Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Multiplicidade de soluções positivas para algumas classes de problemas elípticos em $\mathbb{R}^2$ com condição de Neumann

Elisânia Santana de Oliveira

2012

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Multiplicidade de soluções positivas para algumas classes de problemas elípticos em $\mathbb{R}^2$ com condição de Neumann

por

Elisânia Santana de Oliveira

sob orientação do

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza

Março de 2012

João Pessoa-PB

O48m Oliveira, Elisânia Santana de.
Multiplicidade de soluções positivas para algumas classes de problemas elípticos em R^2 com condição de Neumann / Elisânia Santana de Oliveira.-- João Pessoa, 2012.
142p. : il.
Orientador: Manasses Xavier de Souza
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Teoria dos pontos críticos. 3. Passo da montanha. 4. Trudinger-Moser. 5. Sub e supersolução.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Multiplicidade de soluções positivas para algumas classes de problemas elípticos em $\mathbb{R}^2$ com condição de Neumann

por

Elisânia Santana de Oliveira

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Manassés Xavier de Souza

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza - UFPB (Orientador)

Wilberclay Gonçalves Melo

Prof. Dr. Wilberclay Gonçalves Melo - UFS

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB (Suplente)

Agradecimentos

- A Deus, autor de minha existência. Aquele a quem sempre confiei minha vida. Obrigada pela graça de mais uma conquista!

- Aos meus queridos pais, por todo esforço que fizeram para que eu estudasse. Pelos bons conselhos e por acreditarem e sentirem orgulho de mim.

- Ao professor Manassés Xavier de Souza, por sua maravilhosa orientação, pela paciência e por todo ensinamento a mim proporcionado.

- A cada um de meus irmãos: Elisângela, Emisson, Elisson, Érika e Emmily. Meus grandes companheiros! A meu cunhado Adel por se apresentar sempre disponível. Obrigada por acreditarem no meu trabalho.

- Ao meu amável namorado, Weverton, pelo seu amor, companheirismo e confiança e por ser tão presente e compreensivo; aos seus pais: Gilvânia e Pedro e ao seu irmão e meu afilhado Willyans. Obrigada pelo enorme carinho!

- Aos demais familiares: avós, tios e primos. Obrigada pela atenção!

- Aos colegas de curso: Alex, Bruna e Elizabeth, pelos momentos de muito estudo, pelas conversas tão descontraídas e importantes que tivemos. Agradeço ainda a Disson, Tarciana, Oldinéia e Viviane por todo acolhimento que me deram. E a Carlinha, Esmeralda, Luciene e Rafaela, minhas grandes amigas que sempre torceram pelo meu sucesso.

- Ao estimado professor Adailton Novais e ao amigo Thiago Gomes pelo imprescindível apoio que me deram.

- Ao professor Wilberclay Gonçalves Melo, Uberlandio Batista Severo e Everaldo Souto de Medeiros por participarem da banca examinadora e exporem seus comentários e sugestões tão necessários para melhoria deste trabalho.

- Ao professor Cleto Brasileiro Miranda Neto pelo aprendizado que adquiri em suas aulas e por se apresentar sempre atencioso.

- Aos professores do DMA/UFS: Fábio dos Santos, Ivanete Batista dos Santos, Kalasas Vasconcelos de Araújo, pelo apoio e incentivo que muito contribui para que eu conquistasse mais este título.

- Aos demais colegas, professores e funcionários do programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPB.

- A Capes-Reuni pelo apoio financeiro.

- Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram para minha formação.

Dedicatória

À minha avó (in memorian)

Resumo

Nesta dissertação, provamos a existência e multiplicidade de soluções fracas positivas para algumas classes de problemas elípticos no plano envolvendo crescimento exponencial do tipo Trudinger-Moser com condição de Neumann na fronteira. Para isso, usaremos o método de sub e supersolução em combinação com métodos variacionais e o princípio do máximo.

Palavras-chaves: Teoria dos pontos críticos, passo da montanha, desigualdade de Trudinger-Moser, Sub e supersolução.

Abstract

In this work, we prove the existence and multiplicity of positive weak solutions for some classes of elliptic problems in plane involving exponential growth of the Trudinger-Moser type with Neumann boundary condition. To do this, we use the method of sub and supersolution in combination with variational methods and the maximum principle.

Keywords: Theory of critical points, mountain pass, Moser-Trudinger inequality, Sub and supersolution.

Sumário

Notações

Neste trabalho, faremos uso da seguinte simbologia:

- $C, C_0, C_1, ...$ denotam constantes positivas (possivelmente distintas);
- $|A|$ denota a medida de Lebesgue de um conjunto A em $\mathbb{R}^2$;
- $\text{supp}(f)$ denota o suporte da função f;
- $B_\delta(x)$ denota a bola aberta de centro x e raio δ;
- $\rightharpoonup, \rightarrow$ denotam convergência fraca e forte, respectivamente;
- $\langle\ ,\ \rangle$ denota o produto interno em $H^1(\Omega)$;
- $[u < v] = \{x \in A \subset \mathbb{R}^2 : u(x) < v(x)\}$;
- $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ou u_{x_i} denota a derivada parcial de u em relação a x_i;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$ denota o gradiente de u;
- $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o laplaciano de u;
- $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$;
- ν denota o vetor normal exterior unitário a Ω;
- $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$ denota a derivada normal exterior de u;
- $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ denota o espaço das funções infinitamente diferenciáveis;
- $C_0^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ denota o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto;

- $C^{0,\sigma}\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{u \in C\left(\overline{\Omega}\right) : \sup \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\sigma}} < \infty\right\}$ com $0 < \sigma < 1$ e

  $C^{k,\sigma}\left(\overline{\Omega}\right) = \{u \in C^{k}(\Omega) : D^{j}u \in C^{0,\sigma}\left(\overline{\Omega}\right)\ \forall\ j; |j| \leq k\}$;

- $L^{p}(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável} : \int_{\Omega} |u|^{p}\ \mathrm{d}x < \infty\right\}$, em que $1 \leq p < +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^{2}$ é um aberto conexo com norma dada por

$$\|u\|_{L^{p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^{p}\ \mathrm{d}x\right)^{1/p};$$

- $L^{\infty}(\Omega)$ denota o espaço das funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em Ω com norma

$$\|u\|_{\infty} = \inf\{C > 0 |\ |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\};$$

- Para $1 \leq p < +\infty$,

  $W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p}(\Omega) \,\middle|\, \begin{array}{c} \exists g_{i} \in L^{p}(\Omega) \text{ tais que } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i}}\ \mathrm{d}x = -\int_{\Omega} g_{i}\varphi\ \mathrm{d}x, \\ \forall \varphi \in C_{0}^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right) \text{ e } i = 1, ..., N \end{array} \right\}$ com norma dada por

$$\|u\|_{1,p} = \left[\int_{\Omega} \left(|\nabla u|^{p} + |u|^{p}\right)\ \mathrm{d}x\right]^{1/p}.$$

  Quando $p = 2$, $W^{1,2}(\Omega) = H^{1}(\Omega)$ e escreveremos $\|u\| = \left(\int_{\Omega} \left(|\nabla u|^{2} + |u|^{2}\right)\ \mathrm{d}x\right)^{1/2}$;

- $H^{-1}(\Omega)$ denota o espaço dual de $H^{1}(\Omega)$, com norma $\|\cdot\|_{*}$.

Introdução

Nesta dissertação, estudaremos a existência e multiplicidade de soluções positivas para algumas classes de problemas elípticos no plano envolvendo crescimento exponencial do tipo Trudinger-Moser com condição de Neumann na fronteira.

As técnicas aqui utilizadas são: métodos variacionais, mais precisamente, teoria dos pontos críticos e passo da montanha. Usamos também o método de sub e supersolução e o princípio do máximo.

Este trabalho está dividido em três capítulos e um apêndice.

O *Capítulo 1* contém as preliminares, onde enunciaremos alguns resultados conhecidos e que serão utilizados no decorrer do texto.

No *Capítulo 2*, com base nos artigos de Prashanth e Sreenadh [25] e [26], estudaremos a existência e multiplicidade de soluções positivas para a seguinte classe de problemas elípticos com condição de Neumann na fronteira:

$$\left\{\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} -\Delta u + u = p(u)e^{u^\alpha} \\ u > 0 \end{array}\right\} \text{ em } \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda\psi u^q \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{P_λ}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado com fronteira C^2, $u \in H^1(\Omega)$, $\alpha \in (0,2]$, $\lambda > 0$, $q \in [0,1)$, ψ é uma função Hölder contínua não-negativa em $\overline{\Omega}$ e $p \in C^1(\mathbb{R})$ é uma pertubação polinomial de e^{u^α}. O crescimento da não-linearidade $g(s) = p(s)e^{s^\alpha}$ é motivado pela **Desigualdade de Trudinger-Moser** (veja [3], [20] e [34]) a qual diz que, se $u \in H^1(\Omega)$, então, para $\beta \leq 2\pi$, existe uma constante positiva $C(\Omega)$ tal que

$$\sup_{\|u\|\leq 1} \int_\Omega e^{\beta u^2} \leq C(\Omega).$$

Problemas desse tipo foram estudados por Adimurthi e Yadava no artigo [3], de Figueiredo, Miyagaki e Ruf no artigo [12] e Prashanth e Sreenadh no artigo [27]. No artigo [3], os autores estabeleceram a existência de soluções para a classe de problemas elípticos não-linear

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)\, u = f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + bu = g(y,u) \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado com fronteira C^2, a é uma função limitada e o operador diferencial $-\Delta + a(x)\, I$ é positivo. Neste trabalho, foram usadas técnicas de minimização e o Princípio de Concentração-Compacidade de P. L. Lions. Em [12], os autores usaram a teoria dos pontos críticos, mais precisamente, o Teorema do Passo da Montanha e o Teorema do Ponto de Sela para estudar a existência de soluções para a classe de problemas de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado e f satisfaz a condição de crescimento crítico ou subcrítico. E, em [27], provou-se a existência de números positivos $\lambda_* \leq \lambda^*$, tais que o problema

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} -\Delta u = \mu u\, |u|^p\, e^{u^2} + \lambda h(x) \\ u > 0 \end{array}\right\} \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

tem pelo menos duas soluções para todo $\lambda \in (0, \lambda_*)$ e nenhuma solução fraca para $\lambda > \lambda^*$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado, $0 \leq p < \infty$, μ, $\lambda > 0$ e $h \geq 0$ em Ω, com $\|h\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

Existem na literatura vários trabalhos envolvendo não-linearidades com crescimento exponencial do tipo Trudinger-Moser. Entre outros, podemos citar os artigos de Adimurthi [1], J. M. do Ó [22] e suas referências. Estes artigos, tratam problemas de Dirichlet envolvendo o operador N-Laplaciano em domínios limitados do $\mathbb{R}^N$. No caso de domínios não-limitados, veja os artigos de J. M. do Ó [23], Ruf [28], Yang [24] e suas referências.

No *Capítulo 3*, motivados pelo problema (P_λ) e por uma versão singular da desigualdade de Trudinger-Moser, estudaremos a existência e multiplicidade de soluções fracas positivas para a seguinte classe de problemas elípticos singular com condição de Neumann na fronteira:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{c} -\Delta u + u = \dfrac{h(x,u)e^{u^2}}{|x|^\beta} \\ u > 0 \end{array}\right\} \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda \psi u^q \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{Q_λ}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado com fronteira C^2, $0 \in \partial\Omega$, $u \in H^1(\Omega)$, $\beta \in [0,2)$, $\lambda > 0$, $q \in [0,1)$, ψ é uma função Hölder contínua não-negativa em $\overline{\Omega}$ e $h \in C^1\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right)$ tem crescimento superlinear no infinito. Este capítulo foi baseado no artigo [18] devido a Kaur e Sreenadh. Diferente do problema dado no Catítulo 2, onde $\beta = 0$, este problema apresenta a singularidade $|x|^{-\beta}$. Assim, não podemos usar a desigualdade de Trudinger-Moser do capítulo anterior. Recorreremos então à versão singular da desigualdade de Trudinger-Moser dada a seguir.

Desigualdade singular de Trudinger-Moser (veja [2] e [35]): Seja $u \in H^1(\Omega)$. Então, para $\beta \in [0,2)$, temos que

$$\sup_{\|u\| \leq 1} \int_\Omega \frac{e^{\alpha u^2}}{|x|^\beta} \, \mathtt{d}x \leq C(\Omega),$$

onde $C(\Omega)$ é uma constante positiva e $\dfrac{\alpha}{2\pi} + \dfrac{\beta}{2} \leq 1$.

Este tipo de problema foi estudado por Adimurthi e Sandeep no artigo [2]. Neste trabalho, que foi motivado pelo artigo de Adimurthi [1], os autores estabeleceram que

$$\sup_{\|\nabla u\|_N \leq 1} \int_\Omega \frac{e^{\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}}}{|x|^\beta} \, \mathtt{d}x < \infty \text{ se, e somente se, } \frac{\alpha}{\alpha_N} + \frac{\beta}{N} \leq 1,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, com $N \geq 2$, $\alpha > 0$ e $\beta \in [0,N)$. Além disso, eles estudaram o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_N u = \dfrac{f(u)u^{N-2}}{|x|^\beta} \\ u \geq 0 \end{cases} \quad \text{em} \quad \Omega,$$

onde f é uma função com crescimento crítico. Recentemente, outros problemas que tratam esta desigualdade foram abordados por M. de Souza [30] e por M. de Souza e J. M. do Ó [32] em domínios limitados. Para o caso de domínios não-limitados, podemos citar os artigos de Adimurthi e Yunyan Yang [4], M. de Souza [31] e suas referências.

Para obtermos a existência e multiplicidade de soluções fracas para as classes de problemas abordadas nos Capítulos 2 e 3, usaremos, inicialmente, métodos variacionais e o método de sub e supersolução para encontrar pontos críticos para os funcionais energia associados, respectivamente, a (P_λ) e (Q_λ). Em seguida, usaremos teoremas do tipo *minimax*, mais precisamente, o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale.

No Apêndice, demonstraremos algumas desigualdades importantes que serão utilizadas ao longo deste trabalho. Estudaremos a diferenciabilidade dos funcionais energia associados aos problemas propostos nos Capítulos 2 e 3. Por fim, provaremos alguns resultados de convergência que serão fundamentais para o desenvolvimento desta dissertação.

No decorrer deste trabalho, faremos referências aos resultados utilizados.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, enunciaremos alguns resultados necessários para uma melhor compreensão deste trabalho.

1.1 Resultados de Medida e Integração

Teorema 1.1.1 ([6], Teorema 5.6 (Convergência Dominada de Lebesgue)) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$ *tal que*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ *quase sempre em* Ω,

(ii) e existe $g \in L^1(\Omega)$ *tal que, para todo* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *quase sempre em* Ω.

Então, $f \in L^1(\Omega)$ *e* $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$. *Consequentemente,*

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}x.$$

Teorema 1.1.2 ([8], Teorema 4.6 (Desigualdade de Hölder)) *Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^{p'}(\Omega)$, *com* $1 \leq p \leq \infty$. *Então,* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Teorema 1.1.3 ([15], Teorema 15.30 (Convergência de Vitali)) *Consideremos* $1 \leq p < +\infty$. *Sejam* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida,* (f_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *e*

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{A}$-mensurável. Então $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu,)$ e $f_n \to f$ em $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu,)$ se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $f_n \to f$ em medida;

(ii) dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $A \in \mathcal{A}$ e $\mu(A) < \delta$ então, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_A |f_n|^p \, \mathrm{d}\mu < \epsilon;$$

(iii) dado $\epsilon > 0$ existe algum $B \in \mathcal{A}$, com $\mu(B) < \infty$, tal que, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{B^c} |f_n|^p \, \mathrm{d}\mu < \epsilon.$$

Teorema 1.1.4 ([15], Teorema 15.2 (Egorov)) *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida tal que $\mu(\Omega) < \infty$ e as funções f_n, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-mensuráveis, sendo f finita. Então $f_n \to f$ quase sempre se, e somente se, $f_n \to f$ quase uniformemente.*

Teorema 1.1.5 ([11], Corolário 4.12) *Se f é uma função não-negativa, mensurável e $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu < \infty$, então f é absolutamente contínua em relação a μ, ou seja, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mu(\Omega) < \delta$ implica $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu < \epsilon$.*

Proposição 1.1.6 ([11], Proposição 3.19) *Se $f_n \to f$ quase uniformemente, então $f_n \to f$ em medida.*

Teorema 1.1.7 ([8], Teorema 4.9) *Sejam (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que*

(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ quase sempre em Ω,

(ii) $|f_{n_k}(x)| \le h(x)$ quase sempre em Ω, para todo $k \in \mathbb{N}$.

1.2 Resultados de Análise Funcional

Em determinados pontos deste trabalho, faremos referência aos seguintes resultados:

Teorema 1.2.1 ([13], Teorema 5.7 (Teorema da Representação de Riesz)) *Seja H um espaço de Hilbert munido do produto interno (x, y), com $x, y \in H$. Dado T um funcional linear e limitado em H, existe um único $z \in H$ tal que $T(x) = (x, z)$, para todo $x \in H$. Além disso, $\|T\| = \|z\|$, onde $\|z\| = (z, z)^{1/2}$.*

Proposição 1.2.2 ([8], Proposição 3.5) *Sejam E um espaço de Banach e (x_n) uma sequência em E. Se $x_n \rightharpoonup x$ em E, então $\|x_n\|$ é limitada e*

$$\|x\| \leq \liminf \|x_n\| .$$

Teorema 1.2.3 ([8], Teorema 3.18) *Se E é um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sequência limitada em E, então existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge na topologia fraca de E.*

1.3 Resultados de Espaços de Sobolev

Teorema 1.3.1 ([8], Teorema 9.16 (Rellich-Kondrachov) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado com fronteira C^1. Então, para todo $p \leq q < \infty$, temos a seguinte injeção compacta:*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ se } p = N.$$

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ com injeção compacta, para todo p e para todo N.

Observação 1.3.2 *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado e $f \in L^p(\Omega)$, então $f \in L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q \leq p$.*

Teorema 1.3.3 ([7], Imersão de Sobolev) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto limitado com fronteira C^1. Então existe um operador linear e contínuo*

$$T : H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$$

para $1 \leq q < \infty$ *tal que* $T(u) = u|_{\partial\Omega}$ *se* $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *(De fato, o operador traço* $T : H^1(\Omega) \to L^q(\partial\Omega)$ *é compacto para* $1 < q < \infty$ *e contínuo para* $q = \infty$*. Para obter estes resultados de compacidade é necessário considerar espaços de Sobolev de Ordem Fracionária).*

Teorema 1.3.4 ([10], Teorema 5.6) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto limitado com fronteira* C^1*. Assuma que* $u \in W^{k,p}(\Omega)$*.*

(i) Se $k < \frac{N}{p}$*, então* $u \in L^q(\Omega)$ *e*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}$ *e* C *é uma constante positiva que depende de* k, p, N *e* Ω*.*

(ii) Se $k > \frac{N}{p}$*, então* $u \in C^{k-\left[\frac{N}{p}\right]-1,\theta}(\overline{\Omega})$ *e*

$$\|u\|_{C^{k-\left[\frac{N}{p}\right]-1,\theta}(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

onde

$$\theta = \begin{cases} \left[\frac{N}{p}\right] + 1 - \frac{N}{p}, & \text{se } \frac{N}{p} \text{ é não-inteiro} \\ \text{um número positivo menor que 1, se } \frac{N}{p} \text{ é inteiro,} \end{cases}$$

e $C = C(k, p, N, \theta, \Omega)$ *é uma constante positiva.*

Proposição 1.3.5 ([29], Proposição A.2.2) *Seja* (u_n) *uma sequência que converge forte em* $H^1(\mathbb{R}^N)$*. Então existe uma subsequência* (u_{n_k}) *de* (u_n) *e existe* $h \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *quase sempre em* $\mathbb{R}^N$*.*

1.4 Resultados da teoria de regularidade

Teorema 1.4.1 ([13], Identidade 2.10 (Representação de Green)) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto limitado com fronteira* C^1 *e sejam* $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$*. Então*

$$\int_\Omega v\Delta u \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu} \, \mathrm{d}S.$$

Teorema 1.4.2 ([13], Teorema 9.9 (Calderon-Zygmund)) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, $f \in L^p(\Omega)$, com $1 < p < +\infty$, e w o potencial Newtoniano de f. Então, $w \in W^{2,p}(\Omega)$, $\Delta w = f$ quase sempre em Ω e*

$$\left\|D^2 w\right\|_p \leq C \left\|f\right\|_p,$$

onde $D^2 w = [D_{ij} w]$ matriz Hessiana das derivadas de segunda ordem $D_{ij} w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, 2, ..., n$ e C é uma constante positiva que depende apenas de n e p. Além disso, quando $p = 2$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|D^2 w\right|^2 \, \mathtt{d}x = \int_{\Omega} f^2 \, \mathtt{d}x.$$

Teorema 1.4.3 ([13], Teorema 8.19) *Sejam $u \in H^1(\Omega)$ e $\Delta u - u \leq 0$ $(\Delta u - u \geq 0)$ em Ω. Se para alguma bola $B \subset\subset \Omega$ vale que*

$$\inf_B u = \inf_\Omega u \geq 0 \left(\sup_B u = \sup_\Omega u \geq 0\right),$$

u é constante em Ω.

Teorema 1.4.4 ([8], Teorema 9.33 (Schauder)) *Suponha que Ω é um domínio de classe $C^{2,\theta}$, $0 < \theta < 1$. Então, para cada $f \in C^{0,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$, existe uma única solução fraca $u \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$ para o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, se Ω é de classe $C^{m+2,\theta}$ ($m \geq 1$ inteiro) e se $f \in C^{m,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$, então $u \in C^{m+2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$, com

$$\|u\|_{C^{m+2,\theta}} \leq C \|f\|_{C^{m,\theta}}.$$

1.5 Resultados da teoria dos pontos críticos

Enunciaremos agora alguns resultados que utilizaremos para encontrar pontos críticos de funcionais associados aos problemas que trataremos nesta dissertação.

Teorema 1.5.1 ([5], Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale) *Seja E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ co $I(0) = 0$. Suponha que existe uma vizinhança U de 0 em E e $\delta > 0$ que satisfazem as seguintes condições:*

(i) *$I(u) \geq \delta$ na fronteira de U,*

(ii) *Existe $e \notin U$ tal que $I(e) < 0$.*

Então, para o número c definido por

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq \delta,$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$, existe uma sequência $(u_n) \subset E$ tal que

$$I(u_n) \to c \text{ e } I'(u_n) \to 0.$$

Teorema 1.5.2 ([33], Teorema 1.2) *Sejam E um espaço de Banach reflexivo, com norma $\|\cdot\|$, e $F \subset E$ um subconjunto fracamente fechado de E. Suponha que o funcional $T : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é coercivo em F com respeito a E, isto é,*

(i) $T(u) \to +\infty$ quando $\|u\| \to +\infty$, para $u \in F$,

e T é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente em F com respeito a E, ou seja,

(ii) dada uma sequência $(u_n) \subset F$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em E, para algum $u \in F$, temos que

$$T(u) \leq \liminf T(u_n).$$

Então T é limitado inferiormente em F e atinge mínimo neste conjunto.

Teorema 1.5.3 ([14], Teorema 1) *Sejam E um espaço de Banach e $\phi : E \to \mathbb{R}$ uma função contínua e Gâteaux diferenciável tal que $\phi' : E \to E^*$ é contínua na topologia forte de E e na toplogia fraca-$*$ de E^*. Sejam $u, v \in E$ e considere*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \Gamma_u^v$ *é o conjunto de todos os caminhos contínuos que ligam* u *a* v*. Suponha que* F *é um subconjunto fechado de* E *tal que* $F \cap \{x \in E : \phi(x) \geq c\}$ *separa* u *e* v*. Então existe uma sequência* $(x_n) \subset E$ *tal que*

(i) $\lim_{n\to\infty} dist\,(x_n, F) = 0$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \phi\,(x_n) = c$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \|\phi'\,(x_n)\|_* = 0.$

Capítulo 2

Sobre uma classe de problemas elípticos em $\mathbb{R}^2$ com condição de Neumann

2.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos a existência e multiplicidade de soluções fracas positivas para a seguinte classe de problemas:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{c} -\Delta u + u = p(u)e^{u^\alpha} \\ u > 0 \end{array}\right\} \text{em} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda \psi u^q \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado com fronteira C^2, $u \in H^1(\Omega)$, $\alpha \in (0, 2]$, $\lambda > 0$, $q \in [0, 1)$ e $p(s)$ é uma pertubação polinomial de e^{u^α}.

A seguir, enunciaremos as principais condições sob as quais (P_λ) será estudado:

(H_1) ψ é uma função Hölder contínua não-negativa e não-trivial em $\partial\Omega$.

(H_2) $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz:

(a) $p(s)$ é localmente Hölder contínua em $\mathbb{R}$;

(*b*) $p(s) \geq 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e $p(s) = 0$ se $s < 0$ e $p'(s) \geq 0$ para todo $s > 0$;

(*c*) $\liminf_{\mathbf{s}\to\infty} \frac{p(\mathbf{s})}{\mathbf{s}} > 0$;

(*d*) $\limsup_{\mathbf{s}\to\infty} \frac{p(\mathbf{s})}{\mathbf{s}^k} = 0$ para algum $k > 1$;

(*e*) $\lim_{s\to 0^+} \frac{p(s)}{s^k} = 0$ para algum $k > 1$;

(*f*) Dado $\epsilon > 0$, $\lim_{s\to\infty} g'(s)e^{-(1+\epsilon)s^\alpha} = 0$, onde $g(s) = p(s)e^{s^\alpha}$.

Para (P_λ), trataremos de não-linearidades com crescimentos crítico e subcrítico, os quais definimos a seguir.

Definição 2.1.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $f(s)$ tem **crescimento subcrítico** em $+\infty$ se*

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{|f(s)|}{e^{\beta s^2}} = 0, \text{ para todo } \beta > 0$$

*e dizemos que $f(s)$ tem **crescimento crítico** em $+\infty$ se existe $\beta_0 > 0$ tal que*

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{|f(s)|}{e^{\beta s^2}} = \begin{cases} 0, \text{ para todo } \beta > \beta_0, \\ +\infty, \text{ para todo } \beta < \beta_0. \end{cases}$$

*β_0 é chamado **expoente crítico** de $f(s)$.*

Observação 2.1.2 *Essa noção de criticalidade do tipo exponencial foi introduzida nos trabalhos de* [1], [3], [12] *e* [22].

Observação 2.1.3 *Ao longo deste capítulo, omitiremos algumas provas para o caso em que $\alpha \in (0, 2)$, uma vez que, a demonstração segue de maneira similar ao caso $\alpha = 2$.*

Notemos que, sob as hipóteses $(H_1) - (H_2)$, $g(s) = p(s)e^{s^\alpha}$ tem crescimento crítico em $+\infty$ quando $\alpha = 2$ e crescimento subcrítico em $+\infty$ quando $\alpha \in [0, 2)$.

Com efeito, considerando $\alpha = 2$ e observando a hipótese $(H_2)(b)$, para $\beta > 1$, temos

$$\lim_{s\to\infty} \frac{p(s)e^{s^2}}{e^{\beta s^2}} = \lim_{s\to\infty} p(s)e^{s^2(1-\beta)} = 0$$

e, para $\beta < 1$,

$$\lim_{s\to\infty} p(s)e^{s^2(1-\beta)} = +\infty.$$

Consequentemente, $\beta_0 = 1$ é o expoente crítico de $g(s)$.

Para $\alpha \in [0,2)$, temos que

$$\lim_{s\to\infty} p(s)e^{s^\alpha}e^{-\beta s^2} = 0, \text{ para todo } \beta > 0.$$

Neste caso, $g(s)$ tem crescimento subcrítico em $+\infty$.

No teorema seguinte, apresentaremos o resultado principal deste capítulo.

Teorema 2.1.4 *Sob as hipóteses $(H_1) - (H_2)$, existe $0 < \Lambda < \infty$ tal que (P_λ) tem pelo menos duas soluções fracas positivas para todo $\lambda \in (0,\Lambda)$, nenhuma solução fraca positiva para $\lambda > \Lambda$ e pelo menos uma solução fraca positiva para $\lambda = \Lambda$.*

Observação 2.1.5 *Destacamos que os resultados deste capítulo são baseados nos artigos* [25] *e* [26] *devidos a S. Prashanth e K. Sreenadh.*

Como estamos interessados em encontrar soluções fracas positivas, consideraremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = p(u)e^{u^\alpha} & \text{em} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = f(u) & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde

$$f(u) = \begin{cases} \lambda\psi u^q, & u \geq 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases}$$

2.1.1 Desigualdade de Trudinger-Moser

Um resultado muito importante que será usado ao longo deste capítulo é a desigualdade de Trudinger-Moser (ver [1], [20] e [34]) dada no Teorema 2.1.8. Para provar este teorema usaremos o lema e o teorema seguintes.

Lema 2.1.6 *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^2$ com fronteira $C^{1,\alpha}$. Para cada $x_0 \in \partial\Omega$, podemos encontrar um $L > 0$ tal que, para cada n tal que $0 < \frac{1}{n} < L$, existe uma função $\omega_n \in H^1(\Omega)$ satisfazendo*

(a) $\omega_n \geq 0$ *e* $supp(\omega_n) \subset B_L(x_0) \cap \overline{\Omega}$

(b) $\|\omega_n\| = 1$

(c) para todo $x \in B_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap \overline{\Omega}$, ω_n *é constante e* $\omega_n^2(x) = \frac{1}{\pi}\ln(nL) + o(1)$, *quando* $n \to \infty$,

onde $B_L(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < L\}$.

Demonstração: Veja Lema 3.3 em [3]. ■

Teorema 2.1.7 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com fronteira C^2 e $u \in H^1(\Omega)$. Sejam*

$$\|\nabla u\|_2^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x,$$

$$m_1(u) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u \, \mathrm{d}x,$$

$$v_1 = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u \, \mathrm{d}x = 0 \right\}$$

e

$$A_1 = \left\{ \delta : \sup_{u \in v_1,\ \|\nabla u\|_2 \leq 1} \int_\Omega e^{\delta u^2} \, \mathrm{d}x < \infty \right\},$$

então $\sup A_1 = 2\pi$.

Demonstração: Veja Teorema 4.1 em [3]. ■

Teorema 2.1.8 *Seja $u \in H^1(\Omega)$. Então, para todo $\beta > 0$, vale que*

$$\int_\Omega e^{\beta u^\alpha} \, \mathrm{d}x \leq C, \tag{2.1}$$

onde $C = C(u, \Omega)$ é uma constante positiva e $\alpha \in (0, 2]$. Além disso,

$$\sup\left\{ \beta : \sup_{\|u\| \leq 1} \int_\Omega e^{\beta u^2} \, \mathrm{d}x < \infty \right\} = 2\pi, \tag{2.2}$$

com $\|u\| = \left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) \, dx\right)^{1/2}$.

Demonstração: Para provar (2.1), consideremos $R > 0$ tal que $\overline{\Omega} \subset B_R(0)$ e $H^1(\Omega) = \{u|_\Omega : u \in H_0^1(B_R(0))\}$. Por Moser [20], obtemos que se $u \in H_0^1(B_R(0)$, então $e^{\beta u^2} \in L^1((B_R(0))$, com $\beta > 0$. Como R é arbitrário, temos que $e^{\beta u^2} \in L^1(\Omega)$, com $\beta > 0$. Sendo $\alpha \in (0,2]$, temos que

$$\int_\Omega e^{\beta u^\alpha}\ \mathrm{d}x \leq \int_\Omega e^{\beta u^2}\ \mathrm{d}x \leq C,$$

onde $C = C(u,\Omega)$.

Agora, para provar (2.2), definamos

$$\widetilde{A}_1 = \left\{\beta : \sup_{\|u\|\leq 1} \int_\Omega e^{\beta u^2}\ \mathrm{d}x < \infty\right\}.$$

Dado $\beta < 2\pi$, escolhamos $\epsilon > 0$ tal que $\beta(1+\epsilon)^2 < 2\pi$. Dados

$$c_1 = \sup_{\|u\|\leq 1} |m_1(u)| \ \text{ e } c_2 = \sup_{\|\nabla\varphi\|_2 \leq 1,\ m_1(u)=0} \int_\Omega e^{\beta(1+\epsilon)^2\varphi^2}\ \mathrm{d}x,$$

onde $m_1(u)$ está definido no Teorema 2.1.7. Por este lema, $c_2 < +\infty$. Seja $u \in H^1(\Omega)$, com $\|u\| \leq 1$. Então, $\|\nabla u\|_2 \leq \|u\| \leq 1$. Escrevendo $\varphi = u - m_1(u)$, temos que $\varphi \in v_1$, pois

$$\int_\Omega \varphi\ \mathrm{d}x = \int_\Omega [u - m_1(u)]\ \mathrm{d}x = \int_\Omega u\ \mathrm{d}x - \frac{1}{|\Omega|}|\Omega| \int_\Omega u\ \mathrm{d}x = 0.$$

Além disso, $\|\nabla\varphi\|_2 = \|\nabla u\|_2 \leq \|u\| \leq 1$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_\Omega e^{\beta u^2}\ \mathrm{d}x &= \int_\Omega e^{\beta(\varphi+m_1(u))^2}\ \mathrm{d}x \leq \int_\Omega e^{\beta(|u|+c_1)^2}\ \mathrm{d}x \leq \int_\Omega e^{\beta(1+\epsilon)^2\varphi^2}\ \mathrm{d}x \\ &\leq \int_{|\varphi|\geq\frac{c_1}{\epsilon}} e^{\beta(1+\epsilon)^2\varphi^2}\ \mathrm{d}x + \int_{|\varphi|\leq\frac{c_1}{\epsilon}} e^{\beta(1+\epsilon)^2\varphi^2}\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Disto, e do fato de $\|\nabla\varphi\|_2 \leq 1$, obtemos

$$\int_\Omega e^{\beta u^2}\ \mathrm{d}x \leq c_2 + |\Omega|\, e^{\beta c_1^2\left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)^2},$$

o que implica que $\beta \in \widetilde{A}_1$. Logo, $\sup \widetilde{A}_1 \geq 2\pi$.

Afirmação: $\sup \widetilde{A}_1 = 2\pi$.

Com efeito, suponhamos que $\sup \widetilde{A}_1 \neq 2\pi$. Como $\sup \widetilde{A}_1 \geq 2\pi$, temos que $\sup \widetilde{A}_1 > 2\pi$. Seja $\epsilon > 0$ tal que $\beta = (1+\epsilon)2\pi < \sup \widetilde{A}_1$ e

$$c_3 = \sup_{\|u\|\leq 1} \int_\Omega e^{\beta u^2}\ \mathrm{d}x.$$

Consideremos a sequência (ω_n) dada no Lema 2.1.6. Então,

$$c_3 \geq \int_\Omega e^{\beta\omega_n^2}\ \mathrm{d}x \geq \int_{B_{\frac{1}{n}}(x_0)\cap\overline{\Omega}} e^{(1+\epsilon)2\pi\omega_n^2}\ \mathrm{d}x \geq \left|B_{\frac{1}{n}}(x_0)\cap\overline{\Omega}\right| e^{(1+\epsilon)2\pi\omega_n^2(x_0)}.$$

Logo, para n suficientemente grande, temos que

$$c_3 \geq \left|B_{\frac{1}{n}}(x_0)\cap\overline{\Omega}\right| e^{(1+\epsilon)2\ln(nL)} = C\,(nL)^{2(1+\epsilon)}.$$

Quando $n \to +\infty$, o lado direito da desigualdade anterior tende para mais infinito, o que é uma contradição, pois $c_3 < +\infty$. Portanto, a afirmação segue. ■

2.2 Formulação variacional

Para obtermos a formulação variacional de (P_λ), assumiremos inicialmente que u é uma função de classe $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Assim, multiplicando (P_λ) por uma função $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, obtemos

$$-\Delta u\varphi + u\varphi = p(u)e^{u^\alpha}\varphi \text{ em } \Omega \text{ e } \frac{\partial u}{\partial\nu}\varphi = \lambda\psi u^q\varphi \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Integrando estas equações, temos

$$\int_\Omega -\Delta u\varphi\ \mathrm{d}x + \int_\Omega u\varphi\ \mathrm{d}x = \int_\Omega p(u)e^{u^\alpha}\varphi\ \mathrm{d}x \text{ e } \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}\varphi\ \mathrm{d}x = \lambda\int_{\partial\Omega}\psi u^q\varphi\ \mathrm{d}x.$$

Pelo Teorema de Green,

$$\int_\Omega -\Delta u\varphi\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}\varphi\ \mathrm{d}x.$$

Logo,

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}\varphi\ \mathrm{d}x + \int_\Omega u\varphi\ \mathrm{d}x = \int_\Omega p(u)e^{u^\alpha}\varphi\ \mathrm{d}x.$$

Disto, segue que, para qualquer $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$,

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\ \mathrm{d}x + \int_\Omega u\varphi\ \mathrm{d}x - \int_\Omega p(u)e^{u^\alpha}\varphi\ \mathrm{d}x - \lambda\int_{\partial\Omega}\psi u^q\varphi\ \mathrm{d}x = 0.$$

Então, por um argumento de densidade, obtemos que, para toda $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\ \mathrm{d}x + \int_\Omega u\varphi\ \mathrm{d}x - \int_\Omega p(u)e^{u^\alpha}\varphi\ \mathrm{d}x - \lambda\int_{\partial\Omega}\psi u^q\varphi\ \mathrm{d}x = 0. \tag{2.3}$$

Motivados por (2.3), temos a seguinte definição:

Definição 2.2.1 *Dizemos que $u \in H^1(\Omega)$ é solução fraca de (P_λ) se satisfaz a igualdade (2.3), para toda $\varphi \in H^1(\Omega)$.*

Seja $J_\lambda : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional dado por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right)\, dx - \int_\Omega G(u)\, dx - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\partial\Omega} \psi\, |u|^{q+1}\, dx,$$

onde

$$G(s) = \int_0^s g(t)\, dt \text{ e } g(t) = p(t)e^{t^\alpha}. \tag{2.4}$$

Pelo Apêndice (A.9), temos que, para cada $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$J'_\lambda(u)\,\varphi = \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi\, dx + \int_\Omega u\varphi\, dx - \int_\Omega g(u)\varphi\, dx - \lambda\int_{\partial\Omega} \psi\, |u|^{q-1}\, u\varphi\, dx. \tag{2.5}$$

Consequentemente, pontos críticos de J_λ são soluções fracas de (P_λ).

2.3 Existência de um mínimo local para J_λ, para $\lambda \in (0, \lambda_0)$

Nesta seção, mostraremos que J_λ possui um mínimo local numa vizinhança da origem de $H^1(\Omega)$ quando λ é positivo e pequeno. O lema a seguir, será essencial para garantir a existência de tal mínimo.

Lema 2.3.1 *Assumindo as hipóteses $(H_1) - (H_2)$, existem $\lambda_0 > 0$, $R_0 \in (0, \sqrt{\pi})$ e $\delta > 0$ tal que $J_\lambda(u) \geq \delta$ para todo $\|u\| = R_0$ e $\lambda \in (0, \lambda_0)$.*

Demonstração: Pela hipótese $(H_2)(d)$, temos que, dado $\epsilon > 0$, existe $s_\epsilon > 0$ tal que $|p(s)| \leq \epsilon s^k$, para todo $s \geq s_\epsilon$ e para algum $k > 1$. Assim, $|g(s)| \leq \epsilon s^k e^{s^2}$, para todo $s \geq s_\epsilon$ e para algum $k > 1$. Por outro lado, pela hipótese $(H_2)(e)$, temos que $\lim_{s\to 0^+} \frac{p(s)}{s^k} = 0$. Assim, dado $\epsilon_1 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|p(s)| \leq \epsilon_1 s^k$, para todo $s \in (0, \delta]$ e para algum $k > 1$. Logo, $|g(s)| \leq \epsilon_1 s^k e^{s^2}$, para todo $s \in (0, \delta]$ e para algum $k > 1$. Para o caso em que $s \leq 0$, temos $g(s) = 0$ e a estimativa anterior vale. Além disso, desde que $\frac{g(s)}{s^k e^{s^2}}$ é contínua sobre $[\delta, s_\epsilon]$, pelo Teorema de Weierstrass, existe constante positiva $C_1(\delta, \epsilon)$ tal que $|g(s)| \leq C_1(\delta, \epsilon)\, |s|^k\, e^{s^2}$, para $s \in [\delta, s_\epsilon]$. Então, fazendo $C = \max\{\epsilon, \epsilon_1, C_1(\delta, \epsilon)\}$, obtemos $|g(s)| \leq C\,|s|^k e^{s^2}$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Assim,

$$G(s) = \int_0^s g(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_0^s C\,|t|^k e^{t^2}\ \mathrm{d}t \leq C\,|s|^k e^{s^2} \int_0^s\ \mathrm{d}t = C\,|s|^{k+1} e^{s^2}.$$

Integrando esta última estimativa e usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G(u)\ \mathrm{d}x &\leq C \int_\Omega |u|^{k+1} e^{u^2}\ \mathrm{d}x \leq C \left(\int_\Omega |u|^{2(k+1)}\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{(k+1)}{2(k+1)}} \left(\int_\Omega e^{2u^2}\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C \left[\left(\int_\Omega |u|^{2(k+1)}\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2(k+1)}}\right]^{k+1} \left(\int_\Omega e^{2\|u\|^2\left(\frac{u}{\|u\|}\right)^2}\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C\,\|u\|^{k+1}_{L^{2(k+1)}(\Omega)} \left(\int_\Omega e^{2\|u\|^2\left(\frac{u}{\|u\|}\right)^2}\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Agora, escolhamos $R > 0$ tal que $R^2 \leq \pi$. Então, pela desigualdade de Trudinger-Moser (2.2), temos que, para $\|u\| \leq R$,

$$\int_\Omega e^{2\|u\|^2\left(\frac{u}{\|u\|}\right)^2}\ \mathrm{d}x < \infty.$$

Disto e da imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [1,+\infty)$, obtemos que, para todo $\|u\| \leq R$ e para algum $C_1 > 0$,

$$\int_\Omega G(u)\ \mathrm{d}x \leq C_1\,\|u\|^{k+1}. \tag{2.6}$$

Usando a imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [1,+\infty)$ e o fato de que ψ é contínua em $\partial\Omega$, obtemos

$$\int_{\partial\Omega} \psi\,|u|^{q+1}\,\mathrm{d}x \leq \|\psi\|_\infty \int_{\partial\Omega} |u|^{q+1}\,\mathrm{d}x = \|\psi\|_\infty\,\|u\|^{q+1}_{L^{q+1}(\partial\Omega)} \leq C_2\,\|u\|^{q+1}. \tag{2.7}$$

Desta estimativa e de (2.6), segue que, para $R_0^2 \in (0, \pi)$ e para todo $\|u\| = R_0$,

$$J_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}\,\|u\|^2 - C_1\,\|u\|^{k+1} - \lambda C_2\,\|u\|^{q+1}. \tag{2.8}$$

Como $k > 1$, escolhamos e fixemos $R_0^2 \in (0, \pi)$ e $\lambda_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que, para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$,

$$\delta := \frac{1}{2}R_0^2 - C_1 R_0^{k+1} - \lambda C_2 R_0^{q+1} > 0.$$

Com tais escolhas para R_0 e para λ_0, por (2.8), obtemos $\delta > 0$ tal que, para todo $\|u\| = R_0$, $J_\lambda(u) \geq \delta$. ∎

Lema 2.3.2 *Sob as hipóteses $(H_1) - (H_2)$, temos que, para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$, J_λ possui um mínimo local próximo a origem de $H^1(\Omega)$.*

Demonstração: Sejam R_0, λ_0 e δ como no Lema 2.3.1. Dado $\lambda \in (0, \lambda_0)$, notemos que, para $t > 0$ pequeno, tem-se $J_\lambda\,(tu) < 0$, para $u \in H^1(\Omega)\backslash\{0\}$. De fato,

$$\begin{aligned} J_\lambda\,(tu) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla tu|^2 + |tu|^2\right)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega G(tu)\ \mathrm{d}x\ - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\partial\Omega} \psi\,|tu|^{q+1}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{t^2}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega G(tu)\ \mathrm{d}x\ - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1}\int_{\partial\Omega} \psi\,|u|^{q+1}\ \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Sendo $g(s) \geq 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$, temos $G(s) \geq 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Além disso, como $q + 1 < 2$, temos $t^2 < t^{q+1}$, para $t > 1$ e, consequentemente,

$$\frac{\lambda t^{q+1}}{q+1}\int_{\partial\Omega} \psi\,|u|^{q+1}\ \mathrm{d}x > \frac{t^2}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right)\ \mathrm{d}x,$$

para t suficientemente pequeno. Assim,

$$J_\lambda\,(tu) \leq \frac{t^2}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right)\ \mathrm{d}x - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1}\int_{\partial\Omega} \psi\,|u|^{q+1}\ \mathrm{d}x < 0,$$

para $t > 0$ suficientemente pequeno. Em particular, temos $J_\lambda\,(u) < 0$, para algum $u \in H^1(\Omega)$ com $\|u\| \leq R_0$. Se J_λ atingir mínimo local em algum u_λ, com $\|u_\lambda\| \leq R_0$, então $\|u_\lambda\| < R_0$, pois, pelo Lema 2.3.1, $J_\lambda\,(u) \geq \delta > 0$, para $\|u\| = R_0$.

