Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Reduções em Família e Multiplicidades Mistas

por

Luis Alberto Alba Sarria

sob orientação de

Dr. Roberto Callejas Bedregal (UFPB)

Dezembro de 2009
João Pessoa - PB

Reduções em Família e Multiplicidades Mistas

por

Luis Alberto Alba Sarria

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra.

Aprovada por:

Dr. Roberto Callejas Bedregal (Orientador)
(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)

Dr. Victor Hugo Jorge Pérez
(Universidade de São Paulo - USP - São Carlos)

Cleto Brasileiro Miranda Neto

Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto
(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)

Dr. Fernando Antônio Xavier de Souza (Suplente)
(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

S247r Sarria, Luis Alberto Alba.
Reduções em família e multiplicidades mistas / Luis Alberto Alba Sarria.-- João Pessoa, 2011.
37f.
Orientador: Roberto Callejas Bedregal
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Redução em família. 3. Multiplicidade. 4. Polinômios de Hilbert. 5. Elementos superficiais.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Agradecimentos

Muito obrigado a Nosso Rei Yahveh por acompanhar-me neste lindo caminho que é minha vida.

Muito obrigado ao professor Roberto Callejas Bedregal por mostrar-me esta bonita linha de pesquisa que é a álgebra comutativa e por sua impecável labor de orientação.

Muito obrigado ao corpo docente do mestrado pela excelente instruição e qualidade humana incomparável, fazendo minha estadia nele ainda mais maravilhosa.

Muito obrigado aos colegas pesquisadores da álgebra comutativa por me darem mais um motivo para continuar com meu estudo.

Muito obrigado à banca examinadora deste trabalho, professores Víctor Hugo Jorge Pérez, Cleto Brasileiro Miranda Neto e Fernando Antônio Xavier de Souza, por tomar um pouco de seu tempo para lê-lo, avaliá-lo da maneira que considerou mais conveniente e contribuir às valiosas melhoras na escrita do mesmo.

Muito obrigado a meus pais, Jesús Emilio e Martha Cecilia, e a minhas irmãs Ivón, Karen, Iveth e Vanessa, que, com sua doce dedicação e paciência, cultivaram em mim seus nobres valores e me deram a força e a liberdade para continuar com meu sonho.

Muito obrigado a todos os *sensei* que deixaram uma marca em meu estilo de pensamento.

Muito obrigado a meus amigos que, na distância, souberam alentar meu estado de ânimo com sua constante motivação.

Muito obrigado à família França Costa Araújo, especialmente a Airton, por ter-me acolhido como um dos seus e lembrar-me que ainda sou um ser humano.

Muito obrigado aos colegas do mestrado e ao povo brasileiro em geral por me brindarem a fantástica oportunidade de conhecer mais sobre sua cultura e seus costumes.

Muito obrigado a Alejandro, Kelly, Luz Marina, Álex, Luisa, Daniel e Diana pelos momentos agradáveis que experimentamos nesta aventura fora do país. Sinto-me muito feliz porque estão mostrando ao mundo que a Colômbia é um sonho utópico, muito longe do horrível estereótipo apresentado no Hollywood e nos jornais pouco profissionais.

Muito obrigado ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo apoio financeiro.

Resumo

Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local. As multiplicidades mistas para vários ideais $\mathfrak{m}$-primários foram definidas por J. Risler e B. Teissier em [Teissier], mostrando também que podem ser descritas mediante a multiplicidade de Hilbert-Samuel do ideal gerado por uma adequada seqüência superficial. Este resultado foi logo generalizado por D. Rees em [Rees], quem introduziu a noção de redução para uma família de ideais e mostrou que as multiplicidades mistas de ideais $\mathfrak{m}$-primários pode ser descrita como a multiplicidade de Hilbert-Samuel do ideal gerado por uma redução em família. Este teorema é conhecido como o teorema da multiplicidade mista de Rees e constitui um resultado crucial na teoria de multiplicidades mistas para ideais $\mathfrak{m}$-primários. A recíproca deste teorema foi estabelecida por I. Swanson em sua tese de doutorado (veja-se [Swanson]). Neste trabalho, damos provas detalhadas dos resultados mencionados.

Palavras chave: Redução em família, multiplicidade, polinômios de Hilbert, elementos superficiais.

Abstract

Let $(R, \mathfrak{m})$ be a Noetherian local ring. Mixed multiplicities of finitely many $\mathfrak{m}$-primary ideals were first defined by J. Risler and B. Teissier in [Teissier] and they proved that these could be described as the usual Hilbert-Samuel multiplicity of the ideal generated by an appropriated superficial sequence. This result was later generalized by D. Rees in [Rees], who first introduced the notion of joint reduction for a family of ideals and proved that the mixed multiplicities of a family of $\mathfrak{m}$-primary ideals could be described as the Hilbert-Samuel multiplicity of the ideal generated by a suitable joint reduction. This theorem is known as Rees' mixed multiplicity theorem and it is a crucial result in the theory of mixed multiplicities for $\mathfrak{m}$-primary ideals. The converse of Rees' theorem was given by I. Swanson in her Ph. D. thesis (see [Swanson]). In this work, we give a detailed proof of all of the above mentioned results.

Keywords: Joint reduction, multiplicity, Hilbert's polynomials, superficial elements.

Introdução

O fecho inteiro de um ideal é um objeto algébrico que já teve muitas aplicações em diferentes aspectos da geometria algébrica e da álgebra comutativa, sendo apresentado de maneira formal nos trabalhos de Krull e Zariski dos anos trinta. Aparte de ser estudado pelo próprio interesse na teoria multiplicativa de ideais, relacionando-o diretamente com o conceito de redução em família, tem sido extremamente importante na solução de problemas da teoria das singularidades. Com efeito, B. Teissier usou a multiplicidade e o fecho inteiro do produto de dois ideais $\mathfrak{m}$-primários num anel local $(R, \mathfrak{m})$ com o objetivo de estudar a eqüisingularidade de Whitney de uma família de hipersuperfícies com singularidades isoladas.

Dado o anel noetheriano local $(R, \mathfrak{m})$ e dados dois ideais $I \subseteq J$ em R, lembramos que I é uma redução de J se $IJ^n = J^{n+1}$ para um número natural n. Esta noção está relacionada com a de fecho inteiro como segue: I é uma redução de J se, e somente se, têm o mesmo fecho inteiro. Se $I \subseteq J$ são $\mathfrak{m}$-primários e I é redução de J, então, as multiplicidades de Hilbert-Samuel $e(J; R)$ e $e(I; R)$ são iguais. D. Rees em [Rees] provou seu famoso resultado, o qual agora leva seu nome, onde a recíproca também vale: *dado um anel noetheriano local* $(R, \mathfrak{m})$ *formalmente eqüidimensional e dados dois ideais* $\mathfrak{m}$*-primários* $I \subseteq J$, I *é uma redução de* J *se, e somente se,* $e(I; R) = e(J; R)$.

Por outro lado, suponhamos que $I \subseteq J$ são ideais que possuem o mesmo radical. Se I é uma redução de J, temos que $e(JR_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}}) = e(IR_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}})$ para qualquer ideal primo minimal sobre J. No entanto, a recíproca nem sempre é verdadeira. Sob uma hipótese adicional, E. Böger a estabeleceu da seguinte maneira: *dados os ideais* $J \subseteq I \subseteq \sqrt{I}$ *num anel local* R *formalmente eqüidimensional tal que* $\ell(I) = \mathrm{ht}\,(I)$*, então,* I *é uma redução de* J *se, e somente se,* $e(JR_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}}) = e(IR_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}})$ *para todos os ideais primos minimais sobre* J.

A teoria das multiplicidades mistas de ideais primários foi introduzida por J. Risler e B. Teissier. As raízes desta teoria remontam-se ao artigo de Van der Waerden de 1928, desenvolvendo a teoria das funções de Hilbert de álgebras bigraduadas sobre um corpo. Este estudo foi generalizado por P. Bhattacharya em 1955 para álgebras bigraduadas sobre anéis artinianos. P. Bhattacharya mostrou vários resultados; especificamente, mostrou a existência dos polinômios de Hilbert-Samuel para dois ideais primários. Seu trabalho foi generalizado ainda mais por J. Risler e B. Teissier para múltiplos ideais num importantíssimo artigo. Teissier usou-os para fornecer uma definição algébrica dos números de Milnor das interseções de uma hipersuperfície com singularidades isoladas com espaços lineares gerais de todas as dimensões passando pelo ponto singular. J. Risler e B. Teissier mostraram também que as multiplicidades mistas de dois ideais $\mathfrak{m}$-primários são as multiplicidades de Hilbert-Samuel de ideais gerados por elementos superficiais. Esta noção de elementos superficiais, devida a J. Risler e B. Teissier, foi estendida por D. Rees em 1984, quem apresentou o conceito de redução em família de um conjunto de ideais $\mathfrak{m}$-primários. Ele mostrou que cada multiplicidade mista de um conjunto de ideais $\mathfrak{m}$-primários é a multiplicidade de Hilbert-Samuel de uma redução em famíla deles. A recíproca do teorema de Rees foi estabelecida por I. Swanson em sua tese de doutorado (veja-se [Swanson]).

As multiplicidades mistas têm encontrado muitas aplicações. Por citar algumas, em 1988, D. Katz e J. Verma calcularam a fórmula para a multiplicidade das álgebras de Rees e das álgebras estendidas de Rees em termos das multiplicidades mistas. B. Teissier também exibiu uma fórmula relacionando a multiplicidade de Hilbert-Samuel de um produto de ideais $\mathfrak{m}$-primários num anel local de dimensão d com suas multiplicidades mistas:

$$e(I_1 \cdots I_q; R) = \sum_{d_1+\cdots+d_q=\dim R} \frac{d!}{d_1! \cdots d_q!} e\left(I_1^{[d_1]}, \ldots, I_q^{[d_q]}; R\right)$$

Esta fórmula desempenha um papel fundamental no trabalho de B. Teissier na caracterização das condições de Whitney para famílias de hipersuperfícies com singularidades isoladas.

Neste trabalho, apresentamos provas detalhadas dos teoremas de J. Risler e B. Teissier, de D. Rees e de I. Swanson. A primeira seção consta dos elementos básicos, como as definições de redução, fecho inteiro e elementos superficiais e várias propriedades que os relacionam. A segunda parte centra-se fundamentalmente no conceito de multiplicidades mistas e formula o objetivo principal de estabelecer uma relação íntima destes coeficientes com reduções em família adequadas. A seção auxiliar contém alguns resultados e propriedades já conhecidos no mundo da álgebra comutativa, principalmente, propriedades características da eqüidimensionalidade. A referência principal pode ser lida no livro [Swanson, capítulo 17].

Conteúdo

Capítulo 1

Alguns preliminares

1.1 Lema de Artin-Rees

Dados alguns ideais $I_1, \ldots, I_k$ num anel R e números naturais $n_1, \ldots, n_k$, introduzimos a seguir a notação $\underline{I}^{\underline{n}} := I_1^{n_1} \cdots I_k^{n_k}$ e apresentaremos uma versão multi-ideal muito útil do lema de Artin-Rees.

Teorema 1.1 (Lema de Artin-Rees) *Sejam R um anel noetheriano, $I_1, \ldots, I_k$ ideais em R e $M, N \subseteq T$ R-módulos finitamente gerados. Então, existem números inteiros $c_1, \ldots, c_k$ tais que, para todo $n_i \geq c_i$ $(i = 1, \ldots, k)$,*

$$\underline{I}^{\underline{n}} M \cap N = \underline{I}^{\underline{n}-\underline{c}}(\underline{I}^{\underline{c}} M \cap N).$$

Demonstração: Suponhamos que $\{\omega_1, \ldots, \omega_s\}$ gera M e sejam $t_1, \ldots, t_k$ variáveis sobre R. Denotemos por S a álgebra multi-Rees de $I_1, \ldots, I_k$; isto é, $S = R[I_1t_1, \ldots, I_kt_k] = \left\{ \sum\limits_{\underline{n} \in \mathbb{N}^k} a_{\underline{n}} \underline{t}^{\underline{n}} : a_{\underline{n}} \in \underline{I}^{\underline{n}} \right\}$. Consideremos também o S-módulo finitamente gerado $\bigoplus\limits_{\underline{n}} \underline{I}^{\underline{n}} T \underline{t}^{\underline{n}}$, chamado de agora em diante como G, e tomemos seu S-submódulo $H = \bigoplus\limits_{\underline{n}} (\underline{I}^{\underline{n}} M \cap N)\underline{t}^{\underline{n}}$. Logo, H é um S-módulo finitamente gerado pelo conjunto $\{u_1, \ldots, u_l\}$. Para cada i, seja c_i o grau máximo da variável t_i em $\{u_1, \ldots, u_l\}$. Se $\eta \in \underline{I}^{\underline{n}} M \cap N$, então, $\eta = \sum\limits_{h=1}^{s} f_h(a)\omega_h$ para algum $a \in \underline{I}$ e sendo cada $f_h \in G$ homogêneo de grau $\underline{n}$. Logo, a s-upla $(f_1, \ldots, f_s)$ pode ser vista como uma combinação linear de $u_1, \ldots, u_l$, sendo os coeficientes desta elementos em S. Ao serem os f_h polinômios homogêneos de grau total $\underline{n}$, os termos da combinação linear de grau diferente a $\underline{n}$ devem somar zero. Portanto, podemos supor que o coeficiente $p_j \in S$ da soma tem grau $\underline{n} - \underline{d}_j$, sendo $\underline{d}_j$ o grau de u_j. Logo, $\eta = \sum\limits_h f_h(a)\omega_h = \sum\limits_j p_j(a) \sum\limits_h u_{jh}(a)\omega_h$, donde $\sum\limits_h u_{jh}(a)\omega_h \in \underline{I}^{\underline{d}_j} M \cap N$. Deste modo, se $n_i > c_i$, então, $p_j(a) \in \underline{I}^{\underline{n}-\underline{c}} \underline{I}^{\underline{c}-\underline{d}_j}$, obtendo que $\eta \in \underline{I}^{\underline{n}-\underline{c}}(\underline{I}^{\underline{c}} M \cap N)$.□

1.2 Redução e fecho inteiro

No âmbito da álgebra comutativa, o conceito de redução fornece uma caracterização do fecho inteiro de um ideal quando este é finitamente gerado. É por isto que falaremos indistintamente nestas duas noções.

Definição 1.1 (Fecho inteiro) *Seja I um ideal num anel R. Um elemento $x \in R$ diz-se* inteiro sobre I *se existirem um número inteiro positivo n e elementos $a_i \in I^i$, com i variando de 1 até n,* *tais que* $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$. *O conjunto de todos os elementos inteiros sobre* I *chama-se* fecho inteiro *de* I *e é denotado como* $\overline{I}$.

Definição 1.2 (Redução) *Sejam* $J \subseteq I$ *ideais.* J *é uma* redução *de* I *se existe um número inteiro não-negativo* n *tal que* $I^{n+1} = JI^n$.

Desta última definição decorrem imediatamente as seguintes relações.

Lema 1.2 *Seja* $J \subseteq I$ *uma redução. Então,* $\sqrt{J} = \sqrt{I}$, $\operatorname{Min} \frac{R}{I} = \operatorname{Min} \frac{R}{J}$ *e* $\operatorname{ht} J = \operatorname{ht} I$.

Demonstração: Se $J \subseteq I$, então, $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$. Limitamo-nos a demonstrar a outra inclusão. Seja $y \in \sqrt{I}$. Logo, existe um número inteiro não-negativo m tal que $y^m \in I$. Deste modo, $y^{m(n+1)} \in JI^n \subseteq J$, concluindo que $y \in \sqrt{J}$. As outras duas igualdades seguem deste fato, pois os ideais primos que contêm I são os mesmos ideais primos que contêm $\sqrt{I}$.□

Pese a isto, os ideais primos associados dependem da redução.

Exemplo: Consideremos o anel de polinômios $\Bbbk[X,Y,Z]$ nas três variáveis X, Y e Z sobre o corpo $\Bbbk$. Sejam $J = (X^3, XY^2Z, Y^3)$ e $I = (X^3, X^2Y(Z-1), XY^2, Y^3)$. É claro que $J \subseteq I$. Agora, $I^2 = (X^6, X^5Y(Z-1), X^4Y^2, X^3Y^3, X^2Y^4, XY^5, Y^6)$, resultando assim que

$$JI^2 = (X^9, X^8Y(Z-1), X^7Y^2, X^6Y^3, X^5Y^4, X^4Y^5, X^3Y^6, X^2Y^7, XY^8, Y^9) = I^3.$$

Logo, J é uma redução de I. Mas o conjunto dos ideais primos associados de $\frac{R}{J}$ é igual a $\{(X,Y),(X,Y,Z)\}$, enquanto o conjunto dos ideais primos associados de $\frac{R}{I}$ é $\{(X,Y),(X,Y,Z-1)\}$, não se cumprindo nenhuma das duas inclusões desejadas.

No entanto, as reduções também satisfazem algumas propriedades que falam bem sobre seu comportamento.

Proposição 1.3 *Sejam* $K \subseteq J \subseteq I$ *ideais num anel* R.

1. *Se* K *é uma redução de* J *e* J *é uma redução de* I*, então,* K *é uma redução de* I.

2. *Se* K *é uma redução de* I*, então,* J *é uma redução de* I.

Demonstração:

1. Existem números inteiros não-negativos m e n tais que $KJ^n = J^{n+1}$ e $JI^m = I^{m+1}$. Assim, $KI^{m+n} = KJ^nI^m = J^{n+1}I^m = I^{m+n+1}$, donde K é uma redução de I.

2. Dado um número inteiro não-negativo n tal que $KI^n = I^{n+1}$, temos que

$$I^{n+1} = KI^n \subseteq JI^n \subseteq I^{n+1},$$

concluindo que $JI^n = I^{n+1}$.□

Como foi dito anteriormente, existe uma correspondência entre as reduções e o fecho inteiro de um ideal quando este é finitamente gerado.

Proposição 1.4 *Seja* I *um ideal num anel* R*. Um elemento* $x \in R$ *é inteiro sobre* I *se, e somente se, existe um número inteiro* n *tal que* $[I+(x)]^n = I[I+(x)]^{n-1}$*, isto é,* $I \subseteq I+(x)$ *é uma redução. Se* I *é finitamente gerado, cumpre-se que* $K \subseteq I$ *é redução se, e somente se,* $I \subseteq \overline{K}$.

Demonstração: De fato, para qualquer número natural n,

$$[I+(x)]^n = I^n + xI^{n-1} + \cdots + x^{n-1}I + (x)^n.$$

Assim, dado $x \in \overline{I}$, existem um número natural n e $a_i \in I^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ tais que

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0;$$

e, dado $y \in [I + (x)]^n$, existem $b_i \in I^i$ $(i = 0, \ldots, n)$ tais que $y = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n$. Portanto,

$$y = (b_1 - b_0 a_1)x^{n-1} + \cdots + (b_{n-1} - b_0 a_{n-1})x + (b_n - b_0 a_n),$$

donde $y \in I^n + xI^{n-1} + \cdots + x^{n-1}I = I[I + (x)]^{n-1}$. Agora, se $[I + (x)]^n = I[I + (x)]^{n-1}$, temos que o elemento $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ pertencente ao lado esquerdo da igualdade é igual a algum elemento da forma $b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n$. Deste modo,

$$x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} - b_{n-1})x + (a_n - b_n) = 0,$$

concluindo que $x \in \overline{I}$.

Demonstraremos, então, a segunda parte. Suponhamos que $\{r_1, \ldots, r_n\}$ gera I. Se K é uma redução de I, então, K é uma redução de $K + (r)$ para qualquer $r \in I$. Portanto, $r \in \overline{K}$ e $I \subseteq \overline{K}$.

