sequência (g_k) é limitada em $L^\infty(\Omega)$. De fato,

$$\begin{aligned} \|g_k\|_\infty &= \|f(\cdot, u_k) + au_k\|_\infty \\ &\leq \|f(\cdot, u_k)\|_\infty + a\|u_k\|_\infty \\ &\leq \|f(\cdot, u_k)\|_\infty + a\|\bar{u}\|_\infty. \end{aligned}$$

Como $\bar{u}$ e $\underline{u}$ são contínuas e $\overline{\Omega}$ é compacto temos que existe $c_1 > 0$ tal que $\|\bar{u}\|_\infty \leq c_1$ e existe $c_2 > 0$ tal que $\|\underline{u}\|_\infty \times [c_2, c_1]$. Sabendo que f é contínua e $\overline{\Omega} \times [c_2, c_1]$ é compacto, existe c_3 tal que $\|f(\cdot, u_k)\|_\infty < c_3$. Assim,

$$\|g_k(x)\|_\infty < c_4,$$

e portanto, g_k é limitada em $L^p(\Omega)$ para $1 < p < \infty$. Desde que $g \in L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$ e u_k é solução do problema (3.7), temos pelo Teorema 3.1.4 que a sequência u_k é limitada em $W^{2,p}(\Omega)$ para $1 < p < \infty$. Pelo Teorema 3.1.5 temos que (u_k) é limitada em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Daí (g_k) é limitada em C^α . O Teorema 3.1.6 implica que (u_k) é limitada em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Como $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ está imerso compactamente em $C^2(\overline{\Omega})$ temos que existe uma subsequência (u_{k_j}) de (u_k) e $\eta \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $u_{k_j} \rightarrow \eta$ em $C^2(\overline{\Omega})$. Assim, $u_{k_j}(x) \rightarrow \eta(x)$ em Ω . Sendo (u_k) monótona, então

$$u_k \rightarrow \eta \in C^2(\overline{\Omega})$$

e, portanto,

$$u_k(x) \rightarrow \eta(x) \text{ em } \Omega.$$

Por (3.22) concluímos que $\eta(x) = u(x)$, com $x \in \bar{\Omega}$. Logo, $u_k \rightarrow u \in C^2(\bar{\Omega})$. Tomando o limite em (3.7) obtemos

$$\begin{cases} -\Delta u + au = g(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde concluímos que u é solução do problema (3.4). Assim, existe uma solução u de (3.4) tal que $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$, o que conclui a demonstração. ■

Teorema 3.2.3 (Estimativa interior) *Sejam Ω um domínio de $\mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega)$ e $f \in C_{loc}^\alpha(\Omega)$ tal que $\Delta u = f$ em Ω . Então $u \in C_{loc}^{2,\alpha}(\Omega)$, e para $\Omega_0, \Omega_1 \subset \Omega$, com $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega$ e $\bar{\Omega}_1$ compacto, temos*

$$\|u\|_{2,\alpha,\Omega_0} \leq C \left(\|u\|_{\infty,\Omega_1} + \|f\|_{0,\alpha,\Omega_1} \right),$$

onde $C = C(\Omega_0, \Omega_1)$.

Demonstração: Ver Teorema 4.6 de [4], pg. 60 e Teorema 1.7 em [15], pg.11. ■

Proposição 3.2.4 *Seja h e $K \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$. Se $\underline{u}$ e $\bar{u}$ são subsolução e supersolução respectivamente de*

$$\Delta u + K(x)u + h(x) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n, \quad (3.24)$$

tal que

$$\underline{u} \leq \bar{u} \quad \text{em } \mathbb{R}^n.$$

Então, existe $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ solução de (3.24) tal que

$$\underline{u} \leq u \leq \bar{u} \quad \text{em } \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Seja B_R uma bola centrada na origem, com $R > 0$. Considere o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} \Delta u + K(x)u + h(x) = 0 & \text{em } B_R \\ u \geq 0, u \neq 0 & \text{em } B_R \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_R. \end{cases} \quad (3.25)$$

Como $B_R \subset \mathbb{R}^n$ temos que $\bar{u}$ é supersolução (para cada R) e $\underline{u}$ é subsolução (para cada R) do problema (3.25) com $\underline{u} \leq \bar{u}$ em B_R . Aplicando a Proposição 3.2.2 com $f(x, u) = K(x)u + h(x)$ temos que para cada R existe $u_R \in C^2(B_R) \cap C(\bar{B}_R)$ solução de (3.25) tal que $\underline{u} \leq u_R \leq \bar{u}$ em B_R .

