

# Um Sistema Hiperbólico Acoplado Envolvendo o Operador $p$ -Laplaciano

por

**Pitágoras Pinheiro de Carvalho**

sob orientação de

**Prof. Dr. Nelson Nery de Oliveira Castro (UFPB)**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba - UFPB, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

**Agosto/2010**

**João Pessoa - PB**

# Um Sistema Hiperbólico Acoplado Envolvendo o Operador $p$ -Laplaciano

por

**Pitágoras Pinheiro de Carvalho.**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba - UFPB, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise Matemática

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Nelson Nery de Oliveira Castro (Orientador)**

**(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)**

---

**Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark**

**(Universidade Federal do Piauí - UFPI)**

---

**Prof. Dr. Marivaldo Pereira Matos**

**(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)**

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# Ficha Catalográfica

CARVALHO, Pitágoras Pinheiro

Um Sistema Hiperbólico Acoplado Envolvendo o Operador  $p$ -Laplaciano  
Pitágoras Pinheiro de Carvalho.

João Pessoa: UFPB/DM, 2010.

93 p. 29cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, DM.

I. Análise    II. Título

# Agradecimentos

Aos meus pais e irmã pelo incentivo em todos os momentos de minha vida e na força sempre presente para me apoiar em minhas lutas.

Aos meus Tios Valdete e Franciso (Maranhão) que da mesma forma que meus pais sempre foram atentos e motivadores.

Aos grandes amigos Serjão, Diego (grandão), Maurício (baixinho), Felipe (Maguin) e José Francisco (negão) que sempre ajudaram muito, me apoiando ou repreendendo quando necessário, pela convivência harmoniosa durante meus estudos e vivência, a esses amigos dedico grande parte do suor gasto para realização do presente trabalho.

A Larissa Reis, amiga incentivadora que em diversos momentos foi muito paciente, sempre me ouvindo e dando importantes sugestões ou sábias palavras, que mesmo eu não seguindo, sempre te escutei.

Aos amigos que fiz: Carol, Disson, Elano, Elielson Pires, Fágner Araruna, Roberto Capistrano ( pai e filho ), Tarciana, Valdecir, entre outros, prezo pela amizade de todos.

Aos Professores de graduação da Universidade Federal do Piauí, em especial Jurandir Lopes, Marcondes Clark e Newton Luis por estarem sempre apostando e me motivando a prosseguir na vida acadêmica, pelas sábias palavras e por prestarem grande amizade.

Aos professores Daniel Pelegrino, Pedro Hinojosa e Fernando pela paciência e atenção.

Ao Prof. Dr. Nelson Nery de Oliveira Castro, pela aceitação em me orientar em um trabalho tão motivador, pela paciência, disponibilidade, por me orientar de maneira tão estimulante e contribuir de maneira destacada em minha formação profissional.

Ao Prof. Dr. Marivaldo Pereira Matos, por organizar e prestar ótimas sugestões para completar o presente trabalho.

Ao Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark, pela amizade, por sempre acreditar em mim, apoiar e estimular aos estudos desde a época da graduação, fazendo sempre o possível para orientar seus alunos.

À CAPES e ao Instituto Dom Barreto pelo apoio financeiro.

Aos meus pais, José  
Carvalho e Maria Roci.

# Resumo

Nosso objetivo, nesse trabalho, é estudar a existência de soluções fracas para o sistema acoplado, da forma:

$$\begin{cases} u'' + Au - \Delta u' + (|v|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |u|^\rho u = f_1 \\ v'' + Av - \Delta v' + (|u|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |v|^\rho v = f_2 \\ z'' + Az - \Delta z' + (|u|^{\rho+2} + |v|^{\rho+2}) |z|^\rho z = f_3 \end{cases}, \text{ em } Q,$$

com,  $Q = (0, T) \times \Omega$  onde  $(0, T)$  é um intervalo da reta,  $\Omega$  um aberto, limitado e regular do  $\mathbb{R}^3$  e  $\Delta = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$  é o operador Laplaciano.

# Abstract

Our goal in this work is to study the existence of weak solutions for the coupled system, in the form:

$$\begin{cases} u'' + Au - \Delta u' + (|v|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |u|^\rho u = f_1 \\ v'' + Av - \Delta v' + (|u|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |v|^\rho v = f_2, \quad \text{em } Q, \\ z'' + Az - \Delta z' + (|u|^{\rho+2} + |v|^{\rho+2}) |z|^\rho z = f_3 \end{cases}$$

with,  $Q = (0, T) \times \Omega$  where  $(0, T)$  is a real line,  $\Omega$  an open, limited and regular of  $\mathbb{R}^3$ , and  $\Delta = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$  is the Laplacian operator.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Notações e Resultados</b>	<b>1</b>
1.1 Notações . . . . .	1
1.2 Condições Técnicas. . . . .	2
1.3 Distribuições Escalares. . . . .	6
1.3.1 Convergência e derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$ . . . . .	9
1.4 Distribuições Vetoriais . . . . .	10
1.5 Propriedades Elementares dos Espaços de Sobolev . . . . .	11
1.5.1 Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ , $1 \leq p \leq \infty$ . . . . .	11
1.5.2 Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ . . . . .	12
1.6 Resultados sobre convergência . . . . .	13
1.7 Desigualdades . . . . .	16
1.8 Resultados de Existência . . . . .	16
1.9 Resultados de Imersão . . . . .	20
<b>2 Existência de Soluções</b>	<b>25</b>
2.1 Conceito de Solução Fraca . . . . .	25
2.2 Teorema de Existência . . . . .	27
2.3 Problema Aproximado . . . . .	28

2.4	Existência de Soluções do Problema Aproximado . . . . .	33
2.5	Estimativas a Priori . . . . .	41
2.5.1	Estimativas I . . . . .	41
2.5.2	Estimativas II . . . . .	49
2.6	Passagem ao limite . . . . .	55
2.7	Condições Iniciais . . . . .	65
2.8	$Au(t) = \chi(t)$ , $Av(t) = \eta(t)$ e $Az(t) = \zeta(t)$ . . . . .	69
<b>3</b>	<b>Propriedades do Operador <math>p</math>-Laplaciano <math>A</math>.</b>	<b>81</b>
3.1	Definições e Resultados . . . . .	81
3.2	Propriedades de $A$ . . . . .	86
3.2.1	$A$ é hemicontínuo . . . . .	86
3.2.2	$A$ é monótono . . . . .	87
3.2.3	Sobre a dualidade $\langle Au, u \rangle$ . . . . .	88
3.2.4	$A$ é coercivo . . . . .	88
3.2.5	$A$ é limitado . . . . .	88
3.2.6	Sobre a dualidade $\langle Au, u' \rangle$ . . . . .	89

# Introdução

No ano de 1935, o Físico Japonês Yukawa descreveu teoricamente os mésons, como sendo partículas elementares geradas por colisões de outras partículas que possuem alta energia. A denominação "méson", é dada pelo fato da sua massa estar compreendida entre as massas do próton e do elétron. Mais tarde, em 1948, César Lattes descobriu um tipo especial de méson, denominado de méson-pi, o que rendeu ao diretor de seu grupo de pesquisa o prêmio Nobel da Física. Prêmio esse que seria de César Lattes se não fosse um termo (derrubado na década de 50) que garantia o prêmio ao diretor do centro de pesquisas, e não ao real descobridor.

Em 1965 Segal.I [19], propôs o seguinte sistema de equações diferenciais, não lineares de Klein-Gordon,

$$\begin{cases} Bu + \alpha^2 u + g^2 v^2 u = 0 \\ Bv + \beta^2 v + h^2 u^2 v = 0 \end{cases} \quad (1)$$

onde  $B = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta$  é o operador D'Alembertiano,  $u$  e  $v$  são campos escalares de massas  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente, sendo  $g$  e  $h$  constantes de integração.

O sistema proposto em (1) acima, é um modelo para descrever o movimento de mésons em um campo mesônico, que é um campo análogo ao eletromagnético, mas de natureza diferente.

Em 1985 L.A. Medeiros e Milla Miranda [14] estudaram a seguinte generalização de (1) :

$$\begin{cases} Bu + |v|^{\rho+2} |u|^\rho u = f_1 \\ Bv + |u|^{\rho+2} |v|^\rho v = f_2 \end{cases} . \quad (2)$$

Sendo  $\rho$  um número real,  $\rho > -1$ , e  $f_1, f_2$  funções dadas. Neste trabalho os autores provam a existência de soluções para (2) com condições iniciais e condições de fronteira de Dirichlet homogêneas, para qualquer dimensão  $n$ , e unicidade para qualquer  $n \leq 3$ .

Nesta dissertação, estudamos a existência de soluções fracas no  $\mathbb{R}^3$ , para o sistema de equações acopladas não lineares:

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + Au - \Delta u' + (|v|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |u|^\rho u = f_1 \\ v'' + Av - \Delta v' + (|u|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |v|^\rho v = f_2 \\ z'' + Az - \Delta z' + (|u|^{\rho+2} + |v|^{\rho+2}) |z|^\rho z = f_3 \\ u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad z(0) = z_0 \\ u'(0) = u_1, \quad v'(0) = v_1, \quad z'(0) = z_1 \end{array} \right. \quad (3)$$

, que foi um artigo desenvolvido por CASTRO N.N.O, em [5], onde  $p \in \mathbb{R}$ ,  $2 < p < 3$ ,  $-1 \leq \rho \leq \frac{4(p-2)}{p+4}$ , sendo  $f_1, f_2, f_3 \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $A$  é o operador pseudo-Laplaciano e

$$\Delta = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Para estudar o problema acima, dividimos essa dissertação em três capítulos:

- No Capítulo 1, daremos algumas definições e resultados, que nos serão de grande utilidade para o desenvolvimento deste trabalho, com o objetivo, de embasar e tornar auto-suficiente a leitura.

- No Capítulo 2, enunciaremos e provaremos o Teorema de Existência de Soluções Fracas para o Sistema acoplado acima, em (3), para isso, usaremos o método de Faedo-Galerkin.

- No Capítulo 3, temos o Apêndice, em que se encontram algumas propriedades do operador pseudo-Laplaciano, com suas respectivas demonstrações.

No final temos uma lista de referências bibliograficas, que nos serviu de apoio, e que foi de extrema relevância no que se diz respeito, ao desenvolvimento desse trabalho.

# Capítulo 1

## Notações e Resultados

Neste capítulo serão fixadas notações, definições, e certos resultados sobre Teoria das Distribuições e Análise Funcional, bem como, alguns resultados fundamentais usados substancialmente no Capítulo 2. A maioria destes resultados não serão demonstrados, mas indicaremos nas referências bibliográficas onde os mesmos se encontram.

### 1.1 Notações

- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , denota um aberto limitado bem regular;
- $Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $T > 0$ , denota um cilindro em  $\mathbb{R}^4$ , com base  $\Omega$  e altura  $T$ ;
- $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ , denota a fronteira lateral de  $Q$ ;
- $\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ , é o operador Laplaciano;
- $A$  denota o operador pseudo-Laplaciano definido por

$$A : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$$

$$u \mapsto Au,$$

onde

$$Au = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \quad p > 2.$$

No capítulo 3 provamos que  $A$  tem as seguintes propriedades:

- $A$  é monótono, hemicontínuo, coercivo e limitado;

- $\langle Au, u \rangle_{W^{-1,p'}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)} = \|u(t)\|_0^p$ ;
- $\langle Au(t), u'(t) \rangle_{W^{-1,p'}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)} = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u\|_0^p$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} = ';$   $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = ''$
- $\|Au\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C \|u\|_0^{p-1}$ .

Temos ainda,

- $\| \cdot \|_0$ , norma em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ;
- $\| \cdot \|_m$ , norma euclidiana em  $\mathbb{R}^m$ ;
- $\| \cdot \|_{2m}$ , norma euclidiana em  $\mathbb{R}^{2m}$ ;
- $\| \cdot \|$ ,  $(( \cdot ))$ , norma e produto interno, respectivamente, em  $H_0^1(\Omega)$ ;
- $| \cdot |$ ,  $( \cdot )$ , norma e produto interno, respectivamente, em  $L^2(\Omega)$ ;
- $| \cdot |$ , poderá também denotar valor absoluto quando necessário;
- $V'$  denota o espaço dual topológico do espaço linear  $V$ ;
- $p'$  denota o expoente conjugado de  $p$ , isto é,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ;
- $V \hookrightarrow H$  e  $V \xhookrightarrow{c} H$  denotam, imersão contínua e densa, e imersão compacta,

respectivamente, de  $V$  em  $H$ ;

- $C$  representa uma constante arbitrária, não negativa, que no decurso do texto poderá representar valores distintos.

## 1.2 Condições Técnicas.

**Lema 1.1** *Seja  $p \in \mathbb{R}$ , onde  $2 < p < 3$ . Se  $\rho$  é um número real satisfazendo:*

$$-1 < \rho \leq \frac{4(p-2)}{4+p}, \text{ então, } \rho < \frac{4}{3p-2}.$$

**Prova** : Como  $2 < p < 3$ , temos que  $np > 0$  e  $p - 3 < 0$ . Logo,

$$p(p-3) < 0 \Leftrightarrow 3p^2 - 9p < 0.$$

Desta forma,

$$3p^2 - 8p < p.$$

Assim,

$$(p-2)(3p-2) < 4+p.$$

Dividindo a desigualdade anterior por:  $(3p - 2)(4 + p) > 0$ , obtemos:

$$\frac{p - 2}{4 + p} < \frac{1}{3p - 2}.$$

O que acarreta em:

$$\frac{4p - 8}{4 + p} < \frac{4}{3p - 2}$$

e

$$\rho \leq \frac{4p - 8}{4 + p} \Rightarrow \rho < \frac{4}{3p - 2}.$$

■

**Lema 1.2** *Se  $2 < p < 3$ , então  $\frac{4}{3p - 2} < \frac{1}{3 - p}$ .*

**Prova** : De  $2 < p < 3$ , segue que:

$$7 \cdot 2 < p \cdot 7 \Rightarrow 4 \cdot 3 + 2 < p(4 + 3)$$

Multiplicando a desigualdade por  $3p > 0$ , temos:

$$4 \cdot 3^2 p + 2 \cdot 3p < 4 \cdot 3p^2 + 3^2 p^2$$

Daí ,

$$4 \cdot 3^2 p - 4 \cdot 3p^2 < 3^2 p^2 - 2 \cdot 3p.$$

Ou seja,

$$4 \cdot 3p \cdot (3 - p) < 3p \cdot (3p - 2).$$

Consequentemente,

$$\frac{4}{3p - 2} < \frac{1}{3 - p}.$$

■

**Lema 1.3** *Se  $\theta$  e  $\delta$  são números reais, satisfazendo:*

$$\theta = \frac{6p(\rho + 2)}{(3p - 2)(\rho + 2) + 6p(\rho + 1)} \quad e \quad \delta = \frac{6p(\rho + 2)}{(3p + 2)(\rho + 2) - 6p(\rho + 1)},$$

onde  $n$ ,  $p$  e  $\delta$  são definidos anteriormente, então:

$$(i) \quad 1 < \theta < \frac{\rho + 2}{\rho + 1}$$

$$(ii) \quad 1 < \delta < \frac{3p}{3 - p}$$

$$(iii) \quad \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\delta} = 1$$

**Prova** : Do Lema 1, temos  $\rho < \frac{4}{3p - 2}$ . De onde segue,  $\rho + 2 < \frac{4}{3p - 2} + 2 \Rightarrow \rho + 2 < \frac{6p}{3p - 2}$ .

$$(i) \text{ Sendo } \theta = \frac{6p(\rho + 2)}{(3p - 2)(\rho + 2) + 6p(\rho + 1)}, \text{ segue que,}$$

$$\theta > \frac{6p(\rho + 2)}{(3p - 2)\frac{6p}{3p - 2} + 6p(\rho + 1)} \Rightarrow \theta > \frac{6p(\rho + 2)}{6p(\rho + 2)} = 1.$$

Logo  $\theta > 1$ .

Por outro lado, como  $6p > 0$ , podemos escrever  $\theta$  da seguinte maneira:

$$\theta = \frac{(\rho + 2)}{\frac{(3p - 2)(\rho + 2)}{6p} + (\rho + 1)} < \frac{(\rho + 2)}{(\rho + 1)}.$$

Portanto,  $1 < \theta < \frac{\rho + 2}{\rho + 1}$ .

$$(ii) \text{ Se, } \delta = \frac{6p(\rho + 2)}{(3p + 2)(\rho + 2) - 6p(\rho + 1)}, \text{ então, } \delta > \frac{6p(\rho + 2)}{(3p + 2)(\rho + 2)} = \frac{6p}{(3p + 2)}.$$

Como  $2 < p < 3$ , temos que,  $3p > 2$ .

Assim,

$$6p - 3p > 2 \Rightarrow 2 + 3p \Rightarrow \frac{6p}{2 + 3p} > 1 \Rightarrow \delta > 1.$$

Por outro lado, temos:

$$\delta < \frac{3p}{3 - p} \Leftrightarrow \frac{6p(\rho + 2)}{(3p + 2)(\rho + 2) - 6p(\rho + 1)} < \frac{3p}{3 - p} \Leftrightarrow \frac{6p(\rho + 2)}{(3p + 2)(\rho + 2) - 6p(\rho + 1)} < 1$$

$$\Leftrightarrow 2(3 - p)(\rho + 2) < (3p + 2)(\rho + 2) - 6p(\rho + 1) \Leftrightarrow 6\rho + 12 - 2p\rho - 4p < -3p\rho + 2\rho + 4$$

$$\Leftrightarrow 6\rho + 3p\rho - 2\rho - 2p\rho < 4 + 4p - 12 \Leftrightarrow \rho(6 - 2 - 2p + 3p) < 4(1 + p - 3)$$

$$\Leftrightarrow \rho < \frac{4(p - 2)}{2(2 - p) + 3p} = \frac{4p - 8}{4 + p},$$

o que é verdade pelo Lema 1.

Assim,

$$1 < \delta < \frac{3p}{3-p}.$$

(iii) Temos que:

$$\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\delta} = \frac{(3p-2)(\rho+2) + 6p(\rho+1)}{6p(\rho+2)} + \frac{(3p+2)(\rho+2) - 6p(\rho+1)}{6p(\rho+2)}.$$

Logo,

$$\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\delta} = \frac{(\rho+2)(3p-2+3p+2)}{6p(\rho+2)} = \frac{6p(\rho+2)}{6p(\rho+2)} = 1$$

Desta forma,

$$\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\delta} = 1.$$

■

**Lema 1.4** *Sejam,  $\alpha = \frac{(\rho+2)}{(\rho+1)\theta}$  e  $\beta = \frac{(\rho+2)}{(\rho+2) - (\rho+1)\theta}$ . Então, temos:*

(i)  $\alpha > 1, \beta > 1$

(ii)  $\theta\beta = \frac{6p}{3p-2}$

(iii)  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$

**Prova :**

Dos ítems anteriores sabemos que :  $p \in \mathbb{R}, 2 < p < 3, -1 < \rho < \frac{4}{3p-2},$

$$\theta = \frac{6p(\rho+2)}{(3p-2)(\rho+2) + 6p(\rho+1)} \quad \text{e} \quad 1 < \theta < \frac{\rho+2}{\rho+1}.$$

Então:

(i)

$$\alpha = \frac{(\rho+2)}{(\rho+1)\theta} > \frac{(\rho+2)}{(\rho+1) \cdot \frac{(\rho+2)}{(\rho+1)}} = 1 \Rightarrow \alpha > 1. \quad \beta = \frac{(\rho+2)}{(\rho+2) - (\rho+1)\theta} > \frac{\rho+2}{\rho+2} = 1 \Rightarrow \beta > 1.$$

(ii)

$$\theta\beta = \frac{\theta(\rho+2)}{(\rho+2) - (\rho+1)\theta} = \frac{(\rho+2)}{\frac{(\rho+2)}{\theta} - \frac{(3p-2)(\rho+2) + 6p(\rho+1)}{6p}}.$$

Mas,

$$\frac{(\rho + 2)}{\theta} = \frac{(3p - 2)(\rho + 2) + 6p(\rho + 1)(\rho + 2)}{6p(\rho + 2)} = \frac{(3p - 2)(\rho + 2) + 6p(\rho + 1)}{6p}.$$

Assim,

$$\theta\beta = \frac{(\rho + 2)}{\frac{(3p - 2)(\rho + 2) + 6p(\rho + 1)}{6p} - (\rho + 1)} = \frac{6p(\rho + 2)}{(3p - 2)(\rho + 2)}.$$

Logo,

$$\theta\beta = \frac{6p}{3p - 2}$$

(iii)

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{(\rho + 1)\theta}{(\rho + 2)} + \frac{(\rho + 2) - (\rho + 1)\theta}{(\rho + 2)} = \frac{(\rho + 2)}{(\rho + 2)} = 1.$$

Portanto,

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

■

### 1.3 Distribuições Escalares.

Consideremos  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  um elemento genérico do  $\mathbb{R}^n$ . Uma  $n$ -upla de inteiros não negativos  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  é denominada de multi-índice e sua ordem é definida por  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

Representa-se por  $D^\alpha$  o operador de derivação de ordem  $|\alpha|$ , denotado por:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para  $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ , define-se  $D^0 u = u$ , para toda função  $u$ .

Dados  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e uma função contínua  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , define-se suporte de  $u$ , e denota-se por  $\text{supp}(u)$ , o fecho em  $\Omega$  do conjunto  $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$ . Assim,  $\text{supp}(u)$  é um subconjunto fechado de  $\Omega$ . Segue diretamente da definição que o suporte é o menor fechado fora do qual  $u$  se anula.

Valem as seguintes propriedades:

a)  $\text{supp}(u + v) \subset \text{supp } u + \text{supp } v$

b)  $\text{supp}(uv) \subset \text{supp } u \cap \text{supp } v$

c)  $\text{supp}(\lambda v) = \text{supp } v, \lambda \neq 0$ .

Por  $C_0^\infty(\Omega)$  denota-se o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis, definidas e com suporte compacto, em  $\Omega$ . Logo após o exemplo abaixo introduziremos uma noção de convergência em  $C_0^\infty(\Omega)$ , a qual definirá a topologia de  $C_0^\infty(\Omega)$ , suficiente para nosso estudo.

Um exemplo clássico de uma função de  $C_0^\infty(\Omega)$  é dado por:

**Exemplo 1.1** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto tal que  $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\} \subset \subset \Omega$ .*

*Consideremos  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}, & \text{se } \|x\| < 1 \\ 0, & \text{se } \|x\| \geq 1 \end{cases}$ ,*

onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$  é a norma euclidiana de  $x$ . Temos que  $u \in C^\infty(\Omega)$  e  $\text{supp}(f) = \overline{B_1(0)}$  é compacto, isto é  $u \in C_0^\infty(\Omega)$ .

**Definição 1.1** *Diz-se que uma sequência  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $C_0^\infty(\Omega)$  converge para  $\varphi$ , em  $C_0^\infty(\Omega)$ , quando forem satisfeitas as seguintes condições:*

(i) Existe um compacto  $K$ , de  $\Omega$ , tal que  $\text{supp}(\varphi) \subset K$  e  $\text{supp}(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$ ,

(ii)  $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$  uniformemente em  $K$ , para todo multi-índice  $\alpha$ .

**Observação 1.1** *É possível dotar  $C_0^\infty(\Omega)$  com uma métrica de forma que a noção de convergência nessa métrica coincida com a dada pela Definição 1.1.*

O espaço  $C_0^\infty(\Omega)$ , munido da convergência acima definida, será denotado por  $\mathcal{D}(\Omega)$  e denominado de Espaço das Funções Testes sobre  $\Omega$ .