Nosso objetivo agora é mostrar que J_λ atinge um mínimo local para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

Com efeito, consideremos $B_{R_0} := \{u \in H^1(\Omega) : \|u\| \leq R_0\}$ e uma sequência $(u_n) \subset B_{R_0}$ tal que

$$J_\lambda\,(u_n) \searrow \inf_{u \in B_{R_0}} J_\lambda\,(u) = a. \tag{2.10}$$

Sendo $H^1(\Omega)$ um espaço reflexivo e a sequência (u_n) limitada em $H^1(\Omega)$, pelo Teorema 1.2.3, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_\lambda$ em $H^1(\Omega)$. Logo, pela Proposição 1.2.2, $\|u_\lambda\| \leq \liminf \|u_n\|$. Consequentemente,

$$\|u_\lambda\|^2 \leq \liminf \|u_n\|^2 \leq R_0^2. \tag{2.11}$$

Afirmação: J_λ é limitado em B_{R_0}.

De fato, seja $u \in B_{R_0}$. Assim, por (2.6) e (2.7), existem C_1, $C_2 > 0$ tais que

$$\int_\Omega |G(u)| \ \mathrm{d}x \leq C_1 R_0^{k+1} \text{ e } \int_{\partial\Omega} \psi \, |u|^{q+1} \ \mathrm{d}x \leq C_2 R_0^{q+1}.$$

Então,

$$\begin{aligned} |J_\lambda (u)| &\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \int_\Omega |G(u)| \ \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q+1} \int_{\partial\Omega} |\psi| \, |u|^{q+1} \ \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{2} R_0^2 + C_1 R_0^{k+1} + \frac{\lambda C_2}{q+1} R_0^{q+1} \end{aligned}$$

e a afirmação segue.

Em seguida, mostraremos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega G(u_n) \ \mathrm{d}x = \int_\Omega G(u_\lambda) \ \mathrm{d}x.$$

De fato, pelo item (i) do Lema A.1.3, existe $C > 0$ tal que $|g\,(u_n)| \leq Ce^{2u_n^2}$. Disto e do item (i) do Lema A.1.1, segue que $|G\,(u_n)| \leq Ce^{2u_n^2}$. Consequentemente,

$$\int_\Omega |G\,(u_n)\, u_n| \ \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega e^{2u_n^2} \, |u_n| \ \mathrm{d}x. \tag{2.12}$$

Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\int_\Omega e^{2u_n^2} \, |u_n| \ \mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega e^{2pu_n^2} \ \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |u_n|^{p'} \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_\Omega e^{2p\|u_n\|^2 \left(\frac{u_n}{\|u_n\|} \right)^2} \ \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \|u_n\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

com $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Assim, usando a imersão contínua de Sobolev $H^1\,(\Omega) \hookrightarrow L^s\,(\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, segue que

$$\int_\Omega e^{2u_n^2} \, |u_n| \ \mathrm{d}x \leq C \left(\int_\Omega e^{2p\|u_n\|^2 \left(\frac{u_n}{\|u_n\|} \right)^2} \ \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \|u_n\|.$$

Por outro lado, como $\|u_n\|^2 \leq R_0^2 < \pi$, existe $p > 1$ tal que $2p\,\|u_n\|^2 \leq 2\pi$. Então, usando a desigualdade de Trudinger-Moser (2.2) e o fato de (u_n) ser limitada em $H^1\,(\Omega)$, obtemos da desigualdade anterior que

$$\int_\Omega e^{2u_n^2} \, |u_n| \ \mathrm{d}x < \infty.$$

Desta estimativa e de (2.12) segue que

$$\sup_n \int_\Omega |G\,(u_n)\, u_n| \ \mathrm{d}x < \infty.$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u_\lambda$ em $H^1(\Omega)$, pela imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [2, +\infty)$, a menos de subsequência, $u_n \to u_\lambda$ em $L^2(\Omega)$. Como Ω é limitado, $u_n \to u_\lambda$ em $L^1(\Omega)$. Além disso, pelo item (iii) do Lema A.1.3, $g(u_n)$, $g(u_\lambda) \in L^1(\Omega)$. E, deste resultado e do item (i) do Lema A.1.1, segue que $G(u_n)$, $G(u_\lambda) \in L^1(\Omega)$. Assim, usando o item (i) do Lema A.3.1,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega G(u_n)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega G(u_\lambda)\ \mathrm{d}x. \tag{2.13}$$

Em seguida, mostraremos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} \psi\, |u_n|^{q+1}\ \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \psi\, |u_\lambda|^{q+1}\ \mathrm{d}x. \tag{2.14}$$

Com efeito, como $(u_n) \subset H^1(\Omega)$, pela imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$, $(u_n) \subset L^2(\partial\Omega)$. Sendo Ω limitado, $(u_n) \subset L^{q+1}(\partial\Omega)$, para todo $q \in [0, 1)$. Assim, $|u_n|^{q+1} \in L^1(\partial\Omega)$, para todo $q \in [0, 1)$. Então,

$$\int_{\partial\Omega} \psi\, |u_n|^{q+1}\ \mathrm{d}x \leq \|\psi\|_\infty \int_{\partial\Omega} |u_n|^{q+1}\ \mathrm{d}x < \infty.$$

Consequentemente, para todo $q \in [0, 1)$, $\psi\, |u_n|^{q+1} \in L^1(\partial\Omega)$ e, uma vez que, $u_n \rightharpoonup u_\lambda$ em $H^1(\Omega)$, pela imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$, a menos de subsequência, $u_n \to u_\lambda$ em $L^2(\partial\Omega)$. Logo, pelo Teorema 1.1.7, a menos de subsequência, $u_n(x) \to u_\lambda(x)$ quase sempre sobre $\partial\Omega$ e existe $h \in L^2(\partial\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq h(x)$ quase sempre sobre $\partial\Omega$. Assim,

$$\left| \left(\psi\, |u_n|^{q+1}\right)(x) - \left(\psi\, |u_\lambda|^{q+1}\right)(x) \right| \to 0$$

e

$$\begin{aligned} \left| \left(\psi \left(|u_n|^{q+1} - |u_\lambda|^{q+1}\right)\right)(x) \right| &\leq |\psi(x)| \left(|u_n(x)|^{q+1} + |u_\lambda(x)|^{q+1}\right) \\ &\leq \|\psi\|_\infty \left(h^{q+1}(x) + |u_\lambda(x)|^{q+1}\right) \end{aligned}$$

quase sempre em $\partial\Omega$. Agora, como h, $u_\lambda \in L^2(\partial\Omega)$ e Ω é limitado, temos que h, $u_\lambda \in L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [1, 2]$. Como $q+1 \in [1, 2)$, então h, $u_\lambda \in L^{q+1}(\partial\Omega)$. Logo, h^{q+1}, $u_\lambda^{q+1} \in L^1(\partial\Omega)$. Portanto, $\|\psi\|_\infty h^{q+1} + |u_\lambda|^{q+1} \in L^1(\partial\Omega)$. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} \psi\, |u_n|^{q+1}\ \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \psi\, |u_\lambda|^{q+1}\ \mathrm{d}x.$$

Além disso, desde que $\|u_n\| \leq R_0$, pelo Teorema de Weierstrass, a menos de subsequência, $\|u_n\|$ converge e deste fato, juntamente com os resultados obtidos em (2.13) e (2.14), segue de (2.10) que

$$\frac{1}{2} \lim_n \|u_n\|^2 = a + \int_\Omega G(u_\lambda) + \frac{\lambda}{q+1} \int_{\partial\Omega} \psi \, |u_\lambda|^{q+1} .$$

Consequentemente, por (2.11), temos

$$\frac{1}{2} \|u_\lambda\|^2 \leq a + \int_\Omega G(u_\lambda) + \frac{\lambda}{q+1} \int_{\partial\Omega} \psi \, |u_\lambda|^{q+1} ,$$

o que implica que $J_\lambda (u_\lambda) \leq a$. Por outro lado, $J_\lambda (u_\lambda) \geq a$. Assim, $J_\lambda (u_\lambda) = a$ e u_λ é mínimo local para J_λ próximo à origem do $H^1 (\Omega)$. ■

2.3.1 Regularidade das soluções

Nosso objetivo agora é obter um resultado de regularidade para as soluções fracas de (P_λ).

Lema 2.3.3 *Seja u_λ uma solução fraca de (P_λ). Então, $u_\lambda \geq 0$ quase sempre em Ω.*

Demonstração: Desde que u_λ é uma solução fraca de (P_λ), considerando $\varphi = u_\lambda^-$ como função teste em (2.5), obtemos

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla u_\lambda^- \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u_\lambda u_\lambda^- \, \mathrm{d}x = \int_\Omega g(u_\lambda) u_\lambda^- \, \mathrm{d}x + \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \, |u_\lambda|^{q-1} u_\lambda u_\lambda^- \, \mathrm{d}x.$$

Pela hipótese $(H_2)(b)$, temos que, em $A^- := \{x \in \Omega : \ u_\lambda (x) < 0\}$, $g (u_\lambda) = 0$. Logo,

$$\int_{A^-} g(u_\lambda) u_\lambda^- \, \mathrm{d}x = 0$$

e, em $A^+ := \{x \in \Omega : \ u_\lambda (x) \geq 0\} = \big\{x \in \Omega : \ u_\lambda^- (x) = 0\big\}$,

$$\int_{A^+} g(u_\lambda) u_\lambda^- \, \mathrm{d}x = 0.$$

Assim, em $\Omega = A^+ \cup A^-$,

$$\int_\Omega g(u_\lambda) u_\lambda^- \, \mathrm{d}x = 0.$$

Agora, usando a função

$$h(u) = \begin{cases} \psi\,|u|^{q-1}\,u, & u > 0, \\ 0, & u \leq 0, \end{cases}$$

e defindo os conjuntos $B^- := \{x \in \partial\Omega : \ u_\lambda(x) < 0\}$ e $B^+ := \{x \in \partial\Omega : \ u_\lambda(x) \geq 0\}$, concluímos, de forma análoga ao caso anterior, que

$$\int_{\partial\Omega} \psi\,|u_\lambda|^{q-1}\,u_\lambda u_\lambda^- \ \mathrm{d}x = 0,$$

em $\partial\Omega = B^+ \cup B^-$. Destes resultados e usando que

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla u_\lambda^- \ \mathrm{d}x + \int_\Omega u_\lambda u_\lambda^- \ \mathrm{d}x = -\left(\int_\Omega \left|\nabla u_\lambda^-\right|^2 \ \mathrm{d}x + \int_\Omega \left|u_\lambda^-\right|^2 \ \mathrm{d}x\right) = -\left\|u_\lambda^-\right\|^2,$$

obtemos que $\left\|u_\lambda^-\right\| = 0$. Logo, $u_\lambda^- = 0$ quase sempre em Ω e, portanto, $u_\lambda = u_\lambda^+ - u_\lambda^- = u_\lambda^+ \geq 0$ quase sempre em Ω. ■

O lema seguinte será muito usado ao longo deste trabalho. Para uma prova, confira [19].

Lema 2.3.4 *Seja $u \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$, para algum $\theta \in (0,1)$, com $u \geq 0$ e $u \neq 0$. Se $-\Delta u + u \geq 0$ em Ω no sentido fraco e $\frac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0$ sobre $\partial\Omega$, então $u > 0$ em $\overline{\Omega}$.*

Demonstração: Segue do Lema de Hopf (ver [10]) em combinação com o Teorema 1.3 em [19]. ■

Lema 2.3.5 *Seja $u \in C^2(\Omega)$. Se*

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi) \ \mathrm{d}x \geq 0, \tag{2.15}$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, então $-\Delta u + u \geq 0$ em Ω no sentido fraco.

Demonstração: Se $u \in C^2(\Omega)$, dado $x_0 \in \Omega$, existe $2R > 0$ tal que $\overline{B}_R(x_0) \subset \Omega$, pois Ω é limitado. Assim, $u \in C^2\left(\overline{B}_R(x_0)\right)$. Logo, pelo Teorema 1.4.1,

$$\int_{B_R(x_0)} (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi) \ \mathrm{d}x = -\int_{B_R(x_0)} (\Delta u - u)\,\varphi \ \mathrm{d}x,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(B_R(x_0))$. Da igualdade anterior e desde que (2.15) ocorra, obtemos

$$-\int_{B_R(x_0)} (\Delta u - u)\,\varphi \ \mathrm{d}x \geq 0,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(B_R(x_0))$, $\varphi \geq 0$. Assim, $-\Delta u + u \geq 0$ em $B_R(x_0)$. Logo, $-\Delta u(x_0) + u(x_0) \geq 0$ para $x_0 \in \Omega$. Como x_0 é arbitrário, temos que $-\Delta u + u \geq 0$ em Ω. ■

Lema 2.3.6 *Seja u_λ solução fraca de (P_λ). Então $u_\lambda \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$ para algum $\theta \in (0,1)$. Além disso, se u_λ é não-trivial, então $u_\lambda > 0$ em $\overline{\Omega}$.*

Demonstração: Seja u_λ solução fraca de (P_λ). Provaremos inicialmente que $p(u_\lambda)e^{u_\lambda^2} - u_\lambda \in L^p(\Omega)$, para todo $1 < p < +\infty$. De fato, usando que $g(u_\lambda) = p(u_\lambda)e^{u_\lambda^2}$ e o item (i) do Lema A.1.3, temos que

$$\int_\Omega |g(u_\lambda)|^p \, \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega e^{p\beta u_\lambda^2} \, \mathrm{d}x,$$

com $\beta > 0$ e $1 < p < +\infty$. Agora, usando a desigualdade de Trudinger-Moser (2.1), temos que $\int_\Omega e^{p\beta u_\lambda^2} \, \mathrm{d}x < \infty$. Assim,

$$\int_\Omega |g(u_\lambda)|^p \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Logo, $g(u_\lambda) \in L^p(\Omega)$ para todo $1 < p < +\infty$. Pela imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, temos que $u_\lambda \in L^p(\Omega)$ para todo $1 < p < +\infty$. Assim, $g(u_\lambda) - u_\lambda \in L^p(\Omega)$ para todo $1 < p < +\infty$. Logo, pelo Teorema de Calderon-Zygmund (Teorema 1.4.2), $u_\lambda \in W^{2,p}(\Omega)$ e $-\Delta u_\lambda = p(u_\lambda)e^{u_\lambda^2} - u_\lambda$ quase sempre em Ω.

Escolhamos p de modo que $\frac{2}{p} < 1$ e $\frac{2}{p}$ seja não-inteiro. Assim, $2 > \frac{2}{p}$ e, desde que $u_\lambda \in W^{2,p}(\Omega)$, pelo Teorema 1.3.4, temos que $u_\lambda \in C^{2-\left[\frac{2}{p}\right]-1,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$, com $\theta = \left[\frac{2}{p}\right] + 1 - \frac{2}{p}$. Então, $u_\lambda \in C^{1,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$. Além disso, como $u_\lambda \in C^{1,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$ temos que $u_\lambda \in C^{0,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$ e, por composição, $g(u_\lambda) \in C^{0,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$. Então, pelo Teorema de Schauder (Teorema 1.4.4), $u_\lambda \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$, para algum $\theta \in (0,1)$. Agora, sendo $u_\lambda \in C^2(\Omega)$ solução fraca de (P_λ), temos que

$$\int_\Omega (\nabla u_\lambda \nabla \varphi + u_\lambda \varphi) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega g(u_\lambda)\varphi \, \mathrm{d}x + \lambda \int_{\partial\Omega} \psi |u_\lambda|^q \varphi \, \mathrm{d}x \geq 0,$$

para cada $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Assim, pelo Lema 2.3.5, $-\Delta u_\lambda + u_\lambda \geq 0$ em Ω no sentido fraco. Além disso, $\frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} = f(u_\lambda) \geq 0$ sobre $\partial\Omega$ e, desde que u_λ é não-trivial, pelo Lema 2.3.4, obtemos que $u_\lambda > 0$ em $\overline{\Omega}$. ■

2.4 Não existência de solução

Definamos

$$\Lambda := \sup \{\lambda > 0 : (P_\lambda) \text{ tem solução fraca}\} . \tag{2.16}$$

O lema a seguir garantirá que, para $\lambda > \Lambda$, (P_λ) não tem solução fraca.

Lema 2.4.1 *Seja* Λ *definido em* (2.16)*. Então* $0 < \Lambda < \infty$*.*

Demonstração: Seja u_λ solução fraca de (P_λ). Façamos $\varphi = 1$ como função teste em (2.5). Então, por (2.3), obtemos

$$\int_\Omega u_\lambda \, \mathrm{d}x = \int_\Omega g(u_\lambda) \, \mathrm{d}x + \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_\lambda^q \, \mathrm{d}x. \tag{2.17}$$

Como $u_\lambda \in H^1(\Omega)$, pela imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, temos que $u_\lambda \in L^s(\Omega)$, para todo $s \geq 1$. Como Ω é limitado, existe $C_1 = C_1(p, \Omega) > 0$ tal que

$$\|u_\lambda\|_{L^1(\Omega)} \leq C_1 \|u_\lambda\|_{L^p(\Omega)} ,$$

para todo $p > 1$. Mostraremos agora que existe $C_2 = C_2(p, \Omega) > 0$ tal que

$$\int_\Omega g(u_\lambda) \, \mathrm{d}x \geq C_2 \|u_\lambda\|_{L^p(\Omega)}^p . \tag{2.18}$$

Com efeito, prova-se facilmente que, para todo $s \geq 0$ e $p \geq 1$, existe $C = C(p, \Omega) > 0$ tal que $s^p \leq Cp(s) e^{s^2}$. Consequentemente,

$$\int_\Omega u_\lambda^p \, \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega g(u_\lambda) \, \mathrm{d}x,$$

donde obtém-se a desigualdade (2.18), com $C_2 = \frac{1}{C}$. Então, usando (2.17), temos que

$$C_2 \|u_\lambda\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \int_\Omega g(u_\lambda) \, \mathrm{d}x \leq \int_\Omega u_\lambda \, \mathrm{d}x = \|u_\lambda\|_{L^1(\Omega)} \leq C_1 \|u_\lambda\|_{L^p(\Omega)} ,$$

o que implica

$$C_2 \|u_\lambda\|_{L^p(\Omega)}^p - C_1 \|u_\lambda\|_{L^p(\Omega)} \leq 0.$$

Denotando $t = \|u_\lambda\|_{L^p(\Omega)}$, obtemos da estimativa acima que $t(C_2 t^{p-1} - C_1) \leq 0$. Como as soluções da inequação anterior pertencem ao intervalo $[0, (C_1/C_2)^{1/(p-1)}]$, temos que

$\|u_\lambda\|_{L^p(\Omega)} \leq (C_1/C_2)^{1/(p-1)}$. Assim, concluímos que, para todo $p > 1$, existe $C > 0$ que não depende de λ tal que $\|u_\lambda\|_{L^p(\Omega)} \leq C$. Além disso,

$$\|u_\lambda\|_{L^1(\Omega)} \leq C_1\,(p, \Omega)\, \|u_\lambda\|_{L^p(\Omega)} \leq C, \tag{2.19}$$

o que implica que $\|u_\lambda\|_{L^p(\Omega)}$ é limitada por uma constante que não depende de λ para todo $p \geq 1$. Agora, fazendo $\varphi = u_\lambda^{-q}$ como função teste em (2.5), obtemos

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla \left(u_\lambda^{-q}\right)\, \mathrm{d}x + \int_\Omega u_\lambda^{1-q}\, \mathrm{d}x = \int_\Omega u_\lambda^{-q} g\,(u_\lambda)\, \mathrm{d}x + \lambda \int_{\partial\Omega} \psi\, \mathrm{d}x.$$

Como

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla \left(u_\lambda^{-q}\right)\, \mathrm{d}x = -q \int_\Omega u_\lambda^{-1-q} \left|\nabla u_\lambda\right|^2\, \mathrm{d}x \leq 0,$$

pois $u_\lambda > 0$ e $q \in [0, 1)$, temos que

$$\int_\Omega u_\lambda^{1-q}\, \mathrm{d}x \geq \lambda \int_{\partial\Omega} \psi\, \mathrm{d}x. \tag{2.20}$$

Pela hipótese (H_1), $\int_{\partial\Omega} \psi\, \mathrm{d}x < \infty$. Então, usando (2.19) e a desigualdade de Hölder, obtemos de (2.20) que

$$\begin{aligned} \lambda &\leq C \int_\Omega u_\lambda^{1-q}\, \mathrm{d}x \leq C \left(\int_\Omega \left(u_\lambda^{1-q}\right)^r\, \mathrm{d}x\right)^{1/r} \left(\int_\Omega 1^{r'}\, \mathrm{d}x\right)^{1/r'} \\ &\leq C\, |\Omega|^{1/r'}\, \|u_\lambda\|_{L^1(\Omega)}^{1-q} < C, \end{aligned}$$

onde C é uma constante que não depende de λ, $r = \frac{1}{1-q}$ e $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Logo, $\Lambda < \infty$ e $\Lambda > 0$, pois $\lambda > 0$. ∎

2.5 Existência de uma solução minimal

Nesta seção, usaremos o método de sub e supersolução para garantir a existência de uma solução minimal para (P_λ), para cada $\lambda \in (0, \Lambda)$. Para tanto, consideremos o seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} -\Delta u + u = 0 \\ u > 0 \end{array}\right\} \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda \psi \mu^q \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{2.21}$$

onde μ é uma constante positiva.

Uma função $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ é dita uma *subsolução* de (2.21) se, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$,

$$\int_\Omega \nabla \underline{u} \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \underline{u} \varphi \, \mathrm{d}x \leq \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \mu^q \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Dizemos que $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ é *supersolução* de (2.21) se, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$,

$$\int_\Omega \nabla \overline{u} \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \overline{u} \varphi \, \mathrm{d}x \geq \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \mu^q \varphi \, \mathrm{d}x.$$

O próximo teorema é o resultado principal desta seção. Antes de prová-lo, mostraremos um lema que será fundamental para a prova deste teorema.

Teorema 2.5.1 *(P_λ) admite solução minimal u_λ, para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$.*

2.5.1 Existência de solução para (P_λ) para $\lambda \in (0, \Lambda)$

Lema 2.5.2 *Seja Λ definido em (2.16). Então (P_λ) possui uma solução fraca para cada $\lambda \in (0, \Lambda)$.*

Demonstração: Fixemos $\lambda \in (0, \Lambda)$. Pela caracterização de Λ, podemos obter $\lambda < \lambda_2 < \Lambda$ tal que (P_{λ_2}) tem solução fraca não-trivial. Seja u_{λ_2} tal solução. Pelo Lema 2.3.6, $u_{\lambda_2} \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$ para algum $\theta \in (0,1)$ e $u_{\lambda_2} > 0$ em $\overline{\Omega}$. Consideremos μ como sendo o menor valor assumido por u_{λ_2} em $\partial\Omega$. Mostraremos inicialmente que (2.21) tem uma única solução fraca. Com efeito, consideremos o funcional $f : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(\varphi) = \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \mu^q \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Verifica-se facilmente que f é linear. Além disso, f é contínuo. De fato, usando a imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, obtemos

$$|f(\varphi)| = \left| \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \mu^q \varphi \, \mathrm{d}x \right| \leq C \int_{\partial\Omega} |\varphi| \, \mathrm{d}x \leq C \, \|\varphi\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq C \, \|\varphi\|,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Assim, $f \in H^{-1}(\Omega)$ e, pelo Teorema da Representação de Riesz (Teorema 1.2.1), existe um único $v_\lambda \in H^1(\Omega)$ tal que, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$, $f(\varphi) = \langle v_\lambda, \varphi \rangle$. Então, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$, obtemos

$$\langle v_\lambda, \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla v_\lambda \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega v_\lambda \varphi \, \mathrm{d}x = \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \mu^q \varphi \, \mathrm{d}x. \tag{2.22}$$

Com este resultado, concluímos que v_λ é a única solução fraca de (2.21). Logo, v_λ é não-trivial, pois, do contrário, por (2.22), teríamos que $f(\varphi) = 0$, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Consequentemente,

$$\int_{\partial\Omega} \psi \mu^q \varphi \text{ d}x = 0, \text{ para todo } \varphi \in H^1(\Omega),$$

pois $\lambda \neq 0$. Assim, $\psi\mu^q = 0$ quase sempre sobre $\partial\Omega$. Como ψ é não-negativa e $\psi \neq 0$, então $\mu^q = 0$, o que é um absurdo, pois $u_{\lambda_2} > 0$ em $\overline{\Omega}$.

Agora, prosseguindo de maneira análoga ao que foi feito no Lema 2.3.6, podemos mostrar que $v_\lambda \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$ para algum $\theta \in (0,1)$. Além disso, por (2.22), temos que

$$\int_{\Omega} \left(\nabla v_\lambda \nabla \varphi + v_\lambda \varphi\right) \text{ d}x \geq 0,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Logo, pelo Lema 2.3.5, $-\Delta v_\lambda + v_\lambda \geq 0$ em Ω no sentido fraco. Deste resultado, juntamente do fato de $\dfrac{\partial v_\lambda}{\partial \nu} = \lambda\psi\mu^q \geq 0$ sobre $\partial\Omega$ e de $v_\lambda \neq 0$, pelo Lema 2.3.4, segue que $v_\lambda > 0$ em $\overline{\Omega}$.

Afirmação: u_{λ_2} é supersolução de (2.21) e $v_\lambda < u_{\lambda_2}$ em $\overline{\Omega}$.

Com efeito, sendo u_{λ_2} solução fraca de (P_λ), temos que

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\lambda_2} \nabla \varphi \text{ d}x + \int_{\Omega} u_{\lambda_2} \varphi \text{ d}x = \int_{\Omega} g\left(u_{\lambda_2}\right) \varphi \text{ d}x + \lambda_2 \int_{\partial\Omega} \psi u_{\lambda_2}^q \varphi \text{ d}x,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Como g é não-negativa, $\int_\Omega g\left(u_{\lambda_2}\right)\varphi \text{ d}x \geq 0$, para todo $\varphi \geq 0$. Assim,

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\lambda_2} \nabla \varphi \text{ d}x + \int_{\Omega} u_{\lambda_2} \varphi \text{ d}x - \lambda_2 \int_{\partial\Omega} \psi u_{\lambda_2}^q \varphi \text{ d}x = \int_{\Omega} g\left(u_{\lambda_2}\right) \varphi \text{ d}x \geq 0,$$

para todo $\varphi \geq 0$. Desta estimativa e usando a definição de μ e o fato de $\lambda_2 > \lambda$, obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\lambda_2} \nabla \varphi \text{ d}x + \int_{\Omega} u_{\lambda_2} \varphi \text{ d}x \geq \lambda_2 \int_{\partial\Omega} \psi u_{\lambda_2}^q \varphi \text{ d}x \geq \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \mu^q \varphi \text{ d}x,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Logo, u_{λ_2} é supersolução de (2.21).

Notemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \nabla\left(u_{\lambda_2} - v_\lambda\right) \nabla \varphi \text{ d}x + \int_{\Omega} \left(u_{\lambda_2} - v_\lambda\right) \varphi \text{ d}x = \\
&\qquad \int_{\Omega} \nabla u_{\lambda_2} \nabla \varphi \text{ d}x + \int_{\Omega} u_{\lambda_2} \varphi \text{ d}x - \int_{\Omega} \nabla v_\lambda \nabla \varphi \text{ d}x - \int_{\Omega} v_\lambda \varphi \text{ d}x = \\
&\qquad\qquad \int_{\Omega} \nabla u_{\lambda_2} \nabla \varphi \text{ d}x + \int_{\Omega} u_{\lambda_2} \varphi \text{ d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \mu^q \varphi \text{ d}x \geq 0,
\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, pois u_{λ_2} é supersolução de (2.21). Então, pelo Lema 2.3.5, obtemos que $-\Delta\left(u_{\lambda_2} - v_\lambda\right) + \left(u_{\lambda_2} - v_\lambda\right) \geq 0$ em Ω no sentido fraco. Além disso, como $\mu \leq u_{\lambda_2}$ sobre $\partial\Omega$, temos que

$$\frac{\partial\left(u_{\lambda_2} - v_\lambda\right)}{\partial\nu} = \frac{\partial u_{\lambda_2}}{\partial\nu} - \frac{\partial v_\lambda}{\partial\nu} = \lambda\psi u_{\lambda_2}^q - \lambda\psi\mu^q \geq 0, \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Agora, notemos que $u_{\lambda_2} \neq v_\lambda$, pois, do contrário, u_{λ_2} seria solução fraca de (2.21). Por outro lado, temos que u_{λ_2} é solução fraca de (P_{λ_2}). Com estes resultados, e escolhendo $\varphi \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que $\varphi > 0$, teríamos

$$\lambda\int_{\partial\Omega}\psi\mu^q\varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u_{\lambda_2}\nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega u_{\lambda_2}\varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega g\left(u_{\lambda_2}\right)\varphi \,\mathrm{d}x + \lambda_2\int_{\partial\Omega}\psi u_{\lambda_2}^q\varphi \,\mathrm{d}x.$$

Disto, e do fato de $\lambda_2 > \lambda$, temos que, para $\varphi \in H^1(\Omega)$ com $\varphi > 0$,

$$\lambda_2\int_{\partial\Omega}\psi\left(u_{\lambda_2}^q - \mu^q\right)\varphi \,\mathrm{d}x \leq -\int_\Omega g\left(u_{\lambda_2}\right)\varphi \,\mathrm{d}x.$$

Por outro lado, temos que, para $\varphi > 0$,

$$\lambda_2\int_{\partial\Omega}\psi\left(u_{\lambda_2}^q - \mu^q\right)\varphi \,\mathrm{d}x \geq 0 \text{ e } \int_\Omega g\left(u_{\lambda_2}\right)\varphi \,\mathrm{d}x > 0,$$

pois g é não-decrescente, $(H_2)\,(e)$ ocorre e $u_{\lambda_2} > 0$ em $\overline{\Omega}$. Logo,

$$0 \leq \lambda_2\int_{\partial\Omega}\psi\left(u_{\lambda_2}^q - \mu^q\right)\varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega g\left(u_{\lambda_2}\right)\varphi \,\mathrm{d}x < 0,$$

chegando a uma contradição. Portanto, $u_{\lambda_2} \neq v_\lambda$. Assim, pelo Lema 2.3.4, $v_\lambda < u_{\lambda_2}$ em $\overline{\Omega}$ e está provada a afirmação.

Agora, definamos as funções $\overline{g}_\lambda : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\overline{h}_\lambda : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:

$$\overline{g}_\lambda(x,t) = \begin{cases} g\left(v_\lambda(x)\right), & t < v_\lambda(x), \\ g(t), & v_\lambda(x) \leq t \leq u_{\lambda_2}(x), \\ g\left(u_{\lambda_2}(x)\right), & t > u_{\lambda_2}(x) \end{cases} \tag{2.23}$$

e

$$\overline{h}_\lambda(x,t) = \begin{cases} \lambda\psi(x)\,\mu^q, & t < v_\lambda(x), \\ \lambda\psi(x)\,t^q, & v_\lambda(x) \leq t \leq u_{\lambda_2}(x), \\ \lambda\psi(x)\,u_{\lambda_2}^q(x), & t > u_{\lambda_2}(x). \end{cases} \tag{2.24}$$

Sejam

$$\overline{G}_\lambda(x,s)=\int_0^s \overline{g}_\lambda(x,t)\ \mathrm{d}t \text{ e } \overline{H}_\lambda(x,s)=\int_0^s \overline{h}_\lambda(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

Afirmamos que o funcional $\overline{J}_\lambda : H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ definido por

$$\overline{J}_\lambda(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\nabla u|^2+|u|^2\right)\ \mathrm{d}x-\int_\Omega \overline{G}_\lambda(x,u)\ \mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\overline{H}_\lambda(x,u)\ \mathrm{d}x$$

é coercivo e sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente.

De fato, como $u_{\lambda_2}\in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$, pela continuidade de g e de $\lambda\psi u_{\lambda_2}^q$ e pelas definições (2.23) e (2.24), temos que existem C_1, $C_2>0$ tais que

$$\overline{g}_\lambda(x,t)\le g(u_{\lambda_2}(x))\le C_1, \text{ para } x\in\Omega \text{ e } \overline{h}_\lambda(x,t)\le\lambda\psi(x)\,u_{\lambda_2}^q(x)\le C_2, \text{ para } x\in\partial\Omega,$$

o que implica

$$\overline{G}_\lambda(x,s)=\int_0^s \overline{g}_\lambda(x,t)\ \mathrm{d}t\le C_1|s|, \text{ para todo } x\in\Omega$$

e

$$\overline{H}_\lambda(x,s)=\int_0^s \overline{h}_\lambda(x,t)\ \mathrm{d}t\le C_2|s|, \text{ para todo } x\in\partial\Omega.$$

Usando as imersões contínuas de Sobolev $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^s(\Omega)$ e $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s\in[1,+\infty)$, obtemos

$$\int_\Omega \overline{G}_\lambda(x,u)\ \mathrm{d}x\le C_1\int_\Omega|u|\ \mathrm{d}x\le C_1\|u\| \text{ e } \int_{\partial\Omega}\overline{H}_\lambda(x,u)\ \mathrm{d}x\le C_2\int_{\partial\Omega}|u|\ \mathrm{d}x\le C_2\|u\|.$$

Destes resultados, segue que

$$\overline{J}_\lambda(u)\ge\frac{1}{2}\|u\|^2-C_1\|u\|-C_2\|u\|=\|u\|^2\left(\frac{1}{2}-\frac{(C_1+C_2)}{\|u\|}\right).$$

Fazendo $\|u\|\to+\infty$ na desigualdade anterior, obtemos $\overline{J}_\lambda(u)\to+\infty$. Assim, $\overline{J}_\lambda(u)$ é coercivo. Agora, seja $u_n\rightharpoonup u$ em $H^1(\Omega)$. Pela Proposição 1.2.2, temos que $\|u\|\le\liminf\|u_n\|$. Consequentemente,

$$\|u\|^2\le\liminf\|u_n\|^2. \tag{2.25}$$

Pela imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s\in[2,+\infty)$, temos que, a menos de subsequência, $u_n\to u$ em $L^2(\Omega)$. Como Ω é limitado, segue que $u_n\to u$ em $L^1(\Omega)$. Logo, pelo Teorema 1.1.7, a menos de subsequência,

$$u_n(x)\to u(x) \text{ quase sempre em } \Omega \tag{2.26}$$

e existe $h_1 \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq h_1(x)$ quase sempre em Ω. Disto e da definição (2.23), temos

$$\begin{aligned}
\overline{G}_\lambda(x, u_n(x)) &= \int_0^{u_n(x)} \overline{g}_\lambda(x,t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{v_\lambda(x)} \overline{g}_\lambda(x,t)\ \mathrm{d}t + \int_{v_\lambda(x)}^{u_{\lambda_2}(x)} \overline{g}_\lambda(x,t)\ \mathrm{d}t + \int_{u_{\lambda_2}(x)}^{u_n(x)} \overline{g}_\lambda(x,t)\ \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{v_\lambda(x)} g(v_\lambda(x))\ \mathrm{d}t + \int_{v_\lambda(x)}^{u_{\lambda_2}(x)} g(u_{\lambda_2}(x))\ \mathrm{d}t + \int_{u_{\lambda_2}(x)}^{u_n(x)} g(u_{\lambda_2}(x))\ \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\overline{G}_\lambda(x, u_n(x)) &\leq g(v_\lambda(x))\, v_\lambda(x) + g(u_{\lambda_2}(x))\,(u_{\lambda_2}(x) - v_\lambda(x)) + g(u_{\lambda_2}(x))\,|u_n(x) - u_{\lambda_2}(x)| \\
&\leq C_1 + C_2 + C_3\,|u_n(x) - u_{\lambda_2}(x)| \leq C + C_3 h_1(x), \text{ para todo } x \in \Omega.
\end{aligned}$$

De maneira análoga, obtemos $C > 0$ tal que $\overline{G}_\lambda(x, u(x)) \leq Ch_1(x)$, para todo $x \in \Omega$. Usando (2.26) e o fato de $\overline{G}_\lambda$ ser contínua na segunda variável, obtemos

$$\overline{G}_\lambda(x, u_n(x)) \to \overline{G}_\lambda(x, u(x)) \ \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Além disso, como $h_1 \in L^1(\Omega)$ e $|\Omega| < \infty$, temos que

$$\left|\overline{G}_\lambda(x, u_n(x)) - \overline{G}_\lambda(x, u(x))\right| \leq C + Ch_1(x) \in L^1(\Omega).$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \overline{G}_\lambda(x, u_n)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \overline{G}_\lambda(x, u)\ \mathrm{d}x.$$

Para mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} \overline{H}_\lambda(x, u_n)\ \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \overline{H}_\lambda(x, u)\ \mathrm{d}x,$$

é suficiente utilizar a imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [2, +\infty)$, e proceder de maneira similar ao que fizemos para obter a convergência anterior. Destas convergências e de (2.25), temos que

$$\begin{aligned}
\liminf \overline{J}_\lambda(u_n) &= \liminf \left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_\Omega \overline{G}_\lambda(x, u_n)\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \overline{H}_\lambda(x, u_n)\ \mathrm{d}x \right) \\
&\geq \frac{1}{2}\liminf \|u_n\|^2 + \liminf \left[-\left(\int_\Omega \overline{G}_\lambda(x, u_n)\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \overline{H}_\lambda(x, u_n)\ \mathrm{d}x \right) \right] \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega \overline{G}_\lambda(x, u)\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \overline{H}_\lambda(x, u)\ \mathrm{d}x = \overline{J}_\lambda(u).
\end{aligned}$$

Assim, $\overline{J}_\lambda$ é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente. Logo, pelo Teorema 1.5.2, $\overline{J}_\lambda$ é limitado inferiormente e atinge mínimo em $H^1(\Omega)$. Seja u_λ o mínimo global de $\overline{J}_\lambda$ sobre $H^1(\Omega)$. Como $\overline{J}_\lambda$ é o funcional associado ao problema

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{c} -\Delta u + u = \overline{g}_\lambda\left(x,u\right) \\ u > 0 \end{array}\right\} & \text{em} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \overline{h}_\lambda\left(x,u\right) \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.27}$$

então u_λ é solução fraca de (2.27). De forma análoga ao que fizemos com o problema (P_λ), verifica-se que $u_\lambda \in C^{2,\theta}\left(\Omega\right)$, para algum $\theta \in (0,1)$.
Agora, como g é não-decrescente, pela definição (2.23), temos $\overline{g}_\lambda\left(x,t\right) \leq g\left(u_{\lambda_2}\left(x\right)\right)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \Omega$. Em particular, temos

$$\overline{g}_\lambda\left(x,u_\lambda\left(x\right)\right) \leq g\left(u_{\lambda_2}\left(x\right)\right), \text{ para todo } x \in \Omega. \tag{2.28}$$

Pela definição de (2.24),

$$\overline{h}_\lambda\left(x,u_\lambda\left(x\right)\right) \leq \lambda\psi\left(x\right)u_{\lambda_2}^q\left(x\right), \text{ para todo } x \in \partial\Omega. \tag{2.29}$$

Afirmação: $v_\lambda \leq u_\lambda < u_{\lambda_2}$ em $\overline{\Omega}$.