Fixemos inteiros R_1 e $R_2 = 2R_1$ ou $R_2 = R_1 + 1$ tal que para cada inteiro $k > R_2$, obtemos $u_k \in C^2(B_k) \cap C(\bar{B}_k)$, satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta u_k + K(x)u_k + h(x) = 0 & \text{em } B_k \\ u_k = 0 & \text{sobre } \partial B_k, \end{cases}$$

e

$$\underline{u} \leq u_k \leq \bar{u} \text{ em } \bar{B}_k.$$

Em particular,

$$\begin{cases} \Delta u_k + K(x) u_k + h(x) = 0 & \text{em } B_{R_2} \\ \underline{u} \leq u_k \leq \bar{u} & \text{em } \bar{B}_{R_2}. \end{cases} \quad (3.26)$$

Como $(h + K(x) u_k)$ é localmente Hölder contínua em B_k , B_k é um domínio em $\mathbb{R}^n$, $B_{R_2} \subset B_k$, $u_k \in C^2(B_k)$ e $B_{R_1}, B_{R_2} \subset B_k$, com $\bar{B}_{R_2}$ compacto então pelo Teorema 3.2.3 temos que

$$u_k \in C^{2,\alpha}(\bar{B}_{R_1}), \quad 0 < \alpha < 1$$

e

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\bar{B}_{R_1})} &\leq C \left\{ \|u_k\|_{C^\infty(\bar{B}_{R_2})} + \|h + K(x) u_k\|_{C^{0,\alpha}(\bar{B}_{R_2})} \right\} \\ &\leq C(R_1, R_2) \\ &\leq C_{R_1}. \end{aligned}$$

Fazendo $R_1 = 1, 2, 3, \dots$ encontramos $C_1, C_2, C_3, \dots$ constantes positivas tais que

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\bar{B}_1)} &\leq C_1, \quad k > 2 \\ \|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\bar{B}_2)} &\leq C_2, \quad k > 3 \\ &\vdots \\ \|u_k\|_{C^{2,\alpha}(\bar{B}_{R_1})} &\leq C_{R_1}, \quad k > R_1 + 1. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Agora, para cada inteiro $i \geq 1$, defina

$$u_i^k = u^k|_{B_i}, \quad k > i + 1.$$

Temos, $B_i \subset B_{i+1}$ e que $\{u_{i+1}^k\}_{k=i+2}^\infty$ é uma subsequência de $\{u_{i+1}^k\}_{k=i+1}^\infty$. De (3.27) e pelo Teorema 1.1.4 temos que a imersão

$$C^{2,\alpha}(\bar{B}_i) \hookrightarrow C^2(\bar{B}_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

é compacta. Logo, para cada $i \geq 1$ existe $u_i \in C^2(\bar{B}_i)$ tal que, a menos de subsequências, $u_i^k \rightarrow u_i$ em $C^2(\bar{B}_i)$

$$\begin{aligned} u_1^2, u_1^3, u_1^4 \dots &\xrightarrow{C^2(\bar{B}_1)} u_1, \\ u_2^3, u_2^4, u_2^5 \dots &\xrightarrow{C^2(\bar{B}_2)} u_2, \\ u_3^4, u_3^5, u_3^6 \dots &\xrightarrow{C^2(\bar{B}_3)} u_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

com $u_{i+1}|_{B_i} = u_i$.

Definindo

$$u(x) = u_i(x) \text{ para } x \in B_i,$$

temos que $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Além disso, considere a sequência diagonal

$$U_k = u_k^{2k}, k = 2, 3, \dots$$

Claro que a sequência diagonal é convergente

$$U_k \xrightarrow{k} u \text{ em } C^2(\overline{B_{R_i}}), \text{ para cada inteiro } i \geq 1.$$

Assim, considerando o problema

$$\begin{cases} \Delta U_k + K(x) U_k + h(x) = 0 & \text{em } B_{2k} \\ \underline{u} \leq U_k \leq \overline{u} & \text{em } \overline{B_{2k}} \end{cases}$$

e usando o fato que $B_{R_1} \subset B_{R_2}$ temos

$$\begin{cases} \Delta U_k + k(x) U_k + h(x) = 0 & \text{em } B_{R_1} \\ \underline{u} \leq U_k \leq \overline{u} & \text{em } \overline{B_{R_1}}. \end{cases} \quad (3.28)$$

Finalmente, fazendo $k \rightarrow \infty$ em (3.28) e lembrando que R_1 é arbitrário concluímos que $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ é solução de (3.24), com $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em $\mathbb{R}^n$. ■

3.3 Média esférica

Definição 3.3.1 A média esférica de uma função $v \in C(\mathbb{R}^n)$ é definida por

$$\overline{v}(x, r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} v(x + r\xi) dS_\xi, \forall r \in \mathbb{R},$$

onde ω_n é o volume da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$.