Notemos que, se  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  em  $\mathcal{D}(\Omega)$ , então  $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$  uniformemente em  $\Omega, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ .

Uma distribuição (escalar) sobre  $\Omega$  é todo funcional linear contínuo sobre  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Mais precisamente, uma distribuição sobre  $\Omega$  é um funcional  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo as seguintes condições:

$$(i) \quad T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

(ii)  $T$  é contínua, isto é, se  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $\varphi$  em  $\mathcal{D}(\Omega)$ , então  $(T(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $T(\varphi)$ , em  $\mathbb{R}$ .

É comum denotar o valor da distribuição  $T$  em  $\varphi$  por  $\langle T, \varphi \rangle$ .

O conjunto de todas as distribuições sobre  $\Omega$  com as operações usuais é um espaço vetorial, o qual representa-se por  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Os seguintes exemplos de distribuições escalares desempenham um papel fundamental no estudo da teoria das distribuições.

**Exemplo 1.2** *Seja  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ , isto é,  $u$  é uma função de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}$ , localmente integrável, ou seja,  $u$  é integrável a Lebesgue sobre todo compacto  $K \subset \Omega$ . O funcional  $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx,$$

*é uma distribuição sobre  $\Omega$  univocamente determinada por  $u$  (VER [12]). Por esta razão, identifica-se  $u$  à distribuição  $T_u$  por ela definida e, desta forma,  $L^1_{loc}(\Omega)$  será identificado a uma parte (própria) de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Observamos que se  $T_u = T_v$ , então  $u = v$ , quase sempre. Logo  $T_u$  é univocamente determinada por  $u$ .*

**Exemplo 1.3** *Consideremos  $0 \in \Omega$  e o funcional  $\delta_0 : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por*

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

*Em [12], vê-se que  $\delta_0$  é uma distribuição sobre  $\Omega$ . Além disso, mostra-se que  $\delta_0$  não é definido por uma função de  $L^1_{loc}(\Omega)$ .*

### 1.3.1 Convergência e derivação em $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**Definição 1.2** Diz-se que uma sequência  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $\mathcal{D}'(\Omega)$  converge para  $T$  em  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , quando a sequência numérica  $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$  convergir para  $\langle T, \varphi \rangle$  em  $\mathbb{R}$ , para toda  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

Com essa noção de convergência,  $\mathcal{D}'(\Omega)$  torna-se um espaço vetorial topológico, e temos a seguinte cadeia de imersões contínuas:

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega), \quad 1 < p < \infty.$$

Além disso, necessitamos do conceito de derivada distribucional, uma vez que a utilizamos no estudo dos espaços de Sobolev, como veremos a seguir.

O que motivou a formulação de derivada fraca e conseqüentemente a derivada distribucional, foi a fórmula de integração por partes do Cálculo.

De fato, em dimensão 1, temos a fórmula de integração:

$$\int_a^b u'(x)\varphi(x)dx = u(b)\varphi(b) - u(a)\varphi(a) - \int_a^b u(x)\varphi'(x)dx,$$

e quando  $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$ , temos:

$$\int_a^b u'(x)\varphi(x)dx = - \int_a^b u(x)\varphi'(x)dx.$$

Motivado pela igualdade acima, Sobolev definiu a derivada fraca de uma função  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ , como sendo uma função  $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ , caso exista, tal que:

$$\int_a^b u'(x)\varphi(x)dx = \int_a^b v(x)\varphi'(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a, b)$$

Este conceito foi generalizado (por Schwartz) para distribuições quaisquer em  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , da seguinte maneira:

Dados  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , definimos a derivada distribucional de ordem  $\alpha$  de  $T$ , como sendo a forma linear  $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \mathcal{D}^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Verifica-se que  $\mathcal{D}^\alpha T$  é uma distribuição sobre  $\Omega$ , onde  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , denominada de derivada de ordem  $|\alpha|$  no sentido das distribuições.

De fato, vê-se facilmente que  $\mathcal{D}^\alpha T$  é linear. Agora, para a continuidade, consideremos  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergindo para  $\varphi$  em  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Assim,  $|\langle \mathcal{D}^\alpha T, \varphi_n \rangle - \langle \mathcal{D}^\alpha T, \varphi \rangle| \leq |\langle T, D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi \rangle| \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

## 1.4 Distribuições Vetoriais

Sejam  $X$  um espaço de Banach,  $1 \leq p \leq \infty$  e  $T > 0$  um número real, com  $(0, T)$  um intervalo aberto da reta.

Representamos por  $L^p(0, T; X)$  o espaço das funções  $u : (0, T) \rightarrow X$  mensuráveis tais que  $\|u(t)\|_X \in L^p(0, T)$ . Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $L^p(0, T; X)$  é um espaço de Banach com a norma:

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

No caso  $p = \infty$ , teremos que  $L^\infty(0, T; X)$  será um espaço de Banach com a norma definida abaixo:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(0, T; X)} &= \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|u(t)\|_X \\ &= \inf \{ \|u(t)\|_X \leq c \text{ q.s. em } [0, T] \}. \end{aligned}$$

Agora, fixemos  $u \in L^p(0, T; X)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , e definamos a função

$$T_u : D(0, T) \rightarrow X,$$

por  $\langle T_u, \varphi \rangle = \int_0^T u(s) \varphi(s) ds, \forall \varphi \in D(0, T)$ , onde a integral é entendida como integral de Bochner em  $X$ .

Prova-se que  $T_u$  é linear e contínua (VER [12]).

Diz-se então que  $T_u$  é uma distribuição vetorial sobre  $(0, T)$  a valores em  $X$ , definida por uma função  $u \in L^p(0, T; X)$ , e escreve-se:

$$T_u \in L(D(0, T), X).$$

O espaço  $L(D(0, T), X)$  é dito espaço vetorial das distribuições sobre  $(0, T)$  à valores em  $X$ , e contém em particular as distribuições vetoriais definidas pelas funções de  $L^p(D(0, T), X)$ . Na prática, denotamos  $L(D(0, T), X) = D'(0, T; X)$ .

## 1.5 Propriedades Elementares dos Espaços de Sobolev

### 1.5.1 Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ , $1 \leq p \leq \infty$ .

Sejam  $\Omega$  um aberto do  $\mathbb{R}^n$ ,  $p$  um número real e  $m$  um número inteiro positivo, por  $W^{m,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , representa-se o espaço de Sobolev de ordem  $m$  sobre  $\Omega$ , isto é, o espaço vetorial das classes de funções  $u \in L^p(\Omega)$  tais que  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ , para todo multi-índice  $\alpha$ , com  $|\alpha| \leq m$ , ou seja,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}.$$

Munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|, \text{ quando } p = \infty,$$

$W^{m,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach, (VER [6]).

**Observação 1.2** Quando  $p = 2$ , o espaço  $W^{m,2}(\Omega)$  é denotado por  $H^m(\Omega)$ , o qual munido do produto interno

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

é um espaço de Hilbert.

**Observação 1.3** Quando  $p = 2$  e  $X$  é um espaço de Hilbert, o espaço  $L^2(0, T; X)$  é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Consideremos o espaço  $L^p(0, T; X)$ ,  $1 < p < \infty$ , com  $X$  sendo Hilbert separável, então podemos fazer a seguinte identificação:

$$[L^p(0, T; X)]' \equiv L^q(0, T; X'),$$

onde  $(1/p) + (1/q) = 1$ . Quando  $p = 1$ , faremos a identificação

$$[L^1(0, T; X)]' \equiv L^\infty(0, T; X').$$

### 1.5.2 Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ .

Notemos que o espaço das funções testes,  $C_0^\infty(\Omega)$ , é denso em  $L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$ , VER [6]. Porém, não é verdade que  $C_0^\infty(\Omega)$  seja denso em  $W^{m,p}(\Omega)$ ,  $m \geq 1$  inteiro.

Denotamos por  $W_0^{m,p}(\Omega)$ , o fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  em  $W^{m,p}(\Omega)$ , isto é,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Como consequência da desigualdade de Poincaré, que veremos mais a frente, a expressão

$$\|u\|_0 = \left( \sum_{0 < |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

define uma norma sobre  $W_0^{m,p}(\Omega)$ , dita norma própria de  $W_0^{m,p}(\Omega)$ .

Uma atenção especial deve ser dada ao espaço dual de  $W_0^{m,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , denotado por  $W^{-m,q}(\Omega)$ , onde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , o qual é constituído pelos funcionais lineares contínuos,

$$T : W_0^{m,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Demonstra-se em [6] que uma distribuição  $T$  de  $D'(\Omega)$ , está em  $W^{-m,q}(\Omega)$  se, e somente se, existem funções  $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ ,  $|\alpha| \leq m$ , tais que:

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha.$$

Em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , espaço que será usado com frequência neste trabalho, temos

$$\|u\|_0 = \left( \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

e

$$\|u\|_{1,p} = \left( \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p + \|u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Além disso pela desigualdade de Poincaré, temos:

$$\|u\|_0 \leq \|u\|_{1,p} \leq C \|u\|_0, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Existem outras caracterizações para tal espaço, ver por exemplo em [6].

## 1.6 Resultados sobre convergência

**Definição 1.3** (*Convergência Fraca*) *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $X'$  o seu espaço dual. Uma sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , em  $X$ , converge fracamente para  $x$ , em  $X$ , se:*

$$f(x_n) \rightarrow f(x), \text{ para todo } f \text{ em } X'.$$

Para denotar convergência fraca, escrevemos:

$$x_n \rightharpoonup x, \text{ em } X, \text{ ou simplesmente } x_n \rightharpoonup x.$$

**Proposição 1.1** *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $x_n$  uma sequência em  $X$ , fracamente convergente à  $x$  em  $X$ . Então  $x$  é único.*

**Prova** : Com efeito, suponha que  $x_n \rightharpoonup x$  e  $x_n \rightharpoonup y$  em  $X$ . Então:  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  e  $f(x_n) \rightarrow f(y)$ ,  $\forall f \in X'$ . Pela unicidade do limite de sequências em  $\mathbb{R}$ , segue-se que  $f(x) = f(y)$ ,  $\forall f \in X'$ . Pelo Teorema de Hahn-Banach, se  $X$  é um espaço de Banach, tal que, dados  $x, y \in X$ , quaisquer, tenha-se  $f(x) = f(y)$ ,  $\forall f \in X'$ , então  $x = y$ . Como estamos nestas condições, segue que  $x = y$ , resultando na unicidade do limite fraco. ■

**Proposição 1.2** : *Se  $x_n \rightharpoonup x$  em  $X$ , então  $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Prova** : VER [8]. ■

**Definição 1.4** : (*Convergência Fraca \**) Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $X'$  o seu espaço dual. Diremos que uma sequência  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge à  $f$ , fraco \*, no espaço  $X'$ , se:

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Para denotar convergência fraco \*, escreveremos:

$$f_n \xrightarrow{*} f, \text{ em } X', \text{ ou simplesmente, } f_n \xrightarrow{*} f.$$

**Proposição 1.3** : Se  $f_n \xrightarrow{*} f$  em  $X'$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , então o limite fraco \* é único.

**Prova** : VER [18]. ■

**Teorema 1.1** (*Banach – Alaoglu – Bourbaki*) Sejam  $X$  um espaço de Banach separável e  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência fortemente limitada em  $X'$ . Então  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possui uma subsequência  $(f_{n_k})_{n \in \mathbb{N}}$  que converge fraco \*, isto é,  $f_{n_k} \xrightarrow{*} f$  em  $X'$ .

**Prova** : VER [8]. ■

**Proposição 1.4** : Seja  $X$  um espaço de Banach reflexivo e suponha que  $f_n \xrightarrow{*} f$ , em  $X'$  com  $n \in \mathbb{N}$ . Então,  $f_n \rightharpoonup f$ , em  $X'$ .

**Prova** : VER [4]. ■

**Teorema 1.2** (*Kakutani*) Seja  $X$  um espaço de Banach.  $X$  é reflexivo se, e somente se, toda sequência  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  fortemente limitada em  $X$  possui uma subsequência  $(x_{n_k})$  que converge fraco, isto é,  $x_{n_k} \rightharpoonup x$  em  $X$ .

**Prova** : VER [8]. ■

**Teorema 1.3** (Aubin – Lions) Sejam  $X, B, Y$  espaços de Banach,  $X$  é reflexivo e  $X \xhookrightarrow{c} B \hookrightarrow Y$ . Suponha que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seja uma sequência uniformemente limitada em  $L^p(0, T; X)$  tal que  $(\frac{d}{dt}u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seja limitada em  $L^p(0, T; Y)$  para algum  $p > 1$ . Então existe uma subsequência de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que converge fortemente em  $L^2(0, T; B)$ .

**Prova** : VER [4]. ■

**Lema 1.5** (Lions) Sejam  $\Omega$  um aberto limitado do  $\mathbb{R}^n$ ,  $g$  e  $g_j$  funções de  $L^q(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , tais que

$$\|g_j\|_{L^q(\Omega)} \leq C, \quad \forall j \text{ e } g_j \rightarrow g, \text{ q.s em } \Omega.$$

Então,

$$g_j \rightharpoonup g, \quad \text{em } L^q(\Omega).$$

**Prova** : VER [4]. ■

**Teorema 1.4** (Convergência Dominada de Lebesgue) Seja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de funções em  $L^1(\Omega)$ , tal que:

- a)  $f_n \rightarrow f$  quase sempre em  $\Omega$ ;
- b) existe  $g \in L^1(\Omega)$  tal que  $|f_n(x)| \leq g(x)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , quase sempre em  $\Omega$ .

Então,

$$f \in L^1(\Omega) \text{ e } \int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

**Prova** : VER [11]. ■

**Teorema 1.5** (Lema de Fatou) Seja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de funções mensuráveis não negativas tais que:

$$f_n(t) \rightarrow f(t), \quad \text{em } X, \text{ q.s em } \Omega,$$

e suponha que existe uma constante positiva  $C$  tal que  $\int_{\Omega} \|f_n(t)\| dt \leq C, \forall n$ .

Então,

$$\int_{\Omega} (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

**Prova** : VER [11]. ■

## 1.7 Desigualdades

- *Desigualdade de Poincaré.*

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , um subconjunto aberto e limitado do  $\mathbb{R}^n$ . Então existe uma constante  $C = C(\Omega, p) > 0$  tal que,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_0, \quad \forall u \in W_0^{m,p}(\Omega).$$

**Prova** : VER [4]. ■

- *Desigualdade de Young.*

Sejam  $p > 1, q > 1$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a \geq 0 \text{ e } b \geq 0.$$

**Prova** : VER [8]. ■

- *Desigualdade de Hölder.*

Sejam  $f \in L^p(\Omega)$  e  $g \in L^q(\Omega)$ , com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , e  $1 \leq p \leq \infty$ . Então  $f \cdot g \in L^1(\Omega)$  e

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

**Prova** : VER [8]. ■

## 1.8 Resultados de Existência

**Teorema 1.6** *Sejam  $V$  e  $H$  dois Espaços de Hilbert e suponhamos que  $V \subset H$  e  $V \xrightarrow{c} H$ . Então existe uma base espectral,  $\{w_j\}_j$  de  $V$ , formando um sistema ortonormal completo em  $H$ .*

**Prova** : VER [10]. ■

**Lema 1.6** (*Browder – B.An Ton*) *Seja  $W$  um espaço de Banach, separável e reflexivo. Existe um espaço de Hilbert  $H$ , separável, tal que  $H \subset W$ , com imersão contínua e densa.*

**Prova** : VER [3]. ■

**Teorema 1.7** (*Representação de Riesz*) *Sejam  $1 < p < \infty$  e  $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ .*

Então, existe uma única  $u \in L^{p'}(\Omega)$ , tal que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f dx, \quad \forall f \in L^p(\Omega),$$

e  $\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}$ , onde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

**Prova** : VER [8]. ■

**Teorema 1.8** *Todo espaço de Hilbert separável possui uma base ortonormal completa.*

**Prova** : VER [9]. ■

**Teorema 1.9** *Se  $H$  é um espaço de Hilbert Separável, então todo conjunto ortonormal completo em  $H$  é enumerável.*

**Prova** : VER [9]. ■

• Seja  $D$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  cujos elementos serão denotados com  $(t, x)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  e seja  $f : D \mapsto \mathbb{R}^n$  uma função não necessariamente contínua. O problema é encontrar uma função absolutamente contínua  $x(t)$  definida em algum intervalo  $I$  da reta tal que  $(t, x(t)) \in D$ , para todo  $t \in I$  e

$$x' = f(t, x) \quad \text{para quase todo } t \text{ em } I. \quad (1)$$

Se uma tal função  $x(t)$  e um tal intervalo  $I$  existem, então diz-se que  $x(t)$  é uma solução de (1) sobre  $I$ . Se  $(t_0, x_0) \in D$ , associado a (1) e a  $(t_0, x_0)$ , se tem o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2)$$

diremos que a solução  $x(t)$  de (1) sobre  $I$ , é tal que  $t_0 \in I$  e  $x(t_0) = x_0$ .

**Definição 1.5** (*Condições de Carathéodory*) Sejam  $D$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Então  $f$  é dita satisfazer as condições de Carathéodory se:

- a)  $f(t, x)$  é mensurável em  $t$  para cada  $x$  fixo;
- b)  $f(t, x)$  é contínua  $x$  em para cada  $t$  fixo;
- c) para cada compacto  $U$  em  $D$ , existe uma função real integrável  $m_U(t)$  tal que:

$$|f(t, x)| \leq m_U(t), \quad \forall (t, x) \in U.$$

**Teorema 1.10** (*Carathéodory*) Seja  $f: R \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfazendo as condições de Carathéodory sobre  $R$ . Então existe uma solução  $x(t)$  de (2) sobre algum intervalo  $|t - t_0| \leq \beta$ ,  $\beta > 0$ . Onde  $R$  é o retângulo definido por:

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}, \text{ com } a > 0, \text{ e } b > 0.$$

**Prova** : VER [12]. ■

**Corolário 1.1** Sejam  $D$  um aberto do  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $f$  satisfazendo às condições de Carathéodory sobre  $D$ . Então o problema acima citado (2), tem solução para qualquer  $(t_0, x_0) \in D$ .

**Prova** : VER [12]. ■

**Corolário 1.2** Seja  $D$  aberto limitado conexo em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $f$  satisfaz as duas primeiras condições de Carathéodory sobre  $D$  e existe uma função integrável  $m(t)$  tal que  $|f(t, x)| \leq m(t)$ ,  $\forall (t, x) \in D$ . Seja  $\varphi$  uma solução de (1) acima, sobre o intervalo aberto  $(a, b)$ , então:

- i) existem  $\varphi(a + 0)$ ,  $\varphi(b - 0)$
- ii) se  $(b, \varphi(b - 0)) \in D$ , então  $\varphi$  pode ser prolongada até  $(a, b + \delta]$  para algum  $\delta > 0$ .

Análogo o resultado para  $a$ .

iii)  $\varphi(t)$  pode ser prolongada até um intervalo  $(\gamma, \omega)$ , tal que  $(\gamma, \varphi(\gamma(\omega - 0))) \in \partial D$  ( $\partial D$  a fronteira de  $D$ ).

iv) se  $f$  pode estender-se a  $\bar{D}$  sem que ele perca suas propriedades, então  $\varphi(t)$  pode ser prolongada até um intervalo  $[\gamma, \omega]$  tal que  $(\gamma, \varphi(\gamma + 0)), (\omega, \varphi(\omega - 0)) \in \partial D$ .

**Prova** : VER [12]. ■

**Corolário 1.3** *Seja  $D=[0,T] \times B$ ,  $T$  finito  $>0$ ,  $B=\{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$ ,  $b >0$  e  $f$  nas condições do Corolário anterior. Seja  $\varphi(t)$  uma solução de*

$$\begin{aligned}x' &= f(t, x) \\x(0) &= x_0, \quad |x_0| \leq b.\end{aligned}$$

*Suponhamos que em qualquer intervalo  $I$  onde  $\varphi(t)$  está definida, se tenha  $|\varphi(t)| \leq M$ ,  $\forall t \in I$ ,  $M$  independente de  $I$  e  $M < b$ . Então  $\varphi$  tem um prolongamento até  $[0, T]$ .*

**Prova** : VER [12]. ■

**Teorema 1.11** *(Hellinger – Toeplitz) Se um operador linear  $T$  é definido sobre todo um espaço de Hilbert  $H$  e satisfaz  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ , para todo  $x, y \in H$ , então  $T$  é limitado.*

**Prova** : VER [9]. ■

**Teorema 1.12** *O conjunto das combinações lineares finitas, de somas finitas, de produtos do tipo  $\theta.\omega$ , com  $\theta \in C^1([0, T])$ , e  $\omega \in W_0^{1,p}(\Omega)$  é denso no espaço*

$$V = \left\{ v \in L^2(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)); v' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \right\}.$$

*$C^1([0, T])$  é o conjunto das funções  $u$  contínuas em  $[0, T]$ , tais que  $u' \in C^0([0, T])$ .*

**Prova** : VER [16]. ■

**Teorema 1.13** *(Princípio da Extensão) Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach,  $M$  um subespaço denso de  $X$  e  $T : M \rightarrow Y$  linear tal que:*

$$\|T(x)\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad \forall x \in M, \quad C > 0 \text{ constante.}$$

Então, existe um único  $\overline{T} : X \rightarrow Y$  linear contínuo tal que:

$$\overline{T}|_M = T \text{ e } \|\overline{T}(x)\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

**Prova** : VER [7]. ■

## 1.9 Resultados de Imersão

- Caso em que  $\Omega = \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.14** *Se  $1 \leq p < n$ , então*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n), \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0.$$

**Teorema 1.15** *Se  $n > mp$  e  $p \leq q \leq \frac{np}{n - mp}$ , então*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n).$$

**Teorema 1.16** *Se  $kp < n$  e  $\frac{1}{q_k} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ , então*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{m-k, q_k}(\mathbb{R}^n).$$

**Teorema 1.17** *Se  $1 \leq p < \infty$  e  $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ , com  $n \geq 2$ , então*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n), \quad \forall q \geq 1.$$

**Teorema 1.18** *Sejam  $\alpha = m - \frac{n}{q} > 0$  e  $k \in \mathbb{N}$  tais que  $k < \alpha \leq k + 1$ .*

Então,

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^k(\mathbb{R}^n).$$

- Caso em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , aberto, limitado e bem regular.

**Teorema 1.19** *Suponhamos que  $n > mp$ . Então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad q \leq \frac{np}{n - mp}.$$

Temos ainda,

$$W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \quad q < \frac{np}{n - mp}.$$

**Teorema 1.20** *Se  $k \leq m$  e  $n > (m - k)p$ , então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega), \quad q \leq \frac{np}{n - (m - k)p}.$$

Além disso,

$$W^{m,p}(\Omega) \xrightarrow{c} W^{k,q}(\Omega), \quad q < \frac{np}{n - (m - k)p}.$$

**Teorema 1.21** *Se  $mp = n$ , então*

$$W^{m,p}(\Omega) \xrightarrow{c} L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty).$$

**Teorema 1.22** *Se  $mp > n$ , então*

$$W^{m,p}(\Omega) \xrightarrow{c} C^{0,\mu}(\bar{\Omega}),$$

para,

$$\begin{aligned} \mu &= m - \frac{n}{p}, \quad \text{se, } m - \frac{n}{p} < 1; \\ \mu &< 1, \quad \text{se, } m - \frac{n}{p} = 1; \\ \mu &= 1, \quad \text{se, } m - \frac{n}{p} > 1. \end{aligned}$$

**Teorema 1.23** *As imersões nos teoremas acima, caso  $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ , permanecem verdadeiras quando consideramos  $\Omega$  apenas limitado e substituímos  $W^{m,p}(\Omega)$  por  $W_0^{m,p}(\Omega)$ .*

Como consequência dos Teoremas (1.23) e (1.19), tem-se o próximo teorema e que utilizaremos frequentemente nesta dissertação.