Com efeito, para mostrar que $v_\lambda \leq u_\lambda$ em $\overline{\Omega}$, notemos que sendo u_λ e v_λ soluções fracas de (2.27) e (2.21), respectivamente, encontramos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla(u_\lambda - v_\lambda)\nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \left(u_\lambda - v_\lambda\right)\varphi \,\mathrm{d}x = \\ &\qquad \int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega u_\lambda\varphi \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla v_\lambda\nabla\varphi \,\mathrm{d}x - \int_\Omega v_\lambda\varphi \,\mathrm{d}x = \\ &\qquad\qquad \int_\Omega \overline{g}_\lambda\left(x,u_\lambda\right)\varphi \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \overline{h}_\lambda\left(x,u_\lambda\right)\varphi \,\mathrm{d}x - \lambda\int_{\partial\Omega} \psi\mu^q\varphi \,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Escolhendo $\varphi = \left(u_\lambda - v_\lambda\right)^- = \max\{0, -\left(u_\lambda - v_\lambda\right)\}$, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \overline{g}_\lambda\left(x,u_\lambda\right)\varphi \,\mathrm{d}x &= \int_{[v_\lambda \leq u_\lambda]} \overline{g}_\lambda\left(x,u_\lambda\right)\varphi \,\mathrm{d}x + \int_{[u_\lambda < v_\lambda]} \overline{g}_\lambda\left(x,u_\lambda\right)\varphi \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{[u_\lambda < v_\lambda]} g\left(v_\lambda\right)\left(-u_\lambda + v_\lambda\right) \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\overline{h}_\lambda(x,u_\lambda)\varphi\ \mathrm{d}x &= \int_{[v_\lambda\leq u_\lambda]}\overline{h}_\lambda(x,u_\lambda)\varphi\ \mathrm{d}x + \int_{[u_\lambda<v_\lambda]}\overline{h}_\lambda(x,u_\lambda)\varphi\ \mathrm{d}x\\ &= \lambda\int_{[u_\lambda<v_\lambda]}\psi\mu^q(-u_\lambda+v_\lambda)\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}-\lambda\int_{\partial\Omega}\psi\mu^q\varphi\ \mathrm{d}x &= -\lambda\int_{[v_\lambda\leq u_\lambda]}\psi\mu^q\varphi\ \mathrm{d}x - \lambda\int_{[u_\lambda<v_\lambda]}\psi\mu^q\varphi\ \mathrm{d}x\\ &= -\lambda\int_{[u_\lambda<v_\lambda]}\psi\mu^q(-u_\lambda+v_\lambda)\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Somando estas últimas igualdades, obtemos

$$\int_\Omega\overline{g}_\lambda(x,u_\lambda)\varphi\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\overline{h}_\lambda(x,u_\lambda)\varphi\ \mathrm{d}x - \lambda\int_{\partial\Omega}\psi\mu^q\varphi\ \mathrm{d}x = \int_{[u_\lambda<v_\lambda]}g(v_\lambda)(-u_\lambda+v_\lambda)\ \mathrm{d}x.$$

Como g é não-negativa e, para $u_\lambda < v_\lambda$, tem-se que $-u_\lambda+v_\lambda > 0$, então $\int_{[u_\lambda<v_\lambda]}g(v_\lambda)(-u_\lambda+v_\lambda)\ \mathrm{d}x \geq 0$. Por outro lado,

$$\int_\Omega\nabla(u_\lambda-v_\lambda)\nabla(u_\lambda-v_\lambda)^-\ \mathrm{d}x + \int_\Omega(u_\lambda-v_\lambda)(u_\lambda-v_\lambda)^-\ \mathrm{d}x = -\left\|(u_\lambda-v_\lambda)^-\right\|^2 \leq 0.$$

Assim,

$$0 \leq \int_{[u_\lambda<v_\lambda]}g(v_\lambda)(-u_\lambda+v_\lambda)\ \mathrm{d}x = -\left\|(u_\lambda-v_\lambda)^-\right\|^2 \leq 0.$$

Consequentemente, $\left\|(u_\lambda-v_\lambda)^-\right\|^2 = 0$. Disto, segue que $(u_\lambda-v_\lambda)^- = 0$ quase sempre em Ω. Logo, $u_\lambda - v_\lambda \geq 0$ quase sempre em Ω. Assim, $\inf_\Omega(u_\lambda-v_\lambda) \geq 0$ quase sempre em Ω. Agora, como u_λ e v_λ satisfazem $-\Delta u_\lambda + u_\lambda = \overline{g}_\lambda(x,u_\lambda)$ e $-\Delta v_\lambda + v_\lambda = 0$ no sentido fraco, subtraindo a primeira destas igualdades pela segunda, obtemos que $-\Delta(u_\lambda-v_\lambda)+(u_\lambda-v_\lambda) = \overline{g}_\lambda(x,u_\lambda) \geq 0$. O que implica que $\Delta(u_\lambda-v_\lambda)-(u_\lambda-v_\lambda) \leq 0$ no sentido fraco. No que segue, mostraremos que $u_\lambda \neq v_\lambda$. De fato, supondo o contrário, e usando novamente o fato de que u_λ é solução fraca de (2.27) e v_λ de (2.21), teríamos que

$$\int_\Omega\overline{g}_\lambda(x,u_\lambda)\varphi\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\overline{h}_\lambda(x,u_\lambda)\varphi\ \mathrm{d}x = \lambda\int_{\partial\Omega}\psi\mu^q\varphi\ \mathrm{d}x, \tag{2.30}$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Escolhamos $\varphi \in C_0^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, $\varphi > 0$, tal que supp$(\varphi) \subset\subset \Omega$. Então, $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$. Assim, segue de (2.30) que $\int_\Omega\overline{g}_\lambda(x,u_\lambda)\varphi\ \mathrm{d}x = 0$, o que é um absurdo, pois, usando a hipótese $(H_2)(e)$ e os fatos de que $u_\lambda > 0$ em $\overline{\Omega}$, $\overline{g}_\lambda$ é não-decrescente e $\varphi > 0$, temos que $\int_\Omega \overline{g}_\lambda (x, u_\lambda) \varphi \, \mathrm{d}x > 0$. Logo, $u_\lambda \neq v_\lambda$.

Afirmação: $u_\lambda - v_\lambda > 0$ em Ω.

De fato, suponha que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $(u_\lambda - v_\lambda)(x_0) = 0$. Assim, desde que Ω é aberto, existe $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ tal que

$$\inf_{B_R(x_0)} (u_\lambda - v_\lambda) = \inf_{\Omega} (u_\lambda - v_\lambda) \geq 0, \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Disto, e do fato de $\Delta (u_\lambda - v_\lambda) - (u_\lambda - v_\lambda) \leq 0$ no sentido fraco, segue do Teorema 1.4.3 que $(u_\lambda - v_\lambda)$ é constante em Ω. Logo, como $(u_\lambda - v_\lambda)(x_0) = 0$ e $x_0 \in \Omega$, então $(u_\lambda - v_\lambda) = 0$, o que contradiz o fato de que $u_\lambda \neq v_\lambda$. Logo, a afirmação segue.

Agora, desde que $u_\lambda, v_\lambda \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$, mostraremos que $u_\lambda \geq v_\lambda$ sobre $\partial\Omega$. Com efeito, supondo o contrário, existiria $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $u_\lambda(x_0) < v_\lambda(x_0)$. Como $x_0 \in \partial\Omega$, existe uma sequência $(x_k) \subset \Omega$ tal que $x_k \to x_0$. Como, $u_\lambda > v_\lambda$ em Ω, temos que $u_\lambda(x_k) > v_\lambda(x_k)$. Disto e da continuidade das funções u_λ e v_λ, segue que $u_\lambda(x_0) \geq v_\lambda(x_0)$. O que é uma contradição. Logo, $u_\lambda \geq v_\lambda$ em $\partial\Omega$. Disto e do fato de $u_\lambda > v_\lambda$ em Ω, temos que $u_\lambda \geq v_\lambda$ em $\overline{\Omega}$.

Agora, usando que u_{λ_2} e u_λ são soluções fracas de (P_λ) e (2.27), respectivamente, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla (u_{\lambda_2} - u_\lambda) \nabla\varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega (u_{\lambda_2} - u_\lambda) \varphi \, \mathrm{d}x = \\
&\qquad\int_\Omega \nabla u_{\lambda_2} \nabla\varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u_{\lambda_2}\varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla\varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega u_\lambda\varphi \, \mathrm{d}x = \\
&\qquad\int_\Omega g(u_{\lambda_2}) \varphi \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \lambda\psi u_{\lambda_2}^q \varphi \, \mathrm{d}x - \left(\int_\Omega \overline{g}_\lambda (x, u_\lambda) \varphi \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \overline{h}_\lambda (x, u_\lambda) \varphi \, \mathrm{d}x \right),
\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Assim, por (2.28) e (2.29), obtemos da igualdade anterior que

$$\int_\Omega \nabla (u_{\lambda_2} - u_\lambda) \nabla\varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega (u_{\lambda_2} - u_\lambda) \varphi \, \mathrm{d}x \geq 0,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Logo, pelo Lema 2.3.5, $-\Delta (u_{\lambda_2} - u_\lambda) + (u_{\lambda_2} - u_\lambda) \geq 0$ em Ω no sentido fraco. Usando novamente (2.29), temos que

$$\frac{\partial (u_{\lambda_2} - u_\lambda)}{\partial\nu} = \lambda_2 \psi u_{\lambda_2}^q - \overline{h}_\lambda (x, u_\lambda) \geq 0, \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Além disso, notemos que $u_{\lambda_2} \neq u_\lambda$, pois supondo que $u_{\lambda_2} = u_\lambda$ e sabendo que u_λ e u_{λ_2} são, respectivamente, soluções fracas de (2.27) e de (P_λ), temos que

$$\lambda_2 \psi u_{\lambda_2}^q = \overline{h}_\lambda\left(x, u_\lambda\right) \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Disto segue que, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \lambda_2 \psi u_{\lambda_2}^q \varphi \, \mathrm{d}x &= \int_{[u_\lambda < v_\lambda]} \overline{h}_\lambda\left(x, u_\lambda\right) \varphi \, \mathrm{d}x + \int_{\left[v_\lambda \leq u_\lambda \leq u_{\lambda_2}\right]} \overline{h}_\lambda\left(x, u_\lambda\right) \varphi \, \mathrm{d}x \\ &+ \int_{\left[u_\lambda > u_{\lambda_2}\right]} \overline{h}_\lambda\left(x, u_\lambda\right) \varphi \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Como $v_\lambda \leq u_\lambda$, então $\int_{[u_\lambda < v_\lambda]} \overline{h}_\lambda\left(x, u_\lambda\right) \varphi \, \mathrm{d}x = 0$. Logo,

$$\lambda_2 \int_{\partial\Omega} \psi u_{\lambda_2}^q \varphi \, \mathrm{d}x = \lambda \left(\int_{\left[v_\lambda \leq u_\lambda \leq u_{\lambda_2}\right]} \psi u_\lambda^q \varphi \, \mathrm{d}x + \int_{\left[u_\lambda > u_{\lambda_2}\right]} \psi u_{\lambda_2}^q \varphi \, \mathrm{d}x \right),$$

para todo $\varphi \in H^1\left(\Omega\right)$. Escolhendo $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\varphi > 0$, e considerando que ψ é não-negativa, $u_{\lambda_2} > 0$ e $\lambda_2 > \lambda > 0$, temos que a igualdade anterior não pode ocorrer. Assim, $u_{\lambda_2} \neq u_\lambda$. Logo, pelo Lema 2.3.4, $u_{\lambda_2} > u_\lambda$ em $\overline{\Omega}$. E a afirmação segue.

Mostraremos agora que $\overline{J}_\lambda\left(u\right) = J_\lambda\left(u\right)$, para todo $v_\lambda \leq u \leq u_{\lambda_2}$.

Com efeito, notemos que, para $v_\lambda \leq u \leq u_{\lambda_2}$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \overline{G}_\lambda\left(x, u\right) \, \mathrm{d}x &= \int_{[u < v_\lambda]} \overline{G}_\lambda\left(x, u\right) \, \mathrm{d}x + \int_{[v_\lambda \leq u \leq u_{\lambda_2}]} \overline{G}_\lambda\left(x, u\right) \, \mathrm{d}x + \int_{[u > u_{\lambda_2}]} \overline{G}_\lambda\left(x, u\right) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{[v_\lambda \leq u \leq u_{\lambda_2}]} \overline{G}_\lambda\left(x, u\right) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega G(u) \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \overline{H}_\lambda\left(x, u\right) \, \mathrm{d}x &= \int_{[u < v_\lambda]} \overline{H}_\lambda\left(x, u\right) \, \mathrm{d}x + \int_{[v_\lambda \leq u \leq u_{\lambda_2}]} \overline{H}_\lambda\left(x, u\right) \, \mathrm{d}x + \int_{[u > u_{\lambda_2}]} \overline{H}_\lambda\left(x, u\right) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{[v_\lambda \leq u \leq u_{\lambda_2}]} \overline{H}_\lambda\left(x, u\right) \, \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{q+1} \int_{\partial\Omega} \psi \left|u\right|^{q+1} \, \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}J_\lambda(u) &= \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\left|\nabla u\right|^2 + \left|u\right|^2\right) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega G\left(u\right) \, \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\partial\Omega} \psi \left|u\right|^{q+1} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega \left(\left|\nabla u\right|^2 + \left|u\right|^2\right) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \overline{G}_\lambda\left(x, u\right) \, \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \overline{H}_\lambda\left(x, u\right) \, \mathrm{d}x = \overline{J}_\lambda\left(u\right).\end{aligned}$$

Assim, desde que $v_\lambda \leq u_\lambda < u_{\lambda_2}$ em $\overline{\Omega}$, temos que $\overline{J}_\lambda(u_\lambda) = J_\lambda(u_\lambda)$. Logo, como u_λ é mínimo global de $\overline{J}_\lambda$, temos que $\overline{J}'_\lambda(u_\lambda) = 0$. Assim, $J'_\lambda(u_\lambda) = 0$. Ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u_\lambda \varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega g(u_\lambda)\varphi \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_\lambda^q \varphi \, \mathrm{d}x = 0.$$

Disto, segue que u_λ é solução fraca de (P_λ) e o lema está provado. ■

2.5.2 Prova do Teorema 2.5.1

O Teorema 2.5.1 garantirá a existência de solução minimal para (P_λ), mas antes de prová-lo enunciaremos o lema, cuja prova encontra-se em [17] (Lema 3.4), e a definição seguintes.

Lema 2.5.3 *Sejam u e v funções contínuas e positivas em $\overline{\Omega}$ tais que*

$$\begin{aligned} -\Delta u + u \geq 0, &\quad \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \geq \lambda \psi u^q, &\quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} -\Delta v + v \leq 0, &\quad \text{em} \quad \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} \leq \lambda \psi v^q, &\quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

Então, $u \geq v$ em $\overline{\Omega}$.

Definição 2.5.4 *Dizemos que uma solução u^* é solução minimal de (P_λ) em $[\underline{u}, \overline{u}]$ se $u^* \leq u$, para cada $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$, onde u, $\underline{u}$ e $\overline{u}$ são, respectivamente, solução fraca, sub e supersolução de (P_λ).*

Prova do Teorema 2.5.1

Pelo Lema 2.5.2, existe u_λ solução fraca de (P_λ), para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$. Na demonstração do Lema 2.5.2, vimos que (2.21), tem uma única solução fraca. De maneira similar, mostra-se que o problema

$$\left\{ \begin{aligned} &\left. \begin{aligned} -\Delta u + u = 0 \\ u > 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{em} \quad \Omega, \\ &\frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda \psi u^q, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \right. \tag{2.31}$$

tem uma única solução fraca não-trivial que denotaremos por $\widetilde{v}_\lambda$. De maneira análoga ao que foi feito para u_λ, mostra-se que $\widetilde{v}_\lambda \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$, para algum $\theta \in (0,1)$ e que $\widetilde{v}_\lambda > 0$ em $\overline{\Omega}$. Mostraremos agora que u_λ é supersolução de (2.31). De fato, sendo u_λ solução fraca de (P_λ), temos que

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u_\lambda \varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega g\left(u_\lambda\right) \varphi \, \mathrm{d}x + \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_\lambda^q \varphi \, \mathrm{d}x,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Como g é não-negativa, $\int_\Omega g\left(u_\lambda\right) \varphi \, \mathrm{d}x \geq 0$, para todo $\varphi \geq 0$. Assim,

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u_\lambda \varphi \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_\lambda^q \varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega g\left(u_\lambda\right) \varphi \, \mathrm{d}x \geq 0,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Desta estimativa segue que

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u_\lambda \varphi \, \mathrm{d}x \geq \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_\lambda^q \varphi \, \mathrm{d}x,$$

para todo $\varphi \geq 0$. Logo, u_λ é supersolução de (2.31).

Desde que u_λ e $\widetilde{v}_\lambda$ são respectivamente, solução fraca de (P_λ) e (2.31) e, além disso, u_λ, $\widetilde{v}_\lambda \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$ para algum $\theta \in (0,1)$, então $-\Delta u_\lambda + u_\lambda \geq 0$ e $-\Delta \widetilde{v}_\lambda + \widetilde{v}_\lambda = 0$ em Ω no sentido fraco. Por outro lado, temos que $\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} = \lambda \psi u_\lambda^q$ e $\dfrac{\partial \widetilde{v}_\lambda}{\partial \nu} = \lambda \psi \widetilde{v}_\lambda$ sobre $\partial\Omega$. Além disso, u_λ e $\widetilde{v}_\lambda$ são positivas em $\overline{\Omega}$. Assim, pelo Lema 2.5.3, temos que $u_\lambda \geq \widetilde{v}_\lambda$ em $\overline{\Omega}$.

Em seguida, usando iteração monótona, construiremos uma sequência $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} -\Delta u_{n+1} + u_{n+1} &= g(u_n), \text{ em } \Omega \\ \frac{\partial u_{n+1}}{\partial \nu} &= \lambda \psi u_n^q, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.32}$$

De fato, para $n = 1$, seja $u_1 = \widetilde{v}_\lambda$ e consideremos o problema

$$\begin{aligned} -\Delta u_2 + u_2 &= g(\widetilde{v}_\lambda) \text{ em } \Omega \\ \frac{\partial u_2}{\partial \nu} &= \lambda \psi \widetilde{v}_\lambda^q \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Se u_2 é solução fraca de (2.33), então, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \left(\nabla u_2 \nabla \varphi + u_2 \varphi\right) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega g\left(\widetilde{v}_\lambda\right) \varphi \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \widetilde{v}_\lambda^q \varphi \, \mathrm{d}x = 0.$$

Notemos que

$$\int_\Omega \left(\nabla u_2 \nabla \varphi + u_2 \varphi\right) \, \mathrm{d}x = \left\langle u_2, \varphi \right\rangle.$$

Definamos o funcional $f : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(\varphi) = \int_\Omega g(\widetilde{v}_\lambda)\varphi \, \mathrm{d}x + \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \widetilde{v}_\lambda^q \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Mostraremos que f é linear e contínuo. Com efeito, facilmente verifica-se que f é linear. Agora, temos que

$$|f(\varphi)| \leq \left| \int_\Omega g(\widetilde{v}_\lambda)\varphi \, \mathrm{d}x \right| + \left| \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \widetilde{v}_\lambda^q \varphi \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_\Omega |g(\widetilde{v}_\lambda)| \, |\varphi| \, \mathrm{d}x + \lambda \|\psi\|_\infty \int_{\partial\Omega} |\widetilde{v}_\lambda|^q |\varphi| \, \mathrm{d}x,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Usando o item (i) do Lema A.1.3, temos que, para $\delta > 0$,

$$\int_\Omega |g(\widetilde{v}_\lambda)| \, |\varphi| \, \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega e^{(1+\delta)\widetilde{v}_\lambda^2} |\varphi| \, \mathrm{d}x,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Disto e da desigualdade de Hölder, obtemos

$$|f(\varphi)| \leq C \left(\int_\Omega e^{p(1+\delta)\widetilde{v}_\lambda^2} \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |\varphi|^{p'} \, \mathrm{d}x \right)^{1/p'} + C \left(\int_{\partial\Omega} |\widetilde{v}_\lambda|^{qr} \, \mathrm{d}x \right)^{1/r} \left(\int_{\partial\Omega} |\varphi|^{r'} \, \mathrm{d}x \right)^{1/r'},$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$ e com $r = \frac{1}{q}$, $p > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Assim, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$|f(\varphi)| \leq C \left(\int_\Omega e^{p(1+\delta)\widetilde{v}_\lambda^2} \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} + C_2 \|\widetilde{v}_\lambda\|_{L^1(\partial\Omega)}^q \|\varphi\|_{L^{r'}(\partial\Omega)}, \tag{2.34}$$

Logo, segue da desigualdade de Trudinger-Moser (2.1) que $\int_\Omega e^{p(1+\delta)\widetilde{v}_\lambda^2} \, \mathrm{d}x < \infty$. Assim, pelas imersões contínuas de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$ e $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, obtemos de (2.34) que

$$|f(\varphi)| \leq C_1 \|\varphi\| + C_2 \|\widetilde{v}_\lambda\|^q \|\varphi\| = (C_1 + C_2 \|\widetilde{v}_\lambda\|^q) \|\varphi\|,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$ e com $C_1 = C_1(\Omega, \widetilde{v}_\lambda)$. Disto segue que f é contínua. Logo, $f \in H^{-1}(\Omega)$ e, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $u_2 \in H^1(\Omega)$ tal que $f(\varphi) = \langle u_2, \varphi \rangle$, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Consequentemente, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (\nabla u_2 \nabla \varphi + u_2 \varphi) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega g(\widetilde{v}_\lambda)\varphi \, \mathrm{d}x + \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \widetilde{v}_\lambda^q \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Logo, u_2 é solução fraca de (2.33). Usando o mesmo argumento, obteremos que u_{n+1} é solução fraca de (2.32), para cada $n = 1, 2, 3, ...$

Agora, desde que u_1 e u_2 são soluções fracas de (2.31) e de (2.33), respectivamente, escolhendo $\varphi = (u_2 - u_1)^-$ como função teste, podemos proceder de maneira similar ao que foi feito na demonstração da desigualdade $v_\lambda \leq u_\lambda$ em $\overline{\Omega}$ no Lema 2.5.2, para mostrar que $u_1 \leq u_2$ em $\overline{\Omega}$. E, procedendo com o mesmo raciocínio, mostra-se que $u_1 \leq u_2 \leq ... \leq u_n \leq u_{n+1} \leq ... \leq u_\lambda$ em $\overline{\Omega}$.

Afirmação: (u_n) é uma sequência limitada em $H^1(\Omega)$.

De fato, como u_n é solução fraca de (2.32), tomemos $\varphi = u_{n+1}$ como função teste e assim, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_{n+1}\|^2 = \int_\Omega g(u_n)\, u_{n+1} \,\mathrm{d}x + \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_n^q u_{n+1} \,\mathrm{d}x.$$

Pela hipótese $(H_2)\,(b)$, g é não-decrescente. Logo, como $u_n \leq u_\lambda$, segue da igualdade anterior que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_{n+1}\|^2 \leq \int_\Omega g(u_\lambda)\, u_\lambda \,\mathrm{d}x + \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_\lambda^q u_\lambda \,\mathrm{d}x.$$

Usando novamente o item (i) do Lema A.1.3 e o fato de $u_\lambda > 0$, temos que, para $\delta > 0$,

$$\int_\Omega g(u_\lambda)\, u_\lambda \,\mathrm{d}x \leq C \int_\Omega e^{(1+\delta)u_\lambda^2} u_\lambda \,\mathrm{d}x.$$

Consequentemente, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_{n+1}\|^2 \leq C \int_\Omega e^{(1+\delta)u_\lambda^2} u_\lambda \,\mathrm{d}x + \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_\lambda^{q+1} \,\mathrm{d}x.$$

Pela desigualdade de Hölder, obtemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1}\|^2 &\leq C \left(\int_\Omega e^{p(1+\delta)u_\lambda^2} \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |u_\lambda|^{p'} \,\mathrm{d}x \right)^{1/p'} + \lambda \|\psi\|_\infty \int_{\partial\Omega} u_\lambda^{q+1} \,\mathrm{d}x \\
&\leq C \left(\int_\Omega e^{p(1+\delta)u_\lambda^2} \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} \|u_\lambda\|_{L^{p'}(\Omega)} + C_2 \|u_\lambda\|_{L^{q+1}(\partial\Omega)}^{q+1},
\end{aligned}$$

onde $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Pela desigualdade de Trudinger-Moser (2.1), $\int_\Omega e^{p(1+\delta)u_\lambda^2} \,\mathrm{d}x < \infty$. Assim, pelas imersões contínuas de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$ e $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, segue da estimativa anterior que

$$\|u_{n+1}\|^2 \leq C_1 \|u_\lambda\| + C_2 \|u_\lambda\|^{q+1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a afirmação segue.

Agora, como (u_n) é limitada em $H^1(\Omega)$, pelo Teorema 1.2.3, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_\lambda^*$ em $H^1(\Omega)$, com $u_\lambda^* \in H^1(\Omega)$, pois $H^1(\Omega)$ é Banach reflexivo. No que segue, mostraremos que u_λ^* é solução fraca de (P_λ). Com efeito, como $u_n \rightharpoonup u_\lambda^*$ em $H^1(\Omega)$, então $f(u_n) \to f(u_\lambda^*)$, para todo $f \in H^{-1}(\Omega)$. Assim, pelo Teorema da Representação de Riesz, considerando uma identificação entre os espaços $H^1(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega)$, encontramos

$$f(u_n) = \langle u_n,\varphi\rangle \text{ e } f(u_\lambda^*) = \langle u_\lambda^*,\varphi\rangle,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Então, $\langle u_n,\varphi\rangle \to \langle u_\lambda^*,\varphi\rangle$ e obtemos que, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (\nabla u_n \nabla\varphi + u_n\varphi)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega (\nabla u_\lambda^* \nabla\varphi + u_\lambda^*\varphi)\ \mathrm{d}x. \tag{2.35}$$

De maneira similar ao que fizemos no Lema 2.3.2 (ver (2.14)), usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, mostra-se que

$$\lim_{n\to\infty}\lambda\int_{\partial\Omega}\psi u_n^{q+1}\ \mathrm{d}x = \lambda\int_{\partial\Omega}\psi\,(u_\lambda^*)^{q+1}\ \mathrm{d}x. \tag{2.36}$$

No que segue, mostraremos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g(u_n)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega g(u_\lambda^*)\ \mathrm{d}x. \tag{2.37}$$

De fato, como, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_\lambda^*$ em $H^1(\Omega)$, pela imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [2+\infty)$, $u_n \to u_\lambda^*$ em $L^2(\Omega)$. Como Ω é limitado, $u_n \to u_\lambda^*$ em $L^1(\Omega)$. Assim, pelo Teorema 1.1.7, a menos de subsequência, $u_n(x) \to u_\lambda^*(x)$ quase sempre em Ω. Logo, usando a continuidade de g, obtemos $|g(u_n(x)) - g(u_\lambda^*(x))| \to 0$ quase sempre em Ω. Desde que g é não-decrescente e $u_n \le u_\lambda$, temos que

$$|g(u_n(x)) - g(u_\lambda^*(x))| \le |g(u_\lambda(x))| + |g(u_\lambda^*(x))|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in \Omega.$$

Recorrendo novamente ao item (i) do Lema A.1.3, temos que, para $\delta > 0$,

$$|g(u_\lambda(x))| + |g(u_\lambda^*(x))| \le e^{(1+\delta)u_\lambda^2(x)} + e^{(1+\delta)\left(u_\lambda^*(x)\right)^2}, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Além disso, pela desigualdade de Trudinger-Moser (2.1),

$$\int_\Omega e^{(1+\delta)u_\lambda^2}\ \mathrm{d}x < \infty \text{ e } \int_\Omega e^{(1+\delta)\left(u_\lambda^*\right)^2}\ \mathrm{d}x < \infty.$$

Logo, $e^{(1+\delta)u_\lambda^2}$, $e^{(1+\delta)\left(u_\lambda^*\right)^2} \in L^1(\Omega)$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos (2.37).

Usando (2.37) e escolhendo $\varphi \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_\Omega g(u_n)\varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega g(u_\lambda^*)\varphi \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_\Omega \left| (g(u_n) - g(u_\lambda^*))\varphi \right| \, \mathrm{d}x \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \int_\Omega \left| (g(u_n) - g(u_\lambda^*)) \right| \, \mathrm{d}x \to 0, \end{aligned}$$

o que implica

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g(u_n)\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega g(u_\lambda^*)\varphi \, \mathrm{d}x,$$

para todo $\varphi \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$. Por um argumento de densidade, temos que, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g(u_n)\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega g(u_\lambda^*)\varphi \, \mathrm{d}x. \tag{2.38}$$

Similarmente, usando (2.36), obtém-se que, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_n^{q+1}\varphi \, \mathrm{d}x = \lambda \int_{\partial\Omega} \psi (u_\lambda^*)^{q+1}\varphi \, \mathrm{d}x. \tag{2.39}$$

Por outro lado, como u_{n+1} é solução fraca de (2.32), para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (\nabla u_{n+1}\nabla\varphi + u_{n+1}\varphi) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega g(u_n)\varphi \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_n^{q+1}\varphi \, \mathrm{d}x = 0.$$

Fazendo $n \to \infty$, na igualdade acima e usando (2.35), (2.38) e (2.39), obtemos que, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (\nabla u_\lambda^*\nabla\varphi + u_\lambda^*\varphi) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega g(u_\lambda^*)\varphi \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} \psi (u_\lambda^*)^{q+1}\varphi \, \mathrm{d}x = 0.$$

Concluímos, então, que u_λ^* é solução fraca de (P_λ).

Nosso objetivo agora é mostrar que u_λ^* é solução minimal de (P_λ). Ou seja, $u_\lambda^* \leq u$, para cada $u_1 \leq u \leq u_\lambda$, onde u é solução fraca de (P_λ). Para tanto, será suficiente mostrar que $u_n \leq u$. Já temos que $u_1 \leq u$. Agora, mostraremos que $u_2 \leq u$. Com efeito, como u_2 e u são soluções fracas de (2.33) e (P_λ), respectivamente, então

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla(u - u_2)\nabla\varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega (u - u_2)\varphi \, \mathrm{d}x = \\ &\qquad \int_\Omega \nabla u\nabla\varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u\varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla u_2\nabla\varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega u_2\varphi \, \mathrm{d}x = \\ &\qquad \int_\Omega g(u)\varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega g(u_1)\varphi \, \mathrm{d}x + \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u^{q+1}\varphi \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_1^{q+1}\varphi \, \mathrm{d}x \geq 0, \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, pois $u_1 \leq u$ e g é não-decrescente. Então, pelo Lema 2.3.5, temos que $-\Delta(u - u_2) + (u - u_2) \geq 0$ em Ω no sentido fraco. Além disso, como $u_1 \leq u$ e $\lambda\psi \geq 0$, então

$$\frac{\partial(u - u_2)}{\partial\nu} = \lambda\psi\left(u^q - u_1^q\right) \geq 0.$$

Agora, notemos que $u \neq u_2$, pois, do contrário, u seria solução fraca de (2.33). Por outro lado, temos que u é solução fraca de (P_λ). Com estes resultados, teríamos que

$$\int_\Omega g(u)\varphi \, \mathrm{d}x + \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u^{q+1}\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega g(u_1)\varphi \, \mathrm{d}x + \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_1^{q+1}\varphi \, \mathrm{d}x,$$

o que mostra

$$\int_\Omega [g(u) - g(u_1)]\varphi \, \mathrm{d}x = \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \left(u_1^{q+1} - u^{q+1}\right)\varphi \, \mathrm{d}x.$$

De maneira análoga ao que foi feito para mostrar que $u_1 < u_2$ em Ω, prova-se que $u_1 < u$ em Ω. Assim, escolhendo $\varphi \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que $\varphi > 0$ e usando que g é não-decrescente, segue da igualdade anterior que

$$0 < \int_\Omega [g(u) - g(u_1)]\varphi \, \mathrm{d}x = \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \left(u_1^{q+1} - u^{q+1}\right)\varphi \, \mathrm{d}x \leq 0,$$

o que é um absurdo. Logo, $u \neq u_2$. Assim, pelo Lema 2.3.4, $u_2 \leq u$ em $\overline{\Omega}$. Continuando com o mesmo processo, obtém-se que $u_n \leq u$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para cada $u_1 \leq u \leq u_\lambda$, onde u é solução fraca de (P_λ). Agora, desde que $u_n(x) \to u_\lambda^*(x)$ quase sempre em Ω e $u_n \leq u$, para todo $n \in \mathbb{N}$, fazendo $n \to \infty$, temos que $u_\lambda^*(x) \leq u(x)$ quase sempre em Ω. Disto segue que u_λ^* é solução minimal de (P_λ).

2.6 Existência de um mínimo local para J_λ, com $\lambda \in (0, \Lambda)$

Nesta seção, utilizaremos o teorema seguinte para garantir a existência de mínimo local para J_λ para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$.

Teorema 2.6.1 *Seja u_λ a solução fraca para (P_λ) encontrada no Lema* 2.5.2. *Então, u_λ é um mínimo local para J_λ em $H^1(\Omega)$.*

Demonstração: Seja $\lambda_2 > \lambda$ e $u^*_{\lambda_2}$ solução minimal de (P_{λ_2}) garantida pelo Teorema 2.5.1. Se considerarmos $u^*_{\lambda_2}$ no lugar de u_{λ_2} na demonstração do Lema 2.5.2, obteremos u_λ solução fraca de (P_λ) para cada $\lambda \in (0, \Lambda)$. Supondo que u_λ não é mínimo local para J_λ, chegaremos a uma contradição. Para tanto, notemos que se u_λ não é mínimo local para J_λ, existe uma sequência $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u_\lambda$ em $H^1(\Omega)$ e $J_\lambda(u_n) < J_\lambda(u_\lambda)$. Definamos $\overline{u} = u^*_{\lambda_2}$ e $\underline{u} = \widetilde{v}_\lambda$, onde $\widetilde{v}_\lambda$ é a única solução fraca de (2.31). Inicialmente, mostraremos que $\underline{u} < \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$. De fato, usando que $\underline{u}$ é solução fraca de (2.31) e que $\overline{u}$ é solução fraca de (P_{λ_2}), pois é solução minimal deste problema, temos que estas funções são contínuas e positivas em $\overline{\Omega}$ (ver Lema 2.3.6). Além disso, $\underline{u}$ e $\overline{u}$ satisfazem no sentido fraco

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} + \overline{u} \geq 0, \text{ em } \Omega \\ \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial \nu} \geq \lambda \psi \overline{u}^q, \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -\Delta \underline{u} + \underline{u} \leq 0, \text{ em } \Omega \\ \dfrac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} \leq \lambda \psi \underline{u}^q, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo, pelo Lema 2.5.3, $\underline{u} \leq \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$. Assim, para $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla(\overline{u} - \underline{u}) \nabla\varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega (\overline{u} - \underline{u}) \varphi \, \mathrm{d}x = \\ &\qquad \int_\Omega \nabla\overline{u}\nabla\varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \overline{u}\varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla\underline{u}\nabla\varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \underline{u}\varphi \, \mathrm{d}x = \\ &\qquad\qquad \int_\Omega g(\overline{u}) \varphi \, \mathrm{d}x + (\lambda_2 - \lambda) \int_{\partial\Omega} \psi (\overline{u}^q - \underline{u}^q) \varphi \, \mathrm{d}x \geq 0, \end{aligned}$$

pois g é não-negativa, $\lambda_2 > \lambda$ e $\underline{u} \leq \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$. Logo, pelo Lema 2.3.5, $-\Delta(\overline{u} - \underline{u}) + (\overline{u} - \underline{u}) \geq 0$ em Ω no sentido fraco. Obtemos também que

$$\frac{\partial(\overline{u} - \underline{u})}{\partial \nu} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial \nu} - \frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} = \lambda_2 \psi \overline{u}^q - \lambda \psi \underline{u}^q \geq 0, \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Além disso, temos que $\overline{u} - \underline{u} \neq 0$, pois, do contrário, escolhendo $\varphi \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, $\varphi > 0$, e usando o fato de $\underline{u}$ ser solução fraca de (2.31) e $\overline{u}$ ser solução fraca de (P_{λ_2}), teríamos que

$$\int_\Omega g(\overline{u}) \varphi \, \mathrm{d}x + \lambda_2 \int_{\partial\Omega} \psi \overline{u}^q \varphi \, \mathrm{d}x = \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \overline{u}^q \varphi \, \mathrm{d}x.$$

O que implicaria

$$0 > -\int_\Omega g(\overline{u}) \varphi \, \mathrm{d}x = (\lambda_2 - \lambda) \int_{\partial\Omega} \psi \overline{u}^q \varphi \, \mathrm{d}x \geq 0,$$

pois g é não-negativa, $\overline{u} > 0$ e $\lambda_2 > \lambda$. O que é um absurdo. Logo, $\overline{u} - \underline{u} \neq 0$. Usando estes resultados, segue do Lema 2.3.4 que $\underline{u} < \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$.

Agora, consideremos as seguintes funções para todo $n \in \mathbb{N}$

$$v_n(x) = \begin{cases} \underline{u}(x), & u_n(x) \le \underline{u}(x), \\ u_n(x), & \underline{u}(x) \le u_n(x) \le \overline{u}(x), \\ \overline{u}(x), & u_n(x) \ge \overline{u}(x) \end{cases}$$

e definamos $\overline{w}_n = (u_n - \overline{u})^+$, $\underline{w}_n = (u_n - \underline{u})^-$, $\overline{S}_n = \mathrm{supp}(\overline{w}_n)$ e $\underline{S}_n = \mathrm{supp}(\underline{w}_n)$. Então,

$$\overline{S}_n = \text{fecho}\{x \in \Omega : \overline{w}_n(x) \ne 0\} = \text{fecho}\{x \in \Omega : u_n(x) > \overline{u}(x)\} \tag{2.40}$$

e

$$\underline{S}_n = \text{fecho}\{x \in \Omega : \underline{w}_n(x) \ne 0\} = \text{fecho}\{x \in \Omega : u_n(x) < \underline{u}(x)\}, \tag{2.41}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por definição,

$$v_n \in N_\lambda = \left\{u \in H^1(\Omega) : \underline{u} \le u \le \overline{u}\right\}. \tag{2.42}$$

Além disso, verifica-se facilmente que $u_n = v_n - \underline{w}_n + \overline{w}_n$. Sejam

$$\begin{aligned} A_n = & \frac{1}{2}\int_{\overline{S}_n} \left[\left(|\nabla u_n|^2 - |\nabla \overline{u}|^2\right) + \left(|u_n|^2 - |\overline{u}|^2\right)\right] \,\mathrm{d}x \\ & - \int_{\overline{S}_n} \left[G(u_n) - G(\overline{u})\right] \,\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\overline{S}_n \cap \partial\Omega} \psi\left(u_n^{q+1} - \overline{u}^{q+1}\right) \,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.43}$$

e

$$\begin{aligned} B_n = & \frac{1}{2}\int_{\underline{S}_n} \left[\left(|\nabla u_n|^2 - |\nabla \underline{u}|^2\right) + \left(|u_n|^2 - |\underline{u}|^2\right)\right] \,\mathrm{d}x \\ & - \int_{\underline{S}_n} \left[G(u_n) - G(\underline{u})\right] \,\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\underline{S}_n \cap \partial\Omega} \psi\left(u_n^{q+1} - \underline{u}^{q+1}\right) \,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. No que segue, mostraremos que $J_\lambda(u_n) = J_\lambda(v_n) + A_n + B_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, como

$$J_\lambda(v_n) = \frac{1}{2}\|v_n\|^2 - \int_\Omega G(v_n) \,\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\partial\Omega} \psi\, |v_n|^{q+1} \,\mathrm{d}x,$$

$$\|v_n\|^2 = \int_{[u_n < \underline{u}]} \left(|\nabla \underline{u}|^2 + |\underline{u}|^2\right) \,\mathrm{d}x + \int_{[\underline{u} \le u_n \le \overline{u}]} \left(|\nabla v_n|^2 + |v_n|^2\right) \,\mathrm{d}x + \int_{[u_n > \overline{u}]} \left(|\nabla \overline{u}|^2 + |\overline{u}|^2\right) \,\mathrm{d}x,$$

$$-\int_{\Omega} G(v_n)\ \mathrm{d}x = -\int_{[u_n<\underline{u}]} G(\underline{u})\ \mathrm{d}x - \int_{[\underline{u}\leq u_n\leq \overline{u}]} G(v_n)\ \mathrm{d}x - \int_{[u_n>\overline{u}]} G(\overline{u})\ \mathrm{d}x$$

e

$$\int_{\partial\Omega} \psi\,|v_n|^{q+1}\ \mathrm{d}x = \int_{[u_n<\underline{u}]} \psi\,|\underline{u}|^{q+1}\ \mathrm{d}x + \int_{[\underline{u}\leq u_n\leq \overline{u}]} \psi\,|v_n|^{q+1}\ \mathrm{d}x + \int_{[u_n>\overline{u}]} \psi\,|\overline{u}|^{q+1}\ \mathrm{d}x,$$

então

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\int_{\underline{S}_n} \left(|\nabla\underline{u}|^2+|\underline{u}|^2\right)\ \mathrm{d}x + \int_{[\underline{u}\leq u_n\leq \overline{u}]} \left(|\nabla v_n|^2+|v_n|^2\right)\ \mathrm{d}x + \int_{\overline{S}_n} \left(|\nabla\overline{u}|^2+|\overline{u}|^2\right)\ \mathrm{d}x\right)+\\
&\frac{1}{2}\int_{\overline{S}_n}\left[\left(|\nabla u_n|^2-|\nabla\overline{u}|^2\right)+\left(|u_n|^2-|\overline{u}|^2\right)\right]\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\underline{S}_n}\left[\left(|\nabla u_n|^2-|\nabla\underline{u}|^2\right)+\left(|u_n|^2-|\underline{u}|^2\right)\right]\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\left(\int_{\underline{S}_n} \left(|\nabla u_n|^2+|u_n|^2\right)\ \mathrm{d}x + \int_{[\underline{u}\leq u_n\leq \overline{u}]} \left(|\nabla u_n|^2+|u_n|^2\right)\ \mathrm{d}x + \int_{\overline{S}_n} \left(|\nabla u_n|^2+|u_n|^2\right)\ \mathrm{d}x\right)\\
&=\frac{1}{2}\left\|u_n\right\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\int_{[u_n<\underline{u}]} G(\underline{u})\ \mathrm{d}x - \int_{[\underline{u}\leq u_n\leq \overline{u}]} G(v_n)\ \mathrm{d}x - \int_{[u_n>\overline{u}]} G(\overline{u})\ \mathrm{d}x\\
&\quad -\int_{\overline{S}_n}\left[G\left(u_n\right)-G\left(\overline{u}\right)\right]\ \mathrm{d}x - \int_{\underline{S}_n}\left[G\left(u_n\right)-G\left(\underline{u}\right)\right]\ \mathrm{d}x\\
&=-\int_{\underline{S}_n} G\left(u_n\right)\ \mathrm{d}x - \int_{[\underline{u}\leq u_n\leq \overline{u}]} G\left(u_n\right)\ \mathrm{d}x - \int_{\overline{S}_n} G\left(u_n\right)\ \mathrm{d}x = -\int_{\Omega} G(u_n)\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&-\frac{\lambda}{q+1}\left(\int_{[u_n<\underline{u}]} \psi\,|\underline{u}|^{q+1}\ \mathrm{d}x + \int_{[\underline{u}\leq u_n\leq \overline{u}]} \psi\,|v_n|^{q+1}\ \mathrm{d}x + \int_{[u_n>\overline{u}]} \psi\,|\overline{u}|^{q+1}\ \mathrm{d}x\right)\\
&\quad -\frac{\lambda}{q+1}\left(\int_{\overline{S}_n} \psi\left(u_n^{q+1}-\overline{u}^{q+1}\right)\ \mathrm{d}x + \int_{\underline{S}_n} \psi\left(u_n^{q+1}-\underline{u}^{q+1}\right)\ \mathrm{d}x\right)\\
&=-\frac{\lambda}{q+1}\left(\int_{\underline{S}_n} \psi\,|u_n|^{q+1}\ \mathrm{d}x + \int_{[\underline{u}\leq u_n\leq \overline{u}]} \psi\,|u_n|^{q+1}\ \mathrm{d}x + \int_{\overline{S}_n} \psi\,|u_n|^{q+1}\ \mathrm{d}x\right)\\
&=-\frac{\lambda}{q+1}\int_{\partial\Omega} \psi\,|u_n|^{q+1}\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Notemos que, somando as parcelas equivalentes no desenvolvimento de A_n, B_n e $J_\lambda\left(v_n\right)$, obtivemos a correspondente parcela no desenvolvimento de $J_\lambda\left(u_n\right)$. Assim, segue que $J_\lambda\left(u_n\right) = J_\lambda\left(v_n\right) + A_n + B_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmação: $\underline{u} < u_\lambda < \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$.