Pela definição de média esférica temos

$$\overline{v}(0, r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} v(0 + r\xi) dS_\xi = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} v(r\xi) dS_\xi, \forall r.$$

Além disso, $\overline{v}(0, 0) = v(0)$. Fazendo $y = r\xi$ obtemos

$$\overline{v}(0, r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y|=r} v(y) dS_y, \forall r > 0.$$

Consideremos $X = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; x = 0 \text{ e } r \geq 0\}$. Denotemos a restrição de $\overline{v}(x, r)$ à X por $\overline{v}(r)$, isto é,

$$\begin{aligned} \overline{v}(r) &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y|=r} v(y) dS_y, \forall r > 0, \\ \overline{v}(0) &= v(0). \end{aligned}$$

Proposição 3.3.2 *A média esférica satisfaz:*

1. $\overline{v + w} = \overline{v} + \overline{w}$.

Se $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ então a média esférica também satisfaz:

2. $\frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial \overline{v}}{\partial r} (x, r) \right) = r^{n-1} \Delta \overline{v} (x, r),$
3. $\frac{n-1}{r} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} (x, r) + \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial r^2} (x, r) = \Delta \overline{v} (x, r),$
4. $\frac{\partial \overline{v}}{\partial r} (x, r) \Big|_{r=0} = 0,$
5. $\overline{\Delta v} (\cdot, r) = \Delta (\overline{v} (\cdot, r)).$

A prova das propriedades citadas acima são de fáceis verificação, as quais decorrem da definição de média esférica.

Teorema 3.3.3 *Se v é solução do problema*

$$\begin{cases} \Delta v + |K| v + f(x) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \\ v > 0. \end{cases}$$

Então

$$\int_{R \leq |x|} \frac{(|K| v + h)}{|y|^{n-2}} dy + \frac{1}{R^{n-2}} \int_{|x| \leq R} (|K| v + f) dy = (n-2) \omega_n \overline{u}(R), \quad \forall R > 0. \quad (3.29)$$

Demonstração: Usando a definição de média esférica, temos

$$\overline{\Delta v} + \overline{|K| v + f} = 0, \quad \forall r > 0.$$

Multiplicando por r^{n-1} e usando o item 5 da Proposição 3.3.2 obtemos

$$r^{n-1} \Delta \overline{v} + r^{n-1} \overline{|K| v + f} = 0, \quad \forall r > 0.$$

Pelo item 2 da Proposição 3.3.2 temos

$$\frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{d\overline{v}}{dr} \right) + r^{n-1} \left(\overline{|K| v + f} \right) = 0, \quad \forall r > 0.$$

Integrando a equação acima de 0 a r , usando o item 4 da Proposição 3.3.2 e dividindo por r^{n-1} temos

$$\frac{d\overline{v}}{dr} (r) + \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^r s^{n-1} \left(\overline{|K| v + f} \right) ds = 0.$$

Integrando a última equação de r a R , com $0 < r < R$ obtemos

$$\overline{v} (R) - \overline{v} (r) + \int_r^R \frac{1}{t^{n-1}} \int_0^t s^{n-1} \left(\overline{|K| v + f} \right) (s) ds dt = 0.$$

Aplicando o Teorema de Fubini

$$\begin{aligned} & \bar{v}(R) - \bar{v}(r) + \int_0^r \int_r^R \frac{s^{n-1}}{t^{n-1}} \left(\overline{|K|v + f} \right)(s) dt ds \\ & + \int_r^R \int_s^R \frac{s^{n-1}}{t^{n-1}} \left(\overline{|K|v + f} \right)(s) dt ds \\ & = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{v}(R) - \bar{v}(r) &= \int_0^r \frac{s^{n-1}}{(n-2)} \overline{|K|v + f} \left(\frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) ds \\ &+ \int_r^R \frac{s^{n-1}}{(n-2)} \overline{|K|v + f} \left(\frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{s^{n-2}} \right) ds. \end{aligned}$$