**Teorema 1.24** *Sejam  $n$  um número natural,  $p$  um número real e suponhamos  $1 \leq p < n$ .*

*Então,*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q \leq \frac{np}{n - p}.$$

Além disso,

$$W_0^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{c} L^q(\Omega), \quad q < \frac{np}{n - p}.$$

**Prova** : As demonstrações dos teoremas acima podem ser vistas em VER [15]. ■

**Proposição 1.5** : *Sejam  $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\rho$  e  $\theta$  definidos como nas Condições Técnicas (os 4 primeiros Lemas). Então:*

(i)  $u.v, u.z, v.z \in L^{\rho+2}(\Omega)$ ;

(ii)  $(|u|^{\rho+2} + |v|^{\rho+2})|z|^\rho z, (|u|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2})|v|^\rho v, (|v|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2})|u|^\rho u \in L^\theta(\Omega)$ .

**Observação 1.4** : *Em cada um dos casos acima demonstraremos apenas um item. Os demais são demonstrados de modo semelhante.*

**Prova** :

(i) Notemos que,  $\rho + 2 < \frac{6p}{3p-2} \Rightarrow 2(\rho + 2) < \frac{12p}{3p-2}$ . E, pelo Lema 2, temos:

$$\frac{4}{3p-2} < \frac{1}{3-p} \Rightarrow \frac{12}{3p-2} < \frac{3p}{3-p}.$$

Logo,

$$2(\rho + 2) < \frac{3p}{3-p}.$$

Pelas imersões de Sobolev, Teorema (1.24),

$$W_0^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{c} L^{2(\rho+2)}(\Omega).$$

Desta forma,

- $\|u\|_{L^{(\rho+2)}(\Omega)}^{(\rho+2)} \leq c_1 \|u\|_0^{(\rho+2)}$ ;
- $\|v\|_{L^{(\rho+2)}(\Omega)}^{(\rho+2)} \leq c_2 \|v\|_0^{(\rho+2)}$ .

Por outro lado, usando a Desigualdade de Hölder,

$$\int_{\Omega} |uv|^{\rho+2} dx \leq \left( \int_{\Omega} |u|^{2(\rho+2)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |v|^{2(\rho+2)} dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ou seja,

$$\int_{\Omega} |uv|^{\rho+2} dx \leq \|u\|_{L^{2(\rho+2)}(\Omega)}^{\rho+2} \|v\|_{L^{2(\rho+2)}(\Omega)}^{\rho+2}.$$

Logo,

$$\int_{\Omega} |uv|^{\rho+2} dx \leq c_1 \|u\|_0^{\rho+2} . c_2 \|v\|_0^{\rho+2} < \infty.$$

Portanto,

$u.v, \in L^{\rho+2}(\Omega)$ , análogamente, concluímos que  $u.z, v.z \in L^{\rho+2}(\Omega)$ .

(ii) Temos que:

$$\int_{\Omega} \left| |v|^{\rho+2} |u|^{\rho} u \right|^{\theta} dx = \int_{\Omega} \left| |v|^{\rho+1} |v| |u|^{\rho+1} \right|^{\theta} dx = \int_{\Omega} |uv|^{(\rho+1)\theta} |v|^{\theta} dx.$$

Usando a Desigualdade de Hölder, considerando  $\alpha$  e  $\beta$  como no Lema 4, obtemos:

$$\int_{\Omega} \left| |v|^{\rho+2} |u|^{\rho} u \right|^{\theta} dx \leq \left( \int_{\Omega} |uv|^{(\rho+1)\theta\alpha} dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left( \int_{\Omega} |v|^{\theta\beta} dx \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Mas,  $(\rho+1)\theta\alpha = (\rho+1)\theta \frac{(\rho+2)}{(\rho+1)\theta} = \rho+2$ . Logo,

$$\left( \int_{\Omega} |uv|^{(\rho+1)\theta\alpha} dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left( \int_{\Omega} |uv|^{(\rho+2)} dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} < \infty,$$

visto que pelo ítem anterior,  $u.v \in L^{\rho+2}$ .

Observemos também que:

$$\left( \int_{\Omega} |v|^{\theta\beta} dx \right)^{\frac{1}{\beta}} = \|v\|_{L^{\theta\beta}(\Omega)}^{\theta}.$$

Segue do Lema 4,

$$\theta\beta = \frac{6p}{3p-2} < \frac{12p}{3p-2} < \frac{3p}{3-p}.$$

Assim,  $1 < \theta\beta < \frac{3p}{3-p}$ , o que pelo Teorema (1.24), acarreta em,

$$W_0^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{c} L^{\theta\beta}(\Omega), \quad \theta\beta < \frac{3p}{3-p}.$$

De onde segue,

$$\left( \int_{\Omega} |v|^{\theta\beta} dx \right)^{\frac{1}{\beta}} = \|v\|_{L^{\theta\beta}(\Omega)}^{\theta} \leq c \cdot \|v\|_0^{\theta} < \infty.$$

Logo

$$\int_{\Omega} \left| |v|^{\rho+2} |u|^{\rho} u \right|^{\theta} dx < \infty.$$

Da mesma forma, provamos:

$$\int_{\Omega} \left| |z|^{\rho+2} |u|^{\rho} u \right|^{\theta} dx < \infty,$$

Assim,  $|v|^{\rho+2} |u|^\rho u$  e  $|z|^{\rho+2} |u|^\rho u \in L^\theta(\Omega)$ , daí,  $(|v|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |u|^\rho u \in L^\theta(\Omega)$ .

Portanto,

$$(|v|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |u|^\rho u, (|u|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |v|^\rho v, (|u|^{\rho+2} + |v|^{\rho+2}) |z|^\rho z \in L^\theta(\Omega).$$

■

**Definição 1.6** *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $T$  um número real positivo. Denotamos por  $C([0, T[; X)$ , o espaço das funções contínuas, definidas em  $(0, T)$ , a valores em  $X$ , isto é,  $u \in C([0, T[; X) \Leftrightarrow u : (0, T) \rightarrow X$  é contínua, onde a continuidade é medida no seguinte sentido:*

“Se  $t \rightarrow t_0$  em  $(0, T)$  então  $u(t) \rightarrow u(t_0)$  na norma de  $X$ .”

**Teorema 1.25** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach, tais que  $X$  é imerso contínua e densamente em  $Y$ . Suponhamos que  $u \in L^p(0, T; X)$  e  $u' \in L^p(0, T; Y)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Então  $u \in C([0, T]; Y)$ .*

**Prova** : VER [13].

■

**Teorema 1.26** : *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach, com  $X$  reflexivo. Suponhamos que  $X$  é imerso contínua e densamente em  $Y$ . Então  $Y'$ , o espaço dual de  $Y$ , é imerso contínua e densamente em  $X'$ . Ou seja,*

$$X \hookrightarrow Y \Rightarrow Y' \hookrightarrow X'.$$

**Prova** : VER [4].

■

**Teorema 1.27** (Rellich – Kondrachov) *Seja  $\Omega$  um domínio limitado regular. Então,*

$$H^1(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^2(\Omega).$$

**Prova** : VER [15].

■

# Capítulo 2

## Existência de Soluções

Neste capítulo, temos como objetivo, demonstrar a existência de soluções fracas para o sistema de equações não lineares de Klein-Gordon da forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + Au - \Delta u' + (|v|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |u|^\rho u = f_1 \\ v'' + Av - \Delta v' + (|u|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |v|^\rho v = f_2 \\ z'' + Az - \Delta z' + (|v|^{\rho+2} + |u|^{\rho+2}) |z|^\rho z = f_3 \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1 \\ v(0) = v_0, v'(0) = v_1 \quad \text{em } \Omega \\ z(0) = z_0, z'(0) = z_1 \\ u = 0, v = 0 \text{ e } z = 0 \quad \text{em } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

onde  $p \in \mathbb{R}$ ,  $2 < p < 3$ ,  $-1 \leq \rho \leq \frac{4(p-2)}{p+4}$ , sendo  $f_1, f_2, f_3 \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ,  $A$  é o operador pseudo-Laplaciano e

$$\Delta = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

é o operador Laplaciano.

### 2.1 Conceito de Solução Fraca

Formularemos a seguir o conceito de solução fraca para o sistema (2.1).

Sejam  $\psi(x, t) = \omega(x)\theta(t)$ ,  $\omega \in W_0^{1,p}(\Omega)$  e  $\theta \in D(0, T)$ , multiplicando,

$$u'' + Au - \Delta u' + (|v|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2})|u|^\rho u = f_1$$

por  $\psi(t, x)$  temos:

$$u''\psi + Au\psi - \Delta u'\psi + (|v|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2})|u|^\rho u\psi = f_1\psi$$

e integrando em  $Q = \Omega \times (0, T)$ , resulta:

$$\int_Q u''\psi dQ + \int_Q Au\psi dQ - \int_Q \Delta u'\psi dQ + \int_Q ((|v|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2})|u|^\rho u\psi) dQ = \int_Q f_1\psi dQ.$$

Usando integração por partes e o Teorema de Green, obtemos respectivamente

$$\int_Q u''\psi = - \int_Q u'\psi'$$

e

$$- \int_Q \Delta u'\psi = \int_Q \nabla u' \nabla \psi,$$

assim

$$- \int_Q u'\psi' dQ + \int_Q Au\psi dQ + \int_Q \nabla u' \nabla \psi dQ + \int_Q ((|v|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2})|u|^\rho u\psi) dQ = \int_Q f_1\psi dQ.$$

Agora, usando a derivada distribucional na primeira integral, temos :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \theta \frac{d}{dt} \left( \int_\Omega u' \omega dx \right) dt + \int_0^T \langle Au, \omega \rangle \theta dt + \int_0^T ((u', \omega)) dt + \int_0^T \langle (|v|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2})|u|^\rho u, \omega \rangle \theta dt \\ & = \int_0^T (f_1, \omega) \theta dt, \quad \forall \varphi \in D(0, T), \end{aligned}$$

implicando assim que:

$$\frac{d}{dt} (u', \omega) + \langle Au, \omega \rangle + ((u', \omega)) + \langle (|v|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2})|u|^\rho u, \omega \rangle = (f_1, \omega) \quad (2.2)$$

$\forall \omega \in W_0^{1,p}(\Omega)$  em  $D'(0, T)$ .

Analogamente faz-se com as demais equações do sistema.

**Definição 2.1** Uma solução fraca de (2.1) é um terno  $(u, v, z)$  definido em  $Q = \Omega \times (0, T)$  para  $T > 0$ , tal que

$$\begin{aligned} u, v, z &\in L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \\ u', v', z' &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \end{aligned}$$

satisfazendo (2.2), e as demais equações referidas da mesma.

## 2.2 Teorema de Existência

Este teorema é o principal resultado desta dissertação.

Dado um número real  $p$ , onde  $2 < p < 3$ , e  $p$  satisfazendo

$$2 < p < 3 \quad \text{e} \quad -1 \leq \rho \leq \frac{4(p-2)}{p+4},$$

consideremos:

$$f_1, f_2, f_3 \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \tag{2.3}$$

$$u_0, v_0, z_0 \in W_0^{1,p}(\Omega); \tag{2.4}$$

$$u_1, v_1, z_1 \in L^2(\Omega). \tag{2.5}$$

Então, existem  $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v : Q \rightarrow \mathbb{R}$  e  $z : Q \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo:

$$(I) \quad u, v, z \in L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega));$$

$$(II) \quad u'_m, v'_m, z'_m \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega));$$

(III)

$$\frac{d}{dt}(u', \omega) + \langle Au, \omega \rangle + ((u', \omega)) + \langle (|v|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |u|^\rho u, \omega \rangle = (f_1, \omega)$$

$$\forall \omega \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ em } D'(0, T);$$

(IV')

$$\frac{d}{dt}(v', \omega) + \langle Av, \omega \rangle + ((v', \omega)) + \langle (|u|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |v|^\rho v, \omega \rangle = (f_2, \omega)$$

$$\forall \omega \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ em } D'(0, T);$$

(V')

$$\frac{d}{dt}(z', \omega) + \langle Az, \omega \rangle + ((z', \omega)) + \langle (|u|^{\rho+2} + |v|^{\rho+2}) |z|^\rho z, \omega \rangle = (f_3, \omega)$$

$\forall \omega \in W_0^{1,p}(\Omega)$  em  $D'(0, T)$ ;

(VI')

$$u(0) = u_0, v(0) = v_0, z(0) = z_0;$$

(VII')

$$u'(0) = u_1, v'(0) = v_1, z'(0) = z_1.$$

Na demonstração do teorema, usaremos o **Método de Faedo-Galerkin**, o qual consiste em três etapas:

**Primeira Etapa** : Construimos, inicialmente, um "sistema aproximado" em um espaço de dimensão finita. Mostraremos que existe uma sequência de soluções aproximadas  $((u_m)_m, (v_m)_m, (z_m)_m)$ , para o problema aproximado.

**Segunda Etapa** : Obtemos estimativas sobre as soluções aproximadas que independem de  $m$ , e  $t$ .

**Terceira Etapa** : A passagem ao limite é realizada usando argumentos de compacidade e propriedades de monotonicidade do operador A.

## 2.3 Problema Aproximado

Esta seção é de grande importância, porque nela determinaremos, a partir do problema aproximado que será construído, quais espaços devemos usar na construção de solução.

Para usarmos o método de Faedo-Galerkin temos que encontrar um espaço  $V_m$  de dimensão finita, onde obteremos as soluções aproximadas.

Sabemos que  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , com  $2 < p < 3$ , é um espaço de Banach reflexivo e separável. Então, pelo Lema (1.6), existe um espaço de Hilbert Separável com imersão contínua e densa em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , o qual será construído a seguir.

Mediante a imersão de Sobolev, temos:

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{m-k,q_k}(\Omega),$$

onde,

$$\frac{1}{q_k} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}, \quad k > 0.$$

Considere,  $m - k = 1$ ,  $q_k = p$ , em  $W_0^{m-k}(\Omega)$  e  $p = 2$  em  $W_0^{m,p}(\Omega)$ , obtemos:

$$W_0^{m,2}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega), \quad \text{com } \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{m-1}{n}.$$

De onde segue,

$$\frac{m-1}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \Leftrightarrow m-1 = n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) \Leftrightarrow m = n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) + 1, \quad m = k + 1.$$

Como,  $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ , temos:

$$H_0^m(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega), \quad \text{para } m = n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) + 1.$$

No caso  $n = 3$ , e tomando-se  $S > 3 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) + 1$ , temos:

$$H_0^S(\Omega) \hookrightarrow H_0^m(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega).$$

Sendo  $H^s(\Omega)$ , um espaço de Hilbert Separável e  $H_0^s(\Omega) \subset H^s(\Omega)$ , temos que  $H_0^s(\Omega)$  é um espaço de Hilbert Separável. Como  $H_0^1(\Omega) \stackrel{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$ , e pelo Teorema (1.6), existe uma base Hilbertiana  $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  ortonormal completa em  $L^2(\Omega)$  tal que:

- Todo subconjunto finito  $\{w_j\}_j$  é L.I;
- As combinações lineares finitas dos  $w_j$  são densas em  $H_0^s(\Omega)$ .

Assim, já temos o espaço  $V_m$  de dimensão finita que é dado por:

$$V_m = \text{Span} \{w_1, \dots, w_m\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

isto é, o espaço gerado pelos  $m$  primeiros vetores da base  $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ . Notemos que  $V_m \subset H_0^s(\Omega)$ .

Note que, como tomamos  $u_m(t)$ ,  $v_m(t)$  e  $z_m(t)$  em  $V_m \subset H_0^s(\Omega)$ , daí, queremos encontrar uma solução da forma  $(u_m(t), v_m(t), z_m(t))$  em  $V_m$  tal que:

- $u_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i$ ,
- $v_m(t) = \sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i$ ,
- $z_m(t) = \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i$ ,

satisfazendo o problema aproximado abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (u_m''(t), w) + \langle Au_m(t), w \rangle - \langle \Delta u_m'(t), w \rangle \\
 + \langle (|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^\rho u_m(t), w \rangle = \langle f_1(t), w \rangle, \forall w \in V_m \\
 (v_m''(t), w) + \langle Av_m(t), w \rangle - \langle \Delta v_m'(t), w \rangle \\
 + \langle (|u_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |v_m(t)|^\rho v_m(t), w \rangle = \langle f_2(t), w \rangle, \forall w \in V_m \\
 (z_m''(t), w) + \langle Az_m(t), w \rangle - \langle \Delta z_m'(t), w \rangle \\
 + \langle (|u_m(t)|^{\rho+2} + |v_m(t)|^{\rho+2}) |z_m(t)|^\rho z_m(t), w \rangle = \langle f_3(t), w \rangle, \forall w \in V_m.
 \end{array} \right. \quad (2.6)$$

com

$$\begin{array}{l}
 u_m(0) = u_{0m}, \quad u_m'(0) = u_{1m} \\
 v_m(0) = v_{0m}, \quad v_m'(0) = v_{1m} \\
 z_m(0) = z_{0m}, \quad z_m'(0) = z_{1m}.
 \end{array}$$

Analisaremos agora, cada termo que aparece em cada uma das equações de (2.6).

(i)  $(u_m''(t), w)$ ,  $(v_m''(t), w)$ , e  $(z_m''(t), w)$

Observemos que:

- $u_m''(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}''(t) w_i \in V_m \subset H_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ;
- $v_m''(t) = \sum_{i=1}^m h_{im}''(t) w_i \in V_m \subset H_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ;
- $z_m''(t) = \sum_{i=1}^m l_{im}''(t) w_i \in V_m \subset H_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ .

E como  $w \in V_m$ , é possível tomarmos  $(u_m''(t), w)$ ,  $(v_m''(t), w)$ , e  $(z_m''(t), w)$  como produtos internos do  $L^2(\Omega)$ .

(ii)  $\langle Au_m(t), w \rangle$ ,  $\langle Av_m(t), w \rangle$  e  $\langle Az_m(t), w \rangle$

Notemos que:

$$\begin{array}{l}
 A : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \\
 u \longmapsto Au
 \end{array}$$

Assim, tomando  $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , as dualidades acima estão bem definidas, em particular, para  $w \in V_m$ .

$$(iii) \quad \langle -\Delta u'_m(t), w \rangle, \langle -\Delta v'_m(t), w \rangle \text{ e } \langle -\Delta z'_m(t), w \rangle$$

Temos que:

$$\begin{aligned} -\Delta &: H_0^s(\Omega) \rightarrow H^{-s}(\Omega) \\ u &\longmapsto -\Delta u \end{aligned}$$

E sendo,

$$\begin{aligned} u'_m(t) &= \sum_{i=1}^m g'_{im}(t) w_i \in V_m \subset H_0^s(\Omega), \\ v'_m(t) &= \sum_{i=1}^m h'_{im}(t) w_i \in V_m \subset H_0^s(\Omega), \\ z'_m(t) &= \sum_{i=1}^m l'_{im}(t) w_i \in V_m \subset H_0^s(\Omega), \end{aligned}$$

Com  $p > 2$ , e  $w \in V_m \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ , daí faz sentido:

$$\langle -\Delta u'_m(t), w \rangle, \langle -\Delta v'_m(t), w \rangle \text{ e } \langle -\Delta z'_m(t), w \rangle$$

Além disso, pelo Teorema da Representação de Riesz para espaços  $L^p$ ,

$$\langle -\Delta u'_m(t), w \rangle = \int_{\Omega} -\Delta u'_m(t) \cdot w dx, \quad w \in V_m.$$

e do Teorema da Divergência de Gauss obtemos:

$$\langle -\Delta u'_m(t), w \rangle = \int_{\Omega} -\Delta u'_m(t) \cdot w = \int_{\Omega} \nabla u'_m(t) \nabla w = ((u'_m(t), w)).$$

De maneira semelhante temos,

$$\langle -\Delta v'_m(t), w \rangle = ((v'_m(t), w)) \quad \text{e} \quad \langle -\Delta z'_m(t), w \rangle = ((z'_m(t), w)).$$

$$(iv) \quad (f_1(t), w), (f_2(t), w) \text{ e } (f_3(t), w)$$

Desde que  $w \in V_m \hookrightarrow H_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ , tomando  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $f_3(t)$  em  $L^2(\Omega)$ , é possível realizar os produtos internos acima em  $L^2(\Omega)$ .

$$(v) \langle (|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^\rho u_m(t), w \rangle, \langle (|u_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |v_m(t)|^\rho v_m(t), w \rangle$$

e

$$\langle (|v_m(t)|^{\rho+2} + |u_m(t)|^{\rho+2}) |z_m(t)|^\rho z_m(t), w \rangle.$$

Das imersões de Sobolev, Teorema (1.24), temos:

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \quad \forall r \text{ tal que } 1 \leq r \leq \frac{3p}{3-p} =: q,$$

em particular,

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Assim, para  $\delta$  definido como no Lema 3, temos  $\delta < q$  e, sendo  $\Omega$  limitado,  $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^\delta(\Omega)$ . De onde segue,

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\delta(\Omega), \quad \text{onde } \delta < q.$$

Desta forma, pelo Teorema (1.26),

$$(L^\delta(\Omega))' \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega).$$

Agora, tomando  $\theta$  de acordo com o Lema 3, temos que  $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\delta} = 1$ . Obtemos assim:

$$(L^\delta(\Omega))' = L^\theta(\Omega).$$

Consequentemente,

$$L^\theta(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega).$$

Restando-nos apenas mostrar que:

$$\begin{aligned} & (|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^\rho u_m(t), \quad (|u_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |v_m(t)|^\rho v_m(t) \\ & \text{e } (|u_m(t)|^{\rho+2} + |v_m(t)|^{\rho+2}) |z_m(t)|^\rho z_m(t) \in L^\theta(\Omega). \end{aligned}$$

Mas,  $u_m(t)$ ,  $v_m(t)$  e  $z_m(t) \in W_0^{1,p}(\Omega)$  e, pela proposição (1.5) (ii), foi mostrado que nesta situação,

$$\begin{aligned} & (|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^\rho u_m(t), \quad (|u_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |v_m(t)|^\rho v_m(t) \\ & \text{e } (|u_m(t)|^{\rho+2} + |v_m(t)|^{\rho+2}) |z_m(t)|^\rho z_m(t) \in L^\theta(\Omega), \end{aligned}$$

onde,

$$L^\theta(\Omega) = (L^\delta(\Omega))' \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega).$$

Desde que  $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , faz sentido as dualidades acima.