Agora, suponhamos que $I \subseteq \overline{K}$. Logo, cada elemento gerador de I é inteiro sobre K. Assim, obtemos uma cadeia de inclusões $K \subseteq K + (r_1) \subseteq K + (r_1, r_2) \subseteq \cdots \subseteq K + (r_1, \ldots, r_n) = I$ onde cada inclusão representa uma redução. Assim, $K \subseteq I$ é uma redução.□

Conclui-se, deste modo, que o fecho inteiro de um ideal é também um ideal.

Corolário 1.1 *O fecho inteiro de um ideal é um ideal inteiramente fechado no mesmo anel.*

Demonstração: Seja K um ideal num anel R. Se $x \in \overline{K}$, então, existem $a_i \in K^i$ tais que

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Portanto, dado $b \in R$, temos que $(bx)^n + a_1 b(bx)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}b^{n-1}(bx) + a_n b^n = 0$, concluindo que $bx \in \overline{K}$. Agora, dados dois elementos r e s em $\overline{K}$, existe um ideal K' finitamente gerado contido em K tal que os coeficientes das equações inteiras para r e s pertencem a $(K')^i$. Logo, $r, s \in \overline{K'}$. Sejam $J = K' + (r)$ e $I = K' + (r, s) = J + (s)$. Assim, K' é uma redução de J e J é uma redução de I, donde K' é uma redução de I. Com isto, temos que $K' \subseteq K' + (r + s) \subseteq K' + (r, s) = I$ são reduções também. Portanto, $r + s \in \overline{K'} \subseteq \overline{K}$.

Provaremos que $\overline{\overline{K}} = \overline{K}$. Dado $r \in \overline{\overline{K}}$, existe um ideal finitamente gerado $J = (j_1, \ldots, j_k)$ contido em $\overline{K}$ tal que $r \in \overline{J}$. Analogamente, existe um ideal finitamente gerado $I \subseteq K$ tal que cada j_i é inteiro sobre K. Logo, I é redução de $I + J$ e $I + J$ é redução $I + J + (r)$, resultando em que I é uma redução de $I + (r)$. Portanto, r é inteiro sobre I e sobre K.□

Dado um anel R, construiremos uma extensão fielmente plana sobre si, a qual preservará muitas das propriedades que possui o anel original, como veremos no seguinte

Lema 1.5 *Sejam J e I ideais num anel noetheriano local $(R, \mathfrak{m})$. Dada uma variável X, defina-se $S = R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$. Então,*

1. *$J \subseteq I$ se, e somente se, $JS \subseteq IS$.*

2. ht I = ht IS. *Em particular,* $\dim R = \dim S$ *e I é $\mathfrak{m}$-primário se, e somente se, IS é $\mathfrak{m}S$-primário.*

3. *$J \subseteq I$ é uma redução se, e somente se, $JS \subseteq IS$ é uma redução.*

4. *$\mu(I) = \mu(IS)$ e $\ell(I) = \ell(IS)$, onde $\ell(I)$ é a dimensão de Krull do anel* $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}$.

5. *R é regular (ou Cohen-Macaulay) se, e somente se, S é regular (ou Cohen-Macaulay).*

6. *Se I é $\mathfrak{m}$-primário, então, $l\left(\frac{R}{I}\right) = l\left(\frac{S}{IS}\right)$.*

7. *I é gerado por uma seqüência regular se, e somente se, IS é gerado por uma seqüência regular.*

8. *Se $I = \bigcap_{j=1}^{k} \mathfrak{q}_j$ é uma decomposição primária (minimal), então, $IS = \bigcap_{j=1}^{k} \mathfrak{q}_j S$ é uma decomposição primária (minimal).*

9. *$\overline{I}R[X] = \overline{IR[X]}$ e, portanto, $\overline{I}S = \overline{IS}$. Em particular, I é inteiramente fechado se, e somente se, $IR[X]$ é inteiramente fechado, o que acontece se, e somente se, IS é inteiramente fechado.*

Demonstração: Observemos que, efetivamente, a extensão $R \longrightarrow R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$ é fielmente plana, pois pode ser vista como a composição das extensões planas $R \longrightarrow R[X] \longrightarrow R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$ e, se $\mathfrak{p} \subseteq R$ é um ideal primo, o ideal $\mathfrak{p}S \subseteq S$ também o é, donde a aplicação induzida $\operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ é sobrejetora. Os nove itens seguem deste fato.$\square$

Este fato permite reduzirmos algumas provas para o caso em que o corpo residual é infinito. De fato,

$$\frac{S}{\mathfrak{m}S} = \frac{R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}}{\mathfrak{m}R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}} \cong \left(\frac{R[X]}{\mathfrak{m}R[X]}\right)_{\mathfrak{m}R[X]}$$

e este último é o corpo de frações de $\frac{R}{\mathfrak{m}}[X]$, que sempre é infinito.

A definição de redução em família representa uma tentativa por estender o conceito de redução, desta vez, tomando um elemento de cada ideal considerado.

Definição 1.3 (Redução em família) *Sejam $I_1, \ldots, I_k$ ideais num anel R e seja $x_i \in I_i$ para cada $i = 1, \ldots, k$. Diremos que a k-upla $(x_1, \ldots, x_k)$ é uma* redução em família *de $(I_1, \ldots, I_k)$ se $\sum_{i=1}^{k} x_i I_1 \cdots I_{i-1} I_{i+1} \cdots I_k$ for uma redução de $I_1 \cdots I_k$; isto é, se existir um número inteiro não-negativo n tal que*

$$\left(\sum_{i=1}^{k} x_i I_1 \cdots I_{i-1} I_{i+1} \cdots I_k\right) (I_1 \cdots I_k)^n = (I_1 \cdots I_k)^{n+1}.$$

De fato, se $I_1 = \cdots = I_k = I$, isto está nos dizendo que a k-upla $(x_1, \ldots, x_k)$ é uma redução em família de $(I, \ldots, I)$ se, e somente se, o ideal $(x_1, \ldots, x_k)$ é uma redução de I.

Exemplo: Para quaisquer $x, y \in R$ e quaisquer números inteiros não-negativos m, n, o par (x, y) é uma redução em família de $((x, y^n), (x^m, y))$.

Com efeito, como $x(x^m, y) \subseteq (x, y^n)(x^m, y)$ e $(x, y^n)y \subseteq (x, y^n)(x^m, y)$, segue então que

$$x(x^m, y) + y(x, y^n) \subseteq (x, y^n)(x^m, y).$$

Agora, seja $a \in (x, y^n)(x^m, y)$; logo,

$$a = \sum_{j=1}^{s} (b_j x + c_j y^n)(d_j x^m + f_j y) = \sum_{j=1}^{s} [b_j x(d_j x^m + f_j y) + c_j y(d_j y^{n-1} x^m + f_j y^n)].$$

Assim, $a \in x(x^m, y) + y(x, y^n)$ e $x(x^m, y) + y(x, y^n) = (x, y^n)(x^m, y)$.

Já que falamos em reduções simplesmente no contexto do anel onde elas existem, estenderemos este conceito para um módulo respeito a dito anel.

Definição 1.4 (Redução respeito a um módulo) *Sejam R um anel, M um R-módulo e $I \subseteq J$ ideais em R. Diremos que $I \subseteq J$ é uma* redução respeito a M *se existir um número inteiro l tal que $IJ^lM = J^{l+1}M$. Analogamente, se $I_1, \ldots, I_k$ são ideais num anel R e, para cada $i = 1, \ldots, k$, $x_i \in I_i$, então, a k-upla $(x_1, \ldots, x_k)$ é uma* redução em família respeito a M *de $(I_1, \ldots, I_k)$ se o ideal $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i I_1 \cdots I_{i-1} I_{i+1} \cdots I_k$ é uma redução de $I_1 \cdots I_k$ respeito a M.*

O seguinte lema dá-nos uma relação entre as duas definições anteriores. Mais ainda, permite-nos reduzir muitas provas para o caso em que R não possui divisores de zero respeito ao módulo M ou para o caso em que R é um domínio de integridade.

Lema 1.6 *Sejam R um anel noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Então, qualquer redução (em família) respeito a M é também redução (em família) respeito a $\frac{R}{\mathrm{Ann}\ M}$ e vice-versa.*

Demonstração: Suponhamos que $I \subseteq J$ é uma redução respeito a M. Seja l tal que $IJ^lM = J^{l+1}M$. Então, o homomorfismo de R-módulos $\varphi : J^lM \longrightarrow J^lM$ tal que $\varphi(x) = ax$, com $a \in J$, satisfaz $\varphi(J^lM) \subseteq IJ^lM$. Portanto, existem $r_i \in I^i$ tais que $\varphi^n + r_1\varphi^{n-1} + \cdots + r_n\varphi^0 = 0$ (Lema A.1). Assim, cada elemento de J pertence ao fecho inteiro de I, pois M é fiel respeito a $\frac{R}{\mathrm{Ann}\ M}$. Logo, I é uma redução de J respeito a $\frac{R}{\mathrm{Ann}\ M}$.

Agora, suponhamos que I é uma redução de J respeito a $\frac{R}{\mathrm{Ann}\ M}$. Então, existe um número inteiro l tal que $J^{l+1}\frac{R}{\mathrm{Ann}\ M} = IJ^l\frac{R}{\mathrm{Ann}\ M}$. Daqui, $J^{l+1} \subseteq IJ^l + \mathrm{Ann}\ M$ e, portanto, $J^{l+1}M \subseteq IJ^lM$. Assim, $J^{l+1}M = IJ^lM$.

Fazendo $I = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i I_1 \cdots I_{i-1} I_{i+1} \cdots I_k$ e $J = I_1 \cdots I_k$ obteremos o resultado para reduções em família.$\square$

Será conveniente sabermos quando um subconjunto de uma redução em família é uma dessas para uma subcoleção dos ideais considerados. O seguinte lema ajudar-nos-á com esta questão.

Lema 1.7 *Seja $(x_1, \ldots, x_k)$ uma redução em família de $(I_1, \ldots, I_k)$ respeito a M. Então, existe um número inteiro l tal que $(x_2, \ldots, x_k)$ é uma redução em família de $(I_2, \ldots, I_k)$ respeito a $\frac{I_1^{l+1}M + x_1M}{x_1M}$.*

Demonstração: Por hipótese, existe l tal que

$$(I_1 \cdots I_k)^{l+1}M = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i I_1 \cdots I_{i-1} I_{i+1} \cdots I_k\right)(I_1 \cdots I_k)^l M.$$

Assim, fazendo o cálculo para $(I_2 \cdots I_k)^{l+1}\frac{I_1^{l+1}M + x_1M}{x_1M}$ obtemos que

$$\begin{aligned}
(I_2 \cdots I_k)^{l+1}\frac{I_1^{l+1}M + x_1M}{x_1M} &= \frac{(I_1 \cdots I_k)^{l+1}M + x_1M}{x_1M} \\
&= \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} x_i I_1 \cdots I_{i-1} I_{i+1} \cdots I_k\right)(I_1 \cdots I_k)^l M + x_1M}{x_1M} \\
&= \frac{\left(\sum\limits_{i=2}^{k} x_i I_2 \cdots I_{i-1} I_{i+1} \cdots I_k\right)(I_2 \cdots I_k)^l I_1^{l+1} M + x_1M}{x_1M}
\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i=2}^{k} x_i I_2 \cdots I_{i-1} I_{i+1} \cdots I_k\right) (I_2 \cdots I_k)^l \frac{I_1^{l+1}M + x_1 M}{x_1 M}$$

concluindo o resultado.□

1.3 Elementos superficiais

Os elementos superficiais jogam um papel muito importante na construção de reduções. Também constituem uma ferramenta útil para a determinação dos polinômios de Hilbert-Samuel e de Bhattacharya, levando à definição de multiplicidade.

Definição 1.5 (Elemento superficial) *Sejam R um anel, M um R-módulo e I um ideal em R. Diremos que $x \in I$ é um* elemento superficial de I respeito a M *se existir um número inteiro não-negativo c tal que, para todo $n \geq c$,*

$$(I^{n+1}M :_M x) \cap I^c M = I^n M.$$

O seguinte lema oferece-nos uma caracterização dos elementos superficiais quando estes não são divisores de zero sobre o módulo considerado.

Lema 1.8 *Sejam R um anel, M um R-módulo e I um ideal de R. Um elemento $x \in I$ não-divisor de zero sobre M é um elemento superficial de I respeito a M se, e somente se, para todo número inteiro n suficientemente grande, $(I^n M :_M x) = I^{n-1}M$.*

Demonstração: Se $(I^n M :_M x) = I^{n-1}M$ para todo n suficientemente grande, então, x é um elemento superficial de I respeito a M (basta considerarmos $c = 0$). Agora, suponhamos que x é um elemento superficial de I respeito a M. Pelo lema de Artin-Rees, existe um número inteiro k tal que, para todo $n \geq k$,

$$I^n M \cap xM = I^{n-k}(I^k M \cap xM) \subseteq xI^{n-k}M.$$

Como $I^n M \cap xM = x(I^n M :_M x)$ e x não é divisor de zero para M, a expressão

$$x(I^n M :_M x) = I^n M \cap xM \subseteq xI^{n-k}M$$

reduz-se a $(I^n M :_M x) \subseteq I^{n-k}M$. Seja $n \geq k + c$. Logo, $I^{n-k}M \subseteq I^c M$ e, portanto,

$$(I^n M :_M x) = (I^n M :_M x) \cap I^{n-k}M = (I^n M :_M x) \cap I^c M = I^{n-1}M.\square$$

Lema 1.9 *Sejam R um anel noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado, I um ideal e $x \in R$. Suponhamos que x não é divisor de zero sobre M ou que, para algum ideal J, $I \subseteq \sqrt{J}$, $\bigcap_n J^n M = 0$ e x é um elemento superficial para J respeito a M. Então, existe um número natural e tal que, para todo $n \geq e$,*

$$(I^n M :_M x) \subseteq (0 :_M x) + I^{n-e}M$$

e

$$(0 :_M x) \cap I^e M = 0.$$

Se x é superficial para I, então, para todo n suficientemente grande,

$$(I^n M :_M x) = (0 :_M x) + I^{n-1}M.$$

Demonstração: Pelo lema de Artin-Rees, existe um número inteiro k não-negativo tal que, para todo $n \geq k$, $I^nM \cap xM \subseteq xI^{n-k}M$. Seja $b \in (I^nM :_M x)$; então, $bx \in I^nM \cap xM \subseteq xI^{n-k}M$. Se $bx = 0$, temos que $b \in (0 :_M x)$; noutro caso, $b \in I^{n-k}M$, donde $b \in (0 :_M x) + I^{n-k}M$.

Se x não é divisor de zero sobre M, então, $(0 :_M x) = 0$.

Agora, suponhamos a segunda situação. Então, existe m tal que $I^m \subseteq J$ e existe c tal que, para todo $n > c$, $(J^nM :_M x) \cap J^cM = J^{n-1}M$. Deste modo, fazendo $e = cm + k$, temos que

$$(0 :_M x) \cap I^eM \subseteq \bigcap_n (J^nM :_M x) \cap J^cM \subseteq \bigcap_n J^{n-1}M = 0.$$

Mais ainda, se x é superficial para I, então, para $n \geq e + c$,

$$\begin{aligned} (I^nM :_M x) &= [(0 :_M x) + I^cM] \cap (I^nM :_M x) \\ &= (0 :_M x) + [I^cM \cap (I^nM :_M x)] \\ &= (0 :_M x) + I^{n-1}M. \square \end{aligned}$$

Podemos usar, ainda, uma definição de elemento superficial mais geral no sentido da quantidade de ideais considerados. Isto com o fim de obtermos o conceito de seqüência superficial que nos ajudará a construir reduções em família.

Definição 1.6 (Elemento superficial) *Sejam R um anel noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e $I_1, \ldots, I_k$ ideais em R. $x \in I_1$ chamar-se-á* superficial para $I_1, \ldots, I_k$ respeito a M *se existir um número inteiro não-negativo c tal que, para todo $n_1 > c$ e para todos $n_2, \ldots, n_k \geq 0$,*

$$(\underline{I}^{\underline{n}}M :_M x) \cap I_1^c I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k}M = I_1^{n_1-1} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k}M.$$

Uma seqüência de elementos $x_1, \ldots, x_l$, com $x_i \in I_i$ chama-se superficial para $I_1, \ldots, I_l$ respeito a M *se, para $i = 1, \ldots, l$, $x_i \in I_i$ é superficial respeito a $\frac{M}{(x_1,\ldots,x_{i-1})M}$ para as imagens de $I_i, \ldots, I_k$ em $\frac{R}{(x_1,\ldots,x_{i-1})}$.*

Veremos agora que tais elementos efetivamente existem desde que $(R, \mathfrak{m})$ seja um anel noetheriano local com corpo residual infinito.

Proposição 1.10 (Existência de elementos superficiais) *Se $(R, \mathfrak{m})$ é um anel noetheriano local com corpo residual infinito, então, existem seqüências superficiais para $I_1, \ldots, I_k$ respeito a um módulo finitamente gerado M. Mais exatamente, existem um conjunto Zariski-aberto não-vazio $U \subset \frac{I_1}{\mathfrak{m}I_1}$ e um número inteiro positivo c tais que, para qualquer $x \in I_1$ com imagem em U, para todo $i \geq 1$, todo $n_1 > c + i - 1$ e todos $n_2, \ldots, n_k \geq 0$,*

$$(\underline{I}^{\underline{n}}M :_M x^i) \cap I_1^c I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k}M = I_1^{n_1-i} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k}M.$$

Além disso, se I_1 não está contido nos ideais primos $P_1, \ldots, P_s$ de R, x pode ser escolhido de maneira que os evite.

Demonstração: Observemos que $I_1^{n_1-i} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k}M \subseteq (\underline{I}^{\underline{n}}M :_M x^i) \cap I_1^c I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k}M$ para qualquer $x \in I_1$. Seja $a \in I_1^{n_1-i} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k}M$; então, $ax^i \in I_1^{n_1} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k}M$ e $a \in (\underline{I}^{\underline{n}}M :_M x^i)$.

Como $n_1 - i > c - 1$, temos que $I_1^{n_1-i} \subseteq I_1^c$. Portanto, $I_1^{n_1-i} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k}M \subseteq I_1^c I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k}M$, mostrando que $I_1^{n_1-i} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k}M \subseteq (\underline{I}^{\underline{n}}M :_M x^i) \cap I_1^c I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k}M$.

Se I_1 for nilpotente, escolhamos c tal que $I_1^{c-1} = 0$. Então, para $n_1 > c + i - 1$, $I_1^{n_1-i} = 0 = I_1^c$. Portanto, $(\underline{I}^{\underline{n}}M :_M x^i) \cap I_1^c I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k}M = I_1^{n_1-i} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k}M$ para todo $x \in I_1$.

Provaremos o resultado para I_1 não-nilpotente. Logo, $\frac{I_1}{I_1^2} \neq 0$. Seja $A = \bigoplus_{\underline{n} \geq 0} \frac{I^{\underline{n}}}{I_1 I^{\underline{n}}}$. Então, A é uma R-álgebra finitamente gerada. Além disso, A pode ser visto como um anel graduado com grau de $\frac{I^{\underline{n}}}{I_1 I^{\underline{n}}}$ igual a $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_k)$.