De fato, para mostrar que $\underline{u} < u_\lambda$ em $\overline{\Omega}$, é suficiente usar que $\underline{u}$ é solução fraca de (2.31) e que u_λ é solução fraca de (P_λ) e proceder de maneira análoga ao que fizemos para mostrar que $\underline{u} < \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$. Agora, para mostrar que $u_\lambda < \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$, notemos que como $\overline{u}$ é solução minimal de (P_{λ_2}), então $\overline{u}$ é solução fraca de (P_{λ_2}). Além disso, considerando $\overline{u}$ no lugar de u_{λ_2} nas definições de $\overline{g}_\lambda$ e $\overline{h}_\lambda$ dadas em (2.23) e (2.24), respectivamente, temos que

$$\overline{g}_\lambda\left(x,u_\lambda\left(x\right)\right) \leq g\left(\overline{u}\left(x\right)\right), \text{ para } x\in\Omega \text{ e } \overline{h}_\lambda\left(x,u_\lambda\left(x\right)\right) \leq \lambda\psi\left(x\right)\overline{u}^q\left(x\right), \text{ para } x\in\partial\Omega. \quad (2.44)$$

Usando que $\overline{u}$ é solução fraca de (P_{λ_2}) e que u_λ é mínimo global de $\overline{J}_\lambda$, temos que, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla\left(\overline{u}-u_\lambda\right)\nabla\varphi\ \mathrm{d}x + \int_\Omega \left(\overline{u}-u_\lambda\right)\varphi\ \mathrm{d}x = \\
&\qquad \int_\Omega \nabla\overline{u}\nabla\varphi\ \mathrm{d}x + \int_\Omega \overline{u}\varphi\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla u_\lambda\nabla\varphi\ \mathrm{d}x - \int_\Omega u_\lambda\varphi\ \mathrm{d}x = \\
&\qquad \int_\Omega g\left(\overline{u}\right)\varphi\ \mathrm{d}x + \lambda_2\int_{\partial\Omega}\psi\overline{u}^q\varphi\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \overline{g}_\lambda\left(x,u_\lambda\right)\varphi\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\overline{h}_\lambda\left(x,u_\lambda\right)\varphi\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Disto, e de (2.44), obtemos que, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$,

$$\int_\Omega \nabla\left(\overline{u}-u_\lambda\right)\nabla\varphi\ \mathrm{d}x + \int_\Omega \left(\overline{u}-u_\lambda\right)\varphi\ \mathrm{d}x \geq 0.$$

Logo, pelo Lema 2.3.5, $-\Delta\left(\overline{u}-u_\lambda\right)+\left(\overline{u}-u_\lambda\right) \geq 0$ em Ω no sentido fraco. Obtemos também de (2.44) e do fato de $\lambda_2 > \lambda$ que

$$\frac{\partial\left(\overline{u}-u_\lambda\right)}{\partial\nu} = \frac{\partial\overline{u}}{\partial\nu} - \frac{\partial u_\lambda}{\partial\nu} = \lambda_2\psi\overline{u}^q - \overline{h}_\lambda\left(x,u_\lambda\right) \geq 0, \text{ sobre } \partial\Omega.$$

De maneira análoga ao que fizemos na demonstração do Lema 2.5.2 para mostrar que $u_\lambda \neq u_{\lambda_2}$, mostra-se que $\overline{u} \neq u_\lambda$. Assim, pelo Lema 2.3.6, $\overline{u} - u_\lambda > 0$ em $\overline{\Omega}$. E a afirmação segue.

Desde que u_λ é mínimo global de $\overline{J}_\lambda$ garantido pelo Lema 2.5.2, temos que $\overline{J}_\lambda\left(u_\lambda\right) \leq \overline{J}_\lambda\left(u\right)$, para todo $u \in H^1(\Omega)$. Em particular, $\overline{J}_\lambda\left(u_\lambda\right) \leq \overline{J}_\lambda\left(u\right)$, para todo $u \in N_\lambda$. Por outro lado, também na demonstração do Lema 2.5.2, obtivemos que $\overline{J}_\lambda\left(u\right) = J_\lambda\left(u\right)$ para todo $v_\lambda \leq u \leq u_{\lambda_2}$, com v_λ solução fraca de (2.21). Logo, considerando $\overline{u}$ no lugar de u_{λ_2} no Lema 2.5.2, obtemos que $\overline{J}_\lambda\left(u\right) = J_\lambda\left(u\right)$ para todo $v_\lambda \leq u \leq \overline{u}$. Usando que v_λ é solução fraca de (2.21) e que $\underline{u}$ é solução fraca de (2.31) e, procedendo de maneira similar ao que fizemos no Lema 2.5.2 para mostrar que $v_\lambda \leq u_\lambda$ em $\overline{\Omega}$, obtém-se que $v_\lambda \leq \underline{u}$ em $\overline{\Omega}$. Assim, $\overline{J}_\lambda(u) = J_\lambda(u)$, para todo $u \in N_\lambda$.Portanto,

$u_\lambda \in N_\lambda$. Então, $\overline{J}_\lambda(u_\lambda) = J_\lambda(u_\lambda)$. Logo, $J_\lambda(u_\lambda) \leq J_\lambda(u)$, para todo $u \in N_\lambda$. Disto segue que $J_\lambda(u_\lambda) = \inf_{u \in N_\lambda} J_\lambda(u)$. Consequentemente,

$$J_\lambda(u_n) \geq J_\lambda(u_\lambda) + A_n + B_n. \tag{2.45}$$

Agora, como $u_n \to u_\lambda$ em $H^1(\Omega)$, então $u_n \to u_\lambda$ em $L^2(\Omega)$. Assim, pelo Teorema 1.1.7, a menos de subsequência, $u_n(x) \to u_\lambda(x)$ quase sempre em Ω. Fixemos $x_0 \in \overline{S}_n$, definido em (2.40). Então, existe uma sequência $(x_k) \subset C_n := \{x \in \Omega : u_n(x) > \overline{u}(x)\}$ tal que $x_k \to x_0$. Desde que $(x_k) \subset C_n$, $u_n(x_k) > \overline{u}(x_k)$. Como $u_n(x) \to u_\lambda(x)$ quase sempre em Ω, temos que $u_\lambda(x_k) \geq \overline{u}(x_k)$. Disto, e da continuidade das funções u_λ e $\overline{u}$, obtemos que $\lim_k u_\lambda(x_k) \geq \lim_k \overline{u}(x_k)$ implica $u_\lambda(x_0) \geq \overline{u}(x_0)$, pois $x_k \to x_0$. Como $x_0 \in \overline{S}_n$ é arbitrário, temos que $u_\lambda(x) \geq \overline{u}(x)$, para todo $x \in \overline{S}_n$. Por outro lado, temos que $u_\lambda < \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$. Então, para n suficientemente grande, temos que $\overline{S}_n = \varnothing$. O que implica que $\left|\overline{S}_n\right| \to 0$.
Similarmente, fixando $x_0 \in \underline{S}_n$ e usando que $\underline{u} < u_\lambda$ em $\overline{\Omega}$, prova-se que $|\underline{S}_n| \to 0$.

Afirmação: $\|\overline{w}_n\| \to 0$ e $\|\underline{w}_n\| \to 0$.

Com efeito, usando novamente que $u_n \to u_\lambda$ em $H^1(\Omega)$, temos que $u_n \to u_\lambda$ em $L^2(\Omega)$ e $\nabla u_n \to \nabla u_\lambda$ em $(L^2(\Omega))^2$. Desde que Ω é limitado, $u_n \to u_\lambda$ em $L^1(\Omega)$ e $\nabla u_n \to \nabla u_\lambda$ em $(L^1(\Omega))^2$. Assim, $|u_n - \overline{u}|^2 \to |u_\lambda - \overline{u}|^2$ em $L^1(\Omega)$ e $|\nabla u_n - \nabla \overline{u}|^2 \to |\nabla u_\lambda - \nabla \overline{u}|^2$ em $L^1(\Omega)$. Destas convergências e sabendo que

$$\|\overline{w}_n\|^2 = \int_\Omega \left(|\nabla \overline{w}_n|^2 + |\overline{w}_n|^2\right) \, \mathrm{d}x = \int_{\overline{S}_n} \left(|\nabla(u_n - \overline{u})|^2 + |u_n - \overline{u}|^2\right) \, \mathrm{d}x,$$

obtemos

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\overline{S}_n} \left(|\nabla(u_n - \overline{u})|^2 + |u_n - \overline{u}|^2\right) \, \mathrm{d}x = \int_{\overline{S}_n} \left(|\nabla(u_\lambda - \overline{u})|^2 + |u_\lambda - \overline{u}|^2\right) \, \mathrm{d}x.$$

Pelo Teorema 1.1.7, existe $h \in L^1(\Omega)$ tal que $|\nabla(u_n(x) - \overline{u}(x))|^2 + |u_n(x) - \overline{u}(x)|^2 \leq h(x)$ quase sempre em Ω. Assim,

$$\int_{\overline{S}_n} \left(|\nabla(u_n - \overline{u})|^2 + |u_n - \overline{u}|^2\right) \, \mathrm{d}x \leq \int_{\overline{S}_n} h \, \mathrm{d}x.$$

Como $\left|\overline{S}_n\right| \to 0$ e $\int_{\overline{S}_n} h \, \mathrm{d}x \leq \int_\Omega h \, \mathrm{d}x < \infty$, segue do Teorema 1.1.5 que $\lim_{n\to\infty} \int_{\overline{S}_n} h \, \mathrm{d}x = 0$. Logo,

$$0 \leq \|\overline{w}_n\|^2 = \int_{\overline{S}_n} \left(|\nabla (u_n - \overline{u})|^2 + |u_n - \overline{u}|^2\right) \, \mathrm{d}x \leq \int_{\overline{S}_n} h \, \mathrm{d}x \to 0.$$

O que implica que $\|\overline{w}_n\| \to 0$. Similarmente, mostra-se que $\|\underline{w}_n\| \to 0$. Portanto, a afirmação está provada.

No que segue, mostraremos que $A_n \geq 0$.

De fato, como $\overline{w}_n = u_n - \overline{u}$ em $\overline{S}_n$, então $u_n = \overline{u} + \overline{w}_n$. Assim, voltando a (2.43), obtemos que

$$\begin{aligned} A_n = &\frac{1}{2} \int_{\overline{S}_n} \left[\left(|\nabla (\overline{u} + \overline{w}_n)|^2 - |\nabla \overline{u}|^2\right) + \left(|\overline{u} + \overline{w}_n|^2 - |\overline{u}|^2\right)\right] \, \mathrm{d}x \\ &- \int_{\overline{S}_n} \left[G(\overline{u} + \overline{w}_n) - G(\overline{u})\right] \, \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\overline{S}_n \cap \partial\Omega} \psi \left[(\overline{u} + \overline{w}_n)^{q+1} - \overline{u}^{q+1}\right] \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

O que implica

$$\begin{aligned} A_n = &\frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla \overline{w}_n|^2 + |\overline{w}_n|^2\right) \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \left(\nabla \overline{u} \nabla \overline{w}_n + \overline{u} \, \overline{w}_n\right) \, \mathrm{d}x \\ &+ \int_{\overline{S}_n} \left[G(\overline{u}) - G(\overline{u} + \overline{w}_n)\right] \, \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\overline{S}_n \cap \partial\Omega} \psi \left[(\overline{u} + \overline{w}_n)^{q+1} - \overline{u}^{q+1}\right] \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$G(\overline{u} + \overline{w}_n) - G(\overline{u}) = g(\overline{u} + \theta \overline{w}_n) \, \overline{w}_n \text{ e } \frac{\psi}{q+1} \left[(\overline{u} + \overline{w}_n)^{q+1} - \overline{u}^{q+1}\right] = \psi (\overline{u} + \theta \overline{w}_n)^q \, \overline{w}_n.$$

Logo, para algum $\theta \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} A_n = &\frac{1}{2} \|\overline{w}_n\|^2 + \int_\Omega \left(\nabla \overline{u} \nabla \overline{w}_n + \overline{u} \, \overline{w}_n\right) \, \mathrm{d}x - \int_{\overline{S}_n} g(\overline{u} + \theta \overline{w}_n) \, \overline{w}_n \, \mathrm{d}x \\ &- \lambda \int_{\overline{S}_n \cap \partial\Omega} \psi (\overline{u} + \theta \overline{w}_n)^q \, \overline{w}_n \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Desde que $\overline{u}$ é solução fraca de (P_{λ_2}), temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\nabla \overline{u} \nabla \overline{w}_n + \overline{u} \, \overline{w}_n\right) \, \mathrm{d}x &= \int_{\overline{S}_n} g(\overline{u}) \, \overline{w}_n \, \mathrm{d}x + \lambda_2 \int_{\overline{S}_n \cap \partial\Omega} \psi \overline{u}^q \overline{w}_n \, \mathrm{d}x \\ &\geq \int_{\overline{S}_n} g(\overline{u}) \, \overline{w}_n \, \mathrm{d}x + \lambda \int_{\overline{S}_n \cap \partial\Omega} \psi \overline{u}^q \overline{w}_n \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Substituindo este resultado em (2.6), obtemos

$$A_n \geq \frac{1}{2} \|\overline{w}_n\|^2 + \int_{\overline{S}_n} [g(\overline{u}) - g(\overline{u} + \theta \overline{w}_n)] \overline{w}_n \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\overline{S}_n \cap \partial\Omega} \psi [(\overline{u} + \theta \overline{w}_n)^q - \overline{u}^q] \overline{w}_n \, \mathrm{d}x.$$

Usando novamente o Teorema do Valor Médio, obtemos da igualdade acima que

$$A_n \geq \frac{1}{2} \|\overline{w}_n\|^2 - \int_{\overline{S}_n} g'(\overline{u} + \theta' \overline{w}_n) \overline{w}_n^2 \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\overline{S}_n \cap \partial\Omega} \psi [(\overline{u} + \theta \overline{w}_n)^q - \overline{u}^q] \overline{w}_n \, \mathrm{d}x.$$

Disto segue que

$$A_n \geq \frac{1}{2} \|\overline{w}_n\|^2 - \int_{\overline{S}_n} g'(\overline{u} + \theta' \overline{w}_n) \overline{w}_n^2 \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\overline{S}_n \cap \partial\Omega} \psi (\overline{u} + \theta \overline{w}_n)^q \overline{w}_n \, \mathrm{d}x. \tag{2.46}$$

Usando a desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\overline{S}_n \cap \partial\Omega} \psi (\overline{u} + \theta \overline{w}_n)^q \overline{w}_n \, \mathrm{d}x &\leq \|\psi\|_\infty \int_{\overline{S}_n \cap \partial\Omega} (\overline{u} + \theta \overline{w}_n)^q \overline{w}_n \, \mathrm{d}x \\ &\leq \|\psi\|_\infty \left(\int_{\overline{S}_n \cap \partial\Omega} |\overline{u} + \theta \overline{w}_n|^{2q} \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \left(\int_{\partial\Omega} |\overline{w}_n|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Além disso, $\overline{w}_n = u_n - \overline{u}$ em $\overline{S}_n$. E, como $u_n \to u_\lambda$ em $H^1(\Omega)$, pela imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$, $u_n \to u_\lambda$ em $L^2(\partial\Omega)$. Como Ω é limitado, $u_n \to u_\lambda$ em $L^1(\partial\Omega)$. Assim, pelo Teorema 1.1.7, existe $h \in L^1(\partial\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq h(x)$ quase sempre em $\partial\Omega$. Então,

$$|(\overline{u} + \theta \overline{w}_n)(x)| \leq |\overline{u}(x)| + |\theta (u_n - \overline{u})(x)| \leq |\overline{u}(x)| + |\theta (h - \overline{u})(x)| \text{ quase sempre em } \partial\Omega.$$

Usando a estimativa anterior e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\int_{\overline{S}_n \cap \partial\Omega} |\overline{u} + \theta \overline{w}_n|^{2q} \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} &\leq \left|\overline{S}_n \cap \partial\Omega\right|^r \left(\int_{\partial\Omega} (|\overline{u}| + |\theta (h - \overline{u})|)^{2qr'} \, \mathrm{d}x \right)^{1/2r'} \\ &= \left|\overline{S}_n \cap \partial\Omega\right|^r \||\overline{u}| + |\theta (h - \overline{u})|\|_{L^{2qr'}(\partial\Omega)}^q, \end{aligned}$$

onde $r > 1$ e $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Consequentemente,

$$\int_{\overline{S}_n} \psi (\overline{u} + \theta \overline{w}_n)^q \overline{w}_n \, \mathrm{d}x \leq C \left|\overline{S}_n \cap \partial\Omega\right|^r \|\overline{w}_n\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Pela imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, segue que

$$\int_{\overline{S}_n} \psi (\overline{u} + \theta \overline{w}_n)^q \overline{w}_n \, \mathrm{d}x \leq C_1 \left|\overline{S}_n \cap \partial\Omega\right|^r \|\overline{w}_n\|. \tag{2.47}$$

Agora, pela hipótese $(H_2)\,(f)$, dado $\epsilon > 0$ existe $C > 0$ tal que $g'(s) \le Ce^{(1+\epsilon)s^2}$, para s suficientemente grande. Assim,

$$\int_{\overline{S}_n} g'\left(\overline{u} + \theta'\overline{w}_n\right)\overline{w}_n^2\ \mathrm{d}x \le C\int_{\overline{S}_n} e^{(1+\epsilon)(\overline{u}+\theta'\overline{w}_n)^2}\overline{w}_n^2\ \mathrm{d}x \le C\int_{\overline{S}_n} e^{(1+\epsilon)(\overline{u}+|\overline{w}_n|)^2}\overline{w}_n^2\ \mathrm{d}x.$$

Como $u_n \to u_\lambda$ em $H^1(\Omega)$, pela Proposição 1.3.5, a menos de subsequência, existe $\overline{h} \in H^1(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \le \overline{h}(x)$ quase sempre em Ω. Então, em $\overline{S}_n$,

$$|\overline{w}_n(x)| = |u_n(x) - \overline{u}(x)| \le \left|\overline{h}(x)\right| + |\overline{u}(x)| \ \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Assim,

$$\int_{\overline{S}_n} e^{(1+\epsilon)(\overline{u}+|\overline{w}_n|)^2}\overline{w}_n^2\ \mathrm{d}x \le \int_{\overline{S}_n} e^{(1+\epsilon)\left(2\overline{u}+\left|\overline{h}\right|\right)^2}\overline{w}_n^2\ \mathrm{d}x.$$

Usando a desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\overline{S}_n} e^{(1+\epsilon)\left(2\overline{u}+\left|\overline{h}\right|\right)^2}\overline{w}_n^2\ \mathrm{d}x &\le \left(\int_{\overline{S}_n} e^{r(1+\epsilon)\left(2\overline{u}+\left|\overline{h}\right|\right)^2}\ \mathrm{d}x\right)^{1/r}\left(\int_{\Omega}|\overline{w}_n|^{2r'}\ \mathrm{d}x\right)^{1/r'}\\ &= \left(\int_{\overline{S}_n} e^{r(1+\epsilon)\left(2\overline{u}+\left|\overline{h}\right|\right)^2}\ \mathrm{d}x\right)^{1/r}\|\overline{w}_n\|^2_{L^{2r'}(\Omega)},\end{aligned}$$

onde $r > 1$ e $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Usando novamente a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{\overline{S}_n} e^{r(1+\epsilon)\left(2\overline{u}+\left|\overline{h}\right|\right)^2}\ \mathrm{d}x \le \left|\overline{S}_n\right|^p\left(\int_{\overline{S}_n} e^{p'r(1+\epsilon)\left(2\overline{u}+\left|\overline{h}\right|\right)^2}\ \mathrm{d}x\right)^{1/p'},$$

onde $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Pela desigualdade de Trudinger-Moser (2.1), segue que $\int_{\overline{S}_n} e^{p'r(1+\epsilon)\left(2\overline{u}+\left|\overline{h}\right|\right)^2}\ \mathrm{d}x < \infty$. Assim,

$$\int_{\overline{S}_n} g'\left(\overline{u} + \theta'\overline{w}_n\right)\overline{w}_n^2\ \mathrm{d}x \le C\left|\overline{S}_n\right|^p\|\overline{w}_n\|^2_{L^{2r'}(\Omega)}.$$

Pela imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [1,+\infty)$, obtemos que

$$\int_{\overline{S}_n} g'\left(\overline{u} + \theta'\overline{w}_n\right)\overline{w}_n^2\ \mathrm{d}x \le C_2\left|\overline{S}_n\right|^p\|\overline{w}_n\|^2. \tag{2.48}$$

Voltando a (2.46) e usando (2.47) e (2.48), temos que

$$A_n \ge \left(\frac{1}{2} - C_2\left|\overline{S}_n\right|^p\right)\|\overline{w}_n\|^2 - \lambda C_1\left|\overline{S}_n \cap \partial\Omega\right|^r\|\overline{w}_n\|.$$

Sabendo que $\|\overline{w}_n\| \to 0$ e que $\left|\overline{S}_n\right| \to 0$, quando $n \to \infty$, temos que para n suficientemente grande, segue da estimativa acima que $A_n \ge 0$. Similarmente, mostra-se que $B_n \ge 0$. Segue destes resultados e de (2.45), que $J_\lambda(u_n) \geq J_\lambda(u_\lambda)$. Com este resultado, chegamos a uma contradição, pois tínhamos suposto que $J_\lambda(u_n) < J_\lambda(u_\lambda)$. Portanto, u_λ é mínimo local de J_λ. E o teorema está provado. ■

2.7 Existência de uma solução do tipo Passo da Montanha

Nesta seção, mostraremos que (P_λ) possui uma solução do tipo Passo da Montanha. No que segue, fixaremos $\lambda \in (0, \Lambda)$ e u_λ será o mínimo local de J_λ obtido no Teorema 2.6.1.

Definamos $\widetilde{g}_\lambda : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\widetilde{g}_\lambda(x,s) = \begin{cases} g(s+u_\lambda(x)) - g(u_\lambda(x)), & \text{se } s \geq 0 \\ 0, & \text{se } s < 0 \end{cases} \tag{2.49}$$

e $\widetilde{h}_\lambda : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\widetilde{h}_\lambda(x,s) = \begin{cases} \lambda\psi(x)\left((s+u_\lambda(x))^q - u_\lambda^q(x)\right), & \text{se } s \geq 0 \\ 0, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Sejam

$$\widetilde{G}_\lambda(x,s) = \int_0^s \widetilde{g}_\lambda(x,t)\ dt \text{ e } \widetilde{H}_\lambda(x,s) = \int_0^s \widetilde{h}_\lambda(x,t)\ dt. \tag{2.50}$$

Definamos o funcional $\widetilde{J}_\lambda : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\widetilde{J}_\lambda(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + |v|^2\right)\ dx - \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x,v)\ dx - \int_{\partial\Omega} \widetilde{H}_\lambda(x,v)\ dx. \tag{2.51}$$

De maneira similar ao que foi provado no Apêndice A (ver (A.9)) para obter a derivada de J_λ, obtém-se a derivada de $\widetilde{J}_\lambda$, isto é, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\widetilde{J}_\lambda'(v)\varphi = \int_\Omega \nabla v \nabla\varphi\ dx + \int_\Omega v\varphi\ dx - \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v)\varphi\ dx - \int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_\lambda(x,v)\varphi\ dx.$$

Assim, um ponto crítico v_λ de $\widetilde{J}_\lambda$ é solução fraca do problema

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{c} -\Delta u + u = g(u+u_\lambda) - g(u_\lambda) \\ u > 0 \end{array}\right\} \text{ em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \widetilde{h}_\lambda(x,u) \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.52}$$

Observação 2.7.1 *Se v_λ é solução fraca de (2.52), procedendo de maneira similar à prova do Lema 2.3.3, obtemos que $v_\lambda \geq 0$ quase sempre em Ω. Prova-se ainda que $v_\lambda \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$ para algum $\theta \in (0,1)$ e que $-\Delta v_\lambda + v_\lambda \geq 0$ em Ω.*

Em seguida, usaremos uma versão generalizada do Teorema do Passo da Montanha para encontrar uma função positiva que é um ponto crítico de $\widetilde{J}_\lambda$. Depois, usaremos esta função para mostrar a multiplicidade de soluções fracas de (P_λ).

Definição 2.7.2 *Dado $F \subset H^1(\Omega)$ um conjunto fechado. Dizemos que a sequência $(v_n) \subset H^1(\Omega)$ é uma sequência de Palais-Smale para $\widetilde{J}_\lambda$ no nível c em F $\left((PS)_{F,c}\right)$ se*

$$\lim_{n\to\infty} dist\,(v_n, F) = 0,\ \lim_{n\to\infty} \widetilde{J}_\lambda\,(v_n) = c \text{ e } \lim_{n\to\infty} \left\|\widetilde{J}'_\lambda\,(v_\lambda)\right\|_* = 0. \tag{2.53}$$

2.7.1 Resultado de compacidade

O lema seguinte fornece um resultado de compacidade.

Lema 2.7.3 *Dado $F \subset H^1(\Omega)$ um conjunto fechado e $c \in \mathbb{R}$. Sendo $(v_n) \subset H^1(\Omega)$ uma sequência $(PS)_{F,c}$ para $\widetilde{J}_\lambda$, então, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H^1(\Omega)$ e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x, v_n)\ \mathtt{d}x = \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x, v_0)\ \mathtt{d}x \tag{2.54}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_\lambda(x, v_n)\ \mathtt{d}x = \int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_\lambda(x, v_0)\ \mathtt{d}x \tag{2.55}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x, v_n)\ \mathtt{d}x = \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x, v_0)\mathtt{d}x \tag{2.56}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} \widetilde{H}_\lambda(x, v_n)\ \mathtt{d}x = \int_{\partial\Omega} \widetilde{H}_\lambda(x, v_0)\ \mathtt{d}x. \tag{2.57}$$

Demonstração: Sendo (v_n) uma sequência $(PS)_{F,c}$ para $\widetilde{J}_\lambda$, temos que $\lim_{n\to\infty} \widetilde{J}_\lambda(v_n) = c$, ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$,

$$\left| \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla v_n|^2 + v_n^2\right)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x, v_n)\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \widetilde{H}_\lambda\,(x, v_n)\ \mathrm{d}x - c \right| < \epsilon.$$

Isto implica que

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(|\nabla v_n|^2+v_n^2\right)\,\mathrm{d}x-\int_{\Omega}\widetilde{G}_{\lambda}(x,v_n)\,\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\widetilde{H}_{\lambda}\left(x,v_n\right)\,\mathrm{d}x<c+\epsilon. \tag{2.58}$$

Usando novamente a condição $(PS)_{F,c}$, temos que $\lim_{n\to\infty}\left\|\widetilde{J}'_{\lambda}(v_n)\right\|_{*}=0$. Assim, dado $\epsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que, para $n\geq n_0$, $\left\|\widetilde{J}'_{\lambda}(v_n)\right\|_{*}<\epsilon$. Consequentemente, para cada $\varphi\in H^1(\Omega)$, temos que

$$\sup\frac{\left|\widetilde{J}'_{\lambda}(v_n)\varphi\right|}{\|\varphi\|}<\epsilon,$$

o que mostra que $\left|\widetilde{J}'_{\lambda}(v_n)\varphi\right|<\epsilon\|\varphi\|$, isto é, para todo $\varphi\in H^1(\Omega)$,

$$\left|\int_{\Omega}\nabla v_n\nabla\varphi\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega}v_n\varphi\,\mathrm{d}x-\int_{\Omega}\widetilde{g}_{\lambda}(x,v_n)\varphi\,\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\widetilde{h}_{\lambda}(x,v_n)\varphi\,\mathrm{d}x\right|<\epsilon\|\varphi\|, \tag{2.59}$$

A partir daqui, dividiremos a prova em duas etapas.

Etapa 1: Nesta etapa, mostraremos que

$$\sup_n\|v_n\|<\infty,\ \sup_n\int_{\Omega}\widetilde{g}_{\lambda}(x,v_n)v_n\,\mathrm{d}x<\infty\text{ e }\sup_n\int_{\partial\Omega}\widetilde{h}_{\lambda}(x,v_n)v_n\,\mathrm{d}x<\infty.$$

De fato, na demonstração do item (iv) do Lema A.1.1, temos que, dado $\epsilon>0$, existe $s_\epsilon>0$ tal que, para $s\geq s_\epsilon$, $\widetilde{G}_{\lambda}(x,s)\leq\epsilon\widetilde{g}_{\lambda}(x,s)s$ uniformemente em $x\in\overline{\Omega}$. Além disso, como $\widetilde{h}_{\lambda}$ é crescente na segunda variável, temos que

$$\int_{\partial\Omega}\widetilde{H}_{\lambda}(x,v_n)\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^{v_n}\widetilde{h}_{\lambda}(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}x\leq\int_{\partial\Omega}\widetilde{h}_{\lambda}(x,v_n)v_n\,\mathrm{d}x.$$

Assim, voltando à desigualdade (2.58), temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|v_n\|^2&\leq\int_{\Omega\cap[v_n\leq s_\epsilon]}\widetilde{G}_{\lambda}(x,v_n)\,\mathrm{d}x+\epsilon\int_{\Omega\cap[v_n\geq s_\epsilon]}\widetilde{g}_{\lambda}(x,v_n)v_n\,\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{\partial\Omega}\widetilde{h}_{\lambda}(x,v_n)v_n\,\mathrm{d}x+c+\epsilon\\&\leq C_\epsilon+\epsilon\int_{\Omega}\widetilde{g}_{\lambda}(x,v_n)v_n\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\widetilde{h}_{\lambda}(x,v_n)v_n\,\mathrm{d}x+c+\epsilon.\end{aligned} \tag{2.60}$$

Escolhendo $\varphi=v_n$ como função teste em (2.59), obtemos

$$\left|\int_{\Omega}|\nabla v_n|^2\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega}|v_n|^2\,\mathrm{d}x-\int_{\Omega}\widetilde{g}_{\lambda}(x,v_n)v_n\,\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\widetilde{h}_{\lambda}(x,v_n)v_n\,\mathrm{d}x\right|<\epsilon\|v_n\|$$

e disto segue que

$$\int_{\Omega} \widetilde{g}_{\lambda}(x,v_n)v_n \ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_{\lambda}(x,v_n)v_n \ \mathrm{d}x \leq \|v_n\|^2 + \epsilon \|v_n\| . \tag{2.61}$$

Agora, consideremos $x \in D_n$, onde $D_n := \{x \in \partial\Omega : v_n(x) \leq u_\lambda(x)\}$, para cada n. Então,

$$\begin{aligned} \widetilde{h}_{\lambda}(x,v_n)v_n &= \lambda\psi(x)\left((v_n + u_\lambda(x))^q - u_\lambda^q(x)\right)v_n \\ &\leq \lambda \|\psi\|_\infty (2u_\lambda(x))^q - u_\lambda^q(x))u_\lambda(x) = Cu_\lambda^{q+1}(x), \end{aligned}$$

onde $C = \lambda\|\psi\|_\infty > 0$. Desde que $D_n \subset \partial\Omega$, para cada n, então D_n é limitado. Além disso, $u_\lambda(x)$ é limitada em $\mathbb{R}$, pois $u_\lambda \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$. Assim,

$$\int_{D_n} \widetilde{h}_{\lambda}(x,v_n)v_n \ \mathrm{d}x \leq \int_{D_n} Cu_\lambda^{q+1}(x) \ \mathrm{d}x \leq C_0 \int_{D_n} \mathrm{d}x = C_0|D_n| = C_1.$$

Agora, para $x \in D_n^c := \{x \in \partial\Omega : u_\lambda(x) < v_n(x)\}$, temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{h}_{\lambda}(x,v_n)v_n &= \lambda\psi(x)\left((v_n + u_\lambda(x))^q - u_\lambda^q(x)\right)v_n \leq \lambda\|\psi\|_\infty\left[2v_n(x)^q - u_\lambda^q(x))\right]v_n \\ &\leq 2^q\lambda\|\psi\|_\infty v_n^{q+1}(x) = Cv_n^{q+1}(x), \end{aligned}$$

onde $C = 2^q\lambda\|\psi\|_\infty > 0$. Usando este resultado, o fato de $D_n^c \subset \partial\Omega$ ser limitado e a imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, obtemos que

$$\int_{D_n^c} \widetilde{h}_{\lambda}(x,v_n)v_n \ \mathrm{d}x \leq \int_{D_n^c} Cv_n^{q+1} \ \mathrm{d}x \leq C\|v_n\|_{L^{q+1}(\partial\Omega)}^{q+1} \leq C_2\|v_n\|^{q+1}.$$

Logo,

$$\int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_{\lambda}(x,v_n)v_n \ \mathrm{d}x = \int_{D_n} \widetilde{h}_{\lambda}(x,v_n)v_n \ \mathrm{d}x + \int_{D_n^c} \widetilde{h}_{\lambda}(x,v_n)v_n \ \mathrm{d}x \leq C_1 + C_2\|v_n\|^{q+1}.$$

Consequentemente, existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_{\lambda}(x,v_n)v_n \ \mathrm{d}x \leq C + \frac{1}{4}\|v_n\|^2.$$

Usando esta estimativa e a desigualdade (2.61), voltamos a (2.60) e obtemos que

$$\frac{1}{2}\|v_n\|^2 \leq C_\epsilon + \epsilon\|v_n\|^2 + \epsilon\|v_n\| + C + \frac{1}{4}\|v_n\|^2 + c + \epsilon,$$

de onde segue que

$$\left(\frac{1}{4} - \epsilon\right)\|v_n\|^2 - \epsilon\|v_n\| \leq C_\epsilon + c + \epsilon.$$

Afirmação: (v_n) é limitada em $H^1(\Omega)$.

Suponhamos, por absurdo, que (v_n) não seja limitada em $H^1(\Omega)$. Assim, dividindo ambos os membros da desigualdade anterior por $\|v_n\|$, temos que

$$\left(\frac{1}{4} - \epsilon\right)\|v_n\| \leq \frac{C_\epsilon + c + \epsilon}{\|v_n\|} + \epsilon.$$

Escolhendo $\epsilon < \frac{1}{4}$ e fazendo $n \to \infty$, obtemos que o lado direito da estimativa anterior tende a ϵ enquanto que o lado esquerdo tende ao infinito, o que gera uma contradição. Logo, a afirmação segue.

Desde que (v_n) é limitada em $H^1(\Omega)$, então $\sup_n \|v_n\| < \infty$. Além disso, pelas definições de $\widetilde{g}_\lambda$ e $\widetilde{h}_\lambda$, vemos que

$$\int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x, v_n)v_n \, \mathrm{d}x \text{ e } \int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_\lambda(x, v_n)v_n \, \mathrm{d}x$$

são não-negativas e como (v_n) é limitada em $H^1(\Omega)$, segue de (2.61) que

$$\sup_n \int_\Omega |\widetilde{g}_\lambda(x, v_n)v_n| \, \mathrm{d}x < \infty \text{ e } \sup_n \int_{\partial\Omega} \left|\widetilde{h}_\lambda(x, v_n)v_n\right| \, \mathrm{d}x < \infty. \tag{2.62}$$

Com este resultado, concluímos a *Etapa 1*.

Usando mais uma vez que (v_n) é limitada em $H^1(\Omega)$, pelo Teorema 1.2.3, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H^1(\Omega)$, para algum $v_0 \in H^1(\Omega)$, pois $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Etapa 2: Nesta etapa, mostraremos as convergências de (2.54) a (2.57).

Com efeito, observe que, se a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H^1(\Omega)$, pela imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [2, +\infty)$, temos que $v_n \to v_0$ em $L^2(\Omega)$. Usando que Ω é limitado, temos que $v_n \to v_0$ em $L^1(\Omega)$. Por definição, $\widetilde{g}_\lambda$ é contínua e, pelo item *(iii)* do Lema A.1.3, $\widetilde{g}_\lambda(x, v_n)$, $\widetilde{g}_\lambda(x, v_0) \in L^1(\Omega)$. Além disso, como

$$\sup_n \int_\Omega |\widetilde{g}_\lambda(x, v_n)v_n| \, \mathrm{d}x < \infty,$$

pelo item *(i)* do Lema A.3.1, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x, v_n) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x, v_0) \, \mathrm{d}x.$$

Agora, pelo item (*iii*) do Lema A.1.1, existe $C > 0$ tal que $\left|\widetilde{G}_\lambda(x, v_n)\right| \leq C\left|\widetilde{g}_\lambda(x, v_n)\right|$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$. Disto e de (2.62), obtemos que

$$\sup_n \int_\Omega \left|\widetilde{G}_\lambda(x, v_n)v_n\right| \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Por outro lado, pelo item (*iii*) do Lema A.1.3, $\widetilde{G}_\lambda(x, v_n)$, $\widetilde{G}_\lambda(x, v_0) \in L^1(\Omega)$. Além disso, por definição, $\widetilde{G}_\lambda$ também é contínua. Logo, segue do item (*i*) do Lema A.3.1 que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x, v_n) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x, v_0) \, \mathrm{d}x.$$

Mostraremos agora que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_\lambda(x, v_n) \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_\lambda(x, v_0) \, \mathrm{d}x. \tag{2.63}$$

Com efeito, considerando novamente que $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H^1(\Omega)$ e usando a imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [2 + \infty)$, obtemos que, a menos de subsequência, $v_n \to v_0$ em $L^2(\partial\Omega)$. Como Ω é limitado, temos que $v_n \to v_0$ em $L^1(\partial\Omega)$. Assim, pelo Teorema 1.1.7, $v_n(x) \to v_0(x)$ quase sempre sobre $\partial\Omega$ e existe $h \in L^1(\partial\Omega)$ tal que $|v_n(x)| \leq h(x)$ quase sempre sobre $\partial\Omega$. Agora, sendo $\widetilde{h}_\lambda$ contínua na segunda variável, temos que

$$\left|\widetilde{h}_\lambda(x, v_n(x)) - \widetilde{h}_\lambda(x, v_0(x))\right| \to 0 \text{ quase sempre sobre } \partial\Omega.$$

Além disso, usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\left|\widetilde{h}_\lambda(x, v_n(x)) - \widetilde{h}_\lambda(x, v_0(x))\right| \leq \left|\widetilde{h}_\lambda(x, v_n(x))\right| + \left|\widetilde{h}_\lambda(x, v_0(x))\right|.$$

Por outro lado,

$$\left|\widetilde{h}_\lambda(x, v_n(x))\right| = \left|\lambda\psi(x)\left((v_n(x) + u_\lambda(x))^q - u_\lambda^q(x)\right)\right| \leq \lambda \|\psi\|_\infty \left[|h(x) + u_\lambda(x)|^q + |u_\lambda^q(x)|\right]$$

e

$$\left|\widetilde{h}_\lambda(x, v_0(x))\right| = \left|\lambda\psi(x)\left((v_0(x) + u_\lambda(x))^q - u_\lambda^q(x)\right)\right| \leq \lambda \|\psi\|_\infty \left[|v_0(x) + u_\lambda(x)|^q + |u_\lambda^q(x)|\right].$$

Assim,

$$\left|\widetilde{h}_\lambda(x, v_n(x)) - \widetilde{h}_\lambda(x, v_0(x))\right| \leq \lambda \|\psi\|_\infty \left[|h(x) + u_\lambda(x)|^q + 2\left|u_\lambda^q(x)\right| + |v_0(x) + u_\lambda(x)|^q\right],$$

quase sempre sobre $\partial\Omega$.

Afirmação: $\lambda \left\|\psi\right\|_{\infty} \left[\left|h(x)+u_\lambda(x)\right|^q + 2\left|u_\lambda^q(x)\right| + \left|v_0(x)+u_\lambda(x)\right|^q\right] \in L^1\left(\partial\Omega\right)$.

De fato, usando a desigualdade de Hölder, temos que

$$\int_{\partial\Omega} \left|h+u_\lambda\right|^q \, \mathrm{d}x \leq \left(\int_{\partial\Omega} \left|h+u_\lambda\right|^{qp} \, \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_{\partial\Omega} 1^{p'} \, \mathrm{d}x\right)^{1/p'} = \left\|h+u_\lambda\right\|_{L^1(\partial\Omega)}^q \left|\partial\Omega\right|^{1/p'} < \infty,$$

onde $p = \frac{1}{q}$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. De maneira análoga, mostra-se que u_λ^q, $\left|v_0+u_\lambda\right|^q \in L^1\left(\partial\Omega\right)$. E, sendo $L^1\left(\partial\Omega\right)$ um espaço vetorial, temos que a afirmação vale.

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos (2.63).