## 2.4 Existência de Soluções do Problema Aproximado

Queremos encontrar uma solução da forma  $(u_m(t), v_m(t), z_m(t))$  em  $V_m$  tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_m''(t), w) + \langle Au_m(t), w \rangle + ((u_m'(t), w)) \\ + \langle (|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^\rho u_m(t), w \rangle = (f_1(t), w), \forall w \in V_m \\ (v_m''(t), w) + \langle Av_m(t), w \rangle + ((v_m'(t), w)) \\ + \langle (|u_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |v_m(t)|^\rho v_m(t), w \rangle = (f_2(t), w), \forall w \in V_m \\ (z_m''(t), w) + \langle Az_m(t), w \rangle + ((z_m'(t), w)) \\ + \langle (|v_m(t)|^{\rho+2} + |u_m(t)|^{\rho+2}) |z_m(t)|^\rho z_m(t), w \rangle = (f_3(t), w), \forall w \in V_m. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

com

$$\begin{aligned} u_m(0) &= u_{0m} \rightarrow u_0 \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), & u_m'(0) &= u_{1m} \rightarrow u_1 \text{ em } L^2(\Omega), \\ v_m(0) &= v_{0m} \rightarrow v_0 \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), & v_m'(0) &= v_{1m} \rightarrow v_1 \text{ em } L^2(\Omega), \\ z_m(0) &= z_{0m} \rightarrow z_0 \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega), & z_m'(0) &= z_{1m} \rightarrow z_1 \text{ em } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Logo, sendo  $u_m(t)$ ,  $v_m(t)$  e  $z_m(t)$  pertencentes a  $V_m$  temos :

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i, \quad u_{0m}(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i, \quad u_{1m}(t) = \sum_{i=1}^m \beta_i w_i$$

$$v_m(t) = \sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i, \quad v_{0m}(t) = \sum_{i=1}^m y_i w_i, \quad v_{1m}(t) = \sum_{i=1}^m \delta_i w_i$$

$$z_m(t) = \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i, \quad z_{0m}(t) = \sum_{i=1}^m \gamma_i w_i, \quad z_{1m}(t) = \sum_{i=1}^m \xi_i w_i.$$

Fazendo  $w = w_j$  em (2.6) com  $j = 1, \dots, m$ , obtemos que  $g_{im}(t)$ ,  $h_{im}(t)$  e  $l_{im}(t)$  devem ser soluções do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^m g''_{im}(t) (w_i, w_j) + \langle Au_m(t), w_j \rangle + \sum_{i=1}^m g'_{im}(t) ((w_i, w_j)) \\
 + \left\langle \left( \left| \sum_{i=1}^m h_{im}(t) \right|^{\rho+2} + \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \right) \left| \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \right|^{\rho} \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i, w_j \right\rangle = (f_1(t), w_j). \\
 \sum_{i=1}^m h''_{im}(t) (w_i, w_j) + \langle Av_m(t), w_j \rangle + \sum_{i=1}^m l'_{im}(t) ((w_i, w_j)) \\
 + \left\langle \left( \left| \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} + \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \right) \left| \sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i \right|^{\rho} \sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i, w_j \right\rangle = (f_2(t), w_j). \\
 \sum_{i=1}^m l''_{im}(t) (w_i, w_j) + \langle Av_m(t), w_j \rangle + \sum_{i=1}^m l'_{im}(t) ((w_i, w_j)) \\
 + \left\langle \left( \left| \sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} + \left| \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \right) \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho} \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i, w_j \right\rangle = (f_3(t), w_j), \\
 \forall j = 1, \dots, m. \\
 g_{im}(0) = \alpha_i \text{ e } g'_{im}(0) = \beta_i, i = 1, \dots, m \\
 h_{im}(0) = y_i \text{ e } h'_{im}(0) = \delta_i, i = 1, \dots, m \\
 l_{im}(0) = \gamma_i \text{ e } l'_{im}(0) = \xi_i, i = 1, \dots, m.
 \end{array} \right. \tag{2.8}$$

Se,

- $C = [(w_i, w_j)]_{m \times m}$ , que é a matriz identidade de ordem  $m$ ;
- $B = [((w_i, w_j))]_{m \times m}$ ;
- $Y = [g_{1m}, \dots, g_{mm}]^*$ ;
- $H = [h_{1m}, \dots, h_{mm}]^*$ ;
- $L = [l_{1m}, \dots, l_{mm}]^*$ ;
- $F = [(f_1(t), w_1), \dots, (f_1(t), w_m)]^*$ ;

- $G = [(f_2(t), w_1), \dots, (f_2(t), w_m)]^*$ ;
- $M = [(f_3(t), w_1), \dots, (f_3(t), w_m)]^*$ .

O sistema (2.8) assume a forma:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 Y'' + BY' = F - \langle Au_m(t), w_j \rangle - \\
 \left\langle \left( \left| \sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} + \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \right) \left| \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i, w_j \right\rangle \\
 H'' + BH' = G - \langle Av_m(t), w_j \rangle - \\
 \left\langle \left( \left| \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} + \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \right) \left| \sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i, w_j \right\rangle \\
 L'' + BL' = M - \langle Az_m(t), w_j \rangle - \\
 \left\langle \left( \left| \sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} + \left| \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \right) \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i, w_j \right\rangle \\
 Y(0) = Y_0, Y'(0) = Y_1 \\
 H(0) = H_0, H'(0) = H_1 \\
 L(0) = L_0, L'(0) = L_1.
 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Considerando:

$$Z = \begin{bmatrix} Y \\ Y' \end{bmatrix}_{2m \times 1}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -B \end{bmatrix}_{2m \times 2m}$$

$$W = \begin{bmatrix} H \\ H' \end{bmatrix}_{2m \times 1}, \quad N = \begin{bmatrix} L \\ L' \end{bmatrix}_{2m \times 1},$$

$$E = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \left[ F - \langle Au_m(t), w_j \rangle - \left\langle \left( \left| \sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} + \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \right) \left| \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i, w_j \right\rangle \right] \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \left[ G - \langle Av_m(t), w_j \rangle - \left\langle \left( \left| \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} + \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \right) \left| \sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i, w_j \right\rangle \right] \end{bmatrix}$$

$$Q = \left[ \begin{array}{c} \bar{0} \\ M - \langle Az_m(t), w_j \rangle - \left\langle \left( \left| \sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} + \left| \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \right) \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho} \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i, w_j \right\rangle \end{array} \right], \quad (2.10)$$

onde  $0$  é a matriz nula de ordem  $m \times m$ ;  $\bar{0}$  é a matriz nula de ordem  $m \times 1$ , e  $C$  neste caso específico, denota a matriz identidade de ordem  $m$ , e  $E$ ,  $P$  e  $Q$  são matrizes de ordem  $2m \times 1$ ,

o sistema (2.9) assume a forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z' = \Phi(t, Z) = DZ + E \\ W' = \psi(t, W) = DW + P \\ N' = \Upsilon(t, N) = DN + Q \\ Z(0) = \begin{bmatrix} Y(0) \\ Y'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{bmatrix} = Z_0 \\ W(0) = \begin{bmatrix} H(0) \\ H'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \end{bmatrix} = W_0 \\ N(0) = \begin{bmatrix} L(0) \\ L'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \end{bmatrix} = N_0 \end{array} \right. \quad (2.11)$$

(a) Fixado  $Z$ , as matrizes  $D$  e  $E$  são mensuráveis já que  $\langle Au_m(t), w_j \rangle$  e

$$\left\langle \left( \left| \sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} + \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \right) \left| \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \right|^{\rho} \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i, w_j \right\rangle$$

são mensuráveis, daí, fixado  $Z$  tem-se que  $\Phi(t, Z)$  é mensurável, pois  $\{(f_1(t), w_j)\}_{j=1}^m$  são mensuráveis, já que  $f \in L^2(\Omega)$ .

(b) Fixado  $t$ , vamos analisar a continuidade de  $\Phi(t, Z) = DZ + E$ .

(i) Análise de  $DZ$ .

Notemos que:

$$DZ = \begin{bmatrix} Y' \\ -BY' \end{bmatrix}_{2m \times 1}.$$

Consideremos as aplicações:

- Projeção,  $\Pi : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , dada por  $\Pi(Z) = Y'$ ;
- $\Gamma : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , dada por  $\Gamma(Z) = -BY'$ .

Assim,  $\Gamma(Z) = -B\Pi(Z)$ .

Como a aplicação projeção é contínua, temos que,

$$\|\Pi(Z)\|_m \leq C \|Z\|_{2m}.$$

Logo,

$$\|\Gamma(Z)\|_m = \|-B\Pi(Z)\|_m \leq C \|-B\| \|Z\|_{2m}.$$

Desta forma,  $\Gamma$  é contínua, daí  $DZ$  também o é.

(ii) Análise de  $E$ .

Observemos que,

$$\begin{aligned} A : W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \\ u_m(t) &\longmapsto Au_m(t) : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ w_i &\longmapsto \langle Au_m(t), w_i \rangle. \end{aligned}$$

Agora consideremos as aplicações:

•  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow V_m$ , dada por  $T(y) = \sum_{i=1}^m y_i w_i = u$ , onde  $y = (y_1, \dots, y_m)$ . Então  $T$  é contínua, pois é a aplicação linear em espaço de dimensão finita.

- $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $\varphi(y) = \langle Au_m(t), u \rangle$ .

Temos que:

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{T} V_m \subset W_0^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{Au_m(t)} \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\varphi = Au_m(t) \circ T.$$

Com efeito,

$$(Au_m(t) \circ T)(y) = Au_m(t)(u) = \langle Au_m(t), u \rangle = \varphi(y).$$

Temos assim que  $\varphi$  é contínua, pois é a composição de funções contínuas.

Por outro lado, desde que  $\sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i$ ,  $\sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i$  e  $\sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i$  são funções lineares em dimensão finita, são contínuas, daí,

$$\left| \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \right|^\rho, \left| \sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \text{ e } \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2}$$

são contínuas. Logo, segue que:

$$\left\langle \left( \left| \sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} + \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \right) \left| \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i, w_j \right\rangle$$

é contínua, assim temos a continuidade de  $E$ .

Portanto para  $t$  fixo,  $\Phi(t, Z)$  é contínua, ja que é soma de funções contínuas.

Analogamente mostrar-se a mensurabilidade e continuidade em  $\Psi(t, W)$  e  $\Upsilon(t, N)$ .

(c) Temos que  $\Phi : \mathbb{R}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ .

Consideremos  $K$  um compacto de  $\mathbb{R}^{2m+1}$ . Como  $DZ$  e

$$\left\langle \left( \left| \sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} + \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \right) \left| \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i, w_j \right\rangle$$

são contínuas, existem constantes  $O$  e  $U$ , tais que

$$\|DZ\|_{2m} \leq O,$$

e

$$\left| \left\langle \left( \left| \sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} + \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \right) \left| \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i, w_j \right\rangle \right| \leq U.$$

Além disso, considerando em  $\mathbb{R}^m$  a norma do maximo, isto é,

$$\|F\|_m = \max \{ |(f_1(t), w_i)| \}, \quad i = 1, \dots, m,$$

podemos supor, sem perda de generalidade, que:

$$\|F\|_m = |(f_1(t), w_i)|.$$

Vejam os também que:

$$|\langle Au_m(t), w_i \rangle| \leq \|Au_m(t)\|_{W^{-1,p'}} \|w_i\|_0 \leq R, \text{ sendo } R \text{ constante,}$$

e dessa forma,

$$\begin{aligned} \|E\|_{2m} &= \left| F - \langle Au_m(t), w_j \rangle - \left\langle \left( \left| \sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} + \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \right) \left| \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i, w_j \right\rangle \right| \\ &\leq \|F\|_m + |\langle Au_m(t), w_j \rangle| + \\ &+ \left| \left\langle \left( \left| \sum_{i=1}^m h_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} + \left| \sum_{i=1}^m l_{im}(t) w_i \right|^{\rho+2} \right) \left| \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i \right|^\rho \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i, w_j \right\rangle \right| \\ &\leq |(f_1(t), w_i)| + R + U \leq |f_1(t)| \|w_i\|_0 + R + U \leq \frac{|f_1(t)|^2}{2} + \frac{\|w_i\|_0^2}{2} + R + U \leq |f_1(t)|^2 + C. \end{aligned}$$

Logo,

$$|\Phi(t, Z)| \leq |DZ + E| \leq |DZ| + |E| \leq O + C + |f_1(t)|^2 = \phi_1(t).$$

Analogamente à análise de  $\Phi(t, Z)$ , mostra-se (a), (b) e (c) para  $\psi(t, W)$  e  $\Upsilon(t, N)$ , onde em (c), temos

$$|\psi(t, W)| \leq |DW + P| \leq |DW| + |P| \leq \bar{O} + C + |f_2(t)|^2 \equiv \phi_2(t),$$

e

$$|\Upsilon(t, N)| \leq |DN + P| \leq |DN| + |Q| \leq \tilde{O} + C + |f_3(t)|^2 \equiv \phi_3(t).$$

onde  $C, O, \bar{O}$  e  $\tilde{O}$  são constantes.

Como  $f_1(t), f_2(t)$  e  $f_3(t) \in L^2(\Omega)$ , segue que  $|f_1(t)|^2, |f_2(t)|^2$  e  $|f_3(t)|^2 \in L^1(\Omega)$ .

De fato, como  $f_i(t) \in L^2(\Omega)$ , onde  $i = 1, 2, 3$ , temos:

$$|f_i| = \left( \int_{\Omega} |f_i(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow |f_i|^2 = \int_{\Omega} |f_i(t)|^2 dt, \text{ onde } i = 1, 2, 3.$$

Consequentemente  $\phi_1(t)$ ,  $\phi_2(t)$  e  $\phi_3(t)$  também são integráveis.

Agora consideramos

$$X = \begin{bmatrix} Z \\ W \\ N \end{bmatrix}, \text{ então } X(0) = \begin{bmatrix} Z_0 \\ W_0 \\ N_0 \end{bmatrix}$$

e

$$X' = \begin{bmatrix} Z' \\ W' \\ N' \end{bmatrix}.$$

Daí, temos o Problema de Valor Inicial:

$$\begin{cases} X' = \theta(t, X) = \begin{bmatrix} \Phi(t, Z) \\ \Phi(t, W) \\ \Phi(t, N) \end{bmatrix} \\ X(0) = X_0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Note que das conclusões obtidas de (a), (b) e (c), podemos concluir que:

(a')  $X$ , fixo,  $\theta(t, X)$  é mensurável, pois  $\Phi(t, Z)$ ,  $\psi(t, W)$  e  $\Upsilon(t, N)$  são mensuráveis;

(b')  $t$  fixo, temos que  $\theta(t, X)$  é contínua, pois  $\phi(t, Z)$ ,  $\psi(t, W)$  e  $\Upsilon(t, N)$  são contínuas;

(c') Dado um compacto  $K'$ , temos que

$$|\theta(t, X)| \leq \phi_1(t) + \phi_2(t) + \phi_3(t) = \phi_4(t)$$

é integrável, uma vez que  $\phi_1(t)$ ,  $\phi_2(t)$  e  $\phi_3(t)$  o são.

Portanto, o sistema (2.6) satisfaz as condições de Caratheodory, logo, pelo Teorema (1.10) existe uma solução  $u_m(t)$ ,  $v_m(t)$  e  $z_m(t)$  em  $[0, t_m)$ ,  $t_m < T$ , satisfazendo (2.6).

## 2.5 Estimativas a Priori

A seguir temos como objetivo estender as soluções obtidas na seção anterior ao intervalo  $[0, T]$ , obtendo estimativas que independem de  $m$  e de  $t$ .

### 2.5.1 Estimativas I

Consideremos  $w = u'_m(t)$ , na primeira equação de (2.6), daí segue que:

$$\begin{cases} (u''_m(t), u'_m(t)) + \langle Au_m(t), u'_m(t) \rangle + ((u'_m(t), u'_m(t))) + \\ + \langle (|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^\rho u_m(t), u'_m(t) \rangle = (f_1(t), u'_m(t)). \end{cases} \quad (2.13)$$

Notemos que

- $(u''_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_m(t)|^2;$
- $\langle Au_m(t), u'_m(t) \rangle = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_0^p;$
- $((u'_m(t), u'_m(t))) = \|u'_m(t)\|^2;$
- $\langle (|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^\rho u_m(t), u'_m(t) \rangle = \frac{1}{\rho+2} \int_{\Omega} (|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) \frac{d}{dt} |u_m(t)|^{\rho+2} dx.$

Substituindo estas identificações em (2.13) obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_m(t)|^2 + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_0^p + \|u'_m(t)\|^2 + \frac{1}{\rho+2} \int_{\Omega} (|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) \frac{d}{dt} |u_m(t)|^{\rho+2} dx = \quad (2.14)$$

$$= (f_1(t), u'_m(t)) \leq |(f_1(t), u'_m(t))| \leq |f_1(t)| |u'_m(t)|$$

Analogamente, fazendo  $w = v'_m(t)$  e  $w = z'_m(t)$ , respectivamente, nas outras duas equações dos sistema (2.6), tem-se:

$$\begin{cases} (v''_m(t), v'_m(t)) + \langle Av_m(t), v'_m(t) \rangle + ((v'_m(t), v'_m(t))) + \\ + \langle (|u_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |v_m(t)|^\rho v_m(t), v'_m(t) \rangle = (f_2(t), v'_m(t)) \end{cases}$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} (z_m''(t), z_m'(t)) + \langle Az_m(t), z_m'(t) \rangle + ((z_m'(t), z_m'(t))) + \\ + \langle (|u_m(t)|^{\rho+2} + |v_m(t)|^{\rho+2}) |z_m(t)|^\rho z_m(t), z_m'(t) \rangle = (f_3(t), z_m'(t)). \end{array} \right.$$

Substituindo as identificações dadas, nestas equações temos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_m'(t)| + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|v_m(t)\|_0^p + \|v_m'(t)\|^2 + \frac{1}{\rho+2} \int_{\Omega} (|u_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) \frac{d}{dt} |v_m(t)|^{\rho+2} dx \quad (2.15)$$

$$= (f_2(t), v_m'(t)) \leq |(f_2(t), v_m'(t))| \leq |f_2(t)| |v_m'(t)|$$

e

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z_m'(t)| + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|z_m(t)\|_0^p + \|z_m'(t)\|^2 + \frac{1}{\rho+2} \int_{\Omega} (|u_m(t)|^{\rho+2} + |v_m(t)|^{\rho+2}) \frac{d}{dt} |z_m(t)|^{\rho+2} dx \quad (2.16)$$

$$= (f_3(t), z_m'(t)) \leq |(f_3(t), z_m'(t))| \leq |f_3(t)| |z_m'(t)|$$

Somando (2.14), (2.15) e (2.16), obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m'(t)|^2 + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_0^p + \|u_m'(t)\|^2 + \frac{1}{\rho+2} \int_{\Omega} (|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) \frac{d}{dt} |u_m(t)|^{\rho+2} \quad (2.17)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v_m'(t)| + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|v_m(t)\|_0^p + \|v_m'(t)\|^2 + \frac{1}{\rho+2} \int_{\Omega} (|u_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) \frac{d}{dt} |v_m(t)|^{\rho+2}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z_m'(t)| + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|z_m(t)\|_0^p + \|z_m'(t)\|^2 + \frac{1}{\rho+2} \int_{\Omega} (|u_m(t)|^{\rho+2} + |v_m(t)|^{\rho+2}) \frac{d}{dt} |z_m(t)|^{\rho+2} dx$$

$$= (f_1(t), u_m'(t)) + (f_2(t), v_m'(t)) + (f_3(t), z_m'(t)) \leq |(f_1(t), u_m'(t))| |(f_2(t), v_m'(t))| |(f_3(t), z_m'(t))|$$

Observando que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\rho+2} \int_{\Omega} (|u_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) \frac{d}{dt} |u_m(t)|^{\rho+2} dx + \\
& + \frac{1}{\rho+2} \int_{\Omega} (|u_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) \frac{d}{dt} |v_m(t)|^{\rho+2} dx + \\
& + \frac{1}{\rho+2} \int_{\Omega} (|u_m(t)|^{\rho+2} + |v_m(t)|^{\rho+2}) \frac{d}{dt} |z_m(t)|^{\rho+2} dx = \\
& = \frac{1}{\rho+2} \int_{\Omega} (|u_m(t)|^{\rho+2} |v_m(t)|^{\rho+2} + |u_m(t)|^{\rho+2} |z_m(t)|^{\rho+2} + |v_m(t)|^{\rho+2} |z_m(t)|^{\rho+2}) dx = \\
& = \frac{1}{\rho+2} \int_{\Omega} \left( \frac{d}{dt} \|u_m(t) v_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \frac{d}{dt} \|u_m(t) z_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \frac{d}{dt} \|v_m(t) z_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} \right).
\end{aligned}$$

Resulta de (2.17)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_m(t)| + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v'_m(t)| + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |z'_m(t)| + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_0^p + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|v_m(t)\|_0^p + \quad (2.18) \\
& + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|z_m(t)\|_0^p + \|u'_m(t)\|^2 + \|v'_m(t)\|^2 + \|z'_m(t)\|^2 + \\
& + \frac{1}{\rho+2} \left( \frac{d}{dt} \|u_m(t) v_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \frac{d}{dt} \|u_m(t) z_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \frac{d}{dt} \|v_m(t) z_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} \right) \leq \\
& \leq |(f_1(t), u'_m(t))| + |(f_2(t), v'_m(t))| + |(f_3(t), z'_m(t))|
\end{aligned}$$

Integrando (2.18) de 0 à  $t$ , com  $t < t_m$ , obtem-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} |u'_m(t)| + \frac{1}{2} |v'_m(t)| + \frac{1}{2} |z'_m(t)| + \frac{1}{p} \|u_m(t)\|_0^p + \frac{1}{p} \|v_m(t)\|_0^p + \frac{1}{p} \|z_m(t)\|_0^p + \quad (2.19) \\
& + \int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds + \int_0^t \|v'_m(s)\|^2 ds + \int_0^t \|z'_m(s)\|^2 ds \\
& + \frac{1}{\rho+2} (\|u_m(t) v_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \|u_m(t) z_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \|v_m(t) z_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2}) \leq \\
& \leq \frac{1}{2} |u'_m(0)|^2 + \frac{1}{2} |v'_m(0)|^2 + \frac{1}{2} |z'_m(0)|^2 + \\
& \frac{1}{2} \int_0^t \left( |(f_1(s), u'_m(s))| + |(f_2(s), v'_m(s))| + |(f_3(s), z'_m(s))| \right) ds + \quad (2.20) \\
& + \frac{1}{\rho+2} (\|u_m(0) v_m(0)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \|u_m(0) z_m(0)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \|v_m(0) z_m(0)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2}) + \\
& + \frac{1}{p} \|u_m(0)\|_0^p + \frac{1}{p} \|v_m(0)\|_0^p + \frac{1}{p} \|z_m(0)\|_0^p.
\end{aligned}$$

Observemos também que, usando as desigualdades de Cauchy-Schwartz e Young em

$$\int_0^t \left| \left( f_1(s), u'_m(s) \right) \right| ds, \quad \int_0^t \left| \left( f_2(s), v'_m(s) \right) \right| ds \quad \text{e} \quad \int_0^t \left| \left( f_3(s), z'_m(s) \right) \right| ds,$$

encontramos:

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^t \left| \left( f_1(s), u'_m(s) \right) \right| ds &\leq \int_0^t |f_1(s)| |u'_m(s)| ds \leq C \int_0^t |f_1(s)| \|u'_m(s)\| ds \\ &\leq \frac{C^2}{2} \int_0^T |f_1(t)|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^t \left| \left( f_2(s), v'_m(s) \right) \right| ds &\leq \int_0^t |f_2(s)| |v'_m(s)| ds \leq C \int_0^t |f_2(s)| \|v'_m(s)\| ds \\ &\leq \frac{C^2}{2} \int_0^T |f_2(t)|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^t \|v'_m(s)\|^2 ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^t \left| \left( f_3(s), z'_m(s) \right) \right| ds &\leq \int_0^t |f_3(s)| |z'_m(s)| ds \leq C \int_0^t |f_3(s)| \|z'_m(s)\| ds \\ &\leq \frac{C^2}{2} \int_0^T |f_3(t)|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^t \|z'_m(s)\|^2 ds \end{aligned}$$