Fazendo $R \rightarrow \infty$ na equação acima, utilizando o Teorema da Convergência Monótona e sabendo que $\bar{v}(R) \rightarrow 0$ obtemos

$$\bar{v}(r) = \frac{1}{r^{n-2}(n-2)} \int_0^r s^{n-1} \overline{|K|v + f} ds + \frac{1}{(n-2)} \int_r^\infty \frac{s^{n-1}}{s^{n-2}} \overline{|K|v + f} ds.$$

Pela definição de $\bar{v}$

$$\begin{aligned} \bar{v}(r) &= \frac{1}{r^{n-2}(n-2)\omega_n} \int_0^r \frac{s^{n-1}}{s^{n-2}} \int_{|x|=r} (|K|v + f) dS ds \\ &+ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_r^\infty \frac{s^{n-1}}{s^{n-1}s^{n-2}} \int_{|x|=r} (|K|v + f) dS ds \\ &= \frac{1}{r^{n-2}\omega_n(n-2)} \int_0^r \int_{|x|=r} (|K|v + f) dS ds \\ &+ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_r^\infty \frac{1}{s^{n-2}} \int_{|x|=r} (|K|v + f) dS ds. \end{aligned}$$

Logo,

$$(n-2)\omega_n \bar{v}(r) = \frac{1}{r^{n-2}} \int_0^r \int_{|x|=r} (|K|v + f) dS ds + \int_r^\infty \int_{|x|=r} \frac{(|K|v + f)}{|y|^{n-2}} dS ds.$$

Usando coordenadas polares temos

$$(n-2)\omega_n \bar{v}(r) = \frac{1}{r^{n-2}} \int_{|x| \leq r} (|K|v + f) dy + \int_{|x| \geq r} \frac{(|K|v + f)}{|y|^{n-2}} dy \quad \forall r > 0,$$

o que conclui a demonstração do Teorema 3.3.3. ■

3.4 Lema auxiliar

Lema 3.4.1 *Se v é solução do problema*

$$\begin{cases} \Delta v + |K(x)|v + f(x) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \\ v > 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

onde $f(y) = \frac{1}{(1+|y|^2)^{\frac{p}{(p-1)}}}$ e $K(y) = \frac{p\xi_2^{p-1}}{(1+|y|^2)^{\frac{(1+\delta)}{(p-1)}}} \text{sign}(u_1 - u_2)$, com $\xi_2 = \left\{ \frac{n}{p(p-1)} \left[\frac{p(n-2)-2}{(p-1)n} \right] \right\}^{\frac{1}{(p-1)}}$. Então para $R > 0$, temos

$$v(x) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(|K|v + f)(y)}{|x - y|^{n-2}} dy. \quad (3.31)$$

Demonstração: Pelo Teorema 3.3.3, temos que se $R \rightarrow 0$, então

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow 0} \int_{R < |x|} \frac{(|K|v + f)}{|y|^{n-2}} dy + \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R^{n-2}} \int_{|x| \leq R} (|K|v + f) dy \\ & = \lim_{R \rightarrow 0} (n-2) \omega_n \bar{u}(R). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Primeiro, mostraremos que

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R^{n-2}} \int_{|x| \leq R} (|K|v + f) dy = 0. \quad (3.33)$$

De fato, como v e f são funções contínuas, temos que

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R^{n-2}} \int_{|x| \leq R} (|K|v + f) dy \leq \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R^{n-2}} \int_{|x| \leq R} \| |K|v + f \|_{\infty} dy.$$

Utilizando coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq R} \| |K|v + f \| dy & \leq \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R^{n-2}} \| |K|v + f \|_{\infty} \int_0^R r^{n-1} \omega_n dr \\ & \leq \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\| |K|v + f \|_{\infty} R^n \omega_n}{n R^{n-2}} \\ & \leq \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\| |K|v + f(y) \|_{\infty} R^2 \omega_n}{n} = 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos (3.33). Por (3.32) e (3.33) temos que

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{R \leq |x|} \frac{(|K|v + f)}{|y|^{n-2}} dy = (n-2) \omega_n \lim_{R \rightarrow 0} \bar{v}(R)$$

e pela definição de média esférica temos

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{R \leq |x|} \frac{(|K| v + f)}{|y|^{n-2}} dy = (n-2) \omega_n \lim_{R \rightarrow 0} v(0).$$

