

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Representação Tipo Weierstrass para Superfícies Imersas em Espaços de Heisenberg.

Por
Valdecir Alves dos Santos Júnior

sob orientação do
Prof. Dr. Pedro A. Hinojosa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre da Ciência em Matemática.

julho - 2011
João Pessoa, Paraíba

Representação Tipo Weierstrass para Superfícies Imersas em Espaços de Heisenberg.

por

Valdecir Alves dos Santos Júnior

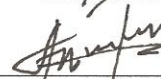
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre da Ciência em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada por:



Prof. Dr. **Pedro A. Hinojosa**
Orientador



Prof. Dr. **Jorge Antonio Hinojosa Vera**
Examinador



Prof. Dr. **Jorge Herbert Soares de Lira**
Examinador

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

julho - 2011

S237r Santos Júnior, Valdecir Alves dos.
Representação tipo Weierstrass para superfícies imersas
em espaços de Heisenberg / Valdecir Alves dos Santos
Júnior.-- João Pessoa, 2011.
81f.
Orientador: Pedro A. Hinojosa
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1.Matemática. 2.Representação de Weierstrass. 3.Imersão
mínima. 4.Grupo de Heisenberg. 5.Operador Dirac. 6.Aplicação
De Gauss.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

Data: **julho - 2011**

Autor: **Valdecir Alves dos Santos Júnior**

Título: **Representação Tipo Weierstrass
para Superfícies Imersas em
Espaços de Heisenberg.**

Depto.: **Matemática**

Grau: **M.Sc.** Convocação: **julho** Ano: **2011**

Permissão está juntamente concedida pela Universidade Federal da Paraíba à circular e ser copiado para propósitos não comerciais, em sua descrição, o título acima sob a requisição de indivíduos ou instituições.

Assinatura do Autor

O AUTOR RESERVA OUTROS DIREITOS DE PUBLICAÇÃO, E NEM A TESE NEM EXTENSIVAS EXTRAÇÕES DELA PODEM SER IMPRESSAS OU REPRODUZIDAS SEM A PERMISSÃO ESCRITA DO AUTOR.

O AUTOR ATESTA QUE A PERMISSÃO TEM SIDO OBTIDA PELO USO DE QUALQUER DIREITO AUTORAL DO MATERIAL EM QUE ESTA TESE APAREÇA(OU BREVES RESUMOS REQUERENDO APENAS O PRÓPRIO AGRADECIMENTO NO MATERIAL ESCRITO) E QUE TODOS OS TAIS USOS SEJAM CLARAMENTE AGRADECIDOS.

Em memória de meu pai.

*“ Não seja aquilo que as pessoas querem que
você seja, mas mostre-as o quanto você é ca-
paz”.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por estar comigo sempre. Principalmente pela vida que me permitiu viver. Pelas dificuldades que, acima de tudo, me tornaram o que sou hoje.

A Nossa Senhora, Maria, nossa mãe, por sempre me guiar por caminhos certos e por ser, para todos nós, exemplo de amor, abandono e entrega a Deus.

A meu pai, Valdecir, que nos seus poucos anos de vida me ensinaram a ser forte diante da vida.

A minha mãe, Maria Rosimeire, exemplo de força e garra. A minha irmã Manuela, que é hoje um dos pilares da nossa família.

A meu irmão Kairo Bruno, pela ajuda no período da graduação, sem você não chegaria até aqui.

Agradeço, aos amigos do mestrado, em especial, Elano, Elielson e Disson, que me receberam em seu apartamento nos primeiros dois meses na minha chegada em João Pessoa, pelas horas de estudo, pelos momentos de laser etc.

Aos meus grandes amigos Claudemir e Ailton, pelo companheirismo, amizade nos momentos difíceis e alegres. Que Deus sempre esteja com eles.

Aos meus antigos professores da Universidade Federal do Maranhão, em especial aos Professores Marcos, Maxwell, Nivaldo Muniz, meu orientador Jefferson Leite e Cleber. Que mais que educadores, amigos e conselheiros.

Ao professor Fagner Araruna pela ajuda desde a entrada no mestrado até na indicação para professor da Universidade Estadual da Paraíba. Grande professor e amigo.

Aos meus mais que irmãos, Amigos do Altar, a todos sem distinção. Pela nova vida, pelo companheirismo e principalmente pela oportunidade de conhecer Deus através das pessoas.

A Katuscia, a pessoal que me mostrou o amor de nossa mãe Maria, mãe de Jesus, mãe de todos nós. Uma das poucas pessoas que realmente acredita em mim acima de tudo. Obrigado pelo carinho.

A Fernanda Moreira, minha namorada, por estar comigo nos momentos alegres, duvidosos e principalmente nos difíceis, como são muitos... Pelo apoio, força, admiração e principalmente pelo carinho que me transmite por suas ações. Te amo meu bebê.

Ao meu orientador Pedro Hinojosa, pela aceitação da orientação, pela compreensão e pelo apoio no decorrer deste trabalho. Obrigado por tudo. Que nossa amizade não se limite somente a esses poucos anos.

A minha querida amiga Gabriela, exemplo de determinação e humildade. Que Deus permita que você seja sempre esta pessoa alegre, feliz e companheira. Obrigado pela ajuda em toda a dissertação, sem você não conseguiria.

Aos professores Jorge Hinojosa e Jorge Herbet, por ter aceitado participar da banca e principalmente por terem aprovado a mesma.

A todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho. Que Deus os abençoe.

Índice

Agradecimentos	v
Resumo	viii
Abstract	ix
Introdução	x
1 Preliminares	1
1.1 Teoria Local das Superfícies	1
1.2 Grupos de Lie	7
1.3 Grupo de Heisenberg	9
2 A Representação Espinorial.	18
3 A Aplicação de Gauss.	44
4 Exemplos.	64
Referências Bibliográficas	69

Resumo

Neste trabalho obtemos uma representações tipo Weierstrass para superfícies imersas no espaço de Heisenberg, dotado com uma métrica invariante à esquerda. Consideraremos os casos Riemanniano e Lorentziano. Definimos duas funções complexas (spinors), satisfazendo uma equação linear tipo Dirac que usamos para obter uma representação para superfícies imersas com curvatura média prescrita. A mesma possibilita escrever uma representação de imersões mínimas em termos de uma aplicação de Gauss harmônica.

Palavras-Chave:

Imersão mínima, Representação de Weierstrass, Grupo de Heisenberg, Operador de Dirac, Aplicação de Gauss.

Abstract

In this work we obtain Weierstrass-type representations for immersed surfaces in Heisenberg space, endowed with a left-invariant metric. We will consider the Riemannian and Lorentzian case. We will define two complex functions (spinors) satisfying a linear Dirac-type equation, obtaining thus a representation for immersed surfaces with prescribed mean curvature. The same will enable us write a representation of minimal immersion in terms of a harmonic Gauss map.

Key words:

Minimal immersions, Weierstrass representation, Heisenberg group, Dirac operator, Gauss map.

Introdução

A clássica fórmula da Representação de Weierstrass para superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 com sua generalização para \mathbb{R}^n foi provada ser uma ferramenta extremamente útil para o estudo de superfícies mínimas nesses espaços (veja, [1], [7]). Anos atrás, pensando em descrever uma generalização de superfícies não mínimas, em 1979, Kenmotsu mostrou uma fórmula de representação para superfícies imersas de curvatura média prescrita por meio da aplicação de Gauss (veja, [9]).

Uma década mais tarde a representação era reformulada em termos de duas funções complexas, as quais compõem um campo de spinors, que satisfazem uma equação linear tipo Dirac no plano complexo (veja [10], [17]). Esta abordagem foi retomada recentemente por Taimanov e D. Berdinsky em contexto de outros ambientes, como grupos de Lie tridimensionais por exemplo. O método está em [2], [18] e [19], que permite obter uma representação spinorial de curvatura média prescrita em termos das equações de Dirac.

Usando estratégias diferentes, autores como B. Daniel, I. Fernández, P. Mira (veja [3] e [5]), entre outros, definiram noções naturais da aplicação de Gauss no contexto de espaços homogêneos tridimensionais com grupo isométrico de dimensão quatro. Em especial B. Daniel em [3], obtém uma representação tipo Weierstrass em termos de uma aplicação de Gauss harmônica satisfazendo certas condições.

Com esta mesma abordagem de spinors Luis J. Alias, Jorge Herbet S. de Lira e Jorge A. Hinojosa (veja [12]) estudaram as superfícies imersas no grupo de Heisenberg, considerando tanto a estrutura Riemanniana quanto Lorentziana. Os mesmos dão uma representação tipo Weierstrass para superfícies imersas de curvatura média

prescrita e também uma representação para superfícies mínimas em termos de uma aplicação de Gauss harmônica. Utilizaremos este texto como base para nossa dissertação.

Organizaremos este trabalho da seguinte maneira. No primeiro capítulo, apresentamos a teoria base para compreensão do trabalho e resultados que serão utilizados no decorrer do mesmo. Assim como o nosso ambiente de estudo, o grupo de Heisenberg. No segundo capítulo, obtemos uma representação tipo Weierstrass para superfícies imersas com curvatura média prescrita no espaço de Heisenberg em termos de spinors, satisfazendo uma equação tipo Dirac. O terceiro capítulo contém os resultados sobre harmonicidade da aplicação de Gauss para superfícies mínimas e a fórmula da representação integral correspondente. Finalmente no quarto capítulo, serão obtidos alguns exemplos aplicando a fórmula de representação integral obtida no capítulo anterior.

Capítulo 1

Preliminares

Nas primeiras seções deste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos da teoria local das superfícies, aplicações harmônicas entre superfícies de Riemann e Grupos de Lie. A fim de dar ao leitor as ferramentas básicas para compreensão do texto, envolvendo definições e resultados que serão utilizados no decorrer do trabalho.

1.1 Teoria Local das Superfícies

Denotamos por M_ϵ uma variedade de dimensão 3 dotada de uma métrica riemanniana, quando $\epsilon = 1$, ou de uma métrica pseudo-riemanniana de índice 1, quando $\epsilon = -1$. Seja $X : \Sigma \rightarrow M_\epsilon$ uma imersão isométrica de uma superfície de Riemann conexa Σ em M_ϵ . Denotamos por I e II a primeira e segunda formas fundamentais da imersão X . Assim,

$$I = \langle dX, dX \rangle,$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a métrica em M_ϵ e

$$II = -\langle dN, dX \rangle,$$

em que N é um campo normal ao longo de X que, satisfaz

$$\langle N, N \rangle = \pm 1 := \epsilon.$$

Denotamos por ∇ e $\bar{\nabla}$, respectivamente, as conexões de Levi-Civita em Σ e em M_ϵ . Consideramos, um parâmetro conforme $z = u + iv$ em Σ . Indicamos os campos coordenados referentes ao sistema de coordenadas (u, v) alternativamente por X_u, X_v . Os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ são

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle \quad \text{e} \quad G = \langle X_v, X_v \rangle.$$

Denotamos as derivadas covariantes por $\bar{\nabla}_{X_u} X_u = X_{uu}$, $\bar{\nabla}_{X_u} N = N_u$, e assim por diante, obtém-se, para os coeficientes da segunda forma, as expressões

$$e = -\langle N_u, X_u \rangle, \quad f = -\langle N_u, X_v \rangle \quad \text{e} \quad g = -\langle N_v, X_v \rangle.$$

O operador de Weingarten $A : T\Sigma \longrightarrow T\Sigma$ é definido, atuando em um campo Y sobre o fibrado tangente a Σ , $T\Sigma$, por

$$AY = -\bar{\nabla}_Y N.$$

Seja (a_{ij}) a matriz deste operador na base $\{X_u, X_v\}$, isto é,

$$AX_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v = -\bar{\nabla}_{X_u} N = -N_u \tag{1.1}$$

$$AX_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v = -\bar{\nabla}_{X_v} N = -N_v. \tag{1.2}$$

Define-se a curvatura média H da imersão $X : \Sigma \longrightarrow M_\epsilon$ por

$$H = \frac{\epsilon}{2} \text{tr}(A) = \frac{\epsilon}{2}(a_{11} + a_{22}).$$

É imediato verificar que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

donde segue que

$$AX_u = -N_u = \frac{eG - fF}{EG - F^2} X_u + \frac{fE - eF}{EG - F^2} X_v,$$

$$AX_v = -N_v = \frac{fG - gF}{EG - F^2} X_u + \frac{gE - fF}{EG - F^2} X_v.$$

No sistema de coordenadas conformes (u, v) temos,

$$E = G := e^{2w}, \quad F = 0 \quad (1.4)$$

em que $w = w(z, \bar{z})$ é uma função positiva localmente definida em Σ .

Denotamos os campos correspondentes aos parâmetros (z, \bar{z}) por

$$\frac{\partial}{\partial z} = \partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right).$$

Assim temos

$$X_z = \frac{1}{2}(X_u - iX_v), \quad X_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(X_u + iX_v),$$

e logo,

$$X_u = X_z + X_{\bar{z}}, \quad X_v = i(X_z - X_{\bar{z}}).$$

Como X é conforme e $|X_u \wedge X_v|^2 = |X_u|^2|X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2$ temos que,

$$|X_u \wedge X_v| = e^{2w}.$$

Agora observe que

$$\begin{aligned} X_z \wedge X_{\bar{z}} &= \left[\frac{1}{2}(X_u - iX_v)\right] \wedge \left[\frac{1}{2}(X_u + iX_v)\right] \\ &= \frac{i}{4}X_u \wedge X_v - \frac{i}{4}X_v \wedge X_u \\ &= \frac{i}{2}X_u \wedge X_v, \end{aligned}$$

portanto

$$X_u \wedge X_v = -2iX_z \wedge X_{\bar{z}},$$

logo temos o campo normal unitário

$$N = -2ie^{-2w}X_z \wedge X_{\bar{z}}. \quad (1.5)$$

Note também que

$$\langle X_z, X_z \rangle = \langle X_{\bar{z}}, X_{\bar{z}} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{2}e^{2w}. \quad (1.6)$$

Estendemos as conexões riemannianas em Σ e M_ϵ a vetores complexos por linearidade complexa, de modo que

$$X_{zz} = \bar{\nabla}_{X_z} X_z = \frac{1}{4}(X_{uu} - X_{vv} - 2iX_{uv}),$$

$$X_{z\bar{z}} = \bar{\nabla}_{X_z} X_{\bar{z}} = \bar{\nabla}_{\frac{1}{2}(X_u - iX_v)} \frac{1}{2}(X_u + iX_v) = \frac{1}{4}(X_{uu} + X_{vv})$$

e

$$X_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}} X_{\bar{z}} = \bar{\nabla}_{\frac{1}{2}(X_u + iX_v)} \frac{1}{2}(X_u + iX_v) = \frac{1}{4}(X_{uu} - X_{vv} + 2iX_{uv}).$$

Visto que as coordenadas (u, v) são conformes, obtemos de (1.3) e (1.4) a simetria $a_{12} = a_{21}$. Assim, denotando-se $N_z = \bar{\nabla}_{X_z} N = \frac{1}{2}(N_u - iN_v)$, segue que

$$\begin{aligned} -N_z &= -\frac{1}{2}(N_u - iN_v) \\ &= \frac{1}{2}\{a_{11}X_u + a_{21}X_v - i(a_{12}X_u + a_{22}X_v)\} \\ &= \frac{1}{2}\{(a_{11} - ia_{12})X_u + (a_{21} - ia_{22})X_v\} \\ &= \frac{1}{2}\{(a_{11} - ia_{12})(X_z + X_{\bar{z}}) + (a_{21} - ia_{22})i(X_z - X_{\bar{z}})\} \\ &= \frac{1}{2}\{(a_{11} - ia_{12} + ia_{21})X_z + (a_{11} + a_{21} - ia_{12} - ia_{21})X_{\bar{z}}\} \\ &= \frac{1}{2}\{(a_{11} + a_{22})X_z + (a_{11} - a_{22} - 2ia_{21})X_{\bar{z}}\} \end{aligned}$$

Desta forma

$$-N_z = \epsilon H X_z + q_0 X_{\bar{z}}$$

$$-N_{\bar{z}} = \bar{q}_0 X_z + \epsilon H X_{\bar{z}}$$

em que

$$q_0 = \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22} - 2ia_{21}).$$

Os coeficientes complexos da segunda forma são,

$$\begin{aligned}
\frac{q}{2} &:= \langle X_{zz}, N \rangle \\
&= -\langle X_z, N_z \rangle \\
&= \langle X_z, \epsilon H X_z + q_0 X_{\bar{z}} \rangle \\
&= q_0 \langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle \\
&= \frac{1}{2} q_0 e^{2w},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle X_{z\bar{z}}, N \rangle &= -\langle X_z, N_{\bar{z}} \rangle \\
&= \langle X_z, \bar{q}_0 X_z + \epsilon H X_{\bar{z}} \rangle \\
&= \epsilon H \langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle \\
&= \frac{\epsilon}{2} H e^{2w},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{q}}{2} &= \langle X_{\bar{z}\bar{z}}, N \rangle \\
&= -\langle X_{\bar{z}}, N_{\bar{z}} \rangle \\
&= \frac{1}{2} \bar{q}_0 e^{2w},
\end{aligned}$$

temos ainda,

$$\langle X_z, X_{zz} \rangle = \langle X_z, X_{z\bar{z}} \rangle = \langle X_{\bar{z}}, X_{\bar{z}\bar{z}} \rangle = \langle X_{\bar{z}}, X_{z\bar{z}} \rangle = 0,$$

$$\langle X_{\bar{z}}, X_{zz} \rangle = \partial_z \langle X_{\bar{z}}, X_z \rangle = \frac{1}{2} \partial_z (e^{2w}) = e^{2w} w_z$$

e

$$\langle X_z, X_{\bar{z}\bar{z}} \rangle = \partial_{\bar{z}} \langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{2} \partial_{\bar{z}} (e^{2w}) = e^{2w} w_{\bar{z}}.$$

Desta forma,

$$X_{zz} = 2w_z X_z + \frac{\epsilon}{2} q N,$$

$$X_{z\bar{z}} = X_{\bar{z}z} = \frac{\epsilon}{2} H e^{2w} N,$$

$$X_{\bar{z}\bar{z}} = 2w_{\bar{z}} X_{\bar{z}} + \frac{\epsilon}{2} \bar{q} N.$$

Assim as equações de *Gauss-Codazzi* são:

$$\bar{\nabla}_{X_z} X_z = 2w_z X_z + \epsilon \frac{q}{2} N, \quad (1.7)$$

$$\bar{\nabla}_{X_z} X_{\bar{z}} - \bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}} X_z = 0, \quad (1.8)$$

$$\bar{\nabla}_{X_z} X_{\bar{z}} + \bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}} X_z = \epsilon H e^{2w} N, \quad (1.9)$$

em que a curvatura média H e a função de Hopf q são os coeficientes da segunda forma fundamental complexa de Σ com respeito ao campo normal unitário $N = -2e^{-2w} X_z \wedge X_{\bar{z}}$.

Agora, seja $f : \Sigma \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável C^2 entre superfícies de Riemann. Fixamos parâmetros conformes $z = u + iv$ e $w = x_1 + ix_2$ em Σ e N , respectivamente, de modo que f é localmente representada por

$$z = u + iv \xrightarrow{f} w = x_1(u, v) + ix_2(u, v)$$

Denotamos os coeficientes da métrica em N , nas coordenadas (x_1, x_2) , por

$$g_{ij}^N(x_1, x_2) = \lambda^2(x_1, x_2) \delta_{ij}$$

então os símbolos de Christoffel da conexão riemanniana correspondente, com respeito ao referencial $\{\partial_{x_1}, \partial_{x_2}\}$, são dados por

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{\lambda_{x_1}}{\lambda}, \quad \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{\lambda_{x_2}}{\lambda}.$$

Sabemos que f é harmônica se, e somente se, sua expressão local satisfaz

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial z \partial \bar{z}} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x_j}{\partial z} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{z}} = 0, \quad i = 1, 2$$

Estas equações correspondem a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial z \partial \bar{z}} + \Gamma_{11}^1 \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial x_2}{\partial z} \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right\} + \Gamma_{22}^2 \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial x_2}{\partial z} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} \right\} &= 0 \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial z \partial \bar{z}} + \Gamma_{22}^2 \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial x_2}{\partial z} \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right\} + \Gamma_{11}^1 \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial x_2}{\partial z} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

Ao somarmos a primeira equação acima com a segunda multiplicada por i , obtemos

$$f_{z\bar{z}} + (\Gamma_{11}^1 - i\Gamma_{22}^2) \left\{ \left(\frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial x_2}{\partial z} \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) + i \left(\frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial x_2}{\partial z} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} \right) \right\} = 0,$$

que pode ser expressa como

$$f_{z\bar{z}} + (\Gamma_{11}^1 - i\Gamma_{22}^2) \left(\frac{\partial x_1}{\partial z} + i \frac{\partial x_2}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \right) = 0$$

ou, ainda, por

$$f_{z\bar{z}} + (\Gamma_{11}^1 - i\Gamma_{22}^2) f_z f_{\bar{z}} = 0,$$

em que

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 - i\Gamma_{22}^2 &= (\Gamma_{11}^1 - i\Gamma_{22}^2) f(z) \\ &= \frac{1}{\lambda(f(z))} \{ \lambda_{x_1}(f(z)) - i\lambda_{x_2}(f(z)) \} \\ &= \frac{2}{\lambda(f(z))} \lambda_w(f(z)) \end{aligned}$$

Desta forma, f é harmônica se, e somente se,

$$f_{z\bar{z}} + \frac{2}{\lambda(f(z))} \lambda_w(f(z)) f_z f_{\bar{z}} = 0 \quad (1.10)$$

1.2 Grupos de Lie

Definição 1.1. *Um grupo de Lie G é uma variedade diferenciável C^∞ com uma estrutura de grupo e tal que a aplicação*

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

é diferenciável C^∞ .