Daí, substituindo em (2.19) temos:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} |u'_m(t)| + \frac{1}{2} |v'_m(t)| + \frac{1}{2} |z'_m(t)| + \frac{1}{p} \|u_m(t)\|_0^p + \frac{1}{p} \|v_m(t)\|_0^p + \frac{1}{p} \|z_m(t)\|_0^p + \quad (2.21) \\ &+ \int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds + \int_0^t \|v'_m(s)\|^2 ds + \int_0^t \|z'_m(s)\|^2 ds + \\ &+ \frac{1}{\rho+2} (\|u_m(t) v_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \|u_m(t) z_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \|v_m(t) z_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2}) \leq \\ &\leq \frac{C^2}{2} \int_0^T |f_1(t)|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds + \frac{C^2}{2} \int_0^T |f_2(t)|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^t \|v'_m(s)\|^2 ds + \\ &+ \frac{C^2}{2} \int_0^T |f_3(t)|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^t \|z'_m(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} |u'_m(0)|^2 + \frac{1}{2} |v'_m(0)|^2 + \frac{1}{2} |z'_m(0)|^2 + \\ &+ \frac{1}{\rho+2} (\|u_m(0) v_m(0)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \|u_m(0) z_m(0)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \|v_m(0) z_m(0)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2}) + \\ &+ \frac{1}{p} \|u_m(0)\|_0^p + \frac{1}{p} \|v_m(0)\|_0^p + \frac{1}{p} \|z_m(0)\|_0^p. \end{aligned}$$

De onde segue-se que:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} |u'_m(t)| + \frac{1}{2} |v'_m(t)| + \frac{1}{2} |z'_m(t)| + \frac{1}{p} \|u_m(t)\|_0^p + \frac{1}{p} \|v_m(t)\|_0^p + \frac{1}{p} \|z_m(t)\|_0^p + \quad (2.22) \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|v'_m(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|z'_m(s)\|^2 ds + \\
& + \frac{1}{\rho+2} (\|u_m(t) v_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \|u_m(t) z_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \|v_m(t) z_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2}) \\
& \leq \frac{1}{2} |u'_m(0)|^2 + \frac{1}{2} |v'_m(0)|^2 + \frac{1}{2} |z'_m(0)|^2 + \frac{1}{p} \|u_m(0)\|_0^p + \frac{1}{p} \|v_m(0)\|_0^p + \frac{1}{p} \|z_m(0)\|_0^p \\
& + \frac{1}{\rho+2} (\|u_m(0) v_m(0)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \|u_m(0) z_m(0)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \|v_m(0) z_m(0)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2}) \\
& + \frac{C^2}{2} \int_0^T |f_1(t)|^2 dt + \frac{C^2}{2} \int_0^T |f_2(t)|^2 dt + \frac{C^2}{2} \int_0^T |f_3(t)|^2 dt.
\end{aligned}$$

Agora, recordaremos os dados que constituem o Teorema de Existência. Temos:

- I)**  $f_1, f_2, f_3 \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$ ;
- II)**  $u_m(0) \rightarrow u_1, v_m(0) \rightarrow v_0$  e  $z_m(0) \rightarrow z_0$  em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ;
- III)**  $u'_m(0) \rightarrow u_1, v'_m(0) \rightarrow v_1$  e  $z'_m(0) \rightarrow z_1$  em  $L^2(\Omega)$ .

e, onsequentemente,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T (|f_1(t)|^2 + |f_2(t)|^2 + |f_3(t)|^2) dt \text{ é limitada;} \\
& \|u_m(0)\|_0 \leq C, \|v_m(0)\|_0 \leq C \text{ e } \|z_m(0)\|_0 \leq C, \forall m; \quad (2.23) \\
& |u'_m(0)| \leq C, |v'_m(0)| \leq C \text{ e } |z'_m(0)| \leq C, \forall m.
\end{aligned}$$

Além disso, pela Proposição 1.5(i), temos que  $u_m(t) v_m(t)$ ,  $u_m(t) z_m(t)$  e  $v_m(t) z_m(t) \in L^{\rho+2}(\Omega)$ ,

portanto:

- $\frac{1}{\rho+2} \|u_m(0) v_m(0)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \leq C$ .

De fato,

$$2(\rho+2) < \frac{12p}{3p-2} < \frac{3p}{3-p}, \text{ temos } W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+2)}(\Omega).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|u_m(0) v_m(0)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} &= \int_{\Omega} |u_m(0) v_m(0)|^{\rho+2} dx \leq \left( \int_{\Omega} |u_m(0)|^{2(\rho+2)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\Omega} |v_m(0)|^{2(\rho+2)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u_m(0)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \cdot \|v_m(0)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \leq C_1 \|u_m(0)\|_0^{\rho+2} \cdot C_2 \|v_m(0)\|_0^{\rho+2} \leq C. \end{aligned}$$

Diante destes fatos, podemos escrever (2.19) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} |u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2} |v'_m(t)|^2 + \frac{1}{2} |z'_m(t)|^2 + \frac{1}{p} \|u_m(t)\|_0^p + \frac{1}{p} \|v_m(t)\|_0^p + \frac{1}{p} \|z_m(t)\|_0^p + \quad (2.24) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|v'_m(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|z'_m(s)\|^2 ds + \\ &+ \frac{1}{\rho+2} (\|u_m(t) v_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \|u_m(t) z_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \|v_m(t) z_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2}) \leq C \end{aligned}$$

onde  $C$  é uma constante independente de  $m$  e de  $t \in [0, t_m[$ .

Desta forma, as funções  $u_m(t)$ ,  $v_m(t)$  e  $z_m(t)$  podem ser estendidas como uma solução do problema aproximado para todo o intervalo  $[0, T]$ . Ou seja,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} |u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2} |v'_m(t)|^2 + \frac{1}{2} |z'_m(t)|^2 + \frac{1}{p} \|u_m(t)\|_0^p + \frac{1}{p} \|v_m(t)\|_0^p + \frac{1}{p} \|z_m(t)\|_0^p + \quad (2.25) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|v'_m(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|z'_m(s)\|^2 ds + \\ &+ \frac{1}{\rho+2} (\|u_m(t) v_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \|u_m(t) z_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} + \|v_m(t) z_m(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2}) \leq C, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

De (2.25) ainda deduzimos que:

- $(u_m)_m$ ,  $(v_m)_m$  e  $(z_m)_m$  são sequências limitadas em  $L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ .

De fato,

$$\|u_m(t)\|_0 \leq C \Rightarrow \sup_{t \in [0, T]} \|u_m(t)\|_0 \leq C.$$

Desta forma,

$$\|u_m(t)\|_{L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))} \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.26)$$

Analogamente,

$$\|v_m(t)\|_{L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.27)$$

e

$$\|z_m(t)\|_{L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.28)$$

- $(u'_m)_m$ ,  $(v'_m)_m$  e  $(z'_m)_m$  são sequências limitadas em  $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ .

Com efeito,

$$\left|u'_m(t)\right|^2 \leq C \Rightarrow \sup_{t \in [0,T]} \left|u'_m(t)\right|^2 \leq C.$$

Logo,

$$\left\|u'_m(t)\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.29)$$

Da mesma forma temos,

$$\left\|v'_m(t)\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad (2.30)$$

e

$$\left\|z'_m(t)\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.31)$$

- $(u'_m)_m$ ,  $(v'_m)_m$  e  $(z'_m)_m$  são sequências limitadas em  $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ .

De fato, desde que

$$\int_0^T \left\|u'_m(t)\right\|^2 dt \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

então

$$\left\|u'_m\right\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.32)$$

Analogamente,

$$\left\|v'_m\right\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.33)$$

e

$$\left\|z'_m\right\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.34)$$

- $(u_m v_m)$  é uma sequência limitada em  $L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega))$ .

De fato, pela Proposição 1.5 (i)  $u_m(t) v_m(t) \in L^{\rho+2}(\Omega)$ , já mostramos anteriormente que  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+2)}(\Omega)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \|u_m(t) v_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} &\leq \left( \int_{\Omega} |u_m(t)|^{2(\rho+2)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\Omega} |v_m(t)|^{2(\rho+2)} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \|u_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \cdot \|v_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \leq C_1 \|u_m(t)\|_0^{\rho+2} \cdot C_2 \|v_m(t)\|_0^{\rho+2} \leq C. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|u_m(t) v_m(t)\|_{L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega))} \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.35)$$

Além disso, temos também que:

- $(Au_m)$ ,  $(Av_m)$  e  $(Az_m)$  são seqüências limitadas em  $L^\infty(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$ .

Desde que o operador p-Laplaciano,  $A : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$  é um operador limitado, (consultar Apêndice), temos:

$$\|Au_m(t)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C \Rightarrow \sup_{t \in [0,T]} \|Au_m(t)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C.$$

Logo,

$$\|Au_m\|_{L^\infty(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))} \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.36)$$

Analogamente temos,

$$\|Av_m\|_{L^\infty(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))} \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.37)$$

e

$$\|Az_m\|_{L^\infty(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))} \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.38)$$

- $(|u_m|^{\rho+2} + |v_m|^{\rho+2}) |z_m|^\rho z_m$ ,  $(|v_m|^{\rho+2} + |z_m|^{\rho+2}) |u_m|^\rho u_m$  e  $(|u_m|^{\rho+2} + |z_m|^{\rho+2}) |v_m|^\rho v_m$  são seqüências limitadas em  $L^\infty(0, T; L^\theta(\Omega))$ .

De fato, pela proposição (1.5) (ii), temos:

$$\||u_m(t)|^{\rho+2} |v_m(t)| v_m(t)\|_{L^\theta(\Omega)} \leq C,$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|( |u_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2} ) |v_m(t)|^\rho v_m(t)\|_{L^\theta(\Omega)} &\leq C \Rightarrow \\ \sup_{t \in [0,T]} \|( |u_m|^{\rho+2} + |z_m|^{\rho+2} ) |v_m|^\rho v_m\|_{L^\theta(\Omega)} &\leq C. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|(|u_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |v_m(t)|^\rho v_m(t)\|_{L^\infty(0,T;L^\theta(\Omega))} \leq C. \quad (2.39)$$

Também,

$$\|(|u_m(t)|^{\rho+2} + |v_m(t)|^{\rho+2}) |z_m(t)|^\rho z_m(t)\|_{L^\infty(0,T;L^\theta(\Omega))} \leq C. \quad (2.40)$$

e

$$\|(|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^\rho u_m(t)\|_{L^\infty(0,T;L^\theta(\Omega))} \leq C. \quad (2.41)$$

## 2.5.2 Estimativas II

Necessitamos agora de limitações para  $u_m''$ ,  $v_m''$  e  $z_m''$ . Para isto, consideremos o operador projeção  $P_m : L^2(\Omega) \rightarrow V_m \subset L^2(\Omega)$ .

sendo

$$P_m(h) = \sum_{j=1}^m (h, w_j) w_j,$$

e observamos que o operador  $P_m$  goza das seguintes propriedades:

- a)  $P_m \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$  e  $P_m = P_m^*$ , onde  $*$  denota a adjunta de  $P_m$ ;
- b)  $P_m \in \mathcal{L}(H_0^s(\Omega))$  ;
- c)  $P_m(w) = w$ ,  $\forall w \in V_m$ .

De fato:

- a) •  $P_m$  é linear.

Sejam  $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então:

$$P_m(\lambda h_1 + h_2) = \sum_{j=1}^m (\lambda h_1 + h_2, w_j) w_j = \sum_{j=1}^m [(\lambda h_1, w_j) w_j + (h_2, w_j) w_j].$$

Assim,

$$P_m(\lambda h_1 + h_2) = \lambda \sum_{j=1}^m (h_1, w_j) w_j + \sum_{j=1}^m (h_2, w_j) w_j = \lambda P_m(h_1) + P_m(h_2)$$

- $P_m = P_m^*$ .

Sejam  $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$ . Então:

$$\begin{aligned} (P_m(h_1), h_2) &= \left( \sum_{j=1}^m (h_1, w_j) w_j, h_2 \right) = \sum_{j=1}^m ((h_1, w_j) w_j, h_2) = \sum_{j=1}^m (h_1, w_j) (w_j, h_2) = \\ &= \sum_{j=1}^m (h_1, (h_2, w_j) w_j) = \left( h_1, \sum_{j=1}^m (h_2, w_j) w_j \right) = (h_1, P_m(h_2)). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Como  $(P_m(h_1), h_2) = (h_1, P_m(h_2))$ , temos que  $P_m$  é auto-adjunto, logo,  $P_m = P_m^*$ .  
Pelo Teorema (1.11) (*Hellinger – Toeplitz*),  $P_m$  é limitado. Desta forma,

$$P_m \in \mathcal{L}(L_2(\Omega)).$$

b) Consideremos as seguintes aplicações:

- Inclusão,  $i : H_0^s(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ , tal que  $i(u) = u$ ;
- Projeção,  $\Pi : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^s(\Omega)$ , tal que  $\Pi(v) = v$ ;
- Composição,  $P : H_0^s(\Omega) \rightarrow H_0^s(\Omega)$ , tal que  $P(u) = (\Pi \circ P_m \circ i)(u)$ .

Esquemmatizando temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} L^2(\Omega) & \xrightarrow{P_m} & L^2(\Omega) \\ i \uparrow & & \downarrow \Pi \\ H_0^s(\Omega) & \xrightarrow{P} & H_0^s(\Omega) \end{array}$$

onde notamos que se que, dado  $u \in H_0^s(\Omega)$ , então:

$$P(u) = (\Pi \circ P_m \circ i)(u) = \Pi(P_m(i(u))) = \Pi(P_m(u)).$$

o que acarreta:

$$P(u) = \Pi \left( \sum_{j=1}^m (u, w_j) w_j \right) = \sum_{j=1}^m (u, w_j) w_j = P_m(u).$$

Ou seja, com  $P$  composição de aplicações contínuas,  $P$  é contínua. Além disso, podemos identificar  $P$  com  $P_m$ . Desta forma

$$P_m \in \mathcal{L}(H_0^s(\Omega)).$$

c) Seja  $w \in V_m$ . Então,  $w = \sum_{i=1}^m C_i w_i$ .

Assim,

$$P_m(w) = P_m\left(\sum_{i=1}^m C_i w_i\right) = \sum_{i=1}^m C_i P_m(w_i) = \sum_{i=1}^m C_i \sum_{j=1}^m (w_i, w_j) w_j.$$

Logo,

$$P_m(w) = \sum_{i=1}^m C_i w_i = w.$$

Considerando a primeira equação aproximada do sistema (2.7) que é dada por:

$$\begin{aligned} (u_m''(t), w) + \langle Au_m(t), w \rangle + ((u_m'(t), w)) + \langle (|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^\rho u_m(t), w \rangle = \\ = (f_1(t), w), \quad \forall w \in V_m, \end{aligned}$$

a qual é equivalente a

$$\begin{aligned} (u_m''(t), w) + \langle Au_m(t), w \rangle - \langle \Delta u_m'(t), w \rangle + \langle (|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^\rho u_m(t), w \rangle \\ = (f_1(t), w), \quad \forall w \in V_m. \end{aligned}$$

Pelas imersões de Sobolev, temos:

$$H_0^s(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega),$$

e, se representarmos  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a dualidade  $H^{-s} \times H_0^1$ , a última equação assume a forma:

$$\begin{aligned} \langle u_m''(t) + Au_m(t) - \Delta u_m'(t) + (|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^\rho u_m - f_1(t), w \rangle = 0 \\ \forall w \in V_m. \end{aligned}$$

e como  $P_m(w) = w$ ,  $\forall w \in V_m$ , então

$$\begin{aligned} \langle u_m''(t) + Au_m(t) - \Delta u_m'(t) + (|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^\rho u_m - f_1(t), P_m(w) \rangle = 0 \\ \forall w \in V_m. \end{aligned}$$

Desde que  $P_m$  é auto-adjunto,então:

$$\langle P_m^* (u_m''(t) + Au_m(t) - \Delta u_m'(t) + (|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^\rho u_m - f_1(t)), w \rangle = 0$$

$$\forall w \in V_m .$$

Desta igualdade temos:

$$P_m^* (u_m''(t) + Au_m(t) - \Delta u_m'(t) + (|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^\rho u_m - f_1(t)) \in (V_m)^\perp .$$

Sendo  $w \in V_m$  e  $V_m \subset H_0^s(\Omega)$ , podemos estender  $w$  para todo  $H_0^s(\Omega)$ . Logo,  $\forall w \in H_0^s(\Omega)$ , temos:

$$\langle P_m^* (u_m''(t) + Au_m(t) - \Delta u_m'(t) + (|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^\rho u_m - f_1(t)), w \rangle = 0 .$$

Desta forma,

$$P_m^* \in (H_0^s(\Omega))' = H^{-s}(\Omega) ,$$

assim,

$$P_m^* (u_m''(t) + Au_m(t) - \Delta u_m'(t) + (|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^\rho u_m - f_1(t)) = 0, \text{ em } H^{-s}(\Omega) .$$

Como  $P_m^*$  é linear, e  $u_m''(t) \in V_m$ , segue-se por extensão via Teorema de Hahn-Banach, que:

$$u_m''(t) = -P_m^* (Au_m(t)) + P_m^* (\Delta u_m'(t)) - P_m^* ((|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^\rho u_m) + P_m^* (f_1(t))$$

em  $H^{-s}(\Omega)$ .

Daí, se aplicarmos a norma em ambos os lados da igualdade acima temos:

$$\|u_m''(t)\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq \|P_m^* (Au_m(t))\|_{H^{-s}(\Omega)} + \|P_m^* (\Delta u_m'(t))\|_{H^{-s}(\Omega)} + \|P_m^* (f_1(t))\|_{H^{-s}(\Omega)} +$$

$$(2.43)$$

$$+ \|P_m^* ((|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^\rho u_m)\|_{H^{-s}(\Omega)} .$$

Analisaremos agora cada termo do segundo membro da desigualdade obtida em (2.43).

- $\|P_m^* (Au_m (t))\|_{H^{-s}(\Omega)}$

Como  $P_m \in \mathcal{L}(H_0^s(\Omega))$ , então  $P_m^* \in \mathcal{L}(H^{-s}(\Omega))$ . Além disso, sabemos que  $W^{-1,p'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$ . Logo,

$$H_0^s(\Omega) \xrightarrow{P_m} H_0^s(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega).$$

Por outro lado,

$$\begin{array}{ccc} W^{-1,p'}(\Omega) & \xrightarrow{i} & H^{-s}(\Omega) \\ P_m^* \searrow & & \swarrow P_m^* \\ & H^{-s}(\Omega) & \end{array}$$

onde  $i$  é a aplicação inclusão,  $i : W^{-1,p'}(\Omega) \rightarrow H^{-s}(\Omega)$ , tal que  $i(u) = u$ .

Portanto, dado  $w \in W^{-1,p'}(\Omega)$ , temos:

$$P^*(w) = (P_m^* \circ i)(w) = P_m^*(i(w)) = P_m^*(w),$$

que é contínua. Assim, fazendo  $P^* \equiv P_m^*$ , obtemos que:

$$P_m^* \in \mathcal{L}(W^{-1,p'}(\Omega), H^{-s}(\Omega)).$$

Desta forma,

$$\|P_m^* (Au_m (t))\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq C \|Au_m (t)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C \|u_m\|_0^{p-1}.$$

E como  $(u_m)_m$  é limitada em  $L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ , resultando assim que:

$$\|P_m^* (Au_m (t))\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq C. \quad (2.44)$$

- $\|P_m^* (\Delta u'_m (t))\|_{H^{-s}(\Omega)}$

De maneira análoga, temos:

Como  $P_m^* \in \mathcal{L}(H^{-s}(\Omega))$  e  $H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$ , segue que  $P_m^* \in \mathcal{L}(H^{-1}(\Omega), H^{-s}(\Omega))$ .

Logo,

$$\|P_m^* (\Delta u'_m (t))\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq C \|\Delta u'_m (t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \|u'_m (t)\|.$$

Tendo em vista que  $(u'_m)_m$  é limitada em  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , segue que:

$$\|P_m^* (\Delta u'_m (t))\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq C. \quad (2.45)$$

- $\|P_m^* (f_1 (t))\|_{H^{-s}(\Omega)}$

Com o raciocínio semelhante, tem-se:

$$\begin{array}{ccc} L^2 (\Omega) & \xrightarrow{i} & H^{-s} (\Omega) \\ P^* \searrow & & \swarrow P_m^* \\ & H^{-s} (\Omega) & \end{array}$$

Logo,

$$P_m^* \in \mathcal{L} (L^2 (\Omega), H^{-s} (\Omega)) .$$

Conseqüentemente,

$$\|P_m^* (f_1 (t))\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq C \cdot |f_1 (t)| \leq C, \text{ visto que, } f_1 (t) \in L^2 (\Omega) . \quad (2.46)$$

- $\|P_m^* ((|v_m (t)|^{\rho+2} + |z_m (t)|^{\rho+2}) |u_m (t)|^\rho u_m)\|_{H^{-s}(\Omega)}$

Com o mesmo raciocínio,

$$H_0^s (\Omega) \xrightarrow{P_m} H_0^s (\Omega) \hookrightarrow L^\theta (\Omega) .$$

Por outro lado,

$$\begin{array}{ccc} L^\theta (\Omega) & \xrightarrow{i} & H^{-s} (\Omega) \\ P^* \searrow & & \swarrow P_m^* \\ & H^{-s} (\Omega) & \end{array}$$

Fazendo,  $P^* \equiv P_m^*$ , temos que:

$$P_m^* \in \mathcal{L} (L^\theta (\Omega), H^{-s} (\Omega)) .$$

De onde segue:

$$\|P_m^* ((|v_m (t)|^{\rho+2} + |z_m (t)|^{\rho+2}) |u_m (t)|^\rho u_m)\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq C \|(|v_m (t)|^{\rho+2} + |z_m (t)|^{\rho+2}) |u_m (t)|^\rho u_m\|_{L^\theta(\Omega)} \quad (2.47)$$

Resulta das limitações obtidas de (2.44) à (2.47), aplicadas na expressão dada em (2.43) que:

$$\|u_m''(t)\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq \bar{C}, \text{ onde } \bar{C} > 0. \quad (2.48)$$

Portanto,

$$\left(u_m''\right)_m \text{ é limitada em } L^2(0, T; H^{-s}(\Omega)) \quad (2.49)$$

Com o mesmo raciocínio nas equações aproximadas do sistema (2.7) obtemos também,

$$\|v_m''(t)\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq \bar{C}, \text{ e } \|z_m''(t)\|_{H^{-s}(\Omega)} \leq \bar{C}, \text{ onde } \bar{C} > 0.$$

De onde resulta que

$$\left(v_m''\right)_m \text{ é limitada em } L^2(0, T; H^{-s}(\Omega)) \quad (2.50)$$

$$\left(z_m''\right)_m \text{ é limitada em } L^2(0, T; H^{-s}(\Omega)). \quad (2.51)$$

## 2.6 Passagem ao limite

Considerando  $X$  um espaço de Banach reflexivo, temos que

$$L^\infty(0, T; X) = \left(L^1(0, T; X')\right)', \quad L^2(0, T; X) = \left(L^2(0, T; X')\right)'.$$