Para cada número inteiro positivo c, definamos $A_c = \bigoplus_{\substack{\underline{n} \geq 0 \\ n_1 = c}} \frac{I^{\underline{n}}}{I_1 I^{\underline{n}}}$. Agora, sejam $G = \bigoplus_{\underline{n} \geq 0} \frac{I^{\underline{n}} M}{I_1 I^{\underline{n}} M}$ um A-módulo finitamente gerado e $Q_1, \ldots, Q_t$ os ideais primos associados de G que não contêm A_1. Tendo isto, definamos W_i, para cada $i = 1, \ldots, t$, como a imagem de $Q_i \cap I_1$ em $\frac{I_1}{\mathfrak{m} I_1}$. Analogamente, definamos V_i como a imagem de $P_i \cap I_1$ em $\frac{I_1}{\mathfrak{m} I_1}$.

Se $V_i = \frac{I_1}{\mathfrak{m} I_1}$ para algum i, então, $I_1 = P_i \cap I_1 + \mathfrak{m} I_1$. Pelo lema de Nakayama, $I_1 = P_i \cap I_1$, concluindo que $I_1 \subseteq P_i$, o que é um absurdo.

Igualmente, se $W_i = \frac{I_1}{\mathfrak{m} I_1}$ para algum i, então, $I_1 = Q_i \cap I_1 + \mathfrak{m} I_1$ e $I_1 = Q_i \cap I_1$, o que nos diz que Q_i contém A_1, obtendo outro absurdo.

Assim, V_i e W_i são $\frac{R}{\mathfrak{m}}$-subespaços vetoriais próprios de $\frac{I_1}{\mathfrak{m} I_1}$ para todo i.

Seja U o complementar da união de todos os W_i e V_i. Ao ser $\frac{R}{\mathfrak{m}}$ corpo infinito, U não é vazio, e, ao serem W_i e V_i subespaços vetoriais próprios, U é Zariski-aberto em $\frac{I_1}{\mathfrak{m} I_1}$.

Agora, sejam $x \in I_1$ tal que sua imagem cai em U e $(0_G) = \bigcap_j G_j$ uma decomposição primária irredundante de $(0) \subset G$. Por definição de primos associados, cada $\sqrt{(G_j :_A G)}$ é um deles para G.

Existem duas opções: $x \in \sqrt{(G_j :_A G)}$ ou $x \notin \sqrt{(G_j :_A G)}$.

Se $x \notin \sqrt{(G_j :_A G)}$, então, $\sqrt{(G_j :_A G)} = Q_l$ para algum $l = 1, \ldots, t$ e $(G_j :_G x^i) = G_j$ para todo i.

Agora, se $x \in \sqrt{(G_j :_A G)}$, então, $A_1 \subseteq \sqrt{(G_j :_A G)}$ (pois os ideais primos associados que não contêm A_1 já foram usados na primeira opção). Por tanto, como $A_b = A_1^b$ se $b \geq 1$, conclui-se que existe um número inteiro positivo c_j tal que $A_{c_j} \subseteq (G_j :_A G)$.

Defina-se c como o máximo de todos os c_j, ou como zero se não existirem tais. Logo,

$$(0 :_G x^i) \cap A_c G = \bigcap_{x \in \sqrt{(G_j :_A G)}} (G_j :_A x^i) \cap \bigcap_{x \notin \sqrt{(G_j :_A G)}} (G_j :_A x^i) \cap A_c G.$$

Sabendo isto, temos também que

$$\bigcap_{x \in \sqrt{(G_j :_A G)}} (G_j :_A x^i) \cap \bigcap_{x \notin \sqrt{(G_j :_A G)}} (G_j :_A x^i) \subseteq \bigcap_{x \notin \sqrt{(G_j :_A G)}} (G_j :_A x^i)$$

e, como $(G_j :_G x^i) = G_j$,

$$\begin{aligned} \bigcap_{x \notin \sqrt{(G_j :_A G)}} (G_j :_A x^i) \cap A_c G &= \bigcap_{x \notin \sqrt{(G_j :_A G)}} G_j \cap A_c G \\ &\subseteq \bigcap_j G_j \\ &= (0_G), \end{aligned}$$

donde $(0 :_G x^i) \cap A_c G = (0_G)$.

Deste modo, temos que se $y \in I_1^c I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} M$ é tal que $x^i y \in \underline{I}^{\underline{n}} M$, então, a imagem de y em G cai em $A_c G \cap (0 :_G x^i)$. Portanto, esta imagem pertence a (0_G), obtendo que $y \in I_1^{n_1 - i} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} M$.$\square$

Os elementos superficiais respeito a uma família de ideais comportam-se de modo análogo ao Lema 1.9.

Lema 1.11 *Sejam R um anel noetheriano, $I_1, \ldots I_k$ ideais em R e M um R-módulo finitamente gerado. Sejam i um número inteiro positivo e $x \in I_1$ tais que, para algum número inteiro não-negativo c e quaisquer $n_1, \ldots, n_k$ suficientemente grandes,*

$$(\underline{I}^{\underline{n}} M :_M x^i) \cap I_1^c I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} M = I_1^{n_1 - i} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} M.$$

Suponhamos também que $I_1 \subseteq \sqrt{I_2 \cdots I_k}$ e que $\bigcap\limits_n I_1^n M = 0$. Então, para todos $n_1, \ldots, n_k$ suficientemente grandes,

$$(\underline{I}^{\underline{n}} M :_M x^i) = (0 :_M x^i) + I_1^{n_1 - i} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} M$$

e

$$(0 :_M x^i) \cap I_1^{n_1} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} M = 0.$$

Demonstração: Pelo lema de Artin-Rees, fazendo $N = x^i M$, existem números inteiros não-negativos $e_1, \ldots, e_k$ tais que, para todo $n_j \geq e_j$, $\underline{I}^{\underline{n}} M \cap x^i M = \underline{I}^{\underline{n} - \underline{e}} (\underline{I}^{\underline{e}} M \cap x^i M)$. Segue então que $\underline{I}^{\underline{n}} M \cap x^i M \subseteq x^i \underline{I}^{\underline{n} - \underline{e}} M$.

Vejamos que $(\underline{I}^{\underline{n}} M :_M x^i) \subseteq (0 :_M x^i) + \underline{I}^{\underline{n} - \underline{e}} M$: seja $b \in (\underline{I}^{\underline{n}} M :_M x^i)$. Logo, $b x^i \in \underline{I}^{\underline{n}} M \cap x^i M$ Assim, $b x^i \in x^i \underline{I}^{\underline{n} - \underline{e}} M$. Se $b x^i = 0$, então, $b \in (0 :_M x^i)$; caso contrário, $b \in \underline{I}^{\underline{n} - \underline{e}} M$, concluindo a afirmação.

Se $I_1 \subseteq \sqrt{I_2 \cdots I_k}$, então, existe um número inteiro positivo m tal que $I_1^m \subseteq I_1^c I_2^{e_2} \cdots I_k^{e_k}$ (podemos escolher $m \geq s + c + \max\{e_2, \ldots, e_k\}$, com s tal que $I_1^s \subseteq I_2 \cdots I_k$).

Logo, para $n_1 \geq m + e_1, n_2 \geq e_2, \ldots, n_k \geq e_k$, $(\underline{I}^{\underline{n}} M :_M x^i) \subseteq (0 :_M x^i) + I_1^c I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} M$ e $(\underline{I}^{\underline{n}} M :_M x^i) = (\underline{I}^{\underline{n}} M :_M x^i) \cap [(0 :_M x^i) + I_1^c I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} M]$.

Desta forma, aplicando a propriedade modular da interseção, temos que

$$(\underline{I}^{\underline{n}} M :_M x^i) = (0 :_M x^i) + (\underline{I}^{\underline{n}} M :_M x^i) \cap I_1^c I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} M$$

concluindo, por hipótese, que $(\underline{I}^{\underline{n}} M :_M x^i) = (0 :_M x^i) + I_1^{n_1 - i} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} M$. Em particular, para todo n_i suficientemente grande, $(0 :_M x^i) \cap I_1^{n_1} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} M \subseteq \bigcap\limits_{n_1 \gg 0} (\underline{I}^{\underline{n}} M :_M x^i) \cap I_1^c I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} M$. Novamente por hipótese, concluímos que

$$\begin{aligned} \bigcap_{n_1 \gg 0} (\underline{I}^{\underline{n}} M :_M x^i) \cap I_1^c I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} M &\subseteq \bigcap_{n_1 \gg 0} I_1^{n_1 - i} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} M \\ &\subseteq \bigcap_{n_1 \gg 0} I_1^{n_1 - i} M \\ &= 0 \end{aligned}$$

obtendo que $(0 :_M x^i) \cap I_1^{n_1} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} M = 0$.$\square$

1.4 Existência de reduções em família

Já demonstramos que sempre existem elementos superficiais num anel noetheriano local com corpo residual infinito. Veremos que, sob uma hipótese adicional, também existem as reduções em família para uma coleção de d ideais, sendo d a dimensão de R.

Teorema 1.12 (Existência de reduções em família) *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local com corpo residual infinito, d a dimensão de R e $I_1, \ldots, I_d$ ideais em R. Suponhamos que, para todo $i = 1, \ldots, d$, $I_i \subseteq \sqrt{I_{i+1} \cdots I_d}$. Então, existe uma redução em família $(x_1, \ldots, x_d)$ de $(I_1, \ldots, I_d)$.*

Demonstração: Suponhamos que $d > 0$, pois para $d = 0$ não há nada a mostrar. Raciocinaremos por indução sobre d.

Seja $d = 1$. Logo, ht $I_1 \leq \ell(I_1) \leq d$ (Corolário A.1 no apêndice). Portanto, $\ell(I_1) = 1$ e, assim, existe um elemento $x \in I_1$ tal que (x) é uma redução de I_1.

Si supusermos que $(x_1, \ldots, x_d)$ é uma redução em família de $(I_1, \ldots, I_d)$ módulo $(0 : (I_1 \cdots I_d)^l)$, então, existe um número inteiro não-negativo n tal que

$$(I_1 \cdots I_d)^n = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i I_1 \cdots I_{i-1} I_{i+1} \cdots I_d\right)(I_1 \cdots I_d)^{n-1} + (0 : (I_1 \cdots I_d)^l).$$

Assim, $(I_1 \cdots I_d)^n \subseteq \sum\limits_{i=1}^{d} x_i I_1^n \cdots I_{i-1}^n I_i^{n-1} I_{i+1}^n \cdots I_d^n + (0 : (I_1 \cdots I_d)^l)$ e, portanto,

$$(I_1 \cdots I_d)^{n+l} \subseteq \sum_{i=1}^{d} x_i I_1^{n+l} \cdots I_{i-1}^{n+l} I_i^{n+l-1} I_{i+1}^{n+l} \cdots I_d^{n+l},$$

o que nos diz que $(x_1, \ldots, x_d)$ é uma redução em família de $(I_1, \ldots, I_d)$. Por esta razão, é suficiente provarmos o teorema para o anel quociente $\frac{R}{(0:(I_1 \cdots I_d)^l)}$ para algum número inteiro positivo l. Si l é suficientemente grande satisfazendo que, para todo n, $(0 : (I_1 \cdots I_d)^n) \subseteq (0 : (I_1 \cdots I_d)^l)$, então, o anulador da imagem de $I_1 \cdots I_d$ em $\frac{R}{(0:(I_1 \cdots I_d)^l)}$ é igual a zero. Assim, podemos supor isto último em R, o que implica que nenhum I_i está contido em nenhum ideal primo associado.

Pela Proposição 1.10, existe $x_1 \in I_1$ superficial para $I_1, \ldots, I_d$ que não está contido em nenhum ideal primo associado de R. Por x não estar em nenhum ideal primo associado de R, segue que $\dim \frac{R}{(x_1)} = d - 1$; então, por hipótese de indução, existem elementos $x_i \in I_i$, com $i = 2, \ldots, d$, tais que a imagem de $(x_2, \ldots, x_d)$ em $\frac{R}{(x_1)}$ é uma redução em família da imagem de $(I_2, \ldots, I_d)$ em $\frac{R}{(x_1)}$. Tendo isto, existe um número inteiro positivo n tal que

$$(I_2 \cdots I_d)^n = \left(\sum_{i=2}^{d} x_i I_2 \cdots I_{i-1} I_{i+1} \cdots I_d\right)(I_1 \cdots I_d)^{n-1} + (x_1).$$

Seguindo um processo similar ao anterior,

$$(I_2 \cdots I_d)^n \subseteq \sum_{i=2}^{d} x_i I_2^n \cdots I_{i-1}^n I_i^{n-1} I_{i+1}^n \cdots I_d^n + (x_1)$$

e, multiplicando por I_1^n, obtemos que

$$(I_1 \cdots I_d)^n \subseteq \left(\sum_{i=2}^{d} x_i I_1^n I_2^n \cdots I_{i-1}^n I_i^{n-1} I_{i+1}^n \cdots I_d^n + x_1 I_1^n\right) \cap (I_1 \cdots I_d)^n$$

obtendo assim que $(I_1 \cdots I_d)^n \subseteq \sum\limits_{i=2}^{d} x_i I_1^n I_2^n \cdots I_{i-1}^n I_i^{n-1} I_{i+1}^n \cdots I_d^n + (x_1) \cap (I_1 \cdots I_d)^n$.

Agora, $(x_1) \cap (I_1 \cdots I_d)^n = x_1((I_1 \cdots I_d)^n : x_1) = x_1 I_1^{n-1} I_2^n \cdots I_d^n$. Logo,

$$(I_1 \cdots I_d)^n \subseteq \sum_{i=1}^{d} x_i I_1^n \cdots I_{i-1}^n I_i^{n-1} I_{i+1}^n \cdots I_d^n$$

concluindo que $(x_1, \ldots, x_d)$ é uma redução em família de $(I_1, \ldots, I_d)$.□

O teorema anterior garante a existência de reduções em família para uma coleção de d ideais. Se tivermos uma coleção maior de ideais (isto é, $I_1, \ldots, I_s$, com $s > d$) satisfazendo a hipótese adicional, teremos que $(x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0)$ é uma redução em família de $(I_1, \ldots, I_s)$.

A seguinte proposição nos permitirá escolher $(x_1, \ldots, x_d)$ num subconjunto Zariski-aberto de $\frac{I_1}{\mathfrak{m}I_1} \oplus \ldots \oplus \frac{I_d}{\mathfrak{m}I_d}$ quando existirem reduções em família para estes ideais.

Proposição 1.13 *Seja $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ um anel noetheriano local de dimensão d. Para $i = 1, \ldots, d$, sejam $I_i = (a_{11}, \ldots, a_{1l_i})$ ideais em R e $x_i = \sum_j u_{ij} a_{ij}$ elementos em I_i. Seja $l = \sum_i l_i$. Então, existe um conjunto Zariski-aberto $U \subseteq \Bbbk^l$, não necessariamente diferente de vazio, tal que $(x_1, \ldots, x_d)$ é uma redução em família de $(I_1, \ldots, I_d)$ se, e somente se, a imagem de $(u_{11}, \ldots, u_{1l_1}, \ldots, u_{d1}, \ldots, u_{dl_d})$ em $\Bbbk^l$ cai em U.*

Demonstração: Suponhamos que a imagem de $(u_{11}, \ldots, u_{1l_1}, \ldots, u_{d1}, \ldots, u_{dl_d})$ em $\Bbbk^l$ cai em U.

Sejam S o anel de polinômios sobre $\Bbbk$ nas variáveis A_{ij}, com i variando de 1 até d e j variando de 1 até l_i, e $T = \bigoplus_{\underline{n}} \frac{I^{\underline{n}}}{\mathfrak{m}I^{\underline{n}}}$. S e T são R-álgebras finitamente geradas com grau de A_{ij} igual a $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$; isto é, 1 na i-ésima posição. Para $i = 1, \ldots, d$, sejam $J_i = (A_{i1}, \ldots, A_{il_i})S$ e $X_i = \sum_j \overline{u_{ij}} A_{ij}$, sendo $\overline{u_{ij}}$ a imagem de u_{ij} em $\frac{R}{\mathfrak{m}}$. Consideremos $J = J_1 \cdots J_d$.

Definamos $\varphi : S \longrightarrow T$ o homomorfismo natural de anéis graduados; isto é, $\varphi(A_{ij}) = a_{ij} + \mathfrak{m}I_i$, e chamemos de K o núcleo de φ. Provaremos a seguinte

Afirmação: $(x_1, \ldots, x_d)$ é uma redução em família de $(I_1, \ldots, I_d)$ se, e somente se, para algum número inteiro l, $J^l \subseteq K + (X_1, \ldots X_d)S$.

Se $(x_1, \ldots, x_d)$ é uma redução em família de $(I_1, \ldots, I_d)$, então, existe um número inteiro l tal que $(I_1 \cdots I_d)^l = \sum_{i=1}^{d} x_i I_1^l \cdots I_{i-1}^l I_i^{l-1} I_{i+1}^l \cdots I_d^l$. Seja M um monômio em J^l de grau $(l, \ldots, l)$. Logo, para cada i, existe $r_i \in I_1^l \cdots I_{i-1}^l I_i^{l-1} I_{i+1}^l \cdots I_d^l$ tal que $\varphi(M) = \sum r_i x_i + \mathfrak{m}(I_1 \cdots I_d)^l$.

Agora, seja $R_i \in J_1^l \cdots J_{i-1}^l J_i^{l-1} J_{i+1}^l \cdots J_d^l$ a pré-imagem de r_i sob φ. Logo,

$$\varphi\left(M - \sum R_i X_i\right) = \sum r_i x_i + \mathfrak{m}(I_1 \cdots I_d)^l - \left[\sum r_i x_i + \mathfrak{m}(I_1 \cdots I_d)^l\right] = 0.$$

Portanto, $J^l \subseteq K + (X_1, \ldots X_d)S$.

Se supomos que $J^l \subseteq K + (X_1, \ldots X_d)S$, então, $J^l \subseteq K + \sum_i X_i J_1^l \cdots J_{i-1}^l J_i^{l-1} J_{i+1}^l \cdots J_d^l$. Logo, $\varphi(J^l) \subseteq \varphi\left(K + \sum_i X_i J_1^l \cdots J_{i-1}^l J_i^{l-1} J_{i+1}^l \cdots J_d^l\right)$, obtendo que

$$\frac{(I_1 \cdots I_d)^l}{\mathfrak{m}(I_1 \cdots I_d)^l} \subseteq \frac{\sum_{i=1}^{d} x_i I_1^l \cdots I_{i-1}^l I_i^{l-1} I_{i+1}^l \cdots I_d^l}{\mathfrak{m}(I_1 \cdots I_d)^l}$$

provando assim nossa afirmação.

Voltemos à prova da proposição. Fixemos um número inteiro não-negativo n. Se $M_1, \ldots, M_{c_n}$ são os monômios de grau $(n, \ldots, n)$, então, o $\Bbbk$-espaço vetorial $V_n \subseteq S$ que geram tem dimensão c_n, pois são linearmente independentes. Seja W_n o subespaço vetorial de V_n gerado por elementos de $[K + (X_1 \ldots, X_d)S] \cap J^n$ com base $\{B_1, \ldots, B_{s_n}\}$. Tendo isto, podemos escrever $B_i = \sum\limits_j c_{ij} M_j$ para alguns $c_{ij} \in \Bbbk$. Assim, X_i e c_{ij} dependem linearmente de u_{ij}. Temos então, por definição, que $s_n \leq c_n$ para todo n.

Para cada u_{ij}, seja U_{ij} uma variável sobre $\Bbbk$. Tomemos L_{ij} um polinômio de grau no máximo 1 em $\Bbbk[U_{11}, \ldots, U_{dl_d}]$ no qual fique em evidência a dependência linear entre u_{ij} e c_{ij}. Sejam C_n a matriz (L_{ij}) e L o ideal de todos os c_n-menores de C_n. Definamos o conjunto Zariski-aberto

$$U = \{\underline{u} \in \Bbbk^l : F(\underline{u}) \neq 0 \text{ para algum } F \in L\}.$$

Se $\underline{u} \in U$, então, existem um número inteiro positivo n e um c_n-menor F de C_n tais que $F(\underline{u}) \neq 0$. Em particular, $c_n = s_n$. Logo, $W_n = \langle M_1, \ldots, M_{c_n} \rangle$ e $J^n \subseteq K + (X_1, \ldots X_d)S$. Assim, pela afirmação já mostrada, $(x_1, \ldots, x_d)$ é uma redução em família de $(I_1, \ldots, I_d)$.