Em seguida, utilizaremos novamente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para provar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} \widetilde{H}_\lambda(x,v_n)dx = \int_{\partial\Omega} \widetilde{H}_\lambda(x,v_0) \, \mathrm{d}x.$$

De fato, sendo $\widetilde{H}_\lambda(x,v_n) = \int_0^{v_n} \widetilde{h}_\lambda(x,t) \, \mathrm{d}t$ contínua na segunda variável, obtemos

$$\widetilde{H}_\lambda(x,v_n(x)) \to \widetilde{H}_\lambda(x,v_0(x)) \text{ quase sempre sobre } \partial\Omega.$$

Por outro lado, se $v_n \to v_0$ em $L^s\left(\partial\Omega\right)$, para todo $s \in [1,+\infty)$, pelo Teorema 1.1.7, temos que, a menos de subsequência, $v_n(x) \to v_0(x)$ quase sempre sobre $\partial\Omega$ e existe $l \in L^s\left(\partial\Omega\right)$ tal que $\left|v_n(x)\right| \leq l(x)$ quase sempre sobre $\partial\Omega$, para todo $s \in [1,+\infty)$. Agora, notemos que

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{H}_\lambda(x,v_n)\right| &= \left|\int_0^{v_n} \widetilde{h}_\lambda(x,t) \, \mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{v_n} \lambda\psi\left[(t+u_\lambda(x))^q - u_\lambda^q(x)\right] \, \mathrm{d}t\right| \\ &\leq \lambda\left\|\psi\right\|_\infty \left|\int_0^{v_n} (t+u_\lambda(x))^q \, \mathrm{d}t\right|.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\left|\widetilde{H}_\lambda(x,v_n)\right| \leq C\left|\int_0^{v_n} (t+u_\lambda(x))^q \, \mathrm{d}t\right| \leq C\left|(v_n+u_\lambda(x))^q v_n\right| \leq C\left(l\left(x\right)+u_\lambda(x)\right)^q l\left(x\right),$$

com $C = \lambda\left\|\psi\right\|_\infty$.

Denotando $w = C\left(l+u_\lambda\right)^q l$, afirmamos que $w \in L^1\left(\partial\Omega\right)$. Com efeito,

$$\int_{\partial\Omega} |w| \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} C\left|l+u_\lambda\right|^q |l| \, \mathrm{d}x.$$

Como $l \in L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, podemos escolher $p = \frac{1}{q}$ tal que $l,\ u_\lambda \in L^p(\partial\Omega)$. Assim, $l + u_\lambda \in L^p(\partial\Omega)$. Usando novamente a imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{\partial\Omega} |w| \ \mathrm{d}x \leq C \left\| l + u_\lambda \right\|^q_{L^p(\partial\Omega)} \left\| l \right\|_{L^{p'}(\partial\Omega)} < \infty,$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Logo, $\left| \widetilde{H}_\lambda(x, v_n) \right| \leq w(x) \in L^1(\partial\Omega)$ quase sempre sobre $\partial\Omega$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\partial\Omega} \widetilde{H}_\lambda(x, v_n) \ \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \widetilde{H}_\lambda(x, v_0) \ \mathrm{d}x.$$

Com este resultado, terminamos a *Etapa 2* e a prova do lema. ∎

2.7.2 Nível minimax

No que segue, apresenteremos alguns resultados e lemas que serão fundamentais para obter o resultado principal desta seção.

Consideremos o funcional $\widetilde{J}_\lambda$ definido em (2.51). Afirmamos que 0 é mínimo local de $\widetilde{J}_\lambda$. Para provar esta afirmação, mostraremos que, em uma vizinhança da origem, $\widetilde{J}_\lambda$ é não-negativo. Com efeito, como

$$J_\lambda(u_\lambda) = \frac{1}{2} \left\| u_\lambda \right\|^2 - \int_\Omega G(u_\lambda) \ \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\partial\Omega} \psi u_\lambda^{q+1} \ \mathrm{d}x$$

e, além disso,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x, v) \ \mathrm{d}x &= \int_\Omega \int_0^v \left(g(t + u_\lambda(x)) - g(u_\lambda(x)) \right) \ \mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \left(G(v + u_\lambda) - G(u_\lambda) - g(u_\lambda) v \right) \ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \widetilde{H}_\lambda(x, v) \ \mathrm{d}x &= \int_{\partial\Omega} \int_0^v \lambda\psi \left((t + u_\lambda(x))^q - u_\lambda^q(x) \right) \ \mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\lambda}{q+1} \psi (v + u_\lambda)^{q+1} - \frac{\lambda}{q+1} \psi u_\lambda^{q+1} - \lambda\psi u_\lambda^q v \right) \ \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

destas identidades e da definição de J_λ, obtemos que

$$\begin{aligned}
J_\lambda(v+u_\lambda) &= \frac{1}{2}\|v\|^2 + \langle v, u_\lambda\rangle + \frac{1}{2}\|u_\lambda\|^2 - \int_\Omega G(v+u_\lambda)\ \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\partial\Omega}\psi(v+u_\lambda)^{q+1}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\|v\|^2 + \langle v, u_\lambda\rangle + J_\lambda(u_\lambda) + \int_\Omega G(u_\lambda)\ \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q+1}\int_{\partial\Omega}\psi u_\lambda^{q+1}\ \mathrm{d}x \\
&- \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x,v)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega G(u_\lambda)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega g(u_\lambda)\,v\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\widetilde{H}_\lambda(x,v)\ \mathrm{d}x \\
&- \frac{\lambda}{q+1}\int_{\partial\Omega}\psi u_\lambda^{q+1}\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\lambda\psi u_\lambda^{q} v\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Isto mostra que

$$\begin{aligned}
J_\lambda(v+u_\lambda) &= \frac{1}{2}\|v\|^2 + \langle v, u_\lambda\rangle + J_\lambda(u_\lambda) - \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x,v)\ \mathrm{d}x \\
&- \int_{\partial\Omega}\widetilde{H}_\lambda(x,v)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega g(u_\lambda)\,v\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\lambda\psi u_\lambda^{q} v\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Desde que u_λ é mínimo local de J_λ, temos

$$\langle v, u_\lambda\rangle = \int_\Omega (\nabla u_\lambda \nabla v + u_\lambda v)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega g(u_\lambda)\,v\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\lambda\psi u_\lambda^{q} v\ \mathrm{d}x.$$

Disto e de (2.7.2), obtemos

$$J_\lambda(v+u_\lambda) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + J_\lambda(u_\lambda) - \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x,v)\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\widetilde{H}_\lambda(x,v)\ \mathrm{d}x.$$

Assim, usando a definição de $\widetilde{J}_\lambda$, segue que $J_\lambda(v+u_\lambda) = \widetilde{J}_\lambda(v) + J_\lambda(u_\lambda)$. Então, usando novamente que u_λ é mínimo local de J_λ, temos que

$$\widetilde{J}_\lambda(v) = J_\lambda(v+u_\lambda) - J_\lambda(u_\lambda) \geq 0,$$

para $v \in H^1(\Omega)$, com $\|v\|$ suficientemente pequena. Segue assim a afirmação.

Em seguida, mostraremos que $\lim_{t\to+\infty}\widetilde{J}_\lambda(tv) = -\infty$, para $v \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, $v > 0$.

Iniciaremos esta prova mostrando que, para todo $s \geq 0$ e para $p > 2$, existem C_1, $C_2 > 0$ tais que $\widetilde{G}_\lambda(x,s) \geq C_1 s^p - C_2$.

De fato, pela demonstração do item (*iii*) do Lema A.1.1, temos que dado $\epsilon > 0$, existe $s_\epsilon > 0$ tal que, $\widetilde{G}_\lambda(x,s) \leq C\widetilde{g}_\lambda(x,s)$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$, para todo $s \geq s_\epsilon$ e para algum $C > 0$. Assim, usando a definição de $\widetilde{G}_\lambda$, obtemos da desigualdade anterior que

$\widetilde{G}_\lambda(x,s) \leq C\frac{d}{ds}\widetilde{G}_\lambda(x,s)$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$ e para todo $s \geq s_\epsilon$. Consequentemente, para $s_0 > 0$,

$$\int_{s_0}^{s} \frac{dt}{C} \leq \int_{s_0}^{s} \frac{d\widetilde{G}_\lambda(x,t)}{\widetilde{G}_\lambda(x,t)},$$

de onde segue que, para todo $s \geq s_\epsilon$,

$$e^{\frac{1}{C}(s-s_0)} \leq \frac{\widetilde{G}_\lambda(x,s)}{\widetilde{G}_\lambda(x,s_0)}.$$

Assim, existe $C_1 > 0$ tal que $C_1 e^{\frac{s}{C}} \leq \widetilde{G}_\lambda(x,s)$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$ e para todo $s \geq s_\epsilon$. Por outro lado, consideremos s_0 suficientemente grande e $p \geq 1$ tal que $s^p \leq e^{\frac{s}{C}}$, para todo $s \geq s_0$. Então, podemos escolher $s_0 \geq s_\epsilon$ e $p > 2$ tal que $C_1 s^p \leq C_1 e^{\frac{s}{C}} \leq \widetilde{G}_\lambda(x,s)$, para todo $s \geq s_0$. Agora, para $s \in [0, s_0]$, sendo $\widetilde{G}_\lambda$ e $C_1 s^p$ contínuas, pelo Teorema de Weierstrass, existe $C_2 > 0$ tal que $\left|\widetilde{G}_\lambda(x,s) - C_1 s^p\right| \leq C_2$. Assim, $\widetilde{G}_\lambda(x,s) \geq C_1 s^p - C_2$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$ e para todo $s \in [0, s_0]$. Além disso, se $C_1 s^p \leq \widetilde{G}_\lambda(x,s)$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$ e para todo $s \geq s_0$ e para $p > 2$, então $\widetilde{G}_\lambda(x,s) \geq C_1 s^p - C_2$, para todo $s \geq s_0$ e para $p > 2$. Logo, para todo $s \geq 0$ e para $p > 2$, temos que

$$\widetilde{G}_\lambda(x,s) \geq C_1 s^p - C_2. \tag{2.64}$$

Agora, considerando $v \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, com $v > 0$, temos que

$$\widetilde{J}_\lambda(tv) = \frac{t^2}{2}\|v\|^2 - \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x,tv)\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \widetilde{H}_\lambda(x,tv)\,\mathrm{d}x.$$

Desde que $\widetilde{H}_\lambda(x,tv) \geq 0$, obtemos da identidade anterior que

$$\widetilde{J}_\lambda(tv) \leq \frac{t^2}{2}\|v\|^2 - \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x,\ tv)\,\mathrm{d}x.$$

Disto e de (2.64), obtemos

$$\begin{aligned}\widetilde{J}_\lambda(tv) &\leq \frac{t^2}{2}\|v\|^2 - \int_\Omega C_1 (tv)^p\ \mathrm{d}x + \int_\Omega C_2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{t^2}{2}\|v\|^2 - C_1 t^p \int_\Omega v^p\,\mathrm{d}x + C_2|\Omega|.\end{aligned}$$

Como $p > 2$, fazendo $t \to +\infty$ na estimativa acima, segue que

$$\lim_{t\to+\infty} \widetilde{J}_\lambda(tv) = -\infty. \tag{2.65}$$

Com este último resultado, podemos considerar $e \in H^1(\Omega)$ tal que $\widetilde{J}_\lambda(e) < 0$. Seja

$$\Gamma = \{\gamma : [0,1] \to H^1(\Omega) : \gamma \text{ é contínua}, \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}.$$

Desta forma, definamos o nível do Passo da Montanha

$$c_m = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \widetilde{J}_\lambda(\gamma(t)). \tag{2.66}$$

Fixado $\gamma \in \Gamma$, notemos que, sendo $\gamma(t)$ contínua, então, usando Wieirstrass, temos que $\gamma(t)$ atinge máximo e mínimo em $[0,1]$. Por outro lado, $\widetilde{J}_\lambda$ também é contínuo. Assim, usando novamente Wieirstrass, temos que $\widetilde{J}_\lambda(\gamma(t))$ atinge máximo e mínimo para $t \in [0,1]$ e $\gamma \in \Gamma$. Além disso, $\gamma(0) = 0$ e $\widetilde{J}_\lambda(0) = 0$. Logo, $\max_{t\in[0,1]} \widetilde{J}_\lambda(\gamma(t)) \geq 0$. Assim, 0 é cota inferior de $\max_{t\in[0,1]} \widetilde{J}_\lambda(\gamma(t))$. Logo, por (2.66) segue que $c_m \geq 0$.

Seja $R_0 = \|e\|$. Se $c_m = 0$, temos que $\inf\{\widetilde{J}_\lambda(v) : \|v\| = R\} = 0$, para $R \in (0, R_0)$. Assim, se $c_m > 0$, consideraremos $F = H^1(\Omega)$. Se $c_m = 0$, $F = \{v \in H^1(\Omega) : \|v\| = R_0/2\}$.

O próximo objetivo é estimar o nível minimax c_m.

Lema 2.7.4 *Seja $\alpha = 2$. Então, $c_m < \pi$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, assumiremos que $0 \in \partial\Omega$. Suponha, por absurdo, que $c_m \geq \pi$. Desde que 0 é mínimo local de $\widetilde{J}_\lambda$ e $c_m \geq \pi > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que $\widetilde{J}_\lambda(v) > 0$, para $\|v\| = \delta_0$. Agora, para cada n, temos que $f_n(t) = \widetilde{J}_\lambda(t\omega_n)$ é contínua. Destes resultados e de (2.65), usamos o Teorema do Valor Intermediário e obtemos $0 < \xi_n \in \mathbb{R}$, tal que $f_n(\xi_n) = 0$. Assim, pelo Teorema de Wieirstrass, existe $t_n \in [0, \xi_n]$ ponto de máximo da função $f_n(t)$. Notemos que, $t_n > 0$, pois, se $t_n = 0$, então $f_n(0) = 0$ e isso contradiz o fato de 0 ser mínimo local de $\widetilde{J}_\lambda$. Mais adiante, temos uma figura que ilustra uma ideia da geometria do funcional $\widetilde{J}_\lambda$.

Pela definição de c_m, temos que $\sup_{t>0} \widetilde{J}_\lambda(t\omega_n) \geq c_m \geq \pi$. Então, sendo t_n ponto de máximo de $f_n(t) = \widetilde{J}_\lambda(t\omega_n)$, temos que, para todo n,

$$\frac{t_n^2}{2} \int_\Omega \left(|\nabla \omega_n|^2 + |\omega_n|^2\right) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x, t_n\omega_n) \, \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \widetilde{H}_\lambda(x, t_n\omega_n) \, \mathrm{d}x \geq \pi.$$

Denotemos

$$\mu_n^2 = \frac{t_n^2}{2} \int_\Omega \left(|\nabla \omega_n|^2 + |\omega_n|^2\right) \, \mathrm{d}x.$$

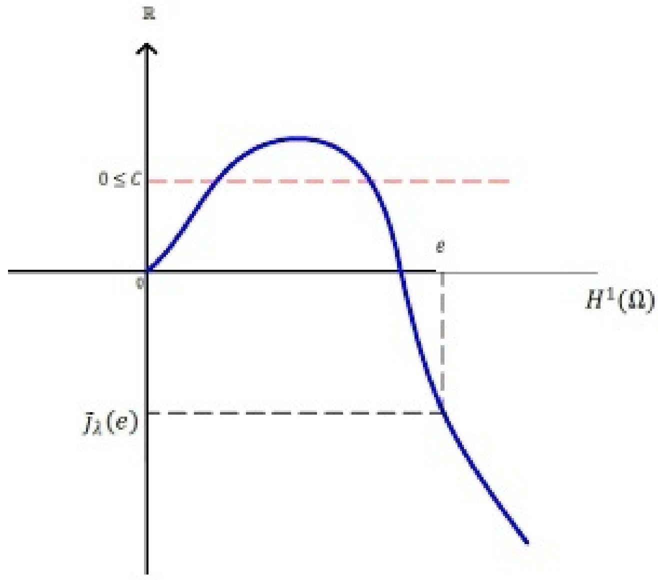

Figura 2.1: Geometria do funcional $\widetilde{J}_\lambda$

Por definição, $\widetilde{G}_\lambda$ e $\widetilde{H}_\lambda$ são não-negativas, então $\mu_n^2 \geq \pi$, para todo n. E, pelo Lema 2.1.6, $\|\omega_n\| = 1$, para n suficientemente grande. Logo,

$$t_n^2 \geq 2\pi, \tag{2.67}$$

para n suficientemente grande. Recorrendo novamente ao fato de t_n ser ponto máximo de $f_n(t)$, temos que $f_n'(t_n) = 0$, para todo n. Equivalentemente,

$$\frac{d}{dt}\left(\widetilde{J}_\lambda(t\omega_n)\right)_{t=t_n} = \widetilde{J}_\lambda'(t_n\omega_n)\,\omega_n = 0,$$

de onde segue que, para todo n,

$$\int_\Omega \nabla(t_n\omega_n)\,\nabla\omega_n \, \mathrm{d}x + \int_\Omega t_n\omega_n^2 \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x, t_n\omega_n)\omega_n \, \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_\lambda(x, t_n\omega_n)\omega_n \, \mathrm{d}x = 0.$$

Multiplicando a última igualdade por t_n, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla(t_n\omega_n)|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega |t_n\omega_n|^2 \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x, t_n\omega_n)t_n\omega_n \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_\lambda(x, t_n\omega_n)t_n\omega_n \, \mathrm{d}x.$$

Como $\widetilde{h}_\lambda$ é não-negativa, segue da igualdade anterior que, para todo n,

$$\int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x, t_n\omega_n)t_n\omega_n \;\mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\nabla (t_n\omega_n)|^2 \;\mathrm{d}x + \int_\Omega |t_n\omega_n|^2 \;\mathrm{d}x = 2\mu_n^2. \tag{2.68}$$

Afirmamos agora que, para s suficientemente grande,

$$e^{s^2} \leq \inf_{x\in\overline{\Omega}} \widetilde{g}_\lambda(x,s) \text{ uniformemente em } x \in \overline{\Omega}. \tag{2.69}$$

De fato, como

$$\begin{aligned}\widetilde{g}_\lambda(x,s) - e^{s^2} &= p\,(s+u_\lambda)\, e^{(s+u_\lambda)^2} - p\,(u_\lambda)\, e^{u_\lambda^2} - e^{s^2}\\ &= \left[p\,(s+u_\lambda)\, e^{u_\lambda^2+2su_\lambda} - 1\right] e^{s^2} - p\,(u_\lambda)\, e^{u_\lambda^2}\end{aligned}$$

uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$ e, pela condição $(H_2)\,(c)$, $p\,(s) > 0$, para s suficientemente grande, temos que

$$p\,(s+u_\lambda)\, e^{u_\lambda^2+2su_\lambda} - 1 > 0,$$

para s suficientemente grande. Além disso, e também para s suficientemente grande, temos que $e^{s^2} \geq e^{u_\lambda^2}$, pois u_λ é limitada. Assim,

$$\left[p\,(s+u_\lambda)\, e^{u_\lambda^2+2su_\lambda} - 1\right] e^{s^2} - p\,(u_\lambda)\, e^{u_\lambda^2} \geq 0,$$

para s suficientemente grande. Consequentemente, $\widetilde{g}_\lambda(x,s) - e^{s^2} \geq 0$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$ e para s suficientemente grande. Disto, segue a afirmação.

Pelo Lema 2.1.6, quando $n \to \infty$, $\omega_n\,(x) \to +\infty$, para $x \in \{|x| \leq 1/n\}$. Além disso, como para todo n, $t_n > 0$ e, para n suficientemente grande, $t_n^2 \geq 2\pi$, então $t_n \nrightarrow 0$. Assim, para $x \in \{|x| \leq 1/n\}$, temos que $t_n\omega_n\,(x) \to +\infty$. Voltando a (2.68) e usando a convergência anterior e (2.69), temos que, para todo n,

$$2\mu_n^2 \geq \int_{\{|x|\leq 1/n\}\cap\overline{\Omega}} e^{t_n^2\omega_n^2} t_n\omega_n \;\mathrm{d}x.$$

Para n suficientemente grande, utilizamos o Lema 2.1.6 e obtemos da última estimativa que

$$t_n^2 \geq \int_{\{|x|\leq 1/n\}\cap\overline{\Omega}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{t_n^2\left(\frac{1}{\pi}\ln(nL)\right)} t_n\,(\ln nL)^{1/2} \;\mathrm{d}x.$$

Consequentemente,

$$t_n^2 \geq \frac{\sqrt{\pi}}{n^2} e^{t_n^2\left(\frac{1}{\pi}\ln(nL)\right)} t_n \left(\ln nL\right)^{1/2} = \sqrt{\pi} L^2 e^{\left(\frac{t_n^2}{\pi}-2\right)\ln(nL)} t_n \left(\ln nL\right)^{1/2}. \tag{2.70}$$

Afirmação: (t_n) é uma sequência de números reais limitada.

Com efeito, suponhamos, por absurdo, que (t_n) não seja limitada. Então, dividindo (2.70) por t_n^2, teríamos

$$1 \geq \frac{\sqrt{\pi} L^2 e^{\left(\frac{t_n^2}{\pi}-2\right)\ln(nL)} \left(\ln nL\right)^{1/2}}{t_n}.$$

Fazendo $n \to \infty$ na estimativa anterior e usando a Regra de L'Hôpital, temos que

$$1 \geq \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{\pi}}{\pi} L^2 e^{\left(\frac{t_n^2}{\pi}-2\right)\ln(nL)} t_n \left(\ln\left(nL\right)\right)^{3/2}.$$

Usando (2.67), e a desigualdade acima, obtemos

$$1 \geq \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{\pi}}{\pi} L^2 t_n \left(\ln\left(nL\right)\right)^{3/2} = +\infty,$$

o que é um absurdo. Logo, a afirmação segue.

Agora, voltando a (2.70) e utilizando novamente (2.67), temos que

$$t_n^2 \geq \sqrt{\pi} L^2 t_n \left(\ln\left(nL\right)\right)^{1/2},$$

para n suficientemente grande. Assim, dividindo a desigualdade anterior por t_n, obtemos

$$t_n \geq \sqrt{\pi} L^2 \left(\ln\left(nL\right)\right)^{1/2}.$$

Portanto, quando $n \to \infty$, o lado direito da desigualdade acima vai para o infinito e, consequentemente, $t_n \to +\infty$. O que é uma contradição. Com este resultado, concluímos a prova do lema. ∎

Observação 2.7.5 *Se* 0 *pertence ao interior de* Ω*, procedemos de maneira análoga ao que foi feito no Lema* 2.7.4*, porém usando a sequência de funções de Moser* (ver [*20*]).

2.7.3 Existência de um ponto crítico para $\widetilde{J}_\lambda$ do tipo Passo da Montanha

A solução do tipo Passo da Montanha do nosso problema é obtida com o lema seguinte.

Lema 2.7.6 *$\widetilde{J}_\lambda$ tem um ponto crítico v_λ do tipo Passo da Montanha, com $v_\lambda > 0$ em $\overline{\Omega}$.*

Demonstração: Dividiremos a prova em duas etapas.

Etapa 1: Nesta etapa, $\alpha \in (0, 2)$.

Consideremos inicialmente $F = H^1(\Omega)$ e $(v_n) \subset F$ uma sequência que satisfaz a condição $(PS)_{F,c_m}$ para $\widetilde{J}_\lambda$ (para a existência de tal sequência, veja [16] e [14]). Então, pelo Lema 2.7.3, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v_\lambda$ em $H^1(\Omega)$, para algum $v_\lambda \in H^1(\Omega)$. Logo, pela Proposição 1.2.2, (v_n) é limitada em $H^1(\Omega)$ e, pela imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [2,+\infty)$, a menos de subsequência, $v_n \to v_\lambda$ em $L^2(\Omega)$. Como Ω é limitado, segue que $v_n \to v_\lambda$ em $L^1(\Omega)$.

Afirmação: Existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo $s \geq 0$, $\beta > 0$ e $\alpha \in (0, 2)$, tem-se que

$$e^{\beta s^\alpha} \leq C e^{2\pi s^2}. \tag{2.71}$$

Com efeito, como $\alpha < 2$, $\lim_{s\to+\infty} \frac{e^{\beta s^\alpha}}{e^{2\pi s^2}} = 0$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $s_\epsilon > 0$ tal que $e^{\beta s^\alpha} \leq \epsilon e^{2\pi s^2}$, para todo $s \geq s_\epsilon$. Por outro lado, usando a continuidade de $\frac{e^{\beta s^\alpha}}{e^{2\pi s^2}}$ e o Teorema de Weierstrass, existe $C_1 > 0$ tal que $e^{\beta s^\alpha} \leq C_1 e^{2\pi s^2}$, para todo $s \in [0, s_\epsilon]$. Fazendo $C = \max\{\epsilon, C_1\}$, temos que $e^{\beta s^\alpha} \leq C e^{2\pi s^2}$, para todo $s \geq 0$, $\beta > 0$ e $\alpha \in (0, 2)$. E está provada a afirmação.

Em seguida, mostraremos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n) v_n \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_\lambda) v_\lambda \, \mathrm{d}x. \tag{2.72}$$

De fato, pelo item (iii) do Lema A.1.3, temos que $\widetilde{g}_\lambda(x, v_n), \widetilde{g}_\lambda(x, v_\lambda) \in L^1(\Omega)$. Além disso, a menos de subsequência, $v_n \to v_\lambda$ em $L^1(\Omega)$. Por outro lado, usando a definição de $\widetilde{g}_\lambda$ e o item (i) do Lema A.1.3, obtemos que

$$\int_\Omega \left|\widetilde{g}_\lambda(x,v_n) v_n^2\right| \, \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega e^{2(v_n+u_\lambda)^\alpha} v_n^2 \, \mathrm{d}x.$$

Pela desigualdade de Hölder, obtemos da estimativa anterior que

$$\int_{\Omega} \left|\widetilde{g}_{\lambda}(x,v_n)v_n^2\right| \,\mathrm{d}x \leq C \left(\int_{\Omega} e^{2p\|v_n+u_\lambda\|^{\alpha}\left(\frac{v_n+u_\lambda}{\|v_n+u_\lambda\|}\right)^{\alpha}} \,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |v_n|^{2p'} \,\mathrm{d}x\right)^{1/p'}, \tag{2.73}$$

com $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Usando (2.71) e a desigualdade de Trudinger-Moser (2.2), segue que

$$\int_{\Omega} e^{2p\|v_n+u_\lambda\|^{\alpha}\left(\frac{v_n+u_\lambda}{\|v_n+u_\lambda\|}\right)^{\alpha}} \,\mathrm{d}x \leq C \int_{\Omega} e^{2\pi\left(\frac{v_n+u_\lambda}{\|v_n+u_\lambda\|}\right)^{2}} \,\mathrm{d}x < \infty.$$

Disto e da imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, segue de (2.73) que

$$\int_{\Omega} \left|\widetilde{g}_{\lambda}(x,v_n)v_n^2\right| \,\mathrm{d}x \leq C \|v_n\|^2.$$

Assim, como (v_n) é limitada em $H^1(\Omega)$, temos da última desigualdade que

$$\sup_n \int_{\Omega} \left|\widetilde{g}_{\lambda}(x,v_n)v_n^2\right| \,\mathrm{d}x < \infty.$$

Logo, pelo item (ii) do Lema A.3.1, obtemos (2.72).

Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, mostraremos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_{\lambda}(x,v_n)v_n \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_{\lambda}(x,v_\lambda)v_\lambda \,\mathrm{d}x. \tag{2.74}$$

Com efeito, uma vez que $v_n \rightharpoonup v_\lambda$ em $H^1(\Omega)$, pela imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$, a menos de subsequência, $v_n \to v_\lambda$ em $L^2(\partial\Omega)$. Assim, pelo Teorema 1.1.7, obtemos que, a menos de subsequência, $v_n(x) \to v_\lambda(x)$ quase sempre sobre $\partial\Omega$ e existe $h \in L^2(\partial\Omega)$ tal que $|v_n(x)| \leq h(x)$ quase sempre sobre $\partial\Omega$. Logo, pela continuidade de $\widetilde{h}_{\lambda}$, temos

$$\left|\widetilde{h}_{\lambda}(x,v_n(x))v_n(x) - \widetilde{h}_{\lambda}(x,v_\lambda(x))v_\lambda(x)\right| \to 0 \text{ quase sempre sobre } \partial\Omega.$$

Usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{h}_{\lambda}(x,v_n(x))v_n(x) - \widetilde{h}_{\lambda}(x,v_\lambda(x))v_\lambda(x)\right| &\leq \left|\widetilde{h}_{\lambda}(x,v_n(x))v_n(x)\right| + \left|\widetilde{h}_{\lambda}(x,v_\lambda(x))v_\lambda(x)\right| \\ &\leq \left|\widetilde{h}_{\lambda}(x,h(x))h(x)\right| + \left|\widetilde{h}_{\lambda}(x,v_\lambda(x))v_\lambda(x)\right|\end{aligned}$$

quase sempre sobre $\partial\Omega$.

Afirmação: $\left|\widetilde{h}_{\lambda}(x,h)h\right| \in L^1(\partial\Omega)$.

De fato,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \left|\widetilde{h}_\lambda(x,h)h\right| \,\mathrm{d}x &= \int_{\partial\Omega} \lambda\psi\left[(h+u_\lambda)^q - u_\lambda^q\right] h \,\mathrm{d}x \\ &\leq \lambda\left\|\psi\right\|_\infty \int_{\partial\Omega} (h+u_\lambda)^q h \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{\partial\Omega} \left|\widetilde{h}_\lambda(x,h)h\right| \,\mathrm{d}x \leq C\left\|h+u_\lambda\right\|^q_{L^{2q}(\partial\Omega)} \left\|h\right\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Como $h \in L^2(\partial\Omega)$ e Ω é limitado, temos que $h \in L^{2q}(\partial\Omega)$, pois $2q < 2$. Assim, segue da estimativa acima que $\int_{\partial\Omega}\left|\widetilde{h}_\lambda(x,h)h\right| \,\mathrm{d}x < \infty$. E a afirmação esta provada.
Analogamente, mostra-se que $\left|\widetilde{h}_\lambda(x,v_\lambda)v_\lambda\right| \in L^1(\partial\Omega)$. Logo, $\left|\widetilde{h}_\lambda(x,h)h\right| + \left|\widetilde{h}_\lambda(x,v_\lambda)v_\lambda\right| \in L^1(\partial\Omega)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos (2.74).

Afirmação: v_λ é solução fraca de (2.52).

Com efeito, como (v_n) satisfaz a condição $(PS)_{F,c_m}$ para $\widetilde{J}_\lambda$, pelo Lema 2.7.3,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_\lambda)\,\mathrm{d}x \text{ e } \lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_\lambda(x,v_n)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\widetilde{h}_\lambda(x,v_\lambda)\,\mathrm{d}x.$$

Escolhendo $\varphi \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, obtemos, da convergência anterior, que

$$\begin{aligned}0 &\leq \left|\int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n)\varphi\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_\lambda)\varphi\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_\Omega \left|\left(\widetilde{g}_\lambda(x,v_n) - \widetilde{g}_\lambda(x,v_\lambda)\right)\varphi\right|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \left\|\varphi\right\|_\infty \int_\Omega \left|\left(\widetilde{g}_\lambda(x,v_n) - \widetilde{g}_\lambda(x,v_\lambda)\right)\right|\,\mathrm{d}x \to 0,\end{aligned}$$

o que implica

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n)\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_\lambda)\varphi\,\mathrm{d}x.$$

Por um argumento de densidade, temos que, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n)\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_\lambda)\varphi\,\mathrm{d}x. \tag{2.75}$$

Analogamente, mostra-se que, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_\lambda(x,v_n)\varphi\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_\lambda(x,v_\lambda)\varphi\,\mathrm{d}x. \tag{2.76}$$

Agora, como $v_n \rightharpoonup v_\lambda$ em $H^1(\Omega)$, temos que $f(v_n) \to f(v_\lambda)$, para todo $f \in H^{-1}(\Omega)$. Assim, pelo Teorema da Representação de Riesz,

$$f(v_n) = \langle v_n,\varphi\rangle \text{ e } f(v_\lambda) = \langle v_\lambda,\varphi\rangle,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Então, $\langle v_n,\varphi\rangle \to \langle v_\lambda,\varphi\rangle$ e obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (\nabla v_n \nabla\varphi + v_n\varphi)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega (\nabla v_\lambda \nabla\varphi + v_\lambda\varphi)\ \mathrm{d}x. \tag{2.77}$$

Usando novamente o fato de que (v_n) satisfaz a condição $(P.S)_{F,c_m}$ para $\widetilde{J}_\lambda$, temos que $\lim_{n\to\infty}\left\|\widetilde{J}'_\lambda(v_n)\right\|_* = 0$. Equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega (\nabla v_n\nabla\varphi + v_n\varphi)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n)\varphi\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\widetilde{h}_\lambda(x,v_n)\varphi\ \mathrm{d}x\right) = 0, \tag{2.78}$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Disto e de (2.75), (2.76) e (2.77), obtemos

$$\int_\Omega (\nabla v_\lambda\nabla\varphi + v_\lambda\varphi)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_\lambda)\varphi\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\widetilde{h}_\lambda(x,v_\lambda)\varphi\ \mathrm{d}x = 0,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Desta identidade, segue a afirmação.

Fazendo $\varphi = v_n$ em (2.78) e usando a identidade anterior, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\|v_n\|^2 &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n)v_n\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\widetilde{h}_\lambda(x,v_n)v_n\ \mathrm{d}x\right)\\
&= \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_\lambda)v_\lambda\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\widetilde{h}_\lambda(x,v_\lambda)v_\lambda\ \mathrm{d}x\\
&= \int_\Omega \left(|\nabla v_\lambda|^2 + |v_\lambda|^2\right)\ \mathrm{d}x = \|v_\lambda\|^2,
\end{aligned}$$

Assim, $\|v_n\| \to \|v_\lambda\|$. Usando esta convergência, juntamente com o fato de $v_n \rightharpoonup v_\lambda$ em $H^1(\Omega)$, temos que

$$\|v_n - v_\lambda\|^2 = \|v_n\|^2 - 2\langle v_n,v_\lambda\rangle + \|v_\lambda\|^2 \to \|v_\lambda\|^2 - 2\langle v_\lambda,v_\lambda\rangle + \|v_\lambda\|^2 = 0,$$

de onde obtemos que $v_n \to v_\lambda$ em $H^1(\Omega)$. Agora, suponhamos que $v_\lambda = 0$. Então, $v_n \to 0$ em $H^1(\Omega)$. Pela continuidade do funcional $\widetilde{J}_\lambda$, temos que $\widetilde{J}_\lambda(v_n) \to \widetilde{J}_\lambda(0) = 0$. Por outro lado, sabemos que $\lim_{n\to\infty}\widetilde{J}_\lambda(v_n) = c_m$. Assim, pela unicidade do limite, obtemos $c_m = 0$, o que contradiz a escolha que fizemos para F e para a sequência (v_n). Portanto, $v_\lambda \neq 0$.

Agora, sabendo que v_λ é solução fraca não-trivial de (2.52), que $\frac{\partial v_\lambda}{\partial \nu} = \widetilde{h}_\lambda(x, v_\lambda) \geq 0$ sobre $\partial\Omega$ e que, pela Observação 2.7.1, $-\Delta v_\lambda + v_\lambda \geq 0$ em Ω, obtemos do Lema 2.3.4 que $v_\lambda > 0$ em $\overline{\Omega}$.

Consideremos agora

$$F = \{v \in H^1(\Omega) : \|v\| = R_0/2\}.$$

Neste caso, procedemos de maneira similar ao que fizemos para $F = H^1(\Omega)$ até concluirmos que $\|v_n\| \to \|v_\lambda\|$. Como $(v_n) \subset F$, temos que $\|v_n\| = R_0/2$, para todo n. Assim, $\|v_\lambda\| = R_0/2 > 0$. Logo, $v_\lambda \neq 0$. Com este resultado, usamos novamente o fato de v_λ ser solução fraca de (2.52) e em seguida a Observação 2.7.1 e concluímos que $v_\lambda > 0$ em $\overline{\Omega}$. E termina a *Etapa 1*.

Etapa 2: Nesta etapa, $\alpha = 2$.

Nesta etapa, $(v_n) \subset F$ é novamente uma sequência que satisfaz a condição $(PS)_{F,c_m}$ para $\widetilde{J}_\lambda$. E, usando o mesmo argumento inicial da *Etapa 1*, obtemos que, a menos de subsequência, $v_n \to v_\lambda$ em $L^1(\Omega)$, para algum $v_\lambda \in H^1(\Omega)$. No que segue, iremos supor que $v_\lambda = 0$ e encontraremos uma contradição que nos permitirá concluir que $v_\lambda \neq 0$. Consideremos para tanto dois casos.

Caso 1: $c_m = 0$.

Neste caso, $F = \{v \in H^1(\Omega) : \|v\| = R_0/2\}$ e como (v_n) satisfaz a condição $(PS)_{F,c_m}$ para $\widetilde{J}_\lambda$, pelo Lema 2.7.3, se $v_n \rightharpoonup 0$ em $H^1(\Omega)$, então

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x,v_n)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x,0)\ \mathrm{d}x = 0 \tag{2.79}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} \widetilde{H}_\lambda(x,v_n)\ \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \widetilde{H}_\lambda(x,0)\ \mathrm{d}x = 0. \tag{2.80}$$

Também pela condição $(PS)_{F,c_m}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\|v_n\|^2 - \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x,v_n)\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \widetilde{H}_\lambda(x,v_n)\ \mathrm{d}x \right) = c_m = 0,$$

o que implica $\frac{1}{2}\|v_n\|^2 \to 0$. Assim, $v_n \to 0$ em $H^1(\Omega)$, o que é um absurdo, pois como $(v_n) \subset F$, e, assim, $\|v_n\| = R_0/2 > 0$, para todo n. Portanto, $v_\lambda \neq 0$.

Caso 2: $c_m > 0$.

Como $\alpha = 2$, pelo Lema 2.7.4, $c_m < \pi$. Usando novamente o fato de $v_n \rightharpoonup 0$ em $H^1(\Omega)$, obtemos as convergências em (2.79) e (2.80). Por outro lado, como (v_n) satisfaz a condição $(PS)_{F,c_m}$ para $\widetilde{J}_\lambda$, segue que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|v_n\|^2 - \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x,v_n)\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\widetilde{H}_\lambda(x,v_n)\,\mathrm{d}x\right) = c_m.$$

Consequentemente, $\|v_n\|^2 \to 2c_m$. Assim, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, $\|v_n\|^2 < 2c_m + \delta$. Fazendo $\delta \to 0$, obtemos que $\|v_n\|^2 \leq 2c_m < 2\pi$. Logo, existe $\epsilon > 0$ tal que, para n suficientemente grande, $\|v_n\|^2 \leq 2\pi - \epsilon$. Sejam

$$0 < \delta < \frac{\epsilon}{2\pi} \text{ e } r = \frac{2\pi}{(1+\delta)(2\pi-\epsilon)}.$$

Notemos que $r > 1$, pois

$$\begin{aligned}(1+\delta)(2\pi-\epsilon) &< \left(1+\frac{\epsilon}{2\pi}\right)(2\pi-\epsilon) = \left(\frac{2\pi+\epsilon}{2\pi}\right)(2\pi-\epsilon)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(4\pi^2-\epsilon^2\right) = 2\pi - \frac{\epsilon^2}{2\pi} < 2\pi.\end{aligned}$$

Do item (i) do Lema A.1.3, existe $C > 0$ tal que, para todo $s \in \mathbb{R}$, $\sup_{x\in\overline{\Omega}}|\widetilde{g}_\lambda(x,s)| \leq Ce^{(1+\delta)s^2}$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$. Disto segue que

$$\int_\Omega |\widetilde{g}_\lambda(x,v_n)|^r\,\mathrm{d}x \leq C\int_\Omega e^{r(1+\delta)v_n^2}\,\mathrm{d}x = C\int_\Omega e^{r(1+\delta)\|v_n\|^2\left(\frac{v_n}{\|v_n\|}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Como

$$r(1+\delta)\|v_n\|^2 \leq \frac{2\pi}{(1+\delta)(2\pi-\epsilon)}(1+\delta)(2\pi-\epsilon) = 2\pi,$$

pela desigualdade de Trudinger-Moser (2.2), obtemos que

$$\int_\Omega e^{r(1+\delta)\|v_n\|^2\left(\frac{v_n}{\|v_n\|}\right)^2}\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Logo,

$$\sup_n \int_\Omega |\widetilde{g}_\lambda(x,v_n)|^r\,\mathrm{d}x < \infty. \tag{2.81}$$

Usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\widetilde{g}_\lambda(x,v_n)v_n|\,\mathrm{d}x &\leq \left(\int_\Omega |\widetilde{g}_\lambda(x,v_n)|^r\,\mathrm{d}x\right)^{1/r}\left(\int_\Omega |v_n|^{r'}\,\mathrm{d}x\right)^{1/r'}\\ &\leq \left(\int_\Omega |\widetilde{g}_\lambda(x,v_n)|^r\,\mathrm{d}x\right)^{1/r}\|v_n\|_{L^{r'}(\Omega)},\end{aligned} \tag{2.82}$$

onde $r = \frac{2\pi}{(1+\delta)(2\pi-\epsilon)}$ e $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Agora, como $v_n \rightharpoonup 0$ em $H^1(\Omega)$, pela imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [2,+\infty)$, a menos de subsequência, $v_n \to 0$ em $L^s(\Omega)$, para todo $s \in [2,+\infty)$. Como Ω é limitado, $v_n \to 0$ em $L^s(\Omega)$, para todo $s \in [1,+\infty)$. Em particular, $v_n \to 0$ em $L^{r'}(\Omega)$. Então, $\|v_n\|_{L^{r'}(\Omega)} \to 0$. Deste resultado, juntamente com (2.81), voltamos a (2.82), e obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\widetilde{g}_\lambda(x,v_n)v_n| \, \mathrm{d}x = 0.$$

Disto segue que

$$0 \le \left| \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n)v_n \, \mathrm{d}x \right| \le \int_\Omega |\widetilde{g}_\lambda(x,v_n)v_n| \, \mathrm{d}x \to 0,$$

donde,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n)v_n \, \mathrm{d}x = 0. \tag{2.83}$$

Além disso, usando a imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [2,+\infty)$ e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtém-se que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widetilde{h}_\lambda(x,v_n)v_n \, \mathrm{d}x = 0. \tag{2.84}$$

Desde que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|v_n\|^2 \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n)v_n \, \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_\lambda(x,v_n)v_n \, \mathrm{d}x \right) = 0,$$

pois (v_n) satisfaz a condição $(PS)_{F,c_m}$, usando (2.83) e (2.84), obtemos que $\|v_n\|^2 \to 0$, o que é um absurdo, pois tínhamos que $\|v_n\|^2 \to 2c_m > 0$. Concluimos, assim, que $v_\lambda \neq 0$ em Ω.