Segue-se imediatamente da definição que, para cada $g \in G$, as aplicações

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G & R_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto gh & h &\longmapsto hg \end{aligned}$$

são difeomorfismos de G . L_g e R_g são chamadas translações à esquerda e à direita respectivamente.

Definição 1.2. *Um campo $X \in \mathfrak{X}(G)$, diz-se invariante à esquerda se, somente se $dL_g(X_h) = X_{gh}$.*

Analogamente, X é invariante à direita se, somente se $dR_g(X_h) = X_{hg}$.

Se X é um campo invariante à esquerda (respectivamente à direita), então para conhecer o campo basta conhecer o valor de X_e , ou seja, o valor do campo na identidade e , pois

$$X_g = dL_g(X_e) \quad \forall g \in G.$$

Definição 1.3. *Uma Álgebra de Lie sobre um corpo \mathbb{F} é um espaço vetorial, sobre \mathbb{F} munido com uma operação $[\cdot, \cdot]$ chamada colchete de Lie, que é bilinear, anti-simétrica e satisfaz a igualdade de Jacobi, isto é: Um espaço vetorial L com $[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L$ \mathbb{R} -bilinear tal que, $\forall x, y, z \in L$*

a) $[x, y] = -[y, x];$

b) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0.$

A restrição do colchete de Lie de campos a campos invariantes à esquerda define uma álgebra de Lie. Isto significa que, dados campos invariantes à esquerda V, W , o colchete $[V, W]$ é também invariante à esquerda. A álgebra de Lie é igualmente definida como a álgebra no espaço tangente, ou seja,

$$[V_e, W_e] \equiv [V, W](e).$$

Exemplos clássicos de grupos de Lie são encontrados no espaço vetorial $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$ reais, como subgrupos do grupo $GL_n(\mathbb{R})$ das matrizes invertíveis. A álgebra de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$ é isomorfa a $M_n(\mathbb{R})$ com o colchete usual de matrizes

$$[M, N] = MN - NM.$$

Define-se a exponencial de matrizes segundo a fórmula

$$\exp M = I + M + \frac{1}{2}M^2 + \dots + \frac{1}{k!}M^k + \dots .$$

Neste caso, temos $\exp : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$. Uma fórmula a ser utilizada mais adiante, relacionando o colchete de Lie na álgebra e o produto no grupo, é a seguinte

$$\exp(tM)\exp(tN) = \exp(t(M + N) + \frac{t^2}{2}[M, N] + O(t^3)),$$

onde os termos de terceira ordem dependem de aplicações repetidas do colchete de Lie.

1.3 Grupo de Heisenberg

O grupo de Heisenberg é uma variedade Riemanniana tridimensional. Do ponto de vista algébrico é 2-nilpotente (ou quase-abeliano), a situação mais perto de ser abeliano, ou seja, isomorfo a \mathbb{R}^3 , e de um ponto de vista geométrico o grupo das isometrias tem dimensão 4, o que é a dimensão máxima possível para o grupo de isometrias de uma variedade Riemanniana tridimensional de curvatura seccional não constante. Aqui apresentaremos uma forma de construir o grupo de Heisenberg pela exponencial de um conjunto de matrizes triangulares superiores em $M_3(\mathbb{R})$, o motivo dessa escolha é o fato de que, com esse processo, já obtemos sua álgebra de Lie. Daremos as ferramentas básicas, nesse grupo, para podermos desenvolver estudos posteriores.

Considere as matrizes triangulares superiores em $M_3(\mathbb{R})$, da forma

$$\mathfrak{h}_3 = \left\{ M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}x & z \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

onde τ é um parâmetro real positivo. Em \mathfrak{h}_3 considere o colchete $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{h}_3 \times \mathfrak{h}_3 \longrightarrow \mathfrak{h}_3$ definido por $[M, N] = MN - NM$. É fácil verificar que \mathfrak{h}_3 munido desta operação é uma álgebra de Lie, ou seja:

- i) \mathfrak{h}_3 é um espaço vetorial;
- ii) $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{h}_3 \times \mathfrak{h}_3 \longrightarrow \mathfrak{h}_3$ é \mathbb{R} -bilinear;
- iii) $[M, N] = -[N, M]$, anti-simétrica;
- iv) $[[M, N], T] + [[N, T], M] + [[T, M], N] = 0$.

Observamos que, se $M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}x & z \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ então, $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\tau xy \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$M^3 = M^2M = 0$ (matriz nula) e $\forall M, N, T \in \mathfrak{h}_3$, $[[M, N], T] = 0$.

Assim obtemos,

$$\begin{aligned} A = \exp M &= I + M + \frac{1}{2}M^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}x & z \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\tau xy \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}x & z + \tau xy \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Portanto, exponenciando a álgebra de Lie

$$\mathfrak{h}_3 = \left\{ M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}x & z \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

geramos o grupo das matrizes em $GL_3(\mathbb{R})$

$$\mathbb{H}_3(\tau) = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}x & z + \tau xy \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

denominado *Grupo de Heisenberg*.

Agora tomando a matriz $A = \exp M$ em $\mathbb{H}_3(\tau)$, onde $M \in \mathfrak{h}_3$ é representada pelas coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, denominadas *coordenadas exponenciais* de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}x & z + \tau xy \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O uso destas coordenadas permite explicitar a estrutura de grupo em $\mathbb{H}_3(\tau)$. O produto em \mathbb{H}_3 é obtido por restrição do produto usual de matrizes em $M_3(\mathbb{R})$. Assim, dadas as matrizes A e B representadas em coordenadas exponenciais por

$$A \mapsto (x, y, z) \quad e \quad B \mapsto (x', y', z'),$$

o produto de matrizes $(A, B) \mapsto AB$ é representado nestas mesmas coordenadas por

$$(x, y, z) * (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + \tau(xy' - x'y)).$$

Na álgebra de Lie \mathfrak{h}_3 , destacamos os vetores tangentes

$$e_1 = \partial_x = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \partial_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad e_3 = \partial_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\tau \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2\tau \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\tau e_3.
\end{aligned}$$

Sendo nulas as demais relações. Da mesma forma, obtemos que $[\mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_3] = \mathbb{R}.e_3 \equiv \mathfrak{h}$ e $[[\mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_3], \mathfrak{h}_3] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_3] = 0$. Assim, a álgebra de Lie é *2-nilpotente*, com centro dado por \mathfrak{h} .

Em seguida, determinamos os campos invariantes à esquerda associados aos vetores e_1, e_2, e_3 . O subgrupo a um parâmetro gerado por e_1 é a curva passando pela identidade com velocidade e_1 , dada por

$$\begin{aligned}
\exp(te_1) &= I + te_1 + \frac{t^2}{2}e_1^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Em coordenadas exponenciais, esta curva corresponde a $t \mapsto (t, 0, 0)$. Denotamos por E_1 o campo invariante à esquerda gerado por e_1 . A curva integral do campo E_1

passando pelo ponto $A \in \mathbb{H}_3(\tau)$ com coordenadas (x, y, z) é dada por

$$\begin{aligned} L_A(\exp(te_1)) &= A(\exp(te_1)) \\ &= (x, y, z) * (t, 0, 0) \\ &= (x + t, y, z - t\tau y). \end{aligned}$$

Derivando em $t = 0$, temos o campo E_1 em $A = (x, y, z)$

$$\begin{aligned} E_1 \Big|_{(x,y,z)} &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x + t, y, z - t\tau y) \\ &= (1, 0, -\tau y) \\ &= (1, 0, 0) - \tau y(0, 0, 1) \\ &= \partial_x - \tau y \partial_z. \end{aligned}$$

Da mesma forma, dado o vetor tangente e_2 em \mathfrak{h}_3 , definimos a curva

$$\exp(te_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou, em coordenadas exponenciais, $t \mapsto (0, t, 0)$. Daí a curva integral do campo E_2 passando por $A = (x, y, z)$ é

$$L_A(\exp(te_2)) = (x, y + t, z + \tau xt).$$

Derivando em $t = 0$, temos o campo E_2 em $A = (x, y, z)$

$$E_2 \Big|_{(x,y,z)} = \partial_y + \tau x \partial_z.$$

Analogamente obtemos

$$E_3 \Big|_{(x,y,z)} = \partial_z.$$

Assim os campos invariantes à esquerda gerados por $e_1 = \partial_x$, $e_2 = \partial_y$ e $e_3 = \partial_z$ na álgebra de Lie \mathfrak{h}_3 , são respectivamente

$$\begin{aligned}
E_1 &= \partial_x - \tau y \partial_z, \\
E_2 &= \partial_y + \tau x \partial_z, \\
E_3 &= \partial_z.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Calculando os colchetes de Lie, temos

$$\begin{aligned}
[E_1, E_2]_{(x,y,z)} &= dL_{(x,y,z)}[E_1, E_2]_e \\
&= dL_{(x,y,z)}[e_1, e_2] \\
&= dL_{(x,y,z)}2\tau e_3 \\
&= 2\tau E_3,
\end{aligned}$$

sendo nulas as demais relações. Ou seja,

$$[E_1, E_2] = 2\tau E_3 \quad \text{e} \quad [E_1, E_3] = [E_2, E_3] = 0. \tag{1.12}$$

Definimos uma métrica em $\mathbb{H}_3(\tau)$, invariante à esquerda, que denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de modo que os vetores e_1 , e_2 e e_3 sejam ortogonais e verifiquem

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 1, \quad \langle e_3, e_3 \rangle = \pm 1 := \epsilon. \tag{1.13}$$

Agora, escrevemos

$$\begin{cases} \partial_x = E_1 + \tau y E_3 \\ \partial_y = E_2 - \tau x E_3 \\ \partial_z = E_3 \end{cases}$$

Assim, obtemos as componentes da métrica em termos de coordenadas exponenciais,

$$\begin{aligned}
\langle \partial_x, \partial_x \rangle &= \langle E_1 + \tau y E_3, E_1 + \tau y E_3 \rangle \\
&= \langle E_1, E_1 \rangle + \tau y \langle E_1, E_3 \rangle + \tau y \langle E_3, E_1 \rangle + \tau^2 y^2 \langle E_3, E_3 \rangle \\
&= 1 + \epsilon \tau^2 y^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \partial_y, \partial_y \rangle &= \langle E_2 - \tau x E_3, E_2 - \tau x E_3 \rangle \\
&= \langle E_2, E_2 \rangle - \tau x \langle E_2, E_3 \rangle - \tau x \langle E_3, E_2 \rangle + \tau^2 x^2 \langle E_3, E_3 \rangle \\
&= 1 + \epsilon \tau^2 x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \partial_z, \partial_z \rangle &= \langle E_3, E_3 \rangle \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \partial_x, \partial_y \rangle &= \langle E_1 + \tau y E_3, E_2 - \tau x E_3 \rangle \\
&= \langle E_1, E_2 \rangle - \tau x \langle E_1, E_3 \rangle + \tau y \langle E_3, E_2 \rangle - \tau^2 xy \langle E_3, E_3 \rangle \\
&= -\epsilon \tau^2 xy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \partial_x, \partial_z \rangle &= \langle E_1 + \tau y E_3, E_3 \rangle \\
&= \langle E_1, E_3 \rangle + \tau y \langle E_3, E_3 \rangle \\
&= \epsilon \tau y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \partial_y, \partial_z \rangle &= \langle E_2 - \tau x E_3, E_3 \rangle \\
&= \langle E_2, E_3 \rangle - \tau x \langle E_3, E_3 \rangle \\
&= -\epsilon \tau x.
\end{aligned}$$

Logo, a métrica invariante à esquerda que fixamos em $\mathbb{H}_3(\tau)$ é dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \epsilon(\tau y dx - \tau x dy + dz)^2. \quad (1.14)$$

De agora em diante, o grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3(\tau)$ dotado com esta métrica será denotado por $\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$.

Lembrando que, se X, Y e Z são campos invariantes à esquerda então $\langle X, Y \rangle =$ constante. Consequentemente a fórmula da conexão se reduz a

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle. \quad (1.15)$$

Assim temos o seguinte Lema:

Lema 1.4. *Os campos invariantes à esquerda $\{E_1, E_2, E_3\}$ satisfazem*

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{E_1}E_1 &= 0 & \bar{\nabla}_{E_2}E_1 &= -\tau E_3 & \bar{\nabla}_{E_3}E_1 &= \epsilon\tau E_2 \\ \bar{\nabla}_{E_1}E_2 &= \tau E_3 & \bar{\nabla}_{E_2}E_2 &= 0 & \bar{\nabla}_{E_3}E_2 &= \epsilon\tau E_1 \\ \bar{\nabla}_{E_1}E_3 &= -\epsilon\tau E_2 & \bar{\nabla}_{E_2}E_3 &= \epsilon\tau E_1 & \bar{\nabla}_{E_3}E_3 &= 0,\end{aligned}$$

e os símbolos de Christoffel, Γ_{ij}^k , da conexão em $\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$ definidos por

$$\bar{\nabla}_{E_i}E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$$

são dados por

$$\Gamma_{12}^3 = \tau = -\Gamma_{21}^3, \quad \Gamma_{13}^2 = -\epsilon\tau = \Gamma_{31}^2, \quad \Gamma_{23}^1 = \epsilon\tau = \Gamma_{32}^1.$$

Sendo nulos os demais.

Demonstração. Substituindo os campos E_1, E_2 e E_3 na equação (1.15) e de (1.12),(1.13), obtemos,

$$2\langle \bar{\nabla}_{E_1}E_1, E_3 \rangle = \langle [E_1, E_1], E_3 \rangle - \langle [E_1, E_3], E_1 \rangle + \langle [E_3, E_1], E_1 \rangle = 0,$$

o que implica $\bar{\nabla}_{E_1}E_1 = 0$,

$$2\langle \bar{\nabla}_{E_2}E_1, E_3 \rangle = \langle [E_2, E_1], E_3 \rangle - \langle [E_1, E_3], E_2 \rangle + \langle [E_3, E_2], E_1 \rangle = \langle -2\tau E_3, E_3 \rangle,$$

daí $\bar{\nabla}_{E_2}E_1 = -\tau E_3$,

$$\begin{aligned}2\langle \bar{\nabla}_{E_3}E_1, E_2 \rangle &= \langle [E_3, E_1], E_2 \rangle - \langle [E_1, E_2], E_3 \rangle + \langle [E_2, E_3], E_1 \rangle \\ &= -\langle 2\tau E_3, E_3 \rangle \\ &= -2\epsilon\tau,\end{aligned}$$

assim $\bar{\nabla}_{E_3}E_1 = -\epsilon\tau E_2$. Análogamente encontramos

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{E_1}E_2 &= \tau E_3, & \bar{\nabla}_{E_2}E_2 &= 0, & \bar{\nabla}_{E_3}E_2 &= \epsilon\tau E_1, & \bar{\nabla}_{E_1}E_3 &= -\epsilon\tau E_2, \\ \bar{\nabla}_{E_2}E_3 &= \epsilon\tau E_1, & \bar{\nabla}_{E_3}E_3 &= 0.\end{aligned}$$

Agora tomando

$$\bar{\nabla}_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k,$$

temos que $\bar{\nabla}_{E_1} E_2 = \Gamma_{12}^1 E_1 + \Gamma_{12}^2 E_2 + \Gamma_{12}^3 E_3$, assim

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_2, E_3 \rangle &= \langle \Gamma_{12}^1 E_1 + \Gamma_{12}^2 E_2 + \Gamma_{12}^3 E_3, E_3 \rangle \\ \langle \tau E_3, E_3 \rangle &= \Gamma_{12}^3 \langle E_3, E_3 \rangle \\ \tau \epsilon &= \Gamma_{12}^3 \epsilon, \end{aligned}$$

logo $\Gamma_{12}^3 = \tau$. Analogamente, fazendo $\langle \bar{\nabla}_{E_2} E_1, E_3 \rangle, \langle \bar{\nabla}_{E_1} E_3, E_2 \rangle, \langle \bar{\nabla}_{E_3} E_1, E_2 \rangle, \langle \bar{\nabla}_{E_2} E_3, E_1 \rangle, \langle \bar{\nabla}_{E_3} E_2, E_1 \rangle$, encontramos respectivamente que $\Gamma_{21}^3 = -\tau, \Gamma_{13}^2 = -\epsilon\tau, \Gamma_{31}^2 = -\epsilon\tau, \Gamma_{23}^1 = \epsilon\tau$ e $\Gamma_{32}^1 = \epsilon\tau$. Como $\bar{\nabla}_{E_1} E_1 = 0, \bar{\nabla}_{E_2} E_2 = 0$ e $\bar{\nabla}_{E_3} E_3 = 0$, segue que $\Gamma_{11}^k = 0, \Gamma_{22}^k = 0$ e $\Gamma_{33}^k = 0$ com $k = 1, 2, 3, \langle E_1, E_2 \rangle = 0, \langle E_1, E_3 \rangle = 0$ e $\langle E_2, E_3 \rangle = 0$ segue que

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{31}^1 = \Gamma_{31}^2 = \Gamma_{32}^2 = \Gamma_{32}^3 = 0.$$

E o resultado segue. □

Por fim o tensor de curvatura em $\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$ é determinado no referencial $\{E_1, E_2, E_3\}$ por

$$\begin{aligned} \bar{R}(E_1, E_2)E_3 &= \bar{\nabla}_{E_2} \bar{\nabla}_{E_1} E_3 - \bar{\nabla}_{E_1} \bar{\nabla}_{E_2} E_3 + \bar{\nabla}_{[E_1, E_2]} E_3 \\ &= \bar{\nabla}_{E_2} (-\epsilon\tau E_2) - \bar{\nabla}_{E_1} (\epsilon\tau E_1) + \bar{\nabla}_{2\tau E_3} E_3 \\ &= -\epsilon\tau \bar{\nabla}_{E_2} E_2 - \epsilon\tau \bar{\nabla}_{E_1} E_1 + 2\tau \bar{\nabla}_{E_3} E_3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\bar{R}(E_2, E_3)E_1 = 0, \quad \bar{R}(E_3, E_1)E_2 = 0, \quad \bar{R}(E_1, E_2)E_2 = 3\epsilon\tau^2 E_1,$$

$$\bar{R}(E_2, E_3)E_3 = -\tau^2 E_2 \quad \text{e} \quad \bar{R}(E_3, E_1)E_1 = -\epsilon\tau^2 E_3$$

Capítulo 2

A Representação Espinorial.

Durante os últimos anos, a ferramenta spinorial vem sendo usada no estudo da geometria e na topologia de subvariedades. A abordagem spinorial permite resolver naturalmente alguns problemas geométricos de subvariedades (para aprofundamento veja, [13], [14] e [15]). Também vários resultados as variedades homogêneas tridimensionais com grupo de isometrias de dimensão quatro foram obtidos, particularmente relativos à curvatura mínima e curvatura média constante (veja, [8] e [20]). Assim, neste capítulo iremos obter uma representação generalizada tipo Weierstrass em termos de spinos, satisfazendo uma equação de Dirac, para superfícies com curvatura média prescrita no espaço de Heisenberg.