Se $(x_1, \ldots, x_d)$ é uma redução em família de $(I_1, \ldots, I_d)$, então, existe n tal que

$$J^n \subseteq K + (X_1, \ldots X_d)S.$$

Portanto, $s_n = c_n$ e a matriz $(c_{ij})_{s_n \times s_n}$ é invertível, concluindo que existe um menor não-nulo de C_n e que $\underline{u} \in U$.$\square$

Agora temos o problema "inverso": dados alguns elementos, provaremos que existem ideais para os quais eles são redução em família.

Proposição 1.14 *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e $(x_1, \ldots, x_k)$ um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Então, para todo número natural n suficientemente grande, $(x_1, \ldots, x_k)$ é uma redução em família de $((x_1) + \mathfrak{m}^n, \ldots, (x_k) + \mathfrak{m}^n)$.*

Demonstração: Ao ser $(x_1, \ldots, x_k)$ $\mathfrak{m}$-primário, existe n tal que $\mathfrak{m}^n \subseteq (x_1, \ldots, x_k)$.

Seja $J = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i[(x_1) + \mathfrak{m}^n] \cdots [(x_{i-1}) + \mathfrak{m}^n][(x_{i+1}) + \mathfrak{m}^n] \cdots [(x_k) + \mathfrak{m}^n]$; então,

$$[(x_1) + \mathfrak{m}^n] \cdots [(x_k) + \mathfrak{m}^n] = J + \mathfrak{m}^{kn}.$$

Para vermos isto, observemos que J sempre está contido na primeira parcela da igualdade, pois $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i I_1 \cdots I_{i-1} I_{i+1} \cdots I_k \subseteq I_1 \cdots I_k$ se $x_i \in I_i$. A outra inclusão será mostrada por indução. Se $k = 1$, então, $J = (x_1)$ e não há mais para fazer.

Neste contexto, usaremos a notação $[\widehat{(x_i) + \mathfrak{m}^n}]$ para indicar que o termo $[(x_i) + \mathfrak{m}^n]$ foi retirado da multiplicação.

Suponhamos que a propriedade vale para $k = j - 1$. Logo,

$$[(x_1) + \mathfrak{m}^n] \cdots [(x_{j-1}) + \mathfrak{m}^n] \subseteq \sum_{i=1}^{j-1} x_i[(x_1) + \mathfrak{m}^n] \cdots [\widehat{(x_i) + \mathfrak{m}^n}] \cdots [(x_{j-1}) + \mathfrak{m}^n] + \mathfrak{m}^{(j-1)n}.$$

Daqui obtemos que

$$[(x_1) + \mathfrak{m}^n] \cdots [(x_j) + \mathfrak{m}^n] \subseteq$$
$$\left\{ \sum_{i=1}^{j-1} x_i[(x_1) + \mathfrak{m}^n] \cdots [\widehat{(x_i) + \mathfrak{m}^n}] \cdots [(x_{j-1}) + \mathfrak{m}^n] + \mathfrak{m}^{(j-1)n} \right\} [(x_j) + \mathfrak{m}^n]$$

sendo isto igual a

$$\sum_{i=1}^{j-1} x_i[(x_1)+\mathfrak{m}^n]\cdots[\widehat{(x_i)+\mathfrak{m}^n}]\cdots[(x_j)+\mathfrak{m}^n]+x_j\mathfrak{m}^{(j-1)n}+\mathfrak{m}^{jn}.$$

Finalmente, como $x_j\mathfrak{m}^{(j-1)n}\subseteq x_j[(x_1)+\mathfrak{m}^n]\cdots[(x_{j-1})+\mathfrak{m}^n]$, obtemos que

$$\sum_{i=1}^{j-1} x_i[(x_1)+\mathfrak{m}^n]\cdots[\widehat{(x_i)+\mathfrak{m}^n}]\cdots[(x_j)+\mathfrak{m}^n]+x_j\mathfrak{m}^{(j-1)n}\subseteq$$
$$\sum_{i=1}^{j} x_i[(x_1)+\mathfrak{m}^n]\cdots[\widehat{(x_i)+\mathfrak{m}^n}]\cdots[(x_j)+\mathfrak{m}^n]$$

mostrando desta forma que

$$[(x_1)+\mathfrak{m}^n]\cdots[(x_j)+\mathfrak{m}^n]\subseteq\sum_{i=1}^{j} x_i[(x_1)+\mathfrak{m}^n]\cdots[(x_{i-1})+\mathfrak{m}^n][(x_{i+1})+\mathfrak{m}^n]\cdots[(x_j)+\mathfrak{m}^n]+\mathfrak{m}^{jn}$$

e, portanto, $[(x_1)+\mathfrak{m}^n]\cdots[(x_k)+\mathfrak{m}^n]=J+\mathfrak{m}^{kn}$.

Como $(x_1,\ldots,x_k)$ é $\mathfrak{m}$-primário, temos que $J+\mathfrak{m}^{kn}\subseteq J+(x_1,\ldots,x_k)\mathfrak{m}^{(k-1)n}$. Seguindo um processo similar ao anterior, temos também que

$$(x_1,\ldots,x_k)\mathfrak{m}^{(k-1)n}=x_1\mathfrak{m}^{(k-1)n}+\cdots+x_k\mathfrak{m}^{(k-1)n}\subseteq J.$$

Portanto, $[(x_1)+\mathfrak{m}^n]\cdots[(x_k)+\mathfrak{m}^n]\subseteq J$ e, assim, $(x_1,\ldots,x_k)$ é uma redução em família de $((x_1)+\mathfrak{m}^n,\ldots,(x_k)+\mathfrak{m}^n)$.$\square$

Capítulo 2

Reduções em família e multiplicidades mistas

O conceito de multiplicidade, intuitivamente falando, representa a velocidade com que as potências de um ideal decrescem respeito a um módulo. Neste capítulo exibiremos uma definição inicial deste coeficiente e, com base em suas propriedades, estabeleceremos a relação com as reduções.

2.1 Polinômios de Hilbert-Samuel e de Bhattacharya

As funções de Hilbert dão uma estimação sobre o comportamento de um ideal respeito a um módulo. Veremos que, quando a potência deste ideal é grande, estas se comportam como polinômios de grau igual à dimensão do anel.

Teorema 2.1 (O polinômio de Hilbert-Samuel) *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local, M um R-módulo finitamente gerado não-nulo de dimensão $d = \dim R$ e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário em R. Então, existe um polinômio $P(n)$ com coeficientes racionais tal que, para todo n suficientemente grande,*

$$P(n) = l_R\left(\frac{M}{I^nM}\right).$$

Demonstração: Podemos assumir que o corpo residual de R é infinito. Se não fosse assim, procedemos a calcular a extensão fielmente plana $S = R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$ de R onde este fato sempre acontece e, mais ainda, $l\left(\frac{R}{I}\right) = l\left(\frac{S}{IS}\right)$ para qualquer ideal I de R $\mathfrak{m}$-primário.

Mostraremos o teorema por indução sobre $d = \dim M$.

Se $\dim M = 0$, então, para todo n suficientemente grande, $I^nM = 0$ e $P(n) = l(M)$; isto é, $P(n)$ é um polinômio constante.

Suponhamos agora que $\dim M > 0$. Então, existe um elemento superficial $x \in I$ que não está contido em nenhum ideal primo minimal sobre Ann M. Temos a seqüência

$$0 \longrightarrow \frac{(I^nM :_M x)}{I^{n-1}M} \longrightarrow \frac{M}{I^{n-1}M} \xrightarrow{x} \frac{M}{I^nM} \longrightarrow \frac{M}{xM + I^nM} \longrightarrow 0$$

e mostraremos que é exata. Se $y + I^{n-1}M \in i\left(\frac{(I^nM :_M x)}{I^{n-1}M}\right)$, então, $xy \in I^nM$, o que nos diz que $xy + I^nM = I^nM$. Agora, seja $z + I^nM \in \frac{M}{I^nM}$ tal que $z = xy$ com $y \in M$. Logo, $z \in xM$ e, assim, $z + xM + I^nM = xM + I^nM$; segue então que a seqüência acima é exata.

Por causa desta exatidão, temos, para toda potência i, que

$$l\left(\frac{M}{I^iM}\right) - l\left(\frac{M}{I^{i-1}M}\right) = l\left(\frac{M}{xM + I^iM}\right) - l\left(\frac{(I^iM :_M x)}{I^{i-1}M}\right).$$

Se $n > c$ para c grande, então, $(I^nM :_M x) = (0 :_M x) + I^{n-1}M$ e $(0 :_M x) \cap I^{n-1}M = 0$; logo, $\frac{(I^nM:_M x)}{I^{n-1}M} \cong (0 :_M x)$. Assim, variando i de $c+1$ até n na equação anterior e somando-as, temos que

$$l\left(\frac{M}{I^nM}\right) = l\left(\frac{M}{I^cM}\right) + \sum_{i=c+1}^{n}\left[l\left(\frac{M}{xM + I^iM}\right) - l(0 :_M x)\right].$$

Como x não pertence a nenhum ideal primo minimal sobre Ann M, $\dim \frac{M}{xM} = \dim M - 1$. Portanto, $l\left(\frac{M}{xM+I^nM}\right) = l\left(\frac{\frac{M}{xM}}{I^n\frac{M}{xM}}\right)$ é igual a um polinômio $Q(n)$ de grau $\dim M - 1$ com coeficientes racionais. Se $Q(n) = l(0 :_M x)$ para todo n suficientemente grande, então, $l\left(\frac{M}{I^nM}\right)$ é constante. Logo, $l\left(\frac{I^nM}{I^{n+1}M}\right) = 0$, obtendo deste modo que $I^nM = 0$ e $\dim M = 0$, o que é um absurdo. Então, $Q(n) \neq l(0 :_M x)$ para infinitos n. Como $Q(n)$ não é decrescente, $Q(n) \neq l(0 :_M x)$ para todo n suficientemente grande. Portanto, $l\left(\frac{M}{I^nM}\right)$ é igual a um polinômio de grau $\dim M$ com coeficientes racionais.$\square$

O polinômio assim obtido será denominado *polinômio de Hilbert-Samuel de I respeito a M*.

Observemos que se $x \in I$ é tal que $\dim \frac{R}{xR} = \dim R - 1$, então, os polinômios $P_{I,M}$ e $P_{I,M'}$ têm graus d e $d-1$ respectivamente (M' denota o R-módulo $\frac{M}{xM}$). Assim, a seqüência exata conduz a que

$$g(n) = l\left(\frac{(I^nM :_M x)}{I^{n-1}M}\right) = P_{I,M'}(n) - P_{I,M}(n) + P_{I,M}(n-1)$$

é um polinômio de grau no máximo $d-1$. Mais ainda, a diferença entre os coeficientes líderes dos polinômios $(d-1)!P_{I,M'}$ e $d!P_{I,M}$ é não-negativa, sendo zero quando $g(n)$ for um polinômio de grau no máximo $d-2$.

Assim como temos que, dado um ideal num anel, existe seu correspondente polinômio de Hilbert-Samuel, encontraremos também uma versão multi-ideal desta propriedade, a qual esclareceremos no seguinte

Teorema 2.2 (O polinômio de Bhattacharya) *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local, M um R-módulo finitamente gerado e $I_1, \ldots, I_k$ ideais em R $\mathfrak{m}$-primários. Então, existe um polinômio $P(n_1, \ldots, n_k)$ em k variáveis com coeficientes racionais e de grau total igual a $\dim M$ tal que, para todos $n_1, \ldots, n_k$ suficientemente grandes,*

$$P(n_1, \ldots, n_k) = l_R\left(\frac{M}{I_1^{n_1}\cdots I_k^{n_k}M}\right).$$

Demonstração: Podemos assumir que o corpo residual de R é infinito. Se não fosse assim, procedemos a calcular a extensão fielmente plana $S = R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$ de R onde este fato sempre acontece e, mais ainda, $l\left(\frac{R}{I}\right) = l\left(\frac{S}{IS}\right)$ para qualquer ideal I de R.

O resultado já foi mostrado para o caso $k = 1$ no Teorema 2.1. Portanto, suponhamos que $k > 1$ e mostremos o teorema por indução sobre $d = \dim M$.

Se $\dim M = 0$, então, para todos $n_1, \ldots, n_k$ suficientemente grandes, $I_1^{n_1}\cdots I_k^{n_k}M = 0$ e o polinômio $P(n_1, \ldots, n_k)$ seria o polinômio constante $l(M)$, cujo grau é igual a zero.

Suponhamos agora que $\dim M > 0$. Então, existe um elemento $x \in I_1$ superficial para $I_1, \ldots, I_k$ que não pertence a nenhum ideal primo minimal sobre $\operatorname{Ann} M$. Temos a seqüência

$$0 \longrightarrow \frac{(\underline{I}^{\underline{n}}M :_M x)}{I_1^{n_1-1}I_2^{n_2}\cdots I_k^{n_k}M} \longrightarrow \frac{M}{I_1^{n_1-1}I_2^{n_2}\cdots I_k^{n_k}M} \xrightarrow{x} \frac{M}{\underline{I}^{\underline{n}}M} \longrightarrow \frac{M}{xM+\underline{I}^{\underline{n}}M} \longrightarrow 0$$

que é exata por um argumento similar ao do Teorema 2.1. Logo, como

$$(\underline{I}^{\underline{n}}M :_M x) = (0 :_M x) + I_1^{n_1-1}I_2^{n_2}\cdots I_k^{n_k}M$$

para n_1 grande, obtemos que $l\left(\frac{M}{\underline{I}^{\underline{n}}M}\right) - l\left(\frac{M}{I_1^{n_1-1}I_2^{n_2}\cdots I_k^{n_k}M}\right) = l\left(\frac{M}{xM+\underline{I}^{\underline{n}}M}\right) - l(0 :_M x)$.

Como x não pertence a nenhum ideal primo minimal sobre $\operatorname{Ann} M$, $\dim \frac{M}{xM} = \dim M - 1$. Portanto, $l\left(\frac{M}{xM+\underline{I}^{\underline{n}}M}\right) = l\left(\frac{\frac{M}{xM}}{\underline{I}^{\underline{n}}\frac{M}{xM}}\right)$ é igual a um polinômio $Q(n_1, \ldots, n_k)$ de grau $\dim M - 1$ com coeficientes racionais para todo n_i suficientemente grande. Se $Q(\underline{n}) = l(0 :_M x)$ para todo n_i suficientemente grande, então, $l\left(\frac{M}{\underline{I}^{\underline{n}}M}\right)$ é constante. Logo, $l\left(\frac{\underline{I}^{\underline{n}}M}{I_1\underline{I}^{\underline{n}}M}\right) = 0$, donde $\underline{I}^{\underline{n}}M = 0$ e $\dim M = 0$, o que é um absurdo. Então, $Q(\underline{n}) - l(0 :_M x)$ é um polinômio de grau $\dim M - 1$ se n_i forem suficientemente grandes. Deste modo, $l\left(\frac{M}{\underline{I}^{\underline{n}}M}\right) = \sum_{i=1}^{n_1} Q(i, n_2, \ldots, n_k) + c$, dando como resultado que $l\left(\frac{M}{\underline{I}^{\underline{n}}M}\right)$ é um polinômio de grau total $\dim M$ com coeficientes racionais.$\square$

Este polinômio será chamado *polinômio de Bhattacharya de $I_1, \ldots, I_k$ respeito a M.*

2.2 Multiplicidade

Conhecendo a existência dos polinômios de Hilbert-Samuel, estamos prestes a definir o conceito central do trabalho. No que segue, consideraremos que o R-módulo M tem dimensão máxima e possui posto bem definido.

Definição 2.1 (Multiplicidade) *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local de dimensão d, M um R-módulo finitamente gerado e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Definimos a* multiplicidade de I respeito a M *como $d!$ vezes o coeficiente de $P(n)$ de grau d e a denotamos como $e_R(I; M)$. Se $M = R$, escreveremos simplesmente $e(I) := e_R(I; R)$ e se, ainda, $I = \mathfrak{m}$, escreveremos $e(R) := e(\mathfrak{m})$ e a chamaremos de* multiplicidade de R.

Igual como acontece com o polinômio de Hilbert-Samuel para um ideal, os coeficientes dos termos de grau total maximal do polinômio de Bhattacharya também fornecem valiosa informação sobre o módulo a estudar e os ideais considerados. É por isto que também estipulamos a seguinte

Definição 2.2 (Multiplicidades mistas) *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local, M um R-módulo finitamente gerado e $I_1, \ldots, I_k$ ideais $\mathfrak{m}$-primários. Consideremos o polinômio de Bhattacharya de $I_1, \ldots, I_k$ respeito a M e escrevamos sua parte homogênea de grau $\dim R$ como*

$$\sum_{d_1+\cdots+d_k=\dim R} \frac{1}{d_1!\cdots d_k!} e\left(I_1^{[d_1]}, \ldots, I_k^{[d_k]}; M\right) n_1^{d_1}\cdots n_k^{d_k},$$

com $e\left(I_1^{[d_1]}, \ldots, I_k^{[d_k]}; M\right)$ sendo um número racional. Chamaremos este número de multiplicidade mista de M de tipo $(d_1, \ldots, d_k)$ respeito a $I_1, \ldots, I_k$. *Se $d_i = 1$, escreveremos $I_i := I_i^{[d_i]}$. Às vezes, o número $e\left(I_1^{[d_1]}, \ldots, I_k^{[d_k]}; M\right)$ será escrito como $e\left(I_1, \ldots, I_1, \ldots, I_k, \ldots, I_k; M\right)$, sendo o ideal I_i listado d_i vezes.*

2.3 Propriedades

Da seqüência considerada na demonstração do Teorema 2.1 e da definição de multiplicidade conclui-se o seguinte resultado.

Proposição 2.3 *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local, I um ideal $\mathfrak{m}$-primário e M um R-módulo finitamente gerado de dimensão $d = \dim R$. Consideremos $M' = \frac{M}{xM}$ e $R' = \frac{R}{xR}$ ou $R' = \frac{R}{\mathrm{Ann}\, M}$. Suponhamos que $x \in I$ é um elemento superficial respeito a M que não pertence a nenhum ideal primo minimal. Então,*

$$e_R(I; M) = \begin{cases} e_{R'}(I'; M'), & \text{se } d > 1; \\ l(M') - l(0 :_M x), & \text{se } d = 1. \end{cases}$$

Demonstração: Com efeito, se $d > 1$, $l\left(\frac{M}{xM+I^nM}\right) = l\left(\frac{M}{I^nM}\right) - l\left(\frac{M}{I^{n-1}M}\right) = P(n) - P(n-1)$ e esta última expressão é um polinômio de grau $d-1$ com coeficiente líder igual a $\frac{e_R(I;M)}{(d-1)!}$.□

É também importante estabelecermos um limite para a multiplicidade. Damos a seguinte estimação.