Afirmamos que

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{R < |x|} \frac{(|K| v + f)}{|y|^{n-2}} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(|K| v + f)}{|y|^{n-2}} dy.$$

De fato, note que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{R < |x|} \frac{(|K| v + f)}{|y|^{n-2}} dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_k} \frac{(|K| v + f)}{|y|^{n-2}} dy. \quad (3.34)$$

onde $R_k \rightarrow 0$ e $B_k = (B_{R_k}(0))^c$. Considere

$$g_k(y) = \chi_{B_k} \frac{(|K| v + f)}{|y|^{n-2}} \text{ e } g(y) = \frac{(|K| v + f)}{|y|^{n-2}}.$$

Afirmamos que $g_k(y) \rightarrow g(y)$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$. De fato, dado $\epsilon > 0$ tome $n_0(y) > |y|$. Logo, para todo $k \geq n_0$, temos.

$$\chi_{B_k}(y) = 1. \quad (3.35)$$

Multiplicando (3.35) por $g(y)$, obtemos

$$\chi_{B_k} \frac{(|K| v + f)}{|y|^{n-2}} = \frac{(|K| v + f)}{|y|^{n-2}}.$$

Assim, concluímos que $g_k(y) \rightarrow g(y)$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$. Além disso,

$$|g_k(y)| = |\chi_{B_k}| \left| \frac{(|K| v + f)}{|y|^{n-2}} \right| \leq \left| \frac{(|K| v + f)}{|y|^{n-2}} \right| = g(y).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$g_k(y) \rightarrow g(y) \text{ em } L^1(\mathbb{R}^n). \quad (3.36)$$

Por (3.34) e (3.36), temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(|K| v + f)}{|y|^{n-2}} dy = (n-2) \omega_n v(0).$$

Portanto,

$$v(0) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(|K| v + f)}{|y|^{n-2}} dy.$$

O problema (3.30) é invariante por translação, pois está definido em todo $\mathbb{R}^n$. Assim, pela equação acima, obtemos

$$v(x) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(|K| v + f)}{|x - y|^{n-2}} dy,$$

o que prova o lema. ■

3.5 Prova do Teorema 3.0.1

Sejam $u_1, u_2 \in S$, onde $S = \left\{ u \in C^2(\mathbb{R}^n); |u(x)| \leq \frac{\xi_2}{(1+|x|^2)^{\frac{(1+\delta)}{(p-1)}}} \right\}$, com $\xi_2 = \left\{ \frac{n}{p(p-1)} \left[\frac{p(n-2)-2}{(p-1)n} \right] \right\}^{\frac{1}{(p-1)}}$. Inicialmente, observe que

$$\Delta(u_1 - u_2) + |u_1|^p - |u_2|^p + (f_1 - f_2) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Por hipótese, temos que $f_2 - f_1 \geq 0$. Logo,

$$\Delta(u_1 - u_2) + |u_1|^p - |u_2|^p \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Considere a função $\hat{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\hat{h}(t) = |t|^p$. Assim, pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$\begin{aligned} \hat{h}(u_1) - \hat{h}(u_2) &= (u_1 - u_2) p\theta(x)^{p-1} \text{sign}(u_1 - u_2) \\ &\leq (u_1 - u_2) \frac{p\xi_2^{p-1}}{(1+|x|^2)^{\frac{(1+\delta)}{(p-1)}}} \text{sign}(u_1 - u_2). \end{aligned}$$

Logo, $w = u_1 - u_2$ satisfaz

$$\Delta w + K(x)w \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^n, \quad (3.37)$$

onde $K(x) = \frac{p\xi_2^{p-1}}{(1+|x|^2)^{\frac{(1+\delta)}{(p-1)}}} \text{sign}(u_1 - u_2)$. Agora, considere o problema linear

$$\Delta v + |K(x)|v + h(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.38)$$

onde $h(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{p}{(p-1)}}}$. Afirmamos que $\underline{v} = 0$ e $\bar{v} = \frac{\eta}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{(p-1)}}}$, com $\eta > 0$ suficientemente grande, são respectivamente subsolução e supersolução do problema (3.38). De fato, inicialmente observe que se $\underline{v} = 0$, então

$$\begin{cases} \Delta \underline{v} + h(x) \leq 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \\ \underline{v} \leq 0, \end{cases}$$