Seja $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$ uma imersão isométrica de uma superfície de Riemann simplesmente conexa Σ em $\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$. Dado um parâmetro conforme $z = u + iv$ em Σ , a expressão local para a métrica induzida em Σ é

$$d\sigma^2 = e^{2w}|dz|^2.$$

De fato, como X é conforme temos que

$$|X_u| = |X_v| = e^w \quad e \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0.$$

Ou seja $\langle X_u, X_u \rangle = |X_u|^2 = e^{2w}$, $\langle X_v, X_v \rangle = |X_v|^2 = e^{2w}$ e $\langle X_u, X_v \rangle = 0$, assim

$$d\sigma^2 = e^{2w}du^2 + e^{2w}dv^2 = e^{2w}(du^2 + dv^2) \Rightarrow d\sigma^2 = e^{2w}|dz|^2,$$

em que $w(z, \bar{z})$ é uma função positiva localmente definida em Σ . Então temos da secção (1.1) que,

$$\langle X_z, X_z \rangle = \langle X_{\bar{z}}, X_{\bar{z}} \rangle = 0 \quad e \quad \langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{2}e^{2w}. \quad (2.1)$$

E que as equações de *Gauss-Codazzi* para X são:

$$\bar{\nabla}_{X_z} X_z = 2w_z X_z + \epsilon \frac{q}{2} N, \quad (2.2)$$

$$\bar{\nabla}_{X_z} X_{\bar{z}} - \bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}} X_z = 0, \quad (2.3)$$

$$\bar{\nabla}_{X_z} X_{\bar{z}} + \bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}} X_z = \epsilon H e^{2w} N, \quad (2.4)$$

onde a curvatura média H e a função de Hopf q são os coeficientes da segunda forma fundamental complexa de Σ com respeito ao campo normal unitário

$$N = -2e^{-2w} X_z \wedge X_{\bar{z}}.$$

Aqui o produto exterior é determinado no referencial $\{E_1, E_2, E_3\}$ por

$$E_1 \wedge E_2 = \epsilon E_3, \quad E_2 \wedge E_3 = E_1, \quad E_3 \wedge E_1 = E_2.$$

Usando os campos invariantes à esquerda, escrevemos

$$X_z = \sum_{j=1}^3 Z^j E_j \Big|_X, \quad X_{\bar{z}} = \sum_{j=1}^3 \bar{Z}^j E_j \Big|_X, \quad (2.5)$$

em que $Z_j(z, \bar{z})$, com $j = 1, 2, 3$, são funções de valores complexos. De (1.13) e (2.1) temos

$$\begin{aligned} 0 = \langle X_z, X_z \rangle &= \langle Z^1 E_1 + Z^2 E_2 + Z^3 E_3, Z^1 E_1 + Z^2 E_2 + Z^3 E_3 \rangle \\ &= (Z^1)^2 + (Z^2)^2 + \epsilon (Z^3)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = \langle X_{\bar{z}}, X_{\bar{z}} \rangle &= \langle \bar{Z}^1 E_1 + \bar{Z}^2 E_2 + \bar{Z}^3 E_3, \bar{Z}^1 E_1 + \bar{Z}^2 E_2 + \bar{Z}^3 E_3 \rangle \\ &= (\bar{Z}^1)^2 + (\bar{Z}^2)^2 + \epsilon (\bar{Z}^3)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}e^{2w} = \langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle &= \langle Z^1 E_1 + Z^2 E_2 + Z^3 E_3, \bar{Z}^1 E_1 + \bar{Z}^2 E_2 + \bar{Z}^3 E_3 \rangle \\
&= Z^1 \bar{Z}^1 + Z^2 \bar{Z}^2 + \epsilon Z^3 \bar{Z}^3 \\
&= |Z^1|^2 + |Z^2|^2 + \epsilon |Z^3|^2,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
X_z \wedge X_{\bar{z}} &= (Z^1 E_1 + Z^2 E_2 + Z^3 E_3) \wedge (\bar{Z}^1 E_1 + \bar{Z}^2 E_2 + \bar{Z}^3 E_3) \\
&= Z^1 \bar{Z}^2 E_1 \wedge E_2 + Z^1 \bar{Z}^3 E_1 \wedge E_3 + Z^2 \bar{Z}^1 E_2 \wedge E_1 + Z^2 \bar{Z}^3 E_2 \wedge E_3 \\
&\quad + Z^3 \bar{Z}^1 E_3 \wedge E_1 + Z^3 \bar{Z}^2 E_3 \wedge E_2 \\
&= Z^1 \bar{Z}^2 \epsilon E_3 - Z^1 \bar{Z}^3 E_2 - Z^2 \bar{Z}^1 \epsilon E_3 + Z^2 \bar{Z}^3 E_1 + Z^3 \bar{Z}^1 \epsilon E_2 - Z^3 \bar{Z}^2 \epsilon E_1 \\
&= (Z^2 \bar{Z}^3 - Z^3 \bar{Z}^2) E_1 + (Z^3 \bar{Z}^1 - Z^1 \bar{Z}^3) E_2 + \epsilon (Z^1 \bar{Z}^2 - Z^2 \bar{Z}^1) E_3.
\end{aligned}$$

Portanto temos

$$(Z^1)^2 + (Z^2)^2 + \epsilon (Z^3)^2 = 0, \quad (2.6)$$

$$|Z^1|^2 + |Z^2|^2 + \epsilon |Z^3|^2 = \frac{1}{2}e^{2w}, \quad (2.7)$$

e

$$N = 2ie^{-2w}((Z^3 \bar{Z}^2 - Z^2 \bar{Z}^3)E_1 + (Z^1 \bar{Z}^3 - \bar{Z}^1 Z^3)E_2 + \epsilon(\bar{Z}^1 Z^2 - Z^1 \bar{Z}^2)E_3). \quad (2.8)$$

Usando o Lema(1.4), provamos que as equações de *Gauss-Codazzi* (2.2), (2.3) e (2.4) são respectivamente equivalentes a

$$\partial_z Z^1 + 2\epsilon\tau Z^2 Z^3 = 2w_z Z^1 + i\epsilon q e^{-2w}(\bar{Z}^2 Z^3 - Z^2 \bar{Z}^3) \quad (2.9)$$

$$\partial_z Z^2 - 2\epsilon\tau Z^1 Z^3 = 2w_z Z^2 + i\epsilon q e^{-2w}(Z^2 \bar{Z}^3 - \bar{Z}^1 Z^3) \quad (2.10)$$

$$\partial_z Z^3 = 2w_z Z^3 + i\epsilon q e^{-2w}(\bar{Z}^1 Z^2 - Z^1 \bar{Z}^2), \quad (2.11)$$

$$-\partial_{\bar{z}} Z^1 + \partial_z \bar{Z}^1 = 0 \quad (2.12)$$

$$-\partial_{\bar{z}} Z^2 + \partial_z \bar{Z}^2 = 0 \quad (2.13)$$

$$-\partial_{\bar{z}} Z^3 + \partial_z \bar{Z}^3 + 2\tau(Z^1 \bar{Z}^2 - \bar{Z}^1 Z^2) = 0 \quad (2.14)$$

e

$$\partial_{\bar{z}}Z^1 + \partial_z\bar{Z}^1 + 2\epsilon\tau(Z^3\bar{Z}^2 + \bar{Z}^3Z^2) = 2iH(\bar{Z}^2Z^3 - Z^2\bar{Z}^3) \quad (2.15)$$

$$\partial_{\bar{z}}Z^2 + \partial_z\bar{Z}^2 - 2\epsilon\tau(Z^3\bar{Z}^1 + \bar{Z}^3Z^1) = 2iH(Z^1\bar{Z}^3 - \bar{Z}^1Z^2) \quad (2.16)$$

$$\partial_{\bar{z}}Z^3 + \partial_z\bar{Z}^3 = 2iH(\bar{Z}^1Z^2 - Z^1\bar{Z}^2). \quad (2.17)$$

De fato, fazendo

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{X_z}X_z &= \bar{\nabla}_{X_z}(Z^1E_1 + Z^2E_2 + Z^3E_3) \\ &= Z^1\bar{\nabla}_{X_z}E_1 + X_z(Z_1)E_1 + Z^2\bar{\nabla}_{X_z}E_2 + X_z(Z_2)E_2 + Z^3\bar{\nabla}_{X_z}E_3 + X_z(Z_3)E_3, \end{aligned}$$

tome $X_z(Z^j) = \partial_zZ^j$. Assim

$$\begin{aligned} Z^1\bar{\nabla}_{X_z}E_1 + X_z(Z^1)E_1 &= Z^1\bar{\nabla}_{Z^1E_1+Z^2E_2+Z^3E_3}E_1 + \partial_z(Z^1)E_1 \\ &= (Z^1)^2\bar{\nabla}_{E_1}E_1 + Z^1Z^2\bar{\nabla}_{E_2}E_1 + Z^1Z^3\bar{\nabla}_{E_3}E_1 + \partial_z(Z^1)E_1 \\ &= \partial_zZ^1E_1 - \epsilon\tau Z^1Z^3E_2 - \tau Z^1Z^2E_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z^2\bar{\nabla}_{X_z}E_2 + X_z(Z^2)E_2 &= Z^2\bar{\nabla}_{Z^1E_1+Z^2E_2+Z^3E_3}E_2 + \partial_z(Z^2)E_2 \\ &= Z^1Z^2\bar{\nabla}_{E_1}E_2 + (Z^2)^2\bar{\nabla}_{E_2}E_2 + Z^2Z^3\bar{\nabla}_{E_3}E_2 + \partial_z(Z^2)E_2 \\ &= \epsilon\tau Z^2Z^3E_1 + \partial_zZ^2E_2 + \tau Z^1Z^2E_3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Z^3\bar{\nabla}_{X_z}E_3 + X_z(Z^3)E_3 &= Z^3\bar{\nabla}_{Z^1E_1+Z^2E_2+Z^3E_3}E_3 + \partial_z(Z^3)E_3 \\ &= Z^1Z^3\bar{\nabla}_{E_1}E_3 + Z^2Z^3\bar{\nabla}_{E_2}E_3 + (Z^3)^2\bar{\nabla}_{E_3}E_3 + \partial_z(Z^3)E_3 \\ &= \epsilon\tau Z^2Z^3E_1 - \epsilon\tau Z^1Z^3E_3 + \partial_zZ^3E_3. \end{aligned}$$

Destas forma

$$\bar{\nabla}_{X_z}X_z = (\partial_zZ^1 + 2\epsilon\tau Z^2Z^3)E_1 + (\partial_zZ^2 - 2\epsilon\tau Z^1Z^3)E_2 + (\partial_zZ^3)E_3. \quad (2.18)$$

De

$$\begin{aligned} 2w_zX_z &= 2w_z(Z^1E_1 + Z^2E_2 + Z^3E_3) \\ &= (2w_zZ^1)E_1 + (2w_zZ^2)E_2 + (2w_zZ^3)E_3, \end{aligned}$$

e

$$\frac{\epsilon}{2}qN = \frac{\epsilon}{2}q2ie^{-2w}[(Z^3\bar{Z}^2 - Z^2\bar{Z}^3)E_1 + (Z^1\bar{Z}^3 - \bar{Z}^1Z^3)E_2 + \epsilon(\bar{Z}^1Z^2 - Z^1\bar{Z}^2)E_3],$$

temos

$$\begin{aligned} 2w_zX_z + \frac{\epsilon}{2}qN &= [2w_zZ^1 + i\epsilon qe^{-2w}(Z^3\bar{Z}^2 - Z^2\bar{Z}^3)]E_1 \\ &+ [2w_zZ^2 + i\epsilon qe^{-2w}(Z^1\bar{Z}^3 - \bar{Z}^1Z^3)]E_2 \\ &+ [2w_zZ^3 + i\epsilon qe^{-2w}(\bar{Z}^1Z^2 - Z^1\bar{Z}^2)]E_3. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Logo de (2.2), (2.18) e (2.19), obtemos (2.9),(2.10) e (2.11). Agora fazendo

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{X_z}X_{\bar{z}} &= \bar{\nabla}_{X_z}(\bar{Z}^1E_1 + \bar{Z}^2E_2 + \bar{Z}^3E_3) \\ &= \bar{Z}^1\bar{\nabla}_{X_z}E_1 + X_z(\bar{z}^1)E_1 + \bar{Z}^2\bar{\nabla}_{X_z}E_2 + X_z(\bar{Z}^2)E_2 + \bar{Z}^3\bar{\nabla}_{X_z}E_3 + X_z(\bar{Z}^3)E_3, \end{aligned}$$

e calculando

$$\begin{aligned} \bar{Z}^1\bar{\nabla}_{X_z}E_1 + X_z(\bar{Z}^1)E_1 &= \bar{Z}^1\bar{\nabla}_{Z^1E_1+Z^2E_2+Z^3E_3}E_1 + \partial_z(\bar{Z}^1)E_1 \\ &= \bar{Z}^1Z^1\bar{\nabla}_{E_1}E_1 + \bar{Z}^1Z^2\bar{\nabla}_{E_2}E_1 + \bar{Z}^1Z^3\bar{\nabla}_{E_3}E_1 + \partial_z(\bar{Z}^1)E_1 \\ &= \partial_z\bar{Z}^1E_1 - \epsilon\tau\bar{Z}^1Z^3E_2 - \tau\bar{Z}^1Z^2E_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Z}^2\bar{\nabla}_{X_z}E_2 + X_z(\bar{Z}^2)E_2 &= \bar{Z}^2\bar{\nabla}_{Z^1E_1+Z^2E_2+Z^3E_3}E_2 + \partial_z(\bar{Z}^2)E_2 \\ &= Z^1\bar{Z}^2\bar{\nabla}_{E_1}E_2 + \bar{Z}^2Z^2\bar{\nabla}_{E_2}E_2 + \bar{Z}^2Z^3\bar{\nabla}_{E_3}E_2 + \partial_z(\bar{Z}^2)E_2 \\ &= \epsilon\tau\bar{Z}^2Z^3E_1 + \partial_z\bar{Z}^2E_2 + \tau Z^1\bar{Z}^2E_3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{Z}^3\bar{\nabla}_{X_z}E_3 + X_z(\bar{Z}^3)E_3 &= \bar{Z}^3\bar{\nabla}_{Z^1E_1+Z^2E_2+Z^3E_3}E_3 + \partial_z(\bar{Z}^3)E_3 \\ &= Z^1\bar{Z}^3\bar{\nabla}_{E_1}E_3 + Z^2\bar{Z}^3\bar{\nabla}_{E_2}E_3 + Z^3\bar{Z}^3\bar{\nabla}_{E_3}E_3 + \partial_z(\bar{Z}^3)E_3 \\ &= \epsilon\tau Z^2\bar{Z}^3E_1 - \epsilon\tau Z^1\bar{Z}^3E_2 + \partial_z\bar{Z}^3E_3, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{X_z}X_{\bar{z}} &= [\partial_z\bar{z}^1 + \epsilon\tau(\bar{Z}^2Z^3 + Z^2\bar{Z}^3)]E_1 \\ &+ [\partial_z\bar{z}^2 - \epsilon\tau(\bar{Z}^1Z^3 + Z^1\bar{Z}^3)]E_2 \\ &+ [\partial_z\bar{z}^3 + \tau(\bar{Z}^1Z^2 + Z^1\bar{Z}^2)]E_3. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Agora fazendo

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}X_z &= \bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}(Z^1E_1 + Z^2E_2 + Z^3E_3) \\ &= Z^1\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_1 + X_{\bar{z}}(Z_1)E_1 + Z^2\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_2 + X_{\bar{z}}(Z_2)E_2 + Z^3\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_3 + X_{\bar{z}}(Z_3)E_3,\end{aligned}$$

e calculando

$$\begin{aligned}Z^1\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_1 + X_{\bar{z}}(Z^1)E_1 &= Z^1\bar{\nabla}_{\bar{Z}^1E_1 + \bar{Z}^2E_2 + \bar{Z}^3E_3}E_1 + \partial_{\bar{z}}(Z^1)E_1 \\ &= Z^1\bar{Z}^1\bar{\nabla}_{E_1}E_1 + Z^1\bar{Z}^2\bar{\nabla}_{E_2}E_1 + Z^1\bar{Z}^3\bar{\nabla}_{E_3}E_1 + \partial_{\bar{z}}(Z^1)E_1 \\ &= \partial_{\bar{z}}Z^1E_1 - \epsilon\tau Z^1\bar{Z}^3E_2 - \tau Z^1\bar{Z}^2E_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z^2\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_2 + X_{\bar{z}}(Z^2)E_2 &= Z^2\bar{\nabla}_{\bar{Z}^1E_1 + \bar{Z}^2E_2 + \bar{Z}^3E_3}E_2 + \partial_{\bar{z}}(Z^2)E_2 \\ &= \bar{Z}^1Z^2\bar{\nabla}_{E_1}E_2 + \bar{Z}^2Z^2\bar{\nabla}_{E_2}E_2 + Z^2\bar{Z}^3\bar{\nabla}_{E_3}E_2 + \partial_{\bar{z}}(Z^2)E_2 \\ &= \epsilon\tau Z^2\bar{Z}^3E_1 + \partial_{\bar{z}}Z^2E_2 + \tau\bar{Z}^1Z^2E_3\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}Z^3\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_3 + X_{\bar{z}}(Z^3)E_3 &= Z^3\bar{\nabla}_{\bar{Z}^1E_1 + \bar{Z}^2E_2 + \bar{Z}^3E_3}E_3 + \partial_{\bar{z}}(Z^3)E_3 \\ &= \bar{Z}^1Z^3\bar{\nabla}_{E_1}E_3 + \bar{Z}^2Z^3\bar{\nabla}_{E_2}E_3 + Z^3\bar{Z}^3\bar{\nabla}_{E_3}E_3 + \partial_{\bar{z}}(Z^3)E_3 \\ &= \epsilon\tau\bar{Z}^2Z^3E_1 - \epsilon\tau\bar{Z}^1Z^3E_2 + \partial_{\bar{z}}Z^3E_3,\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}X_z &= [\partial_{\bar{z}}Z^1 + \epsilon\tau(\bar{Z}^2Z^3 + Z^2\bar{Z}^3)]E_1 \\ &\quad + [\partial_{\bar{z}}Z^2 - \epsilon\tau(\bar{Z}^1Z^3 + Z^1\bar{Z}^3)]E_2 \\ &\quad + [\partial_{\bar{z}}Z^3 + \tau(\bar{Z}^1Z^2 + Z^1\bar{Z}^2)]E_3.\end{aligned}\tag{2.21}$$

De (2.3), (2.20) e (2.21), temos

$$\begin{aligned}\partial_z\bar{Z}^1 &= \partial_{\bar{z}}Z^1 \\ \partial_z\bar{Z}^2 &= \partial_{\bar{z}}Z^2 \\ \partial_z\bar{Z}^2 + \tau(Z^1\bar{Z}^2 - \bar{Z}^1Z^2) &= \partial_{\bar{z}}Z^3 - \tau(Z^1\bar{Z}^2 - \bar{Z}^1Z^2).\end{aligned}$$

Portanto, conseguimos (2.12), (2.13) e (2.14). E finalmente de (2.4), (2.20), (2.21) e que

$$\begin{aligned} He^{2w}N &= He^{2w}2ie^{-2w}[(Z^3\bar{Z}^2 - Z^2\bar{Z}^3)E_1 + (Z^1\bar{Z}^3 - \bar{Z}^1Z^3)E_2 + \epsilon(\bar{Z}^1Z^2 - Z^1\bar{Z}^2)E_3] \\ &= 2iH[(Z^3\bar{Z}^2 - Z^2\bar{Z}^3)E_1 + (Z^1\bar{Z}^3 - \bar{Z}^1Z^3)E_2 + \epsilon(\bar{Z}^1Z^2 - Z^1\bar{Z}^2)E_3], \end{aligned}$$

obtemos (2.15), (2.16) e (2.17).