Em seguida, nosso objetivo é mostrar que, para $\alpha = 2$, v_λ é solução fraca de (2.52).
De fato, tal resultado ocorre, pois como (v_n) satisfaz a condição $(PS)_{F,c_m}$, pelo Lema 2.7.3, $v_n \rightharpoonup v_\lambda$ em $H^1(\Omega)$ e, além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_\lambda) \, \mathrm{d}x \text{ e } \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widetilde{h}_\lambda(x,v_n) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{h}_\lambda(x,v_\lambda) \, \mathrm{d}x.$$

Procedendo como antes, tomemos $\varphi \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ e em seguida, usando argumento de densidade, obtemos das convergências acima que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n)\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_\lambda)\varphi \, \mathrm{d}x \text{ e } \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widetilde{h}_\lambda(x,v_n)\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{h}_\lambda(x,v_\lambda)\varphi \, \mathrm{d}x,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Também, já vimos que, se $v_n \rightharpoonup v_\lambda$ em $H^1(\Omega)$, pelo Teorema da Representação de Riesz,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (\nabla v_n \nabla \varphi + v_n \varphi)\ dx = \int_\Omega (\nabla v_\lambda \nabla \varphi + v_\lambda \varphi)\ dx,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Destes resultados e usando novamente (2.78), obtemos que, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (\nabla v_\lambda \nabla \varphi + v_\lambda \varphi)\ dx - \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_\lambda)\varphi\ dx - \int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_\lambda(x,v_\lambda)\varphi\ dx = 0.$$

Portanto, v_λ é solução fraca de (2.52). Deste resultado, juntamente do fato de $v_\lambda \neq 0$, usamos a Observação 2.7.1 e concluímos, pelo Lema 2.3.4, que $v_\lambda > 0$ em $\overline{\Omega}$. Com isto, termina a *Etapa 2* e a prova do lema. ■

No lema seguinte, obteremos a segunda solução fraca de (P_λ).

Lema 2.7.7 *Sejam v_λ e u_λ soluções fracas de* (2.52) *e (P_λ), respectivamente. Então $w_\lambda = u_\lambda + v_\lambda$ é solução fraca de (P_λ).*

Demonstração: Desde que v_λ e u_λ são soluções fracas de (2.52) e (P_λ), respectivamente, temos que, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (\nabla v_\lambda \nabla \varphi + v_\lambda \varphi)\ dx - \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_\lambda)\varphi\ dx - \int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_\lambda(x,v_\lambda)\varphi\ dx \\ &= \int_\Omega (\nabla v_\lambda \nabla \varphi + v_\lambda \varphi)\ dx - \int_\Omega [g(u_\lambda + v_\lambda) - g(u_\lambda)]\,\varphi\ dx \\ &\quad - \lambda \int_{\partial\Omega} [\psi\,|u_\lambda + v_\lambda|^q - \psi\,|u_\lambda|^q]\,\varphi\ dx \end{aligned}$$

e

$$\int_\Omega (\nabla u_\lambda \nabla \varphi + u_\lambda \varphi)\ dx - \int_\Omega g(u_\lambda)\varphi\ dx - \lambda \int_{\partial\Omega} \psi\,|u_\lambda|^q\,\varphi\ dx = 0.$$

Somando estas duas identidades, obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega [\nabla(u_\lambda + v_\lambda)\nabla\varphi + (u_\lambda + v_\lambda)\varphi]\ dx - \int_\Omega g(u_\lambda + v_\lambda)\varphi\ dx - \lambda \int_{\partial\Omega} \psi\,|u_\lambda + v_\lambda|^q\,\varphi\ dx \\ &= \int_\Omega (\nabla w_\lambda \nabla \varphi + w_\lambda \varphi)\ dx - \int_\Omega g(w_\lambda)\varphi\ dx - \lambda \int_{\partial\Omega} \psi\,|w_\lambda|^q\,\varphi\ dx, \end{aligned}$$

onde $w_\lambda = u_\lambda + v_\lambda$. Logo, $w_\lambda = u_\lambda + v_\lambda$ é solução fraca de (P_λ). ■

2.8 Prova do teorema principal

No que segue, provaremos o principal teorema deste capítulo.

Prova do Teorema 2.1.4

Pelo Teorema 2.6.1, (P_λ) tem uma solução fraca u_λ que é mínimo local de J_λ, para cada $\lambda \in (0, \Lambda)$. Pelo Lema 2.7.7, encontramos a segunda solução fraca para (P_λ) dada por $w_\lambda = u_\lambda + v_\lambda$. Por definição de Λ, (P_λ) não tem solução fraca para $\lambda > \Lambda$. Agora, nosso objetivo é mostrar que (P_λ) tem ao menos uma solução fraca, para $\lambda = \Lambda$.
Com efeito, inicialmente consideremos a seguinte afirmação:

Afirmação: Para $t > 0$ pequeno e $u \in H^1(\Omega)\backslash\{0\}$, temos que $\overline{J}_\lambda(tu) < 0$.

De fato, como $\overline{G}_\lambda(x, ts) \geq 0$, então $-\int_\Omega \overline{G}_\lambda(x, tu)\ \mathrm{d}x \leq 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\overline{J}_\lambda(tu) &= \frac{t^2}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \overline{G}_\lambda(x, tu)\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \overline{H}_\lambda(x, tu)\ \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{t^2}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right)\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \overline{H}_\lambda(x, tu)\ \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Pela definição de $\overline{H}_\lambda$, temos que

$$\int_{\partial\Omega} \overline{H}_\lambda(x, tu)\ \mathrm{d}x = \begin{cases} \lambda t \int_{\partial\Omega} \psi \mu^q u\ \mathrm{d}x, & tu(x) < v_\lambda(x), \\ \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1}\int_{\partial\Omega} \psi u^{q+1}\ \mathrm{d}x, & v_\lambda(x) \leq tu(x) \leq u_{\lambda_2}(x), \\ \lambda t \int_{\partial\Omega} \psi u_{\lambda_2}^q u\ \mathrm{d}x, & tu(x) > u_{\lambda_2}(x). \end{cases}$$

Para $t > 0$ pequeno, $t^2 < t^{q+1}$. Assim,

$$\int_{\partial\Omega} \overline{H}_\lambda(x, tu)\ \mathrm{d}x > \frac{t^2}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right)\ \mathrm{d}x.$$

Disto e de (2.85), obtemos que $\overline{J}_\lambda(tu) < 0$.
Por outro lado, obtivemos na demonstração do Lema 2.5.2 que, para cada $\lambda \in (0, \Lambda)$, u_λ é mínimo global de $\overline{J}_\lambda$. Então, $\overline{J}_\lambda(u_\lambda) < 0$. Além disso, temos que $u_\lambda \in N_\lambda$, onde N_λ está definido em (2.42). Assim, se considerarmos a sequência $(\lambda_n) \subset (0, \Lambda)$ tal que $\lambda_n \to \Lambda$ e (u_{λ_n}) a correspondente sequência de soluções fracas de (P_λ), podemos obter, para cada n,

u_{λ_n} mínimo global de $\overline{J}_{\lambda_n}$. Assim, $\overline{J}_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) < 0$ e $u_{\lambda_n} \in N_{\lambda_n}$. No Teorema 2.6.1, mostramos também que $\overline{J}_\lambda(u) = J_\lambda(u)$, para todo $u \in N_\lambda$. Assim, $J_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) = \overline{J}_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) < 0$. Logo, $\limsup_{n\to\infty} J_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) \leq 0$.

Afirmação: (u_{λ_n}) é limitada em $H^1(\Omega)$.

De fato, pelo resultado anterior, temos que, para n grande,

$$\frac{1}{2}\|u_{\lambda_n}\|^2 - \int_\Omega G(u_{\lambda_n})\ \mathrm{d}x - \frac{\lambda_n}{q+1}\int_{\partial\Omega}\psi\,|u_{\lambda_n}|^{q+1}\ \mathrm{d}x \leq 0.$$

Por outro lado, sendo u_{λ_n} solução fraca de (P_λ), $J'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n})\varphi = 0$, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Em particular, temos que

$$\|u_{\lambda_n}\|^2 - \int_\Omega g(u_{\lambda_n})\,u_{\lambda_n}\ \mathrm{d}x - \lambda_n\int_{\partial\Omega}\psi\,|u_{\lambda_n}|^{q+1}\ \mathrm{d}x = 0 \tag{2.86}$$

e, pela demonstração do item (ii) do Lema A.1.1, temos que dado $\epsilon > 0$, existe $s_\epsilon > 0$ tal que, para $s \geq s_\epsilon$, $G(s) \leq \epsilon g(s)\,s$. Logo,

$$\frac{1}{2}\|u_{\lambda_n}\|^2 \leq \int_{\Omega\cap\{u_{\lambda_n}\leq s_\epsilon\}} G(u_{\lambda_n})\ \mathrm{d}x + \epsilon\int_{\Omega\cap\{u_{\lambda_n}\geq s_\epsilon\}} g(u_{\lambda_n})\,u_{\lambda_n}\ \mathrm{d}x + \frac{\lambda_n}{q+1}\int_{\partial\Omega}\psi\,|u_{\lambda_n}|^{q+1}\ \mathrm{d}x.$$

O que implica

$$\frac{1}{2}\|u_{\lambda_n}\|^2 \leq C_\epsilon + \epsilon\int_\Omega g(u_{\lambda_n})\,u_{\lambda_n}\ \mathrm{d}x + \frac{\lambda_n}{q+1}\int_{\partial\Omega}\psi\,|u_{\lambda_n}|^{q+1}\ \mathrm{d}x. \tag{2.87}$$

Além disso, usando (2.86), temos que

$$\int_\Omega g(u_{\lambda_n})\,u_{\lambda_n}\ \mathrm{d}x \leq \|u_{\lambda_n}\|^2$$

e, já vimos na demonstração do Lema 2.3.1 (ver 2.7) que existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\partial\Omega}\psi\,|u_{\lambda_n}|^{q+1}\ \mathrm{d}x \leq C\,\|u_{\lambda_n}\|^{q+1}.$$

Consequentemente, existem C_1, $C_2 > 0$ tais que

$$\int_{\partial\Omega}\psi\,|u_{\lambda_n}|^{q+1}\ \mathrm{d}x \leq C_1 + C_2\,\|u_{\lambda_n}\|^2.$$

Escolhamos $C_1 > 0$ tal que $C_2 = \frac{q+1}{4\Lambda}$. Assim, voltando a (2.87) e usando que $\lambda_n \subset (0,\Lambda)$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_{\lambda_n}\|^2 &\leq C_\epsilon + \epsilon\,\|u_{\lambda_n}\|^2 + \frac{\lambda_n}{q+1}\left(C_1 + C_2\,\|u_{\lambda_n}\|^2\right)\\ &\leq C_\epsilon + \epsilon\,\|u_{\lambda_n}\|^2 + \frac{\Lambda}{q+1}\left(C_1 + \frac{q+1}{4\Lambda}\,\|u_{\lambda_n}\|^2\right).\end{aligned}$$

O que implica

$$\left(\frac{1}{4}-\epsilon\right)\|u_{\lambda_n}\|^2 \leq C_\epsilon + \frac{\Lambda C_1}{q+1}.$$

Disto, do fato de $\Lambda < \infty$ e considerando $\epsilon < \frac{1}{4}$, segue que $\|u_{\lambda_n}\|$ é limitada. Assim, a afirmação está provada.

Sendo (u_{λ_n}) limitada em $H^1(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$ Hilbert, pelo Teorema 1.2.3, a menos de subsequência, $u_{\lambda_n} \rightharpoonup u_\Lambda$ em $H^1(\Omega)$, para algum $u_\Lambda \in H^1(\Omega)$ e, além disso, pela imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [2, +\infty)$, $u_{\lambda_n} \to u_\Lambda$ em $L^2(\Omega)$. Desde que Ω é limitado, temos que $u_{\lambda_n} \to u_\Lambda$ em $L^1(\Omega)$.

Afirmamos agora que u_Λ é solução fraca de (P_Λ).

Com efeito, como $u_{\lambda_n} \rightharpoonup u_\Lambda$ em $H^1(\Omega)$, usando o Teorema da Representação de Riesz (ver Lema 2.7.6, (2.77)),

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left(\nabla u_{\lambda_n}\nabla\varphi + u_{\lambda_n}\varphi\right)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega \left(\nabla u_\Lambda \nabla\varphi + u_\Lambda\varphi\right)\, \mathrm{d}x, \tag{2.88}$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$ e, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Lema 2.3.2, (2.14)), mostra-se que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Omega} \psi\, |u_{\lambda_n}|^q\, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \psi\, |u_\Lambda|^q\, \mathrm{d}x.$$

Por outro lado, como $J'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n})\varphi = 0$, temos que $\lim_{n\to\infty} J'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n})\varphi = 0$, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, e fazendo $\varphi = u_{\lambda_n}$, temos que

$$\int_\Omega g(u_{\lambda_n})\, u_{\lambda_n}\, \mathrm{d}x + \lambda_n \int_{\partial\Omega} \psi\, |u_{\lambda_n}|^{q+1}\, \mathrm{d}x \leq \epsilon + \|u_{\lambda_n}\|^2 \leq \epsilon + C.$$

Consequentemente,

$$\sup_n \int_\Omega g(u_{\lambda_n})\, u_{\lambda_n}\, \mathrm{d}x < \infty.$$

Agora, pelo item (iii) do Lema A.1.3, $g(u_{\lambda_n})$, $g(u_\Lambda) \in L^1(\Omega)$. Portanto, pelo item (i) do Lema A.3.1,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g(u_{\lambda_n})\, \mathrm{d}x = \int_\Omega g(u_\Lambda)\, \mathrm{d}x.$$

Usando estas convergências e escolhendo primeiramente $\varphi \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$ e depois usando argumentos de densidade obtemos, de maneira análoga ao que fizemos no Lema 2.7.6 (ver (2.75)), que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} g\left(u_{\lambda_n}\right)\varphi \,\mathrm{d}x = \int_{\Omega} g\left(u_{\Lambda}\right)\varphi \,\mathrm{d}x \text{ e } \lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Omega} \psi \left|u_{\lambda_n}\right|^{q}\varphi \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \psi \left|u_{\Lambda}\right|^{q}\varphi \,\mathrm{d}x,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$.

Assim, usando novamente que $\lim_{n\to\infty} J'_{\lambda_n}\left(u_{\lambda_n}\right)\varphi = 0$, obtemos das últimas convergências e de (2.88) que

$$\int_{\Omega}\left(\nabla u_{\Lambda}\nabla\varphi + u_{\Lambda}\varphi\right)\,\mathrm{d}x - \int_{\Omega} g\left(u_{\Lambda}\right)\varphi\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\psi\left|u_{\Lambda}\right|^{q}\varphi\,\mathrm{d}x = 0,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Disto, segue que u_{Λ} é solução fraca de (P_{Λ}). Assim, para $\lambda = \Lambda$, (P_{Λ}) tem ao menos uma solução fraca e isto conclui a prova do teorema.

Capítulo 3

Sobre uma classe de problemas elípticos singulares em $\mathbb{R}^2$ com condição de Neumann

3.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos a existência e multiplicidade de soluções fracas positivas para a seguinte classe de problemas:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{c} -\Delta u + u = \dfrac{h(x,u)e^{u^2}}{|x|^{\beta}} \\ u > 0 \end{array}\right\} \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda \psi u^q, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{Q_λ}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado com fronteira C^2, $0 \in \partial\Omega$, $u \in H^1(\Omega)$, $\beta \in [0,2)$, $\lambda > 0$, $q \in [0,1)$ e h tem grau superlinear no infinito.

Em seguida, enunciaremos as principais condições sob as quais (Q_λ) será estudado:

(H_1) ψ é uma função Hölder contínua não-negativa e não-trivial em $\partial\Omega$.

(H_2) $h : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz:

(a) $h(x,s) \in C^1\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right)$, $h(x,s) \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$, $h(x,s) = 0$ se $s < 0$;

(b) $\frac{\partial h}{\partial s}(x,s) \geq 0$, para todo $s > 0$ e $x \in \overline{\Omega}$;

(c) $\liminf_{\mathbf{s}\to\infty} \frac{h(x,s)}{\mathbf{s}} > 0$, uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$;

(d) $\limsup_{\mathbf{s}\to\infty} \frac{h(x,\mathbf{s})}{\mathbf{s}^k} = 0$, uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$, para algum $k > 1$;

(e) Dado $\epsilon > 0$, $\limsup_{\mathbf{s}\to\infty} \frac{\partial g}{\partial s}(x,s)e^{-(1+\epsilon)s^2} = 0$, uniformemente em $x \in \overline{\Omega}\backslash\{0\}$, onde $g(x,s) = \dfrac{h(x,s)e^{s^2}}{|x|^\beta}$;

(f) $\lim_{s\to 0^+} \frac{h(x,s)}{s^k} = 0$, uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$, para algum $k > 1$.

A seguir, apresentaremos o resultado principal deste capítulo.

Teorema 3.1.1 *Sob as hipóteses* $(H_1) - (H_2)$, *existe* $0 < \Lambda < \infty$ *tal que* (Q_λ) *tem pelo menos duas soluções fracas para todo* $\lambda \in (0, \Lambda)$, *nenhuma solução fraca para* $\lambda > \Lambda$ *e pelo menos uma solução fraca para* $\lambda = \Lambda$.

Observação 3.1.2 *Destacamos que os resultados deste capítulo são baseados no artigo* [18] *devido a B. S. Kaur e K. Sreenadh.*

Assim como no Capítulo 2, estamos interessados em encontrar soluções fracas positivas. Portanto consideraremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \dfrac{h(x,u)e^{u^2}}{|x|^\beta}, \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = h\left(u\right), \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde

$$h(u) = \begin{cases} \lambda\psi u^q, & u \geq 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases}$$

Procedendo de maneira similar ao Capítulo 2, obtemos que $u \in H^1(\Omega)$ é solução fraca de (Q_λ) se, para cada $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \ \mathrm{d}x + \int_\Omega u\varphi \ \mathrm{d}x - \int_\Omega g(x,u)\varphi \ \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u^q \varphi \ \mathrm{d}x = 0. \tag{3.1}$$

Seja $I_\lambda : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega G(x,u)\ \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\partial\Omega} \psi\,|u|^{q+1}\ \mathrm{d}x,$$

onde

$$G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\ \mathrm{d}t \text{ e } g(x,t) = \frac{h(x,t)e^{t^2}}{|x|^\beta}. \tag{3.2}$$

Pelo Apêndice (A.10), temos que, para cada $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$I'_\lambda(u)\,\varphi = \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi\ \mathrm{d}x + \int_\Omega u\varphi\ \mathrm{d}x - \int_\Omega g(x,u)\varphi\ \mathrm{d}x - \lambda\int_{\partial\Omega}\psi\,|u|^{q-1}\,u\varphi\ \mathrm{d}x. \tag{3.3}$$

Consequentemente, pontos críticos de I_λ são soluções fracas de (Q_λ).

Observação 3.1.3 *Neste capítulo, usaremos as seguintes notações: se* $p \in (1,+\infty)$, $p' = \frac{p}{(p-1)}$, *onde* $p' \in (1,+\infty)$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; $L^p\left(\Omega, |x|^{-\beta}\right)$ *é o espaço de Lebesgue com medida* $|x|^{-\beta}\ \mathtt{d}x$ *e norma* $\|u\|_{L^p\left(\Omega,|x|^{-\beta}\right)} = \left(\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^\beta}\ \mathtt{d}x\right)^{1/p}$, *para todo* $u \in L^p\left(\Omega, |x|^{-\beta}\right)$.

Observação 3.1.4 *Neste capítulo, para garantir a existência de soluções fracas positivas de* (Q_λ), *usaremos ideias e métodos análogos àqueles usados no Capítulo 2. Portanto, omitiremos a prova de alguns resultados. Outras demonstrações, porém, serão repetidas devido a existência de singularidade no problema* (Q_λ).

3.1.1 Desigualdade de Hardy-Sobolev

Neste capítulo, podemos ter $\beta \neq 0$. Assim, precisaremos recorrer à desigualdade de Hardy-Sobolev dada no lema a seguir.

Lema 3.1.5 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $u \in H^1(\Omega)$ *e* $p \in (1,+\infty)$. *Então, existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\left(\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^\beta}\ \mathtt{d}x\right)^{1/p} \leq C\,\|u\|,$$

para $\beta \in [0,2)$.

Demonstração: Usando a desigualdade de Hölder, temos que

$$\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^\beta}\,\mathtt{d}x \leq \left(\int_\Omega |u|^{pr}\;\mathtt{d}x\right)^{1/r}\left(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{\beta r'}}\,\mathtt{d}x\right)^{1/r'} = \|u\|^p_{L^{pr}(\Omega)}\left(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{\beta r'}}\,\mathtt{d}x\right)^{1/r'},$$

onde $r' > 1$ é escolhido de maneira que $\beta r' < 2$ e $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Desde que Ω é limitado, tomemos $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\Omega \subset B_R(0)$ e, usando coordenadas polares, temos que

$$\int_\Omega \frac{1}{|x|^{\beta r'}}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^R \frac{r}{r^{\beta r'}}\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^R r^{1-\beta r'}\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{2-\beta r'}R^{2-\beta r'} < \infty,$$

pois $\beta r' < 2$. Assim,

$$\left(\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^\beta}\,\mathtt{d}x\right)^{1/p} \leq C_1\|u\|_{L^{pr}(\Omega)}.$$

Pela imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, obtemos

$$\left(\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^\beta}\,\mathtt{d}x\right)^{1/p} \leq C\|u\|.$$

■

3.2 Desigualdade singular de Trudinger-Moser

Nesta seção, mostraremos uma versão singular da desigualdade de Trudinger-Moser em $H^1(\Omega)$. Para tanto, faremos uso do Lema 2.1.6.

Teorema 3.2.1 *Seja $u \in H^1(\Omega)$. Então, para cada $\alpha > 0$ e $\beta \in [0,2)$, temos que*

$$\int_\Omega \frac{e^{\alpha u^2}}{|x|^\beta}\,\mathtt{d}x < \infty. \tag{3.4}$$

Além disso, para todo $\beta \in [0,2)$,

$$\sup\left\{\alpha : \sup_{\|u\|\leq 1}\int_\Omega \frac{e^{\alpha u^2}}{|x|^\beta}\,\mathtt{d}x < \infty\right\} = \pi(2-\beta). \tag{3.5}$$

Demonstração: Para efeito de simplificação, denotaremos

$$A = \left\{\alpha : \sup_{\|u\|\leq 1}\int_\Omega \frac{e^{\alpha u^2}}{|x|^\beta}\,\mathrm{d}x < \infty\right\}.$$

Desde que $\beta \in [0,2)$, podemos tomar $t > 1$ tal que $\beta t < 2$. Então, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_\Omega \frac{e^{\alpha u^2}}{|x|^\beta}\ \mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega e^{\frac{\alpha t}{t-1}u^2}\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{(t-1)}{t}} \left(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{\beta t}}\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{t}},$$

com $\frac{t-1}{t} + \frac{1}{t} = 1$. Como $\frac{\alpha t}{t-1} > 0$, pela desigualdade de Trudinger-Moser (2.1), temos que

$$\int_\Omega e^{\frac{\alpha t}{t-1}u^2}\ \mathrm{d}x < \infty.$$

Sendo Ω limitado, tomemos $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\Omega \subset B_R(0)$ e, usando coordenadas polares, obtemos que

$$\int_\Omega \frac{1}{|x|^{\beta t}}\ \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^R \frac{r}{r^{\beta t}}\ \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^R r^{1-\beta t}\ \mathrm{d}r = \frac{2\pi}{2-\beta t}R^{2-\beta t} < \infty,$$

pois $\beta t < 2$. Logo,

$$\int_\Omega \frac{e^{\alpha u^2}}{|x|^\beta}\ \mathrm{d}x < \infty$$

e a primeira parte do teorema está provada. Agora, suponha que $\sup A < \pi(2-\beta)$. Então, existe α tal que $\alpha < \pi(2-\beta)$, ou seja, $\frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\beta}{2} < 1$. Desde que $\beta \in [0,2)$, podemos tomar $t > 1$ tal que $\frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\beta t}{2} = 1$. Assim, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_\Omega \frac{e^{\alpha u^2}}{|x|^\beta}\ \mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega e^{2\pi u^2}\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{\alpha}{2\pi}} \left(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{\frac{2}{t}}}\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{\beta t}{2}}.$$

Pela desigualdade de Trudinger-Moser (2.2),

$$\sup_{\|u\|\leq 1} \int_\Omega e^{2\pi u^2}\ \mathrm{d}x < \infty.$$

Além disso, como $t > 1$, $\frac{2}{t} < 2$. Então, usando novamente o fato de Ω ser limitado, tomemos $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\Omega \subset B_R(0)$ e, usando coordenadas polares, temos que

$$\int_\Omega \frac{1}{|x|^{2/t}}\ \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^R \frac{r}{r^{2/t}}\ \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^R r^{1-\frac{2}{t}}\ \mathrm{d}r = \frac{2\pi t}{2(t-1)}R^{2-2/t} < \infty.$$

Logo,

$$\sup_{\|u\|\leq 1} \int_\Omega \frac{e^{\alpha u^2}}{|x|^\beta}\ \mathrm{d}x < \infty.$$

Suponhamos agora que $\sup A > \pi\,(2-\beta)$. Assim, existe α tal que $\frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\beta}{2} > 1$. Consideremos a sequência de funções dada no Lema 2.1.6. Então,

$$\int_\Omega \frac{e^{\alpha\omega_n^2(x)}}{|x|^\beta}\,\mathrm{d}x \geq e^{\frac{\alpha}{\pi}\ln(nL)} \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} \frac{1}{|x|^\beta}\,\mathrm{d}x = (nL)^{\alpha/\pi} \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} \frac{1}{|x|^\beta}\,\mathrm{d}x.$$

Usando novamente coordenadas polares, obtemos

$$\int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} \frac{1}{|x|^\beta}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{2-\beta}\frac{1}{n^{2-\beta}}.$$

Assim,

$$\int_\Omega \frac{e^{\alpha\omega_n^2(x)}}{|x|^\beta}\,\mathrm{d}x \geq \frac{2\pi L^{\alpha/\pi}}{2-\beta} n^{2\left(\frac{\alpha}{2\pi}+\frac{\beta}{2}-1\right)}.$$

Desde que $\frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\beta}{2} > 1$, fazendo $n \to +\infty$ na desigualdade anterior, temos que o lado direito tende para $+\infty$. Consequentemente,

$$\sup_{\|\omega_n\|\leq 1} \int_\Omega \frac{e^{\alpha\omega_n^2(x)}}{|x|^\beta}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

Deste resultado, concluímos que, se $\frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\beta}{2} > 1$, existem funções $(\omega_n) \subset H^1(\Omega)$ tal que a identidade acima ocorre. O que é um absurdo, pois contradiz a definição de $\alpha \in A$. Então, podemos concluir que (3.5) ocorre, pois, supondo que $\sup A < \pi\,(2-\beta)$, existe $\sup A < \alpha_0 < \pi\,(2-\beta)$ tal que

$$\sup_{\|u\|\leq 1} \int_\Omega \frac{e^{\alpha_0 u^2}}{|x|^\beta}\,\mathrm{d}x < \infty,$$

o que contradiz a definição de supremo. Logo, (3.5) vale e termina a prova do teorema. ■

3.3 Existência de solução para (Q_λ), para $\lambda \in (0, \lambda_0)$

Nesta seção, mostraremos que (Q_λ) possui solução fraca para $\lambda > 0$ pequeno.

3.3.1 Existência de um mínimo local para I_λ

O seguinte lema mostra que I_λ possui um mínimo local numa vizinhança da origem de $H^1(\Omega)$, para λ pequeno.

Lema 3.3.1 *Assumindo as hipóteses* $(H_1)-(H_2)$, *existe* $\lambda_0 > 0$ *tal que* I_λ *admite um mínimo local próximo à origem de* $H^1(\Omega)$ *para cada* $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

Demonstração: Dividiremos a prova em duas etapas.

Etapa 1: Nesta etapa, mostraremos que existem λ_0, R_0, $\delta > 0$ tais que $I_\lambda(u) \geq \delta$, para todo $\|u\| = R_0$ e $\lambda < \lambda_0$.

De fato, pelo item (ii) do Lema A.1.5, temos que $G(x,s) \leq C|s|^{k+1} \frac{e^{s^2}}{|x|^\beta}$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}\backslash\{0\}$, para algum $k > 1$, $\beta \in [0,2)$ e para todo $s \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\int_\Omega G(x,u)\ \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega |u|^{k+1} \frac{e^{u^2}}{|x|^\beta}\ \mathrm{d}x.$$

Usando a desigualdade de Hölder e considerando $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, obtemos da estimativa anterior que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G(x,u)\ \mathrm{d}x &\leq C \int_\Omega \frac{|u|^{k+1}}{|x|^{\beta/p'}} \frac{e^{u^2}}{|x|^{\beta/p}}\ \mathrm{d}x \\
&\leq C \left(\int_\Omega |u|^{(k+1)p'} |x|^{-\beta}\ \mathrm{d}x \right)^{\frac{k+1}{(k+1)p'}} \left(\int_\Omega \frac{e^{p\|u\|^2 \left(\frac{u}{\|u\|}\right)^2}}{|x|^\beta}\ \mathrm{d}x \right)^{1/p} \\
&= C \|u\|^{k+1}_{L^{(k+1)p'}\left(\Omega, |x|^{-\beta}\right)} \left(\int_\Omega \frac{e^{p\|u\|^2 \left(\frac{u}{\|u\|}\right)^2}}{|x|^\beta}\ \mathrm{d}x \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Desde que $\beta < 2$, podemos escolher $p > 1$ e $R > 0$ tal que $\frac{pR^2}{2\pi} + \frac{\beta}{2} < 1$. O que implica que $R \in \left(0, \sqrt{(2-\beta)\pi}\right)$. Assim, para $\|u\|^2 \leq R^2 < (2-\beta)\pi$, podemos obter $p > 1$ tal que $p\|u\|^2 < (2-\beta)\pi$. Disto e de (3.5), obtemos que

$$\int_\Omega \frac{e^{p\|u\|^2 \left(\frac{u}{\|u\|}\right)^2}}{|x|^\beta}\ \mathrm{d}x < \infty.$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Hardy-Sobolev, temos que

$$\|u\|^{k+1}_{L^{p'}\left(\Omega, |x|^{-\beta}\right)} \leq C\|u\|^{k+1}.$$

Destes resultados segue que

$$\int_\Omega G(x,u)\ \mathrm{d}x < C_1 \|u\|^{k+1}, \text{ para todo } \|u\| \leq R. \tag{3.6}$$

Vimos em (2.7) que, usando a imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\int_{\partial\Omega} \psi \, |u|^{q+1} \, \mathrm{d}x \leq C_2 \, \|u\|^{q+1}. \tag{3.7}$$

Assim, escolhendo $R_0^2 \in (0, (2-\beta)\,\pi)$ temos que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega G(x,u) \, \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\partial\Omega} \psi \, |u|^{q+1} \, \mathrm{d}x \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - C_1 \|u\|^{k+1} - \lambda C_2 \|u\|^{q+1}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

para $\|u\| = R_0$. Como $k > 1$, escolhamos e fixemos $R_0^2 \in (0, (2-\beta)\,\pi)$ e $\lambda_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\delta := \frac{1}{2}R_0^2 - C_1 R_0^{k+1} - \lambda C_2 R_0^{q+1} > 0,$$

para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Logo, com tais escolhas para R_0 e para λ_0, por (3.8), obtemos $\delta > 0$ tal que $I_\lambda(u) \geq \delta$, para todo $\|u\| = R_0$, o que finaliza a *Etapa 1*.

Etapa 2: Nesta etapa, mostraremos que I_λ possui um mínimo local próximo à origem de $H^1(\Omega)$ para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

Inicialmente, mostraremos que $I_\lambda(tu) < 0$, para t pequeno e para todo $u \in H^1(\Omega)\backslash\{0\}$. Com efeito, sejam R_0, λ_0 e δ como na *Etapa 1* e $u \in H^1(\Omega)\backslash\{0\}$. Assim,

$$\begin{aligned} I_\lambda(tu) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla tu|^2 + |tu|^2\right) \mathrm{d}x - \int_\Omega G(x,tu) \, \mathrm{d}x \; - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\partial\Omega} \psi \, |tu|^{q+1} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{t^2}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) \mathrm{d}x - \int_\Omega G(x,tu) \, \mathrm{d}x \; - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1}\int_{\partial\Omega} \psi \, |u|^{q+1} \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Por definição, G é não-negativa. Logo, $-\int_\Omega G(x,tu) \, \mathrm{d}x \leq 0$. Assim,

$$I_\lambda(tu) \leq \frac{t^2}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) \mathrm{d}x - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1}\int_{\partial\Omega} \psi \, |u|^{q+1} \, \mathrm{d}x.$$

Além disso, como $q + 1 < 2$, temos $t^2 < t^{q+1}$, para $t < 1$ e, consequentemente

$$\frac{\lambda t^{q+1}}{q+1}\int_{\partial\Omega} \psi \, |u|^{q+1} \, \mathrm{d}x > \frac{t^2}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) \mathrm{d}x,$$

para t suficientemente pequeno. Assim,

$$I_\lambda (tu) \leq \frac{t^2}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2 \right) \, \mathrm{d}x - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_{\partial\Omega} \psi \, |u|^{q+1} \, \mathrm{d}x < 0,$$

para t suficientemente pequeno. Em particular, temos $I_\lambda (u) < 0$, para algum $u \in H^1(\Omega)$ com $\|u\| \leq R_0$ e $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Se I_λ atingir mínimo em algum u_λ, com $\|u_\lambda\| \leq R_0$, então $\|u_\lambda\| < R_0$, pois, pela *Etapa 1*, $I_\lambda (u) \geq \delta > 0$, para $\|u\| = R_0$.

Nosso objetivo agora é mostrar que I_λ atinge um mínimo local para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

Com efeito, consideremos $B_{R_0} = \{u \in H^1(\Omega) : \|u\| \leq R_0\}$ e uma sequência $(u_n) \subset B_{R_0}$ tal que

$$I_\lambda (u_n) \searrow \inf_{u \in B_{R_0}} I_\lambda (u) = a. \tag{3.9}$$

Sendo $H^1(\Omega)$ um espaço reflexivo e a sequência (u_n) limitada em $H^1(\Omega)$, pelo Teorema 1.2.3, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_\lambda$ em $H^1(\Omega)$. Logo, pela Proposição 1.2.2,

$$\|u_\lambda\| \leq \liminf \|u_n\| \leq R_0.$$

Consequentemente,

$$\|u_\lambda\|^2 \leq \liminf \|u_n\|^2 \leq R_0^2. \tag{3.10}$$

Afirmação: $I_\lambda (u)$ é limitado em B_{R_0}.

De fato, seja $u \in B_{R_0}$. Assim, por (3.6) e (3.7), existem C_1, $C_2 > 0$ tais que

$$\int_\Omega |G(x,u)| \, \mathrm{d}x \leq C_1 R_0^{k+1} \text{ e } \int_{\partial\Omega} \psi \, |u|^{q+1} \, \mathrm{d}x \leq C_2 R_0^{q+1}.$$

Então,

$$\begin{aligned} |I_\lambda (u)| &\leq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \int_\Omega |G(x,u)| \, \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q+1} \int_{\partial\Omega} |\psi| \, |u|^{q+1} \, \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{2} R_0^2 + C_1 R_0^{k+1} + \frac{\lambda C_2}{q+1} R_0^{q+1} \end{aligned}$$

e a afirmação segue.

Em seguida, mostraremos que

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega G(x, u_n) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega G(x, u_\lambda) \, \mathrm{d}x. \tag{3.11}$$

De fato, pelo item (ii) do Lema A.1.5, existe $C > 0$ tal que $|G(x,s)| \leq Cs^{k+1}\frac{e^{s^2}}{|x|^\beta}$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}\backslash\{0\}$, para todo $s \in \mathbb{R}$, $\beta \in [0,2)$ e para algum $k > 1$. Assim,

$$\int_\Omega |G(x,u_n)\,u_n| \ \mathrm{d}x \leq C\int_\Omega |u_n|^{k+2}\,\frac{e^{u_n^2}}{|x|^\beta}\ \mathrm{d}x.$$

Pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\int_\Omega |u_n|^{k+2}\,\frac{e^{u_n^2}}{|x|^\beta}\ \mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega \frac{e^{pu_n^2}}{|x|^{\beta p}}\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |u_n|^{(k+2)p'}\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{(k+2)}{(k+2)p'}},$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e escolhemos $p > 1$ tal que $\beta p < 2$. Usando a imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, segue que

$$\int_\Omega |u_n|^{k+2}\,\frac{e^{u_n^2}}{|x|^\beta}\ \mathrm{d}x \leq C\left(\int_\Omega \frac{e^{p\|u_n\|^2\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)^2}}{|x|^{\beta p}}\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \|u_n\|^{k+2}.$$

Por outro lado, como $(u_n) \subset B_{R_0}$, podemos escrever que $\frac{p\|u_n\|^2}{2\pi} + \frac{\beta p}{2} < 1$. Nestas condições, segue de (3.5) que

$$\int_\Omega \frac{e^{p\|u_n\|^2\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)^2}}{|x|^{\beta p}}\ \mathrm{d}x < \infty.$$

Assim,

$$\int_\Omega |G(x,u_n)\,u_n| \ \mathrm{d}x \leq C\,\|u_n\|^{k+2} \leq CR_0^{k+2}.$$

Consequentemente,

$$\sup_n \int_\Omega |G(x,u_n)\,u_n| \ \mathrm{d}x < \infty.$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u_\lambda$ em $H^1(\Omega)$, pela imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [2, +\infty)$, a menos de subsequência, $u_n \to u_\lambda$ em $L^2(\Omega)$. Usando que Ω é limitado, obtemos que $u_n \to u_\lambda$ em $L^1(\Omega)$. Além disso, pelo item (iii) do Lema A.1.4, $G(x,u_n)$, $G(x,u_\lambda) \in L^1(\Omega)$. Assim, pelo item (i) do Lema A.3.2, obtemos (3.11).

Provamos no Lema 2.3.2, (2.14), que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Omega} \psi\,|u_n|^{q+1}\ \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \psi\,|u_\lambda|^{q+1}\ \mathrm{d}x. \tag{3.12}$$

Além disso, desde que $\|u_n\| \leq R_0$, pelo Teorema de Weierstrass, a menos de subsequência, $\|u_n\|$ converge. Deste fato, juntamente com os resultados obtidos em (3.11) e (3.12), segue de (3.9) que

$$\frac{1}{2} \lim_n \|u_n\|^2 = a + \int_\Omega G(u_\lambda)\ \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q+1} \int_{\partial\Omega} \psi\, |u_\lambda|^{q+1}\ \mathrm{d}x.$$

Consequentemente, por (3.10), temos

$$\frac{1}{2} \|u_\lambda\|^2 \le a + \int_\Omega G(u_\lambda)\ \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{q+1} \int_{\partial\Omega} \psi\, |u_\lambda|^{q+1}\ \mathrm{d}x,$$

o que mostra $I_\lambda(u_\lambda) \le a$. Por outro lado, $I_\lambda(u_\lambda) \ge a$. Assim, $I_\lambda(u_\lambda) = a$ e u_λ é mínimo local para I_λ próximo à origem do $H^1(\Omega)$. ■

3.3.2 Regularidade das soluções

Nosso objetivo agora é obter um resultado de regularidade que encontra-se no Lema 3.3.3 abaixo. Iniciaremos introduzindo um lema, cuja prova segue de maneira análoga à prova do Lema 2.3.3.

Lema 3.3.2 *Seja u_λ solução fraca de (Q_λ). Então, $u_\lambda \ge 0$ quase sempre em Ω.*

Lema 3.3.3 *Seja u_λ solução fraca de (Q_λ). Então $u_\lambda \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\backslash\{0\}\right)$ para algum $\theta \in (0,1)$. Além disso, se u_λ é não-trivial, então $u_\lambda > 0$ em $\overline{\Omega}$.*

Demonstração: Seja u_λ solução fraca de (Q_λ). Provaremos inicialmente que, $g(x, u_\lambda) - u_\lambda \in L^p(\Omega\backslash B_R(0))$, com $R > 0$ suficientemente pequeno e para todo $1 < p < +\infty$. De fato, pelo item (i) do Lema A.1.5, temos que $g(x,s) \le C\,|s|^k \frac{e^{s^2}}{|x|^\beta}$ uniformemente em $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$, para algum $k > 1$, $\beta \in [0,2)$ e para todo $s \in \mathbb{R}$. Denotemos $\Omega_R = \Omega\backslash B_R(0)$. Assim,

$$\int_{\Omega_R} |g(x,u_\lambda)|^p\ \mathrm{d}x \le C \int_{\Omega_R} |u_\lambda|^{pk} \frac{e^{pu_\lambda^2}}{|x|^{p\beta}}\ \mathrm{d}x \le \frac{C}{R^{p\beta}} \int_{\Omega_R} |u_\lambda|^{pk}\, e^{pu_\lambda^2}\ \mathrm{d}x. \tag{3.13}$$

Usando a desigualdade de Hölder e a imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_R} |u_\lambda|^{pk}\, e^{pu_\lambda^2}\ \mathrm{d}x &\le \left(\int_{\Omega_R} |u_\lambda|^{prk}\ \mathrm{d}x\right)^{1/r} \left(\int_{\Omega_R} e^{pr'u_\lambda^2}\ \mathrm{d}x\right)^{1/r'} \\ &\le C_1\, \|u_\lambda\|^{kp} \left(\int_{\Omega_R} e^{pr'u_\lambda^2}\ \mathrm{d}x\right)^{1/r'},\end{aligned}$$

$r > 1$ e $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'} = 1$. Pela desigualdade de Trudinger-Moser (2.1), temos que $\int_{\Omega_R} e^{pr'u_\lambda^2}\, dx < \infty$. Disto e da estimativa anterior, obtemos de (3.13) que

$$\int_{\Omega_R} |g(x, u_\lambda)|^p \; dx < \infty.$$

Logo, $g(x, u_\lambda) \in L^p(\Omega_R)$ para todo $1 < p < +\infty$. Agora, pela imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, temos que $u_\lambda \in L^p(\Omega_R)$. Assim, $g(x, u_\lambda) - u_\lambda \in L^p(\Omega_R)$. Logo, pelo Teorema de Calderon-Zygmund, $u_\lambda \in W^{2,p}(\Omega_R)$ e $-\Delta u_\lambda = g(x, u_\lambda) - u_\lambda$ quase sempre em Ω_R.