Como os espaços  $L^1(0, T; X')$  e  $L^2(0, T; X')$  são separáveis, e das limitações obtidas de (2.26) à (2.41), e de (2.49), (2.50) e (2.51), tem-se do Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki a existência de subsequências  $(u_v)_v$ ,  $(v_v)_v$ ,  $(z_v)_v$  de  $(u_m)_m$ ,  $(v_m)_m$ ,  $(z_m)_m$ , respectivamente, tais que:

$$u_v \xrightarrow{*} u, \quad v_v \xrightarrow{*} v, \quad z_v \xrightarrow{*} z \text{ em } L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)), \quad (2.52)$$

$$u'_v \xrightarrow{*} \alpha_1, \quad v'_v \xrightarrow{*} \alpha_2, \quad z'_v \xrightarrow{*} \alpha_3 \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (2.53)$$

$$u'_v \rightharpoonup \beta_1, \quad v'_v \rightharpoonup \beta_2, \quad z'_v \rightharpoonup \beta_3 \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (2.54)$$

$$u_v v_v \xrightarrow{*} \gamma_1, \quad z_v v_v \xrightarrow{*} \gamma_2, \quad u_v z_v \xrightarrow{*} \gamma_3 \text{ em } L^\infty(0, T; L^{\rho+2}(\Omega)), \quad (2.55)$$

$$Au_v \xrightarrow{*} \chi, Av_v \xrightarrow{*} \eta, Az_v \xrightarrow{*} \zeta \text{ em } L^\infty(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)), \quad (2.56)$$

$$u_v'' \rightharpoonup \sigma_1, v_v'' \rightharpoonup \sigma_2, z_v'' \rightharpoonup \sigma_3 \text{ em } L^2(0, T; H^{-s}(\Omega)), \quad (2.57)$$

$$(|v_m|^{\rho+2} + |z_m|^{\rho+2}) |u_m|^\rho u_m \xrightarrow{*} \lambda \text{ em } L^\infty(0, T; L^\theta(\Omega)), \quad (2.58)$$

$$(|u_m|^{\rho+2} + |z_m|^{\rho+2}) |v_m|^\rho v_m \xrightarrow{*} \xi \text{ em } L^\infty(0, T; L^\theta(\Omega)), \quad (2.59)$$

$$(|u_m|^{\rho+2} + |v_m|^{\rho+2}) |z_m|^\rho z_m \xrightarrow{*} \kappa \text{ em } L^\infty(0, T; L^\theta(\Omega)). \quad (2.60)$$

Tendo em vista as inclusões,

$$L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \subset D'(0, T; L^2(\Omega)) \text{ e } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \subset L^2(0, T; L^2(\Omega)) \subset D'(0, T; L^2(\Omega)),$$

e passando as convergências (2.53) e (2.54) para o sentido de  $D'(0, T; L^2(\Omega))$ , obtemos

$$u_v' \xrightarrow{*} \alpha_1 \text{ e } u_v' \rightharpoonup \beta_1 \text{ em } D'(0, T; L^2(\Omega)),$$

e da unicidade dos limites resulta

$$\alpha_1 = \beta_1.$$

Além disso,

$$u_v \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \subset L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \subset D'(0, T; L^2(\Omega)),$$

e, portanto

$$u_v \rightarrow u, u_v' \rightarrow u' \text{ em } D'(0, T; L^2(\Omega)).$$

Mais uma vez pela unicidade dos limites, temos que:

$$u' = \alpha_1 = \beta_1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} u_v &\rightarrow u \text{ e } u_v' \rightarrow u' \text{ q.s. em } D'(0, T; L^2(\Omega)), \\ v_v &\rightarrow v \text{ e } v_v' \rightarrow v' \text{ q.s. em } D'(0, T; L^2(\Omega)), \\ z_v &\rightarrow z \text{ e } z_v' \rightarrow z' \text{ q.s. em } D'(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned} \quad (2.61)$$

De forma inteiramente similar, encontramos:

$$\begin{aligned}
u_v'' &\rightarrow u'' \quad \text{q.s. em } D'(0, T; H^{-s}(\Omega)), \\
v_v'' &\rightarrow v'' \quad \text{q.s. em } D'(0, T; H^{-s}(\Omega)), \\
z_v'' &\rightarrow z'' \quad \text{q.s. em } D'(0, T; H^{-s}(\Omega)).
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Posteriormente falaremos das demais convergências.

Consideremos agora, a primeira equação do sistema aproximado (2.7), na forma:

$$\begin{aligned}
&(u_v''(t), w) + \langle Au_v(t), w \rangle + ((u_v'(t), w)) + \langle (|v_v(t)|^{\rho+2} + |z_v(t)|^{\rho+2}) |u_v(t)|^\rho u_v(t), w \rangle \\
&= (f_1(t), w), \forall w \in V_m, \nu \geq m,
\end{aligned}$$

e efetuemos o produto dessa equação por  $\varphi \in D(0, T)$  para obter:

$$\begin{aligned}
&(u_v''(t), w)\varphi + \langle Au_v(t), w \rangle\varphi + ((u_v'(t), w))\varphi + \langle (|v_v(t)|^{\rho+2} + |z_v(t)|^{\rho+2}) |u_v(t)|^\rho u_v(t), w \rangle\varphi \\
&= (f_1(t), w)\varphi, \forall w \in V_m, \nu \geq m.
\end{aligned}$$

Integrando de 0 a  $T$ , a igualdade anterior, temos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (u_v''(t), w)\varphi dt + \int_0^T \langle Au_v(t), w \rangle\varphi dt + \int_0^T ((u_v'(t), w))\varphi dt + \\
&+ \int_0^T \langle (|v_v(t)|^{\rho+2} + |z_v(t)|^{\rho+2}) |u_v(t)|^\rho u_v(t), w \rangle\varphi dt \\
&= \int_0^T (f_1(t), w)\varphi dt, \forall w \in V_m, \nu \geq m.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Integrando por partes, o primeiro termo da igualdade acima, obtemos:

$$\int_0^T (u_v''(t), w)\varphi dt = \int_0^T \frac{d}{dt}(u_v'(t), w)\varphi dt = (u_v'(t), w)\varphi \Big|_0^T - \int_0^T (u_v'(t), w)\varphi' dt,$$

e considerando que  $\varphi \in D(0, T)$ , resulta:

$$\int_0^T (u_v''(t), w)\varphi dt = - \int_0^T (u_v'(t), w)\varphi' dt.$$

Desta forma, a equação dada em (2.63), poderá ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (u'_v(t), w) \varphi' dt + \int_0^T \langle Au_v(t), w \rangle \varphi dt + \int_0^T ((u'_v(t), w)) \varphi dt + \\
& + \int_0^T \langle (|v_v(t)|^{\rho+2} + |z_v(t)|^{\rho+2}) |u_v(t)|^\rho u_v(t), w \rangle \varphi dt \\
& = \int_0^T (f_1(t), w) \varphi dt, \quad \forall w \in V_m, \quad v \geq m.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Com as convergências já obtidas anteriormente, analisaremos cada um dos termos que formam a equação dada em (2.64).

$$\bullet \int_0^T (u'_v(t), w) \varphi' dt$$

Como em (2.53) temos,  $u'_v \xrightarrow{*} u'$  em  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) = (L^1(0, T; L^2(\Omega)))'$ , então,

$$\langle u'_v, \phi \rangle \rightarrow \langle u', \phi \rangle, \quad \forall \phi \in L^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Daí, sendo

$$\langle u'_v, \phi \rangle = \int_0^T (u'_v(t), \phi(t)) dt,$$

Assim,

$$\int_0^T \langle u'_v, \phi \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle u', \phi \rangle dt, \quad \forall \phi \in L^1(0, T; L^2(\Omega)). \tag{2.65}$$

Temos para  $\phi(x, t) = w(x) \psi(t)$ , com  $w \in L^2(\Omega)$  e  $\psi \in L^1(0, T)$  que  $\phi(x, t) \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ .

Sendo assim, temos que (2.65) assume a seguinte forma:

$$\int_0^T (u'_v(t), w(x)) \psi(t) dt \rightarrow \int_0^T (u'(t), w(x)) \psi(t) dt, \quad \forall w \in L^2(\Omega), \quad \forall \psi \in L^1(0, T). \tag{2.66}$$

Em particular, para  $\psi(t) = \varphi'(t)$ , temos:

$$\int_0^T (u'_v(t), w(x)) \varphi'(t) dt \rightarrow \int_0^T (u'(t), w(x)) \varphi'(t) dt, \tag{2.67}$$

$\forall w \in V_m \subset W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ ,  $\forall \psi = \varphi'$ , tal que,  $\varphi \in D(0, T) \subset L^1(0, T)$

$$\bullet \int_0^T \langle Au_v(t), w \rangle \varphi dt$$

De (2.56) temos  $Au'_v \xrightarrow{*} \chi$ , em  $L^\infty(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)) = (L^1(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)))'$  e assim,

$$\int_0^T \langle Au_v(t), \phi \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle \chi(t), \phi \rangle dt, \quad \forall \phi \in L^1(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)). \quad (2.68)$$

Se fizermos em (2.68)  $\phi(x, t) = w(x)\psi(t)$ , com  $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$  e  $\psi \in L^1(0, T)$ ,

teremos:

$$\int_0^T \langle Au_v(t), w(x) \rangle \psi(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle \chi(t), w(x) \rangle \psi(t) dt, \quad (2.69)$$

$\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\forall \psi \in L^1(0, T)$ .

Particularmente para  $\psi(t) = \varphi(t)$ , temos:

$$\int_0^T \langle Au_v(t), w(x) \rangle \varphi(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle \chi(t), w(x) \rangle \varphi(t) dt, \quad (2.70)$$

$\forall w \in V_m \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $\forall \varphi \in D(0, T) \subset L^1(0, T)$ .

$$\bullet \int_0^T \langle (u'_v(t), w) \rangle \varphi dt$$

De (2.54), temos que  $u'_v \rightharpoonup u'$  em  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) = (L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)))'$  assim,

$$\int_0^T \langle u'_v(t), \phi \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle u'(t), \phi \rangle dt, \quad \forall \phi \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (2.71)$$

Se fizermos em (2.71)  $\phi(x, t) = y(x)\psi(t)$ , sendo  $y \in H^{-1}(\Omega)$  e  $\psi \in L^2(0, T)$ ,

obtemos:

$$\int_0^T \langle u'_v(t), y(x) \rangle \psi(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle u'(t), y(x) \rangle \psi(t) dt \quad (2.72)$$

$\forall y \in H^{-1}(\Omega)$ ,  $\forall \psi \in L^2(0, T)$ .

Em particular, se tomarmos  $y(x) = -\Delta w(x)$ , com  $w \in H_0^1(\Omega)$ , e  $\psi(t) = \varphi(t)$ ,  $\forall \varphi \in D(0, T) \subset L^2(0, T)$ , teremos:

$$\int_0^T \langle u'_v(t), -\Delta w(x) \rangle \varphi(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle u'(t), -\Delta w(x) \rangle \varphi(t) dt, \quad (2.73)$$

$\forall w \in V_m \subset H_0^s(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ ,  $\forall \varphi \in D(0, T) \subset L^2(0, T)$ .

Mas,

$$\begin{aligned} \langle u'_v(t), -\Delta w(x) \rangle &= -\int_{\Omega} u'_v(t) \Delta w(x) dx = \int_{\Omega} \nabla u'_v(t) \nabla w(x) dx = \\ &= (\nabla u'_v(t), \nabla w(x)) = ((u'_v(t), w(x))). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Assim, usando (2.74) temos que a expressão dada em (2.73), fica da seguinte forma:

$$\int_0^T (u'_v(t), w(x)) \varphi(t) dt \rightarrow \int_0^T (u'(t), w(x)) \varphi(t) dt, \quad (2.75)$$

$\forall w \in V_m \subset H_0^1(\Omega)$ ,  $\forall \varphi \in D(0, T) \subset L^2(0, T)$ .

- $\int_0^T \langle (|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^{\rho} u_m(t), w \rangle \varphi dt$

Em (2.41) temos que  $(|v_m|^{\rho+2} + |z_m|^{\rho+2}) |u_m|^{\rho} u_m$  é limitada em  $L^{\infty}(0, T; L^{\theta}(\Omega))$ .

Logo,

$$((|v_m|^{\rho+2} + |z_m|^{\rho+2}) |u_m|^{\rho} u_m)_m \text{ é limitada em } L^{\theta}(\Omega).$$

Ou seja:

$$\|(|v_m|^{\rho+2} + |z_m|^{\rho+2}) |u_m|^{\rho} u_m\|_{L^{\theta}(\Omega)} \leq C, \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.76)$$

De onde segue,

$$\left( \int_0^T \|(|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^{\rho} u_m(t)\|_{L^{\theta}(\Omega)}^{\theta} dt \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.77)$$

Assim,

$$\|(|v_m(t)|^{\rho+2} + |z_m(t)|^{\rho+2}) |u_m(t)|^{\rho} u_m(t)\|_{L^{\theta}(0, T; L^{\theta}(\Omega))} \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.78)$$

Portanto,

$$((|v_m|^{\rho+2} + |z_m|^{\rho+2}) |u_m|^{\rho} u_m)_m \text{ é limitada em } L^{\theta}(0, T; L^{\theta}(\Omega)) \equiv L^{\theta}(Q), \quad (2.79)$$

assim, tem-se pelo Teorema (1.2) (*Kakutani*), a existência de uma subsequência  $((|v_v|^{\rho+2} + |z_v|^{\rho+2}) |u_v|^{\rho} u_v)_v$  de  $((|v_m|^{\rho+2} + |z_m|^{\rho+2}) |u_m|^{\rho} u_m)_m$ , tal que:

$$((|v_v|^{\rho+2} + |z_v|^{\rho+2}) |u_v|^{\rho} u_v)_v \rightharpoonup \lambda_1, \text{ em } L^{\theta}(0, T; L^{\theta}(\Omega)). \quad (2.80)$$

Mas, de (2.58), temos:

$$\left( |v_v|^{\rho+2} + |z_v|^{\rho+2} \right) |u_v|^\rho u_v \xrightarrow{*} \lambda \text{ em } L^\infty(0, T; L^\theta(\Omega)) \equiv \left( L^1(0, T, L^\delta(\Omega)) \right)'.$$

Daí, pela unicidade dos limites em  $D'(0, T; L^\theta(\Omega))$ , e reflexividade do espaço  $L^\theta(0, T; L^\theta(\Omega))$ ,

$$\left( |v_v|^{\rho+2} + |z_v|^{\rho+2} \right) |u_v|^\rho u_v \rightarrow \lambda \text{ em } L^\theta(0, T; L^\theta(\Omega)). \quad (2.81)$$

Como temos de (2.26) e (2.29) que:

- $(u_m)_m$ , é limitada em  $L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ ,
- $(u'_m)_m$ , é limitada em  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ ,

e como

$$W_0^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{c} L^2(\Omega),$$

mediante ao Teorema (1.3) (*Aubin – Lions*), podemos garantir a existência de uma subsequência  $(u_v)_v$  tal que:

$$u_v \rightarrow u, \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q), \quad (2.82)$$

ou seja,

$$u_v \rightarrow u, \text{ q.s em } Q. \quad (2.83)$$

Como,

$$\begin{aligned} (v_m)_m \text{ e } (z_m)_m &\text{ são limitadas em } L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \\ (v'_m)_m \text{ e } (z'_m)_m &\text{ são limitadas em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \end{aligned} \quad (2.84)$$

temos em ambas o mesmo caso feito acima. Assim, existem subsequências  $(v_v)_v$  e  $(z_v)_v$  tais que:

$$\begin{aligned} v_v &\rightarrow v, \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q), \\ z_v &\rightarrow z, \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q). \end{aligned} \quad (2.85)$$

Logo,

$$\begin{aligned} v_v &\rightarrow v, \text{ q.s em } Q. \\ z_v &\rightarrow z, \text{ q.s em } Q. \end{aligned} \tag{2.86}$$

De (2.83) e (2.85) temos:

$$\begin{aligned} (|v_v|^{\rho+2} + |z_v|^{\rho+2}) |u_v|^\rho u_v &\rightarrow (|v|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |u|^\rho u, \text{ q.s. em } Q, \\ (|u_v|^{\rho+2} + |z_v|^{\rho+2}) |v_v|^\rho v_v &\rightarrow (|u|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |v|^\rho v, \text{ q.s. em } Q, \\ (|u_v|^{\rho+2} + |v_v|^{\rho+2}) |z_v|^\rho z_v &\rightarrow (|u|^{\rho+2} + |v|^{\rho+2}) |z|^\rho z, \text{ q.s. em } Q, \end{aligned} \tag{2.87}$$

De (2.79) e (2.87) (*primeira equação*), temos via Lema (1.5) (*Lions*), que:

$$(|v_v|^{\rho+2} + |z_v|^{\rho+2}) |u_v|^\rho u_v \rightharpoonup (|v|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |u|^\rho u, \text{ em } L^\theta(0, T; L^\theta(\Omega)). \tag{2.88}$$

Daí e de (2.81), tem-se:

$$\lambda = (|v|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |u|^\rho u,$$

e

$$(|v_v|^{\rho+2} + |z_v|^{\rho+2}) |u_v|^\rho u_v \xrightarrow{*} (|v|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |u|^\rho u, \text{ em } L^\infty(0, T; L^\theta(\Omega)) \equiv (L^1(0, T, L^\delta(\Omega)))'. \tag{2.89}$$

Analogamente, tem-se também

$$(|u_v|^{\rho+2} + |z_v|^{\rho+2}) |v_v|^\rho v_v \xrightarrow{*} (|u|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |v|^\rho v, \text{ em } L^\infty(0, T; L^\theta(\Omega)) \equiv (L^1(0, T, L^\delta(\Omega)))'.$$

e

$$(|u_v|^{\rho+2} + |v_v|^{\rho+2}) |z_v|^\rho z_v \xrightarrow{*} (|u|^{\rho+2} + |v|^{\rho+2}) |z|^\rho z, \text{ em } L^\infty(0, T; L^\theta(\Omega)) \equiv (L^1(0, T, L^\delta(\Omega)))'. \tag{2.90}$$

A convergência em (2.89) nos garante que:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \langle (|v_v(t)|^{\rho+2} + |z_v(t)|^{\rho+2}) |u_v(t)|^\rho u_v(t), w \rangle \psi dt \rightarrow \\ &\rightarrow \int_0^T \langle (|v(t)|^{\rho+2} + |z(t)|^{\rho+2}) |u(t)|^\rho u(t), w \rangle \psi dt, \\ &\quad \forall w \in L^\delta(\Omega), \forall \psi \in L^1(0, T). \end{aligned} \tag{2.91}$$

Em particular, para  $\psi(t) = \varphi(t)$ ,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \langle (|v_v(t)|^{\rho+2} + |z_v(t)|^{\rho+2}) |u_v(t)|^\rho u_v(t), w \rangle \varphi dt \rightarrow \\
& \rightarrow \int_0^T \langle (|v(t)|^{\rho+2} + |z(t)|^{\rho+2}) |u(t)|^\rho u(t), w \rangle \varphi dt. \tag{2.92} \\
& \forall w \in V_m \subset W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^\delta(\Omega), \forall \varphi \in D(0, T) \subset L^1(0, T).
\end{aligned}$$

Retornando a equação dada em (2.64), tomemos o limite quando  $v \rightarrow \infty$ , daí e das convergências obtidas em (2.67), (2.70), (2.75) e (2.92), encontramos:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (u'(t), w) \varphi' dt + \int_0^T \langle \chi(t), w \rangle \varphi dt + \int_0^T ((u'(t), w)) \varphi dt + \\
& + \int_0^T \langle (|v(t)|^{\rho+2} + |z(t)|^{\rho+2}) |u(t)|^\rho u(t), w \rangle \varphi dt \\
& = \int_0^T (f_1(t), w) \varphi dt, \forall w \in V_m, \varphi \in D(0, T). \tag{2.93}
\end{aligned}$$

Raciocinando de maneira análoga, obtemos para as outras duas equações aproximadas do sistema (2.7) :

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (v'(t), w) \varphi' dt + \int_0^T \langle \eta(t), w \rangle \varphi dt + \int_0^T ((v'(t), w)) \varphi dt + \\
& + \int_0^T \langle (|u(t)|^{\rho+2} + |z(t)|^{\rho+2}) |v(t)|^\rho v(t), w \rangle \varphi dt \\
& = \int_0^T (f_2(t), w) \varphi dt, \forall w \in V_m, \varphi \in D(0, T), \tag{2.94}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (z'(t), w) \varphi' dt + \int_0^T \langle \zeta(t), w \rangle \varphi dt + \int_0^T ((z'(t), w)) \varphi dt + \\
& + \int_0^T \langle (|u(t)|^{\rho+2} + |v(t)|^{\rho+2}) |z(t)|^\rho z(t), w \rangle \varphi dt \\
& = \int_0^T (f_3(t), w) \varphi dt, \forall w \in V_m, \varphi \in D(0, T). \tag{2.95}
\end{aligned}$$

O fato das combinações lineares finitas de  $V_m$  serem densas em  $H_0^s(\Omega)$ , e este espaço ser denso em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , temos que (2.93), (2.94) e (2.95) tomam as seguintes formas:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (u'(t), w) \varphi' dt + \int_0^T \langle \chi(t), w \rangle \varphi dt + \int_0^T ((u'(t), w)) \varphi dt + \\
& + \int_0^T \langle (|v(t)|^{\rho+2} + |z(t)|^{\rho+2}) |u(t)|^\rho u(t), w \rangle \varphi dt \\
& = \int_0^T (f_1(t), w) \varphi dt, \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \varphi \in D(0, T),
\end{aligned} \tag{2.96}$$

analogamente à,

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (v'(t), w) \varphi' dt + \int_0^T \langle \eta(t), w \rangle \varphi dt + \int_0^T ((v'(t), w)) \varphi dt + \\
& + \int_0^T \langle (|u(t)|^{\rho+2} + |z(t)|^{\rho+2}) |v(t)|^\rho v(t), w \rangle \varphi dt \\
& = \int_0^T (f_2(t), w) \varphi dt, \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \varphi \in D(0, T),
\end{aligned} \tag{2.97}$$

e,

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (z'(t), w) \varphi' dt + \int_0^T \langle \zeta(t), w \rangle \varphi dt + \int_0^T ((z'(t), w)) \varphi dt + \\
& + \int_0^T \langle (|u(t)|^{\rho+2} + |v(t)|^{\rho+2}) |z(t)|^\rho z(t), w \rangle \varphi dt \\
& = \int_0^T (f_3(t), w) \varphi dt, \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \varphi \in D(0, T).
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Notemos agora que a função  $\gamma : [0, T] \mapsto (u'(t), w)$ , pertence a  $L^2(\Omega)$ , e mais, ela define uma distribuição sobre  $(0, T)$ .

**Prova** : De fato,

$$\begin{aligned}
\int_0^T |\gamma(t)|^2 dt & = \int_0^T |(u'(t), w)|^2 dt \leq \int_0^T |u'(t)|^2 |w|^2 dt = \\
& = |w|^2 \int_0^T |u'(t)|^2 dt \leq |w|^2 C \int_0^T \|u'(t)\|^2 dt < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto  $\gamma(t) = (u'(t), w)$  determina uma distribuição, cuja derivada é dada no sentido das distribuições, por:

$$\left\langle \frac{d}{dt} (u'(t), w), \varphi \right\rangle = - \left\langle (u'(t), w), \varphi' \right\rangle = - \int_0^T (u'(t), w) \varphi' dt.$$

■

Como também, todos os demais termos de (2.96) definem distribuições. Desta forma resulta-nos:

$$\frac{d}{dt} \left( u'(t), w \right) + \langle \chi(t), w \rangle + ((u'(t), w)) + \langle (|v(t)|^{\rho+2} + |z(t)|^{\rho+2}) |u(t)|^\rho u(t), w \rangle = (f_1(t), w) \quad (2.99)$$

$$\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega), \text{ em } D'(0, T).$$

De maneira análoga tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left( v'(t), w \right) + \langle \eta(t), w \rangle + ((v'(t), w)) + \langle (|u(t)|^{\rho+2} + |z(t)|^{\rho+2}) |v(t)|^\rho v(t), w \rangle = (f_2(t), w) \quad (2.100)$$

$$\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega), \text{ em } D'(0, T),$$

e

$$\frac{d}{dt} \left( z'(t), w \right) + \langle \zeta(t), w \rangle + ((z'(t), w)) + \langle (|u(t)|^{\rho+2} + |v(t)|^{\rho+2}) |z(t)|^\rho z(t), w \rangle = (f_3(t), w), \quad (2.101)$$

$$\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega), \text{ em } D'(0, T).$$

Resta-nos ainda mostrar que  $Au(t) = \chi(t)$ ,  $Av(t) = \eta(t)$  e  $Az(t) = \zeta(t)$ , o que será feito posteriormente, já que é necessário utilizar as condições iniciais para tal prova.

