Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Idealizadores Tangenciais e Derivações de Anéis de Stanley-Reisner

por

Ana Karine Rodrigues de Oliveira †

sob a orientação do

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com o apoio financeiro da Capes

Idealizadores Tangenciais e Derivações de Anéis de Stanley-Reisner

por

Ana Karine Rodrigues de Oliveira

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra.

Aprovada por:

Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta - UFPB

Prof. Dr. Kalasas Vasconcelos de Araújo - UFS

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Fevereiro de 2012

*"Dedico
este trabalho a meus pais (Deusa e
Fernando) e irmão (Jonatha)".*

Agradecimentos

- A Deus acima de tudo, pois Ele supriu todas as minhas necessidades e me fez alcançar mais esta vitória.

- Ao meu orientador, professor Cleto B. Miranda Neto, pelos conselhos, incentivo e amizade durante a elaboração deste trabalho. Também agradeço aos professores Napoleón Caro Tuesta e Kalasas Vasconcelos de Araújo por aceitarem participar da banca.

- Ao meus pais (Fernando e Deusa) e irmão (Jonatha). O apoio, o incentivo, o carinho e o amor deles tornaram cada etapa mais agradável e cada conquista mais valiosa.

- Aos professores da pós-graduação, que contribuiram de forma essencial para a minha formação. Gostaria também de agradecer ao professor Angelo Papa Neto, que me orientou durante minha graduação e me incentivou bastante a concluir esse mestrado.

- Ao Lailson pelo incentivo de começar o mestrado; sem seu apoio não estaria aqui, como também sem sua amizade e compreensão. As suas irmãs Anízia e Ariadine que me ajudaram a ter um local de estudo agradável.

- Aos colegas e amigos de curso. Em especial, quero agradecer ao Ivaldo pela convivência, paciência e sempre estando ao meu lado me ajudando e me incentivando. Gostaria de agradecer também ao Marco que foi um grande amigo, sempre disposto a ajudar, sempre com paciência de ensinar cada detalhe das coisas. A Edjane pelos momentos divertidos e de estudos. A Yane por ter me ajudado com os estudos, pelos momentos de descontração e pela amizade. A Taty e Maykon pelos domingos de estudos. A Desterro e Gilcênio pelo abrigo no final do meu mestrado, amizade e pelas comidas gostosas. Ao Josenildo pelas caronas e conversas legais. A Diana e Daniel pela amizade. Ao Ricardo Burity por me ajudar com Latex. E por fim, não menos importante, gostaria de agradecer à minha amiga Gaby (Fortaleza) pela amizade, incentivo, compreensão e sempre me mantendo informada dos últimos acontecimentos da minha cidade.

- A todos aqueles que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho.

- Finalmente, a Capes pelo apoio financeiro.

Resumo

A presente dissertação fornece um estudo detalhado sobre módulos de derivações logarítmicas, aqui denominados *idealizadores tangenciais*, bem como algumas de suas principais características. Inicialmente, várias comparações entre tais módulos são investigadas, a partir de ideais suficientemente relacionados, motivadas por um estudo prévio de Kaplansky e por sua estreita relação com a clássica teoria dos ideais diferenciais de Seidenberg. Em seguida obtém-se o primeiro resultado central, que descreve uma decomposição primária do idealizador tangencial de um ideal sem componente primária imersa. Finalmente, no segundo resultado principal, é explorada a estrutura do módulo de derivações para a classe de anéis de Stanley-Reisner, correspondendo portanto a idealizadores tangenciais de ideais monomiais. Uma aplicação de tal resultado é a resposta afirmativa para a conjectura homológica de Zariski-Lipman para a presente classe de anéis.

Palavras-chaves: Derivação, idealizador tangencial, ideal diagonal, Zariski-Lipman, anéis de Stanley-Reisner.

Abstract

The present dissertation furnishes a detailed study about modules of logarithmic derivations, here dubbed *tangential idealizers*, and some of their main features. Initially, several comparisons between such modules are investigated starting from sufficiently related ideals, motivated by a previous study due to Kaplansky as well as by their close relationship with the classical theory of differential ideals of Seidenberg. We then obtain the first central result, which describes a primary decomposition of the tangential idealizer of an ideal without embedded primary component. Finally, in the second main result, we explore the structure of the derivation module for the class of Stanley-Reisner rings, thus corresponding to tangential idealizers of monomial ideals. An application of such a result is an affirmative answer for the homological Zariski-Lipman conjecture for the present class of rings.

Keywords: Derivation, tangential idealizer, optimal diagonal, Zariski-Lipman, rings Stanley-Reisner.

Sumário

Introdução

Derivações de anéis comutativos Noetherianos constituem um tema clássico em Álgebra Comutativa e suas interações com Geometria Algébrica e Teoria de Singularidades. Muitos resultados fundamentais têm sido obtidos ao longo das décadas (na verdade, ao longo do último século!), e diversos desdobramentos recentes têm sido estudados e desenvolvidos, de modo que, atualmente, pode-se presenciar uma grande e intensa atividade de pesquisa. Vale salientar que grande progresso também tem sido obtido no contexto não-comutativo, por exemplo a respeito de anéis de operadores diferenciais e suas generalizações, mas neste trabalho estaremos focalizados no contexto tradicional comutativo.

A abordagem clássica, do ponto de vista algébrico, consiste do estudo do módulo de derivações do anel em consideração. Na presente dissertação, faremos uma outra abordagem, um tratamento "logarítmico", como passamos a descrever rapidamente num contexto conveniente: seja k um corpo de característica zero e seja $S = k[X_1, ..., X_n]$ um anel de polinômios sobre k. Dado um ideal próprio $I \subset S$, considere a k-álgebra $R = S/I$. Tipicamente, estuda-se o R-módulo $Der_k(R)$ formado pelas k-derivações de R, que correspondem geometricamente aos campos vetoriais tangentes definidos na variedade algébrica X definida por I (supondo que este ideal é radical e que k é algebricamente fechado). Lembre que $Der_k(S)$ é um S-módulo livre:

$$Der_k(S) \ = \ \bigoplus_{i=1}^{n} S\frac{\partial}{\partial X_i} \ \simeq \ S^n.$$

Nesta dissertação, estuda-se o *módulo idealizador tangencial* de I, isto é,

$$\mathfrak{I}_k(I) \ = \ \{D \in Der_k(S) \mid D(I) \subseteq I\},$$

onde $D(I) \subseteq I$ significa que $D(f) \in I$, para todo $f \in I$. A interpretação geométrica é que um elemento do idealizador tangencial pode ser visto como um campo vetorial logarítmico, que é um campo vetorial *global* (ou seja, definido em todo o espaço ambiente afim ou projetivo, e não somente em X) cuja restrição a X é tangente a esta variedade, naturalmente ao longo de seus pontos não-singulares (para os detalhes, vide [8, Proposition 1.1]). Por esta razão, o módulo $\mathfrak{I}_k(I)$ é também chamado de *módulo das derivações logarítmicas de* I, que foi explorado na década de 80 por K. Saito em [**?**], no caso particular em que I é um ideal principal e considerando-se o contexto analítico, isto é, S visto como o anel de germes de funcões analíticas complexas; desde o artigo de Saito, muitos outros trabalhos têm surgido e desenvolvido a teoria de maneira bastante ampla (por exemplo, [3] e [11]).

A relação entre a abordagem clássica e a aqui adotada pode ser traduzida através de um importante isomorfismo (que demonstraremos neste trabalho)

$$Der_k(R) \simeq \frac{\mathfrak{I}_k(I)}{IDer_k(S)},$$

de maneira que, a fim de compreender o módulo das k-derivações de R, basta entender adequadamente o módulo idealizador tangencial de I (por exemplo, é possível calcular na prática um conjunto de geradores para este módulo, conforme o método descrito em [8, Section 2]).

Na realidade, há muitas perguntas não respondidas bem como propriedades ainda não detectadas a respeito de tais módulos. Para efeito de situar o leitor acerca dos principais objetivos desta dissertação, antecipamos brevemente o conteúdo dos dois principais teoremas aqui estudados: o primeiro deles fornece uma decomposição primária (minimal) do módulo $\mathfrak{I}_k(I)$ (sob a hipótese de que I não possui componente primária imersa; por exemplo, se I é radical), o que foi obtido originalmente em [9]; quanto ao segundo resultado principal, apresentamos a estrutura do módulo $Der_k(R)$, a partir essencialmente da estrutura de $\mathfrak{I}_k(I)$ como soma direta de ideais explícitos, no caso em que R é um anel de Stanley-Reisner — isto é, I é um ideal monomial — conforme originalmente obtido em [2].

Passemos então a descrever resumidamente o conteúdo desta dissertação, capítulo a capítulo.

No Capítulo 1, fornecemos preliminares acerca de módulos de derivações e de diferenciais de Kähler, que serão úteis ao longo de todo o trabalho. Dentre tais preliminares, destacamos o Teorema 1.13, que em essência exibe o módulo de derivações como sendo o dual do módulo de diferenciais, bem como a Observação 1.18, que fornece uma caracterização concreta do módulo de derivações no contexto de álgebras finitamente geradas sobre um corpo, em termos do homomorfismo associado a uma matriz jacobiana adequada.

O Capítulo 2 tem início com a definição geral do módulo idealizador tangencial e a descrição de algumas de suas propriedades básicas. Investigamos vários resultados de comparação entre os idealizadores tangenciais de ideais suficientemente relacionados, obtidos originalmente em [9], e motivados por um estudo prévio devido a Kaplansky ([6]) e pela relação com a importante teoria dos *ideais diferenciais* devida a Seidenberg ([10]). São abordadas comparações com o idealizador tangencial do radical de um ideal, bem como com o de suas potências, produtos, e ideal gerado pelas entradas de uma matriz de apresentação livre. Obtemos também, como já mencionado acima, a relação estrutural entre o módulo de derivações do anel quociente e o idealizador tangencial do ideal (Proposição 2.15). O resultado central é o Teorema **??**, que fornece uma decomposição primária minimal para o módulo idealizador tangencial de um ideal que não possui componente primária imersa (a necessidade dessa hipótese é justificada na Observação 2.19).