Agora vamos definir funções ψ_1 e ψ_2 , tais que

$$\begin{aligned} Z^1 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2) \\ Z^2 &= \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2) \\ Z^3 &= \psi_1\bar{\psi}_2, \end{aligned} \tag{2.22}$$

isto é,

$$\begin{aligned} Z^1 + iZ^2 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2) - \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2) \\ &= -\epsilon\psi_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Z}^1 + i\bar{Z}^2 &= \frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2) + i[-\frac{i}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)] \\ &= \frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2) + \frac{1}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2) \\ &= \psi_2^2, \end{aligned}$$

portanto

$$Z^1 + iZ^2 = -\epsilon\psi_1^2 \quad \text{e} \quad \bar{Z}^1 + i\bar{Z}^2 = \psi_2^2.$$

Como

$$N = 2ie^{-2w}((Z^3\bar{Z}^2 - Z^2\bar{Z}^3)E_1 + (Z^1\bar{Z}^3 - \bar{Z}^1Z^3)E_2 + \epsilon(\bar{Z}^1Z^2 - Z^1\bar{Z}^2)E_3),$$

calculando

$$\begin{aligned} \bar{Z}^2Z^3 &= -\frac{i}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)\psi_1\bar{\psi}_2 \\ &= -\frac{i}{2}(\psi_1\psi_2|\psi_2|^2 + \epsilon\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2|\psi_1|^2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Z^2 \bar{Z}^3 &= \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\bar{\psi}_1\psi_2 \\ &= \frac{i}{2}(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2|\psi_2|^2 + \epsilon\psi_2\psi_1|\psi_1|^2), \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \bar{Z}^2 Z^3 - Z^2 \bar{Z}^3 &= -\frac{i}{2}(\psi_1\psi_2|\psi_2|^2 + \epsilon\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2|\psi_1|^2) - \frac{i}{2}(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2|\psi_2|^2 + \epsilon\psi_2\psi_1|\psi_1|^2) \\ &= -\frac{i}{2}\psi_1\psi_2(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) - \frac{i}{2}\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2(\epsilon|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) \\ &= -\frac{i}{2}(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2). \end{aligned}$$

Calculando

$$\begin{aligned} Z^1 \bar{Z}^3 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\bar{\psi}_1\psi_2 \\ &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2|\psi_2|^2 - \epsilon\psi_1\psi_2|\psi_1|^2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{Z}^1 Z^3 &= \frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)\psi_1\bar{\psi}_2 \\ &= \frac{1}{2}(\psi_1\psi_2|\psi_2|^2 - \epsilon\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2|\psi_1|^2), \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} Z^1 \bar{Z}^3 - \bar{Z}^1 Z^3 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2|\psi_2|^2 - \epsilon\psi_1\psi_2|\psi_1|^2) - \frac{1}{2}(\psi_1\psi_2|\psi_2|^2 - \epsilon\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2|\psi_1|^2) \\ &= \frac{1}{2}\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) - \frac{1}{2}\psi_1\psi_2(\epsilon|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2)(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2). \end{aligned}$$

Calculando

$$\begin{aligned} \bar{Z}^1 Z^2 &= \frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2) \\ &= \frac{i}{4}(|\psi_2|^4 + \epsilon\psi_1^2\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2 - \epsilon^2|\psi_1|^4) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Z^1 \bar{Z}^2 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\left(\frac{-i}{2}\right)(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2) \\ &= \frac{-i}{4}(|\psi_2|^4 + \epsilon\bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2\psi_2^2 - \epsilon^2|\psi_1|^4), \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \bar{Z}^1 Z^2 - Z^1 \bar{Z}^2 &= \frac{i}{4}(|\psi_2|^4 + \epsilon\psi_1^2\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2 - \epsilon^2|\psi_1|^4) \\ &\quad + \frac{i}{4}(|\psi_2|^4 + \epsilon\bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2\psi_2^2 - \epsilon^2|\psi_1|^4) \\ &= \frac{i}{2}(|\psi_2|^4 - \epsilon^2|\psi_1|^4) \\ &= \frac{i}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2). \end{aligned}$$

Assim temos que

$$\begin{aligned} N &= 2ie^{-2w}\left[-\frac{i}{2}(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)E_1\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2)(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)E_2\right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)E_3\right]. \end{aligned}$$

Agora calculando

$$\begin{aligned} |Z^1|^2 &= Z^1 \bar{Z}^1 \\ &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2) \\ &= \frac{1}{4}(|\psi_2|^4 - \epsilon\bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2\psi_2^2 + \epsilon^2|\psi_1|^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |Z^2|^2 &= Z^2 \bar{Z}^2 \\ &= \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\left(\frac{-i}{2}\right)(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2) \\ &= \frac{1}{4}(|\psi_2|^4 + \epsilon\bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2 + \epsilon^2|\psi_1|^4) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |Z^3|^2 &= Z^3 \bar{Z}^3 \\ &= \psi_1\bar{\psi}_2\bar{\psi}_1\psi_2 \\ &= |\psi_1|^2|\psi_2|^2. \end{aligned}$$

Substituindo as equações acima em $|Z^1|^2 + |Z^2|^2 + \epsilon|Z^3|^2 = \frac{1}{2}e^{2w}$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}e^{2w} &= \frac{1}{2}(|\psi_2|^4 + \epsilon^2|\psi_1|^4) + \epsilon|\psi_1|^2|\psi_2|^2 \\ &= \frac{1}{2}(|\psi_2|^4 + 2\epsilon|\psi_1|^2|\psi_2|^2 + \epsilon^2|\psi_1|^4) \\ &= \frac{1}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)^2,\end{aligned}$$

assim

$$e^{2w} = (|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)^2.$$

Desta forma

$$N = e^{-w}((\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)E_1 + i(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2)E_2 - (|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)E_3). \quad (2.23)$$

Que é o campo normal unitário em termos das funções ψ_1 e ψ_2 . Quando $\epsilon = -1$, podemos supor sem perda de generalidade $|\psi_2| > |\psi_1|$, assim

$$e^w = |\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2.$$

Agora queremos determinar funções U e V tais que

$$\partial_{\bar{z}}\psi_1 = V\psi_2 \quad e \quad \partial_z\psi_2 = -U\psi_1. \quad (2.24)$$

Passamos, portanto, à dedução destas funções. De (2.12) e (2.13) temos

$$\begin{aligned}0 &= -\partial_{\bar{z}}Z^1 + \partial_z\bar{Z}^1 \\ &= -\partial_{\bar{z}}\left[\frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\right] + \partial_z\left[\frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)\right] \\ &= -\frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2^2 + \frac{\epsilon}{2}\partial_{\bar{z}}\psi_1^2 + \frac{1}{2}\partial_z\psi_2^2 - \frac{\epsilon}{2}\partial_z\bar{\psi}_1^2\end{aligned} \quad (2.25)$$

e

$$\begin{aligned}0 &= -\partial_{\bar{z}}Z^2 + \partial_z\bar{Z}^2 \\ &= -\partial_{\bar{z}}\left[\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\right] + \partial_z\left[\frac{-i}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)\right] \\ &= -\frac{i}{2}\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2^2 - \frac{i\epsilon}{2}\partial_{\bar{z}}\psi_1^2 - \frac{i}{2}\partial_z\psi_2^2 - \frac{i\epsilon}{2}\partial_z\bar{\psi}_1^2.\end{aligned} \quad (2.26)$$

Somando (2.25) e (2.26) multiplicado por i , obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2^2 + \frac{\epsilon}{2}\partial_{\bar{z}}\psi_1^2 + \frac{1}{2}\partial_z\psi_2^2 - \frac{\epsilon}{2}\partial_z\bar{\psi}_1^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2^2 + \frac{\epsilon}{2}\partial_{\bar{z}}\psi_1^2 + \frac{1}{2}\partial_z\psi_2^2 + \frac{\epsilon}{2}\partial_z\bar{\psi}_1^2 \\
&= \epsilon\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_1^2 + \partial_z\psi_2^2,
\end{aligned}$$

portanto

$$\partial_{\bar{z}}(\epsilon\psi_1^2) + \partial_z(\psi_2^2) = 0.$$

Usando a condição (2.24), temos

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}(\epsilon\psi_1^2) &= 2\epsilon\psi_1\partial_{\bar{z}}\psi_1 \\
&= 2\epsilon\psi_1V\psi_2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\partial_z(\psi_2^2) &= 2\psi_2\partial_z\psi_2 \\
&= 2\psi_2(-U\psi_1),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$2\psi_1\psi_2(\epsilon V - U) = 0.$$

Logo

$$\epsilon V - U = 0. \tag{2.27}$$

Agora calculando

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}Z^1 + \partial_z\bar{Z}^1 &= \frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2^2 - \frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}(\epsilon\psi_1^2) + \frac{1}{2}\partial_z\psi_2^2 - \frac{1}{2}\partial_z(\epsilon\bar{\psi}_1^2), \\
2\epsilon\tau(Z^3\bar{Z}^2 + \bar{Z}^3Z^2) &= 2\epsilon\tau \left[-\frac{i}{2}(\psi_1\psi_2|\psi_2|^2 + \epsilon\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2|\psi_1|^2) + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2|\psi_2|^2 + \epsilon\psi_1\psi_2|\psi_1|^2) \right] \\
&= 2\epsilon\tau \left[-\frac{i}{2}\psi_1\psi_2(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2) \right] \\
&= 2\epsilon\tau \left[-\frac{i}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2) \right] \\
&= -i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 2iH(\bar{Z}^2 Z^3 - Z^2 \bar{Z}^3) &= 2iH\left(\frac{-i}{2}\right)(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) \\ &= H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2), \end{aligned}$$

obtemos para (2.15)

$$-\frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}(\epsilon\psi_1^2) + \frac{1}{2}\partial_z\psi_2^2 - i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2) = H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2). \quad (2.28)$$

Calculando

$$\begin{aligned} i(\partial_{\bar{z}}Z^2 + \partial_z\bar{Z}^2) &= i\left[\frac{i}{2}\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2^2 + \frac{i}{2}\partial_{\bar{z}}(\epsilon\psi_1^2) - \frac{i}{2}\partial_z\psi_2^2 - \frac{i}{2}\partial_z(\epsilon\bar{\psi}_1^2)\right] \\ &= -\frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2^2 - \frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}(\epsilon\psi_1^2) + \frac{1}{2}\partial_z\psi_2^2 + \frac{1}{2}\partial_z(\epsilon\bar{\psi}_1^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2i\epsilon\tau(Z^3\bar{Z}^1 + \bar{Z}^3Z^1) &= -2i\epsilon\tau\left[\frac{1}{2}(\psi_1\psi_2|\psi_2|^2 - \epsilon\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2|\psi_1|^2) + \frac{1}{2}(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2|\psi_2|^2 - \epsilon\psi_1\psi_2|\psi_1|^2)\right] \\ &= -2i\epsilon\tau\left[\frac{1}{2}\psi_1\psi_2(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2) + \frac{1}{2}\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\right] \\ &= -2i\epsilon\tau\left[\frac{1}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)\right] \\ &= -i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -2H(Z^1\bar{Z}^3 - \bar{Z}^1Z^2) &= -H\frac{1}{2}(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2)(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) \\ &= -H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2), \end{aligned}$$

obtemos para (2.16) multiplicado por i

$$-\frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}(\epsilon\psi_1^2) + \frac{1}{2}\partial_z\psi_2^2 - i\epsilon\tau\left[\frac{1}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)\right] = -H(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2). \quad (2.29)$$

Somando (2.28) e (2.29), obtemos

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}(-\epsilon\psi_1^2) + \partial_z\psi_2^2 - i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 + \psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2) \\ = H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 + \psi_1\psi_2), \end{aligned}$$

que é igual a

$$\partial_{\bar{z}}(-\epsilon\psi_1^2) + \partial_z\psi_2^2 - 2i\epsilon\tau\psi_1\psi_2(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2) = 2H\psi_1\psi_2(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2).$$

Resolvendo as derivadas, obtemos

$$-2\epsilon\psi_1\partial_{\bar{z}}(\psi_1) + 2\psi_2\partial_z\psi_2 - 2i\epsilon\tau\psi_1\psi_2(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2) = 2H\psi_1\psi_2(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2).$$

Substituindo a condição (2.24) na equação acima, temos

$$-2\epsilon\psi_1V\psi_2 - 2\psi_2U\psi_1 - 2i\epsilon\tau\psi_1\psi_2(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2) = 2H\psi_1\psi_2(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2),$$

eliminando o fator $-2\psi_1\psi_2$, obtemos

$$\epsilon V + U = -H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) - i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2).$$

Logo com a equação acima e a equação (2.27), temos o sistema

$$\begin{cases} \epsilon V + U = -H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) - i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2) \\ \epsilon V - U = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema para U e V , obtemos

$$\begin{aligned} U &= -\frac{1}{2}(H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)), \\ V &= -\frac{\epsilon}{2}(H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)). \end{aligned}$$

Estes cálculos permitem enunciar o seguinte resultado:

Proposição 2.1. *Seja $X : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$ uma ismersão isométrica. Então o campo de spinors $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, definido pelas equações (2.5) e (2.22), satisfaz a equação de Dirac $\mathbf{D}\psi = 0$, em que*

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ -\partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

com pontenciais

$$U = -\frac{1}{2}(H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)) \quad (2.31)$$

e

$$V = -\frac{\epsilon}{2}(H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)). \quad (2.32)$$

A seguir, expomos uma representação local do tipo Weierstrass para superfícies no espaço $\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$. Inicialmente, observamos que qualquer superfície em $\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$ pode ser representada localmente por integrais. Assim, utilizamos a seguinte versão do Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 2.2. *Seja Σ uma superfície de Riemann. Se $c : [a, b] \rightarrow \Sigma$ é uma curva diferenciável por partes e $f \in C^\infty(\Sigma)$, então*

$$\int_c df = f(c(b)) - f(c(a)).$$

Seja $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$ uma imersão. Denotamos como antes, por $z = u + iv$ um parâmetro conforme em um domínio $\Omega \subset \Sigma$, onde a imersão é representada, em termos das coordenadas (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$, por

$$X(z) = (x_1(z), x_2(z), x_3(z))$$

ou

$$X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)).$$

Logo em Ω , temos

$$X_z = \phi_1 \partial_{x_1} + \phi_2 \partial_{x_2} + \phi_3 \partial_{x_3},$$

em que $\phi_k = \frac{\partial x_k}{\partial z}$, $k = 1, 2, 3$. Observamos que

$$\begin{aligned} \phi_k dz &= \frac{\partial x_k}{\partial z} dz \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v} \right) (du + idv) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial x_k}{\partial u} du + \frac{\partial x_k}{\partial v} dv + i \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} dv - \frac{\partial x_k}{\partial v} du \right) \right]. \end{aligned}$$

Portanto

$$\operatorname{Re}(\phi_k dz) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} du + \frac{\partial x_k}{\partial v} dv \right) = \frac{1}{2} dx_k.$$

Assim uma vez que dx_k é exata, dado um caminho fechado $c : I \rightarrow \Omega \subset \Sigma$, temos

$$\operatorname{Re} \int_c \phi_k dz = \int_c \operatorname{Re}(\phi_k dz) = \frac{1}{2} \int_c dx_k = 0.$$

Este fato diz que a forma local $\phi_k dz$ não tem períodos reais, e é equivalente ao fato de que a integral de linha não depende do caminho escolhido. Portanto, a aplicação

$$z \mapsto \operatorname{Re} \int_{\gamma_z} \phi_k dz,$$

onde γ_z é um caminho em Ω de z_0 a z , está bem definida. Denotamos esta função simplesmente por:

$$z \mapsto \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi_k dz.$$

Pela versão anterior do teorema fundamental do cálculo, Teorema 2.2, é válido que

$$\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi_k dz = \frac{1}{2} \int_{z_0}^z dx_k = \frac{1}{2} (x_k(z) - x_k(z_0)).$$

Portanto,

$$x_k(z) = x_k(z_0) + 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi_k dz.$$

Como

$$X_z = \sum_{j=1}^3 Z^j E_j \Big|_X,$$

então,

$$\begin{aligned} X_z &= Z^1(\partial_{x_1} - \tau x_2 \partial_{x_3}) + Z^2(\partial_{x_2} + \tau x_1 \partial_{x_3}) + Z^3 \partial_{x_3} \\ &= Z^1 \partial_{x_1} + Z^2 \partial_{x_2} + (-Z^1 \tau x_2 + Z^2 \tau x_1 + Z^3) \partial_{x_3}. \end{aligned}$$

Desta forma concluímos que

$$\phi_1 = Z^1 = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_2^2 - \epsilon \psi_1^2),$$

$$\phi_2 = Z^2 = \frac{i}{2} (\bar{\psi}_2^2 + \epsilon \psi_1^2),$$

e

$$\begin{aligned} \phi_3 &= -Z^1 \tau x_2 + Z^2 \tau x_1 + Z^3 \\ &= -\frac{1}{2} (\bar{\psi}_2^2 - \epsilon \psi_1^2) \tau x_2 + \frac{i}{2} (\bar{\psi}_2^2 + \epsilon \psi_1^2) \tau x_1 + \psi_1 \psi_2 \\ &= \frac{\tau}{2} [i (\bar{\psi}_2^2 + \epsilon \psi_1^2) x_1 - (\bar{\psi}_2^2 - \epsilon \psi_1^2) x_2] + \psi_1 \psi_2. \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}x_1(z) &= x_1(z_0) + 2\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)dz, \\x_2(z) &= x_2(z_0) + 2\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)dz, \\x_3(z) &= x_3(z_0) + 2\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left(\frac{\tau}{2}(i(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)x_1 - (\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)x_2) + \psi_1\psi_2 \right) dz.\end{aligned}$$

O teorema a seguir diz que a representação integral acima pode ser obtida a partir das funções ψ_1 e ψ_2 , desde que verifiquem a equação de Dirac em $\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$. Para obter tal representação, utilizamos os seguintes lemas

Lema 2.3. *Seja $\phi : \Omega \subset \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ uma função de classe C^2 definida sobre um domínio simplesmente conexo de uma superfície de Riemann Σ , onde está definido o parâmetro conforme $z = u + iv$, tal que $\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}} \in \mathbb{R}$, ou seja, $\operatorname{Im}\partial_{\bar{z}}\phi = 0$. Então, a forma ϕdz não tem períodos reais e*

$$2\partial_z \left(\int_{z_0}^z \operatorname{Re}(\phi dz) \right) = \phi.$$

Demonstração. Escreva $\phi = \phi_1 + i\phi_2$. Então

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right) (\phi_1 + i\phi_2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial u} - \frac{\partial\phi_2}{\partial v} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial u} + \frac{\partial\phi_1}{\partial v} \right).\end{aligned}$$

Logo a condição $\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}} \in \mathbb{R}$ implica que

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial u} + \frac{\partial\phi_1}{\partial v} = 0.$$

Portanto, como o domínio de ϕ é simplesmente conexo, a forma

$$\operatorname{Re}(\phi dz) = \phi_1 du - \phi_2 dv$$

é exata. Assim, existe uma função $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\phi_1 du - \phi_2 dv = d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial u} du + \frac{\partial\psi}{\partial v} dv,$$

donde concluimos que a forma ϕdz não tem períodos reais e a função $z \in \Omega \longrightarrow 2 \int_{z_0}^z \text{Re}(\phi dz) dz$ é bem definida. Além disso,

$$\begin{aligned}
\partial_z \left(2 \int_{z_0}^z \text{Re}(\phi dz) \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(2 \int_{z_0}^z d\psi \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) 2(\psi(z) - \psi(z_0)) \\
&= \frac{\partial \psi}{\partial u} - i \frac{\partial \psi}{\partial v} \\
&= \phi_1 + i\phi_2 \\
&= \phi.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.4. *Sejam $\psi_1, \psi_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, funções de valores complexos satisfazendo a equação de Dirac em $\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$, isto é*

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}} \psi_1 &= -\frac{\epsilon}{2} (H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)) \psi_2, \\
\partial_z \psi_2 &= \frac{1}{2} (H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)) \psi_1.
\end{aligned}$$

Então

$$\frac{1}{2} \partial_{\bar{z}} (\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2) = H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) \text{Re}(\psi_1\psi_2) + \epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2) \text{Im}(\psi_1\psi_2), \quad (2.33)$$

$$\frac{i}{2} \partial_{\bar{z}} (\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2) = H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) \text{Im}(\psi_1\psi_2) + \epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2) \text{Re}(\psi_1\psi_2), \quad (2.34)$$

$$\partial_{\bar{z}} (\psi_1\bar{\psi}_2) = -\frac{1}{2} (\epsilon H + i\tau) (|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4). \quad (2.35)$$

Demonstração:

Demonstração. Primeiramente observe que $\overline{\partial_z \psi} = \partial_{\bar{z}} \bar{\psi}$, onde $\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. De fato, $\partial_z \psi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} - i \frac{\partial \psi}{\partial v} \right)$ então

$$\overline{\partial_z \psi} = \overline{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} - i \frac{\partial \psi}{\partial v} \right)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial u} + i \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial v} \right) = \partial_{\bar{z}} \bar{\psi}.$$

Assim para a primeira equação temos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2) &= \frac{1}{2}(\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2) \\
&= \frac{1}{2}(2\bar{\psi}_2\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2 - 2\epsilon\psi_1\partial_z\psi_2) \\
&= \bar{\psi}_2(-\bar{U}\bar{\psi}_1) - \epsilon\psi_1 V\psi_2 \\
&= -\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\bar{U} - \epsilon\psi_1\psi_2 V \\
&= \frac{\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2}{2}[H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) - i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)] \\
&\quad + \frac{\epsilon^2\psi_1\psi_2}{2}[H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)] \\
&= \frac{H}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 + \psi_1\psi_2) \\
&\quad + \frac{i\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(\psi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2) \\
&= \frac{H}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)2\text{Re}(\psi_1\psi_2) + \frac{i\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)2i\text{Im}(\psi_1\psi_2),
\end{aligned}$$

portanto

$$\frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2) = H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\text{Re}(\psi_1\psi_2) + \epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\text{Im}(\psi_1\psi_2).$$

Para a segunda temos,

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2}\partial_{\bar{z}}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2) &= \frac{i}{2}(\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2) \\
&= \frac{i}{2}(2\bar{\psi}_2\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2 + 2\epsilon\psi_1\partial_z\psi_2) \\
&= -i\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2\bar{U}i\epsilon\psi_1\psi_2 V \\
&= \frac{i\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2}{2}[H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) - i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)] \\
&\quad - \frac{i\epsilon^2\psi_1\psi_2}{2}[H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)] \\
&= \frac{H}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(i\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 + i\psi_1\psi_2) \\
&\quad + \frac{\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 + \psi_1\psi_2) \\
&= \frac{H}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)2\text{Im}(\psi_1\psi_2) + \frac{\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)2\text{Re}(\psi_1\psi_2),
\end{aligned}$$

Assim

$$\frac{i}{2}\partial_{\bar{z}}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2) = H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)Im(\psi_1\psi_2) + \epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)Re(\psi_1\psi_2).$$

E finalmente para a terceira equação temos,

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}(\psi_1\bar{\psi}_2) &= (\partial_{\bar{z}}\psi_1)\bar{\psi}_2 + \psi_1\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2 \\ &= V\psi_2\bar{\psi}_2 - \psi_1\bar{\psi}_1\bar{U} \\ &= V|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2\bar{U} \\ &= -\frac{\epsilon|\psi_1|^2}{2}[H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)] \\ &\quad + \frac{|\psi_1|^2}{2}[H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) - i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)] \\ &= \frac{H}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2) - \frac{i\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(|\psi_1|^2 + \epsilon|\psi_2|^2) \\ &= -\frac{\epsilon H}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2) \\ &\quad - \frac{i\epsilon^2\tau}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2) \\ &= -\frac{1}{2}(\epsilon H + i\tau)(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4), \end{aligned}$$

logo

$$\partial_{\bar{z}}(\psi_1\bar{\psi}_2) = -\frac{1}{2}(\epsilon H + i\tau)(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4).$$

□

Enunciamos, agora, o teorema de representação de superfícies em $\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$.