Proposição 2.4 *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local de dimensão d e $I = (x_1, \ldots, x_d)$ um ideal $\mathfrak{m}$-primário.*

1. *Se M é um R-módulo finitamente gerado, então, para todo n, $l\left(\frac{M}{I^nM}\right) \leq l\left(\frac{M}{IM}\right)\binom{n+d-1}{d}$ e $e(I; M) \leq l\left(\frac{M}{IM}\right)$.*

2. *Se R é Cohen-Macaulay, então, para todo n, $l\left(\frac{R}{I^n}\right) = l\left(\frac{R}{I}\right)\binom{n+d-1}{d}$ e $e(I; R) = l\left(\frac{R}{I}\right)$.*

Demonstração:

1. Sabemos que $l\left(\frac{M}{I^nM}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} l\left(\frac{I^iM}{I^{i+1}M}\right)$. Logo,

$$\begin{aligned} l\left(\frac{M}{I^nM}\right) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} l\left(\frac{M}{IM}\right)\mu(I^i) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} l\left(\frac{M}{IM}\right)\binom{d+i-1}{d-1} \\ &= l\left(\frac{M}{IM}\right)\binom{n+d-1}{d}. \end{aligned}$$

   Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d!}{n^d} l\left(\frac{M}{I^nM}\right) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{d!}{n^d} l\left(\frac{M}{IM}\right)\binom{n+d-1}{d}$ e, assim, $e(I; M) \leq l\left(\frac{M}{IM}\right)$.

2. Se R é Cohen-Macaulay, então, I é gerado por uma seqüência regular. Portanto, o anel graduado associado $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \frac{I^i}{I^{i+1}}$ é isomorfo a um anel de polinômios em d variáveis sobre $\frac{R}{I}$. Em particular, $\frac{I^i}{I^{i+1}}$ é um $\frac{R}{I}$-módulo livre cujo posto sobre $\frac{R}{I}$ é exatamente igual ao número de monômios em d variáveis de grau i. Logo, as desigualdades do item anterior tornam-se igualdades.□

Deste resultado deriva um importante exemplo.

Exemplo: Se $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local regular, então, $e(R) = 1$.

De fato, $e(R) = e(\mathfrak{m}; R) = l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}}\right) = 1$.

Também, se $(R, \mathfrak{m})$ for um anel local formalmente eqüidimensional (conceito que aparecerá depois e de fundamental importância no estabelecimento do teorema de Swanson) tal que $e(R) = 1$, então, este anel necessariamente terá que ser regular.

Os seguintes resultados constituem uma série de propriedades da multiplicidade que nos permitirão calculá-la mais facilmente.

Teorema 2.5 *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Se*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

é uma seqüência exata curta de R-módulos, então,

$$e\,(I; M) = e\,(I; K) + e\,(I; N).$$

Demonstração: Tensorizando, obtemos a seqüência exata

$$K \otimes \frac{R}{I^n} \longrightarrow M \otimes \frac{R}{I^n} \longrightarrow N \otimes \frac{R}{I^n} \longrightarrow 0;$$

isto é, a seqüência $\frac{K}{I^nK} \longrightarrow \frac{M}{I^nM} \longrightarrow \frac{N}{I^nN} \longrightarrow 0$ é exata para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$l\left(\frac{M}{I^nM}\right) \leq l\left(\frac{N}{I^nN}\right) + l\left(\frac{K}{I^nK}\right).$$

Por outro lado, o lema de Artin-Rees nos garante que existe um número inteiro não-negativo q tal que, para todo $n \geq q$, $I^nM \cap K \subseteq I^{n-q}K$. Em particular, $l\left(\frac{K}{I^nM\cap K}\right) \geq l\left(\frac{K}{I^{n-q}K}\right)$. Pela exatidão da seqüência tensorizada, temos também que a seqüência $0 \longrightarrow \frac{K}{I^nM\cap K} \longrightarrow \frac{M}{I^nM} \longrightarrow \frac{N}{I^nN} \longrightarrow 0$ é exata. Logo,

$$\begin{aligned} l\left(\frac{N}{I^nN}\right) + l\left(\frac{K}{I^{n-q}K}\right) &\leq l\left(\frac{N}{I^nN}\right) + l\left(\frac{K}{I^nM \cap K}\right) \\ &= l\left(\frac{M}{I^nM}\right) \\ &\leq l\left(\frac{N}{I^nN}\right) + l\left(\frac{K}{I^nK}\right). \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} l\left(\frac{K}{I^nK}\right)\frac{d!}{n^d} = \lim\limits_{n\to\infty} l\left(\frac{K}{I^{n-q}K}\right)\frac{d!}{n^d}$, temos que $e\,(I; M) = e\,(I; K) + e\,(I; N)$.$\square$

Lema 2.6 *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local, $I_1, \ldots, I_k$ ideais $\mathfrak{m}$-primários e*

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

uma seqüência exata curta de R-módulos. Então, para todos $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{N}$, com $\sum\limits_{i=1}^{k} d_i = \dim R$,

$$e\left(I_1^{[d_1]}, \ldots, I_k^{[d_k]}; M_2\right) = e\left(I_1^{[d_1]}, \ldots, I_k^{[d_k]}; M_1\right) + e\left(I_1^{[d_1]}, \ldots, I_k^{[d_k]}; M_3\right).$$

Demonstração: Existem números naturais $c_1, \ldots, c_k$ tais que, para todo $n_i \geq c_i$,

$$\underline{I}^{\underline{n}}M_2 \cap M_1 = \underline{I}^{\underline{n}-\underline{c}}(\underline{I}^{\underline{c}}M_2 \cap M_1) \subseteq \underline{I}^{\underline{n}-\underline{c}}M_1.$$

Então, $l\left(\frac{M_1}{\underline{I}^{\underline{n}}M_1}\right) \geq l\left(\frac{M_1}{\underline{I}^{\underline{n}}M_2\cap M_1}\right) \geq l\left(\frac{M_1}{\underline{I}^{\underline{n}-\underline{c}}M_1}\right)$. Daqui, obtemos que

$$l\left(\frac{M_1}{\underline{I}^{\underline{n}}M_2\cap M_1}\right) = \sum_{d_1+\cdots+d_k=\dim R} \frac{1}{d_1!\cdots d_k!} e\left(I_1^{[d_1]},\ldots,I_k^{[d_k]};M_1\right) n_1^{d_1}\cdots n_k^{d_k} + Q'(n_1,\ldots,n_k),$$

sendo $Q'(n_1,\ldots,n_k)$ uma expressão dominada por um polinômio de grau menor a $\dim R$. Temos a seqüência

$$0 \longrightarrow \frac{M_1}{\underline{I}^{\underline{n}}M_2\cap M_1} \longrightarrow \frac{M_2}{\underline{I}^{\underline{n}}M_2} \longrightarrow \frac{M_3}{\underline{I}^{\underline{n}}M_3} \longrightarrow 0$$

que é exata, pois $\frac{M_1}{\underline{I}^{\underline{n}}M_1} \longrightarrow \frac{M_2}{\underline{I}^{\underline{n}}M_2} \longrightarrow \frac{M_3}{\underline{I}^{\underline{n}}M_3} \longrightarrow 0$ também o é. Assim,

$$l\left(\frac{M_1}{\underline{I}^{\underline{n}}M_2\cap M_1}\right) - l\left(\frac{M_2}{\underline{I}^{\underline{n}}M_2}\right) + l\left(\frac{M_3}{\underline{I}^{\underline{n}}M_3}\right) = 0$$

e $l\left(\frac{M_2}{\underline{I}^{\underline{n}}M_2}\right) = l\left(\frac{M_1}{\underline{I}^{\underline{n}}M_1}\right) + l\left(\frac{M_3}{\underline{I}^{\underline{n}}M_3}\right) + Q'(n_1,\ldots,n_k)$. Portanto, $Q'(n_1,\ldots,n_k)$ é um polinômio de grau menor a $\dim R$. Logo, obtemos o resultado comparando os termos de grau $\dim R$.$\square$

Teorema 2.7 (Fórmula de adição e redução) *Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel noetheriano local, M um R-módulo finitamente gerado de dimensão $d=\dim R$ e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Seja Λ o conjunto dos ideais primos minimais $\mathfrak{p}$ de R tais que $\dim\frac{R}{\mathfrak{p}}=d$. Então,*

$$e\left(I;M\right) = \sum_{\mathfrak{p}\in\Lambda} l(M_{\mathfrak{p}})e\left(I;\frac{R}{\mathfrak{p}}\right).$$

Demonstração: Tomemos uma filtração prima de M; isto é, uma cadeia $0=M_0\subset\cdots\subset M_n=M$ com $\frac{M_{i+1}}{M_i}\cong\frac{R}{\mathfrak{p}_i}$ e $\mathfrak{p}_i\in\Lambda$. Deste modo obtemos, para cada i, a seqüência exata

$$0\longrightarrow M_i\longrightarrow M_{i+1}\longrightarrow\frac{R}{\mathfrak{p}_i}\longrightarrow 0$$

e, pela aditividade da multiplicidade, $e(I;M)=\sum_{\mathfrak{p}\in\Lambda} e\left(I;\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$, aparecendo o $\mathfrak{p}$ tantas vezes como em $\frac{M_{i+1}}{M_i}$. Localizando em $\mathfrak{p}$, temos que todos os termos são zero, exceto aqueles que $\left(\frac{M_{i+1}}{M_i}\right)_{\mathfrak{p}}\cong\left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)_{\mathfrak{p}}$ e a quantidade de vezes que aparece este termo na seqüência localizada é exatamente $l(M_{\mathfrak{p}})$. Portanto, $e\left(I;M\right)=\sum_{\mathfrak{p}\in\Lambda} l(M_{\mathfrak{p}})e\left(I;\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$.$\square$

Proposição 2.8 *Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel noetheriano local de dimensão d, M um R-módulo finitamente gerado e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário.*

1. *Se l é um número inteiro positivo, então, $e(I^l;M)=l^d e(I;M)$.*
2. *Se $I=(x_1,\ldots,x_d)$, então, para quaisquer $l_1,\ldots,l_d\in\mathbb{N}$,*

$$e((x_1^{l_1},\ldots,x_d^{l_d});M)=l_1\cdots l_d e((x_1,\ldots,x_d);M).$$

Demonstração: Se $\dim M<d$, então, todas as multiplicidades são zero. Suponhamos que $\dim M=d$.

1. Por definição, $e(I^l;M)=\lim_{n\to\infty}\frac{d!}{n^d}l\left(\frac{M}{I^{ln}M}\right)=l^d\lim_{n\to\infty}\frac{d!}{(ln)^d}l\left(\frac{M}{I^{ln}M}\right)=l^d e(I;M)$.

2. Se $d = 1$, então, $I = (x_1)$. Portanto, $e((x_1^{l_1}); M) = e((x_1)^{l_1}; M) = l_1 e((x_1); M)$.

   Suponhamos agora que $d > 1$. Pela fórmula de adição e redução, se a propriedade é satisfeita para $\frac{R}{\mathfrak{p}}$, então, também é satisfeita para R. Logo, é suficiente provarmos o resultado para o domínio de integridade R. Também reduziremos o problema para o caso $l_2 = \cdots = l_d = 1$.

   Sejam $l = l_1$, $I = (x_1, \ldots, x_d)$, $J = (x_1^l, x_2, \ldots, x_d)$, $R' = \frac{R}{(x_d)}$, $I' = IR'$, $J' = JR'$ e assim por diante. Logo, $e_R(J; R) = e_{R'}(J'; R')$ e $e_R(I; R) = e_{R'}(I'; R')$, pois $d > 1$. Assim,

$$\begin{aligned} e_{R'}(J'; R') &= e_{R'}((x_1^l, x_2, \ldots, x_d)'; R') \\ &= e_{R'}((x_1'^l, x_2', \ldots, x_{d-1}'); R') \\ &= l e_{R'}((x_1', \ldots, x_{d-1}'); R') \\ &= l e_{R'}(I'; R') \\ &= l e_R(I; R). \end{aligned}$$

   Portanto, $e((x_1^l, x_2, \ldots, x_d); R) = l e((x_1, \ldots, x_d); R)$.□

Teorema 2.9 (Fórmula de Lech) *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local de dimensão d, M um R-módulo finitamente gerado e $I = (x_1, \ldots, x_d)$ um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Logo,*

$$\lim_{n_1, \ldots, n_d \to \infty} \frac{l\left(\frac{M}{(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M}\right)}{n_1 \cdots n_d} = e((x_1, \ldots, x_d); M)$$

Demonstração: A prova será feita por indução sobre d. Se $d = 1$, o resultado segue imediatamente da definição de multiplicidade. Agora, suponhamos que $d > 1$.

Sabemos que $e(I; M) \leq l\left(\frac{M}{IM}\right)$; logo, $e((x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}); M) \leq l\left(\frac{M}{(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M}\right)$. Deste modo,

$$e((x_1, \ldots, x_d); M) = \lim_{n_1, \ldots, n_d \to \infty} \frac{e((x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d}); M)}{n_1 \cdots n_d} \leq \lim_{n_1, \ldots, n_d \to \infty} \frac{l\left(\frac{M}{(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M}\right)}{n_1 \cdots n_d}.$$

Denotemos $J = (x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})$. Se $0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ é uma seqüência exata de R-módulos finitamente gerados, então, $\frac{K}{JK} \longrightarrow \frac{M}{JM} \longrightarrow \frac{N}{JN} \longrightarrow 0$ é exata também. Portanto, $l\left(\frac{M}{JM}\right) \leq l\left(\frac{K}{JK}\right) + l\left(\frac{N}{JN}\right)$. A seguir, faremos uma redução do problema para o caso em que M é um domínio de integridade: se $0 = M_0 \subset \cdots \subset M_n = M$ é uma filtração prima de M, então, $l\left(\frac{M}{JM}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} l\left(\frac{\frac{M_i}{M_{i-1}}}{J\frac{M_i}{M_{i-1}}}\right) = \sum_{i=1}^{n} l\left(\frac{M_i}{JM_i + M_{i-1}}\right)$, pois cada uma das seqüências

$$0 \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow \frac{M_i}{M_{i-1}} \longrightarrow 0$$

é exata. Assim, se conhecêssemos o resultado para módulos cíclicos da forma $\frac{R}{P}$, então,

$$\begin{aligned} \lim_{n_1, \ldots, n_d \to \infty} \frac{l\left(\frac{M}{JM}\right)}{n_1 \cdots n_d} &\leq \lim_{n_1, \ldots, n_d \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} l\left(\frac{M_i}{JM_i + M_{i-1}}\right)}{n_1 \cdots n_d} \\ &= \lim_{n_1, \ldots, n_d \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{l\left(\frac{M_i}{JM_i + M_{i-1}}\right)}{n_1 \cdots n_d} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lim_{n_1, \ldots, n_d \to \infty} \frac{l\left(\frac{M_i}{JM_i + M_{i-1}}\right)}{n_1 \cdots n_d} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} e\left((x_1,\ldots,x_d); \frac{M_i}{M_{i-1}}\right) \\
&= e((x_1,\ldots,x_d); M),
\end{aligned}
$$

obtendo o resultado para M. Logo, basta mostrarmos o teorema para $M = R = \frac{R}{P}$, sendo P um ideal primo de R tal que $\dim \frac{R}{P} = d$ (noutro caso, ambos lados da fórmula são iguais a zero).

Fazendo esta consideração, temos que cada x_i não é divisor de zero. Seja $R' = \frac{R}{(x_1)}$. Logo, por indução, $\lim\limits_{n_2,\ldots,n_d\to\infty} \frac{l\left(\frac{R'}{(x_2^{n_2},\ldots,x_d^{n_d})R'}\right)}{n_2\cdots n_d} = e((x_2,\ldots,x_d)R'; R')$. Como a seqüência

$$
\frac{R}{(x_1, x_2^{n_2},\ldots,x_d^{n_d})} \xrightarrow{x_1^{n_1-1}} \frac{R}{(x_1^{n_1},\ldots,x_d^{n_d})} \longrightarrow \frac{R}{(x_1^{n_1-1}, x_2^{n_2},\ldots,x_d^{n_d})} \longrightarrow 0
$$

é exata, temos que

$$
\begin{aligned}
l\left(\frac{R}{(x_1^{n_1},\ldots,x_d^{n_d})}\right) &\le l\left(\frac{R}{(x_1^{n_1-1}, x_2^{n_2},\ldots,x_d^{n_d})}\right) + l\left(\frac{R}{(x_1, x_2^{n_2},\ldots,x_d^{n_d})}\right) \\
&\le l\left(\frac{R}{(x_1^{n_1-2}, x_2^{n_2},\ldots,x_d^{n_d})}\right) + 2l\left(\frac{R}{(x_1, x_2^{n_2},\ldots,x_d^{n_d})}\right) \\
&\le \cdots \\
&\le l\left(\frac{R}{(x_1^{2}, x_2^{n_2},\ldots,x_d^{n_d})}\right) + (n_1-2)l\left(\frac{R}{(x_1, x_2^{n_2},\ldots,x_d^{n_d})}\right) \\
&\le l\left(\frac{R}{(x_1, x_2^{n_2},\ldots,x_d^{n_d})}\right) + (n_1-1)l\left(\frac{R}{(x_1, x_2^{n_2},\ldots,x_d^{n_d})}\right) \\
&= n_1 l\left(\frac{R}{(x_1, x_2^{n_2},\ldots,x_d^{n_d})}\right).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n_1,\ldots,n_d\to\infty} \frac{l\left(\frac{R}{(x_1^{n_1},\ldots,x_d^{n_d})}\right)}{n_1\cdots n_d} &\le \lim_{n_1,\ldots,n_d\to\infty} \frac{n_1 l\left(\frac{R}{(x_1,x_2^{n_2},\ldots,x_d^{n_d})}\right)}{n_1\cdots n_d} \\
&= \lim_{n_2,\ldots,n_d\to\infty} \frac{l\left(\frac{R}{(x_1,x_2^{n_2},\ldots,x_d^{n_d})}\right)}{n_2\cdots n_d} \\
&= e((x_2,\ldots,x_d)R'; R') \\
&= e((x_1,\ldots,x_d); R)
\end{aligned}
$$

e obtemos o resultado.□

2.4 Teorema de Rees

Veremos agora como influi o fato de terem dois ideais o mesmo fecho inteiro no comportamento de suas multiplicidades.

Proposição 2.10 *Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel noetheriano local de dimensão d, M um R-módulo finitamente gerado e suponhamos que J e I são ideais $\mathfrak{m}$-primários que possuem o mesmo fecho inteiro. Então, $e(I;M) = e(J;M)$.*

Demonstração: É suficiente provarmos o resultado para o caso em que $I = \overline{J}$; isto é, quando J é uma redução de I. Logo, existe um número inteiro k tal que $I^{k+1} = JI^k$. Portanto, para todo $n \geq k+1$, $I^n = J^{n-k}I^k$ e, deste modo, $l\left(\frac{M}{J^n M}\right) \geq l\left(\frac{M}{I^n M}\right) \geq l\left(\frac{M}{J^{n-k} M}\right)$. Mas os coeficientes líderes de $l\left(\frac{M}{J^n M}\right)$ e $l\left(\frac{M}{J^{n-k} M}\right)$ são os mesmos e estes dois polinômios têm o mesmo grau d.□

Proposição 2.11 *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local Cohen-Macaulay com corpo residual infinito e I um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Se J é uma redução minimal arbitrária de I, então,*

$$e(I; R) = l\left(\frac{R}{J}\right).$$

Demonstração: Como R é Cohen-Macaulay com corpo residual infinito, J é gerado por uma seqüência regular. Logo, $e(J) = l\left(\frac{R}{J}\right)$ e, pela proposição anterior, $e(I) = e(J)$.□

É preciso lembrarmos uma classe especial de anéis.

Definição 2.3 (Anel eqüidimensional) *Seja R um anel de dimensão de Krull finita. R é dito* eqüidimensional *se, para todo ideal primo minimal $\mathfrak{p}$, $\dim \frac{R}{\mathfrak{p}} = \dim R$.*

No entanto, um anel noetheriano local $(R, \mathfrak{m})$ será formalmente eqüidimensional *se seu completamento R^* respeito à topologia $\mathfrak{m}$-ádica for eqüidimensional.*

Encontram-se vários resultados relacionados com a eqüidimensionalidade no apêndice. Usá-los-emos para demonstrar que os ideais primos minimais de um anel deste tipo se correspondem com os de sua extensão fielmente plana.