O Capítulo 3 apresenta em detalhes o principal teorema do artigo [2], que descreve precisamente a estrutura do módulo de derivações de um anel de Stanley-Reisner, a partir da descrição do idealizador tangencial do correspondente ideal monomial, como sendo uma soma direta de ideais explícitos. Isto será provado no Teorema 3.1. Como consequência, derivamos uma resposta afirmativa para a conjectura homológica de Zariski-Lipman (versão proposta por Herzog e Vasconcelos) para a classe de anéis de Stanley-Reisner.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, faremos uma abordagem sobre derivações e suas propriedades básicas. A seguir, iremos estudar o módulo de diferenciais de Kähler e sua relação com o módulo de derivações.

Ao longo de todo este trabalho, usaremos simplesmente a expressão *anel* significando *anel comutativo com identidade 1.*

1.1 Derivações

Definição 1.1 Sejam A um anel e M um A-módulo. Uma derivação de A *com valores em* M é uma aplicação $D\colon A \to M$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) $D(a+b) = D(a) + D(b)$ (Aditividade)

(ii) $D(ab) = aD(b) + bD(a)$ (Regra de Leibniz),

para todos $a, b \in A$

Notação 1.2 $Der(A, M)$ é o conjunto de todas as derivações de A em M.

$Der\ (A, M)$ torna-se um A-módulo com as operações naturais:

$$(D + D')(a) = D(a) + D'(a)$$

e

$$(aD)(b) = a(Db).$$

onde $D, D' \in Der_k(A, M)$ e $a, b \in A$.

Dados um anel k e uma k-álgebra A, podemos considerar o subconjunto:

$$Der_k(A, M) = \left\{D \in Der\,(A, M)\,|D_{|k} = 0\right\}$$

onde, $D|_k = 0$ significa $D(\beta) = 0$ para todo $\beta \in k$.

Observação 1.3 $Der_k(A, M)$ é um A-submódulo de $Der(A, M)$. Cada elemento de $Der_k(A, M)$ é chamado *k-derivação de A com valores em M.* Veja também que $Der(A, M) = Der_{\mathbb{Z}}(A, M)$, isto é, toda derivaçao é uma $\mathbb{Z}-$derivação, pois

$$D(1) = D(1.1) = 1D(1) + 1D(1).$$

Logo, $D(1) = 0$, consequentemente é fácil ver que $D|_{\mathbb{Z}} = 0$.

A notação para o A-módulo das $k-$derivações a valores em A (isto é, se $M = A$) reduz-se a $Der_k(A)$.

Exemplo 1.4 Sejam A um anel, $B = A[X_1, ..., X_n]$ e M um B-módulo. Fixando arbitrariamente $m_1,..., m_n \in M$, vemos que

$$D = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial X_i}.m_i$$

é uma derivação de $D : B \to M$, o que segue imediatamente da aditividade das derivadas parciais e da regra de Leibniz habitual. Quando $M = B$ e $m_i = X_i$, $1 \leq i \leq n$, D é chamada de *derivação de Euler.*

No caso fundamental em que $A = k[X_1, ..., X_n]$, isto é, A é o anel dos polinômios nas variáveis $X_1, ..., X_n$ sobre um corpo k.

Notemos que as derivadas parciais são $k-$derivações de A :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_i} : \quad & A \to \quad A \\ \frac{\partial}{\partial X_i}(fg) \quad &= \quad f\frac{\partial g}{\partial X_i} \quad + \quad g\frac{\partial f}{\partial X_i} \quad \text{para } i = 1, ..., n. \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial \alpha}{\partial X_i} = 0, \quad \text{para todo } \alpha \in k$$

Proposição 1.5 *Se $A = k[X_1, ..., X_n]$ então $Der_k(A)$ é um A-módulo livre, de posto n (número de variáveis) e $\left\{\frac{\partial}{\partial X_1}, ..., \frac{\partial}{\partial X_n}\right\}$ é uma base.*

Prova. Dado $D \in Der_k(A)$ defina $D' \in Der_k(A)$ por

$$D' = a_1\frac{\partial}{\partial X_1} + a_2\frac{\partial}{\partial X_2} + ... + a_n\frac{\partial}{\partial X_n} \text{ onde } a_i = D(X_i).$$

Temos então que $D'(X_i) = a_i$, de onde concluímos, por aplicações sucessivas da regra de Leibniz, que $D = D'$. Pontanto, D é combinação $A-$linear das derivadas parciais.

Considere agora a seguinte igualdade:

$$\alpha_1\frac{\partial}{\partial X_1} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial X_2} + ... + \alpha_n\frac{\partial}{\partial X_n} = 0$$

Calculando em X_i , obtemos:

$$\sum_{\iota=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial X_i}(X_i) = a_i = 0, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Assim, podemos concluir que o conjunto $\left\{\frac{\partial}{\partial X_1}, ..., \frac{\partial}{\partial X_n}\right\}$ é linearmente independente sobre A. ■

Com isso , concluímos que, no contexto em que $A = k[X_1, ..., X_n]$ (k corpo), $\left\{\frac{\partial}{\partial X_1}, ..., \frac{\partial}{\partial X_n}\right\}$ é uma base para o A-módulo $Der_k(A)$, isto é, toda k-derivação de A se escreve, de forma única, como combinação linear das derivações parciais com coeficientes em A, ou seja,

$$d = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial X_i}, \text{ com cada } g_i \text{ em } A$$

Explicitamente:

$$Der_k(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} A \frac{\partial}{\partial X_i} \simeq A^n.$$

Seja M um B-módulo e seja φ um homomorfismo de k-álgebras, então M é um A-módulo com $a.v = \varphi(a)v$ para $v \in M$.

Proposição 1.6 *Se $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de k-álgebras e $D \in Der_k(B, M)$, então $D \circ \varphi \in Der_k(A, M)$.*

Prova. Verificando:

$$\begin{aligned} \text{i)}\ (D \circ \varphi)(a+b) &= D(\varphi(a+b)) \\ &= D(\varphi(a) + \varphi(b)) \\ &= D(\varphi(a)) + D(\varphi(b)) \\ &= (D \circ \varphi)(a) + (D \circ \varphi)(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)}\ (D \circ \varphi)(ab) &= D(\varphi(ab)) \\ &= D(\varphi(a)\varphi(b)) \\ &= \varphi(b)D(\varphi(a)) + \varphi(a)D(\varphi(b)) \\ &= b.(D \circ \varphi(a)) + a.(D \circ \varphi)(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)}\ (D \circ \varphi)(\lambda) &= D(\varphi(\lambda)) \\ &= D(\lambda) = 0 \ , \forall \lambda \in k \end{aligned}$$

Logo, a composição $D \circ \varphi$ é uma $k-$derivação de A em M. ■

Proposição 1.7 *Sejam M e N A-módulos. Se $\Psi \in Hom_A(M,N)$ e $D \in Der_k(A,M)$, então $\Psi \circ D \in Der_k(A,N)$.*

Prova.

$$\begin{aligned} \text{i) } (\Psi \circ D)(a+b) &= \Psi(D(a)+D(b)) \\ &= \Psi(D(a))+\Psi(D(b)) \\ &= (\Psi \circ D)(a)+(\Psi \circ D)(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } (\Psi \circ D)(ab) &= \Psi(bD(a)+aD(b)) \\ &= \Psi(bD(a))+\Psi(aD(b)) \\ &= b(\Psi \circ D)a + a(\Psi \circ D)b \end{aligned}$$

$$\text{iii) } (\Psi \circ D)(\lambda) = \Psi(0) = 0$$

■

Encerramos esta seção citando os seguintes fatos:

Proposição 1.8 *Seja A uma k-álgebra. Seja $S \subset A$ um conjunto multiplicativo tal que $0 \notin S$. Seja A_S o anel de frações de A com relação a S. Para qualquer A_S-módulo B e para qualquer $D \in Der_k(A,B)$, existe uma única $D' \in Der_k(A_S,B)$ que estende D, dada por:*

$$D'\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{yDx - xDy}{y^2}$$

Corolário 1.9 *Seja A uma k-álgebra que é um domínio de integridade e seja L um corpo qualquer contendo A. Se $D : A \to L$ é uma k-derivação, então D pode ser estendida, de maneira única, para uma k-derivação $D' : K \to L$ onde K é o corpo de frações de A. Explicitamente:*

$$D'\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{yDx - xDy}{y^2} \qquad \textit{para todos } x, y \in A,\ y \neq 0$$

1.2 O módulo das diferenciais de Kähler

Iremos definir e descrever algumas propriedades do módulo de diferenciais de Kähler, bem como investigar a sua relação com o módulo de derivações.

Seja A uma k-álgebra (k anel). O produto tensorial $B = A \otimes_k A$ é uma k-álgebra com o produto

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd.$$

Considere o homomorfismo sobrejetor de k-álgebras $\mu : B \to A$, dado por

$$\mu(\sum_i a_i \otimes b_i) = \sum_i a_i b_i.$$

Tomemos $\mathbb{D} = \ker(\mu) \subset B$. Claramente, o ideal gerado pelos elementos do tipo $a \otimes 1 - 1 \otimes a$ (com $a \in A$) está contido em $\mathbb{D}$.