Escolhamos $p > 1$ de modo que $\frac{2}{p} < 1$ e $\frac{2}{p}$ seja não-inteiro. Assim, $2 > \frac{2}{p}$ e desde que $u_\lambda \in W^{2,p}(\Omega_R)$, pelo Teorema 1.3.4, temos que $u_\lambda \in C^{2-\left[\frac{2}{p}\right]-1,\theta}\left(\overline{\Omega}_R\right)$, com $\theta = \left[\frac{2}{p}\right] + 1 - \frac{2}{p}$. Então, $u_\lambda \in C^{1,\theta}\left(\overline{\Omega}_R\right)$. Assim, $u_\lambda \in C^{0,\theta}\left(\overline{\Omega}_R\right)$ e, por composição, $g(x, u_\lambda) \in C^{0,\theta}\left(\overline{\Omega}_R\right)$. Então, pelo Teorema de Schauder, $u_\lambda \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}_R\right)$, para algum $\theta \in (0, 1)$. Agora, como R é arbitrário e $0 \in \partial\Omega$, temos que $u_\lambda \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\backslash\{0\}\right)$.

Desde que $u_\lambda \in C^2(\Omega)$ e é solução fraca de (Q_λ), temos que

$$\int_\Omega (\nabla u_\lambda \nabla \varphi + u_\lambda \varphi) \; dx = \int_\Omega g(x, u_\lambda)\varphi \; dx + \lambda \int_{\partial\Omega} \psi\, |u_\lambda|^q\, \varphi \; dx \geq 0,$$

para cada $\varphi \in H^1(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$. Assim, pelo Lema 2.3.5, $-\Delta u_\lambda + u_\lambda \geq 0$ em Ω no sentido fraco. Além disso, $\frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} = h(u_\lambda) \geq 0$ sobre $\partial\Omega$ e, desde que u_λ é não-trivial, pelo Lema 2.3.4, obtemos que $u_\lambda > 0$ em $\overline{\Omega}$. ■

3.4 Não existência de solução

Definamos

$$\Lambda := \sup\{\lambda > 0 : (Q_\lambda) \text{ tem solução fraca}\}. \tag{3.14}$$

O lema a seguir garantirá que, para $\lambda > \Lambda$, (Q_λ) não tem solução fraca.

Lema 3.4.1 *Seja* Λ *definido em* (3.14). *Então* $0 < \Lambda < \infty$.

Demonstração: Seja u_λ solução fraca de (Q_λ). Tomemos $\varphi = 1$ como função teste em (3.3). Então, obtemos que

$$\int_\Omega u_\lambda \; dx = \int_\Omega g(x, u_\lambda) \; dx + \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_\lambda^q \; dx. \tag{3.15}$$

Pela imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, temos que $u_\lambda \in L^s(\Omega)$, para todo $s \geq 1$. Como Ω é limitado, existe $C_1 = C_1(p, \Omega) > 0$ tal que

$$\|u_\lambda\|_{L^1(\Omega)} \leq C_1 \|u_\lambda\|_{L^p(\Omega)},$$

para todo $p > 1$.

Afirmação: Existe $C_2 = C_2(p, \Omega) > 0$ tal que

$$\int_\Omega g(x, u_\lambda)\ \mathrm{d}x \geq C_2 \|u_\lambda\|^p_{L^p(\Omega)}. \tag{3.16}$$

Com efeito, prova-se facilmente que, para todo $s \geq 0$ e para todo $p \geq 1$, existe $C = C(p, \Omega) > 0$ tal que

$$s^p \leq Ch(x, s) \frac{e^{s^2}}{|x|^\beta} = Cg(x, s)$$

uniformemente em $x \in \overline{\Omega} \backslash \{0\}$ e $\beta \in [0, 2)$. Consequentemente,

$$\int_\Omega |u_\lambda|^p\ \mathrm{d}x \leq C(p, \Omega) \int_\Omega g(x, u_\lambda)\ \mathrm{d}x.$$

Desta desigualdade obtemos (3.16), com $C_2 = \frac{1}{C}$. Então, usando (3.15), temos que

$$C_2 \|u_\lambda\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \int_\Omega g(x, u_\lambda)\ \mathrm{d}x \leq \int_\Omega u_\lambda\ \mathrm{d}x = \|u_\lambda\|_{L^1(\Omega)} \leq C_1 \|u_\lambda\|_{L^p(\Omega)},$$

o que implica

$$C_2 \|u_\lambda\|^p_{L^p(\Omega)} - C_1 \|u_\lambda\|_{L^p(\Omega)} \leq 0.$$

Denotando $t = \|u_\lambda\|_{L^p(\Omega)}$, obtemos da estimativa anterior que

$$t\left(C_2 t^{p-1} - C_1\right) \leq 0.$$

Como as soluções da inequação acima pertencem ao intervalo $[0, (C_1/C_2)^{1/(p-1)}]$, temos que

$$\|u_\lambda\|_{L^p(\Omega)} \leq (C_1/C_2)^{1/(p-1)}.$$

Assim, concluímos que, para todo $p > 1$, existe $C > 0$ que não depende de λ tal que $\|u_\lambda\|_{L^p(\Omega)} \leq C$. Além disso,

$$\|u_\lambda\|_{L^1(\Omega)} \leq C_1 \|u_\lambda\|_{L^p(\Omega)} \leq C, \tag{3.17}$$

o que implica que $\|u_\lambda\|_{L^p(\Omega)}$ é limitada por uma constante que não depende de λ para todo $p \geq 1$. Agora, fazendo $\varphi = u_\lambda^{-q}$ como função teste em (3.3), obtemos

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla \left(u_\lambda^{-q}\right) \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u_\lambda^{1-q} \, \mathrm{d}x = \int_\Omega u_\lambda^{-q} g\left(x, u_\lambda\right) \, \mathrm{d}x + \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \, \mathrm{d}x.$$

Como

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla \left(u_\lambda^{-q}\right) \, \mathrm{d}x = -q \int_\Omega u_\lambda^{-1-q} \left|\nabla u_\lambda\right|^2 \, \mathrm{d}x \leq 0,$$

pois $u_\lambda > 0$ e $q \in [0,1)$, temos que

$$\int_\Omega u_\lambda^{1-q} \, \mathrm{d}x \geq \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \, \mathrm{d}x.$$

Pela hipótese (H_1) e pelo fato de Ω ser limitado, temos que $\int_{\partial\Omega} \psi \, \mathrm{d}x < \infty$. Logo, $\lambda \leq C \int_\Omega u_\lambda^{1-q} \, \mathrm{d}x$. Então, usando a desigualdade de Hölder e (3.17), obtemos que

$$\begin{aligned} \lambda \leq C \int_\Omega u_\lambda^{1-q} \, \mathrm{d}x &\leq C \left(\int_\Omega \left(u_\lambda^{1-q}\right)^r \, \mathrm{d}x \right)^{1/r} \left(\int_\Omega 1^{r'} \, \mathrm{d}x \right)^{1/r'} \\ &\leq C \left|\Omega\right|^{1/r'} \|u_\lambda\|_{L^1(\Omega)}^{1-q} < C, \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva que não depende λ, $r = \frac{1}{1-q}$ e $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Logo, pela definição de Λ e pelo resultado anterior, temos $0 < \Lambda < \infty$. ■

3.5 Existência de uma solução minimal

Nesta seção, nosso objetivo principal é provar o teorema a seguir que garante a existência de uma solução minimal para (Q_λ). Para tanto, usaremos o método de sub e supersolução.

Teorema 3.5.1 *(Q_λ) admite solução minimal u_λ, para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$.*

3.5.1 Existência de solução para (Q_λ) para $\lambda \in (0, \Lambda)$

O lema seguinte será utilizado para provarmos o Teorema 3.5.1.

Lema 3.5.2 *Existe uma solução fraca para (Q_λ) para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$.*

Demonstração: Fixemos $\lambda \in (0, \Lambda)$. Pela caracterização de Λ, podemos obter $\lambda < \lambda_2 < \Lambda$ tal que (Q_{λ_2}) tem solução fraca não-trivial. Seja u_{λ_2} tal solução fraca. Consideremos μ o menor valor assumido por u_{λ_2} em $\partial\Omega$. Pelo Lema 3.3.3, temos que $u_{\lambda_2} > 0$ em $\overline{\Omega}$.
Recorramos novamente ao problema dado em (2.21). No Lema 2.5.2, provamos que tal problema tem uma única solução fraca v_λ não-trivial. De maneira inteiramente análoga, ao que fizemos no Lema 2.5.2 para mostrar que u_{λ_2} é supersolução de (2.21) e que $v_\lambda < u_{\lambda_2}$ em $\overline{\Omega}$, mostra-se que estes resultados ocorrem agora considerando u_{λ_2} solução fraca de (Q_{λ_2}).

Definamos as funções $\overline{g}_\lambda : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\overline{h}_\lambda : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\overline{g}_\lambda(x,t) = \begin{cases} g(x, v_\lambda(x)), & t < v_\lambda(x), \\ g(x,t), & v_\lambda(x) \le t \le u_{\lambda_2}(x), \\ g(x, u_{\lambda_2}(x)), & t > u_{\lambda_2}(x) \end{cases} \tag{3.18}$$

e

$$\overline{f}_\lambda(x,t) = \begin{cases} \lambda\psi(x)\mu^q, & t < v_\lambda(x), \\ \lambda\psi(x)t^q, & v_\lambda(x) \le t \le u_{\lambda_2}(x), \\ \lambda\psi(x)u^q_{\lambda_2}(x), & t > u_{\lambda_2}(x). \end{cases} \tag{3.19}$$

Sejam

$$\overline{G}_\lambda(x,s) = \int_0^s \overline{g}_\lambda(x,t)\ \mathrm{d}t \text{ e } \overline{F}_\lambda(x,s) = \int_0^s \overline{f}_\lambda(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

Afirmamos que o funcional $\overline{I}_\lambda : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\overline{I}_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \overline{G}_\lambda(x,u)\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \overline{F}_\lambda(x,u)\ \mathrm{d}x$$

é coercivo e sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente.
De fato, pela definição (3.18), temos que $\overline{g}_\lambda(x,t) \le g(x, u_{\lambda_2}(x))$, uniformemente em $x \in \overline{\Omega}\backslash\{0\}$. E, pelo item (i) do Lema A.1.4, temos que $g(x, u_{\lambda_2}(x)) \le C\frac{e^{2u^2_{\lambda_2}(x)}}{|x|^\beta}$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}\backslash\{0\}$ e $\beta \in [0,2)$. Assim,

$$\overline{G}_\lambda(x,s) = \int_0^s \overline{g}_\lambda(x,t)\ \mathrm{d}t \le C|s|\frac{e^{2u^2_{\lambda_2}(x)}}{|x|^\beta} \text{ uniformemente em } x \in \overline{\Omega}\backslash\{0\},$$

o que implica

$$\int_\Omega \overline{G}_\lambda(x,u)\ \mathrm{d}x \le C\int_\Omega |u|\frac{e^{2u^2_{\lambda_2}}}{|x|^\beta}\ \mathrm{d}x.$$

Usando a desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\int_\Omega \overline{G}_\lambda(x,u)\ \mathrm{d}x \le C\left(\int_\Omega |u|^{p'}\ \mathrm{d}x\right)^{1/p'}\left(\int_\Omega \frac{e^{2pu_{\lambda_2}^2}}{|x|^{\beta p}}\ \mathrm{d}x\right)^{1/p} = C\,\|u\|_{L^{p'}(\Omega)}\left(\int_\Omega \frac{e^{2pu_{\lambda_2}^2}}{|x|^{\beta p}}\ \mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

onde $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ e $p>1$ é escolhido de maneira que $\beta p<2$. Logo, pela desigualdade de Trudinger-Moser (3.4), segue que $\int_\Omega \frac{e^{2pu_{\lambda_2}^2}}{|x|^{\beta p}}\ \mathrm{d}x<\infty$. Disto, da estimativa anterior e da imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s\in[1,+\infty)$, obtemos

$$\int_\Omega \overline{G}_\lambda(x,u)\ \mathrm{d}x \le C_1\|u\|.$$

Agora, pela definição (3.19), temos que $\overline{f}_\lambda(x,t)\le \lambda\psi(x)\,u_{\lambda_2}^q(x)$ uniformemente em $x\in\partial\Omega$. Assim,

$$\overline{F}_\lambda(x,s)=\int_0^s \overline{f}_\lambda(x,t)\ \mathrm{d}t \le \lambda\int_0^s \psi(x)\,u_{\lambda_2}^q(x)\ \mathrm{d}t \le C\,|s|\,u_{\lambda_2}^q(x)\ \text{ uniformemente em } x\in\partial\Omega.$$

Logo,

$$\int_{\partial\Omega} \overline{F}_\lambda(x,u)\ \mathrm{d}x \le C\int_{\partial\Omega}|u|\,u_{\lambda_2}^q\ \mathrm{d}x.$$

Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\int_{\partial\Omega} \overline{F}_\lambda(x,u)\ \mathrm{d}x \le C\left(\int_{\partial\Omega}|u_{\lambda_2}|^{qr}\ \mathrm{d}x\right)^{1/r}\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{r'}\ \mathrm{d}x\right)^{1/r'} = C\,\|u_{\lambda_2}\|_{L^1(\partial\Omega)}^q\,\|u\|_{L^{r'}(\partial\Omega)},$$

onde $r=\frac{1}{q}$ e $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$. Disto e da imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s\in[1,+\infty)$, obtemos

$$\int_{\partial\Omega} \overline{F}_\lambda(x,u)\ \mathrm{d}x \le C_2\|u\|.$$

Assim, segue que

$$\overline{I}_\lambda(u)\ge \frac{1}{2}\|u\|^2-C_1\|u\|-C_2\|u\|=\|u\|^2\left(\frac{1}{2}-\frac{(C_1+C_2)}{\|u\|}\right).$$

Fazendo $\|u\|\to+\infty$ na desigualdade anterior, obtemos que $\overline{I}_\lambda(u)\to+\infty$. Logo, $\overline{I}_\lambda(u)$ é coercivo. A prova de que $\overline{I}_\lambda$ é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente é análoga ao que foi feito no Lema 2.5.2 quando mostramos que $\overline{J}_\lambda$ é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente Assim, pelo Teorema 1.5.2, $\overline{I}_\lambda$ é limitado inferiormente e atinge mínimo em $H^1(\Omega)$. Seja u_λ o mínimo global de $\overline{I}_\lambda$ sobre $H^1(\Omega)$. Como $\overline{I}_\lambda$ é o funcional associado ao problema

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{c} -\Delta u + u = \overline{g}_\lambda(x,u) \\ u > 0 \end{array}\right\} \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \overline{f}_\lambda(x,u), \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.20}$$

então u_λ é solução fraca de (3.20). De forma análoga ao que fizemos com o problema (Q_λ), verifica-se que $u_\lambda \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\backslash\{0\}\right)$, para algum $\theta \in (0,1)$ e que, para $u_\lambda \neq 0$, $u_\lambda > 0$ em $\overline{\Omega}$. Desde que g é não-decrescente, pela definição (3.18), temos $\overline{g}_\lambda(x,t) \leq g(x, u_{\lambda_2}(x))$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}\backslash\{0\}$ e para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, temos

$$\overline{g}_\lambda(x, u_\lambda(x)) \leq g(x, u_{\lambda_2}(x)) \text{ uniformemente em } x \in \overline{\Omega}\backslash\{0\}. \tag{3.21}$$

Pela definição de (3.19),

$$\overline{f}_\lambda(x, u_\lambda(x)) \leq \lambda\psi(x)\, u^q_{\lambda_2}(x) \text{ uniformemente em} x \in \partial\Omega \tag{3.22}$$

No que segue, mostraremos que $v_\lambda \leq u_\lambda$ em $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$ e $u_\lambda < u_{\lambda_2}$ em $\overline{\Omega}$.

Com efeito, desde que u_λ é solução fraca de (3.20) e v_λ e (2.21), temos que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla(u_\lambda - v_\lambda)\nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega (u_\lambda - v_\lambda)\,\varphi \,\mathrm{d}x = \\ &\qquad \int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega u_\lambda\varphi \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla v_\lambda\nabla\varphi \,\mathrm{d}x - \int_\Omega v_\lambda\varphi \,\mathrm{d}x = \\ &\qquad\qquad \int_\Omega \overline{g}_\lambda(x,u_\lambda)\,\varphi \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \overline{f}_\lambda(x,u_\lambda)\,\varphi \,\mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} \psi\mu^q\varphi \,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Escolhendo $\varphi = (u_\lambda - v_\lambda)^- = \max\{0, -(u_\lambda - v_\lambda)\}$, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \overline{g}_\lambda(x,u_\lambda)\,\varphi \,\mathrm{d}x &= \int_{[v_\lambda \leq u_\lambda]} \overline{g}_\lambda(x,u_\lambda)\,\varphi \,\mathrm{d}x + \int_{[u_\lambda < v_\lambda]} \overline{g}_\lambda(x,u_\lambda)\,\varphi \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{[u_\lambda < v_\lambda]} g(x,v_\lambda)(-u_\lambda + v_\lambda) \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \overline{f}_\lambda(x,u_\lambda)\,\varphi \,\mathrm{d}x &= \int_{[v_\lambda \leq u_\lambda]} \overline{f}_\lambda(x,u_\lambda)\,\varphi \,\mathrm{d}x + \int_{[u_\lambda < v_\lambda]} \overline{f}_\lambda(x,u_\lambda)\,\varphi \,\mathrm{d}x \\ &= \lambda \int_{[u_\lambda < v_\lambda]} \psi\mu^q(-u_\lambda + v_\lambda) \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} -\lambda \int_{\partial\Omega} \psi\mu^q \varphi \ \mathrm{d}x &= -\lambda \int_{[v_\lambda \leq u_\lambda]} \psi\mu^q \varphi \ \mathrm{d}x - \lambda \int_{[u_\lambda < v_\lambda]} \psi\mu^q \varphi \ \mathrm{d}x \\ &= -\lambda \int_{[u_\lambda < v_\lambda]} \psi\mu^q \left(-u_\lambda + v_\lambda\right) \ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Somando estas últimas igualdades, obtemos

$$\int_\Omega \overline{g}_\lambda \left(x, u_\lambda\right) \varphi \ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \overline{f}_\lambda \left(x, u_\lambda\right) \varphi \ \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} \psi\mu^q \varphi \ \mathrm{d}x = \int_{[u_\lambda < v_\lambda]} g\left(x, v_\lambda\right) \left(-u_\lambda + v_\lambda\right) \ \mathrm{d}x.$$

Como g é não-negativa e, para $u_\lambda < v_\lambda$, tem-se que $-u_\lambda + v_\lambda > 0$, então $\int_{[u_\lambda < v_\lambda]} g\left(x, v_\lambda\right) \left(-u_\lambda + v_\lambda\right) \mathrm{d}x \geq 0$. Por outro lado,

$$\int_\Omega \nabla \left(u_\lambda - v_\lambda\right) \nabla \left(u_\lambda - v_\lambda\right)^- \ \mathrm{d}x + \int_\Omega \left(u_\lambda - v_\lambda\right) \left(u_\lambda - v_\lambda\right)^- \ \mathrm{d}x = -\left\| \left(u_\lambda - v_\lambda\right)^- \right\|^2 \leq 0.$$

Assim,

$$0 \leq \int_{[u_\lambda < v_\lambda]} g\left(x, v_\lambda\right) \left(-u_\lambda + v_\lambda\right) \ \mathrm{d}x = -\left\| \left(u_\lambda - v_\lambda\right)^- \right\|^2 \leq 0.$$

Consequentemente, $\left\| \left(u_\lambda - v_\lambda\right)^- \right\|^2 = 0$. Disto, segue que $\left(u_\lambda - v_\lambda\right)^- = 0$ quase sempre em Ω. Logo, $u_\lambda - v_\lambda \geq 0$ quase sempre em Ω. Assim, $\inf_\Omega \left(u_\lambda - v_\lambda\right) \geq 0$ quase sempre em Ω. Agora, como u_λ e v_λ satisfazem $-\Delta u_\lambda + u_\lambda = \overline{g}_\lambda \left(x, u_\lambda\right)$ e $-\Delta v_\lambda + v_\lambda = 0$ no sentido fraco, subtraindo a primeira destas igualdades pela segunda, obtemos que $-\Delta \left(u_\lambda - v_\lambda\right) + \left(u_\lambda - v_\lambda\right) = \overline{g}_\lambda \left(x, u_\lambda\right) \geq 0$. O que implica que $\Delta \left(u_\lambda - v_\lambda\right) - \left(u_\lambda - v_\lambda\right) \leq 0$ no sentido fraco. No que segue, mostraremos que $u_\lambda \neq v_\lambda$. De fato, supondo o contrário, e usando novamente o fato de que u_λ é solução fraca de (3.20) e v_λ de (2.21), teríamos que

$$\int_\Omega \overline{g}_\lambda \left(x, u_\lambda\right) \varphi \ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \overline{f}_\lambda \left(x, u_\lambda\right) \varphi \ \mathrm{d}x = \lambda \int_{\partial\Omega} \psi\mu^q \varphi \ \mathrm{d}x, \tag{3.23}$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Escolhamos $\varphi \in C_0^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, $\varphi > 0$, tal que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset\subset \Omega$. Então, $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$. Assim, segue de (3.23) que $\int_\Omega \overline{g}_\lambda \left(x, u_\lambda\right) \varphi \ \mathrm{d}x = 0$, o que é um absurdo, pois, usando a hipótese $(H_2)(f)$ e os fatos de que $u_\lambda > 0$ em $\overline{\Omega}$, $\overline{g}_\lambda$ é não-decrescente e $\varphi > 0$, temos que $\int_\Omega \overline{g}_\lambda \left(x, u_\lambda\right) \varphi \ \mathrm{d}x > 0$. Logo, $u_\lambda \neq v_\lambda$.

Afirmação: $u_\lambda - v_\lambda > 0$ em Ω.

De fato, suponhamos que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $(u_\lambda - v_\lambda)(x_0) = 0$. Assim, desde que Ω é aberto, existe $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ tal que

$$\inf_{B_R(x_0)} (u_\lambda - v_\lambda) = \inf_{\Omega} (u_\lambda - v_\lambda) \geq 0 \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Disto e do fato de $\Delta(u_\lambda - v_\lambda) - (u_\lambda - v_\lambda) \leq 0$ no sentido fraco, segue do Teorema 1.4.3 que $(u_\lambda - v_\lambda)$ é constante em Ω. Logo, como $(u_\lambda - v_\lambda)(x_0) = 0$ e $x_0 \in \Omega$, então $(u_\lambda - v_\lambda) = 0$, o que contradiz o fato de que $u_\lambda \neq v_\lambda$. Logo, a afirmação segue.

Agora, desde que u_λ, $v_\lambda \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\backslash\{0\}\right)$, mostraremos que $u_\lambda \geq v_\lambda$ sobre $\partial\Omega\backslash\{0\}$. Com efeito, supondo o contrário, existiria $x_0 \in \partial\Omega$, $x_0 \neq 0$, tal que $u_\lambda(x_0) < v_\lambda(x_0)$. Como $x_0 \in \partial\Omega$, existe uma sequência $(x_k) \subset \Omega$ tal que $x_k \to x_0$. Como, $u_\lambda > v_\lambda$ em Ω, temos que $u_\lambda(x_k) > v_\lambda(x_k)$. Disto e da continuidade das funções u_λ e v_λ, segue que $u_\lambda(x_0) \geq v_\lambda(x_0)$, o que é uma contradição. Logo, $u_\lambda \geq v_\lambda$ em $\partial\Omega\backslash\{0\}$. Disto e do fato de $u_\lambda > v_\lambda$ em Ω, temos que $u_\lambda \geq v_\lambda$ em $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$.

Usando que u_{λ_2} e u_λ são soluções fracas de (Q_{λ_2}) e (3.20), respectivamente, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla(u_{\lambda_2} - u_\lambda)\nabla\varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega (u_{\lambda_2} - u_\lambda)\varphi \, \mathrm{d}x = \\
&\qquad \int_\Omega \nabla u_{\lambda_2}\nabla\varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u_{\lambda_2}\varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla\varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega u_\lambda\varphi \, \mathrm{d}x = \\
&\quad \int_\Omega g(x, u_{\lambda_2})\varphi \, \mathrm{d}x + \lambda_2 \int_{\partial\Omega} \psi u_{\lambda_2}^q \varphi \, \mathrm{d}x - \left(\int_\Omega \overline{g}_\lambda(x, u_\lambda)\varphi \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \overline{f}_\lambda(x, u_\lambda)\varphi \, \mathrm{d}x\right),
\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Assim, por (3.21) e (3.22), obtemos da igualdade anterior que

$$\int_\Omega \nabla(u_{\lambda_2} - u_\lambda)\nabla\varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega (u_{\lambda_2} - u_\lambda)\varphi \, \mathrm{d}x \geq 0,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$. Logo, pelo Lema 2.3.5, $-\Delta(u_{\lambda_2} - u_\lambda) + (u_{\lambda_2} - u_\lambda) \geq 0$ em Ω. Usando novamente (3.22), temos que

$$\frac{\partial(u_{\lambda_2} - u_\lambda)}{\partial\nu} = \lambda_2\psi u_{\lambda_2}^q - \overline{f}_\lambda(x, u_\lambda) \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Além disso, notemos que $u_{\lambda_2} \neq u_\lambda$, pois supondo que $u_{\lambda_2} = u_\lambda$ e sabendo que u_λ e u_{λ_2} são, respectivamente, soluções fracas de (3.20) e de (Q_{λ_2}), teríamos que $\lambda_2\psi u_{\lambda_2}^q = \overline{f}_\lambda(x, u_\lambda)$ sobre

$\partial\Omega$. Disto segue que, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\lambda_2 \int_{\partial\Omega} \psi u_{\lambda_2}^q \varphi \, \mathrm{d}x = \int_{[u_\lambda < v_\lambda]} \overline{f}_\lambda (x, u_\lambda) \varphi \, \mathrm{d}x + \int_{\left[v_\lambda \leq u_\lambda \leq u_{\lambda_2}\right]} \overline{f}_\lambda (x, u_\lambda) \varphi \, \mathrm{d}x$$
$$+ \int_{\left[u_\lambda > u_{\lambda_2}\right]} \overline{f}_\lambda (x, u_\lambda) \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Como $v_\lambda \leq u_\lambda$ em $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$, então $\int_{[u_\lambda < v_\lambda]} \overline{f}_\lambda (x, u_\lambda) \varphi \, \mathrm{d}x = 0$. Logo, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\lambda_2 \int_{\partial\Omega} \psi u_{\lambda_2}^q \varphi \, \mathrm{d}x = \lambda \left(\int_{\left[v_\lambda \leq u_\lambda \leq u_{\lambda_2}\right]} \psi u_\lambda^q \varphi \, \mathrm{d}x + \int_{\left[u_\lambda > u_{\lambda_2}\right]} \psi u_{\lambda_2}^q \varphi \, \mathrm{d}x \right).$$

Escolhendo $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\varphi > 0$, e considerando que ψ é não-negativa, $u_{\lambda_2} > 0$ e $\lambda_2 > \lambda > 0$, temos que a igualdade anterior não pode ocorrer. Assim, $u_{\lambda_2} \neq u_\lambda$. Logo, pelo Lema 2.3.4, $u_{\lambda_2} > u_\lambda$ em $\overline{\Omega}$. Concluímos então que $v_\lambda \leq u_\lambda$ em $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$ e $u_\lambda < u_{\lambda_2}$ em $\overline{\Omega}$.

Mostraremos agora que $\overline{I}_\lambda (u) = I_\lambda (u)$, para todo $v_\lambda \leq u \leq u_{\lambda_2}$.

Com efeito, notemos que, para $v_\lambda \leq u \leq u_{\lambda_2}$,

$$\int_\Omega \overline{G}_\lambda (x, u) \, \mathrm{d}x = \int_{[u < v_\lambda]} \overline{G}_\lambda (x, u) \, \mathrm{d}x + \int_{[v_\lambda \leq u \leq u_{\lambda_2}]} \overline{G}_\lambda (x, u) \, \mathrm{d}x + \int_{[u > u_{\lambda_2}]} \overline{G}_\lambda (x, u) \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_{[v_\lambda \leq u \leq u_{\lambda_2}]} \overline{G}_\lambda (x, u) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega G(x, u) \, \mathrm{d}x$$

e

$$\int_{\partial\Omega} \overline{F}_\lambda (x, u) \, \mathrm{d}x = \int_{[u < v_\lambda]} \overline{F}_\lambda (x, u) \, \mathrm{d}x + \int_{[v_\lambda \leq u \leq u_{\lambda_2}]} \overline{F}_\lambda (x, u) \, \mathrm{d}x + \int_{[u > u_{\lambda_2}]} \overline{F}_\lambda (x, u) \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_{[v_\lambda \leq u \leq u_{\lambda_2}]} \overline{F}_\lambda (x, u) \, \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{q+1} \int_{\partial\Omega} \psi |u|^{q+1} \, \mathrm{d}x,$$

de onde segue que

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega G(x, u) \, \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\partial\Omega} \psi |u|^{q+1} \, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \overline{G}_\lambda (x, u) \, \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \overline{H}_\lambda (x, u) \, \mathrm{d}x = \overline{I}_\lambda (u),$$

Assim, desde que $v_\lambda \leq u_\lambda$ em $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$ e $u_\lambda < u_{\lambda_2}$ em $\overline{\Omega}$., temos que $\overline{I}_\lambda (u_\lambda) = I_\lambda (u_\lambda)$. Logo, como u_λ é mínimo global de $\overline{I}_\lambda$, temos que $\overline{I}'_\lambda (u_\lambda) = 0$. Assim, $I'_\lambda (u_\lambda) = 0$. Ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u_\lambda \varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega g(x, u_\lambda) \varphi \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_\lambda^q \varphi \, \mathrm{d}x = 0.$$

Disto segue que u_λ é solução fraca de (Q_λ) e termina a prova do lema. ■

3.5.2 Prova do Teorema 3.5.1

Antes de provarmos o Teorema 3.5.1, enunciaremos a seguinte definição:

Definição 3.5.3 *Dizemos que uma solução* u^* *é solução minimal de* (Q_λ) *em* $[\underline{u}, \overline{u}]$ *se,* $u^* \leq u$*, para cada* $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$*, onde* u*,* $\underline{u}$ *e* $\overline{u}$ *são, respectivamente, solução fraca, sub e supersolução de* (Q_λ)*.*

Observação 3.5.4 *Pela demonstração do Lema* 2.5.3 (*veja* [17], Lema 3.4)*, vemos que este também é válido se considerarmos* $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$ *no lugar de* $\overline{\Omega}$*.*

Prova do Teorema 3.5.1

Pelo Lema 3.5.2, existe u_λ solução fraca de (Q_λ), para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$. Na demonstração do Lema 2.5.2, vimos que (2.21), tem uma única solução fraca. De maneira similar, mostra-se que o problema

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{r} -\Delta u + u = 0 \\ u > 0 \end{array}\right\} \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda \psi u^q \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.24}$$

tem uma única solução fraca que denotaremos por $\widetilde{v}_\lambda$. De maneira análoga ao que foi feito para u_λ, mostra-se que $\widetilde{v}_\lambda \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$, para algum $\theta \in (0,1)$, e que $\widetilde{v}_\lambda > 0$ em $\overline{\Omega}$.
Mostraremos agora que u_λ é supersolução de (3.24). De fato, sendo u_λ solução fraca de (Q_λ), temos que

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u_\lambda \varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega g\left(x, u_\lambda\right) \varphi \, \mathrm{d}x + \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_\lambda^q \varphi \, \mathrm{d}x,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Como g é não-negativa, $\int_\Omega g\left(x, u_\lambda\right) \varphi \, \mathrm{d}x \geq 0$, para todo $\varphi \geq 0$. Assim,

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u_\lambda \varphi \, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_\lambda^q \varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega g\left(x, u_\lambda\right) \varphi \, \mathrm{d}x \geq 0,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$. Desta estimativa segue que

$$\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u_\lambda \varphi \, \mathrm{d}x \geq \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_\lambda^q \varphi \, \mathrm{d}x,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$ com $\varphi \geq 0$. Logo, u_λ é supersolução de (3.24).

Desde que u_λ e $\widetilde{v}_\lambda$ são respectivamente, solução fraca de (Q_λ) e (3.24) e, além disso, $u_\lambda \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\backslash\{0\}\right)$ e $\widetilde{v}_\lambda \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\right)$ para algum $\theta \in (0,1)$, então $-\Delta u_\lambda + u_\lambda \geq 0$ e $-\Delta \widetilde{v}_\lambda + \widetilde{v}_\lambda = 0$ em Ω no sentido fraco. Por outro lado, temos que

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} = \lambda \psi u_\lambda^q \text{ e } \frac{\partial \widetilde{v}_\lambda}{\partial \nu} = \lambda \psi \widetilde{v}_\lambda^q \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Além disso, u_λ e $\widetilde{v}_\lambda$ são positivas em $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$. Assim, pelo Observação 3.5.4, temos que $u_\lambda \geq \widetilde{v}_\lambda$ em $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$.

Em seguida, usando iteração monótona e o mesmo argumento do Capíulo 2, contruímos uma sequência (u_n) tal que

$$\begin{aligned} u_1 &= \widetilde{v}_\lambda \\ -\Delta u_{n+1} + u_{n+1} &= g(x, u_n), \text{ em } \Omega \\ \frac{\partial u_{n+1}}{\partial \nu} &= \lambda \psi u_n^q, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Além disso, procedendo de maneira similar ao que foi feito no Lema 3.5.2 quando obtivemos que $v_\lambda \leq u_\lambda$ em $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$, obtém-se que $u_1 \leq u_2$ em $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$. Procedendo com o mesmo raciocínio, mostra-se que $u_1 \leq u_2 \leq ... \leq u_n \leq u_{n+1} ... \leq u_\lambda$ em $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$.

Afirmação: (u_n) é uma sequência limitada em $H^1(\Omega)$.

De fato, como u_n é solução fraca de (3.25), tomemos $\varphi = u_{n+1}$ como função teste e obtemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_{n+1}\|^2 = \int_\Omega g(x, u_n)\, u_{n+1} \, \mathrm{d}x + \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_n^q u_{n+1} \, \mathrm{d}x.$$

Pela hipótese $(H_2)(b)$, h é não-decrescente. Logo, g é não-decrescente e como $u_n \leq u_\lambda$, segue da igualdade anterior que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_{n+1}\|^2 \leq \int_\Omega g(x, u_\lambda)\, u_\lambda \, \mathrm{d}x + \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_\lambda^q u_\lambda \, \mathrm{d}x.$$

Usando novamente o item (i) do Lema A.1.4, temos que, para $\delta > 0$ e $\beta \in [0, 2)$,

$$\int_\Omega g(x, u_\lambda)\, u_\lambda \, \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega \frac{e^{(1+\delta)u_\lambda^2}}{|x|^\beta} u_\lambda \, \mathrm{d}x.$$

Consequentemente, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_{n+1}\|^2 \leq C \int_\Omega \frac{e^{(1+\delta)u_\lambda^2}}{|x|^\beta} u_\lambda \, \mathrm{d}x + \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_\lambda^{q+1} \, \mathrm{d}x.$$

Pela desigualdade de Hölder, obtemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|u_{n+1}\|^2 &\leq C\left(\int_\Omega \frac{e^{p(1+\delta)u_\lambda^2}}{|x|^{p\beta}}\ \mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_\Omega |u_\lambda|^{p'}\ \mathrm{d}x\right)^{1/p'} + \lambda\|\psi\|_\infty \int_{\partial\Omega} u_\lambda^{q+1}\ \mathrm{d}x\\ &\leq C\left(\int_\Omega \frac{e^{p(1+\delta)u_\lambda^2}}{|x|^{p\beta}}\ \mathrm{d}x\right)^{1/p}\|u_\lambda\|_{L^{p'}(\Omega)} + C_2\|u_\lambda\|^{q+1}_{L^{q+1}(\partial\Omega)},\end{aligned}$$

onde $p > 1$ e é escolhido de tal maneira que $\beta p < 2$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Como $\beta p < 2$, pela desigualdade de Trudinger-Moser (3.4), $\int_\Omega \frac{e^{p(1+\delta)u_\lambda^2}}{|x|^{\beta p}}\ \mathrm{d}x < \infty$. Assim, pelas imersões contínuas de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$ e $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, segue da estimativa anterior que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_{n+1}\|^2 \leq C_1\|u_\lambda\| + C_2\|u_\lambda\|^{q+1}.$$

Disto segue a afirmação.

Agora, como (u_n) é limitada em $H^1(\Omega)$, pelo Teorema 1.2.3, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_\lambda^*$ em $H^1(\Omega)$, com $u_\lambda^* \in H^1(\Omega)$, pois $H^1(\Omega)$ é Banach reflexivo. No que segue, mostraremos que u_λ^* é solução fraca de (Q_λ). Com efeito, já mostramos (ver (2.77) que se $u_n \rightharpoonup u_\lambda^*$ em $H^1(\Omega)$, então

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (\nabla u_n \nabla\varphi + u_n\varphi)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega (\nabla u_\lambda^* \nabla\varphi + u_\lambda^*\varphi)\ \mathrm{d}x, \tag{3.26}$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. De maneira similar ao que fizemos no Lema 2.3.2 (ver 2.14), usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, mostra-se que

$$\lim_{n\to\infty}\lambda\int_{\partial\Omega}\psi u_n^{q+1}\ \mathrm{d}x = \lambda\int_{\partial\Omega}\psi\left(u_\lambda^*\right)^{q+1}\ \mathrm{d}x. \tag{3.27}$$

No que segue, mostraremos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g(x, u_n)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega g(x, u_\lambda^*)\ \mathrm{d}x. \tag{3.28}$$

De fato, como, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u_\lambda^*$ em $H^1(\Omega)$, pela imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [2+\infty)$, $u_n \to u_\lambda^*$ em $L^2(\Omega)$. Como Ω é limitado, $u_n \to u_\lambda^*$ em $L^1(\Omega)$. Assim, pelo Teorema 1.1.7, a menos de subsequência, $u_n(x) \to u_\lambda^*(x)$ quase sempre em Ω. Usando a continuidade na segunda variável de g, obtemos

$$|g(x, u_n(x)) - g(x, u_\lambda^*(x))| \to 0 \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Desde que g é não-decrescente e $u_n \leq u_\lambda$, temos que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|g(x, u_n(x)) - g(x, u_\lambda^*(x))| \leq |g(x, u_\lambda(x))| + |g(x, u_\lambda^*(x))| \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Recorrendo novamente ao item (i) do Lema A.1.4, temos que, para $\delta > 0$ e $\beta \in [0, 2)$,

$$|g(x, u_\lambda(x))| + |g(x, u_\lambda^*(x))| \leq \frac{e^{(1+\delta)u_\lambda^2(x)}}{|x|^\beta} + \frac{e^{(1+\delta)\left(u_\lambda^*(x)\right)^2}}{|x|^\beta} \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Além disso, pela desigualdade de Trudinger-Moser (3.4),

$$\int_\Omega \frac{e^{(1+\delta)u_\lambda^2}}{|x|^\beta}\, \mathrm{d}x < \infty \text{ e } \int_\Omega \frac{e^{(1+\delta)\left(u_\lambda^*\right)^2}}{|x|^\beta}\, \mathrm{d}x < \infty.$$

Logo, $\dfrac{e^{(1+\delta)u_\lambda^2}}{|x|^\beta}, \dfrac{e^{(1+\delta)\left(u_\lambda^*\right)^2}}{|x|^\beta} \in L^1(\Omega)$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos (3.28).

Usando (3.27) e (3.28) e escolhendo inicialmente $\varphi \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ e depois, usando um argumento de densidade, e procedendo de maneira análoga ao que fizemos para obtermos as convergências em (2.75) e (2.76), temos que, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_n^{q+1} \varphi\, \mathrm{d}x = \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \left(u_\lambda^*\right)^{q+1} \varphi\, \mathrm{d}x. \tag{3.29}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g(x, u_n)\, \varphi\, \mathrm{d}x = \int_\Omega g(x, u_\lambda^*)\, \varphi\, \mathrm{d}x. \tag{3.30}$$

Como u_{n+1} é solução fraca de (3.25), para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \left(\nabla u_{n+1} \nabla \varphi + u_{n+1}\varphi\right)\, \mathrm{d}x - \int_\Omega g(x, u_n)\, \varphi\, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} \psi u_n^{q+1} \varphi\, \mathrm{d}x = 0.$$

Fazendo $n \to \infty$, na igualdade acima e usando (3.26), (3.29) e (3.30), obtemos que, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \left(\nabla u_\lambda^* \nabla \varphi + u_\lambda^*\varphi\right)\, \mathrm{d}x - \int_\Omega g(x, u_\lambda^*)\, \varphi\, \mathrm{d}x - \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \left(u_\lambda^*\right)^{q+1} \varphi\, \mathrm{d}x = 0.$$

Concluímos, então, que u_λ^* é solução fraca de (Q_λ). Além disso, como no Capítulo 2, u_λ^* é solução minimal de (Q_λ) em $[u_1, u_\lambda]$, ou seja, $u_\lambda^* \leq u$, para cada $u_1 \leq u \leq u_\lambda$, onde u é solução fraca de (Q_λ). E o teorema está provado.

3.6 Existência de um mínimo local para I_λ, com $\lambda \in (0, \Lambda)$

Nesta seção, utilizaremos o teorema seguinte para garantir a existência de mínimo local para I_λ para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$.