Enunciamos agora o recíproco da Proposição 2.10.

Teorema 2.12 (Rees) *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local formalmente eqüidimensional e $I \subseteq J$ ideais $\mathfrak{m}$-primários. Se $e(I) = e(J)$, então, I é uma redução de J.*

Como é de se esperar, as multiplicidades mistas também possuem propriedades para podermos calculá-las mais facilmente muito parecidas às da multiplicidade de um só ideal.

Lema 2.13 *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local, M um R-módulo finitamente gerado de dimensão $d = \dim R > 1$ e $(x_1, \ldots, x_d)$ e $I_1, \ldots, I_d$ ideais $\mathfrak{m}$-primários, com $x_i \in I_I$ para cada i. Consideremos $M' = \frac{M}{x_1 M}$ e, para qualquer número inteiro positivo l, seja $N_l = \frac{I_1^l M + x_1 M}{x_1 M}$. Logo, $\dim N_l = \dim M'$. Seja $R' = \frac{R}{x_1 R}$ ou $R' = \frac{R}{\operatorname{Ann} M'}$ e suponhamos que $\dim R' = d - 1 = \dim M'$. Então,*

$$e_{R'}(I_2 R', \ldots, I_d R'; M') = e_{R'}(I_2 R', \ldots, I_d R'; N_l)$$

e

$$e_{R'}((x_2, \ldots, x_d)R'; M') = e_{R'}((x_2, \ldots, x_d)R'; N_l).$$

Demonstração: A seqüência

$$0 \longrightarrow \frac{I_1^l M + x_1 M}{x_1 M} \longrightarrow \frac{M}{x_1 M} \longrightarrow \frac{M}{I_1^l M + x_1 M} \longrightarrow 0$$

é exata, pois a primeira função (inclusão) é injetora, a segunda (projeção) é sobrejetora e se $y \in I_1^l M + x_1 M$, então, $y + I_1^l M + x_1 M = I_1^l M + x_1 M$. Além disto, $\dim \frac{M}{I_1^l M + x_1 M} = 0$, pois, para $n_1 \geq l$, $\underline{I}^{\underline{n}} \frac{M}{I_1^l M + x_1 M} = \frac{\underline{I}^{\underline{n}} M + I_1^l M + x_1 M}{I_1^l M + x_1 M} = 0$.

Portanto, $e_{R'}(I_2 R', \ldots, I_d R'; M') = e_{R'}(I_2 R', \ldots, I_d R'; N_l) + e_{R'}\left(I_2 R', \ldots, I_d R'; \frac{M}{I_1^l M + x_1 M}\right)$, sendo o segundo termo da soma igual a zero.□

Teorema 2.14 (Teissier) *Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel noetheriano local, $I_1,\ldots,I_k$ ideais $\mathfrak{m}$-primários e M um R-módulo finitamente gerado de dimensão $d=\dim R$. Fixemos um número natural c. Seja $x\in I_1$ no complementar da união dos primos minimais de R e suponhamos que, para todos $n_1,\ldots,n_k$ naturais suficientemente grandes, $(\underline{I}^{\underline{n}}M:_M x)\cap I_1^c I_2^{n_2}\cdots I_k^{n_k}M = I_1^{n_1-1}I_2^{n_2}\cdots I_k^{n_k}M$. Consideremos $R'=\frac{R}{xR}$ e $M'=\frac{M}{xM}$. Então, para quaisquer números naturais $d_1,\ldots,d_k$, com $d_1+\cdots+d_k=d$ e $d_1>0$,*

$$e_R\left(I_1^{[d_1]},\ldots,I_k^{[d_k]};M\right)=\begin{cases} e_{R'}\left(I_1^{[d_1-1]}R',\ldots,I_k^{[d_k]}R';M'\right), & se\ d>1;\\ l\left(\frac{M}{xM}\right)-l(0:_M x), & se\ d=1.\end{cases}$$

Demonstração: Sabemos que $l\left(\frac{M}{\underline{I}^{\underline{n}}M}\right)-l\left(\frac{M}{I_1^{n_1-1}I_2^{n_2}\cdots I_k^{n_k}M}\right)=l\left(\frac{M}{xM+\underline{I}^{\underline{n}}M}\right)-l\left(\frac{(\underline{I}^{\underline{n}}M:_M x)}{I_1^{n_1-1}I_2^{n_2}\cdots I_k^{n_k}M}\right)$ e, como $(\underline{I}^{\underline{n}}M:_M x)\cap I_1^c I_2^{n_2}\cdots I_k^{n_k}M=I_1^{n_1-1}I_2^{n_2}\cdots I_k^{n_k}M$, temos que

$$(\underline{I}^{\underline{n}}M:_M x)=(0:_M x)+I_1^{n_1-1}I_2^{n_2}\cdots I_k^{n_k}M$$

e $(0:_M x)\cap I_1^{n_1}I_2^{n_2}\cdots I_k^{n_k}M=0$. Assim,

$$l\left(\frac{M}{\underline{I}^{\underline{n}}M}\right)-l\left(\frac{M}{I_1^{n_1-1}I_2^{n_2}\cdots I_k^{n_k}M}\right)=l\left(\frac{M}{xM+\underline{I}^{\underline{n}}M}\right)-l(0:_M x)$$

para $n_1,\ldots,n_k$ suficientemente grandes. A parcela de maior grau de $l\left(\frac{M}{\underline{I}^{\underline{n}}M}\right)$ é

$$\sum_{d_1+\cdots+d_k=d}\frac{1}{d_1!\cdots d_k!}e_R\left(I_1^{[d_1]},\ldots,I_k^{[d_k]};M\right)n_1^{d_1}\cdots n_k^{d_k}$$

e a de maior grau de $l\left(\frac{M}{I_1^{n_1-1}I_2^{n_2}\cdots I_k^{n_k}M}\right)$ é

$$\sum_{d_1+\cdots+d_k=d}\frac{1}{d_1!\cdots d_k!}e_R\left(I_1^{[d_1]},\ldots,I_k^{[d_k]};M\right)(n_1-1)^{d_1}n_2^{d_2}\cdots n_k^{d_k}.$$

Logo, o termo de maior grau do lado esquerdo da igualdade é

$$\sum_{d_1+\cdots+d_k=d}\frac{1}{(d_1-1)!d_2!\cdots d_k!}e_R\left(I_1^{[d_1]},\ldots,I_k^{[d_k]};M\right)n_1^{d_1-1}n_2^{d_2}\cdots n_k^{d_k}.$$

No lado direito temos (lembrando que $\frac{M}{xM+\underline{I}^{\underline{n}}M}=\frac{\frac{M}{xM}}{\underline{I}^{\underline{n}}\frac{M}{xM}}$), para $d>1$, que o termo de maior grau é igual a

$$\sum_{d_1+\cdots+d_k=d-1}\frac{1}{d_1!\cdots d_k!}e_{R'}\left(I_1^{[d_1]}R',\ldots,I_k^{[d_k]}R';M'\right)n_1^{d_1}\cdots n_k^{d_k}.$$

Portanto, $e_R\left(I_1^{[d_1]},\ldots,I_k^{[d_k]};M\right)=e_{R'}\left(I_1^{[d_1-1]}R',\ldots,I_k^{[d_k]}R';M'\right)$ se $d>1$. Agora, se $d=1$, $\dim\frac{M}{xM}=0$ e, daqui, $l\left(\frac{M}{xM}\right)=e_{R'}\left(I_1^{[0]}R',\ldots,I_k^{[0]}R';M'\right)$; concluindo que

$$e_R\left(I_1^{[d_1]},\ldots,I_k^{[d_k]};M\right)=l\left(\frac{M}{xM}\right)-l(0:_M x)$$

se $d=1$.□

O corolário deste teorema relaciona de forma direta a multiplicidade mista de vários ideais e a multiplicidade do ideal gerado por uma seqüência superficial para estes respeito ao mesmo módulo.

Corolário 2.1 (Teissier) *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local, $I_1, \ldots, I_k$ ideais $\mathfrak{m}$-primários e M um R-módulo finitamente gerado não-trivial com $\dim M = \dim R = d$. Sejam $d_1, \ldots, d_k$ números naturais tais que $d_1 + \cdots + d_k = d$.*
Consideremos a seqüência superficial $x_1, \ldots, x_d$ para $I_1, \ldots, I_1, \ldots, I_k, \ldots, I_k$ respeito a M, sendo cada I_i listado d_i vezes e cada x_i não contido em nenhum ideal primo minimal sobre $(x_1, \ldots, x_{i-1})$. Então,

$$e\left(I_1^{[d_1]}, \ldots, I_k^{[d_k]}; M\right) = l\left(\frac{M}{(x_1, \ldots, x_d)M}\right) - l((x_1, \ldots, x_{d-1})M :_M x_d)$$

que é igual à multiplicidade de $(x_1, \ldots, x_d)$ sobre M. Em particular, a multiplicidade mista é um número inteiro positivo quando $\dim M = \dim R$.

Demonstração: Sejam $R_i = \frac{R}{(x_1, \ldots, x_i)}$ e $M_i = \frac{M}{(x_1, \ldots, x_i)M}$. Aplicando recorrentemente o teorema anterior, temos que

$$\begin{aligned} e_R\left(I_1^{[d_1]}, \ldots, I_k^{[d_k]}; M\right) &= e_{R_1}\left(I_1^{[d_1-1]}R_1, \ldots, I_k^{[d_k]}R_1; M_1\right) \\ &= \cdots \\ &= e_{R_{d-1}}\left(I_1^{[0]}R_{d-1}, \ldots, I_k^{[1]}R_{d-1}; M_{d-1}\right) \\ &= e_{R_d}\left(I_1^{[0]}R_d, \ldots, I_k^{[0]}R_d; M_d\right) - l((x_1, \ldots, x_{d-1})M :_M x_d) \end{aligned}$$

sendo a última igualdade verdadeira, pois $\dim M_{d-1} = \dim R_{d-1} = 1$. Portanto,

$$e\left(I_1^{[d_1]}, \ldots, I_k^{[d_k]}; M\right) = l\left(\frac{M}{(x_1, \ldots, x_i)M}\right) - l((x_1, \ldots, x_{d-1})M :_M x_d).$$

Agora, se $d = 0$, então, $e\left(I_1^{[d_1]}, \ldots, I_k^{[d_k]}; M\right) = l(M)$ que é uma constante positiva. Se $d > 0$, consideremos $I = (x_1, \ldots, x_d)$. Logo,

$$\begin{aligned} e(I; M) &= e_R((x_1, \ldots, x_d); M) \\ &= e_{R_1}((x_2, \ldots, x_d)R_1; M_1) \\ &= \cdots \\ &= e_{R_{d-1}}(x_d R_{d-1}; M_{d-1}) \\ &= l(M_d) - l((x_1, \ldots, x_{d-1})M :_M x_d) \end{aligned}$$

concluindo assim que $e\left(I_1^{[d_1]}, \ldots, I_k^{[d_k]}; M\right) = e((x_1, \ldots, x_d); M)$.□

Teorema 2.15 (Fórmula de adição e redução) *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local, M um R-módulo finitamente gerado de dimensão $d = \dim R$ e $I_1, \ldots, I_k$ ideais $\mathfrak{m}$-primários. Então, para todos números naturais $d_1, \ldots, d_k$ com $d_1 + \cdots + d_k = d$,*

$$e\left(I_1^{[d_1]}, \ldots, I_k^{[d_k]}; M\right) = \sum_{\mathfrak{p}} l(M_{\mathfrak{p}}) e_{\frac{R}{\mathfrak{p}}}\left(I_1^{[d_1]}\frac{R}{\mathfrak{p}}, \ldots, I_k^{[d_k]}\frac{R}{\mathfrak{p}}; \frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$$

sendo $\mathfrak{p}$ um ideal em $\operatorname{Min} \frac{R}{\operatorname{Ann} M}$ *que satisfaz* $\dim \frac{R}{\mathfrak{p}} = d$.

Demonstração: Podemos supor que $\frac{R}{\mathfrak{m}}$ é infinito. Logo, existe uma seqüência superficial $x_1, \ldots, x_d$ para $I_1, \ldots, I_1, \ldots, I_k, \ldots, I_k$ respeito a M e respeito a cada $\frac{R}{\mathfrak{p}}$, sendo cada I_i listado d_i vezes e cada x_i escolhido fora da união dos ideais primos minimais sobre $(x_1, \ldots, x_{i-1})$. Então, se $I = (x_1, \ldots, x_d)$, $e\left(I_1^{[d_1]}, \ldots, I_k^{[d_k]}; M\right) = e(I; M)$ e, para cada $\mathfrak{p}$, $e\left(I_1^{[d_1]}, \ldots, I_k^{[d_k]}; \frac{R}{\mathfrak{p}}\right) = e\left(I; \frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$.

Sabemos que $e(I;M) = \sum_{\mathfrak{p}} l(M_{\mathfrak{p}}) e\left(I; \frac{R}{\mathfrak{p}}\right)$. Portanto,

$$e\left(I_1^{[d_1]}, \ldots, I_k^{[d_k]}; M\right) = \sum_{\mathfrak{p}} l(M_{\mathfrak{p}}) e\left(I_1^{[d_1]}, \ldots, I_k^{[d_k]}; \frac{R}{\mathfrak{p}}\right). \square$$

Tendo já todas estas ferramentas, dispomo-nos a enunciar um dos resultados centrais deste trabalho, visto neste contexto como uma generalização da Proposição 2.10.

Teorema 2.16 (Rees) *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local, M um R-módulo finitamente gerado de dimensão $d = \dim R$ e $I_1, \ldots, I_k$ ideais $\mathfrak{m}$-primários. Sejam $d_1, \ldots, d_k$ números naturais tais que $d_1 + \cdots + d_k = d$ e $(x_1, \ldots, x_d)$ uma redução em família de $(I_1, \ldots, I_1, \ldots, I_k, \ldots, I_k)$ respeito a M, sendo cada I_i listado d_i vezes. Então,*

$$e\left(I_1^{[d_1]}, \ldots, I_k^{[d_k]}; M\right) = e((x_1, \ldots, x_d); M).$$

Demonstração: Seja $I = (x_1, \ldots, x_d)$. Podemos falar em $e(I;M)$, pois I é $\mathfrak{m}$-primário ao ser $(x_1, \ldots, x_d)$ uma redução em família de $(I_1, \ldots, I_1, \ldots, I_k, \ldots, I_k)$. Podemos supor que o corpo residual é infinito. Também podemos supor que $k = d$ e $d_i = 1$ para todo i.

Se $d = 0$, então, $e(I_1, \ldots, I_d; M) = l(M) = e((0); M)$ e não há mais a fazer. Suponhamos agora que $d = 1$. Logo, o polinômio de Hilbert-Samuel e o polinômio de Bhattacharya coincidem. Por hipótese, (x_1) é uma redução de I_1 e, por isto, estes dois ideais possuem o mesmo fecho inteiro. Portanto, $e((x_1); M) = e(I_1; M)$.

Agora, seja $d > 1$. Se $(x_1, \ldots, x_d)$ é uma redução em família de $(I_1, \ldots, I_d)$ respeito a M, então, também o é respeito a $\frac{R}{\mathfrak{p}}$, sendo $\mathfrak{p}$ um ideal primo minimal em R que contém Ann M. Logo, é suficiente provarmos o teorema para o domínio de integridade $M = R = \frac{R}{\mathfrak{p}}$.

Seja $l = \sum_i \mu(I_i)$. Consideremos $U \subseteq \left(\frac{R}{\mathfrak{m}}\right)^l$ um conjunto Zariski-aberto que determina todas as reduções em família de $(I_1, \ldots, I_d)$. Por hipótese, U não é vazio. Consideremos agora $U' \subset \frac{I_1}{\mathfrak{m} I_1}$ outro conjunto Zariski-aberto tal que toda pré-imagem em I_1 deste conjunto é um elemento superficial para $I_1, \ldots, I_d$ não-nulo. Como sempre existem seqüências superficiais para $I_1, \ldots, I_d$ e M é um domínio de integridade, U' não é vazio.

Com isto, existe $y \in U'$ tal que $(y, x_2, \ldots, x_d) \in U$; ou seja, $(y, x_2, \ldots, x_d)$ é uma redução em família de $(I_1, \ldots, I_d)$. Consideremos agora $R' = \frac{R}{yR}$. Logo, $e_R(I_1, \ldots, I_d; R) = e_{R'}(I_2 R', \ldots, I_d R'; R')$ e $e((y, x_2, \ldots, x_d); R) = e_{R'}((x_2, \ldots, x_d) R'; R')$.

Como $(y, x_2, \ldots, x_d)$ é uma redução em família de $(I_1, \ldots, I_d)$, então, para todo l suficientemente grande, $(x_2, \ldots, x_d)$ é uma redução em família de $(I_2, \ldots, I_d)$ respeito a $\frac{I_1^l + yR}{yR}$. Escolhamos um desses l e notemos por N o módulo anterior.

Assim, $e_{R'}(I_2 R', \ldots, I_d R'; N) = e_{R'}((x_2, \ldots, x_d) R'; N)$. Daqui, obtemos a seguinte série de igualdades:

$$\begin{aligned} e_R(I_1, \ldots, I_d; R) &= e_{R'}(I_2 R', \ldots, I_d R'; R') \\ &= e_{R'}(I_2 R', \ldots, I_d R'; N) \\ &= e_{R'}((x_2, \ldots, x_d) R'; N) \\ &= e_{R'}((x_2, \ldots, x_d) R'; R') \\ &= e_R((y, x_2, \ldots, x_d); R). \end{aligned}$$

Consideremos agora $R'' = \frac{R}{(x_d)}$ e $N'' = \frac{I_d^l + x_d R}{x_d R}$. Logo,

$$e_R((y, x_2, \dots, x_d); R) = e_{R''}((y, x_2, \dots, x_{d-1})R''; R'') = e_{R''}((y, x_2, \dots, x_{d-1})R''; N'').$$

Analogamente,

$$e_R((x_1, \dots, x_d); R) = e_{R''}((x_1, \dots, x_{d-1})R''; R'') = e_{R''}((x_1, \dots, x_{d-1})R''; N'').$$

Para l suficientemente grande, $(x_1, \dots, x_{d-1})$ é uma redução em família de $(I_1, \dots, I_{d-1})$ respeito a N''. Portanto, podemos escolher y de modo que

$$e_{R''}((y, x_2, \dots, x_{d-1})R''; N'') = e_{R''}((x_1, \dots, x_{d-1})R''; N'').$$

Assim, concluímos que $e((y, x_2, \dots, x_d); R) = e((x_1, \dots, x_d); R)$ e que

$$e((x_1, \dots, x_d); R) = e(I_1, \dots, I_d; R).\square$$

A seguir, prepararemos o caminho para demonstrarmos o enunciado recíproco do teorema anterior. Este resultado requer de uma condição adicional de eqüidimensionalidade, fato que fica evidenciado na demonstração do Lema 2.21.

Proposição 2.17 *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local de dimensão d, $I_1, \dots, I_d$ ideais $\mathfrak{m}$-primários e M um R-módulo finitamente gerado. Então, para todo $l \in \mathbb{N}$,*

$$e(I_1, \dots, I_{d-1}, I_d^l; M) = le(I_1, \dots, I_d; M).$$

Demonstração: Sem perda de generalidade, suponhamos que $d > 0$ e suponhamos também que o corpo residual de R é infinito. Logo, existem $x_1, \dots, x_d$, com $x_j \in I_j$, que formam uma seqüência superficial para $I_1, \dots, I_d$.