Seja agora $c = \sum_i a_i \otimes b_i \in \mathbb{D}$ arbitrário. Logo, $\sum_i a_i b_i = 0$ e assim

$$\sum_i (a_i b_i \otimes 1) = 0.$$

Podemos escrever

$$c = c - 0 = \sum_i a_i \otimes b_i - \sum_i (a_i b_i \otimes 1) = \sum_i (a_i \otimes b_i - a_i b_i \otimes 1) = \sum_i (-a_i \otimes 1)(b_i \otimes 1 - 1 \otimes b_i).$$

Portanto, $c \in \langle a \otimes 1 - 1 \otimes a | a \in A \rangle$, e logo

$$\mathbb{D} \ = \ \langle a \otimes 1 - 1 \otimes a | a \in A \rangle \,.$$

Este ideal é chamado *ideal diagonal.*

Definição 1.10 *O módulo de diferenciais de Kähler de A sobre k,* denotado $\Omega_{A|k}$ (ou $\Omega_k(A)$), é o módulo conormal do ideal diagonal, ou seja:

$$\Omega_{A|k} = \frac{\mathbb{D}}{\mathbb{D}^2}$$

Note que esta definição faz sentido, uma vez que

$$(A \otimes_k A)/\mathbb{D} \simeq A,$$

pois μ tem núcleo $\mathbb{D}$ e é sobrejetor. Portanto $\Omega_{A|k}$ é um A-módulo.

Destacamos duas maneiras de tornar $A \otimes_k A$ um A-módulo: através dos homomorfismos $\varphi_1, \varphi_2 : A \to A \otimes_k A$ definidos por $\varphi_1(a) = a \otimes 1$ e $\varphi_2(a) = 1 \otimes a$. Eles são *congruentes módulo* $\mathbb{D}$ no sentido de que $\varphi_1(a) - \varphi_2(a) \in \mathbb{D}, \forall a \in A$. A estrutura de A-módulo em $\Omega_{A|k}$ é então induzida pela multiplicação por $a \otimes 1$ em $A \otimes_k A$ (ou por $1 \otimes a$, equivalentemente). Assim, se $a \in A$ e $\omega = \overline{x \otimes 1 - 1 \otimes x} \in \Omega_{A|k}$, temos $a.\omega = \overline{ax \otimes 1 - a \otimes x}$.

Agora, definamos

$$\begin{array}{rccl} d_{A|k} = d : & A & \to & \Omega_{A|k} \\ & x & \mapsto & dx = \overline{x \otimes 1 - 1 \otimes x} \end{array}$$

com $x \in A$.

Temos que $d \in Der_k(A, \Omega_{A|k})$. Verificaremos a aditividade e a Regra de Leibiniz. Sejam $x, y \in A$. Obtemos:

i) $d(x+y) = \overline{(x+y) \otimes 1 - 1 \otimes (x+y)} = \overline{x \otimes 1 + y \otimes 1 - 1 \otimes x - 1 \otimes y} = \overline{x \otimes 1 - 1 \otimes x} + \overline{y \otimes 1 - 1 \otimes y} = dx + dy.$

ii) $d(xy) = \overline{xy \otimes 1 - 1 \otimes xy.}$ Como $(x \otimes 1 - 1 \otimes x)(y \otimes 1 - 1 \otimes y) \in \mathbb{D}^2$, é equivalente a $\overline{xy \otimes 1} - \overline{x \otimes y} - \overline{y \otimes x} + \overline{1 \otimes xy} = \overline{0}$ em $\Omega_{A|k}$, somando $\overline{(-1 \otimes xy)}$ em ambos os lados, teremos:

$\overline{-1 \otimes xy} = \overline{xy \otimes 1} - \overline{x \otimes y} - \overline{y \otimes x}$. Assim, $d(xy) = \overline{xy \otimes 1} - \overline{x \otimes y} + \overline{xy \otimes 1} - \overline{y \otimes x} = x(\overline{y \otimes 1 - 1 \otimes y}) + y(\overline{x \otimes 1 - 1 \otimes x}) = xdy + ydx$.

Para cada $x \in A$, dizemos que dx é a *diferencial de x*.

Observação 1.11 Como D é gerado pelos elementos da forma $x \otimes 1 - 1 \otimes x$, com $x \in A$, então $\frac{\mathbb{D}}{\mathbb{D}^2}$ é gerado como A-módulo, pelos elementos da forma dx. Assim, vemos que $\Omega_{A|k}$ é gerado pelas diferenciais dos elementos do anel.

O seguinte resultado é uma aplicação imediata da regra de Leibniz:

Proposição 1.12 *Se A é gerado, como k-álgebra, por um subconjunto $U \subset A$, então $\Omega_{A|k}$ é gerado, como A-módulo, por $\{dx|x \in U\}$.*

A aplicação $d_{A|k}$ ou d é chamada *$k-$derivação universal* de A. Esta terminologia se deve à seguinte propriedade universal, satisfeita pelo par $(\Omega_{A|k}, d)$: para cada $D \in Der_k(A, M)$ (onde M é um A-módulo arbitrário), existe um único $f \in Hom_A(\Omega_{A/k}, M)$ tal que $D = f \circ d$.

Teorema 1.13 *Para todo A-módulo M, a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \Psi_M : Hom_A(\Omega_{A/k}, M) & \rightarrow & Der_k(A, M) \\ f & \rightarrow & \Psi_M(f) = f \circ d \end{array}$$

é um isomorfismo de A-módulos.

Prova. Observamos que se $f \in Hom_A(\Omega_{A/k}, M)$ então de fato $f \circ d \in Der_k(A, M)$, já que f é A-linear e d é uma k-derivação de A em $\Omega_{A/k}$. Além disso, Ψ_M é evidentemente um homomorfismo de A-módulos.

Tomemos $f, g \in Hom_A(\Omega_{A/k}, M)$ satisfazendo $f \circ d = g \circ d$. Logo $f(dx) = g(dx), \forall x \in A$. Como f e g são A-lineares e as diferenciais $dx's$ geram $\Omega_{A/k}$, obtemos $f = g$ e assim Ψ_M é injetor.

Mostremos a sobrejetividade. Denotemos por $A * M$ a k-álgebra $A \oplus M$ munida do produto

$$(a, m) * (a', m') \;=\; (aa', am' + a'm).$$

Dada uma $D \in Der_k(A, M)$ arbitrária, consideremos a aplicação $\phi : A \otimes_k A \rightarrow A * M$ definida por

$$\phi(\sum_i x_i \otimes y_i) = (\sum_i x_i y_i, -\sum_i D(y_i)).$$

Trata-se de um homomorfismo (de k-álgebras) visto que $\phi((x \otimes y)(x' \otimes y')) = \phi(xx' \otimes yy') = (xx'yy', -xx'D(yy')) = (xyx'y', -xyx'D(y') - x'y'D(y)) = (xy, -xD(y)) * (x'y', -x'D(y')) = \phi(x \otimes y) * \phi(x' \otimes y')$.

Seja

$$\lambda \;=\; \sum_i x_i \otimes y_i \in \mathbb{D} \;=\; < x \otimes 1 - 1 \otimes x \mid x \in A > \subset \; A \otimes_k A.$$

Então $\phi(\lambda) = (0, -\sum_i x_i D(y_i))$ e assim, restringindo ϕ a $\mathbb{D}$, temos $\phi : \mathbb{D} \to M$ dada por $\phi(\lambda) = -\sum_i x_i D(y_i)$. Ocorre que, restringindo agora a $\mathbb{D}^2$, obtém-se a aplicação nula. De fato, tomando um gerador $\zeta = (x \otimes 1 - 1 \otimes x)(y \otimes 1 - 1 \otimes y) \in \mathbb{D}^2$ tem-se $\phi(\ \zeta) = \phi(xy \otimes 1 - x \otimes y - y \otimes x + 1 \otimes xy) = -xyD(1) + xD(y) + yD(x) - 1D(xy) = D(xy) - D(xy) = 0$. Surge assim uma aplicação bem definida $\overline{\phi} : \Omega_{A/k} \to M$, dada por

$$\overline{\phi}(\sum_i \overline{x_i \otimes y_i}) = -\sum_i x_i D(y_i).$$

A verificação de que $\overline{\phi} \in Hom_A(\Omega_{A/k}, M)$ é rotina. Além disso, se $x \in A$ então $\left(\overline{\phi} \circ d\right)(x) = \overline{\phi}(dx) = \overline{\phi}(\overline{x \otimes 1 - 1 \otimes x}) = -xD(1) + 1D(x) = D(x)$ e, enfim, $D = \overline{\phi} \circ d = \Psi_M(\overline{\phi})$, ou seja, Ψ_M é sobrejetor. Isto completa a demonstração. ■

Em linguagem diferente, a proposição afirma que o funtor covariante $Der_k(A, -)$ dado por $M \to Der_k(A, M)$ é representável pelo A-módulo $\Omega_{A/k}$. Sendo então $Der_k(A, M) \cong Hom_A(\Omega_{A/k}, M)$, temos em particular $Der_k(A) \cong Hom_A(\Omega_{A/k}, A)$. Assim, $Der_k(A)$ é o dual de $\Omega_{A/k}$, que se escreve $\Omega^*_{A/k}$. Aqui, *dualizar* um A-módulo significa aplicar ao mesmo o funtor contravariante $Hom_A(-, A)$.

Exemplo 1.14 Seja $A = k[X_1, ..., X_n]$ (anel de polinômios a coeficientes no anel k). Tem-se $\Omega_{A/k} = AdX_1 + ... + AdX_n$ (Proposição 1.12). Consideremos então a k-derivação $\frac{\partial}{\partial X_j} : A \to A$. A propriedade universal nos fornece um homomorfismo $\overline{\phi} : \Omega_{A/k} \to A$ tal que

$$\overline{\phi} \ \circ \ d \ = \ \frac{\partial}{\partial X_j}$$

e assim $\overline{\phi}(dX_i) = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} vale 1 se $i = j$ e 0 caso contrário. Suponhamos uma igualdade da forma $\sum_{i=1}^{n} F_i dX_i = 0$ em $\Omega_{A/k}$, para certos $F_1, ..., F_n \in A$. Logo: $\overline{\phi}(\sum_i F_i dX_i) = 0 \implies \sum_i F_i \ \overline{\phi}(dX_i) = 0 \implies \sum_i F_i \delta_{ij} = 0$ de onde $F_j \equiv 0$, e isto pode ser feito para cada j. Mostramos então que $dX_1, ..., dX_n$ são linearmente independentes sobre A e assim:

$$\Omega_{A|k} = \bigoplus_{i=1}^{n} AdX_i \cong A^n$$

(Comparar com a Proposição 1.5).