Teorema 2.5. *Seja H uma função dada em uma superfície de Riemann simplesmente conexa Σ . Sejam ψ_1 e ψ_2 funções de valores complexos em Σ , satisfazendo a condição $|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2 > 0$ e a equação de Dirac, isto é*

$$\partial_{\bar{z}}\psi_1 = -\frac{\epsilon}{2}(H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2))\psi_2, \quad (2.36)$$

$$\partial_z\psi_2 = \frac{1}{2}(H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2))\psi_1. \quad (2.37)$$

Então, a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau),$$

com componentes

$$\begin{aligned}x_1(z) &= x_1(z_0) + 2\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)dz, \\x_2(z) &= x_2(z_0) + 2\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)dz, \\x_3(z) &= x_3(z_0) + 2\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left(\frac{\tau}{2}(i(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)x_1 - (\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)x_2) + \psi_1\bar{\psi}_2 \right) dz,\end{aligned}$$

é uma imersão conforme com curvatura média H . Além disso, a métrica induzida em Σ é dada por

$$(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)^2|dz|^2.$$

Demonstração. Primeiramente, observamos que, por (2.33) e (2.34), temos

$$\operatorname{Im}\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\right) = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}\partial_{\bar{z}}\left(\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\right) = 0.$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}& \tau \left[\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\partial_{\bar{z}}x_1 - \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\partial_{\bar{z}}x_2 \right] \\&= \tau \left[\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\partial_{\bar{z}}x_1 - \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\partial_{\bar{z}}x_2 \right] \\&= \tau \left[\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2) - \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\left(-\frac{i}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)\right) \right] \\&= \tau \left[\frac{i}{4}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2) + \frac{i}{4}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2) \right] \\&= \frac{i\tau}{4}(|\psi_2|^4 - \epsilon\bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2\psi_2^2 - \epsilon^2|\psi_1|^4|\psi_2|^4 + \epsilon\bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2\psi_2^2 - \epsilon^2|\psi_1|^4) \\&= \frac{i\tau}{2}(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4).\end{aligned}$$

Assim, por isto e por (2.35) temos,

$$\operatorname{Im}\partial_{\bar{z}}\left\{ \tau \left[\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)x_1 - \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)x_2 \right] + \psi_1\bar{\psi}_2 \right\} = 0.$$

Logo, pelo Lema 2.3, concluímos que as funções x_1 , x_2 e x_3 estão bem definidas e

satisfazem

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial z} &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2) \\ \frac{\partial x_2}{\partial z} &= \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2) \\ \frac{\partial x_3}{\partial z} &= \tau \left[\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\partial_z x_1 - \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\partial_z x_2 \right] + \psi_1\bar{\psi}_2.\end{aligned}$$

Assim segue que

$$\begin{aligned}X_z &= (\partial_z x_1, \partial_z x_2, \partial_z x_3) \\ &= \partial_z x_1 \partial_{x_1} + \partial_z x_2 \partial_{x_2} + \partial_z x_3 \partial_{x_3} \\ &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\partial_{x_1} + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\partial_{x_2} + \frac{i\tau}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)x_1\partial_{x_3} \\ &\quad - \frac{\tau}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)x_2\partial_{x_3} + \psi_1\bar{\psi}_2\partial_{x_3} \\ &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)(\partial_{x_1} - \tau x_2\partial_{x_3}) + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)(\partial_{x_2} - \tau x_1\partial_{x_3} + \psi_1\bar{\psi}_2\partial_{x_3}) \\ &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)E_1 + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)E_2 + \psi_1\bar{\psi}_2E_3.\end{aligned}$$

Daí temos que

$$\begin{aligned}\langle X_z, X_z \rangle &= \left\langle \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)E_1 + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)E_2 + \psi_1\bar{\psi}_2E_3, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)E_1 + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)E_2 + \psi_1\bar{\psi}_2E_3 \right\rangle \\ &= \frac{1}{4}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)^2 \langle E_1, E_1 \rangle + \frac{i^2}{4}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)^2 \langle E_2, E_2 \rangle + \psi_1^2\bar{\psi}_2^2 \langle E_3, E_3 \rangle \\ &= \frac{1}{4}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)^2 - \frac{1}{4}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)^2 + \epsilon\psi_1^2\bar{\psi}_2^2 \\ &= \frac{1}{4}(\bar{\psi}_2^4 - 2\epsilon\bar{\psi}_2^2\psi_1^2 + \epsilon^2\psi_1^4) - \frac{1}{4}(\bar{\psi}_2^4 + 2\epsilon\bar{\psi}_2^2\psi_1^2 + \epsilon^2\psi_1^4) + \epsilon\psi_1^2\bar{\psi}_2^2 \\ &= -\epsilon\psi_1^2\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2\bar{\psi}_2^2 \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle X_{\bar{z}}, X_{\bar{z}} \rangle &= \left\langle \frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon \bar{\psi}_1^2)E_1 - \frac{i}{2}(\psi_2^2 + \epsilon \bar{\psi}_1^2)E_2 + \bar{\psi}_1 \psi_2 E_3, \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon \bar{\psi}_1^2)E_1 - \frac{i}{2}(\psi_2^2 + \epsilon \bar{\psi}_1^2)E_2 + \bar{\psi}_1 \psi_2 E_3 \right\rangle \\
&= \frac{1}{4}(\psi_2^2 - \epsilon \bar{\psi}_1^2)^2 \langle E_1, E_1 \rangle - \frac{1}{4}(\psi_2^2 + \epsilon \bar{\psi}_1^2)^2 \langle E_2, E_2 \rangle + \bar{\psi}_1^2 \psi_2^2 \langle E_3, E_3 \rangle \\
&= \frac{1}{4}(\psi_2^4 - 2\epsilon \psi_2^2 \bar{\psi}_1^2 + \epsilon^2 \bar{\psi}_1^4) - \frac{1}{4}(\psi_2^4 + 2\epsilon \psi_2^2 \bar{\psi}_1^2 + \epsilon^2 \bar{\psi}_1^4) + \epsilon \bar{\psi}_1^2 \psi_2^2 \\
&= -\epsilon \psi_2^2 \bar{\psi}_1^2 + \epsilon \psi_2^2 \bar{\psi}_1^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle &= \left\langle \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon \psi_1^2)E_1 + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon \psi_1^2)E_2 + \psi_1 \bar{\psi}_2 E_3, \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon \bar{\psi}_1^2)E_1 - \frac{i}{2}(\psi_2^2 + \epsilon \bar{\psi}_1^2)E_2 + \bar{\psi}_1 \psi_2 E_3 \right\rangle \\
&= \frac{1}{4}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon \psi_1^2)(\psi_2^2 - \epsilon \bar{\psi}_1^2) \langle E_1, E_1 \rangle + \frac{1}{4}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon \psi_1^2)(\psi_2^2 + \epsilon \bar{\psi}_1^2) \langle E_2, E_2 \rangle \\
&\quad + |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 \langle E_3, E_3 \rangle \\
&= \frac{1}{4}(|\psi_2|^4 - \bar{\psi}_1^2 \bar{\psi}_2^2 - \epsilon \psi_1^2 \psi_2^2 + \epsilon^2 |\psi_1|^4) \\
&\quad + \frac{1}{4}(|\psi_2|^4 + \bar{\psi}_1^2 \bar{\psi}_2^2 + \epsilon \psi_1^2 \psi_2^2 + \epsilon^2 |\psi_1|^4) + \epsilon |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 \\
&= \frac{1}{2}|\psi_2|^4 + \epsilon |\psi_1|^2 |\psi_2|^2 + \epsilon^2 |\psi_1|^4 \\
&= \frac{1}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon |\psi_1|^2)^2.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\langle X_z, X_z \rangle = \langle X_{\bar{z}}, X_{\bar{z}} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon |\psi_1|^2)^2.$$

Logo X é uma imersão conforme, já que $|\psi_2|^2 + \epsilon |\psi_1|^2 > 0$. Além disso, o campo

normal unitário ao longo de X pode ser dado por

$$\begin{aligned}
N &= \frac{1}{e^w} ((\psi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)E_1 + i(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2)E_2 + (|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2)E_3) \\
&= \frac{1}{e^w} (2\operatorname{Re}(\psi_1\psi_2)E_1 + i(-2\operatorname{Im}(\psi_1\psi_2))iE_2 + (|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2)E_3) \\
&= \frac{1}{|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2} (2\operatorname{Re}(\psi_1\psi_2)E_1 + 2\operatorname{Im}(\psi_1\psi_2)E_2 + (|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2)E_3),
\end{aligned}$$

isto é,

$$N = \frac{1}{|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2} (2\operatorname{Re}(\psi_1\psi_2)E_1 + 2\operatorname{Im}(\psi_1\psi_2)E_2 + (|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2)E_3).$$

Resta mostrar que X possui curvatura média H . A fim de fazer isto, calculamos

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}X_z &= \bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}\left[\frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)E_1 + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)E_2 + \psi_1\bar{\psi}_2E_3\right] \\
&= \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_1 + \frac{1}{2}X_{\bar{z}}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)E_1 \\
&\quad + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_2 + \frac{i}{2}X_{\bar{z}}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)E_2 \\
&\quad + \psi_1\bar{\psi}_2\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_3 + X_{\bar{z}}(\psi_1\bar{\psi}_2)E_3.
\end{aligned}$$

Agora usando o Lema 1.4 para calcular

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_1 &= \bar{\nabla}_{\frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_1 - \frac{i}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_2 + \bar{\psi}_1\psi_2E_3}E_1 \\
&= \frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)\bar{\nabla}_{E_1}E_1 - \frac{i}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)\bar{\nabla}_{E_2}E_1 + \bar{\psi}_1\psi_2\bar{\nabla}_{E_3}E_1 \\
&= \frac{i\tau}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_3 - \epsilon\tau\bar{\psi}_1\psi_2E_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_2 &= \bar{\nabla}_{\frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_1 - \frac{i}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_2 + \bar{\psi}_1\psi_2E_3}E_2 \\
&= \frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)\bar{\nabla}_{E_1}E_2 - \frac{i}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)\bar{\nabla}_{E_2}E_2 + \bar{\psi}_1\psi_2\bar{\nabla}_{E_3}E_2 \\
&= \frac{\tau}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_3 + \epsilon\tau\bar{\psi}_1\psi_2E_1
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_3 &= \bar{\nabla}_{\frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_1 - \frac{i}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_2 + \bar{\psi}_1\psi_2E_3}E_3 \\
&= \frac{1}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)\bar{\nabla}_{E_1}E_3 - \frac{i}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)\bar{\nabla}_{E_2}E_3 + \bar{\psi}_1\psi_2\bar{\nabla}_{E_3}E_3 \\
&= -\frac{\epsilon\tau}{2}(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_2 - \frac{i\epsilon\tau}{2}(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_1.
\end{aligned}$$

Daí temos que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_1 + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_2 + \psi_1\bar{\psi}_2\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_3 = \\
& = \frac{i\tau}{4}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_3 - \frac{\epsilon\tau}{2}\bar{\psi}_1\psi_2(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)E_2 \\
& \quad + \frac{i\tau}{4}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_3 + \frac{i\epsilon\tau}{2}\bar{\psi}_1\psi_2(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)E_1 \\
& \quad - \frac{\epsilon\tau}{2}\psi_1\bar{\psi}_2(\psi_2^2 - \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_2 - \frac{i\epsilon\tau}{2}\psi_1\bar{\psi}_2(\psi_2^2 + \epsilon\bar{\psi}_1^2)E_1 \\
& = \frac{i\tau}{4}(|\psi_2|^4 + \epsilon\bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2\psi_2^2 - \epsilon^2|\psi_1|^4)E_3 \\
& \quad - \frac{\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \epsilon|\psi_1|^2\psi_1\psi_2)E_2 \\
& \quad \frac{i\tau}{4}(|\psi_2|^4 - \epsilon\bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2\psi_2^2 - \epsilon^2|\psi_1|^4)E_3 \\
& \quad + \frac{i\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 + \epsilon|\psi_1|^2\psi_1\psi_2)E_1 \\
& \quad - \frac{\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2\psi_1\psi_2 - \epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)E_2 - \frac{i\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2\psi_1\psi_2 + \epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)E_1 \\
& = \frac{i\tau}{2}(|\psi_2|^4 - \epsilon^2|\psi_1|^4)E_3 \\
& \quad - \frac{\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \epsilon|\psi_1|^2\psi_1\psi_2 + |\psi_2|^2\psi_1\psi_2 - \epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)E_2 \\
& \quad + \frac{i\tau\epsilon}{2}(|\psi_2|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 + \epsilon|\psi_1|^2\psi_1\psi_2 - |\psi_2|^2\psi_1\psi_2 - \epsilon|\psi_1|^2\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2)E_1 \\
& = \frac{i\epsilon\tau}{2}(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2) + \psi_1\psi_2(\epsilon|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2))E_1 \\
& \quad - \frac{\epsilon\tau}{2}(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2) + \psi_1\psi_2(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2))E_2 \\
& \quad + \frac{i\tau}{2}(|\psi_2|^4 - \epsilon^2|\psi_1|^4)E_3 \\
& = \frac{i\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2)E_1 \\
& \quad - \frac{\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 + \psi_1\psi_2)E_2 \\
& \quad + \frac{i\tau}{2}(|\psi_2|^4 - \epsilon^2|\psi_1|^4)E_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(-2i\text{Im}(\psi_1\psi_2))E_1 \\
&\quad - \frac{\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)2\text{Re}(\psi_1\psi_2)E_2 \\
&\quad + \frac{i\tau}{2}(|\psi_2|^4 - \epsilon^2|\psi_1|^4)E_3 \\
&= \epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\text{Im}(\psi_1\psi_2)E_1 \\
&\quad - \epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\text{Re}(\psi_1\psi_2)E_2 \\
&\quad + \frac{i\tau}{2}(|\psi_2|^4 - \epsilon^2|\psi_1|^4)E_3 \\
&= \epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(\text{Im}(\psi_1\psi_2)E_1 - \text{Re}(\psi_1\psi_2)E_2 \\
&\quad + \frac{i\epsilon}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)E_3).
\end{aligned}$$

Agora, agrupando estas expressões juntamente com (2.33), (2.34) e (2.35), conseguimos

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}X_z &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_1 + \frac{1}{2}X_{\bar{z}}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)E_1 \\
&\quad + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_2 + \frac{i}{2}X_{\bar{z}}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)E_2 \\
&\quad + \psi_1\bar{\psi}_2\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_3 + X_{\bar{z}}(\psi_1\bar{\psi}_2)E_3 \\
&= [H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\text{Re}(\psi_1\psi_2) + \epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\text{Im}(\psi_1\psi_2)]E_1 \\
&\quad + [H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\text{Im}(\psi_1\psi_2) + \epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\text{Re}(\psi_1\psi_2)]E_2 \\
&\quad + [-\frac{1}{2}(\epsilon H + i\tau)(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4)]E_3 \\
&\quad + \epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(\text{Im}(\psi_1\psi_2)E_1 - \text{Re}(\psi_1\psi_2)E_2 + \frac{i\epsilon}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)E_3) \\
&= [H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\text{Re}(\psi_1\psi_2) \\
&\quad + \epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\text{Im}(\psi_1\psi_2) - \epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\text{Im}(\psi_1\psi_2)]E_1 \\
&\quad + [H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)\text{Im}(\psi_1\psi_2) \\
&\quad + \epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\text{Re}(\psi_1\psi_2) - \epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)\text{Re}(\psi_1\psi_2)]E_2 \\
&\quad + [-\frac{1}{2}(\epsilon H + i\tau)(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4) + \frac{i\tau}{2}(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4)]E_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)Re(\psi_1\psi_2)E_1 \\
&\quad + H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)Im(\psi_1\psi_2)E_2 - \frac{\epsilon H}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)E_3 \\
&= \frac{H}{2}(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)[2Re(\psi_1\psi_2)E_1 + 2Im(\psi_1\psi_2)E_2 + (|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)E_3].
\end{aligned}$$

Como

$$N = \frac{1}{|\psi_1|^2 + \epsilon|\psi_2|^2}(2Re(\psi_1\psi_2)E_1 + 2Im(\psi_1\psi_2)E_2 + (|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2)E_3).$$

Concluimos que

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{X_z}X_z &= \frac{1}{2}H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)N \\
&= \frac{1}{2}H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)^2N,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\bar{\nabla}_{X_z}X_z = \frac{1}{2}He^{2w}N.$$

Que mostra que a imersão X tem curvatura média H , que conclui a prova do teorema. \square

Dadas ψ_1, ψ_2 soluções de (2.30) com potenciais (2.31) e (2.32), temos que os campos $e^{i\frac{\vartheta}{2}}\psi_1$ e $e^{i\frac{\vartheta}{2}}\psi_2$, onde $\vartheta \in \mathbb{R}$, também satisfaz a mesma equação. Deste modo, isto dá uma família associada de superfícies com mesma curvatura média prescrita H . Desta forma temos o seguinte corolário:

Corolário 2.6. *Seja $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ um campo de spinors, solução de (2.36) e (2.37). Então, para qualquer $\vartheta \in \mathbb{R}$, os campos de spinors*

$$\psi^\vartheta = (e^{i\frac{\vartheta}{2}}\psi_1, e^{i\frac{\vartheta}{2}}\psi_2)$$

são também solução do mesmo sistema. Então, dada uma imersão conforme $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$ com curvatura média prescrita H e representada por ψ , existe uma família associada de imersões X_ϑ representada por ψ^ϑ tal que $X_0 = X$. Todas superfícies em tal família são isométricas e possuem mesma curvatura média prescrita H .

Capítulo 3

A Aplicação de Gauss.

A aplicação de Gauss de superfícies mínimas e curvatura média constante tem sido o objeto de inúmeras investigações. Consequentemente muitos resultados na geometria nessas superfícies têm sido obtidos usando a teoria de aplicações meromorfas e harmônica. Identificando (por multiplicação à esquerda) o espaço tangente de $\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$ em algum ponto com a sua álgebra de Lie, a aplicação de Gauss de uma superfície pode ser considerada como uma aplicação na esfera unitária da álgebra de Lie. Se a superfície é em nenhuma parte vertical, isto é, em nenhuma parte tangente as fibras, então a imagem da aplicação de Gauss está contida no hemisfério norte (veja, [3]). Neste capítulo mostraremos com que hipóteses a aplicação de Gauss da imersão é harmônica. Daremos também, uma representação tipo Weierstrass de uma imersão mínima somente em termos dessa aplicação. Observaremos que essa função é na verdade a composição da aplicação de Gauss com a projeção estereográfica.