pois $h(x) \geq 0$. Logo, pela definição de subsolução temos que $\underline{v} = 0$ é subsolução para o problema (3.38). Agora, mostraremos que $\bar{v} = \frac{\eta}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{(p-1)}}}$ é supersolução para o problema (3.38). Temos que

$$\bar{v}'(r) = -\frac{2\eta r(1+r^2)^{-\frac{p}{(p-1)}}}{(p-1)},$$

e

$$\bar{v}''(r) = -\frac{2\eta(1+r^2)^{-\frac{p}{(p-1)}}}{(p-1)} + \frac{4\eta r^2 p(1+r^2)^{-\frac{p}{(p-1)}-1}}{(p-1)^2}.$$

Com isso, usando o laplaciano em coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{v} &= \frac{2\eta}{(p-1)(1+r^2)^{\frac{p}{p-1}}} - \frac{4\eta r^2 p}{(p-1)^2(1+r^2)^{\frac{p}{p-1}}(1+r^2)} + \frac{(n-1)}{(p-1)} \frac{2\eta}{(1+r^2)^{\frac{p}{p-1}}} \\ &\geq \frac{2\eta}{(p-1)(1+r^2)^{\frac{p}{p-1}}} - \frac{4\eta r^2 p}{(p-1)^2(1+r^2)^{\frac{p}{p-1}}r^2} + \frac{(n-1)}{(p-1)} \frac{2\eta}{(1+r^2)^{\frac{p}{p-1}}}, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade, usamos o fato de $-\frac{1}{1+r^2} \geq -\frac{1}{r^2}$. Além disso, observe que

$$\begin{aligned} -|k(x)|\bar{v} &= -\frac{p\xi_3^{p-1}}{(1+|x|^2)^{1+\delta}} \frac{\eta}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{p-1}}} \\ &= -\frac{pn}{p(p-1)} \left[\frac{p(n-2)-2}{(p-1)n} \right] \frac{1}{(1+|x|^2)^{1+\delta}} \frac{\eta}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{p-1}}} \\ &= \frac{-p(n-2)+2}{(p-1)^2} \frac{1}{(1+|x|^2)^{1+\delta}} \frac{\eta}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{p-1}}} \\ &\geq \frac{-p(n-2)+2}{(p-1)^2} \frac{\eta}{(1+|x|^2)^{\frac{p}{p-1}}}. \end{aligned}$$

Fazendo $|x| = r$, obtemos

$$-|k(x)|\bar{v} \geq \frac{-p(n-2)+2}{(p-1)^2} \frac{\eta}{(1+r^2)^{\frac{p}{p-1}}}.$$

Logo,

$$-\Delta \bar{v} - |k(x)|\bar{v} = \left[\frac{2\eta}{(p-1)} - \frac{4\eta p}{(p-1)^2} + \frac{(n-1)}{(p-1)} 2\eta + \frac{p(n-2)+2}{(p-1)^2} \eta \right] \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{p}{p-1}}}.$$

Dessa forma, fazendo η suficientemente grande, temos que

$$-\Delta \bar{v} - |K(x)|\bar{v} \geq \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{p}{p-1}}} = h(x).$$

Sendo $\bar{v} \geq 0$, pela definição de supersolução, obtemos a prova da afirmação. Portanto, temos pela Proposição 3.2.4 que v é solução positiva para o problema (3.38).

Segue do Lema 3.4.1 que a solução positiva v do problema (3.38) satisfaz

$$v(x) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|K(y)|v(y) + h(y)}{|x-y|^{n-2}} dy.$$

Considere

$$f(y) = |K(y)|v(y) + h(y) \geq h(y) \geq \frac{C}{(|y|^2)^{\frac{p}{p-1}}}.$$

Note que

$$f(y) \geq h(y) \geq \frac{C}{(|y|^2)^{\frac{p}{(p-1)}}},$$

e assim,

$$l = -\frac{2p}{(p-1)} < -2,$$

o que implica pelo Lema 1.1.9 que

$$v(x) = w_f(x) \geq \frac{C}{(|y|^2)^{\frac{2}{(p-1)}}}.$$

Como $h \geq 0$, temos que v satisfaz a equação diferencial

$$\Delta v + K(x)v \leq 0 \text{ em } \mathbb{R}^n. \quad (3.39)$$

Por (3.37) e (3.39), obtemos

$$\Delta v + |K(x)|v \leq \Delta w + |K(x)|w, \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Considere $u(x) = \frac{w(x)}{v(x)}$ e note que $u(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow +\infty$, pois