Podemos supor ainda que, para todo número inteiro positivo l, x_d^l é superficial para I_d respeito a $\frac{M}{(x_1, \dots, x_{d-1})}$. Portanto, $e(I_1, \dots, I_{d-1}, I_d^l; M) = e((x_1, \dots, x_{d-1}, x_d^l); M)$.

Sabemos, pela Proposição 2.8, que $e((x_1^{l_1}, \dots, x_d^{l_d}); M) = l_1 \cdots l_d e((x_1, \dots, x_d); M)$ para quaisquer $l_1, \dots, l_d \in \mathbb{N}$; logo, $e((x_1, \dots, x_{d-1}, x_d^l); M) = le((x_1, \dots, x_d); M)$.

Finalmente, pelo Corolário 2.1, $e((x_1, \dots, x_d); M) = e(I_1, \dots, I_d; M)$. Assim,

$$e(I_1, \dots, I_{d-1}, I_d^l; M) = le(I_1, \dots, I_d; M).\square$$

Lema 2.18 *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local com corpo residual infinito e $I_1, \dots, I_k$ ideais em R tais que $I_1 \subseteq \sqrt{I_2 \cdots I_k}$. Tomemos Y como uma variável sobre R e $x \in I_1$. Então, existem $c, e \in \mathbb{N}$ e um conjunto Zariski-aberto não-vazio $U \subset \frac{I_1}{\mathfrak{m} I_1}$ que satisfaz que cada vez que $y \in I_1$ tenha imagem natural em U, $l \geq e$ e $n_1, \dots, n_k$ sejam suficientemente grandes, então,*

$$\underline{I}^{\underline{n}} R[Y] \cap (x^l + y^l Y) R[Y] = (x^l + y^l Y) I_1^{n_1 - l} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} R[Y]$$

e

$$(\underline{I}^{\underline{n}} R[Y] :_{R[Y]} (x^l + y^l Y)) \cap I_1^c I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} R[Y] = I_1^{n_1 - l} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} R[Y].$$

Demonstração: Seja $(0) = \bigcap_{j=1}^{s} \mathfrak{q}_j$ uma decomposição primária de (0). Suponhamos que $I_1 \subseteq \sqrt{\mathfrak{q}_j}$ para $j = 1, \dots, t$ e que I_1 não esteja contido em $\sqrt{\mathfrak{q}_j}$ para $j = t+1, \dots, s$. Escolhamos um número natural e tal que $I_1^e = \bigcap_{j=1}^{t} \mathfrak{q}_j$. Como I_1 não está contido em $\sqrt{\mathfrak{q}_j}$ para $j = t+1, \dots, s$, podemos supor que as pré-imagens dos elementos de U não caem em $\bigcup_{j=t+1}^{s} \sqrt{\mathfrak{q}_j}$ e que, para cada y na pré-imagem de U e para cada $i \geq 1$, y^i é superficial para $I_1^i, I_2, \dots, I_k$. Fixemos y na pré-imagem de U. Logo, existe um número natural c tal que, para todo $n_1 \geq c + i - 1$ e para todos $n_2, \dots, n_k \geq 0$,

$$(\underline{I}^{\underline{n}} : y^i) \cap I_1^c I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} = I_1^{n_1-i} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k}.$$

Sejam $l \geq e$ e $r \in (0 : y^l)$. Então, $ry^l \in \bigcap_{j=t+1}^{s} \mathfrak{q}_j$ e, como $y^k \notin \mathfrak{q}_j$ para todo k, $r \in \bigcap_{j=t+1}^{s} \mathfrak{q}_j$, donde $rI_1^l = 0$. Deste modo, $(0 : y^l) \subseteq (0 : I_1^l)$ e $(0 : y^l) = (0 : I_1^l)$. Juntando este fato à hipótese $(I_1 \subseteq \sqrt{I_2 \cdots I_k})$, obtemos que

$$(\underline{I}^{\underline{n}} : y^l) = (0 : y^l) + I_1^{n_1-l} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} = (0 : I_1^l) + I_1^{n_1-l} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k}$$

para todo n_i suficientemente grande. Seja $F = (x^l + y^l Y) \sum_{j=0}^{a} r_j Y^j \in \underline{I}^{\underline{n}} R[Y]$, com $r_j \in R$. Mostraremos por indução sobre a que $F \in (x^l + y^l Y) I_1^{n_1-l} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} R[Y]$.

Suponhamos que $a = 0$. Logo, $F = (x^l + y^l Y) r_0$, com $r_0 \in R$. Assim, obtemos que $x^l r_0$ e $y^l r_0$ pertencem a $\underline{I}^{\underline{n}}$. Portanto, $r_0 \in I_1^{n_1-l} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k}$ e $F \in (x^l + y^l Y) I_1^{n_1-l} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} R[Y]$.

Agora, suponhamos que a afirmação vale para $a = k - 1$ e seja $F = (x^l + y^l Y) \sum_{j=0}^{k} r_j Y^j$ um polinômio em $\underline{I}^{\underline{n}} R[Y]$. Como o coeficiente $y^l r_a$ de Y^{a+1} está em $\underline{I}^{\underline{n}}$, $r_a \in (0 : I_1^l) + I_1^{n_1-l} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k}$. Logo, $(x^l + y^l Y) r_a Y^{a+1} \in \underline{I}^{\underline{n}} R[Y]$ e, portanto, $(x^l + y^l Y) \sum_{j=0}^{a-1} r_j Y^j \in \underline{I}^{\underline{n}} R[Y]$. Aplicando a hipótese de indução, temos que $(x^l + y^l Y) \sum_{j=0}^{a-1} r_j Y^j \in (x^l + y^l Y) I_1^{n_1-l} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} R[Y]$. Logo,

$$F = (x^l + y^l Y) r_a Y^a + (x^l + y^l Y) \sum_{j=0}^{a-1} r_j Y^j \in (x^l + y^l Y) I_1^{n_1-l} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} R[Y]. \square$$

Lema 2.19 *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local, M um R-módulo finitamente gerado de dimensão $d = \dim R$ e $I_1, \ldots, I_d$ ideais $\mathfrak{m}$-primários.*

1. *Se $J_1, \ldots, J_d$ são ideais $\mathfrak{m}$-primários e, para $i = 1, \ldots, d$, $J_i \subseteq I_i$, então,*

$$e(J_1, \ldots, J_d; M) \geq e(I_1, \ldots, I_d; M).$$

2. *Se, para $i = 1, \ldots, d$, $x_i \in I_i$ e $(x_1, \ldots, x_d)$ é $\mathfrak{m}$-primário, então,*

$$e((x_1, \ldots, x_d); M) \geq e(I_1, \ldots, I_d; M).$$

Demonstração:

1. Para todo $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$, $l\left(\frac{M}{\underline{J}^{\underline{n}} M}\right) \geq l\left(\frac{M}{\underline{I}^{\underline{n}} M}\right)$. Logo, o polinômio de Bhattacharya para $J_1, \ldots, J_d$ respeito a M domina o de $I_1, \ldots, I_d$ respeito ao mesmo módulo. Portanto,

$$e(J_1, \ldots, J_d; M) \geq e(I_1, \ldots, I_d; M).$$

2. Sendo $(x_1, \ldots, x_d)$ um ideal $\mathfrak{m}$-primário, temos que $(x_1, \ldots, x_d)$ é uma redução em família de $((x_1) + \mathfrak{m}^n, \ldots, (x_d) + \mathfrak{m}^n)$ para todo n suficientemente grande. Consideremos, assim, $J_i = (x_i) + \mathfrak{m}^n$ para um n fixado tal que $\mathfrak{m}^n \subseteq I_i$, com $i = 1, \ldots, d$. Deste modo, temos que $J_i \subseteq I_i$ e, portanto, $e(J_1, \ldots, J_d; M) \geq e(I_1, \ldots, I_d; M)$. Além disto, como $(x_1, \ldots, x_d)$ é uma redução em família de $(J_1, \ldots, J_d)$ respeito a M, tem-se que

$$e(J_1, \ldots, J_d; M) = e((x_1, \ldots, x_d); M),$$

concluindo o resultado.□

Lema 2.20 *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel noetheriano local com corpo residual infinito,* $I_1, \ldots, I_k$ *ideais em* R *e* $x_i \in I_i$*. Consideremos a variável* Y *sobre* R *e suponhamos que os ideais* $I_1, \ldots, I_k$ *e* $(x_1, \ldots, x_k)$ *têm a mesma altura* k *e o mesmo radical. Seja* P *um ideal primo minimal sobre* $(x_1, \ldots, x_k)$ *tal que* $e((x_1, \ldots, x_k)R_P; R_P) = e(I_1R_P, \ldots, I_kR_P; R_P)$*. Denotemos* $S = R[Y]_{PR[Y]}$*. Então, existe um subconjunto Zariski-aberto não-vazio* U *de* $\frac{I_1}{\mathfrak{m}I_1}$ *tal que, para qualquer pré-imagem* y *de um elemento de* U *e para todo número inteiro* l *suficientemente grande,*

$$e_S((x_1^l + y^lY, x_2, \ldots, x_k)S; S) = le_{R_P}((x_1, \ldots, x_k)R_P; R_P).$$

Demonstração: Seja $k = 1$. Logo, podemos escolher y de maneira que

$$I_1^{n_1}R[Y] \cap (x_1^l + y^lY)R[Y] = (x_1^l + y^lY)I_1^{n_1-l}R[Y]$$

e $(I_1^{n_1}R[Y] :_{R[Y]} (x_1^l + y^lY)) \cap I_1^cR[Y] = I_1^{n_1-l}R[Y]$ se l é suficientemente grande. Portanto, $x_1^l + y^lY$ é superficial para $I_1^lR[Y]$ e, conseqüentemente, para I_1S. Sabendo isto, temos que $e_S((x_1^l + y^lY)S; S) = e_S(I_1^lS; S) = e_{R_P}(I_1^lR_P; R_P)$.

Por outro lado, $e_{R_P}(I_1^lR_P; R_P) = le_{R_P}(I_1R_P; R_P)$. Então,

$$e_S((x_1^l + y^lY)S; S) = le_{R_P}(I_1R_P; R_P) = le_{R_P}(x_1R_P; R_P).$$

Agora, seja $k \geq 2$. Para $\mathfrak{q} \in \operatorname{Min} R_P$, definamos $A_\mathfrak{q} = \frac{R_P}{\mathfrak{q}}$. Pelo lema anterior,

$$e_{A_\mathfrak{q}}((x_1, \ldots, x_k)A_\mathfrak{q}; A_\mathfrak{q}) \geq e_{A_\mathfrak{q}}(I_1A_\mathfrak{q}, \ldots, I_kA_\mathfrak{q}; A_\mathfrak{q})$$

se $\dim A_\mathfrak{q} = k$. Aplicando a fórmula de adição e redução, temos que

$$e_{R_P}((x_1, \ldots, x_k)R_P; R_P) = \sum_{A_\mathfrak{q}} l(R_\mathfrak{q})e_{A_\mathfrak{q}}((x_1, \ldots, x_k)A_\mathfrak{q}; A_\mathfrak{q}),$$

sendo este somatório maior ou igual a $\sum\limits_{A_\mathfrak{q}} l(R_\mathfrak{q})e_{A_\mathfrak{q}}(I_1A_\mathfrak{q}, \ldots, I_kA_\mathfrak{q}; A_\mathfrak{q}) = e_{R_P}(I_1R_P, \ldots, I_kR_P; R_P)$. Mas, por hipótese, $e_{R_P}((x_1, \ldots, x_k)R_P; R_P) = e_{R_P}(I_1R_P, \ldots, I_kR_P; R_P)$. Logo,

$$e_{A_\mathfrak{q}}((x_1, \ldots, x_k)A_\mathfrak{q}; A_\mathfrak{q}) = e_{A_\mathfrak{q}}(I_1A_\mathfrak{q}, \ldots, I_kA_\mathfrak{q}; A_\mathfrak{q})$$

para todo $A_\mathfrak{q}$. Portanto, a hipótese é respeitada para $\frac{R}{\mathfrak{p}}$, sendo $\mathfrak{p}$ qualquer ideal primo minimal de R tal que $\dim \frac{R_P}{\mathfrak{p}R_P} = k$. Se a condição se cumprir para $\frac{R}{\mathfrak{p}}$, então, existe um conjunto Zariski-aberto não-vazio $U_\mathfrak{p}$ de $\frac{I_1}{\mathfrak{m}I_1}$ tal que a conclusão é satisfeita para $\frac{R}{\mathfrak{p}}$. Logo, sendo y a pré-imagem de qualquer elemento do conjunto Zariski-aberto não-vazio $\bigcap\limits_{\mathfrak{p}} U_\mathfrak{p}$ de $\frac{I_1}{\mathfrak{m}I_1}$, a conclusão é satisfeita para R. Dito isto, é suficiente provarmos o resultado para quando R_P for um domínio de integridade.

Neste caso, x_k não é divisor de zero em R_P. Consideremos $T = \frac{R_P}{x_kR_P}$. Logo, por hipótese, $e_{R_P}(I_1R_P, \ldots, I_kR_P; R_P) = e_{R_P}((x_1, \ldots, x_k)R_P; R_P)$. Como $\dim T = \dim R_P - 1$, temos que $e_{R_P}((x_1, \ldots, x_k)R_P; R_P) = e_T((x_1, \ldots, x_{k-1})T; T)$. Pelo lema anterior,

$$e_T((x_1, \ldots, x_{k-1})T; T) \geq e_T(I_1T, \ldots, I_{k-1}T; T).$$

Logo, se $(y_1, \ldots, y_{k-1})$ é uma seqüência superficial para $I_1T, \ldots, I_{k-1}T$, temos que

$$e_T(I_1T, \ldots, I_{k-1}T; T) = e_T((y_1, \ldots, y_{k-1})T; T).$$

Assim, obtemos também que $e_T((y_1,\ldots,y_{k-1})T;T) = e_{R_P}((y_1,\ldots,y_{k-1},x_k)R_P;R_P)$ e, pelo lema anterior, $e_{R_P}((y_1,\ldots,y_{k-1},x_k)R_P;R_P) \geq e_{R_P}(I_1R_P,\ldots,I_kR_P;R_P)$.

Portanto, $e_T((x_1,\ldots,x_{k-1})T;T) = e_T(I_1T,\ldots,I_{k-1}T;T)$ e existe um conjunto Zariski-aberto não-vazio $U \subset \frac{I_1}{\mathfrak{m}I_1}$ tal que, para qualquer pré-imagem y de um elemento de U,

$$e_{\frac{S}{x_kS}}\left((x_1^l+y^lY,x_2,\ldots,x_{k-1})\frac{S}{x_kS};\frac{S}{x_kS}\right) = le_T((x_1,\ldots,x_{k-1})T;T)$$

para todo l suficientemente grande. Logo,

$$\begin{aligned} e_S((x_1^l+y^lY,x_2,\ldots,x_k)S;S) &= e_{\frac{S}{x_kS}}\left((x_1^l+y^lY,x_2,\ldots,x_{k-1})\frac{S}{x_kS};\frac{S}{x_kS}\right) \\ &= le_T((x_1,\ldots,x_{k-1})T;T) \\ &= le_{R_P}((x_1,\ldots,x_k)R_P;R_P).\Box \end{aligned}$$

O próximo lema relaciona biunivocamente os ideais primos minimais de um anel formalmente eqüidimensional com os de sua extensão fielmente plana.

Lema 2.21 *Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel noetheriano local formalmente eqüidimensional com corpo residual infinito, Y uma variável sobre R e $S = R[Y]_{\mathfrak{m}R[Y]+YR[Y]}$. Tomemos $I_1,\ldots,I_k$ ideais em R e $x_i \in I_i$ tais que estes ideais, junto com $(x_1,\ldots,x_k)$, tenham altura k e o mesmo radical. Seja Λ o conjunto dos ideais primos em R minimais sobre $(x_1,\ldots,x_k)$. Suponhamos que, para todo $P \in \Lambda$, $e_{R_P}((x_1,\ldots,x_k)R_P;R_P) = e_{R_P}(I_1R_P,\ldots,I_kR_P;R_P)$. Consideremos um elemento $y \in I_1$ superficial para $I_1,\ldots,I_k$ que não esteja contido em nenhum ideal primo minimal sobre $(x_2,\ldots,x_k)$. Então, para todo l suficientemente grande, o conjunto dos primos de S minimais sobre $(x_1^l+y^lY,x_2,\ldots,x_k)S$ é igual a $\{PS : P \in \Lambda\}$.*

Demonstração: Seja $J_l = (x_1^l+y^lY,x_2,\ldots,x_k)S$. Como y não está em nenhum ideal primo minimal sobre $(x_2,\ldots,x_k)$, a altura de J_l é k, pois $k-1 = \text{ht}\,(x_2,\ldots,x_k) < \text{ht}\,J_l \leq k$.

Agora, se $P \in \Lambda$, então, $P \supseteq \sqrt{(x_1^l,x_2,\ldots,x_k)} = \sqrt{(x_1,\ldots,x_k)} = \sqrt{I_1}$ e, portanto,

$$\text{ht}\,PS = k = \text{ht}\,J_l.$$

Logo, PS é um ideal primo minimal sobre J_l.

Suponhamos que existe um ideal primo Q em S minimal sobre J_l que não seja estendido desde um ideal primo em Λ. Logo, pelo teorema da altura de Krull, ht $Q \leq k$. Agora, J_l tem altura k; portanto, ht $Q = k$. Por ser R formalmente eqüidimensional, S também o é. Assim, $\dim \frac{S}{Q} = \dim S - k$. Analogamente, para cada $P \in \Lambda$, $\dim \frac{S}{PS} = \dim S - k$. Daqui, para todo $n \geq 1$,

$$\begin{gathered} e\left(\frac{S}{((x_1^l+y^lY)^n,x_2^n,\ldots,x_k^n)S}\right) \geq \\ e\left(\frac{S}{Q}\right) l\left(\frac{S_Q}{((x_1^l+y^lY)^n,x_2^n,\ldots,x_k^n)S_Q}\right) + \sum_{P\in\Lambda} e\left(\frac{S}{PS}\right) l\left(\frac{S_{PS}}{((x_1^l+y^lY)^n,x_2^n,\ldots,x_k^n)S_{PS}}\right). \end{gathered}$$

Logo,

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} e\left(\frac{S}{((x_1^l+y^lY)^n,x_2^n,\ldots,x_k^n)S}\right) \geq \\ e\left(\frac{S}{Q}\right) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} l\left(\frac{S_Q}{((x_1^l+y^lY)^n,x_2^n,\ldots,x_k^n)S_Q}\right) + \sum_{P\in\Lambda} e\left(\frac{S}{PS}\right) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} l\left(\frac{S_{PS}}{((x_1^l+y^lY)^n,x_2^n,\ldots,x_k^n)S_{PS}}\right). \end{gathered}$$

Aplicando a fórmula de Lech (Teorema 2.9), temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}e\left(\frac{S}{((x_1^l+y^lY)^n,x_2^n,\ldots,x_k^n)S}\right) &\geq e\left(\frac{S}{Q}\right)e(J_lS_Q;S_Q)+\sum_{P\in\Lambda}e\left(\frac{S}{PS}\right)e(J_lS_{PS};S_{PS})\\
&> \sum_{P\in\Lambda}e\left(\frac{S}{PS}\right)e(J_lS_{PS};S_{PS})\\
&= \sum_{P\in\Lambda}e\left(\frac{R}{P}\right)le((x_1\ldots,x_k)R_P;R_P)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$e\left(\frac{S}{((x_1^l+y^lY)^n,x_2^n,\ldots,x_k^n)S}\right)\leq e\left(\frac{S}{((x_1^l+y^lY)^n,x_2^n,\ldots,x_k^n,Y)S}\right)$$

pois Y não é divisor de zero em S. Tendo isto, sabemos que

$$\begin{aligned}
e\left(\frac{S}{((x_1^l+y^lY)^n,x_2^n,\ldots,x_k^n,Y)S}\right) &= e\left(\frac{R}{(x_1^{ln},x_2^n,\ldots,x_k^n)R}\right)\\
&= \sum_{P\in\Lambda}e\left(\frac{R}{P}\right)l\left(\frac{R_P}{(x_1^{ln},x_2^n,\ldots,x_k^n)R_P}\right).
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}e\left(\frac{S}{((x_1^l+y^lY)^n,x_2^n,\ldots,x_k^n)S}\right) &\leq \sum_{P\in\Lambda}e\left(\frac{R}{P}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}l\left(\frac{R_P}{(x_1^{ln},x_2^n,\ldots,x_k^n)R_P}\right)\\
&= \sum_{P\in\Lambda}e\left(\frac{R}{P}\right)e((x_1^l,x_2,\ldots,x_k)R_P;R_P)
\end{aligned}$$

concluindo que $\sum_{P\in\Lambda}e\left(\frac{R}{P}\right)le((x_1\ldots,x_k)R_P;R_P)<\sum_{P\in\Lambda}e\left(\frac{R}{P}\right)e((x_1^l,x_2,\ldots,x_k)R_P;R_P)$ e obtendo um absurdo. Logo, tal Q não existe e os primos minimais de $(x_1^l+y^lY,x_2,\ldots,x_k)$ são todos da forma PS, com $P\in\Lambda$.$\square$

Estamos prestes a demonstrar o que poderia ser considerado como o recíproco do teorema de Rees.