Observamos inicialmente que, quando $\epsilon = 1$, o vetor normal é unitário, mas quando $\epsilon = -1$, o vetor normal satisfaz $\langle N, N \rangle = -1$. Por tais motivos, denotamos por,

$$S_1^2 = \{(a, b, c) \in T_e\mathbb{H}_3(1, \tau) : a^2 + b^2 + c^2 = 1\} \subset T_e\mathbb{H}_3(1, \tau)$$

e

$$S_{-1}^2 = \{(a, b, c) \in T_e\mathbb{H}_3(-1, \tau) : a^2 + b^2 - c^2 = -1\} \subset T_e\mathbb{H}_3(-1, \tau),$$

onde acima identificamos o vetor $ae_1 + be_2 + ce_3 \in T_e\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$ a terna (a, b, c) . Assim, S_1^2 é a esfera unitária de $T_e\mathbb{H}_3(1, \tau)$ e S_{-1}^2 é a parte superior de um hiperbolóide em $T_e\mathbb{H}_3(-1, \tau)$. Sabemos que, quando $\epsilon = 1$, a projeção estereográfica com respeito ao pólo norte $N = (0, 0, 1)$ é dada por:

$$\pi_1 = S_1^2 \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}, \quad \pi_1(a, b, c) = \frac{a}{1-c} + i\frac{b}{1-c}, \quad \pi_1(N) = \infty,$$

e tem inversa

$$\pi_1^{-1} = \bar{\mathbb{C}} \longrightarrow S_1^2, \quad \pi_1^{-1}(w) = \frac{1}{1+|w|^2}(2\operatorname{Re}(w), 2\operatorname{Im}(w), |w|^2 - 1), \quad \pi_1^{-1}(\infty) = N.$$

Analogamente, no caso em que $\epsilon = -1$, a projeção estereográfica em relação ao pólo sul $S = (0, 0, -1)$ tem imagens no disco $\mathbb{D} = \{g \in \mathbb{C} : |g| < 1\}$ e é dada por:

$$\pi_{-1} = S_{-1}^2 \longrightarrow \bar{\mathbb{D}}, \quad \pi_{-1}(a, b, c) = \frac{a}{1+c} + i\frac{b}{1+c},$$

e tem inversa

$$\pi_{-1}^{-1} = \bar{\mathbb{D}} \longrightarrow S_{-1}^2, \quad \pi_{-1}^{-1}(w) = \frac{1}{1-|w|^2}(2\operatorname{Re}(w), 2\operatorname{Im}(w), |w|^2 + 1).$$

Englobando estes cálculos, escrevemos

$$\pi_\epsilon(a, b, c) = \frac{a}{1-\epsilon c} + i\frac{b}{1-\epsilon c} \quad \text{e} \quad \pi_\epsilon^{-1}(w) = \frac{1}{1+\epsilon|w|^2}(2\operatorname{Re}(w), 2\operatorname{Im}(w), |w|^2 - \epsilon).$$

Agora, dada a imersão isométrica $X : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$, definimos as funções

$$f = \bar{\psi}_2^2, \quad g = \frac{\psi_1}{\bar{\psi}_2}, \tag{3.1}$$

como

$$\begin{aligned} Z^1 &= \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2) \\ Z^2 &= \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2) \\ Z^3 &= \psi_1\bar{\psi}_2, \end{aligned}$$

temos que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2) &= \frac{1}{2}\left(1 - \epsilon\left(\frac{\psi_1}{\bar{\psi}_2}\right)^2\right)\bar{\psi}_2^2 \\ &= \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2)f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2) &= \frac{i}{2}\left(1 + \epsilon\left(\frac{\psi_1}{\bar{\psi}_2}\right)^2\right)\bar{\psi}_2^2 \\ &= \frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2)f,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_1\bar{\psi}_2 &= \frac{\psi_1}{\bar{\psi}_2}\bar{\psi}_2^2 \\ &= gf,\end{aligned}$$

deste modo Z^1 , Z^2 e Z^3 são expressas em função de f e g por:

$$\begin{aligned}Z^1 &= \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2)f, \\ Z^2 &= \frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2)f, \\ Z^3 &= gf.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Além disso, temos:

Lema 3.1. *Dada uma imersão isométrica $X : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$, as expressões da métrica e do vetor normal em termos de f e g são*

$$e^{2w} = |f|^2(1 + \epsilon|g|^2)^2$$

e

$$N = \frac{1}{1 + \epsilon|g|^2}(2\operatorname{Re}(g)E_1 + 2\operatorname{Im}(g)E_2 + (|g|^2 - \epsilon)E_3).$$

Demonstração. Como $|\psi_k|^2 = \psi_k\bar{\psi}_k$, logo de (3.1), temos que

$$\begin{aligned}|f|^2 &= \bar{\psi}_2^2\psi_2^2 \\ &= |\psi_2|^4\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}|g|^2 &= \frac{\psi_1\bar{\psi}_1}{\bar{\psi}_2\psi_2} \\ &= \frac{|\psi_1|^2}{|\psi_2|^2}.\end{aligned}$$

logo $e^{2w} = (|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2)^2 = (1 + \epsilon\frac{|\psi_1|^2}{|\psi_2|^2})|\psi_2|^4 = (1 + \epsilon|g|^2)^2|f|^2$. Agora observe que

$$\psi_1\psi_2 = \frac{\psi_1}{\psi_2}\bar{\psi}_2\psi_2 = \frac{\psi_1}{\psi_2}|\psi_2|^2 = g|f|,$$

logo $Re(\psi_1\psi_2) = |f|Re(g)$ e $Im(\psi_1\psi_2) = |f|Im(g)$ e que

$$|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2 = \left(\frac{|\psi_1|^2}{|\psi_2|^2} - \epsilon\right)|\psi_2|^2 = (g - \epsilon)|f|.$$

Como $|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2 = (1 + \epsilon|g|^2)|f|$, temos que

$$N = \frac{1}{|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2}(2Re(\psi_1\psi_2)E_1 + 2Im(\psi_1\psi_2)E_2 + (|\psi_1|^2 - \epsilon|\psi_2|^2)E_3)$$

se tona

$$N = \frac{1}{1 + \epsilon|g|^2}(2Re(g)E_1 + 2Im(g)E_2 + (|g|^2 - \epsilon)E_3).$$

□

A função g tem a seguinte interpretação geométrica.

Lema 3.2. *Dada uma imersão isométrica $X : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$, a aplicação de Gauss $\eta : \Sigma \longrightarrow S_\epsilon^2$ satisfaz $\pi_\epsilon(\eta) = g$. Isto é, a composição da aplicação de Gauss com a projeção estereográfica é dada por g .*

Demonstração. Temos que

$$\pi_\epsilon(a, b, c) = \frac{a}{1 - \epsilon c} + i\frac{b}{1 - \epsilon c},$$

como a aplicação de Gauss é

$$N = \frac{1}{1 + \epsilon|g|^2}(2Re(g)E_1 + 2Im(g)E_2 + (|g|^2 - \epsilon)E_3).$$

Segue que

$$\pi_\epsilon \circ N = \left(\frac{\frac{2Re(g)}{1 + \epsilon|g|^2}}{1 - \epsilon\frac{|g|^2 - \epsilon}{1 + \epsilon|g|^2}}, \frac{\frac{2Im(g)}{1 + \epsilon|g|^2}}{1 - \epsilon\frac{|g|^2 - \epsilon}{1 + \epsilon|g|^2}} \right),$$

como

$$\frac{\frac{2Re(g)}{1 + \epsilon|g|^2}}{1 - \epsilon\frac{|g|^2 - \epsilon}{1 + \epsilon|g|^2}} = \frac{\frac{2Re(g)}{1 + \epsilon|g|^2}}{\frac{1 + \epsilon|g|^2 - \epsilon|g|^2 + \epsilon^2}{1 + \epsilon|g|^2}} = \frac{2Re(g)}{1 + \epsilon|g|^2} = Re(g) \quad \text{e} \quad \frac{\frac{2Im(g)}{1 + \epsilon|g|^2}}{1 - \epsilon\frac{|g|^2 - \epsilon}{1 + \epsilon|g|^2}} = Im(g).$$

Logo

$$\pi_\epsilon(\eta) = (\operatorname{Re}(g), \operatorname{Im}(g)) = g.$$

□

A equação de *Dirac* (2.30) é reescrita em termos de f e g como

Lema 3.3. *As funções f e g satisfazem*

$$f_{\bar{z}} = |f|^2 \bar{g} (H(1 + \epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau(1 - \epsilon|g|^2)) \quad (3.3)$$

e

$$g_{\bar{z}} = -\frac{\bar{f}}{2} (\epsilon H(1 + \epsilon|g|^2)^2 + i\tau(1 - \epsilon|g|^2)^2). \quad (3.4)$$

Além disso, se $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$ é uma imersão mínima, então

$$g_{\bar{z}z} = i\epsilon\tau \bar{f} (1 - \epsilon|g|^2) \bar{g} g_z \quad (3.5)$$

Demonstração. Como f e g são dadas por

$$f = \bar{\psi}_2^2 \quad \text{e} \quad g = \frac{\psi_1}{\psi_2},$$

então, derivando f em relação à \bar{z} e usando (2.31) e (2.24), temos

$$\begin{aligned} f_{\bar{z}} &= \partial_{\bar{z}}(\bar{\psi}_2^2) \\ &= 2\bar{\psi}_2 \partial_{\bar{z}} \bar{\psi}_2 \\ &= -2\bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 \bar{U} \\ &= -2\bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 \left\{ -\frac{1}{2} (H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) - i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)) \right\} \\ &= \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 \{ (H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) - i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)) \} \\ &= \frac{\bar{\psi}_1}{\psi_2} \bar{\psi}_2 \psi_2 \{ (H|f|(1 + \epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau|f|(1 - \epsilon|g|^2)) \} \\ &= \bar{g}|f|^2 (H(1 + \epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau(1 - \epsilon|g|^2)). \end{aligned}$$

Agora derivando g com relação à \bar{z} , e usando (2.31), (2.32) e (2.24), temos

$$\begin{aligned}
g_{\bar{z}} &= \partial_{\bar{z}}\left(\frac{\psi_1}{\psi_2}\right) \\
&= \frac{\bar{\psi}_2\partial_{\bar{z}}\psi_1 - \psi_1\partial_{\bar{z}}\bar{\psi}_2}{\bar{\psi}_2^2} \\
&= \frac{\bar{\psi}_2\psi_2V - \psi_1(-\bar{U}\bar{\psi}_1)}{\bar{\psi}_2^2} \\
&= \frac{|\psi_2|^2}{\bar{\psi}_2^2}V + \frac{|\psi_1|^2}{\bar{\psi}_2^2}\bar{U} \\
&= -\frac{|\psi_2|^2}{\bar{\psi}_2^2}\frac{\epsilon}{2}\{(H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) + i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2))\} \\
&\quad -\frac{|\psi_1|^2}{\bar{\psi}_2^2}\frac{1}{2}\{(H(|\psi_2|^2 + \epsilon|\psi_1|^2) - i\epsilon\tau(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2))\} \\
&= -\frac{|f|}{f}\frac{\epsilon}{2}(H|f|(1 + \epsilon|g|^2) + i\epsilon\tau|f|(1 - \epsilon|g|^2)) \\
&\quad -\frac{|\psi_1|^2}{|\psi_2|^2}\frac{|\bar{\psi}_2|^2}{\bar{\psi}_2^2}\frac{1}{2}(H|f|(1 + \epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau|f|(1 - \epsilon|g|^2)) \\
&= -\frac{|f|^2}{f}\frac{\epsilon}{2}(H|f|(1 + \epsilon|g|^2) + i\epsilon\tau|f|(1 - \epsilon|g|^2)) \\
&\quad -\frac{|g|^2|f|^2}{f}\frac{1}{2}(H|f|(1 + \epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau|f|(1 - \epsilon|g|^2)) \\
&= -\frac{\epsilon\bar{f}}{2}(H|f|(1 + \epsilon|g|^2) + i\epsilon\tau|f|(1 - \epsilon|g|^2)) \\
&\quad -\frac{|g|^2\bar{f}}{2}(H|f|(1 + \epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau|f|(1 - \epsilon|g|^2)) \\
&= \frac{H}{2}(1 + \epsilon|g|^2)(-\epsilon\bar{f} - |g|^2\bar{f}) + \frac{i\epsilon\tau}{2}(1 - \epsilon|g|^2)(-\epsilon\bar{f} + |g|^2\bar{f}) \\
&= -\frac{\bar{f}}{2}\epsilon H(1 + \epsilon|g|^2)(1 + \epsilon|g|^2) - \frac{\bar{f}}{2}i\epsilon^2\tau(1 - \epsilon|g|^2)(1 - \epsilon|g|^2) \\
&= -\frac{\bar{f}}{2}(\epsilon H(1 + \epsilon|g|^2)^2 + i\tau(1 - \epsilon|g|^2)^2).
\end{aligned}$$

O que verifica (3.3) e (3.4). Agora temos que, se a imersão $X : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$ é mínima, ou seja $H = 0$, então,

$$f_{\bar{z}} = -i\epsilon\tau|f|^2\bar{g}(1 - \epsilon|g|^2)$$

e

$$g_{\bar{z}} = -\frac{i\tau\bar{f}}{2}(1 - \epsilon|g|^2)^2.$$

Assim derivando a segunda equação com respeito à z , obtemos

$$\begin{aligned} g_{\bar{z}z} &= \partial_z\left(-\frac{i\tau\bar{f}}{2}(1 - \epsilon|g|^2)^2\right) \\ &= -\frac{i\tau\bar{f}_z}{2}(1 - \epsilon|g|^2)^2 - \frac{i\tau\bar{f}}{2}2(1 - \epsilon|g|^2)\partial_z(-\epsilon g\bar{g}), \end{aligned}$$

como

$$\partial_z(-\epsilon g\bar{g}) = -\epsilon(g_z\bar{g} + g\bar{g}_z)$$

e

$$\bar{f}_z = i\epsilon\tau|f|^2g(1 - \epsilon|g|^2).$$

Segue que

$$\begin{aligned} g_{\bar{z}z} &= \frac{\epsilon\tau^2}{2}|f|^2g(1 - \epsilon|g|^2)^3 + i\epsilon\tau\bar{f}(1 - \epsilon|g|^2)(g_z\bar{g} + g\bar{g}_z) \\ &= \frac{\epsilon\tau^2}{2}|f|^2g(1 - \epsilon|g|^2)^3 + i\epsilon\tau\bar{f}(1 - \epsilon|g|^2)g_z\bar{g} + i\epsilon\tau\bar{f}(1 - \epsilon|g|^2)g\bar{g}_z \\ &= \frac{\epsilon\tau^2}{2}|f|^2g(1 - \epsilon|g|^2)^3 + i\epsilon\tau\bar{f}(1 - \epsilon|g|^2)g_z\bar{g} + i\epsilon\tau\bar{f}(1 - \epsilon|g|^2)g\frac{i}{2}\tau f(1 - \epsilon|g|^2)^2 \\ &= \frac{\epsilon\tau^2}{2}|f|^2g(1 - \epsilon|g|^2)^3 + i\epsilon\tau\bar{f}(1 - \epsilon|g|^2)g_z\bar{g} - \frac{\epsilon\tau^2}{2}|f|^2g(1 - \epsilon|g|^2)^3 \\ &= i\epsilon\tau\bar{f}(1 - \epsilon|g|^2)g_z\bar{g}. \end{aligned}$$

□

Observe que a contrapartida do corolário 2.6 em termos de f e g como no lema anterior pode ser escrito como: para qualquer $\vartheta \in \mathbb{R}$, as funções

$$f^\vartheta = e^{-i\vartheta}f \quad \text{e} \quad g^\vartheta = e^{i\vartheta}g$$

são soluções do sistema (3.3) e (3.4). Deste modo, estes pares de funções descrevem uma família associada de imersões com mesma curvatura média prescrita e métrica isométrica induzida.

A equação (3.5) possui a seguinte interpretação

Corolário 3.4. *Seja $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$ uma imersão isométrica mínima. Se $\epsilon = 1$, suponha que a aplicação de Gauss η não é horizontal e tem imagens contidas no hemisfério sul. Então a projeção estereográfica da aplicação de Gauss, $g = \pi_\epsilon(\eta)$ é uma aplicação harmônica sobre o disco \mathbb{D} dotado com a métrica*

$$ds_\epsilon^2 = \frac{|dw|^2}{(1 - \epsilon|w|^2)^2}.$$

Então, g satisfaz a equação

$$g_{\bar{z}z} + \frac{2\epsilon\bar{g}}{1 - \epsilon|g|^2}g_z g_{\bar{z}} = 0.$$

Nós observamos que (\mathbb{D}, ds_1^2) é o modelo do disco de Poincaré para o plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , considerando que (\mathbb{D}, ds_{-1}^2) é isométrico para um hemisfério aberto da esfera unitária \mathbb{S}^2

Demonstração. De fato, pelas hipóteses, quando $\epsilon = 1$, então $|g|^2 < 1$. Portanto, a imagem da aplicação de Gauss está no disco \mathbb{D} . Por outro lado, quando $\epsilon = -1$, por definição $|g| < 1$. Assim, em função de (3.5), segue que,

$$\begin{aligned} g_{\bar{z}z} &= i\epsilon\tau\bar{f}(1 - \epsilon|g|^2)\bar{g}g_z \\ &= i\epsilon\tau\bar{f}(1 - \epsilon|g|^2)\bar{g}g_z \frac{(-2)(1 - \epsilon|g|^2)}{(-2)(1 - \epsilon|g|^2)} \\ &= -\frac{i\tau}{2}\bar{f}(1 - \epsilon|g|^2)^2(-2\epsilon\bar{g})\frac{1}{1 - \epsilon|g|^2}g_z \\ &= -2\epsilon\bar{g}\frac{1}{1 - \epsilon|g|^2}g_{\bar{z}}g_z. \end{aligned}$$

Logo

$$g_{\bar{z}z} + \frac{2\epsilon\bar{g}}{1 - \epsilon|g|^2}g_z g_{\bar{z}} = 0.$$

Por sua vez, esta equação corresponde a harmonicidade da aplicação $g : \Sigma \rightarrow (\mathbb{D}, ds_\epsilon^2)$. De fato, para $\lambda_\epsilon^2(w) = \frac{1}{(1 - \epsilon|w|^2)^2}$, derivando com respeito à w temos,

$$\begin{aligned} 2\lambda_\epsilon(\lambda_\epsilon)_w &= -\frac{2(1 - \epsilon|w|^2)(-\epsilon)(w\bar{w})_w}{(1 - \epsilon|w|^2)^4} \\ &= \frac{2\epsilon\bar{w}}{(1 - \epsilon|w|^2)^3}. \end{aligned}$$

Então $(\lambda_\epsilon)_w = \frac{\epsilon\bar{w}}{(1-\epsilon|w|^2)^2}$, de modo que

$$\begin{aligned}\frac{2}{\lambda_\epsilon(g)}(\lambda_\epsilon)_w(g) &= 2(1-\epsilon|g|^2)\frac{\epsilon\bar{g}}{(1-\epsilon|g|^2)^2} \\ &= \frac{2\epsilon\bar{g}}{1-\epsilon|g|^2}.\end{aligned}$$

Segue que g satisfaz

$$g_{\bar{z}z} + \frac{2}{\lambda_\epsilon(g)}(\lambda_\epsilon)_w(g)g_zg_{\bar{z}} = 0,$$

ou seja, g é harmônica. □

A seguir, como no capítulo anterior, apresentamos uma representação local do tipo Weierstrass para superfícies imersas no espaço de Heisenberg $\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$. Observamos inicialmente que, como antes, qualquer superfície imersa neste espaço, tem uma representação integral. A expressão local para uma imersão $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$ passa a ser, em termos de f e g :

$$\begin{aligned}x_1(z) &= x_1(z_0) + 2Re \int_{z_0}^z \frac{1}{2}(1-\epsilon g^2)fdz, \\ x_2(z) &= x_2(z_0) + 2Re \int_{z_0}^z \frac{i}{2}(1+\epsilon g^2)fdz, \\ x_3(z) &= x_3(z_0) + 2Re \int_{z_0}^z \left(\frac{\tau}{2}(i(1+\epsilon g^2)x_1 - (1-\epsilon g^2)x_2) + g \right) fdz.\end{aligned}$$

O teorema a seguir afirma que superfícies imersas no espaço de Heisenberg $\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$, podem ser representadas localmente em termos de f e g como acima, desde que f e g satisfaçam certas equações diferenciais. Inicialmente demonstramos

Lema 3.5. *Sejam $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \Sigma$ aplicações que verificam (3.3) e (3.4), isto é,*

$$f_{\bar{z}} = |f|^2\bar{g}(H(1+\epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau(1-\epsilon|g|^2))$$

e

$$g_{\bar{z}} = -\frac{\bar{f}}{2}(\epsilon H(1+\epsilon|g|^2)^2 + i\tau(1-\epsilon|g|^2)^2).$$