Agora veremos o comportamento das diferenciais por localização:

Proposição 1.15 *Se $S \subset A$ é um conjunto multiplicativo qualquer, então*

$$(\Omega_{A|k})_S \simeq \Omega_{A_S|k}.$$

Prova. Tomaremos frações com respeito ao conjunto multiplicativo $S \otimes_k S \subset A \otimes_k A$. A sequência exata de $A \otimes_k A$-módulos

$$0 \to \mathbb{D}_{A|k} \to A \otimes_k A \to A \to 0$$

induz uma sequência exata de $(A \otimes_k A)_{S\otimes_k S}$ -módulos

$$0 \to (\mathbb{D}_{A|k})_{S\otimes_k S} \to (A \otimes_k A)_{S\otimes_k S} \to A_{S\otimes_k S} \to 0.$$

Temos $(A \otimes_k A)_{S\otimes_k S} \simeq A_S \otimes_k A$ (via $\frac{a\otimes b}{c\otimes d} \mapsto \frac{a}{c} \otimes \frac{b}{d}$).
Por outro lado, $A_{S\otimes_k S} \simeq A_S$ como $(A \otimes_k A)_{S\otimes_k S}$ -módulos.
Usando a sequência exata de $(A \otimes_k A)_{S\otimes_k S}$ -módulos

$$0 \to \mathbb{D}_{A_S|k} \to A_S \otimes_k A_S \to A_S \to 0,$$

concluímos que $(\mathbb{D}_{A|k})_{S\otimes_k S} \simeq \mathbb{D}_{A_S|k}$. Pela definição, segue que $(\Omega_{A|k})_S \simeq \Omega_{A_S|k}$.
■

Observação 1.16 Como consequência do resultado acima, temos

$$(Hom_A(\Omega_{A|k}, M))_S \cong (Hom_{A_S}(\Omega_{A_S|k}, M_S),$$

ou seja,

$$Der_k(A, M)_S \simeq Der_k(A_S, M_S).$$

O fato básico a seguir será usado na demonstração do Corolário 2.17.

Proposição 1.17 *Se $L|K$ é uma extensão finita e separável de corpos, então $\Omega_{L|K} = 0$. Em particular, se V é um K-espaço vetorial, tem-se $Der_k(L, V) = 0$.*

Prova. Aplicando o teorema do elemento primitivo, podemos escrever $L = K(\alpha)$, para algum $\alpha \in L$. A Proposição 1.12 nos diz então que $\Omega_{L|K}$ é o L-espaço vetorial gerado por $d\alpha$ (onde $d = d_{L|K}$). Para qualquer $f(t) \in K[t]$ temos $f(\alpha) \in L$ e

$$d(f(\alpha)) \;=\; f'(\alpha)\, d\alpha,$$

onde f' denota a derivada de f com respeito a t. Em particular, isto vale para o polinômio minimal p do elemento α. Como $p(\alpha) = 0$, temos $d(p(\alpha)) = 0$ e daí $p'(\alpha)d\alpha = 0$. Mas $p'(\alpha) \neq 0$ pois por hipótese L é separável sobre K. Concluímos que $d\alpha = 0$ e portanto $\Omega_{L|K} = 0$. A segunda afirmação do enunciado decorre disto pois, se V é um K-espaço vetorial qualquer, usamos o Teorema 1.13 e obtemos

$$Der_K(L, V) \;\cong\; Hom_L(0, V) \;=\; 0.$$

■

Observação 1.18 De modo geral, se S é uma álgebra sobre um anel T, então existe uma sequência exata de A-módulos (chamada *sequência cotangente relativa)*

$$\Omega_T(S) \otimes_S A \to \Omega_T(A) \to \Omega_S(A) \to 0.$$

Porém, não entraremos nos detalhes desta situação geral, que podem ser encontrados na referência básica [4]. Para os nossos propósitos, é suficiente considerar o seguinte caso: k corpo, $A = k[X_1, ..., X_n]$ anel de polinômios, $I \subset A$

ideal minimamente gerado por $f_1, ..., f_m$, $B = A/I = k[x_1, ..., x_n]$ (x_i denota a classe residual de X_i módulo I), $\Theta = (\partial f_i/\partial X_j)$ matriz jacobiana dos $f_i' s$, com transposta Θ^*. Neste caso, o módulo das k-diferenciais de Kähler de B pode ser descrito em termos da chamada *sequência exata conormal*

$$I/I^2 \xrightarrow{\partial} B^n \longrightarrow \Omega_k(B) \longrightarrow 0$$

com $\partial(f mod I^2) = (\frac{\partial f}{\partial X_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial X_n}) \in B^n$, $f \in I$. Compondo ∂ com o homomorfismo sobrejetor $B^m \twoheadrightarrow I/I^2$ que envia $(\overline{g_1}, ..., \overline{g_m}) \in B^m$ em $\sum_{i=1}^{m} g_i f_i mod I^2$, obtemos o homomorfismo de módulos livres $B^m \to B^n$ determinado (nas bases canônicas) pela matriz $\theta^* = \overline{\Theta}^* = \Theta^* mod\, I$. Assim, explicitamos

$$\Omega_k(B) \;=\; Coker(B^m \xrightarrow{\theta^*} B^n) = B^n/L$$

onde $L = \sum_{i=1}^{m} B.(\partial f_i/\partial x_i, ..., \partial f_i/\partial x_n) \subset B^n$ é o B-submódulo gerado pelas linhas de θ. Isto significa que θ^* é uma matriz de apresentação livre do módulo $\Omega_k(B)$. Portanto, para cada ideal $J \supseteq I$, podemos considerar o anel $C = A/J$ (que é um B-módulo) e aplicar o funtor $Hom_B(-, C)$ à apresentação livre

$$B^m \xrightarrow{\theta^*} B^n \longrightarrow \Omega_k(B) \longrightarrow 0,$$

de modo que, usando o Teorema 1.13, obtemos um isomorfismo

$$Der_k(B, C) \;\simeq\; ker(\theta).$$

Tal identificação será usada mais adiante, na demonstração da Proposição 2.15.

Capítulo 2

Módulos idealizadores tangenciais

Nosso objetivo agora é definir e descrever certas propriedades do nosso principal objeto de estudo: o *módulo idealizador tangencial*, que como será mencionado, generaliza o importante módulo das derivações logarítmicas (tipicamente estudado no contexto dos campos vetoriais logarítmicos).

Todos os resultados apresentados neste capítulo foram originalmente obtidos em [9], com exceção da Proposição 2.4 (devida a Kaplansky).

2.1 Módulos idealizadores tangenciais gerais

Sejam A um anel e M um A-módulo.

Definição 2.1 Para cada $I \subset A$ ideal, $k \subset A$ subanel e $N \subset M$ submódulo, definimos o *idealizador* $(k-)$*tangencial a valores em* M *relativo ao par* I, N por*:*

$$\mathfrak{I}^M_{A/k}(I,N) = \{d \in Der_k(A,M) |\ d(I) \subseteq N\}$$

onde $d(I)$ é o conjunto dos elementos $d(a)$, com $a \in I$. Isto é, a condição $d(I) \subseteq N$ significa que*:*

$$d(a) \in N, \quad \forall a \in I.$$

Note que $\mathfrak{I}^M_{A/k}(I,N)$ é um A-submódulo de $Der_k(A,M)$.

Se $M = A$ e $N = J \subset A$ é um ideal, denotaremos $\mathfrak{I}_{A|k}(I,J)$ ou simplesmente $\mathfrak{I}_k(I,J)$. Se além disso $I = J$, a notação se reduz a $\mathfrak{I}_k(I)$, o chamado *idealizador tangencial* (*absoluto*) *de* I, tipicamente conhecido como *módulo das derivações logarítmicas de* I, e comumente estudado no contexto da Teoria de Singularidades e Geometria Complexa.

Observação 2.2 Seja $d \in \mathfrak{I}^M_{A/k}(I,N)$. Se $I \subseteq N :_A M$, então a condição $d(I) \subset N$ é equivalente a $d(a_\alpha) \in N$, para todo elemento a_α em um conjunto (qualquer, possivelmente finito) de geradores de I. De fato, seja $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ um conjunto de geradores de I e tome $a \in I$ arbitrário. Então $a = \sum\limits_{\alpha\in\mathfrak{F}} b_\alpha a_\alpha$, onde $\mathfrak{F} \subset \Gamma$ é um subconjunto finito de índices. Aplicando $d \in Der_k(A,M)$, teremos:

$$d(a) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{F}} b_\alpha d(a_\alpha) + \sum_{\alpha\in\mathfrak{F}} {}_\alpha d(b_\alpha) a_\alpha \in N + IM = N,$$

e portanto $d \in \mathfrak{I}^M_{A/k}(I, N)$.

Proposição 2.3 *Sejam $k \subset A$ anéis e $N \subset M$ A-módulos. Então, para qualquer ideal $I \subset N :_A M$, tem-se uma sequência exata de $A-$módulos*

$$0 \to Der_k(A, N) \to \mathfrak{I}^M_{A/k}(I, N) \to Der_k(A/I, M/N)$$

e em particular uma sequência exata

$$0 \to Der_k(A, N) \to Der_k(A, M) \to Der_k(A, M/N).$$

Prova. A hipótese $I \subset N :_A M = 0 :_A M/N$ nos garante que M/N tem estrutura de módulo sobre A/I. A cada $d \in \mathfrak{I}^M_{A/k}(I, N)$ podemos associar a aplicação $\pi \circ d : A \to M/N$, onde $\pi : M \to M/N$ é a projeção natural. Para quaisquer $b_1, b_2 \in A$, podemos escrever

$$(\pi \circ d)(b_1 b_2) = \pi(b_1 d(b_2) + b_2 d(b_1)) = b_1(\pi \circ d)(b_2) + b_2(\pi \circ d)(b_1)$$

e assim $\pi \circ d \in Der_k(A, M/N)$. Afirmamos que tem-se induzida uma aplicação $\overline{d} = A/I \to M/N$ que é uma k-derivação. De fato, seja $\overline{d}(\overline{b}) = (\pi \circ d)(b)$, para todo $b \in A$ onde $\overline{b}$ denota a imagem de b em A/I, e tomando $a_1, a_2 \in A$ tais que $a_1 - a_2 \in I$, então, usando que $d(I) \subseteq N$, tem-se

$$d(a_1) - d(a_2) = d(a_1 - a_2) \in N \Longrightarrow (\pi \circ d)(a_1) = (\pi \circ d)(a_2)$$

e portanto $\overline{d}$ está bem definida.