Teorema 2.22 (Swanson) *Sejam $(R,\mathfrak{m})$ um anel noetheriano local formalmente eqüidimensional, $I_1,\ldots,I_k$ ideais em R e $x_i\in I_i$. Suponhamos que os ideais I_i e $(x_1,\ldots,x_k)$ têm a mesma altura k e o mesmo radical. Se $e((x_1,\ldots,x_k)R_P;R_P)=e(I_1R_P,\ldots,I_kR_P;R_P)$ para todo ideal primo P minimal sobre $(x_1,\ldots,x_k)$, então, $(x_1,\ldots,x_k)$ é uma redução em família de $(I_1,\ldots,I_k)$.*

Demonstração: Sejam X uma variável sobre R e $T=R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$. Logo, $R\longrightarrow T$ é uma extensão fielmente plana e radicais, alturas, ideais primos minimais, multiplicidades e multiplicidades mistas são preservados mediante esta passagem. Uma k-upla de elementos é uma redução em família de uma k-upla de ideais em R se, e somente se, o é em T. Mais ainda, T é formalmente eqüidimensional e tem corpo residual infinito. Então, podemos supor isto último para R.

Seja Λ o conjunto de todos os ideais primos em R minimais sobre $(x_1,\ldots,x_k)$. Assim, Λ é finito e, pelo teorema da altura de Krull, cada ideal primo em Λ tem altura k. Logo, cada R_P é formalmente eqüidimensional.

Se $k=0$, não temos nada para provar. Então, suponhamos que $k=1$. Por hipótese,

$$e(x_1R_P;R_P) = e(I_1R_P;R_P).$$

Assim, para n suficientemente grande, temos que

$$\begin{aligned}
l\left(\frac{R_P}{I_1^nR_P}\right) - l\left(\frac{R_P}{I_1^{n-1}R_P}\right) &= e(I_1R_P;R_P) \\
&= e(x_1R_P;R_P) \\
&= l\left(\frac{R_P}{x_1R_P}\right) \\
&= l\left(\frac{R_P}{x_1I_1^{n-1}R_P}\right) - l\left(\frac{x_1R_P}{x_1I_1^{n-1}R_P}\right) \\
&= l\left(\frac{R_P}{x_1I_1^{n-1}R_P}\right) - l\left(\frac{R_P}{I_1^{n-1}R_P}\right)
\end{aligned}$$

Portanto, $l\left(\frac{R_P}{I_1^nR_P}\right) = l\left(\frac{R_P}{x_1I_1^{n-1}R_P}\right)$, obtendo que $x_1I_1^{n-1}R_P = I_1^nR_P$. Logo, x_1R_P é uma redução de I_1R_P para todo $P \in \Lambda$. Deste modo, $I_1 \subseteq \bigcap_P \overline{(x_1)}R_P \cap R$ e $I_1 \subseteq \overline{(x_1)}$. Assim, $(x_1) \subseteq I_1$ é uma redução.

Agora, seja $k > 1$. Reduzimo-nos para o caso em que R é domínio de integridade: sejam $\mathfrak{q} \in \text{Min } R$ e $Q \in \text{Spec } R$ minimal sobre $\mathfrak{q} + (x_1, \ldots, x_k)$. Logo, como R é eqüidimensional e catenário (Apêndice A.4), ht $Q =$ ht $\frac{Q}{\mathfrak{q}} \leq k$ e, necessariamente, ht $Q = k$ e $Q \in \Lambda$. Portanto,

$$e\left((x_1, \ldots, x_k)\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)_Q; \left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)_Q\right) \geq e\left(I_1\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)_Q, \ldots, I_k\left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)_Q; \left(\frac{R}{\mathfrak{q}}\right)_Q\right)$$

e

$$\sum_{\substack{\mathfrak{q}\in \text{Min } R\\ \mathfrak{q}\subseteq Q}} l(R_\mathfrak{q})e\left((x_1, \ldots, x_k)\left(\tfrac{R}{\mathfrak{q}}\right)_Q; \left(\tfrac{R}{\mathfrak{q}}\right)_Q\right) \geq \sum_{\substack{\mathfrak{q}\in \text{Min } R\\ \mathfrak{q}\subseteq Q}} l(R_\mathfrak{q})e\left(I_1\left(\tfrac{R}{\mathfrak{q}}\right)_Q, \ldots, I_k\left(\tfrac{R}{\mathfrak{q}}\right)_Q; \left(\tfrac{R}{\mathfrak{q}}\right)_Q\right)$$

obtendo, deste modo, que $e((x_1, \ldots, x_k)R_Q;R_Q) \geq e(I_1R_Q, \ldots, I_kR_Q;R_Q)$. Logo,

$$e\left((x_1, \ldots, x_k)\left(\tfrac{R}{\mathfrak{q}}\right)_Q; \left(\tfrac{R}{\mathfrak{q}}\right)_Q\right) = e\left(I_1\left(\tfrac{R}{\mathfrak{q}}\right)_Q, \ldots, I_k\left(\tfrac{R}{\mathfrak{q}}\right)_Q; \left(\tfrac{R}{\mathfrak{q}}\right)_Q\right)$$

para todos $\mathfrak{q} \in \text{Min } R$ e $Q \in \Lambda$ tais que $\mathfrak{q} \subseteq Q$.

Se tivermos provado o resultado para domínios de integridade, como ht $\frac{Q}{\mathfrak{q}} =$ ht $Q = k$, teremos que $(x_1, \ldots, x_k)$ é uma redução em família de $(I_1, \ldots, I_k)$ respeito a $\frac{R}{\mathfrak{q}}$. Portanto, $(x_1, \ldots, x_k)$ será uma redução em família de $(I_1, \ldots, I_k)$ respeito a R. Sabendo isto, suponhamos que R é um domínio de integridade.

Sejam $S = R[Y]_{\mathfrak{m}R[Y]+YR[Y]}$ e y como nos Lemas 2.18 e 2.20. Logo, podemos escolher y diferente de zero. Deste modo, $x_1^l + y^lY \neq 0$ para todo l e, se l é grande,

$$e((x_1^l + y^lY, x_2, \ldots, x_k)S_{PS};S_{PS}) = le((x_1, \ldots, x_k)R_P;R_P)$$

para todo $P \in \Lambda$. Denotemos $S' = \frac{S}{(x_1^l+y^lY)}$ para l suficientemente grande. Assim,

$$e((x_1^l + y^lY, x_2, \ldots, x_k)S_{PS};S_{PS}) = e((x_2, \ldots, x_k)S'_{PS'};S'_{PS'}).$$

Por outro lado, existe um número inteiro c tal que, para $n_1, \ldots, n_k$ grandes,

$$(\underline{I}^{\underline{n}}S :_S (x_1^l + y^l Y)) \cap I_1^c I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} S = I_1^{n_1 - l} I_2^{n_2} \cdots I_k^{n_k} S.$$

Isto vale, em particular, para todos os múltiplos de l grandes e substituindo c também por um número inteiro maior que seja múltiplo de l. Portanto, ao ser $x_1^l + y^l Y$ superficial para $I_1^l, I_2, \ldots, I_k$ respeito a S, $e_{S'_{PS'}}(I_2 S'_{PS'}, \ldots, I_k S'_{PS'}; S'_{PS'}) = e_{S_{PS}}(I_1^l S_{PS}, I_2 S_{PS}, \ldots, I_k S_{PS}; S_{PS})$, sendo o lado direito igual a $e_{R_P}(I_1^l R_P, I_2 R_P, \ldots, I_k R_P; R_P) = l e_{R_P}(I_1 R_P, \ldots, I_k R_P; R_P)$. Por hipótese,

$$l e_{R_P}(I_1 R_P, \ldots, I_k R_P; R_P) = l e_{R_P}((x_1, \ldots, x_k) R_P; R_P)$$

e, pela escolha do y, $l e_{R_P}((x_1, \ldots, x_k) R_P; R_P) = e((x_1^l + y^l Y, x_2, \ldots, x_k) S_{PS}; S_{PS})$, o que é igual a $e_{S'_{PS'}}((x_2, \ldots, x_k) S'_{PS'}; S'_{PS'})$. Logo,

$$e_{S'_{PS'}}(I_2 S'_{PS'}, \ldots, I_k S'_{PS'}; S'_{PS'}) = e_{S'_{PS'}}((x_2, \ldots, x_k) S'_{PS'}; S'_{PS'})$$

para todo $P \in \Lambda$. Definamos $J = \sum_{j=2}^{k} x_j I_2 \cdots I_{j-1} I_{j+1} \cdots I_k$. Então, por serem todos os primos minimais de $(x_1^l + y^l Y, x_2, \ldots, x_k) S$ da forma PS, com $P \in \Lambda$, e S' formalmente eqüidimensional e, por hipótese de indução, JS' é uma redução de $I_2 \ldots I_k S'$. Assim, para n grande,

$$(I_2 \cdots I_k)^{n+1} S' \subseteq J (I_2 \cdots I_k)^n S'.$$

Portanto, $(I_2 \cdots I_k)^{n+1} S \subseteq J (I_2 \cdots I_k)^n S + (x_1^l + y^l Y) S$ e

$$(I_1 \cdots I_k)^{n+1} S = I_1^{n+1} (I_2 \cdots I_k)^{n+1} S = [J I_1^{n+1} (I_2 \cdots I_k)^n S + I_1^{n+1} (x_1^l + y^l Y) S] \cap (I_1 \cdots I_k)^{n+1} S.$$

Mais ainda,

$$\begin{gathered}[J I_1^{n+1} (I_2 \cdots I_k)^n S + I_1^{n+1} (x_1^l + y^l Y) S] \cap (I_1 \cdots I_k)^{n+1} S = \\ J' (I_1 \cdots I_k)^n S + [I_1^{n+1} (x_1^l + y^l Y) S \cap (I_1 \cdots I_k)^{n+1} S],\end{gathered}$$

onde $J' = J I_1$, e, novamente pela escolha do y,

$$I_1^{n+1} (x_1^l + y^l Y) S \cap (I_1 \cdots I_k)^{n+1} S = (x_1^l + y^l Y) I_1^{n+1-l} (I_2 \cdots I_k)^{n+1} S.$$

Portanto, $(I_1 \cdots I_k)^{n+1} S \subseteq J' (I_1 \cdots I_k)^n S + (x_1^l + y^l Y) I_1^{n+1-l} (I_2 \cdots I_k)^{n+1} S$. Deste modo, existe $s \in R[Y] - (\mathfrak{m} R[Y] + Y R[Y])$ tal que

$$s (I_1 \cdots I_k)^{n+1} \subseteq J' (I_1 \cdots I_k)^n R[Y] + (x_1^l + y^l Y) I_1^{n+1-l} (I_2 \cdots I_k)^{n+1} R[Y].$$

Mas o termo constante de s é uma unidade em R. Logo,

$$\begin{aligned} (I_1 \cdots I_k)^{n+1} &\subseteq J' (I_1 \cdots I_k)^n + x_1^l I_1^{n+1-l} (I_2 \cdots I_k)^{n+1} \\ &= J' (I_1 \cdots I_k)^n + x_1 x_1^{l-1} I_1^{n+1-l} (I_2 \cdots I_k)^{n+1} \\ &\subseteq J' (I_1 \cdots I_k)^n + x_1 I_1^n (I_2 \cdots I_k)^{n+1} \end{aligned}$$

sendo o último conjunto igual a $(I_1 \cdots I_k)^n \sum_{j=1}^{k} x_j I_1 \cdots I_{j-1} I_{j+1} \cdots I_k$, concluindo que $(x_1, \ldots, x_k)$ é uma redução em família de $(I_1, \ldots, I_k)$.$\square$

Conseqüências imediatas deste importantíssimo teorema concluem a reciprocidade do teorema de Rees.

Corolário 2.2 *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local formalmente eqüidimensional, M um R-módulo finitamente gerado de dimensão d e $I_1, \ldots, I_d$ ideais $\mathfrak{m}$-primários. Se $x_i \in I_i$ satisfazem que $(x_1, \ldots, x_d)$ é um ideal $\mathfrak{m}$-primário tal que*

$$e((x_1, \ldots, x_d); M) = e(I_1, \ldots, I_d; M),$$

então, $(x_1, \ldots, x_d)$ *é uma redução em família de* $(I_1, \ldots, I_d)$ *respeito a* M.

Demonstração: Com efeito, como I_i e $(x_1, \ldots, x_d)$ são todos $\mathfrak{m}$-primários, têm o mesmo radical $\mathfrak{m}$. Deste modo, o único ideal primo contendo $(x_1, \ldots, x_d)$ é o próprio $\mathfrak{m}$.□

Nesta instância, podemos apresentar a demonstração do Teorema 2.12.

Corolário 2.3 (Rees) *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local formalmente eqüidimensional e* $I \subseteq J$ *ideais* $\mathfrak{m}$*-primários. Se* $e(I) = e(J)$*, então,* I *é uma redução de* J.

Demonstração: Suponhamos, sem perda de generalidade, que o corpo residual de R é infinito e denotemos por d a dimensão de R. Assim, existem $x_1, \ldots, x_d \in I$ tais que $(x_1, \ldots, x_d)$ é uma redução em família de $(I, \ldots, I)$ (equivalentemente, o ideal $(x_1, \ldots, x_d)$ é uma redução de I). Deste modo,

$$e((x_1, \ldots, x_d); R) = e(I; R) = e(J; R) = e(J, \ldots, J; R).$$

Logo, $(x_1, \ldots, x_d)$ é uma redução de J, donde I é uma redução de J.□

Corolário 2.4 (Böger) *Sejam* $I \subseteq J \subseteq \sqrt{I}$ *ideais num anel local formalmente eqüidimensional. Suponhamos que* $\ell(I) = \operatorname{ht} I$*. Então,* I *é redução de* J *se* $e(IR_\mathfrak{p}; R_\mathfrak{p}) = e(JR_\mathfrak{p}; R_\mathfrak{p})$ *para todo ideal primo* $\mathfrak{p}$ *minimal sobre* I.

Demonstração: Supondo que o corpo residual de R é infinito, existe uma redução de I gerada por $\ell(I)$ elementos, digamos, $x_1, \ldots, x_{\ell(I)}$. Portanto, como $e(IR_\mathfrak{p}; R_\mathfrak{p}) = e(JR_\mathfrak{p}; R_\mathfrak{p})$ para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ minimal sobre I, temos que $(x_1, \ldots, x_{\ell(I)})$ é uma redução em família de $(J, \ldots, J)$, donde I é uma redução de J.□

Apêndice A

Resultados auxiliares

Lema A.1 (Truque do determinante) *Sejam R um anel, M um R-módulo finitamente gerado, $\varphi : M \to M$ um homomorfismo de R-módulos e I um ideal de R tal que $\varphi(M) \subseteq IM$. Então, para alguns $r_i \in I^i$, $\varphi^n + r_1\varphi^{n-1} + \cdots + r_n\varphi^0 = 0$.*

Demonstração: Seja $\{m_1, \ldots, m_n\}$ um conjunto gerador de M. Assim, para alguns $a_{ij} \in I$, $\varphi(m_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}m_j$ com i variando de 1 até n. Este somatório também pode ser rescrito na forma $\sum\limits_{j=1}^{n} (\delta_{ij}\varphi - a_{ij})m_j = 0$. Consideremos, então, a matriz A cuja entrada (i,j) é dada por $\delta_{ij}\varphi - a_{ij}Id$. Deste modo, a multiplicação matricial $A[m_1, \ldots, m_n]^T$ é igual a zero. Portanto, multiplicando à esquerda pela adjunta de A, temos que $\det A$ anula M e esta função é da forma $\varphi^n + r_1\varphi^{n-1} + \cdots + r_n\varphi^0$, com $r_i \in I^i$.□

Proposição A.2 *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e I um ideal. Então, existe um número inteiro n tal que I^n tem redução minimal gerada por $\ell(I)$ elementos, sendo $\ell(I)$ a dimensão de Krull da fibra especial de I, isto é, a dimensão de Krull do anel $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}$.*

Corolário A.1 *Se R é um anel noetheriano local, então,* $\operatorname{ht} I \leq \ell(I) \leq \dim R$.

Teorema A.3 (Teorema da altura de Krull) *Sejam R um anel noetheriano e I um ideal gerado por d elementos. Então, todo ideal primo minimal sobre I tem altura no máximo d.*

Lema A.4 *Seja R um anel noetheriano local. Se R é formalmente eqüidimensional, então, para cada $P \in \operatorname{Spec} R$, $\frac{R}{P}$ é formalmente eqüidimensional e $\operatorname{ht} P + \dim \frac{R}{P} = \dim R$. Também, R é catenário.*

Corolário A.2 *Seja R um anel noetheriano local. Então, R é formalmente eqüidimensional se, e somente se, para cada $P \in \operatorname{Min} R$, $\frac{R}{P}$ é formalmente eqüidimensional e $\dim \frac{R}{P} = \dim R$.*

Proposição A.5 *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local formalmente eqüidimensional e $x \in \mathfrak{m}$ parte de um sistema de parâmetros. Então, $\frac{R}{xR}$ também é formalmente eqüidimensional.*

Lema A.6 *Sejam R um anel noetheriano localmente formalmente eqüidimensional e X uma variável sobre R. Então, $R[X]$ é localmente formalmente eqüidimensional.*

Bibliografia

[Matsumura] MATSUMURA, Hideyuki. *Commutative Ring Theory.* Cambridge, Cambridge University Press, 1986.

[Rees] REES, D. *Generalizations of reductions and mixed multiplicities.* J. London Math. Soc. 29, 1984.

[Swanson] SWANSON, Irena. *Mixed Multiplicities, Joint Reductions and Quasi-unmixed Local Rings.* University of Michigan. 2005.

[Swanson] SWANSON, Irena e Craig HUNEKE. *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules.* Cambridge University Press, 2006.

[Teissier] TEISSIER, B. *Cycles évanescents, sections planes, et conditions de Whitney. Singularités à Cargèse.* Paris, 1973.