Então,

$$\partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2)f\right) = |f|^2(H(1 + \epsilon|g|^2)Re(g) - \epsilon\tau(1 - \epsilon|g|^2)Im(g)) \quad (3.6)$$

$$\partial_{\bar{z}}\left(\frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2)f\right) = |f|^2(H(1 + \epsilon|g|^2)Im(g) + \epsilon\tau(1 - \epsilon|g|^2)Re(g)) \quad (3.7)$$

$$\partial_{\bar{z}}(fg) = \frac{1}{2}|f|^2(H(1 + \epsilon|g|^2)(|g|^2 - \epsilon) - i\tau(1 - |g|^4)) \quad (3.8)$$

Demonstração. Para a primeira equação temos,

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}\left(\frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2)f\right) &= \frac{1}{2}(-2\epsilon g g_{\bar{z}})f + \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2)f_{\bar{z}} \\ &= -\epsilon g g_{\bar{z}}f + \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2)f_{\bar{z}} \\ &= \epsilon g f \frac{\bar{f}}{2}(\epsilon H(1 + \epsilon|g|^2)^2 + i\tau(1 - \epsilon|g|^2)^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}(1 - \epsilon|g|^2)|f|^2\bar{g}(H(1 + \epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau(1 - \epsilon|g|^2)) \\ &= \frac{|f|^2}{2}H(1 + \epsilon|g|^2)(g(1 + \epsilon|g|^2) + \bar{g}(1 - \epsilon|g|^2)) \\ &\quad + i\epsilon\tau\frac{|f|^2}{2}(1 - \epsilon|g|^2)(g(1 - \epsilon|g|^2) - \bar{g}(1 - \epsilon g^2)) \\ &= \frac{|f|^2}{2}H(1 + \epsilon|g|^2)(g + \epsilon g|g|^2 + \bar{g} - \epsilon\bar{g}g^2) \\ &\quad + i\epsilon\tau\frac{|f|^2}{2}(1 - \epsilon|g|^2)(g - \epsilon g|g|^2 - \bar{g} + \epsilon\bar{g}g^2) \\ &= \frac{|f|^2}{2}H(1 + \epsilon|g|^2)(g + \epsilon g|g|^2 + \bar{g} - \epsilon g|g|^2) \\ &\quad + i\epsilon\tau\frac{|f|^2}{2}(1 - \epsilon|g|^2)(g - \epsilon g|g|^2 - \bar{g} + \epsilon g|g|^2) \\ &= \frac{|f|^2}{2}H(1 + \epsilon|g|^2)(g + \bar{g}) + i\epsilon\tau\frac{|f|^2}{2}(1 - \epsilon|g|^2)(g - \bar{g}) \\ &= \frac{|f|^2}{2}H(1 + \epsilon|g|^2)2Re(g) + i\epsilon\tau\frac{|f|^2}{2}(1 - \epsilon|g|^2)2iIm(g) \\ &= |f|^2(H(1 + \epsilon|g|^2)Re(g) - \epsilon\tau(1 - \epsilon|g|^2)Im(g)). \end{aligned}$$

Para a segunda temos,

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}\left(\frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2)f\right) &= \frac{i}{2}(2\epsilon g g_{\bar{z}})f + \frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2)f_{\bar{z}} \\
&= i\epsilon g g_{\bar{z}}f + \frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2)f_{\bar{z}} \\
&= -i\epsilon g f \frac{\bar{f}}{2}(\epsilon H(1 + \epsilon|g|^2)^2 + i\tau(1 - \epsilon|g|^2)^2) \\
&= i\frac{|f|^2}{2}H(1 + \epsilon|g|^2)(-g(1 + \epsilon|g|^2) + \bar{g}(1 + \epsilon g^2)) \\
&\quad + \epsilon\tau\frac{|f|^2}{2}(1 - \epsilon|g|^2)(g(1 - \epsilon|g|^2) + \bar{g}(1 + \epsilon g^2)) \\
&= i\frac{|f|^2}{2}H(1 + \epsilon|g|^2)(-g - \epsilon g|g|^2 + \bar{g} + \epsilon\bar{g}g^2) \\
&\quad + \epsilon\tau\frac{|f|^2}{2}(1 - \epsilon|g|^2)(g - \epsilon g|g|^2 + \bar{g} + \epsilon\bar{g}g^2) \\
&= i\frac{|f|^2}{2}H(1 + \epsilon|g|^2)(-g - \epsilon g|g|^2 + \bar{g} + \epsilon\bar{g}|g|^2) \\
&\quad + \epsilon\tau\frac{|f|^2}{2}(1 - \epsilon|g|^2)(g - \epsilon g|g|^2 + \bar{g} + \epsilon\bar{g}|g|^2) \\
&= \frac{|f|^2}{2}H(1 + \epsilon|g|^2)(-g + \bar{g}) + \epsilon\tau\frac{|f|^2}{2}(1 - \epsilon|g|^2)(g + \bar{g}) \\
&= \frac{|f|^2}{2}H(1 + \epsilon|g|^2)(-2i\text{Im}(g)) + \epsilon\tau\frac{|f|^2}{2}(1 - \epsilon|g|^2)2\text{Re}(g) \\
&= |f|^2(H(1 + \epsilon|g|^2)\text{Im}(g) + \epsilon\tau(1 - \epsilon|g|^2)\text{Re}(g)).
\end{aligned}$$

E finalmente para a terceira equação, temos,

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}(fg) &= f\bar{z}g + fg_{\bar{z}} \\
&= g|f|^2\bar{g}(H(1 + \epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau(1 - \epsilon|g|^2)) \\
&\quad - f\frac{\bar{f}}{2}(\epsilon H(1 + \epsilon|g|^2)^2 + i\tau(1 - \epsilon|g|^2)^2) \\
&= |f|^2H(1 + \epsilon|g|^2)\left(|g|^2 - \frac{\epsilon}{2}(1 + \epsilon|g|^2)\right) \\
&\quad - i\tau|f|^2(1 - \epsilon|g|^2)\left(|g|^2\epsilon + \frac{1}{2}(1 - \epsilon|g|^2)\right) \\
&= |f|^2H(1 + \epsilon|g|^2)\left(|g|^2 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{|g|^2}{2}\right) \\
&\quad - i\tau|f|^2(1 - \epsilon|g|^2)\left(\epsilon|g|^2 + \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}|g|^2\right) \\
&= |f|^2H(1 + \epsilon|g|^2)\left(\frac{|g|^2}{2} - \frac{\epsilon}{2}\right) - i\tau|f|^2(1 - \epsilon|g|^2)\left(\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}|g|^2\right) \\
&= \frac{|f|^2}{2}H(1 + \epsilon|g|^2)(|g|^2 - \epsilon) - \frac{i\tau}{2}|f|^2(1 - \epsilon|g|^2)(1 + \epsilon|g|^2) \\
&= \frac{|f|^2}{2}(H(1 + \epsilon|g|^2)(|g|^2 - \epsilon) - i\tau(1 - \epsilon|g|^4))
\end{aligned}$$

□

Enunciamos, enfim, o teorema de representação de superfícies imersas em $\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$.

Teorema 3.6. *Sejam f e g funções definidas numa superfície de Riemann simplesmente conexa Σ , tal que f nunca se anula, satisfazendo*

$$f_{\bar{z}} = |f|^2\bar{g}(H(1 + \epsilon|g|^2) - i\epsilon\tau(1 - \epsilon|g|^2))$$

e

$$g_{\bar{z}} = -\frac{\bar{f}}{2}(\epsilon H(1 + \epsilon|g|^2)^2 + i\tau(1 - \epsilon|g|^2)^2).$$

Então, a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau),$$

definida por

$$\begin{aligned}
x_1(z) &= x_1(z_0) + 2\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2) f dz, \\
x_2(z) &= x_2(z_0) + 2\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2) f dz, \\
x_3(z) &= x_3(z_0) + 2\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left(\tau \left(\frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2) f x_1 - \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2) f x_2 \right) + fg \right) dz
\end{aligned} \tag{3.9}$$

é uma imersão com curvatura média H e aplicação de Gauss g .

Demonstração. Primeiramente, observamos que, por (3.6) e (3.7), temos

$$\operatorname{Im} \partial_{\bar{z}} \left(\frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2) f \right) = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} \partial_{\bar{z}} \left(\frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2) f \right) = 0.$$

Logo pelo lema 2.3, concluímos que as funções x_1 e x_2 estão bem definidas e satisfazem

$$\frac{\partial x_1}{\partial z} = \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2) f \quad \text{e} \quad \frac{\partial x_2}{\partial z} = \frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2) f.$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}
\tau \left(\frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2) f \partial_{\bar{z}}(x_1) - \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2) f \partial_{\bar{z}}(x_2) \right) &= \\
&= \tau \left(\frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2) f \frac{1}{2}(1 - \epsilon \bar{g}^2) \bar{f} + \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2) f \frac{i}{2}(1 + \epsilon \bar{g}^2) \bar{f} \right) \\
&= \frac{i}{4} \tau |f|^2 \left((1 + \epsilon g^2)(1 - \epsilon \bar{g}^2) + (1 - \epsilon g^2)(1 + \epsilon \bar{g}^2) \right) \\
&= \frac{i}{4} \tau |f|^2 \left((1 - \epsilon \bar{g}^2 + \epsilon g^2 - g^2 \bar{g}^2 + 1 + \epsilon \bar{g}^2 - \epsilon g^2 - g^2 \bar{g}^2) \right) \\
&= \frac{i}{2} \tau |f|^2 (2 - 2|g|^4) \\
&= \frac{i}{2} \tau |f| (1 - |g|^4).
\end{aligned}$$

Logo, por isto e por (3.7) e (3.8), temos que

$$\partial_{\bar{z}} \left(\tau \left(\frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2) f x_1 - \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2) f x_2 \right) + fg \right) \in \mathbb{R}.$$

Portanto, pelo Lema 2.3, a função x_3 está bem definida e

$$\frac{\partial x_3}{\partial z} = \tau \left(\frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2) f x_1 - \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2) f x_2 \right) + fg.$$

Assim segue que

$$\begin{aligned}
X_z &= (\partial_z x_1, \partial_z x_2, \partial_z x_3) \\
&= \partial_z(x_1)\partial_{x_1} + \partial_z(x_2)\partial_{x_2} + \partial_z(x_3)\partial_{x_3} \\
&= \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2)f\partial_{x_1} + \frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2)f\partial_{x_2} \\
&\quad + \left(\frac{\tau}{2}(i(1 + \epsilon g^2)x_1 - (1 - \epsilon g^2)x_2) + g\right)f\partial_{x_3} \\
&= \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2)f(\partial_{x_1} - \tau x_2\partial_{x_3}) + \frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2)f(\partial_{x_2} + \tau x_1\partial_{x_3}) + gf\partial_{x_3} \\
&= \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2)fE_1 + \frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2)fE_2 + gfE_3.
\end{aligned}$$

Daí temos que

$$\begin{aligned}
\langle X_z, X_z \rangle &= \left\langle \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2)fE_1 + \frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2)fE_2 + gfE_3, \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2)fE_1 + \frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2)fE_2 + gfE_3 \right\rangle \\
&= \frac{1}{4}(1 - \epsilon g^2)^2 f^2 \langle E_1, E_1 \rangle + \frac{i^2}{4}(1 + \epsilon g^2)^2 f^2 \langle E_2, E_2 \rangle + g^2 f^2 \langle E_3, E_3 \rangle \\
&= \frac{1}{4}(1 - \epsilon g^2)^2 f^2 - \frac{1}{4}(1 + \epsilon g^2)^2 f^2 + \epsilon g^2 f^2 \\
&= \frac{1}{4}f^2(-4\epsilon g^2) + \epsilon g^2 f^2 \\
&= -\epsilon g^2 f^2 + \epsilon g^2 f^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

análogamente, temos $\langle X_{\bar{z}}, X_{\bar{z}} \rangle = 0$ e

$$\begin{aligned}
\langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle &= \left\langle \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2)fE_1 + \frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2)fE_2 + gfE_3, \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(1 - \epsilon \bar{g}^2)\bar{f}E_1 - \frac{i}{2}(1 + \epsilon \bar{g}^2)\bar{f}E_2 + \bar{g}\bar{f}E_3 \right\rangle \\
&= \frac{1}{4}|f|^2(1 - \epsilon g^2)(1 - \epsilon \bar{g}^2)\langle E_1, E_1 \rangle + \frac{1}{4}|f|^2(1 + \epsilon g^2)^2(1 + \epsilon \bar{g}^2)\langle E_2, E_2 \rangle \\
&\quad + |g|^2|f|^2\langle E_3, E_3 \rangle \\
&= \frac{1}{4}|f|^2(1 - \epsilon \bar{g}^2 - \epsilon g^2 + \epsilon^2|g|^4) + \frac{1}{4}|f|^2(1 + \epsilon \bar{g}^2 + \epsilon g^2 + \epsilon^2|g|^4) \\
&\quad + \epsilon|g|^2|f|^2 \\
&= \frac{1}{2}|f|^2(1 + \epsilon^2|g|^4) + \epsilon|g|^2|f|^2 \\
&= \frac{1}{2}|f|^2(1 + 2\epsilon|g|^2 + \epsilon^2|g|^4) \\
&= \frac{1}{2}|f|^2(1 + \epsilon|g|^2)^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle X_z, X_z \rangle = \langle X_{\bar{z}}, X_{\bar{z}} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle X_z, X_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{2}|f|^2(1 + \epsilon|g|^2)^2 \quad (= \frac{1}{2}e^{2w}).$$

Donde concluimos que X é uma imersão conforme, posto que f é nunca nula. Além disso do Lema 3.1 a expressão do vetor normal ao longo de X é

$$N = \frac{1}{1 + \epsilon|g|^2}(2\operatorname{Re}(g)E_1 + 2\operatorname{Im}(g)E_2 + (|g|^2 - \epsilon)E_3).$$

Portanto, em virtude do Lema 2.4 e Lema 2.5, a aplicação g é a projeção estereográfica da aplicação de Gauss de X . Agora resta mostrar que X possui curvatura média H .

Primeiramente calculamos

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}X_z &= \bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}\left[\frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2)fE_1 + \frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2)fE_2 + gfE_3\right] \\
&= \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2)f\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_1 + \frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}((1 - \epsilon g^2)f)E_1 \\
&\quad + \frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2)f\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_2 + \frac{i}{2}\partial_{\bar{z}}((1 + \epsilon g^2)f)E_2 \\
&\quad + gf\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_3 + \partial_{\bar{z}}(gf)E_3.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2)f\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_1 + \frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2)f\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_2 + gf\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}}E_3 = \\
& = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \epsilon\psi_1^2)\nabla_{X_{\bar{z}}}E_1 + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \epsilon\psi_1^2)\nabla_{X_{\bar{z}}}E_2 + \psi_1\bar{\psi}_2\nabla_{X_{\bar{z}}}E_3 \\
& = \frac{i\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 - \psi_1\psi_2)E_1 \\
& \quad - \frac{\epsilon\tau}{2}(|\psi_2|^2 - \epsilon|\psi_1|^2)(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 + \psi_1\psi_2)E_2 \\
& \quad + \frac{i\tau}{2}(|\psi_2|^4 - \epsilon^2|\psi_1|^4)E_3 \\
& = \frac{i\epsilon\tau}{2}\left(1 - \epsilon\frac{|\psi_1|^2}{|\psi_2|^2}\right)|\psi_2|^2\left(\frac{\bar{\psi}_1}{\psi_2} - \frac{\psi_1}{\bar{\psi}_2}\right)\bar{\psi}_2\psi_2E_1 \\
& \quad - \frac{\epsilon\tau}{2}\left(1 - \epsilon\frac{|\psi_1|^2}{|\psi_2|^2}\right)|\psi_2|^2\left(\frac{\bar{\psi}_1}{\psi_2} + \frac{\psi_1}{\bar{\psi}_2}\right)\bar{\psi}_2\psi_2E_2 \\
& \quad + \frac{i\tau}{2}\left(1 - \epsilon^2\frac{|\psi_1|^4}{|\psi_2|^4}\right)|\psi_2|^4E_3 \\
& = \frac{i\epsilon\tau}{2}\left(1 - \epsilon\frac{|\psi_1|^2}{|\psi_2|^2}\right)|\psi_2|^4\left(\frac{\bar{\psi}_1}{\psi_2} - \frac{\psi_1}{\bar{\psi}_2}\right)E_1 \\
& \quad - \frac{\epsilon\tau}{2}\left(1 - \epsilon\frac{|\psi_1|^2}{|\psi_2|^2}\right)|\psi_2|^4\left(\frac{\bar{\psi}_1}{\psi_2} + \frac{\psi_1}{\bar{\psi}_2}\right)E_2 \\
& \quad + \frac{i\tau}{2}\left(1 - \epsilon^2\frac{|\psi_1|^4}{|\psi_2|^4}\right)|\psi_2|^4E_3 \\
& = \frac{i\epsilon\tau}{2}(1 - \epsilon|g|^2)|f|^2(\bar{g} - g)E_1 - \frac{\epsilon\tau}{2}(1 - \epsilon|g|^2)|f|^2(\bar{g} + g)E_2 \\
& \quad + \frac{i\tau}{2}(1 - \epsilon^2|g|^4)|f|^2 \\
& = \frac{i\epsilon\tau}{2}|f|^2(1 - \epsilon|g|^2)(-2i\text{Im}(g))E_1 - \frac{\epsilon\tau}{2}|f|^2(1 - \epsilon|g|^2)(2\text{Re}(g))E_2 \\
& \quad + \frac{i\tau}{2}(1 - \epsilon^2|g|^4)|f|^2E_3 \\
& = \epsilon\tau|f|^2((1 - \epsilon|g|^2)\text{Im}(g)E_1 - (1 - \epsilon|g|^2)\text{Re}(g)E_2 \\
& \quad + \frac{i\epsilon\tau}{2}(1 - \epsilon^2|g|^4)E_3).
\end{aligned}$$

Agora agrupando a equação acima, juntamente com (3.6), (3.7) e (3.8), obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{X_{\bar{z}}} X_z &= |f|^2(H(1 + \epsilon|g|^2)Re(g) - \epsilon\tau(1 - \epsilon|g|^2)Im(g))E_1 \\
&\quad + |f|^2(H(1 + \epsilon|g|^2)Im(g) + \epsilon\tau(1 - \epsilon|g|^2)Re(g))E_2 \\
&\quad + \frac{1}{2}|f|^2(H(1 + \epsilon|g|^2)(|g|^2 - \epsilon) - i\tau(1 - |g|^4))E_3 \\
&\quad + \epsilon\tau|f|^2((1 - \epsilon|g|^2)Im(g)E_1 - (1 - \epsilon|g|^2)Re(g)E_2 \\
&\quad + \frac{i\epsilon\tau}{2}(1 - \epsilon^2|g|^4)E_3) \\
&= H|f|^2(1 - \epsilon|g|^2)Re(g)E_1 + H|f|^2(1 + \epsilon|g|^2)Im(g)E_2 \\
&\quad + \frac{1}{2}H|f|^2(1 + \epsilon|g|^2)(|g|^2 - \epsilon)E_3 \\
&= \frac{H}{2}|f|^2(1 + \epsilon|g|^2)(2Re(g)E_1 + 2Im(g)E_2 + (|g|^2 - \epsilon)E_3) \\
&= \frac{H}{2}|f|^2(1 + \epsilon|g|^2)(1 + \epsilon|g|^2)N \\
&= \frac{H}{2}|f|^2(1 + \epsilon|g|^2)^2N \\
&= \frac{1}{2}He^{2w}N.
\end{aligned}$$

Desta forma, a imersão X possui curvatura média H , o que conclui a prova do teorema. \square

A partir deste teorema, obtemos uma representação para uma superfície mínima imersa em $\mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$, isto é,

Corolário 3.7. *Supomos f e g funções definidas em um domínio simplesmente conexo $\Omega \subset \Sigma$, com f nunca nula, satisfazendo*

$$f_{\bar{z}} = -i\epsilon\tau|f|^2\bar{g}(1 - \epsilon|g|^2)$$

e

$$g_{\bar{z}} = -\frac{i\tau\bar{f}}{2}(1 - \epsilon|g|^2)^2.$$

Então, a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \longrightarrow \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau),$$

definida por

$$\begin{aligned}x_1(z) &= x_1(z_0) + 2\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2) f dz, \\x_2(z) &= x_2(z_0) + 2\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2) f dz, \\x_3(z) &= x_3(z_0) + 2\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left(\tau \frac{i}{2}(1 + \epsilon g^2) f x_1 - \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2) f x_2 + f g \right) dz\end{aligned}$$

é uma imersão mínima conforme e com aplicação de Gauss g .