## 2.7 Condições Iniciais

Iremos mostrar nesta seção que  $u(0) = u_0$ , e  $u'(0) = u_1$ , usando alguns resultados de convergência já obtidos anteriormente.

- $u(0) = u_0$ .

Temos de (2.52) e (2.53) que  $u \in L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$  e  $u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ , e tendo em vista que  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ , segue do Teorema (1.25) que  $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ . Daí, faz sentido calcular  $u(0)$  e  $u(T)$ .

De fato,  $u_v \xrightarrow{*} u$  em  $L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ , temos:

$$\int_0^T \langle u_v(t), w \rangle \psi dt \rightarrow \int_0^T \langle u(t), w \rangle \psi dt, \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall \psi \in L^1(0, T).$$

Particularmente, considerando  $w \in L^2(\Omega)$ , a dualidade  $\langle u_v(t), w \rangle$  é dada por  $(u_v(t), w)$ , onde  $(\cdot, \cdot)$  denota o produto interno do  $L^2(\Omega)$ , e a convergência dada acima pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\int_0^T (u_v(t), w) \psi dt \rightarrow \int_0^T (u(t), w) \psi dt, \quad \forall w \in L^2(\Omega), \quad \forall \psi \in L^1(0, T). \quad (2.102)$$

Consideremos agora  $\varphi \in C^1([0, T])$  tal que  $\varphi(0) = 1$  e  $\varphi(T) = 0$ . Daí, temos que  $\varphi' \in C^0([0, T]) \subset L^1(0, T)$ . Assim, em particular, tomando  $\psi = \varphi'$  obtemos de (2.102) que:

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_v(t), w) \varphi' dt &\rightarrow \int_0^T (u(t), w) \varphi' dt, \\ \forall w \in L^2(\Omega), \quad \forall \varphi \in C^1([0, T]), \quad \text{com } \varphi(0) = 1 \text{ e } \varphi(T) = 0. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Temos também, por (2.53) que  $u'_v \xrightarrow{*} u'$  em  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ . E conseqüentemente,

$$\int_0^T (u'_v(t), w) \psi dt \rightarrow \int_0^T (u'(t), w) \psi dt, \quad \forall w \in L^2(\Omega), \quad \forall \psi \in L^1(0, T).$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \int_0^T (u'_v(t), w) \varphi dt &\rightarrow \int_0^T (u'(t), w) \varphi dt, \\ \forall w \in L^2(\Omega), \quad \forall \varphi \in C^1([0, T]) \subset L^1(0, T) \quad \text{com } \varphi(0) = 1 \text{ e } \varphi(T) = 0. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Somando (2.103) e (2.104), encontramos:

$$\begin{aligned} \int_0^T [(u_v(t), w) \varphi' + (u'_v(t), w) \varphi] dt &\rightarrow \int_0^T [(u(t), w) \varphi' + (u'(t), w) \varphi] dt, \\ \forall w \in L^2(\Omega), \quad \forall \varphi \in C^1([0, T]), \quad \text{com } \varphi(0) = 1 \text{ e } \varphi(T) = 0. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Podemos reescrever a expressão acima da seguinte maneira:

$$\int_0^T \frac{d}{dt} [(u_v(t), w) \varphi] dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} [(u(t), w) \varphi] dt,$$

$$\forall w \in L^2(\Omega), \forall \varphi \in C^1([0, T]) \text{ com } \varphi(0) = 1 \text{ e } \varphi(T) = 0.$$

Desta forma, segue que:

$$(u_v(T), w) \varphi(T) - (u_v(0), w) \varphi(0), \forall w \in L^2(\Omega).$$

Sendo  $\varphi(0) = 1$  e  $\varphi(T) = 0$ , temos:

$$(u_v(0), w) \rightarrow (u(0), w), \forall w \in L^2(\Omega),$$

isto é,

$$u_v(0) \rightharpoonup u(0), \text{ em } L^2(\Omega). \quad (2.106)$$

Mas de (2.7) temos que  $u_v(0) \rightarrow u_0$ , em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Como  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ , segue que  $u_v(0) \rightarrow u_0$  em  $L^2(\Omega)$ , donde

$$u_v(0) \rightarrow u_0, \text{ em } L^2(\Omega) \quad (2.107)$$

Assim de (2.106) e (2.107), e da unicidade do limite fraco temos que:

$$u(0) = u_0.$$

- $u'(0) = u_1.$

Das convergências em (2.54) e (2.57), temos  $u' \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  e  $u'' \in L^2(0, T; H^{-s}(\Omega))$ . Logo pelo Teorema (1.25),  $u' \in C([0, T]; H^{-s}(\Omega))$ , daí faz sentido calcular  $u'(0)$  e  $u'(T)$ .

Observemos que, sendo  $u_v'' \rightharpoonup u''$  em  $L^2(0, T; H^{-s}(\Omega))$ , então  $u_v'' \xrightarrow{*} u''$  em  $L^2(0, T; H^{-s}(\Omega)) = (L^2(0, T; H_0^s(\Omega)))'$ .

Daí,

$$\int_0^T \langle u_v''(t), w(x) \rangle \psi(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle u''(t), w(x) \rangle \psi(t) dt, \quad (2.108)$$

$$\forall w \in H_0^s(\Omega), \forall \psi \in L^2(0, T).$$

Em particular,

$$\int_0^T \langle u_v''(t), w(x) \rangle \varphi(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle u''(t), w(x) \rangle \varphi(t) dt, \quad \forall w \in H_0^s(\Omega), \quad (2.109)$$

$\forall \varphi \in C^1([0, T])$ , com  $\varphi(0) = 1$  e  $\varphi(T) = 0$ .

Além disso, sabemos de (2.53) que  $u_v' \rightharpoonup u'$  em  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) = (L^1(0, T; L^2(\Omega)))'$ ,

o que resulta em:

$$\int_0^T \langle u_v'(t), w(x) \rangle \varphi'(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle u'(t), w(x) \rangle \varphi'(t) dt,$$

$\forall w \in L^2(\Omega)$ ,  $\forall \varphi \in C^1([0, T])$ , com  $\varphi(0) = 1$  e  $\varphi(T) = 0$ .

Em particular, temos:

$$\int_0^T \langle u_v'(t), w(x) \rangle \varphi'(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle u'(t), w(x) \rangle \varphi'(t) dt, \quad (2.110)$$

$\forall w \in H_0^s(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ ,  $\forall \varphi \in C^1([0, T])$ , com  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi(T) = 0$ .

Somando (2.109) e (2.110), obtemos:

$$\int_0^T \left[ \langle u_v''(t), w(x) \rangle \varphi + \langle u_v'(t), w(x) \rangle \varphi' \right] dt \rightarrow \int_0^T \left[ \langle u''(t), w(x) \rangle \varphi + \langle u'(t), w(x) \rangle \varphi' \right] dt, \quad (2.111)$$

$\forall w \in H_0^s(\Omega)$ ,  $\forall \varphi \in C^1([0, T])$ , com  $\varphi(0) = 1$  e  $\varphi(T) = 0$ .

Podemos reescrever (2.111) como sendo:

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \left[ \langle u_v'(t), w(x) \rangle \varphi(t) \right] dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} \left[ \langle u'(t), w(x) \rangle \varphi(t) \right] dt, \quad (2.112)$$

$\forall w \in H_0^s(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ ,  $\forall \varphi \in C^1([0, T])$ , com  $\varphi(0) = 1$  e  $\varphi(T) = 0$ .

Logo,

$$\langle u_v'(T), w \rangle \varphi(T) - \langle u_v'(0), w \rangle \varphi(0) \rightarrow \langle u'(T), w \rangle \varphi(T) - \langle u'(0), w \rangle \varphi(0).$$

Assim, sendo  $\varphi(0) = 1$  e  $\varphi(T) = 0$ , temos:

$$\langle u_v'(0), w \rangle \rightarrow \langle u'(0), w \rangle, \quad \forall w \in H_0^s(\Omega). \quad (2.113)$$

De onde vem:

$$u'_v(0) \xrightarrow{*} u'(0) \text{ em } H^{-s}(\Omega).$$

Desde que  $H^{-s}(\Omega)$  seja um espaço reflexivo, temos:

$$u'_v(0) \rightharpoonup u'(0) \text{ em } H^{-s}(\Omega). \quad (2.114)$$

Por outro lado, temos do sistema aproximado (2.7) que  $u'_v(0) \rightarrow u_1$  em  $L^2(\Omega)$ . Como  $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega)$ , temos que  $u'_v(0) \rightarrow u_1$  em  $H^{-s}(\Omega)$ ,

donde,

$$u'_v(0) \rightarrow u_1 \text{ em } H^{-s}(\Omega). \quad (2.115)$$

Segue de (2.114), (2.115) e da unicidade do limite fraco que:

$$u'(0) = u_1.$$

Da mesma maneira mostra-se que

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1$$

e

$$z(0) = z_0, \quad z'(0) = z_1.$$

## 2.8 $Au(t) = \chi(t)$ , $Av(t) = \eta(t)$ e $Az(t) = \zeta(t)$

Nesta seção usaremos algumas propriedades do operador p-Laplaciano  $A$ , como a monotonicidade e hemicontinuidade, que por sua vez estão provadas no Apêndice. Usaremos também propriedades de *limsup*.

Como o operador  $A$  é monótono, temos

$$\int_0^T \langle Au_v(t) - Aw, u_v(t) - w \rangle dt \geq 0, \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

ou seja,

$$0 \leq \int_0^T \langle Au_v(t), u_v(t) \rangle dt - \int_0^T \langle Au_v(t), w \rangle dt - \int_0^T \langle Aw, u_v(t) - w \rangle dt$$

$$\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Daí, tomando o limite superior na desigualdade acima temos:

$$0 \leq \limsup \int_0^T \langle Au_v(t), u_v(t) \rangle dt - \int_0^T \langle \chi(t), w \rangle dt - \int_0^T \langle Aw, u(t) - w \rangle dt$$

$$\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (2.116)$$

Consideremos agora  $m = v$  e  $w = u_v(t)$ , na primeira equação do sistema dado em (2.7), daí

$$\begin{cases} (u_v''(t), u_v(t)) + \langle Au_v(t), u_v(t) \rangle + ((u_v'(t), u_v(t))) + \\ \langle (|v_v(t)|^{\rho+2} + |z_v(t)|^{\rho+2}) |u_v(t)|^\rho u_v(t), u_v(t) \rangle = (f_1(t), u_v(t)). \end{cases} \quad (2.117)$$

Notemos que:

- $(u_v''(t), u_v(t)) = \frac{d}{dt} (u_v'(t), u_v(t)) - |u_v'(t)|^2$ .
- $((u_v'(t), u_v(t))) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_v(t)\|^2$ .
- $\langle (|v_v(t)|^{\rho+2} + |z_v(t)|^{\rho+2}) |u_v(t)|^\rho u_v(t), u_v(t) \rangle = \|v_v(t) u_v(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \|z_v(t) u_v(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}$ .

Provaremos apenas a última das afirmações acima.

$$\begin{aligned} \langle (|v_v(t)|^{\rho+2} + |z_v(t)|^{\rho+2}) |u_v(t)|^\rho u_v(t), u_v(t) \rangle &= \int_0^T (|v_v(t)|^{\rho+2} + |z_v(t)|^{\rho+2}) |u_v(t)|^\rho u_v(t) u_v(t) dx \\ &= \int_0^T (|v_v(t)|^{\rho+2} + |z_v(t)|^{\rho+2}) |u_v(t)|^\rho u_v(t)^2 dx = \int_0^T (|v_v(t)|^{\rho+2} + |z_v(t)|^{\rho+2}) |u_v(t)|^{\rho+2} dx \\ &= \int_0^T |v_v(t)|^{\rho+2} |u_v(t)|^{\rho+2} dx + \int_0^T |z_v(t)|^{\rho+2} |u_v(t)|^{\rho+2} dx = \|v_v(t) u_v(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \|z_v(t) u_v(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}. \end{aligned}$$

Substituindo as afirmações acima em (2.117), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (u_v'(t), u_v(t)) - |u_v'(t)|^2 + \langle Au_v(t), u_v(t) \rangle + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_v(t)\|^2 + \|v_v(t) u_v(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \\ + \|z_v(t) u_v(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} = (f_1(t), u_v(t)). \end{aligned} \quad (2.118)$$

Em (2.118) isolaremos  $\langle Au_v(t), u_v(t) \rangle$  do lado esquerdo da igualdade e integraremos de 0 a  $T$ , assim temos:

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle Au_v(t), u_v(t) \rangle dt &= - \int_0^T \frac{d}{dt} (u'_v(t), u_v(t)) dt + \int_0^T |u'_v(t)|^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \|u_v(t)\|^2 dt \\ &\quad - \int_0^T \|v_v(t) u_v(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt - \int_0^T \|z_v(t) u_v(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt + \int_0^T (f_1(t), u_v(t)) dt. \end{aligned}$$

Resultando assim em,

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle Au_v(t), u_v(t) \rangle dt &= - (u'_v(T), u_v(T)) + (u'_v(0), u_v(0)) + \int_0^T |u'_v(t)|^2 dt - \frac{1}{2} \|u_v(T)\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|u_v(0)\|^2 - \int_0^T \|v_v(t) u_v(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt - \int_0^T \|z_v(t) u_v(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt + \int_0^T (f_1(t), u_v(t)) dt. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Analisaremos cada uma das parcelas do lado direito da igualdade em (2.119) acima.

i) Analisando  $(u'_v(T), u_v(T))$

Temos de (2.52) e (2.53) que  $(u_m(T))_m$  é limitada em  $W_0^{1,p}(\Omega)$  e  $(u'_m(T))_m$  é limitada em  $L^2(\Omega)$ , daí pelo Teorema (1.2) (*Kakutani*), existem subsequências de  $(u_m(T))_m$  que denotaremos por  $(u_v(T))_v$  e de  $(u'_m(T))_m$  denotada por  $(u'_v(T))_v$ , onde  $W_0^{1,p}(\Omega)$  com  $p > 1$  e  $L^2(\Omega)$  são espaços reflexivos, daí

- $u_v(T) \rightharpoonup u(T)$  em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ;
- $u'_v(T) \rightharpoonup u'(T)$  em  $L^2(\Omega)$ .

Segue de  $W_0^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{c} L^2(\Omega)$ , que  $u_v(T) \rightarrow u(T)$  em  $L^2(\Omega)$ .

Desta forma, temos:

$$\begin{aligned} &\left| (u'_v(T), u_v(T)) - (u'(T), u(T)) \right| \\ &= \left| (u'_v(T), u_v(T)) - (u'(T), u_v(T)) + (u'(T), u_v(T)) - (u'(T), u(T)) \right| \\ &\leq \left| (u'_v(T) - u'(T), u_v(T)) \right| + \left| (u'(T), u_v(T) - u(T)) \right| = 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$(u'_v(T), u_v(T)) \rightarrow (u'(T), u(T)) \quad (2.120)$$

ii) Analisando  $(u'_v(0), u_v(0))$

Temos do problema aproximado (2.7) que:

$$u_v(0) \rightarrow u(0) \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Como  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ , logo,

$$u_v(0) \rightarrow u(0) \text{ em } L^2(\Omega).$$

Da mesma maneira, por (2.7) tem-se

$$u'_v(0) \rightarrow u'(0) \text{ em } L^2(\Omega).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \left| (u'_v(0), u_v(0)) - (u'(0), u(0)) \right| \\ &= \left| (u'_v(0), u_v(0)) - (u'(0), u_v(0)) + (u'(0), u_v(0)) - (u'(0), u(0)) \right| \\ &\leq \left| (u'_v(0) - u'(0), u_v(0)) \right| + \left| (u'(0), u_v(0) - u(0)) \right| = 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$(u'_v(0), u_v(0)) \rightarrow (u'(0), u(0)). \quad (2.121)$$

iii) Analisando  $\int_0^T |u'_v(t)|^2 dt$

Temos de (2.32) e (2.49) que:

- $(u'_m)_m$  é limitada em  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ ;
- $(u''_m)_m$  é limitada em  $L^2(0, T; H^{-s}(\Omega))$ .

Sabemos também que

$$H_0^1(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-s}(\Omega).$$

Portanto, do Teorema (1.3) (*Aubin – Lions*), garantimos a existência de uma subsequência de  $(u'_m)_m$  onde a denotaremos por  $(u'_v)_v$ , tal que

$$u'_v \rightarrow u' \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q).$$

Como,

$$\left| \left\| u'_v \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} - \left\| u' \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \right| \leq \left\| u'_v - u' \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = 0,$$

temos:

$$\left\| u'_v \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \rightarrow \left\| u' \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))},$$

assim

$$\int_0^T \left| u'_v(t) \right|^2 dt \rightarrow \int_0^T \left| u'(t) \right|^2 dt. \quad (2.122)$$

*iv*) Analisando  $\|u_v(0)\|^2$  e  $\|u_v(T)\|^2$

Observemos que

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega),$$

e do problema aproximado em (2.7)

$$u_v(0) \rightarrow u(0) \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega),$$

logo

$$u_v(0) \rightarrow u(0) \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Daí,

$$\left| \|u_v(0)\| - \|u(0)\| \right| \leq \|u_v(0) - u(0)\| = 0.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \|u_v(0)\|^2 \rightarrow \frac{1}{2} \|u(0)\|^2. \quad (2.123)$$

Observe ainda que sendo  $(u_m(T))_m$  limitada em  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , e  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ , temos que  $(u_m(T))_m$  é limitada em  $H_0^1(\Omega)$ . Logo, pela reflexividade de  $H_0^1(\Omega)$ , e usando o Teorema (1.2) (*Kakutani*), existe uma subsequência  $(u_v(T))_v$  de  $(u_m(T))_m$  tal que

$$u_v(T) \rightharpoonup u(T) \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Assim,

$$\|u(T)\|^2 \leq \liminf \|u_v(T)\|^2. \quad (2.124)$$

$v$ ) Analisando  $\int_0^T \|v_v(t) u_v(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt$  e  $\int_0^T \|z_v(t) u_v(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}$   
Lembremos que em (2.35)  $(v_m u_m)_m$  é limitada em  $L^\infty(0, T; L^{\rho+2}(\Omega))$ .

Portanto, pelo Teorema (1.1) (*Banach – Alaoglu – Bourbaki*) podemos extrair uma subseqüência  $(v_v u_v)_v$  de  $(v_m u_m)_m$ , tal que:

$$(v_v u_v)_v \xrightarrow{*} \sigma \text{ em } L^\infty(0, T; L^{\rho+2}(\Omega)).$$

Por outro lado, sabemos que

$$L^\infty(Q) \equiv L^\infty(0, T; L^{\rho+2}(\Omega)) \hookrightarrow L^{\rho+2}(0, T; L^{\rho+2}(\Omega)) \equiv L^{\rho+2}(Q),$$

daí,

$$\|v_v u_v\|_{L^{\rho+2}(Q)} \leq C.$$

De (2.83) e (2.86), segue-se

$$v_v u_v \rightarrow vu \text{ q.s em } Q.$$

Usando o Lema de Lions, concluímos que:

$$v_v u_v \rightharpoonup vu \text{ em } L^{\rho+2}(0, T; L^{\rho+2}(\Omega)) \equiv L^{\rho+2}(Q). \quad (2.125)$$

Da unicidade do limite em  $D'(0, T; L^{\rho+2}(\Omega))$ , ocorre:

$$\sigma = vu,$$

e,

$$v_v u_v \xrightarrow{*} vu \text{ em } L^\infty(0, T; L^{\rho+2}(\Omega)).$$

Logo de (2.125), temos:

$$\|vu\|_{L^{\rho+2}(Q)}^{\rho+2} \leq \liminf \|v_v u_v\|_{L^{\rho+2}(Q)}^{\rho+2},$$

ou seja,

$$\int_0^T \|v(t) u(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt \leq \liminf \int_0^T \|v_v(t) u_v(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt.$$

Analogamente faz-se para  $\int_0^T \|z_\nu(t) u_\nu(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}$ , obtendo assim,

$$\int_0^T \|z_\nu(t) u_\nu(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} \leq \liminf \int_0^T \|z_\nu(t) u_\nu(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} dt.$$

vi) Analisando  $\int_0^T (f_1(t), u_\nu(t))$ .

Temos que:  $u_\nu(t) \rightarrow u(t)$  em  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ . Logo,  $u_\nu(t) \rightarrow u(t)$  em  $L^2(\Omega)$ .

Assim,

$$\begin{aligned} |(f_1(t), u_\nu(t)) - (f_1(t), u(t))| &= |(f_1(t), u_\nu(t) - u(t))| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$(f_1(t), u_\nu(t)) \rightarrow (f_1(t), u(t)).$$

Portanto,

$$\int_0^T (f_1(t), u_\nu(t)) dt \rightarrow \int_0^T (f_1(t), u(t)) dt. \quad (2.126)$$

Tomando agora o limite superior em (2.113), e usando as convergências encontradas em (2.120) a (2.124), e (2.126)obtemos:

$$\begin{aligned} \limsup \int_0^T \langle Au_\nu(t), u_\nu(t) \rangle dt &\leq (u'(0), u(0)) - (u'(T), u(T)) + \int_0^T |u'(t)|^2 dt - \\ &- \frac{1}{2} \|u(T)\|^2 + \frac{1}{2} \|u(0)\|^2 - \int_0^T \|u(t) v(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} dt + \int_0^T (f_1(t), u(t)) dt. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Precisamos encontrar agora, uma expressão para o termo  $\int_0^T (f_1(t), u(t)) dt$ . Para isto, retornemos a equação aproximada (2.7)<sub>1</sub>, multiplicada por  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} (u_\nu''(t), w) \varphi dt + \int_0^T \langle Au_\nu(t), w \rangle \varphi dt + \int_0^T ((u_\nu'(t), w)) \varphi dt \\ + \int_0^T \langle |v_\nu(t)|^{\rho+2} |u_\nu(t)|^\rho u_\nu(t), w \rangle \varphi dt = \int_0^T (f_1(t), w) \varphi dt, \end{aligned} \quad (2.128)$$

$\forall \varphi \in C^1([0, T]), \forall w \in V_m, \nu \geq m$ .

Integrando por partes o primeiro termo, obtemos:

$$\begin{aligned} & (u'_\nu(T), w) \varphi(T) - (u'_\nu(0), w) \varphi(0) - \int_0^T (u'_\nu, w) \varphi' dt + \int_0^T \langle Au_\nu(t), w \rangle \varphi dt + \\ & + \int_0^T ((u'_\nu(t), w)) \varphi dt + \int_0^T \langle |v(t)|^{\rho+2} |u_\nu(t)|^\rho u_\nu(t), w \rangle \varphi dt = \int_0^T (f_1(t), w) \varphi dt, \end{aligned}$$

$\forall w \in V_m, \forall \varphi \in C^1([0, T]), \nu \geq m$ .

Agora, observando (2.67), (2.70), (2.92), juntamente com  $u'_\nu(T) \rightharpoonup u'(T)$  em  $L^2(\Omega)$  e  $u'_\nu(0) \rightharpoonup u'(0)$  em  $L^2(\Omega)$ , podemos tomar o limite na expressão acima quando  $\nu \rightarrow \infty$ .