Além disso, $\overline{d} \in Der_k(A/I, M/N)$, pois $\pi \circ d \in Der_k(A, M/N)$.

Com este processo definimos a aplicação A-linear

$$\begin{array}{rccc} \Phi = \Phi_{I,N}: & \mathfrak{I}^M_{A/k}(I, N) & \to & Der_k(A/I, M/N) \\ & d & \to & \Phi(d) = \overline{d} \end{array}$$

É imediato que $\ker \Phi = Der_k(A, N)$. ∎

2.2 Comparações entre idealizadores tangenciais

Dados I, J ideais de uma k-álgebra (k anel) A, vamos ver como se relacionam os respectivos idealizadores absolutos em função do posicionamento relativo entre I e J. Uma motivação inicial para tal estudo é a Proposição 2.4 abaixo, devida a Kaplansky ([6]), que provavelmente foi o primeiro a buscar tais comparações no contexto de anéis comutativos Noetherianos. Além disso, comparações entre idealizadores tangenciais são de inquestionável importância devido à estreita relação com a teoria dos chamados *ideais diferenciais* proposta por Seidenberg ([10]), que não trataremos neste trabalho.

Proposição 2.4 *Seja A um anel Noetheriano contendo um corpo k de característica zero, e seja $I \subset A$ um ideal. Então,*

$$\mathfrak{I}_k(I) \subseteq \mathfrak{I}_k(\sqrt{I}).$$

Prova. Tome $D \in \mathfrak{I}_k(I)$ e ponha $g = D(f)$, para um dado $f \in \sqrt{I}$. Precisamos mostrar que $g \in \sqrt{I}$. Já que $f^n \in I$ (para algum inteiro positivo n) tem-se $D(f^n) = nf^{n-1}g \in I$. Sendo $D(D(f^n)) \in I$, segue que

$$n(n-1)f^{n-2}g^2 + nf^{n-1}D(g) \in I,$$

ou seja, $f^{n-2}g^2 + f^{n-1}g_1 \in I$, com $g_1 = \frac{D(g)}{n-1}$. Aplicando D novamente (se necessário) obtemos $f^{n-3}g^3 + f^{n-2}g_2 \in I$, com

$$g_2 = \frac{1}{n-2}\left(3gD(g) + \frac{D(D(g))}{n-1}\right).$$

Continuando dessa forma, encontramos $g^n + fg_{n-1} \in I$, para algum $g_{n-1} \in R$. Mas então, como $f \in \sqrt{I}$, chegamos à inclusão desejada.

■

Exemplo 2.5 A inclusão acima obtida por Kaplansky nem sempre é uma igualdade, como se vê no exemplo a seguir. Seja k um corpo qualquer de (característica zero) e considere o ideal

$$I \;=\; (x^2,\, xy,\, yz^2) \;\subset\; k[x,y,z].$$

Então, a k-derivação $D = yz\frac{\partial}{\partial x}$ preserva $\sqrt{I} = (x,\, yz)$ mas não preserva I pois $D(xy) = y^2z \notin I$.

Lema 2.6 *Dados um inteiro $n \geq 2$ e elementos $x_1, ..., x_n \in A$, tem-se, para qualquer derivação D de A, uma expressão*

$$(n-1).D(x_1...x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i D(y_i) \;, \qquad y_i = \prod_{j \neq i} x_j.$$

Prova. Para um produto finito geral $z = z_1...z_s$, o uso iterado da regra de Leibniz fornece

$$D(z) = z_2...z_s D\left(z_1\right) + ... + z_1...z_{s-1}D(z_s).$$

Assim, fica fácil ver que

$$\begin{array}{rcl}
x_1D(y_1) & = & y_2D(x_2) + y_3D(x_3) + ... + y_nD(x_n) \\
x_2D(y_2) & = & y_1D(x_1) + y_3D(x_3) + ... + y_nD(x_n) \\
 & ... & \\
x_nD(y_n) & = & y_1D\left(x_1\right) + y_2D(x_2) + ... + y_{n-1}D(y_{n-1}).
\end{array}$$

Fazendo a soma, obtemos

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{i=1}^{n} x_iD(y_i) & = & \sum_{i=1}^{n}(n-1)y_iD(x_i) \\
 & = & (n-1)\{x_2...x_nD(x_1) + ... + x_1...x_{n-1}D(x_n)\} \\
 & = & (n-1)D(x_1...x_n).
\end{array}$$

■

Proposição 2.7 *Se $I \subset A$ é um ideal, então $r.\mathfrak{I}_k(I^r) \subseteq \mathfrak{I}_k(I^{r+1})$, para qualquer inteiro $r \geq 1$. Em particular, $\mathfrak{I}_k(I) \subseteq \mathfrak{I}_k(I^2)$. Além disso, se k contém um corpo de característica zero, a cadeia descendente das potências de I induz uma cadeia ascendente de idealizadores tangenciais,*

$$\mathfrak{I}_k(I) \subseteq \mathfrak{I}_k(I^2) \subseteq \mathfrak{I}_k(I^3) \subseteq ...$$

Prova. Seja $D \in \mathfrak{I}_k(I^r)$ e considere um gerador típico $a = a_1...a_{r+1}$ de I^{r+1}. Então, aplicando o lema acima com $n = r+1$, obtemos $(rD)(a) = rD(a) = \sum_{i=1}^{r+1} a_i D(b_i)$, com $b_i = \prod_{j \neq i} a_j \in I^r$ e assim $a_i D(b_i) \in I^{r+1}$, donde $(rD)(a) \in I^{r+1}$, como queríamos. Se $Q \subseteq k$, a cadeia ascendente proposta é clara. ∎

Observação 2.8 No contexto em que A é uma álgebra finitamente gerada sobre um corpo k (logo, A é Noetheriano e o A-módulo $Der_k(A)$ é finitamente gerado), a cadeia ascendente obtida na Proposição 2.7 é estacionária; neste caso, uma questão interessante seria interpretar o índice de estabilização da cadeia.

Observação 2.9 Seja A um anel local Noetheriano. É fácil ver que um dado conjunto $\{a_1, ..., a_m\}$ é uma A-sequência (ou *sequência regular*) se e somente se

$$(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_m) : (a_i) = (a_1, ..., a_{i-1,} a_{i+1}, ..., a_m), \ \ \forall i$$

Proposição 2.10 *Se 2 é invertível em um anel local Noetheriano A e $I \subset A$ é um ideal gerado por uma A-sequência, então*

$$\mathfrak{I}_k(I) = \mathfrak{I}_k(I^2).$$

Prova. Basta mostrar que $\mathfrak{I}_k(I^2) \subset \mathfrak{I}_k(I)$. Seja $\{a_1, ..., a_m\}$ uma A-sequência que gera I. Sendo A um anel local noetheriano, qualquer permutação dos $a_i's$ também é A-sequência, isto é,

$$(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_m) : (a_i) = (a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1,...,} a_m), \forall i.$$

Para qualquer $d \in \mathfrak{I}_k(I^2)$, teremos $2a_1 d(a_1) = d(a_1^2) \in I^2$, logo existem $a'_{11}, ..., a'_{1m} \in I$ tais que $a_1 d(a_1) = a'_{11}a_1 + ... + a'_{1m}a_m$, ou seja,

$$a_1(a'_{11} - d(a_1)) + ... + a_{1m}a_m = 0 \Rightarrow a'_{11} - d(a_1) \in (a_2, ..., a_m) : (a_1) = (a_2, ..., a_m) \Rightarrow d(a_1) \in I.$$

De maneira análoga, mostra-se que $d(a_2), ..., d(a_m) \in I$. Portanto, $d \in \mathfrak{I}_k(I)$. ∎

A proposição abaixo será utilizada mais adiante na demonstração do Teorema 2.18.

Proposição 2.11 *Sejam $I \subseteq J \subset A$ ideais tais que o ideal $I : J$ contém algum elemento A/J-regular. Então*

$$\mathfrak{I}_k(I, J) = \mathfrak{I}_k(J).$$

Em particular, $\mathfrak{I}_k(I) \subseteq \mathfrak{I}_k(J)$.

Prova. Como $I \subseteq J$, a inclusão $\mathfrak{I}_k(I) \subseteq \mathfrak{I}_k(I, J)$ é obvia.

Tomemos $D \in \mathfrak{I}_k(I, J)$ qualquer e $b \in J$. Mostraremos que $D(b) \in J$.

Por hipótese, temos que existe $a \in I : J$ que é regular módulo J. Sendo $ab \in I$, temos $D(ab) \in J$ o que significa

$$bD(a) + aD(b) \in J$$

e assim $aD(b) \in J \Rightarrow D(b) \in J$. Em particular, temos que $\mathfrak{I}_k(I) \subseteq \mathfrak{I}_k(J)$, já que é óbvia a inclusão $\mathfrak{I}_k(I) \subseteq \mathfrak{I}_k(I, J)$. ■

Proposição 2.12 *Consideremos um produto de ideais $I = JL \subset A$, onde $I : J$ contém algum elemento $A/J-$regular (por exemplo, J ideal primário e $L \subsetneq \sqrt{J}$). Então*

$$\mathfrak{I}_k(I) = \mathfrak{I}_k(J) \cap \mathfrak{I}_k(L, I : J).$$

Prova. Seja $D \in \mathfrak{I}_k(I)$. Se aplicarmos a Proposição 2.7 obteremos $\mathfrak{I}_k(I) \subseteq \mathfrak{I}_k(J)$. Assim, $D(J) \subseteq J$. Tomemos qualquer $l \in L$ e verifiquemos que $JD(l) \subseteq I$.