$$w(x) \leq \frac{c}{|x|^{\frac{(2+\delta)}{(p-1)}}}$$

e

$$v(x) \geq \frac{c}{|x|^{\frac{2}{(p-1)}}}.$$

Pelo Teorema 3.1.2, para todo $R > 0$ temos

$$\max_{|x| < R} u(x) < \max_{|x|=R} u(x).$$

Portanto, $u \leq 0$ em $\mathbb{R}^n$. Usando o fato que $v > 0$, obtemos que $u_1 \leq u_2$, o que prova o Teorema.

3.5.1 Prova do Corolário 3.0.2

Suponha que existe uma solução positiva $u_1 \in S$, ou seja,

$$\Delta u_1 + |u_1|^p + f = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Note que $u_2 \equiv 0$ é uma solução de

$$\Delta u_2 + |u_2|^p + f_2 = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n,$$

com $f_2 \equiv 0$. Aplicando o Teorema 3.0.1 com $f_1 = f$ e $f_2 = 0$ temos

$$u_1 \leq u_2 \equiv 0,$$

o que é um absurdo, pois $u_1 > 0$.

3.5.2 Prova do Corolário 3.0.3

Sejam u_1 solução positiva de

$$\Delta u_1 + |u_1|^p + f_1 = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n$$

e u_2 solução positiva de

$$\Delta u_2 + |u_2|^p + f_2 = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n.$$

Considere $f_1 = f_2$. Assim, pelo Teorema 3.0.1, temos que se

$$f_1 \leq f_2 \text{ então } u_1 \leq u_2 \tag{3.40}$$

e se

$$f_2 \leq f_1 \text{ então } u_2 \leq u_1. \tag{3.41}$$

Logo, por (3.40) e (3.41), concluímos que $u_1 = u_2$, como queríamos.

Referências Bibliográficas

- [1] Bernard, Guy., *Existence theorems for certain elliptic and parabolic semilinear equations*. J. Math. Anal. Appl. 210 (1997), no. 2, 755–776.
- [2] Bernard, Guy., *An inhomogeneous semilinear equation in entire space*. J. Differential Equations 125 (1996), no. 1, 184–214.
- [3] Evans, Lawrence C., *Partial differential equations*. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [4] Gilbarg, David; Trudinger, Neil S., *Elliptic partial differential equations of second order*. Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [5] Li, Yi; Ni, Wei-Ming. *On conformal scalar curvature equations in $\mathbb{R}^n$* . Duke Math. J. 57 (1988), no. 3, 895–924.
- [6] Radulescu, Vicentiu D., *Qualitative analysis of nonlinear elliptic partial differential equations: monotonicity, analytic, and variational methods*. Contemporary Mathematics and Its Applications, 6. Hindawi Publishing Corporation, New York, 2008.
- [7] Protter, Murray H.; Weinberger, Hans F., *Maximum principles in differential equations*. Corrected reprint of the 1967 original. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [8] Brezis, Haim, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [9] Gui, Changfeng, *On positive entire solutions of the elliptic equation $\Delta u + K(x)u^p = 0$ and its applications to Riemannian geometry*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 126 (1996), no. 2, 225–237.
- [10] Gui, Changfeng; Ni, Wei-Ming; Wang, Xuefeng, *On the stability and instability of positive steady states of a semilinear heat equation in $\mathbb{R}^n$* , Comm. Pure Appl. Math. 45 (1992), no. 9, 1153–1181.
- [11] Li, Yi., *Asymptotic behavior of positive solutions of equation $\Delta u + K(x)u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$* . J. Differential Equations 95 (1992), no. 2, 304–330.

- [12] Lee, Tzong-Yow, *Some limit theorems for super-Brownian motion and semilinear differential equations*, Ann. Probab. 21 (1993), no. 2, 979–995.
- [13] Ni, Wei Ming, *On the elliptic equation $\Delta u + K(x) u^{\frac{(n+2)}{(n-2)}} = 0$, its generalizations, and applications in geometry*. Indiana Univ. Math. J. 31 (1982), no. 4, 493–529.
- [14] Adams, Robert A.; Fournier, John J. F., Sobolev spaces. Second edition. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 140. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [15] de Figueiredo, Djairo, Equações Elípticas não lineares. Curso no 11º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA(1977), 108 pp.