Fazendo isto, encontramos:

$$\begin{aligned} & (u'(T), w) \varphi(T) - (u'(0), w) \varphi(0) - \int_0^T (u', w) \varphi' dt + \int_0^T \langle \mathcal{X}(t), w \rangle \varphi dt + \quad (2.129) \\ & + \int_0^T ((u'(t), w)) \varphi dt + \int_0^T \langle |v(t)|^{\rho+2} |u(t)|^\rho u(t), w \rangle \varphi dt = \int_0^T (f_1(t), w) \varphi dt, \end{aligned}$$

$\forall w \in V_m, \forall \varphi \in C^1([0, T])$ .

Mas, as combinações lineares finitas de  $V_m$  são densas em  $H_0^s(\Omega)$  e  $H_0^s(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Logo, a expressão anterior é equivalente a:

$$\begin{aligned} & (u'(T), w) \varphi(T) - (u'(0), w) \varphi(0) - \int_0^T (u', w) \varphi' dt + \int_0^T \langle \mathcal{X}(t), w \rangle \varphi dt + \quad (2.130) \\ & + \int_0^T ((u'(t), w)) \varphi dt + \int_0^T \langle |v(t)|^{\rho+2} |u(t)|^\rho u(t), w \rangle \varphi dt = \int_0^T (f_1(t), w) \varphi dt, \end{aligned}$$

$\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega), \forall \varphi \in C^1([0, T])$ .

Pelo Teorema (1.12), o conjunto das combinações lineares finitas do tipo  $w\varphi$ , com  $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$  e  $\varphi \in C^1([0, T])$ , é denso no espaço

$$V = \{v \in L^2(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)); v' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))\}.$$

Sendo assim, a equação (2.130) é válida no espaço  $V$ . Observe que, de (2.52) e (2.53), temos:

$$u \in L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \subset L^2(0, T; W_0^1(\Omega));$$

$$u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \subset L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Portanto,  $u \in V$ , ou seja,  $u$  pode ser escrito sob a forma:  $u = w\varphi$ , com  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  e  $\varphi \in C^1([0, T])$ . Assim, podemos escrever (2.130) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & (u'(T), u(T)) - (u'(0), u(0)) - \int_0^T (u'(t), u(t)) dt + \int_0^T \langle \mathcal{X}(t), u(t) \rangle dt + \quad (2.131) \\ & + \int_0^T ((u'(t), u(t))) \varphi dt + \int_0^T \langle |v(t)|^{\rho+2} |u(t)|^\rho u(t), w \rangle \varphi dt = \int_0^T (f_1(t), u(t)) \varphi dt. \end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned} & (u'(T), u(T)) - (u'(0), u(0)) - \int_0^T |u'(t)|^2 dt + \int_0^T \langle \mathcal{X}(t), u(t) \rangle dt + \quad (2.132) \\ & + \frac{1}{2} \|u(T)\|^2 - \frac{1}{2} \|u(0)\|^2 + \int_0^T \|u(t)v(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} dt = \int_0^T (f_1(t), u(t)) \varphi dt. \end{aligned}$$

Agora vamos substituir (2.132) em (2.127), para obtermos:

$$\begin{aligned} \limsup \int_0^T \langle Au_\nu(t), u_\nu(t) \rangle dt & \leq (u'(0), u(0)) - (u'(T), u(T)) + \int_0^T |u'(t)|^2 dt \quad (2.133) \\ & - \frac{1}{2} \|u(T)\|^2 + \frac{1}{2} \|u(0)\|^2 - \int_0^T \|u(t)v(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} dt + \\ & + (u'(T), u(T)) - (u'(0), u(0)) - \int_0^T |u'(t)|^2 dt + \\ & + \int_0^T \langle \mathcal{X}(t), u(t) \rangle dt + \frac{1}{2} \|u(T)\|^2 - \frac{1}{2} \|u(0)\|^2 + \\ & + \int_0^T \|u(t)v(t)\|_{L^{\rho+2}}^{\rho+2} dt. \end{aligned}$$

O que resulta em:

$$\limsup \int_0^T \langle Au_\nu(t), u_\nu(t) \rangle dt \leq \int_0^T \langle \mathcal{X}(t), u(t) \rangle dt. \quad (2.134)$$

O fato de  $A$  ser mónotono acarreta em:

$$\langle Au_\nu(t) - Aw, u_\nu(t) - w \rangle \geq 0,$$

logo,

$$\int_0^T \langle Au_\nu(t) - Aw, u_\nu(t) - w \rangle dt \geq 0.$$

Que é equivalente a:

$$0 \leq \int_0^T \langle Au_\nu(t), u_\nu(t) \rangle dt - \int_0^T \langle Au_\nu(t), w \rangle dt - \int_0^T \langle Aw, u_\nu(t) - w \rangle dt, \quad (2.135)$$

$\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Tomando o lim sup em (2.135), encontramos:

$$0 \leq \limsup \int_0^T \langle Au_\nu(t), u_\nu(t) \rangle dt - \int_0^T \langle \mathcal{X}(t), u(t) \rangle dt - \int_0^T \langle Aw, u(t) - w \rangle dt, \quad (2.136)$$

$\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Substituindo (2.134) em (2.136), temos:

$$0 \leq \int_0^T \langle \mathcal{X}(t), u(t) \rangle dt - \langle \mathcal{X}(t), w \rangle dt - \int_0^T \langle Aw, u(t) - w \rangle dt,$$

$\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Consequentemente,

$$0 \leq \int_0^T \langle Aw, u(t) - w \rangle dt - \int_0^T \langle Aw, u(t) - w \rangle dt, \quad (2.137)$$

$\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Observemos que, como  $W_0^{1,p}(\Omega)$  é um espaço vetorial e sendo  $u(t), z(t) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , podemos tomar  $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$  como sendo:

$$w = u(t) + \lambda z(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Logo, substituindo  $w$  em (2.137), temos:

$$0 \leq \int_0^T \langle \mathcal{X}(t), -\lambda z(t) \rangle dt + \int_0^T \langle A(u(t) + \lambda z(t)), \lambda z(t) \rangle dt, \quad (2.138)$$

$\forall z(t) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Dividindo esta desigualdade por  $\lambda > 0$ , obtemos:

$$0 \leq - \int_0^T \langle \mathcal{X}(t), z(t) \rangle dt + \int_0^T \langle A(u(t) + \lambda z(t)), z(t) \rangle dt, \quad (2.139)$$

$\forall z(t) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Fazendo  $\lambda \rightarrow 0$  e, usando a hemicontinuidade do operador  $A$ , temos:

$$0 \leq - \int_0^T \langle \mathcal{X}(t), z(t) \rangle dt + \int_0^T \langle Au(t), z(t) \rangle dt,$$

$\forall z(t) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Assim,

$$0 \leq \int_0^T \langle A(u(t) - \mathcal{X}(t)), z(t) \rangle dt, \quad (2.140)$$

$\forall z(t) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Dividindo (2.138) por  $\lambda < 0$  e usando a hemicontinuidade do operador  $A$ , encontramos:

$$\int_0^T \langle A(u(t)) - \mathcal{X}(t), z(t) \rangle dt \leq 0, \quad (2.141)$$

$\forall z(t) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

De (2.140) e (2.141), segue que:

$$\langle A(u(t) - \mathcal{X}(t)), z(t) \rangle = 0 \text{ q.s. em } [0, T],$$

$\forall z(t) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Portanto,

$$Au(t) = \mathcal{X}(t), \text{ q.s. em } [0, T].$$

Analogamente, mostramos que:

$$Av(t) = \eta(t), \text{ q.s. em } [0, T].$$

Então, resumindo o que obtivemos em (2.52) à (2.53) e (2.99) à (2.101) e nas condições iniciais, temos:

$$u, v, z \in L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega));$$

$$u', v', z' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega));$$

$$\frac{d}{dt}(u', w) + \langle Au, w \rangle + ((u', w)) + \langle (|v|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |u|^\rho u, w \rangle = (f_1, w),$$

$\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega)$  em  $\mathcal{D}'(0, T)$ ;

$$\frac{d}{dt}(v', w) + \langle Av, w \rangle + ((v', w)) + \langle (|u|^{\rho+2} + |z|^{\rho+2}) |v|^\rho v, w \rangle = (f_2, w),$$

$\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega)$  em  $\mathcal{D}'(0, T)$ ;

$$\frac{d}{dt}(z', w) + \langle Az, w \rangle + ((z', w)) + \langle (|u|^{\rho+2} + |v|^{\rho+2}) |z|^\rho z, w \rangle = (f_3, w),$$

$\forall w \in W_0^{1,p}(\Omega)$  em  $\mathcal{D}'(0, T)$ ;

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0; & v(0) &= v_0; & z(0) &= z_0 \\ u'(0) &= u_1; & v'(0) &= v_1; & z'(0) &= z_1. \end{aligned}$$

O que demonstra o teorema de existência de solução fraca para o sistema (2.1).

# Capítulo 3

## Propriedades do Operador

### $p$ -Laplaciano $A$ .

No presente capítulo estudamos as propriedades do operador  $A$ .

#### 3.1 Definições e Resultados

**Definição 3.1** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach. Consideremos  $x \in X$  um elemento fixo. Um operador  $T : X \rightarrow Y$ , não necessariamente linear, é dito ser diferenciável, no sentido de Gateaux, Gateaux diferenciável ou  $G$ -Diferenciável em  $x$ , se existe um operador  $A : X \rightarrow Y$ , linear e contínuo, tal que,*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{T(x + th) - T(x)}{t} - A(h) \right\|_Y = 0, \forall h \in X.$$

Neste caso o operador  $A$  é chamado diferencial de Gateaux de  $T$ , em  $x$ , e é denotado por  $A(h) = dT(x, h)$ .

**Observação 3.1** *Quando o diferencial de Gateaux de um operador  $T : X \rightarrow Y$  existe, ele é único.*

**Teorema 3.1 (Teorema do Valor Médio)** *Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional tal que sua derivada de Gateaux,  $df(x, h)$ , exista em todo  $x \in X$ . Então, para quaisquer  $x$  e  $x + h$  em  $X$ , existe  $\theta \in (0, 1)$ , tal que:*

$$f(x + h) - f(x) = df(x + \theta h, h).$$

**Demonstração.** Façamos  $\phi(t) = f(x + th)$  e calculemos  $\phi'(t)$ . ■

**Definição 3.2** *Dados um espaço de Banach  $X$  e um funcional  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Suponhamos que exista:*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[ \frac{J(u + \lambda v) - J(u)}{\lambda} - J'(u) \right] = J'(u, v).$$

*Se, para cada  $u \in X$ , fixado,  $J'(u, v)$  é uma forma linear e contínua em  $v$ , então dizemos que o funcional  $J$  é derivável, no sentido de Gateaux, sua derivada é representada por  $J'(u)$  e escrita das seguintes formas:*

$$\begin{aligned} J'(u, v) &= \langle J'(u), v \rangle \\ &= J'(u)(v). \end{aligned}$$

**Exemplo 3.1** *Suponhamos que  $X = \mathbb{R}$ , e sejam  $x, h \in X$ . Então:*

$$\begin{aligned} \langle J'(x), h \rangle &= J'(x)h \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[ \frac{J(x + \lambda h) - J(x)}{\lambda} \right]. \end{aligned}$$

*Ou seja, quando existem as derivadas de Gateaux e clássica, elas coincidem.*

**Exemplo 3.2** *Sejam  $X = L^p(\Omega)$  e  $1 \leq p < \infty$ . Suponhamos que  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaça*

$$|g(s)| \leq \alpha |s|^p, \quad \alpha > 0,$$

*e  $g$  continuamente diferenciável, tal que:*

$$|g'(s)| \leq \beta |s|^{p-1},$$

para algum  $\beta > 0$ .

Consideremos o funcional  $J : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por:

$$J(v) = \int_{\Omega} g(v(x)) dx, \forall v \in L^p(\Omega).$$

Então,

$$J(u + \lambda v) - J(u) = \int_{\Omega} [g(u(x) + \lambda v(x)) - g(u(x))] dx.$$

Pelo teorema do Valor Médio,

$$g(u(x) + \lambda v(x)) - g(u(x)) = g'(u(x) + \theta \lambda v(x), \lambda v(x)),$$

onde  $0 < \theta < 1$ .

Assim,

$$\begin{aligned} J(u + \lambda v) &= \int_{\Omega} g'(u(x) + \theta \lambda v(x), \lambda v(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} g'(u(x) + \theta \lambda v(x)) \lambda v(x) dx, \end{aligned}$$

com  $0 < \theta < 1$ . Desta forma, se  $\lambda \neq 0$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} [J(u + \lambda v) - J(u)] &= \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} [g(u(x) + \lambda v(x)) - g(u(x))] dx \\ &= \int_{\Omega} [g'(u(x) + \theta \lambda v(x))] v(x) dx. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando  $\lambda \rightarrow 0$ , obtemos:

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_{\Omega} g'(u(x)) v(x) dx. \quad (3.1)$$

**Exemplo 3.3** Seja  $\Omega$  um aberto, limitado e bem regular do  $\mathbb{R}^n$ . Consideremos os operadores

$$A_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = D_i, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad A = (A_1, \dots, A_n).$$

Tomemos o espaço  $W_0^{1,p}(\Omega)$  com a norma  $\|\cdot\|_0$  e seja  $J : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , o funcional dado por:

$$J(u) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx.$$

Observemos que, no exemplo anterior, com  $A_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = D_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $g(s) = |s|^p$ , temos  $g'(s) = p|s|^{p-2}s$ ,  $p \geq 2$ . Portanto, de (3.1) temos:

$$\langle J'(u), v \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, para  $v = \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , temos pela derivada distribucional,

$$\begin{aligned} \langle J'(u), \varphi \rangle &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= - \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right] \varphi dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$J'(u) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \quad p \geq 2,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} J' : W_0^{1,p}(\Omega) &\rightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \\ u &\longrightarrow J'(u) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Daí, concluímos que a derivada de Gateaux do funcional

$$J(u) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx, \quad 2 \leq p < \infty,$$

é o operador, denotado por  $p$ -Laplaciano, definido como,

$$J'(u) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \quad p \geq 2.$$

No nosso sistema, este operador é representado por  $A$ . Assim,

$$\begin{aligned} A(u) &= J'(u) \\ &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \quad p \geq 2, \end{aligned}$$

é denominado de operador  $p$ -Laplaciano.

Notemos que,

$$\begin{aligned} A : W_0^1(\Omega) &\rightarrow W^{-1,p'}(\Omega) \\ u &\rightarrow A(u) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \end{aligned}$$

e  $Au : W_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  é linear e contínuo. Além disso, como  $C_0^\infty(\Omega)$  é denso em  $W_0^{1,p}(\Omega)$  e

$$\langle J'(u), \varphi \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

temos que:

$$\langle J'(u), w \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx, \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

**Definição 3.3** *Sejam  $V$  um espaço de Banach e  $V'$  seu dual. Dizemos que  $A : V \rightarrow V'$  é um operador **hemicontínuo** se, para  $u, v$  e  $w$  em  $V$ , a função  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$\lambda \rightarrow \langle A(u + \lambda v), w \rangle \text{ é contínua.}$$

**Definição 3.4** *Dizemos que um operador  $A : V \rightarrow V'$  é **coercivo**, se*

$$\lim_{\|v\|_V \rightarrow \infty} \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_V} = +\infty.$$

**Definição 3.5** *Dizemos que um operador  $A : V \rightarrow V'$  é **monótono**, se*

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in V,$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , denota a dualidade  $V'$ .

**Definição 3.6** *Seja  $X$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . Uma função  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  é **convexa**, se:*

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y), \quad \forall x, y \in X, t \in [0, 1].$$

**Proposição 3.1** *Seja  $J : V \rightarrow \mathbb{R}$  'é um funcional convexo, então sua derivada de Gateaux  $J' : V \rightarrow V'$  é um operador monótono.*

**Prova** Da convexidade de  $J$  resulta que, dados  $u, v \in V$  e  $0 < \theta < 1$ , temos:

$$\begin{aligned} J[u + \theta(v - u)] - J(u) &= J[u + \theta v - \theta u] - J(u) \\ &= J[\theta v + (1 - \theta)u] - J(u). \end{aligned}$$

Assim, pela definição (3.6),

$$\begin{aligned} J[u + \theta(v - u)] - J(u) &\leq \theta J(v) + (1 - \theta - 1) J(u) \\ &= \theta [J(v) - J(u)]. \end{aligned}$$

Dividindo por  $\theta \neq 0$  e tomando o limite com  $\theta \rightarrow 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{J[u + \theta(v - u)] - J(u)}{\theta} &= \langle J'u, v - u \rangle \\ &\leq J(v) - J(u). \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo cálculo, trocando  $u$  por  $v$ , temos:

$$\langle J'v, u - v \rangle \geq J(u) - J(v).$$

Assim,

$$\langle J'u, v - u \rangle + \langle J'v, u - v \rangle \leq 0,$$

de onde concluímos que:

$$\langle J'u - J'v, u - v \rangle \geq 0.$$

Portanto,  $J'$  é monótono. ■

## 3.2 Propriedades de $A$

### 3.2.1 $A$ é hemicontínuo

De fato, sejam  $u, v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ . Então:

$$\langle A(u + \lambda v), w \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i} dx.$$

Sabemos que  $|a + b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$ , logo:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i} \leq 2^{p-3} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} + \lambda^{p-2} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \right) \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \right) \frac{\partial w}{\partial x_i}$$

e

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i} &= \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right| \\ &= \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right| \rightarrow \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda_0 \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|, \end{aligned}$$

q.s. em  $\Omega$ .

Observando que as funções do segundo membro da desigualdade acima são integráveis, temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \langle A(u + \lambda v), w \rangle = \langle A(u + \lambda_0 v), w \rangle.$$

Logo,  $A$  é hemicontínuo.

### 3.2.2 $A$ é monótono

Basta mostrarmos que o funcional  $J : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  é convexo, uma vez que pela Proposição(3.1), como  $A$  é a derivada de Gateaux deste funcional, que é dado por:

$$J(u) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx, \quad 2 \leq p < \infty,$$

decorre a monotonicidade de  $A$ .

**Prova** Sendo  $p > 2$ , a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = |x|^p$ , é convexa. Logo,

$$|(1 - \theta)x + \theta y|^p \leq (1 - \theta)|x|^p + \theta|y|^p, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Assim, para  $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$  e  $0 < \theta < 1$ , temos que:

$$\begin{aligned} J[(1 - \theta)u + \theta v] &= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| (1 - \theta) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \theta \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p dx \\ &\leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (1 - \theta) \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p + \theta \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p dx \\ &= (1 - \theta) J(u) + \theta J(v). \end{aligned}$$

Portanto,  $J$  é convexo. ■

### 3.2.3 Sobre a dualidade $\langle Au, u \rangle$

Com efeito,

$$\begin{aligned}\langle Au, u \rangle &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx \\ &= \|u\|_0^p.\end{aligned}$$

### 3.2.4 $A$ é coercivo

Temos  $\langle Au, u \rangle = \|u\|_0^p$ . Logo,  $\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_0} = \|u\|_0^{p-1}$ . Dessa forma,

$$\lim_{\|u\|_0 \rightarrow \infty} \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_0} = \infty.$$

### 3.2.5 $A$ é limitado

De fato, temos:

$$\|Au\|_{1,p'} = \sup_{v \neq 0} \frac{|\langle Au, v \rangle|}{\|v\|_0}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}|\langle Au, v \rangle| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx \\ &\stackrel{Holder}{\leq} \sum_{i=1}^n \left\{ \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{(p-1)p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{(p-1)p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dx \\ &\leq \|u\|_0^{p-1} \|v\|_0^p.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{|\langle Au, v \rangle|}{\|v\|_0} \leq \|u\|_0^{p-1},$$

e portanto,

$$\sup_{v \neq 0} \frac{|\langle Au, v \rangle|}{\|v\|_0} \leq C \|u\|_0^{p-1},$$

isto é,

$$\|Au\|_{-1,p'} \leq \|u\|_0^{p-1}.$$

Desta forma,  $A$  é limitado, ou seja,  $A$  leva conjuntos limitados de  $W_0^{1,p}(\Omega)$  em conjuntos limitados de  $W^{-1,p'}(\Omega)$ .

### 3.2.6 Sobre a dualidade $\langle Au, u' \rangle$

Observemos que, se  $u : (0, T) \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$  é tal que  $u'(t) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , temos:

$$\langle Au, u' \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u'}{\partial x_i} dx.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_0^p &= \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \sum \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx \\ &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{-1} \frac{\partial u'}{\partial x_i} dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u'}{\partial x_i} dx \\ &= \langle Au, u' \rangle. \end{aligned}$$

Resultando em:

$$\langle Au, u' \rangle = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_0^p.$$

E com isto, concluímos nosso trabalho.

# Referências Bibliográficas

- [1] Alexandro O.Marinho, *Soluções Fracas para um Sistema Hiperbólico Envolvendo o Operador  $p$ -Laplaciano* UFPB 2006.
- [2] Arbogast and J. Bona; *Methods of Applied Mathematics*; DM-Austin Texas 2005.
- [3] Browder, F.E., Ton,Buy An; *Nonlinear funcional equations in Banach Spaces and elliptic regularization*.Math. Zeitsch 105(1968) , 177 – 195
- [4] CASTRO, N.N.O.; *Soluções Fracas Para um Sistema Hiperbólico Envolvendo o Operador  $p$ -Laplaciano, notas de aula, UFPB, 2005.*
- [5] CASTRO, N. N. O. . *Weak Solutions To A Coupled Nonlinear System With The  $p$ -Laplacian Operator*. Advances in Differential Equations and Control Process, v. 1, p. 163-170, 2008.
- [6] Cavalcante, M.M. *Introdução à Teoria das Distribuições e aos espaços de Sobolev*, Notas, Maringá, 2000.
- [7] Eberhard Zeidler: *Applied Functional Analysis, Applied Math Sciences*, 108. Springer, 1995.
- [8] H.Brezis; *Analyse Fonctionnelle.Théorie et Applications*, Masson, 1987.
- [9] Kreyszig, Erwin: *Introductory Functional Analisis with Aplications*.New York.Jonh Wiley & Sons.

- [10] L.A.Medeiros; *Equações Diferenciais Parciais*; Notas de Aula, UFRJ, I.M. 1981.
- [11] L.A.Medeiros-Eliel Amancio de Mello; *A integral de Lebesgue*; IM-UFRJ 2006.
- [12] L.A.Medeiros-P.H.Rivera; *Introdução aos Espaços de Sobolev*. Notas de aula, I.M.U.F.R.J, 1977.
- [13] L.A.Medeiros, Miranda, M.M; *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais*; IM-UFRJ, 1989
- [14] L.A.Medeiros, Miranda, M.M.: *Weak solutions for a system of non-linear Klein-Gordon equations*, *Annali di Matematica Pura ed Applicata IV*(CXLVI), 1793-183
- [15] L.C, Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, (1997).
- [16] Lions, J.L.: *Equations Differentielles Operationnelles Et Problems aux Limites*. Springer Verlag, Berlin Gottinger. Heidelberg, 1961
- [17] Robert G.Bartle; *The elements of Integration*; U.S.A 1966.
- [18] Rodney Josué Biezuner, *Notas de aula do curso de Análise Funcional do Programa de Pós-Graduação em Matemática*, UFMG, 2009.
- [19] Segal, I.: *Nonlinear partial differential equations in quantum field theory*. Proc.AMS 17(1965), 210-226.