Para todo $j \in J$ tem-se $jl \in JL = I$, logo $D(jl) \in I$ e assim $jD(l) + lD(j) \in I$. Mas $lD(j) \in I$ já que $D(j) \in J$. Portanto $bD(l) \in I$, o que mostra a inclusão

$\mathfrak{I}_k(I) \subseteq \mathfrak{I}_k(J) \cap \mathfrak{I}_k(L, I : J)$. Por outro lado, seja $D \in Der_k(A)$ satisfazendo $D(J) \subseteq J$ e $JD(L) \subseteq I$. Dado um elemento $i \in I$ arbitrário, podemos escrevê-lo como soma finita de termos da forma $j_r l_r \in JL$. Assim, por aditividade, podemos supor que $i = jl$, com $j \in J$ e $l \in L$, e portanto

$$D(i) = jD(l) + D(j)l \in I + JL = I$$

como queríamos. ■

Proposição 2.13 *Seja $I \subset A$ um ideal admitindo uma apresentação livre finita*

$$A^t \xrightarrow{\psi} A^r \longrightarrow I \longrightarrow 0.$$

Então $\mathfrak{I}_k(I) \subseteq \mathfrak{I}_k(I_1(\psi))$, onde $I_1(\psi)$ denota o ideal gerado pelas entradas de ψ.

Prova. Seja $\{a_1, ..., a_r\}$ conjunto de geradores de I em relação ao qual foi construída a apresentação dada, e escrevamos $\psi = (b_{ij})$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq t$. Tomemos $D \in \mathfrak{I}_k(I)$ qualquer e mostremos que $D(b_{ij}) \in I_1(\psi), \forall i, j$. Sendo $D(I) \subseteq I$, existem, para cada $i \in \{1, ..., r\}$, elementos $c_{i1}, ..., c_{ir} \in A$ tais que $D(a_i) = \sum\limits_{s=1}^{r} c_{is}a_s$. Uma vez que as colunas de ψ são sizigias de $\{a_1, ..., a_r\}$, temos $\sum\limits_{i=1}^{r} b_{ij}a_i = 0$, $j = 1, ..., t$. Aplicando a derivação D a cada tal relação, obtemos $\sum\limits_{i=1}^{r} b_{ij}D(a_i) + \sum\limits_{i=1}^{r} a_iD(b_{ij}) = 0$, ou seja, $\sum\limits_{i=1}^{r} b_{ij}(\sum\limits_{s=1}^{r} c_{is}a_s) + \sum\limits_{i=1}^{r} a_iD(b_{ij}) = 0$, que podemos escrever como

$$(\sum_{i=1}^{r} b_{lj}c_{l1} + D(b_{1j}))a_1 + ... + (\sum_{i=1}^{r} b_{lj}c_{lr} + D(b_{rj}))a_r = 0, \quad j = 1, ..., t.$$

Em outras palavras, para cada $j \in \{1, ..., t\}$ o vetor

$$\xi_j = (\sum_{l=1}^{r} b_{lj}c_{l1} + D(b_{1j}), ..., \sum_{i=1}^{r} b_{lj}c_{lr} + D(b_{rj})) \in A^r$$

é uma sizigia de $\{a_1, ..., a_r\}$, e assim, utilizando que as colunas da matriz de apresentação ψ geram o módulo das sizigias dos $a_i's$, existem $p_{1j}, ..., p_{tj} \in A$ satisfazendo uma igualdade $\xi_j = p_{1j}(b_{11}, .., b_{r1}) + ... + p_{tj}(b_{1t}, ..., b_{rt})$. Comparando-se, obtém-se finalmente

$$D(b_{ij}) \;=\; \sum_{k=1}^{t} p_{kj}b_{ik} \;-\; \sum_{l=1}^{r} b_{lj}c_{li} \;\in\; I_1(\psi).$$

■

Exemplo 2.14 A inclusão provada acima pode ser estrita, como ilustraremos agora. Considere o anel de polinômios $A = k[x, y, z]$ (k corpo), bem como o ideal

$$I \;=\; (x^2 + y^2,\, y^4 - yz^3,\, xyz^3) \;\subset\; A.$$

Neste caso pode-se verificar que $I_1(\psi) = (x^2 + y^2,\, y^3 - z^3,\, xz^3)$. Seja $D = xz^3\frac{\partial}{\partial y}$. Então $I_1(\psi)$ é D-invariante pois $xz^3 \in I_1(\psi)$, mas — independentemente da característica de k — nota-se que I não é D-invariante: $D(y^4 - yz^3) = 4xy^3z^3 - xz^6 \notin I$, já que $4xy^3z^3 \in I$ e $xz^6 \notin I$.

2.3 Relação estrutural com o módulo de derivações

Agora estudaremos a relação estrutural entre o módulo idealizador tangencial relativo a um par de ideais e o correspondente módulo de derivações, e mencionaremos o significado geométrico de tal relação. Nesta subseção, assumiremos que A é o anel de polinômios $k[X_1, ..., X_n]$, onde k é um corpo.

Proposição 2.15 *Para quaisquer ideais $I \subseteq J \subset A$, tem-se um isomorfismo de A/J-módulos*

$$Der_k\left(\frac{A}{I}, \frac{A}{J}\right) \simeq \frac{\mathfrak{I}_k(I, J)}{JDer_k(A)} \subset \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\frac{A}{J}\right) \frac{\partial}{\partial X_i}.$$

Prova. O homomorfismo $\Phi = \Phi_{I,J}$, que foi definido na Proposição 2.3, a cada $d = \sum_i p_i \frac{\partial}{\partial X_i} \in \mathfrak{I}_k(I, J)$ associa

$$\overline{d} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \overline{p_i} \frac{\partial}{\partial X_i} \;\in\; Der_k(A/I, A/J),$$

onde $\overline{p_i}$ denota a imagem de p_i em A/J. Além disso, já foi provado que $\ker\Phi = Der_k(A,J)$.

Se $D = \sum_i p_i \frac{\partial}{\partial X_i} \in Der_k(A,J)$ então $p_j = D(X_j) \in J, \forall j \Longrightarrow Der_k(A,J) \subseteq JDer_k(A)$. Por outro lado, $d \in JDer_k(A) \Longrightarrow d = \sum_{s=1}^{n} j \frac{\partial}{\partial X_s} \in Der_k(A,J)$. Então $JDer_k(A) \subseteq Der_k(A,J)$, e assim

$$\ker\Phi \;=\; JDer_k(A).$$

Agora queremos mostrar que Φ é sobrejetor. Sabemos que

$$Der_k(A/I, A/J) \;\simeq\; \ker\theta \;\subset\; (A/J)^n,$$

onde θ é o homomorfismo induzido pela matriz jacobiana de um conjunto de geradores $\{f_1,...,f_m\}$ de I (vide Observação 1.18). Assim, para qualquer $\triangle = \sum_i \overline{g}_i \frac{\partial}{\partial X_i} \in Der_k(A/I, A/J)$, tem-se $\sum_i \overline{g}_i \overline{\frac{\partial f_j}{\partial X_i}} = \overline{0} \in A/J$, $\forall j$, isto é, $\sum_i g_i \frac{\partial f_j}{\partial X_i} \in J$, $\forall j$ $\Longrightarrow \triangle' = \sum_i g_i \frac{\partial}{\partial X_i} \in \mathfrak{I}_k(I,J) \Longrightarrow \Phi(\triangle') = \triangle \Longrightarrow \Phi$ é sobrejetor.

Daí decorre o isomorfismo proposto. ■

Observação 2.16 i) Pode-se mostrar que a operação de tomar idealizadores tangenciais comuta com formação de frações. Precisamente, se $S \subset A$ é um conjunto multiplicativo, então

$$\mathfrak{I}_k(I,J)_S \;\cong\; \mathfrak{I}_k(I_S, J_S)$$

como A_S-módulos.

ii) Da Proposição 2.15 segue a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow JDer_k(A) \longrightarrow \mathfrak{I}_k(I,J) \stackrel{\Phi_{I,J}}{\longrightarrow} Der_k(A/I, A/J) \longrightarrow 0,$$

que é uma ferramenta eficiente para obtermos certas propriedades do idealizador tangencial; por exemplo, vemos que o A-módulo $\mathfrak{I}_k(I,J)$ possui posto igual a n (a dimensão de Krull de A), no sentido de que $\mathfrak{I}_k(I,J)_{(0)} \simeq K^n$, onde $K = A_{(0)} = k(X_1,...,X_n)$. Além disso, pode-se obter estimativas para sua profundidade (no caso local ou graduado) ou estudar a liberdade do seu dual $\mathfrak{I}_k(I,J)^*$, cujos detalhes fogem do alcance do presente trabalho.

iii) A título de informação, mencionemos o significado geométrico do idealizador tangencial absoluto, bem como da Proposição 2.15. Se A é um anel de polinômios sobre um corpo k algebricamente fechado e $I \subset A$ é um ideal radical, então cada elemento de $\mathfrak{I}_k(I)$ pode ser interpretado como um campo vetorial logarítmico, isto é, um campo vetorial global que é tangente ao longo da parte não-singular da variedade algébrica $X = V(I)$, tanto no contexto afim quanto projetivo (vide detalhes em [8]). Consequentemente, o isomorfismo obtido na Proposição 2.15, no caso $I = J$, garante que todo campo vetorial tangente definido especificamente em X pode ser "levantado" (*lifted*) a um campo vetorial definido em todo o espaço ambiente — logo, global — que também é tangente ao longo de X.