Demonstração. Basta fazer $H = 0$ nas equações (3.3) e (3.4). \square

Quando $|g|^2 < 1$, a representação integral dada acima para superfícies mínimas pode ser obtida somente da aplicação de Gauss da imersão. Assim temos:

Teorema 3.8. *Seja $g : \Sigma \rightarrow (\mathbb{D}, ds_\epsilon^2)$ uma aplicação harmônica nunca holomorfa, onde*

$$ds_\epsilon^2 = \lambda_\epsilon^2(w) |dw|^2 = \frac{1}{(1 - \epsilon |w|^2)^2} |dw|^2.$$

Então a aplicação

$$X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau),$$

definida por

$$\begin{aligned}x_1(z) &= -2\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2) \frac{i}{\tau(1 - \epsilon |g|^2)^2} \bar{g}_z dz, \\x_2(z) &= 2\operatorname{Re} \int_{z_0}^z (1 + \epsilon g^2) \frac{1}{\tau(1 - \epsilon |g|^2)^2} \bar{g}_z dz, \\x_3(z) &= -2\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left(\frac{\tau}{2}(i(1 + \epsilon g^2)x_1 - (1 - \epsilon g^2)x_2) + g \right) \frac{2i}{\tau(1 - \epsilon |g|^2)^2} \bar{g}_z dz,\end{aligned} \tag{3.10}$$

é uma imersão mínima conforme e tem aplicação de Gauss g .

Demonstração. Se definirmos

$$f := -\frac{2i}{\tau(1 - \epsilon |g|^2)^2} \bar{g}_z,$$

concluimos que f é nunca nula, pois g é nunca holomorfa. Além disso, a derivada de g em relação à \bar{z} satisfaz (3.4) para $H = 0$, pois,

$$\bar{g}_z = \frac{i}{2}f\tau(1 - \epsilon|g|^2)^2,$$

assim

$$g_{\bar{z}} = -\frac{i}{2}\tau\bar{f}(1 - \epsilon|g|^2)^2.$$

Por outro lado, pela harmonicidade de g , a derivada de f em relação a \bar{z} é dada por,

$$\begin{aligned} f_{\bar{z}} &= \left(-\frac{2i}{\tau(1 - \epsilon|g|^2)^2} \right)_{\bar{z}} \bar{g}_z - \frac{2i}{\tau(1 - \epsilon|g|^2)^2} \bar{g}_{z\bar{z}} \\ &= \frac{4i\tau(1 - \epsilon|g|^2)(-\epsilon)(g_{\bar{z}}\bar{g} + g\bar{g}_{\bar{z}})}{\tau^2(1 - \epsilon|g|^2)^4} \bar{g}_z - \frac{2i}{\tau(1 - \epsilon|g|^2)^2} \bar{g}_{g\bar{g}} \\ &= -\frac{2i}{\tau(1 - \epsilon|g|^2)^4} (\bar{g}_{z\bar{z}}(1 - \epsilon|g|^2)^2 + 2\epsilon\bar{g}_z(1 - \epsilon|g|^2)(g\bar{g}_{\bar{z}} + \bar{g}g_{\bar{z}})) \\ &= -\frac{2i}{\tau(1 - \epsilon|g|^2)^4} (\overline{g_{z\bar{z}}}(1 - \epsilon|g|^2)^2 + 2\epsilon\bar{g}_z(1 - \epsilon|g|^2)(g\bar{g}_{\bar{z}} + \bar{g}g_{\bar{z}})). \end{aligned}$$

Agora pelo corolário 3.4, temos que

$$g_{\bar{z}z} = -\frac{2\epsilon\bar{g}}{1 - \epsilon|g|^2}g_zg_{\bar{z}},$$

então

$$\overline{g_{z\bar{z}}} = -\frac{2\epsilon g}{1 - \epsilon|g|^2}\bar{g}_{\bar{z}}\bar{g}_z.$$

Desta forma

$$\begin{aligned} f_{\bar{z}} &= -\frac{2i}{\tau(1 - \epsilon|g|^2)^4} [-2\epsilon g\bar{g}_z\bar{g}_{\bar{z}}(1 - \epsilon|g|^2) + 2\epsilon\bar{g}_z(1 - \epsilon|g|^2)(g\bar{g}_{\bar{z}} + \bar{g}g_{\bar{z}})] \\ &= -\frac{2i}{\tau(1 - \epsilon|g|^2)^4} 2\epsilon(1 - \epsilon|g|^2)(-g\bar{g}_z\bar{g}_{\bar{z}} + \bar{g}_z(g\bar{g}_{\bar{z}} + \bar{g}g_{\bar{z}})) \\ &= -\frac{4\epsilon i}{\tau(1 - \epsilon|g|^2)^3} (-g\bar{g}_z\bar{g}_{\bar{z}} + \bar{g}_zg\bar{g}_{\bar{z}} + \bar{g}_z\bar{g}g_{\bar{z}}) \\ &= -\frac{4\epsilon i}{\tau(1 - \epsilon|g|^2)^3} \bar{g}g_{\bar{z}}\bar{g}_z \\ &= -\frac{4\epsilon i}{\tau(1 - \epsilon|g|^2)^3} \bar{g} \left(-\frac{i}{2}\tau\bar{f}(1 - \epsilon|g|^2)^2 \right) \left(\frac{i}{2}\tau f(1 - \epsilon|g|^2)^2 \right) \\ &= -\frac{4\epsilon i}{\tau(1 - \epsilon|g|^2)^3} \bar{g} \frac{1}{4}\tau^2|f|^2(1 - \epsilon|g|^2)^4 \\ &= -i\epsilon\tau|f|^2\bar{g}(1 - \epsilon|g|^2). \end{aligned}$$

Logo

$$f_{\bar{z}} = -i\epsilon\tau|f|^2\bar{g}(1 - \epsilon|g|^2).$$

Isto é, reobtemos (3.3), para $H = 0$. Além disso, pela expressão de f , a definição de X dada em (3.10) torna-se (3.9). Do corolário 3.7, segue o resultado, ou seja, $X = (x_1, x_2, x_3) : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$ é uma imersão mínima conforme com aplicação de Gauss g . \square

Capítulo 4

Exemplos.

Aplicaremos aqui, a fórmula de representação integral do capítulo anterior para obter alguns exemplos.

Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{D}, ds_\epsilon^2)$ uma geodésica com velocidade unitária em $(\mathbb{D}, ds_\epsilon^2)$. Por isometria, podemos supor que o traço de α seja um diâmetro Euclidiano de \mathbb{D} . Tomando $w = x + iy$ temos que, $dw = dx + idy$ e $|dw|^2 = dx^2 + dy^2$. Assim, se $w = x + i0 = x$, $dw = dx$ e $|dw|^2 = dx^2$. Desta forma, dada a métrica em \mathbb{D} , ou seja,

$$ds_\epsilon^2 = \frac{1}{(1 - \epsilon|w|^2)^2} |dw|^2,$$

temos que $ds_\epsilon^2 = \frac{1}{(1 - \epsilon x^2)^2} dx^2$, assim $ds_\epsilon = \frac{1}{1 - \epsilon x^2} dx$. Logo para $\epsilon = 1$, temos que $ds_1 = \frac{1}{1 - x^2} dx$, portanto

$$\begin{aligned} s_1 &= \int \frac{1}{1 - x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + c. \end{aligned}$$

Assim $x = \frac{e^{2s_1} - 1}{e^{2s_1} + 1} = \tanh s_1$, observe que aqui $x \in (-1, 1)$. Da mesma forma, para $\epsilon = -1$, temos

$$s_{-1} = \int \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan x,$$

que nos dá $x = \tan(s_{-1})$. Logo em termos de coordenadas cartesianas em \mathbb{D} , temos

$$\alpha(u) = (\tan_\epsilon(u), 0)$$

em que

$$\tan_\epsilon(u) = \begin{cases} \tanh(u), & \text{se } \epsilon = 1 \\ \tan(u), & \text{se } \epsilon = -1 \end{cases}$$

Consequentemente, a aplicação $g : I \times \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{D}, ds_\epsilon^2)$ definida por

$$g(u, v) = \alpha(u), \quad u \in I,$$

é uma aplicação harmônica. De fato, temos que $ds_\epsilon^2 = \frac{1}{(1-\epsilon|w|^2)^2} |dw|^2$. Assim $\lambda_\epsilon(w) = \frac{1}{1-\epsilon|w|^2}$ e $\lambda_w = \frac{\epsilon \bar{w}}{(1-\epsilon|w|^2)^2}$. Da seção 1.2 temos que

$$g \text{ é harmônica} \iff g_{z\bar{z}} + \frac{2}{\lambda(g(z))} \lambda_w(g(z)) g_z g_{\bar{z}} = 0.$$

Como $g(z) = \tan_\epsilon(u)$, temos

$$g_z = \frac{1}{2}(g_u - ig_v) = \frac{1}{2}g_u = \frac{1}{2}\sec_\epsilon^2(u) = g_{\bar{z}},$$

em que

$$\sec_\epsilon(u) = \begin{cases} \operatorname{sech}(u), & \text{se } \epsilon = 1 \\ \sec(u), & \text{se } \epsilon = -1 \end{cases}$$

e

$$g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}((g_z)_u + i(g_z)_v) = \frac{1}{4}(\sec_\epsilon^2(u))_u = -\frac{\epsilon}{2}\sec_\epsilon^2(u)\tan_\epsilon(u).$$

Desta forma

$$\begin{aligned} g_{z\bar{z}} &+ \frac{2}{\lambda(g(z))} \lambda_w(g(z)) g_z g_{\bar{z}} \\ &= -\frac{\epsilon}{2}\sec_\epsilon^2(u)\tan_\epsilon(u) + 2(1-\epsilon\tan_\epsilon^2(u)) \frac{\epsilon\tan_\epsilon(u)}{(1-\epsilon\tan_\epsilon^2(u))^2} \frac{1}{4}\sec_\epsilon^4(u) \\ &= -\frac{\epsilon}{2}\sec_\epsilon^2(u)\tan_\epsilon(u) + \frac{\epsilon}{2}\sec_\epsilon^4(u)\tan_\epsilon(u) \frac{1}{1-\epsilon\tan_\epsilon^2(u)} \\ &= -\frac{\epsilon}{2}\sec_\epsilon^2(u)\tan_\epsilon(u) + \frac{\epsilon}{2}\sec_\epsilon^4(u)\tan_\epsilon(u) \frac{1}{\sec_\epsilon^2(u)} \\ &= -\frac{\epsilon}{2}\sec_\epsilon^2(u)\tan_\epsilon(u) + \frac{\epsilon}{2}\sec_\epsilon^2(u)\tan_\epsilon(u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo g é harmônica. Então o Teorema 3.8 implica que esta aplicação define uma imersão mínima conforme

$$X : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}_3(\epsilon, \tau)$$

cujas coordenadas são explicitamente dadas por:

$$\begin{aligned} x_1(u, v) &= \frac{1}{\tau}v, \\ x_2(u, v) &= \frac{1}{2\tau} \sin_\epsilon(2u), \\ x_3(u, v) &= \frac{1}{2\tau} \sin_\epsilon(2u) = \tau x_1(u, v)x_2(u, v) \end{aligned}$$

em que

$$\sin_\epsilon(u) = \begin{cases} \sinh(u), & \text{se } \epsilon = 1 \\ \sin(u), & \text{se } \epsilon = -1 \end{cases}.$$

De fato, temos que $g(u, v) = \tan_\epsilon(u)$, assim $g = \bar{g}$, que nos dá

$$\bar{g}_z = \frac{1}{2}\bar{g}_u = \frac{1}{2} \sec_\epsilon^2(u) = g_{\bar{z}}$$

e $|g|^2 = g\bar{g} = \tan_\epsilon^2(u)$. Desta forma

$$\begin{aligned} 1 - \epsilon g^2 &= 1 - \epsilon \tan_\epsilon^2(u) = \sec_\epsilon^2(u), \\ 1 + \epsilon g^2 &= 1 + \epsilon \tan_\epsilon^2(u), \\ 1 + \epsilon |g|^2 &= (1 - \epsilon \tan_\epsilon^2(u))^2 = \sec_\epsilon^4. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} x_1(z) &= -2\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \frac{1}{2}(1 - \epsilon g^2) \frac{i}{\tau(1 - \epsilon |g|^2)^2} \bar{g}_z dz \\ &= -2\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \sec_\epsilon(u) \frac{i}{\tau \sec_\epsilon^4(u)} \frac{1}{2} \sec_\epsilon^2(u) dz \\ &= -2\operatorname{Re} \int_0^z \frac{i}{2\tau} dz \\ &= -2\operatorname{Re} \left(\frac{i}{2\tau} z \right) \\ &= -2\operatorname{Re} \left(\frac{i}{2\tau} (u + iv) \right) \\ &= \frac{1}{2\tau} v. \end{aligned}$$

Agora para x_2 temos

$$\begin{aligned}
x_2(z) &= 2Re \int_{z_0}^z (1 + \epsilon g^2) \frac{1}{\tau(1 - \epsilon|g|^2)^2} \bar{g}_z dz \\
&= 2Re \int_{z_0}^z (1 - \epsilon \tan_\epsilon^2(u)) \frac{i}{\tau \sec_\epsilon^4(u)} \frac{1}{2} \sec_\epsilon^2(u) dz \\
&= 2Re \int_0^z \frac{1 - \epsilon \tan_\epsilon^2(u)}{2\tau \sec_\epsilon^2(u)} dz \\
&= 2Re \frac{1}{2\tau} \int_0^z \left(\frac{1}{\sec_\epsilon^2(u)} + \epsilon \frac{\tan_\epsilon(u)}{\sec_\epsilon^2(u)} \right) dz \\
&= 2Re \frac{1}{2\tau} \int_0^z \left(\cos_\epsilon^2(u) + \epsilon \sin_\epsilon^2(u) \right) dz,
\end{aligned}$$

em que

$$\cos_\epsilon(u) = \begin{cases} \cosh(u), & \text{se } \epsilon = 1 \\ \cos(u), & \text{se } \epsilon = -1 \end{cases}.$$

Como

$$\cos_\epsilon^2(u) + \epsilon \sin_\epsilon^2(u) = \cos_\epsilon(2u),$$

temos que tomando o caminho $\alpha(u) = \tan_\epsilon(u)$, obtemos $\alpha'(u) = \sec_\epsilon^2(u)$, logo

$$\int_\alpha \cos_\epsilon(2u) dz = \int_0^t \cos_\epsilon(2 \tan_\epsilon(u)) \sec_\epsilon^2(u) du,$$

tomando $\rho = 2 \tan_\epsilon(u)$, temos que $d\rho = 2 \sec_\epsilon^2(u) du$. Assim

$$\begin{aligned}
\int_0^t \cos_\epsilon(2 \tan_\epsilon(u)) \sec_\epsilon^2(u) du &= \frac{1}{2} \int_0^{\arctan_\epsilon(\frac{\rho}{2})} \cos_\epsilon(\rho) d\rho \\
&= \frac{1}{2} \sin_\epsilon(\rho) \Big|_0^{\arctan_\epsilon(\frac{\rho}{2})} \\
&= \frac{1}{2} \sin_\epsilon(\arctan_\epsilon(\frac{\rho}{2})) \\
&= \frac{1}{2} \sin_\epsilon(2u).
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
x_2(z) &= 2Re \frac{1}{2\tau} \int_0^t \left(\cos_\epsilon^2(u) + \epsilon \sin_\epsilon^2(u) \right) dz \\
&= \frac{1}{2\tau} \sin_\epsilon(2u).
\end{aligned}$$

E finalmente para x_3 temos:

$$\begin{aligned}
x_3(z) &= -2Re \int_{z_0}^z \left(\frac{\tau}{2} (i(1 + \epsilon g^2)x_1 - (1 - \epsilon g^2)x_2) + g \right) \frac{2i}{\tau(1 - \epsilon|g|^2)^2} \bar{g}_z dz \\
&= -2Re \int_0^z \left(\frac{\tau}{2} (i(1 + \epsilon \tan_\epsilon(u)) \frac{1}{\tau} v) - \sec_\epsilon^2(u) \frac{1}{2\tau} \sin_\epsilon(2u) \right. \\
&\quad \left. + \tan_\epsilon(u) \right) \frac{i}{\tau \sec_\epsilon^4(u)} \frac{1}{2} \sec_\epsilon^2(u) dz \\
&= -2Re \int_0^z \left(-\frac{1 + \epsilon \tan_\epsilon(u)}{2\tau \sec_\epsilon^2(u)} v - \frac{i}{4\tau} \sin_\epsilon(2u) + \frac{i \tan_\epsilon(u)}{\tau \sec_\epsilon^2(u)} \right) dz.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\int_0^z \frac{i}{4\tau} \sin_\epsilon(2u) dz = \frac{i}{4\tau} \int_0^t \sin_\epsilon(2 \tan_\epsilon(u)) \sec_\epsilon(u) du$$

e

$$\begin{aligned}
\int_0^z i \frac{\tan_\epsilon(u)}{\tau \sec_\epsilon^2(u)} dz &= \frac{i}{\tau} \int_0^t \sin_\epsilon(u) \cos_\epsilon(u) dz \\
&= \frac{i}{\tau} \int_0^t \sin_\epsilon(\tan_\epsilon(u)) \cos_\epsilon(\tan_\epsilon(u)) \sec_\epsilon^2(u) du,
\end{aligned}$$

que possuem parte real nula. Como

$$\begin{aligned}
\int_0^z -\frac{1 + \epsilon \tan_\epsilon(u)}{2\tau \sec_\epsilon^2(u)} v dz &= -\frac{v}{2\tau} \int_0^t (\cos_\epsilon^2(u) + \epsilon \sin_\epsilon^2(u)) du \\
&= -\frac{1}{4\tau} v \sin_\epsilon(2u),
\end{aligned}$$

temos que

$$x_3(z) = \frac{1}{2\tau} v \sin_\epsilon(2u) = \tau x_1(z) x_2(z).$$

Referências Bibliográficas

- [1] Barbosa, J. L. M., Colares, A. G.: *Minimal Surfaces in \mathbb{R}^3* , Lecture Notes in Mathematics, 1195, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [2] Berdinky, D. A., Taimanov, I. A.: *Surfaces in three-dimensional Lie groups*, Siberian Math. J. 46 6, 1005-1019(2005).
- [3] B. Daniel.: *The Gauss Map of Minimal Surfaces in the Heisenberg Group*, arXiv: math. DG/0606299v1.
- [4] Carmo, Manfredo Perdigão.: *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Textos Universitários. Rio de Janeiro. SBM, 2005.
- [5] Fernández, I. Mira, P.: *A characterization of constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds*. Differential Geom. Appl. 25 3, 281-289, (2007).
- [6] F. Mercuri, S. Montaldo, P. Piu: *A Weierstrass Representation Formula for Minimal Surfaces in \mathbb{H}_3 and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* . Acta Math Sin. 226, 1603-1612, (2006).
- [7] Gray, A.: *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*. Second edition, CRC Press, Boca Raton, FL, 1998.
- [8] H. Rosenberg. *Minimal Surface in $\mathcal{M}^n \times \mathbb{R}$* . Illinois J. Math. 46(4), 1177-1195, (2002).
- [9] K. Kenmotsu.: *Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature*, Math. Ann. 245, 89-99, (1979).

- [10] Kusner R. and Schmidt N.: *The spinor representation of minimal surface in space*. GANG Preprint III. 27. (1993).
- [11] Lins Neto, Alcides.: *Funções de uma Variável Complexa*. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 1993.
- [12] Luis J. A., Jorge H. S. de Lira, Jorge A. Hinojosa: *Generalized Weierstrass representation for surfaces in Heisenberg*. (Artigo ainda não publicado).
- [13] O. Hijazi, S. Montiel and A. Roldán: *Dirac operator on hypersurfaces in negatively curved manifolds*. Ann. Global Anal. Geom. 23, 247-264, (2003).
- [14] O. Hijazi, S. Montiel and F. Urbano: *Spin^c geometry of Kähler manifolds and the Hodge Laplacian on minimal Lagrangian submanifolds*. Math, Zeit. 253, no. 4.
- [15] O. Hijazi, S. Montiel and X. Zhang: *Dirac operator on embedded hypersurfaces*, Math. Res Lett. 8, 195-208, (2001).
- [16] Soares, Marcio G.: *Cálculos em uma Variável Complexa, ...*
- [17] Sullivan D.: *The spinor representation of minimal surfaces in space*. Unpublished notes. (1989).
- [18] Taimanov. I. A.: *Dirac operators and conformal invariants of tori in three-dimensional space*. Proc. Steklov Inst. Math. 2441, 233-263. (2004).
- [19] Taimanov. I. A.: *Two-dimensional Dirac operator and the theory of surfaces*. Russian Math. Surveys 61, no 1, 79-159, (2006).
- [20] U. Abresch and H. Rosenberg: *A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $S^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$* . À paraître dans Acta Math.