Corolário 2.17 *Seja $\mathfrak{m} \subset A$ um ideal maximal tal que $A/\mathfrak{m}$ é uma extensão separável de k (por exemplo, assumindo k perfeito). Então*

$$\mathfrak{I}_k(\mathfrak{m}) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{m}\frac{\partial}{\partial X_i} \simeq \mathfrak{m}^{\oplus n}.$$

Prova. A versão algébrica (devida a Zariski) para o Teorema dos Zeros de Hilbert assegura que a extensão de corpos $L = A/\mathfrak{m} \supseteq k$ é finita, e sendo por hipótese separável, deve satisfazer $\Omega_k(L) = 0$ e portanto $Der_k(L) = Hom_L(\Omega_k(L), L) = 0$ (vide Proposição 1.17). Por outro lado, tem-se $Der_k(L) = \mathfrak{I}_k(\mathfrak{m})/\mathfrak{m}^{\oplus n}$, donde segue o desejado. ■

2.4 Decomposição primária do módulo idealizador tangencial

Seja A um anel Noetheriano. Lembramos que, se $N \subset M$ são A-módulos e $N = \cap_{i=1}^{t} N_i$ é uma decomposição primária de N em M, no sentido usual de que o radical de cada ideal condutor $N_i \colon M \subset A$ é um ideal primo P_i (o único primo associado do A-módulo M/N_i), então a decomposição é *minimal* se $P_i \neq P_j$ sempre que $i \neq j$. Em particular, se $I = \cap_{i=1}^{t} Q_i$ é uma decomposição primária minimal de um ideal $I \subset A$, então $\sqrt{Q_i} \neq \sqrt{Q_j}$ para $i \neq j$. Lembramos também que, dado um subanel $k \subset A$, então um ideal $I \subset A$ é dito (k-)*diferencial* se ele for invariante sob *toda* k-derivação de A, ou seja, $\mathfrak{I}_k(I) = Der_k(A)$.

Obteremos agora uma decomposição primária do idealizador tangencial de um ideal $I \subset A$ a partir de uma decomposição primária de I, sob a hipótese de ausência de qualquer componente primária *imersa* (isto é, cujo radical contém propriamente algum primo associado minimal). Tal resultado foi obtido em [9], e fornece um dos poucos exemplos explícitos de decomposição primária, no contexto de *módulos*, que se pode encontrar na literatura matemática; por isso, é o primeiro resultado principal abordado nesta dissertação (o segundo resultado principal é o teorema provado no próximo capítulo).

Teorema 2.18 *Seja $k \subset A$ uma extensão de anéis Noetherianos e seja $I \subset A$ um ideal com decomposição primária minimal $I = \cap_{i=1}^{t} Q_i$ sem componente primária imersa. Então, pondo $\Gamma = \{i \mid Q_i$ não é diferencial$\} \subset \{1, \ldots, t\}$, tem-se*

$$\mathfrak{I}_k(I) \;=\; \bigcap_{i\in\Gamma} \mathfrak{I}_k(Q_i),$$

e esta é uma decomposição primária minimal de $\mathfrak{I}_k(I)$ em $Der_k(A)$.

Prova. Escreva $P_i = \sqrt{Q_i}$ para cada i. Já que a dada decomposição primária de I é minimal e existem apenas primos associados minimais, tem-se $I_{P_i} = (Q_i)_{P_i}$ para $i \in \{1, \ldots, t\}$, ou seja,

$$I \colon Q_i \not\subseteq P_i, \quad i = 1, \ldots, t.$$

Isto significa que o ideal $I \colon Q_i$ contém um elemento A/Q_i-regular. Aplicando a Proposição 2.11, obtém-se $\mathfrak{I}_k(I) \subset \mathfrak{I}_k(Q_i)$, e daí $\mathfrak{I}_k(I) \subset \cap_j \mathfrak{I}_k(Q_j)$. A inclusão oposta é imediata, de modo que ocorre igualdade. Sendo $\mathfrak{I}_k(Q_j) = Der_k(A)$ para $j \notin \Gamma$, obtemos $\mathfrak{I}_k(I) = \cap_{i\in\Gamma}\mathfrak{I}_k(Q_i)$. Mostremos agora que tal decomposição é primária. Dado $i \in \Gamma$, escreva $Q = Q_i$ e $P = \sqrt{Q}$ por simplicidade. Se $P' \in Ass_A(Der_k(A)/\mathfrak{I}_k(Q))$, então

$$P' \;=\; \mathfrak{I}_k(Q)\colon D,$$

para alguma derivação $D \in Der_k(A) \setminus \mathfrak{I}_k(Q)$. Afirmamos que $P = P'$. Se $f \in P$, existe um inteiro positivo r tal que $f^r \in Q$. Daí

$$f^r D \in Q\, Der_k(A) \subset \mathfrak{I}_k(Q),$$

de onde segue que $f^r \in P'$ e então $f \in P'$. Inversamente, tome $g \in P'$, ou seja, $(gD)(Q) \subset Q$. Já que $D \notin \mathfrak{I}_k(Q)$, existe $h \in Q$ com $D(h) \notin Q$. Por outro lado, $gD(h) \in Q$ e assim, necessariamente, uma potência de g pertence a Q, o que implica em $g \in P$. Logo, mostramos que

$$Ass_A\left(\frac{Der_k(A)}{\mathfrak{I}_k(Q_i)}\right) \;=\; \{P_i\}, \qquad i \in \Gamma,$$

como desejado. Equivalentemente, o radical do anulador do A-módulo $Der_k(A)/\mathfrak{I}_k(Q_i)$ é exatamente P_i, de onde em particular obtemos a afirmada minimalidade, já que a dada decomposição de I possui tal propriedade.

■

Observação 2.19 A condição de ausência de componentes primárias imersas, no contexto do teorema acima, é necessária. De fato, no anel de polinômios $A = k[x, y, z]$ (k corpo arbitrário), considere o ideal

$$I \;=\; (xz,\, yz,\, x^2,\, y^2) \;\subset\; A,$$

que tem decomposição primária minimal $I = Q_1 \cap Q_2$, onde $Q_1 = (x, y)$ e $Q_2 = (x^2, y^2, z)$ (note que Q_2 é uma componente imersa). Então, a interseção $\mathfrak{I}_k(Q_1) \cap \mathfrak{I}_k(Q_2)$ está *estritamente* contida em $\mathfrak{I}_k(I)$. De fato, se $D = xy\frac{\partial}{\partial z}$, tem-se $D(I) \subset I$, mas $D(Q_2) \not\subseteq Q_2$ pois $D(z) = xy \notin Q_2$.

Capítulo 3

Derivações de anéis de Stanley-Reisner

3.1 A estrutura do módulo de derivações

Sejam k um corpo e $A = k[X_1, ..., X_n]$ anel de polinômios sobre k. Dado um monômio $M = X_1^{b_1}, ..., X_n^{b_n} \in A$, definimos o *suporte de* M como sendo o conjunto $\mathrm{supp}(M) = \{X_i \mid b_i \geq 1\}$.

A seguir, apresentamos o principal resultado deste capítulo (obtido em [2]), que é um dos dois principais resultados tratados nesta dissertação, juntamente com o Teorema **??** do capítulo anterior.

Teorema 3.1 *Seja $I \subset A$ um ideal gerado por monômios cujos expoentes não são múltiplos da característica k (por exemplo, se $\mathrm{char}(k) = 0$). Então:*

$$Der_k\left(\frac{A}{I}\right) = \bigoplus_{i=1}^{n}\left(\frac{I : (I : (X_i))}{I}\right)\frac{\partial}{\partial X_i} \subset \bigoplus_{i=1}^{n}\left(\frac{A}{I}\right)\frac{\partial}{\partial X_i}.$$

Prova. Afirmamos que vale a igualdade

$$\mathfrak{I}_k(I) = \bigoplus_{i=1}^{n}(I : (I : (X_i)))\frac{\partial}{\partial X_i},$$

da qual o resultado desejado seguirá diretamente da Proposição 2.15.

Primeiro, considere o ideal

$$\mathcal{M}_k^i(I) = \left\{g \in A \mid g\frac{\partial}{\partial X_i} \in \mathfrak{I}_k(I)\right\}.$$

Afirmamos que

$$\mathfrak{I}_k(I) = \sum_{i=1}^{n}\mathcal{M}_k^i(I)\frac{\partial}{\partial X_i},$$

isto é, vamos mostrar que uma derivação $\delta = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial X_i} \in Der_k(A)$ pertence a $\mathfrak{I}_k(I)$ se e somente se cada somando $g_i\frac{\partial}{\partial X_i}$ pertence a $\mathfrak{I}_k(I)$.

Seja $\{M_s\}_s$ um conjunto minimal de monômios gerando I, os quais, por hipótese, têm expoentes não divisíveis por $\mathrm{char}(k)$. Segue-se que $g_i\frac{\partial}{\partial X_i} \in \mathfrak{I}_k(I)$ se e somente se, para todo gerador M de I e todo i com $X_i \in \mathrm{supp}(M)$, tivermos $(g_i\frac{\partial}{\partial X_i})(M) = b_i g_i \frac{M}{X_i} \in I$, onde $M = X_1^{b_1}...X_i^{b_i}...X_n^{b_n}$ (com $b_j \geq 0$ e $\mathrm{char}(k)$ não divide $b_i \geq 1$).

Agora, escrevemos cada g_i, de modo único, como uma combinação k-linear de monômios (distintos)

$$g_i = \sum_{\alpha_i} \lambda_{i,\alpha_i} \underline{X}^{\alpha_i}.$$

e assim, como $b_i g_i \frac{M}{X_i} \in I$, obtemos

$$\sum_{\alpha_i} b_i \lambda_{i,\alpha_i} \underline{X}^{\alpha_i} \frac{M}{X_i} \in I. \qquad (1)$$

Mas os monômios $\underline{X}^{\alpha_i}\frac{M}{X_i}$, variando os α_i, são todos distintos pois $\frac{M}{X_i}$ está fixado e $\lambda_{i,\alpha_i} \neq 0 \Rightarrow b_i\lambda_{i,\alpha_i} \neq 0$. Novamente, desde que I é gerado por monômios, (1) é equivalente à seguinte condição:

$$\underline{X}^{\alpha_i}\frac{M}{X_i} \in I, \quad \forall \alpha_i,\ \forall M \text{ (gerador de } I\text{)}, \forall X_i \in \mathrm{supp}(M). \qquad (2)$$

Assumindo que (2) não é válido, existem i (com $1 \leq i \leq n$), α_i e M tais que $\underline{X}^{\alpha_i}\frac{M}{X_i} \notin I$, onde α_i é o multiexpoente de um monômio de g_i com coeficiente não-nulo e M é um gerador de I tal que $X_i \in \mathrm{supp}(M)$.

Assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\delta(M) \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial X_i}\right)(M) \;&=\; \sum_{\substack{i \\ X_i \in \mathrm{supp}(M)}} \sum_{\alpha_i} b_i \lambda_{i,\alpha_i} \underline{X}^{\alpha_i} \frac{M}{X_i} \\
&=\; \sum_{\substack{i \\ X_i \in \mathrm{supp}(M)}} \sum_{\alpha_i} b_i \lambda'_{i,\alpha_i} \underline{X}^{\alpha_i} \frac{M}{X_i} \qquad (3) \\
&+\; \sum_{\substack{i \\ X_i \in \mathrm{supp}(M)}} \sum_{\alpha_i} b_i \lambda''_{i,\alpha_i} \underline{X}^{\alpha_i} \frac{M}{X_i} \qquad (4)
\end{aligned}$$

onde esta expressão é de tal forma que, em (3), todos os monômios pertencem a I, e em (4) nenhum monômio pertence a I.

Por outro lado, $\delta(M) \in I$. Portanto, necessariamente

$$\sum_{\substack{i \\ X_i \in \mathrm{supp}(M)}} \left(\sum_{\alpha_i} b_i \lambda''_{i,\alpha_i} \underline{X}^{\alpha_i}\right) \frac{M}{X_i} = 0,$$

onde todo coeficiente $b_i\lambda''_{i,\alpha_i}$ é não-nulo (pois nenhum monômio em (4) pertence a I). Isto produz uma relação (ou *sizigia*) do conjunto de monômios $\{\frac{M}{X_i} \,|\, i\}$ (M fixado). Mas o módulo das sizigias deste conjunto é gerado pelas relações da forma

$$(..., X_i, ..., -X_j, ...), \qquad i < j.$$

Daí segue que $\sum_{\alpha_i} b_i\lambda''_{i,\alpha_i}\underline{X}^{\alpha_i} \in (X_i)$ para todo i. Equivalentemente, tem-se que $X_i \in \operatorname{supp}(\underline{X}^{\alpha_i})$ para todo α_i já que $b_i\lambda''_{i,\alpha_i} \neq 0$. Isto implica

$$\underline{X}^{\alpha_i}\frac{M}{X_i} = \frac{\underline{X}^{\alpha_i}}{X_i}M \in I,$$

contradição pois tínhamos assumido que $\underline{X}^{\alpha_i}\frac{M}{X_i} \notin I$.

Isto conclui a prova de que $\mathfrak{I}_k(I) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{M}_k^i(I)\frac{\partial}{\partial X_i}$, como afirmado. Por um argumento semelhante, vê-se que cada ideal $\mathcal{M}_k^i(I)$ é gerado por monômios. Um monômio N é tal que $N\frac{\partial}{\partial X_i} \in \mathfrak{I}_k(I)$ se e somente se $\frac{NM}{X_i} \in I$ para todo gerador M de I e todo $X_i \in \operatorname{supp}(M)$. Se $\{M_s\}_s$ é um conjunto minimal de monômios gerando I (com expoentes não divisíveis por $\operatorname{char}(k)$), então o ideal $I : (X_i) \subset A$ é gerado pelo conjunto $\{\frac{M_s}{X_i} \mid X_i \in \operatorname{supp}(M_s)\}$. Segue-se então que $N\frac{\partial}{\partial X_i} \in \mathfrak{I}_k(I)$ se e somente se $N \in I : (I : (X_i)) \subset A$, conforme desejado. ■

Observação 3.2 Resultados como o provado acima (Teorema 3.1) são de fundamental importância pois revelam a estrutura precisa de módulos especiais (tipicamente os que possuem relevante contrapartida geométrica e/ou combinatória), a exemplo do módulo de derivações. No presente contexto de anéis de Stanley-Reisner, uma vez que o módulo se decompõe como soma direta de ideais explícitos, torna-se fácil o cálculo de certos invariantes numéricos associados, por exemplo o número mínimo de geradores e diversas multiplicidades, uma vez que basta calcular tais invariantes para os ideais que aparecem na decomposicão em soma direta, batizada de "decomposição diagonal" em [2]. Além disso, muita informação em termos de Combinatória Algébrica (por exemplo, através de complexos simpliciais) pode ser extraída do Teorema 3.1, como descrito em [2, Section 3].

3.2 Versão homológica da conjectura de Zariski-Lipman

O enunciado tradicional da famosa *conjectura de Zariski-Lipman* ([7]) prediz que, se $(A, \mathfrak{m})$ é uma localização de um domínio finitamente gerado sobre um corpo k de característica zero tal que $Der_k(A)$ é livre, então A tem de ser um anel regular (isto é, sua dimensão de Krull coincide com o número mínimo de geradores de $\mathfrak{m}$). Assim, grosso modo, a variedade algébrica associada a A deveria ser não-singular. Tal conjectura foi estabelecida afirmativamente em diversos casos, a exemplo de anéis de coordenadas de hipersuperfícies, curvas e *n-folds* com $n \geq 3$, além de um caso que merece destaque especial, que é o caso graduado (em qualquer dimensão) devido a M. Hochster ([5]). Essencialmente, a conjectura permanece em aberto para superfícies afins, isto é, $\dim(A) = 2$.

Posteriormente, J. Herzog e W. Vasconcelos propuseram, de forma independente, a seguinte versão homológica para a conjectura de Zariski-Lipman:

Conjectura. *Seja A uma álgebra finitamente gerada sobre um corpo k de característica zero. Se o módulo $Der_k(A)$ tem dimensão projetiva finita sobre A,* *então $Der_k(A)$ é um A-módulo projetivo (isto é, localmente livre). Em particular, no caso em que A é uma álgebra $\mathbb{N}$-graduada, então $Der_k(A)$ deverá ser um A-módulo livre.*

Veremos a seguir que o resultado estrutural fornecido pelo Teorema 3.1 produz uma resposta positiva para a conjectura acima, com respeito à classe de anéis de Stanley-Reisner, como verificado em [2, Corollary 2.2.2]. Antes disso, demonstraremos o seguinte resultado auxiliar:

Lema 3.3 *Sejam S um anel Noetheriano e $I \subset J \subset S$ ideais tais que o ideal quociente $(I : J)/I \subset S/I$ contém algum elemento S/I-regular (isto é, um não-divisor-de-zero módulo I). Então $I = J$.*

Prova. Suponha por absurdo que $I \subsetneq J$, ou seja, tal inclusão é estrita. Logo, existe $g \in J$, com $g \notin I$. Por hipótese, existe elemento S/I- regular

$$\overline{f} \in \frac{I : J}{I},$$

para algum $f \in I : J \subset S$. Em particular, $fg \in I$, ou equivalentemente, $\overline{fg} = \overline{0}$ em S/I. Como $\overline{f}$ não divide zero módulo I, tem-se necessariamente que $\overline{g} = \overline{0}$, isto é, $g \in I$, contradição.

■

Corolário 3.4 *Seja k um corpo de característica zero e considere a k-álgebra $A = k[X_1, ..., X_n]/I$, onde I é um ideal gerado por monômios. Se $Der_k(A)$ tem dimensão projetiva finita sobre A, então A é um anel de polinômios.*

Prova. Sejam $B = k[X_1, ..., X_n]$ e $A = B/I$. O Teorema 3.1 nos diz que o módulo das k-derivações de A é isomorfo à soma direta dos ideais

$$\frac{I : (I : (X_i))}{I} \subset A, \quad i = 1, ..., n.$$

Segue-se então que cada $(I : (I : (X_i)))/I$ tem dimensão projetiva finita sobre A, ou seja, admite resolução projetiva (graduada) finita. Logo, por um resultado bem-conhecido ([1]), cada $(I : (I : (X_i)))/I$ contém algum elemento A-regular. Aplicando o Lema 3.3, obtemos que $I = I : (X_i)$, ou seja, $I : (I : (X_i)) = B$, para todo i. Portanto,

$$Der_k(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\frac{B}{I}\right) \frac{\partial}{\partial X_i} \simeq A^n$$

que evidentemente é livre como A-módulo. Finalmente, pelo caso graduado da conjectura usual de Zariski-Lipman ([5]), concluímos que $A = B$. ■

Referências Bibliográficas

[1] M. Auslander, D. Buchsbaum, *Codimension and multiplicity*, Ann. of Math. **68** (3) (1958), 625–657.

[2] P. Brumatti, A. Simis, *The module of derivations of a Stanley-Reisner ring*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1309–1318.

[3] J. Damon, *On the legacy of free divisors: discriminants and Morse type singularities*, Amer. J. Math. **120** (1998), 453–492.

[4] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 150, Springer-Verlag, 1995.

[5] M. Hochster, *The Zariski-Lipman conjecture in the graded case*, J. Algebra **47** (1977), 411–424.

[6] I. Kaplansky, *An Introduction to Differential Algebra*, Hermann, Paris, 1957.

[7] J. Lipman, *Free derivation modules on algebraic varieties*, Amer. J. Math. **87** (1965), 874–898.

[8] C. B. Miranda Neto, *Vector fields and a family of linear type modules related to free divisors*, J. Pure Appl. Algebra **215** (2011), 2652–2659.

[9] C. B. Miranda Neto, *Tangential idealizers and differential ideals*, Submetido para publicação.

[10] A. Seidenberg, *Differential ideals in rings of finitely generated type*, Amer. J. Math. **89** (1967), 22–42.

[11] H. Terao, *Arrangements of hyperplanes and their freeness I, II*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **27** (1980), 293–320.