Teorema 3.6.1 *Seja u_λ a solução fraca para (Q_λ) encontrada no Lema* 3.5.2*. Então, u_λ é um mínimo local para I_λ em $H^1(\Omega)$.*

Demonstração: Seja $\lambda_2 > \lambda$ e $u^*_{\lambda_2}$ solução minimal de (Q_{λ_2}) garantida pelo Teorema 3.5.1. Se considerarmos $u^*_{\lambda_2}$ no lugar de u_{λ_2} na demonstração do Lema 3.5.2, obteremos u_λ solução fraca de (Q_λ) para cada $\lambda \in (0, \Lambda)$. Supondo que u_λ não é mínimo local para I_λ, chegaremos a uma contradição. Para tanto, notemos que se u_λ não é mínimo local para I_λ, existe uma sequência $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u_\lambda$ em $H^1(\Omega)$ e $I_\lambda(u_n) < I_\lambda(u_\lambda)$. Definamos $\overline{u} := u^*_{\lambda_2}$ e $\underline{u} := \widetilde{v}_\lambda$, onde $\widetilde{v}_\lambda$ é a única solução fraca de (3.24). Inicialmente, mostraremos que $\underline{u} < \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$. De fato, usando que $\underline{u}$ é solução fraca de (3.24) e que $\overline{u}$ é solução fraca de (Q_{λ_2}), pois é solução minimal deste problema, temos que estas funções são contínuas e positivas em $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$. Além disso, $\underline{u}$, $\overline{u} \in C^2\left(\overline{\Omega}\backslash\{0\}\right)$ e satisfazem

$$\begin{aligned} -\Delta\overline{u} + \overline{u} &\geq 0, \text{ em } \Omega \\ \frac{\partial\overline{u}}{\partial\nu} &\geq \lambda\psi\overline{u}^q, \text{ sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} -\Delta\underline{u} + \underline{u} &\leq 0, \text{ em } \Omega \\ \frac{\partial\underline{u}}{\partial\nu} &\leq \lambda\psi\underline{u}^q, \text{ sobre } \partial\Omega \end{aligned}$$

no sentido fraco. Logo, pela Observação 3.5.4, $\underline{u} \leq \overline{u}$ em $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$. Assim, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$, com $\varphi \geq 0$,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla(\overline{u} - \underline{u})\nabla\varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega (\overline{u} - \underline{u})\varphi \, \mathrm{d}x = \\ &\qquad \int_\Omega \nabla\overline{u}\nabla\varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \overline{u}\varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla\underline{u}\nabla\varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \underline{u}\varphi \, \mathrm{d}x = \\ &\qquad\qquad \int_\Omega g(x, \overline{u})\varphi \, \mathrm{d}x + (\lambda_2 - \lambda)\int_{\partial\Omega} \psi(\overline{u}^q - \underline{u}^q)\varphi \, \mathrm{d}x \geq 0, \end{aligned}$$

pois g é não-negativa, $\lambda_2 > \lambda$ e $\underline{u} \leq \overline{u}$ em $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$. Logo, pelo Lema 2.3.5, $-\Delta(\overline{u} - \underline{u}) + (\overline{u} - \underline{u}) \geq 0$ em Ω no sentido fraco. Obtemos também que

$$\frac{\partial(\overline{u} - \underline{u})}{\partial\nu} = \frac{\partial\overline{u}}{\partial\nu} - \frac{\partial\underline{u}}{\partial\nu} = \lambda_2\psi\overline{u}^q - \lambda\psi\underline{u}^q \geq 0.$$

Além disso, temos que $\overline{u} - \underline{u} \neq 0$, pois, do contrário, escolhendo $\varphi \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, $\varphi > 0$, e usando o fato de $\underline{u}$ ser solução fraca de (3.24) e $\overline{u}$ ser solução fraca de (Q_{λ_2}), teríamos que

$$\int_\Omega g\left(x,\overline{u}\right)\varphi \text{ d}x + \lambda_2 \int_{\partial\Omega} \psi \overline{u}^q \varphi \text{ d}x = \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \overline{u}^q \varphi \text{ d}x,$$

o que implica

$$0 > -\int_\Omega g\left(x,\overline{u}\right)\varphi \text{ d}x = (\lambda_2 - \lambda) \int_{\partial\Omega} \psi \overline{u}^q \varphi \text{ d}x \geq 0,$$

pois g é não-negativa, $\overline{u} > 0$ e $\lambda_2 > \lambda$. Isto é um absurdo. Logo, $\overline{u} - \underline{u} \neq 0$. Usando estes resultados, segue do Lema 2.3.4 que $\underline{u} < \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$.

Consideremos as seguintes funções

$$v_n(x) = \begin{cases} \underline{u}(x), & u_n(x) \leq \underline{u}(x), \\ u_n(x), & \underline{u}(x) \leq u_n(x) \leq \overline{u}(x), \\ \overline{u}(x), & u_n(x) \geq \overline{u}(x) \end{cases}$$

e definamos $\overline{w}_n = (u_n - \overline{u})^+$, $\underline{w}_n = (u_n - \underline{u})^-$, $\overline{S}_n = \text{supp}(\overline{w}_n)$ e $\underline{S}_n = \text{supp}(\underline{w}_n)$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\overline{S}_n = \text{fecho}\left\{x \in \Omega : \overline{w}_n(x) \neq 0\right\} = \text{fecho}\left\{x \in \Omega : u_n(x) > \overline{u}(x)\right\} \tag{3.31}$$

e

$$\underline{S}_n = \text{fecho}\left\{x \in \Omega : \underline{w}_n(x) \neq 0\right\} = \text{fecho}\left\{x \in \Omega : u_n(x) < \underline{u}(x)\right\}. \tag{3.32}$$

Por definição,

$$v_n \in M_\lambda = \left\{u \in H^1(\Omega) : \underline{u} \leq u \leq \overline{u}\right\}, \tag{3.33}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, verifica-se facilmente que $u_n = v_n - \underline{w}_n + \overline{w}_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sejam

$$\begin{aligned} A_n = \frac{1}{2}\int_{\overline{S}_n} &\left[\left(|\nabla u_n|^2 - |\nabla \overline{u}|^2\right) + \left(|u_n|^2 - |\overline{u}|^2\right)\right] \text{ d}x \\ &- \int_{\overline{S}_n} \left[G(x,u_n) - G(x,\overline{u})\right] \text{ d}x - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\overline{S}_n} \psi\left(u_n^{q+1} - \overline{u}^{q+1}\right) \text{ d}x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B_n = \frac{1}{2}\int_{\underline{S}_n} &\left[\left(|\nabla u_n|^2 - |\nabla \underline{u}|^2\right) + \left(|u_n|^2 - |\underline{u}|^2\right)\right] \text{ d}x \\ &- \int_{\underline{S}_n} \left[G(x,u_n) - G(x,\underline{u})\right] \text{ d}x - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\underline{S}_n} \psi\left(u_n^{q+1} - \underline{u}^{q+1}\right) \text{ d}x, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Procedendo de forma análoga ao Teorema 2.6.1, obtém-se que $I_\lambda (u_n) = I_\lambda (v_n) + A_n + B_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmação: $\underline{u} < u_\lambda < \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$.

De fato, para mostrar que $\underline{u} < u_\lambda$ em $\overline{\Omega}$, é suficiente usar que $\underline{u}$ é solução fraca de (3.24) e que u_λ é solução fraca de (Q_{λ_2}) e proceder de maneira análoga ao que fizemos para mostrar que $\underline{u} < \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$. Agora, para mostrar que $u_\lambda < \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$, notemos que como $\overline{u}$ é solução minimal de (Q_{λ_2}), então $\overline{u}$ é solução fraca de (Q_{λ_2}). Além disso, pelas definições de $\overline{g}_\lambda$ e $\overline{f}_\lambda$ dadas em (3.18) e (3.19) e, considerando $\overline{u}$ no lugar de u_{λ_2} nestas definições, temos que

$$\overline{g}_\lambda (x, u_\lambda (x)) \leq g (x, \overline{u} (x)) \text{ e } \overline{f}_\lambda (x, u_\lambda (x)) \leq \lambda_2 \psi (x) \overline{u}^q (x) . \tag{3.34}$$

Usando que $\overline{u}$ é solução fraca de (Q_{λ_2}) e que u_λ é mínimo global de $\overline{I}_\lambda$, temos que, para todo $\varphi \in H^1 (\Omega)$, $\varphi \geq 0$,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla (\overline{u} - u_\lambda) \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega (\overline{u} - u_\lambda) \varphi \, \mathrm{d}x = \\
&\qquad \int_\Omega \nabla \overline{u} \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \overline{u} \varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla \varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega u_\lambda \varphi \, \mathrm{d}x = \\
&\quad \int_\Omega g (x, \overline{u}) \varphi \, \mathrm{d}x + \lambda_2 \int_{\partial\Omega} \psi \overline{u}^q \varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \overline{g}_\lambda (x, u_\lambda) \varphi \, \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \overline{f}_\lambda (x, u_\lambda) \varphi \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Disto e de (3.34), obtemos que, para todo $\varphi \in H^1 (\Omega)$, $\varphi \geq 0$,

$$\int_\Omega \nabla (\overline{u} - u_\lambda) \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega (\overline{u} - u_\lambda) \varphi \, \mathrm{d}x \geq 0.$$

Logo, pelo Lema 2.3.5, $-\Delta (\overline{u} - u_\lambda) + (\overline{u} - u_\lambda) \geq 0$ em Ω no sentido fraco. Obtemos também de (3.34) que

$$\frac{\partial (\overline{u} - u_\lambda)}{\partial \nu} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial \nu} - \frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} = \lambda_2 \psi \overline{u}^q - \overline{f}_\lambda (x, u_\lambda) \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

De maneira análoga ao que fizemos na demonstração do Lema 2.5.2 para mostrar que $u_\lambda \neq u_{\lambda_2}$, mostra-se que $\overline{u} \neq u_\lambda$. Assim, pelo Lema 2.3.4, $\overline{u} - u_\lambda > 0$ em $\overline{\Omega}$. E a afirmação segue.

Desde que u_λ é mínimo global de $\overline{I}_\lambda$ garantido pelo Lema 3.5.2, temos que $\overline{I}_\lambda (u_\lambda) \leq \overline{I}_\lambda (u)$, para todo $u \in H^1(\Omega)$. Em particular, $\overline{I}_\lambda (u_\lambda) \leq \overline{I}_\lambda (u)$, para todo $u \in M_\lambda$. Por outro lado, também na demonstração do Lema 3.5.2, obtivemos que $\overline{I}_\lambda(u) = I_\lambda(u)$ para todo $v_\lambda \leq u \leq u_{\lambda_2}$, com v_λ solução fraca de (2.21). Logo, considerando $\overline{u}$ no lugar de u_{λ_2} no Lema 3.5.2, obteremos que $\overline{I}_\lambda(u) = I_\lambda(u)$ para todo $v_\lambda \leq u \leq \overline{u}$. Usando que v_λ é solução fraca de (2.21) e que $\underline{u}$ é solução fraca de (3.24) e, procedendo de maneira similar ao que fizemos no Lema 3.5.2 para mostrar que $v_\lambda \leq u_\lambda$ em $\overline{\Omega}$, obtém-se que $v_\lambda \leq \underline{u}$ em $\overline{\Omega}$. Então, destes resultados e da afirmação anterior, temos que $v_\lambda \leq \underline{u} < u_\lambda < \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$. Assim, $\overline{I}_\lambda(u) = I_\lambda(u)$, para todo $u \in M_\lambda$. Agora, desde que $\underline{u} < u_\lambda < \overline{u}$ em $\overline{\Omega}$, segue que $u_\lambda \in M_\lambda$. Então, $\overline{I}_\lambda(u_\lambda) = I_\lambda(u_\lambda)$. Logo, $I_\lambda(u_\lambda) \leq I_\lambda(u)$, para todo $u \in M_\lambda$. Disto segue que $I_\lambda(u_\lambda) = \inf_{u \in M_\lambda} I_\lambda(u)$. Consequentemente,

$$I_\lambda(u_n) \geq I_\lambda(u_\lambda) + A_n + B_n. \tag{3.35}$$

Agora, de maneira análoga ao que foi feito no Teorema 2.6.1, obtém-se que $\left|\overline{S}_n\right| \to 0$, $|\underline{S}_n| \to 0$, $\|\overline{w}_n\| \to 0$ e $\|\underline{w}_n\| \to 0$. Usando estes resultados e desenvolvendo uma ideia similar ao que fizemos também no Teorema 2.6.1, obtemos que A_n, $B_n \geq 0$.

Segue destes resultados e de (3.35) que $I_\lambda(u_n) \geq I_\lambda(u_\lambda)$. O que é uma contradição, pois tínhamos suposto que $I_\lambda(u_n) < I_\lambda(u_\lambda)$. Portanto, u_λ é mínimo local de I_λ. O teorema está provado. ■

3.7 Existência de solução do tipo Passo da Montanha

Nesta seção, mostraremos alguns resultados que serão utilizados para encontrar a segunda solução fraca de (Q_λ). No que segue, fixaremos $\lambda \in (0, \Lambda)$ e u_λ será o mínimo local de I_λ obtido no Teorema 3.6.1.

Definamos $\widetilde{g}_\lambda : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\widetilde{g}_\lambda(x, s) = \begin{cases} g(x, s + u_\lambda(x)) - g(x, u_\lambda(x)), & \text{se } s \geq 0, \\ 0, & \text{se } s < 0 \end{cases} \tag{3.36}$$

e $\widetilde{f}_\lambda : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\widetilde{f}_\lambda(x, s) = \begin{cases} \lambda\psi(x)(s + u_\lambda(x))^q - u_\lambda^q(x), & \text{se } s \geq 0, \\ 0, & \text{se } s < 0. \end{cases}$$

Dadas

$$\widetilde{G}_\lambda(x,s) = \int_0^s \widetilde{g}_\lambda(x,t)\ \mathrm{d}t \text{ e } \widetilde{F}_\lambda(x,s) = \int_0^s \widetilde{f}_\lambda(x,t)\ \mathrm{d}t, \tag{3.37}$$

definamos o funcional $\widetilde{I}_\lambda : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\widetilde{I}_\lambda(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + |v|^2\right)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x,v)\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \widetilde{F}_\lambda(x,v)\ \mathrm{d}x. \tag{3.38}$$

De maneira similar ao que fizemos no Apêndice A para obter a derivada de J_λ, obtemos a derivada de $\widetilde{I}_\lambda$ (ver (A.10)) que é

$$\widetilde{I}'_\lambda(v)\varphi = \int_\Omega \nabla v \nabla \varphi\ \mathrm{d}x + \int_\Omega v\varphi\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v)\varphi\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \widetilde{f}_\lambda(x,v)\varphi\ \mathrm{d}x,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$.

Assim, um ponto crítico v_λ de $\widetilde{I}_\lambda$ é solução fraca do problema

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{c} -\Delta u + u = g(x, u+u_\lambda) - g(x,u_\lambda) \\ u > 0 \end{array}\right\} \text{ em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \widetilde{f}_\lambda(x,u), \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.39}$$

Observação 3.7.1 *Se v_λ é solução fraca de (3.39), procedendo de maneira similar à prova do Lema 2.3.3, obteremos que $v_\lambda \geq 0$ quase sempre em Ω. Prova-se ainda que $v_\lambda \in C^{2,\theta}\left(\overline{\Omega}\backslash\{0\}\right)$ para algum $\theta \in (0,1)$ e que $-\Delta v_\lambda + v_\lambda \geq 0$ em Ω.*

Em seguida, usaremos uma versão generalizada do Teorema do Passo da Montanha para encontrar uma função positiva que é um ponto crítico de $\widetilde{I}_\lambda$. Depois, usaremos esta função para mostrar a multiplicidade de soluções fracas de (Q_λ).

3.7.1 Resultado de compacidade

Lema 3.7.2 *Dado $F \subset H^1(\Omega)$ um conjunto fechado e $c \in \mathbb{R}$. Sendo $(v_n) \subset H^1(\Omega)$ uma sequência $(PS)_{F,c}$ para $\widetilde{I}_\lambda$ (ver Definição 2.7.2), então, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H^1(\Omega)$ e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n)\ \mathtt{d}x = \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_0)\ \mathtt{d}x \tag{3.40}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Omega}\widetilde{f}_\lambda(x,v_n)\ \mathtt{d}x=\int_{\partial\Omega}\widetilde{f}_\lambda(x,v_0)\ \mathtt{d}x \tag{3.41}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\widetilde{G}_\lambda(x,v_n)\ \mathtt{d}x=\int_{\Omega}\widetilde{G}_\lambda(x,v_0)\mathtt{d}x \tag{3.42}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Omega}\widetilde{F}_\lambda(x,v_n)\ \mathtt{d}x=\int_{\partial\Omega}\widetilde{F}_\lambda(x,v_0)\ \mathtt{d}x. \tag{3.43}$$

Demonstração: Sendo (v_n) uma sequência $(PS)_{F,c}$ para $\widetilde{I}_\lambda$, temos que $\lim_{n\to\infty}\widetilde{I}_\lambda(v_n)=c$. Ou seja, dado $\epsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para $n\geq n_0$,

$$\left|\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\nabla v_n|^2+v_n^2\right)\ \mathrm{d}x-\int_\Omega\widetilde{G}_\lambda(x,v_n)\ \mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\widetilde{F}_\lambda\left(x,v_n\right)\ \mathrm{d}x-c\right|<\epsilon,$$

o que implica

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\nabla v_n|^2+v_n^2\right)\ \mathrm{d}x-\int_\Omega\widetilde{G}_\lambda(x,v_n)\ \mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\widetilde{F}_\lambda\left(x,v_n\right)\ \mathrm{d}x<c+\epsilon. \tag{3.44}$$

Usando novamente a condição $(PS)_{F,c}$, temos que $\lim_{n\to\infty}\left\|\widetilde{I}'_\lambda(v_n)\right\|_*=0$. Assim, dado $\epsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que, para $n\geq n_0$, $\left\|\widetilde{I}'_\lambda(v_n)\right\|_*<\epsilon$. Consequentemente, para cada $\varphi\in H^1(\Omega)$, temos que

$$\sup\frac{\left|\widetilde{I}'_\lambda(v_n)\varphi\right|}{\|\varphi\|}<\epsilon,$$

donde $\left|\widetilde{I}'_\lambda(v_n)\varphi\right|<\epsilon\|\varphi\|$, para todo $\varphi\in H^1(\Omega)$; ou seja,

$$\left|\int_\Omega\nabla v_n\nabla\varphi\ \mathrm{d}x+\int_\Omega v_n\varphi\ \mathrm{d}x-\int_\Omega\widetilde{g}_\lambda(x,v_n)\varphi\ \mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\widetilde{f}_\lambda(x,v_n)\varphi\ \mathrm{d}x\right|<\epsilon\|\varphi\|. \tag{3.45}$$

A partir daqui, a prova será dividida em duas etapas.

Etapa 1: Nesta etapa, mostraremos que

$$\sup_n\|v_n\|<\infty,\ \sup_n\int_\Omega\widetilde{g}_\lambda(x,v_n)v_n\ \mathrm{d}x<\infty\ \text{e}\ \sup_n\int_{\partial\Omega}\widetilde{f}_\lambda(x,v_n)v_n\ \mathrm{d}x<\infty.$$

De fato, desenvolvendo a demonstração do item (iv) do Lema A.1.2 de maneira similar à demonstração do item (iv) do Lema A.1.1, temos que, dado $\epsilon>0$, existe $s_\epsilon>0$ tal que, para $s\geq s_\epsilon$, $\widetilde{G}_\lambda(x,s)\leq\epsilon\widetilde{g}_\lambda(x,s)s$ uniformemente em $x\in\overline{\Omega}\backslash\{0\}$.

Além disso, como $\widetilde{f}_\lambda$ é crescente na segunda variável, temos que

$$\int_{\partial\Omega}\widetilde{F}_\lambda(x,v_n)\ \mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^{v_n}\widetilde{f}_\lambda(x,t)\ \mathrm{d}t\right)\ \mathrm{d}x\leq\int_{\partial\Omega}\widetilde{f}_\lambda(x,v_n)v_n\ \mathrm{d}x.$$

Assim, pela desigualdade (3.44), temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|v_n\|^2 &\leq \int_{\Omega\cap[v_n\leq s_\epsilon]} \widetilde{G}_\lambda(x,v_n)\ \mathrm{d}x + \epsilon\int_{\Omega\cap[v_n\geq s_\epsilon]} \widetilde{g}_\lambda(x,v_n)v_n\ \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \widetilde{f}_\lambda(x,v_n)v_n\ \mathrm{d}x + c + \epsilon \\ &\leq C_\epsilon + \epsilon\int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n)v_n\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \widetilde{f}_\lambda(x,v_n)v_n\ \mathrm{d}x + c + \epsilon.\end{aligned}$$

Escolhendo $\varphi = v_n$ como função teste em (3.45), obtemos

$$\left|\int_\Omega |\nabla v_n|^2\ \mathrm{d}x + \int_\Omega |v_n|^2\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n)v_n\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \widetilde{f}_\lambda(x,v_n)v_n\ \mathrm{d}x\right| < \epsilon\|v_n\|$$

e disto segue que

$$\int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n)v_n\ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \widetilde{f}_\lambda(x,v_n)v_n\ \mathrm{d}x \leq \|v_n\|^2 + \epsilon\|v_n\|. \tag{3.46}$$

Agora, consideremos $x \in D_n$, onde $D_n := \{x \in \partial\Omega : v_n(x) \leq u_\lambda(x)\}$, para cada n. Então,

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_\lambda(x,v_n)v_n &= \lambda\psi(x)\left((v_n + u_\lambda(x))^q - u_\lambda^q(x)\right)v_n \\ &\leq \lambda\|\psi\|_\infty\left[(2u_\lambda(x))^q - u_\lambda^q(x)\right]u_\lambda(x) = Cu_\lambda^{q+1}(x),\end{aligned}$$

onde $C = 2^q\lambda\|\psi\|_\infty > 0$. Assim,

$$\int_{D_n} \widetilde{f}_\lambda(x,v_n)v_n\ \mathrm{d}x \leq C\int_{D_n} u_\lambda^{q+1}\ \mathrm{d}x \leq C\|u_\lambda\|_{L^{q+1}(\partial\Omega)}^{q+1}.$$

Logo, pela imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [1,+\infty)$, segue que

$$\int_{D_n} \widetilde{f}_\lambda(x,v_n)v_n\ \mathrm{d}x \leq C\|u_\lambda\|^{q+1}.$$

Agora, para $x \in D_n^c := \{x \in \partial\Omega : u_\lambda(x) < v_n(x)\}$, temos que

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_\lambda(x,v_n)v_n &= \lambda\psi(x)\left((v_n + u_\lambda(x))^q - u_\lambda^q(x)\right)v_n \leq \lambda\|\psi\|_\infty(2v_n(x))^q - u_\lambda^q(x))v_n \\ &\leq 2^q\lambda\|\psi\|_\infty v_n^{q+1}(x) = Cv_n^{q+1}(x),\end{aligned}$$

onde $C = 2^q\lambda\|\psi\|_\infty > 0$. Usando este resultado, o fato de $D_n^c \subset \partial\Omega$ ser limitado e a imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [1,+\infty)$, obtemos que

$$\int_{D_n^c} \widetilde{h}_\lambda(x,v_n)v_n\ \mathrm{d}x \leq \int_{D_n^c} Cv_n^{q+1}\ \mathrm{d}x \leq C\|v_n\|_{L^{q+1}(\partial\Omega)}^{q+1} \leq C_2\|v_n\|^{q+1}.$$

Logo,

$$\int_{\partial\Omega} \widetilde{f}_\lambda(x, v_n)v_n \text{ d}x = \int_{D_n} \widetilde{f}_\lambda(x, v_n)v_n \text{ d}x + \int_{D_n^c} \widetilde{f}_\lambda(x, v_n)v_n \text{ d}x \leq C_1 \|v_n\|^{q+1}.$$

Consequentemente, existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\partial\Omega} \widetilde{f}_\lambda(x, v_n)v_n \text{ d}x \leq C + \frac{1}{4}\|v_n\|^2.$$

Voltando a (3.7.1) e usando a última estimativa e a desigualdade (3.46), obtemos

$$\frac{1}{2}\|v_n\|^2 \leq C_\epsilon + \epsilon\|v_n\|^2 + \epsilon\|v_n\| + C + \frac{1}{4}\|v_n\|^2 + c + \epsilon,$$

de onde segue que

$$\left(\frac{1}{4} - \epsilon\right)\|v_n\|^2 - \epsilon\|v_n\| \leq C_\epsilon + c + \epsilon.$$

Afirmação: (v_n) é limitada em $H^1(\Omega)$.

Suponhamos, por absurdo, que (v_n) não seja limitada em $H^1(\Omega)$. Assim, dividindo ambos os membros da desigualdade anterior por $\|v_n\|$, temos que

$$\left(\frac{1}{4} - \epsilon\right)\|v_n\| \leq \frac{C_\epsilon + c + \epsilon}{\|v_n\|} + \epsilon.$$

Escolhendo $\epsilon < \frac{1}{4}$ e fazendo $n \to \infty$, obtemos que o lado direito da estimativa anterior tende a ϵ enquanto que o lado esquerdo tende ao infinito, o que gera uma contradição. Logo, a afirmação segue.

Desde que (v_n) é limitada, então $\sup_n \|v_n\| < \infty$. Além disso, pelas definições de $\widetilde{g}_\lambda$ e $\widetilde{f}_\lambda$, vemos que

$$\int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x, v_n)v_n \text{ d}x \text{ e } \int_{\partial\Omega} \widetilde{f}_\lambda(x, v_n)v_n \text{ d}x$$

são não-negativas e como (v_n) é limitada em $H^1(\Omega)$, segue de (3.46) que

$$\sup_n \int_\Omega |\widetilde{g}_\lambda(x, v_n)v_n| \text{ d}x < \infty \text{ e } \sup_n \int_{\partial\Omega} \left|\widetilde{f}_\lambda(x, v_n)v_n\right| \text{ d}x < \infty. \tag{3.47}$$

Com este resultado, concluímos a *Etapa 1.*

Usando mais uma vez que (v_n) é limitada em $H^1(\Omega)$, pelo Teorema 1.2.3, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H^1(\Omega)$, para algum $v_0 \in H^1(\Omega)$, pois $H^1(\Omega)$ é Hilbert.

Etapa 2: Nesta etapa, mostraremos as convergências de (3.40) a (3.43).

Com efeito, observemos que, se a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H^1(\Omega)$, pela imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [2, +\infty)$, temos que $v_n \to v_0$ em $L^2(\Omega)$. Como Ω é limitado, $v_n \to v_0$ em $L^1(\Omega)$. Por definição, $\widetilde{g}_\lambda$ é contínua e, pelo item (iii) do Lema A.1.4, $\widetilde{g}_\lambda(x, v_n)$, $\widetilde{g}_\lambda(x, v_0) \in L^1(\Omega)$. Além disso, pela *Etapa 1*,

$$\sup_n \int_\Omega |\widetilde{g}_\lambda(x, v_n) v_n| \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Então, pelo item (i) do Lema A.3.2,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x, v_n) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x, v_0) \, \mathrm{d}x.$$

Agora, pelo item (iii) do Lema A.1.2, existe $C > 0$ tal que $\left|\widetilde{G}_\lambda(x, v_n)\right| \leq C\,|\widetilde{g}_\lambda(x, v_n)|$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}\backslash\{0\}$. Disto e de (3.47), obtemos que

$$\sup_n \int_\Omega \left|\widetilde{G}_\lambda(x, v_n) v_n\right| \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Pelo item (iii) do Lema A.1.4, $\widetilde{G}_\lambda(x, v_n)$, $\widetilde{G}_\lambda(x, v_0) \in L^1(\Omega)$ e, por definição, $\widetilde{G}_\lambda$ também é contínua. Logo, segue do item (i) do Lema A.3.2 que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x, v_n) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x, v_0) \, \mathrm{d}x.$$

Em seguida, mostraremos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} \widetilde{f}_\lambda(x, v_n) \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \widetilde{f}_\lambda(x, v_0) \, \mathrm{d}x. \tag{3.48}$$

Considerando novamente que $v_n \rightharpoonup v_0$ em $H^1(\Omega)$ e usando a imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$, temos que, a menos de subsequência, $v_n \to v_0$ em $L^2(\partial\Omega)$. Como Ω é limitado, $v_n \to v_0$ em $L^1(\partial\Omega)$. Então, pelo Teorema 1.1.7, $v_n(x) \to v_0(x)$ quase sempre sobre $\partial\Omega$. Sendo $\widetilde{f}_\lambda$ contínua na segunda variável, temos que $\left|\widetilde{f}_\lambda(x, v_n(x)) - \widetilde{f}_\lambda(x, v_0(x))\right| \to 0$ quase sempre sobre $\partial\Omega$. Além disso, usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\left|\widetilde{f}_\lambda(x, v_n(x)) - \widetilde{f}_\lambda(x, v_0(x))\right| \leq \left|\widetilde{f}_\lambda(x, v_n(x))\right| + \left|\widetilde{f}_\lambda(x, v_0(x))\right|.$$

Por outro lado,

$$\left|\widetilde{f}_\lambda(x, v_n(x))\right| = |\lambda\psi(x)\left((v_n(x) + u_\lambda(x))^q - u_\lambda^q(x)\right)| \leq \lambda\,\|\psi\|_\infty\left[|h(x) + u_\lambda(x)|^q + |u_\lambda^q(x)|\right]$$

e

$$\left|\widetilde{f}_\lambda(x,v_0(x))\right| = |\lambda\psi(x)\left((v_0(x)+u_\lambda(x))^q - u_\lambda^q(x)\right)| \leq \lambda \|\psi\|_\infty \left[|v_0(x)+u_\lambda(x)|^q + |u_\lambda^q(x)|\right].$$

Assim,

$$\left|\widetilde{f}_\lambda(x,v_n(x)) - \widetilde{f}_\lambda(x,v_0(x))\right| \leq \lambda \|\psi\|_\infty \left[|h(x)+u_\lambda(x)|^q + 2\left|u_\lambda^q(x)\right| + |v_0(x)+u_\lambda(x)|^q\right],$$

quase sempre sobre $\partial\Omega$.

Afirmação: $\lambda \|\psi\|_\infty \left[|h(x)+u_\lambda(x)|^q + 2\left|u_\lambda^q(x)\right| + |v_0(x)+u_\lambda(x)|^q\right] \in L^1(\partial\Omega)$.

De fato, usando a desigualdade de Hölder, temos que

$$\int_{\partial\Omega} |h+u_\lambda|^q \ \mathrm{d}x \leq \left(\int_{\partial\Omega} |h+u_\lambda|^{qp} \ \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_{\partial\Omega} 1^{p'} \ \mathrm{d}x\right)^{1/p'} = \|h+u_\lambda\|^q_{L^1(\partial\Omega)} |\partial\Omega|^{1/p'} < \infty,$$

onde $p = \frac{1}{q}$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. De maneira análoga, mostra-se que u_λ^q, $|v_0+u_\lambda|^q \in L^1(\partial\Omega)$. E, sendo $L^1(\partial\Omega)$ um espaço vetorial, temos que a afirmação vale.

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos (3.48).

Em seguida, utilizaremos novamente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para provar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} \widetilde{F}_\lambda(x,v_n)dx = \int_{\partial\Omega} \widetilde{F}_\lambda(x,v_0) \ \mathrm{d}x.$$

Sendo $\widetilde{F}_\lambda(x,v_n) = \int_0^{v_n} \widetilde{f}_\lambda(x,t) \ \mathrm{d}t$ contínua na segunda variável, obtemos

$$\widetilde{F}_\lambda(x,v_n(x)) \to \widetilde{F}_\lambda(x,v_0(x)) \text{ quase sempre sobre } \partial\Omega.$$

Por outro lado, se $v_n \to v_0$ em $L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [1,+\infty)$, pelo Teorema 1.1.7, temos que, a menos de subsequência, $v_n(x) \to v_0(x)$ quase sempre sobre $\partial\Omega$ e existe $l \in L^s(\partial\Omega)$ tal que $|v_n(x)| \leq l(x)$ quase sempre sobre $\partial\Omega$, para todo $s \in [1,+\infty)$. Agora, note que

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{F}_\lambda(x,v_n)\right| &= \left|\int_0^{v_n} \widetilde{f}_\lambda(x,t) \ \mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{v_n} \lambda\psi\left[(t+u_\lambda(x))^q - u_\lambda^q(x)\right] \ \mathrm{d}t\right| \\ &\leq \lambda \|\psi\|_\infty \left|\int_0^{v_n} (t+u_\lambda(x))^q \ \mathrm{d}t\right|.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\left|\widetilde{F}_\lambda(x,v_n)\right| \leq C \left|\int_0^{v_n} (t+u_\lambda(x))^q \ \mathrm{d}t\right| \leq C\left|(v_n+u_\lambda(x))^q v_n\right| \leq C\left(l(x)+u_\lambda(x)\right)^q l(x),$$

com $C = \lambda \|\psi\|_\infty$.

Denotando $w = C(l + u_\lambda)^q l$, afirmamos que $w \in L^1(\partial\Omega)$. Com efeito,

$$\int_{\partial\Omega} |w| \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} C |l + u_\lambda|^q |l| \, \mathrm{d}x.$$

Como $l \in L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, podemos escolher $p = \frac{1}{q}$ tal que l, $u_\lambda \in L^p(\partial\Omega)$. Assim, $l + u_\lambda \in L^p(\partial\Omega)$. Como Ω é limitado, $l + u_\lambda \in L^1(\partial\Omega)$. Assim, usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{\partial\Omega} |w| \, \mathrm{d}x \leq C \|l + u_\lambda\|^q_{L^1(\partial\Omega)} \|l\|_{L^{p'}(\partial\Omega)} < \infty,$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Logo, $\left|\widetilde{F}_\lambda(x, v_n)\right| \leq w \in L^1(\partial\Omega)$, quase sempre sobre $\partial\Omega$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} \widetilde{F}_\lambda(x, v_n) \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \widetilde{F}_\lambda(x, v_0) \, \mathrm{d}x.$$

Com este resultado, concluímos a *Etapa 2* e a prova do lema. ■

3.7.2 Nível minimax

Antes de estimarmos o nível minimax de $\widetilde{I}_\lambda$, notemos que $\widetilde{I}_\lambda(0) = 0$. Além disso, usando um argumento análogo ao que foi feito no Capítulo 2 (ver subseção: Nível minimax), obtemos que 0 é mínimo local de $\widetilde{I}_\lambda$ e que

$$\lim_{t\to\infty} \widetilde{I}_\lambda(tv) = -\infty,$$

para $v \in H^1(\Omega) \backslash \{0\}$. Assim, podemos novamente considerar $e \in H^1(\Omega)$ tal que $\widetilde{I}_\lambda(e) < 0$. Seja

$$\Gamma = \{\gamma : [0, 1] \to H^1(\Omega) : \gamma \text{ é contínua, } \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}.$$

Desta forma, definamos o nível do Passo da Montanha

$$c_m = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} \widetilde{I}_\lambda(\gamma(t)). \tag{3.49}$$

Também, como no Capítulo 2, mostra-se que $c_m \geq 0$. E, denotando $R_0 = \|e\|$, temos que se $c_m = 0$, então $\inf\{\widetilde{I}_\lambda(v); \|v\| = R\} = 0$, para $R \in (0, R_0)$. Assim, se $c_m > 0$, consideraremos $F = H^1(\Omega)$. E, se $c_m = 0$, $F = \{v \in H^1(\Omega) : \|v\| = R_0/2\}$.

Com o seguinte lema estimaremos o nível minimax c_m. Para tanto, usaremos novamente o Lema 2.1.6.

Lema 3.7.3 *O nível minimax* $c_m < \frac{\pi}{2}(2-\beta)$.

Demonstração: Sabemos que $0 \in \partial\Omega$. Suponhamos, por absurdo, que $c_m \geq \frac{\pi}{2}(2-\beta)$. Desde que 0 é mínimo local de $\widetilde{I}_\lambda$ e $c_m \geq \frac{\pi}{2}(2-\beta) > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que $\widetilde{I}_\lambda(v) > 0$, para $\|v\| = \delta_0$. Agora, para cada n, temos que $f_n(t) = \widetilde{J}_\lambda(t\omega_n)$ é contínua. Destes resultados e desde que $\lim_{t\to\infty} \widetilde{I}_\lambda(tv) = -\infty$, usamos o Teorema do Valor Intermediário e obtemos $0 < \xi_n \in \mathbb{R}$, tal que $f_n(\xi_n) = 0$. Assim, pelo Teorema de Wieirstrass, existe $t_n \in [0, \xi_n]$ ponto de máximo da função $f_n(t)$. Note que, $t_n > 0$, pois, se $t_n = 0$, então $f_n(0) = 0$ e isso contradiz o fato de 0 ser mínimo local de $\widetilde{J}_\lambda$.
Pela definição de c_m, temos que $\sup_{t>0} \widetilde{I}_\lambda(t\omega_n) \geq c_m \geq \frac{\pi}{2}(2-\beta)$. Então, sendo t_n ponto de máximo de $f_n(t) = \widetilde{I}_\lambda(t\omega_n)$, temos que, para todo n,

$$\frac{t_n^2}{2}\int_\Omega \left(|\nabla\omega_n|^2 + |\omega_n|^2\right)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x, t_n\omega_n)\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \widetilde{F}_\lambda(x, t_n\omega_n)\,\mathrm{d}x \geq \frac{\pi}{2}(2-\beta).$$

Denotemos

$$\mu_n^2 = \frac{t_n^2}{2}\int_\Omega \left(|\nabla\omega_n|^2 + |\omega_n|^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{t_n^2}{2}\|\omega_n\|^2.$$

Por definição, $\widetilde{G}_\lambda$ e $\widetilde{F}_\lambda$ são não-negativas, então $\mu_n^2 \geq \frac{\pi}{2}(2-\beta)$, para todo n. Pelo Lema 2.1.6, $\|\omega_n\| = 1$, para n suficientemente grande. Logo,

$$t_n^2 \geq \pi(2-\beta), \tag{3.50}$$

para n suficientemente grande. Recorrendo novamente ao fato de t_n ser ponto máximo de $f_n(t)$, temos que $f_n'(t_n) = 0$, para todo n. Equivalentemente,

$$\frac{d}{dt}\left(\widetilde{I}_\lambda(t\omega_n)\right)_{t=t_n} = \widetilde{I}_\lambda'(t_n\omega_n)\,\omega_n = 0,$$

de onde segue que, para todo n,

$$\int_\Omega \nabla(t_n\omega_n)\nabla\omega_n\,\mathrm{d}x + \int_\Omega t_n\omega_n^2\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x, t_n\omega_n)\omega_n\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \widetilde{f}_\lambda(x, t_n\omega_n)\omega_n\,\mathrm{d}x = 0.$$

Multiplicando a última igualdade por t_n, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla (t_n\omega_n)|^2 \ \mathrm{d}x + \int_\Omega |t_n\omega_n|^2 \ \mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x, t_n\omega_n)t_n\omega_n \ \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \widetilde{f}_\lambda(x, t_n\omega_n)t_n\omega_n \ \mathrm{d}x.$$

Como $\widetilde{f}_\lambda$ é não-negativa, segue da igualdade anterior que, para todo n,

$$\int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x, t_n\omega_n)t_n\omega_n \ \mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\nabla (t_n\omega_n)|^2 \ \mathrm{d}x + \int_\Omega |t_n\omega_n|^2 \ \mathrm{d}x = 2\mu_n^2. \tag{3.51}$$

De maneira similar à prova de (2.69), temos que, para s suficientemente grande,

$$e^{s^2} \leq \inf_{x\in\overline{\Omega}} \widetilde{g}_\lambda(x, s)\,|x|^\beta \ \text{ uniformemente em } x \in \overline{\Omega}\backslash\{0\}. \tag{3.52}$$

Pelo Lema 2.1.6, quando $n \to \infty$, $\omega_n(x) \to +\infty$, para $x \in \{|x| \leq 1/n\}$. Além disso, como para todo n, $t_n > 0$ e, para n suficientemente grande, $t_n^2 \geq \pi(2-\beta) > 0$, então $t_n \nrightarrow 0$. Assim, para $x \in \{|x| \leq 1/n\}$, temos que $t_n\omega_n(x) \to +\infty$. Voltando a (3.51) e usando a última convergência e (3.52), temos que

$$2\mu_n^2 \geq \int_{\{|x|\leq 1/n\}\cap\overline{\Omega}} \frac{e^{t_n^2\omega_n^2}}{|x|^\beta} t_n\omega_n \ \mathrm{d}x.$$

Como, para n suficientemente grande, $2\mu_n^2 = t_n^2$, utilizando o Lema 2.1.6 e a estimativa anterior, obtemos

$$t_n^2 \geq \int_{\{|x|\leq 1/n\}\cap\overline{\Omega}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{t_n^2\left(\frac{1}{\pi}\ln(nL)\right)}}{|x|^\beta} t_n (\ln nL)^{1/2} \ \mathrm{d}x.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} t_n^2 &\geq \frac{2\sqrt{\pi}}{(2-\beta)\,n^{(2-\beta)}} e^{t_n^2\left(\frac{1}{\pi}\ln(nL)\right)} t_n (\ln nL)^{1/2} \\ &= CL^{(2-\beta)} e^{\left(\frac{t_n^2}{\pi}-(2-\beta)\right)\ln(nL)} t_n (\ln nL)^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Afirmação: (t_n) é uma sequência de números reais limitada.

Com efeito, suponhamos, por absurdo, que (t_n) não seja limitada. Então, dividindo (3.53) por t_n^2, teríamos

$$1 \geq \frac{Ce^{\left(\frac{t_n^2}{\pi}-(2-\beta)\right)\ln(nL)} (\ln nL)^{1/2}}{t_n}.$$

Fazendo $n \to \infty$ na estimativa anterior e usando a Regra de L'Hôpital, temos que

$$1 \geq \lim_{n\to\infty} Ce^{\left(\frac{t_n^2}{\pi}-(2-\beta)\right)\ln(nL)} t_n \left(\ln(nL)\right)^{3/2}.$$

Usando (3.50) e a desigualdade acima, obtemos

$$1 \geq \lim_{n\to\infty} Ct_n \left(\ln(nL)\right)^{3/2} = +\infty,$$

o que é um absurdo. Logo, a afirmação segue.

Agora, voltando a (3.53) e utilizando mais uma vez (3.50), temos que

$$t_n^2 \geq Ct_n \left(\ln(nL)\right)^{1/2},$$

para n suficientemente grande. Assim, dividindo a desigualdade anterior por t_n, obtemos

$$t_n \geq C \left(\ln(nL)\right)^{1/2}.$$

Portanto, quando $n \to \infty$, o lado direito da desigualdade acima vai para o infinito e, consequentemente, $t_n \to +\infty$, o que é uma contradição, pois (t_n) é limitada. Deste resultado, concluímos a prova do lema. ■

3.7.3 Existência de um ponto crítico para $\widetilde{I}_\lambda$ do tipo Passo da Montanha

O lema seguinte garante a existência de uma solução positiva do tipo Passo da Montanha para o funcional $\widetilde{I}_\lambda$.

Lema 3.7.4 *$\widetilde{I}_\lambda$ tem um ponto crítico v_λ do tipo Passo da Montanha, com $v_\lambda > 0$ em $\overline{\Omega}$.*

Demonstração: Seja $(v_n) \subset H^1(\Omega)$ uma sequência que satisfaz a condição $(PS)_{F,c_m}$ para $\widetilde{I}_\lambda$ (para a existência de tal sequência, veja [16] e [14]). Então, pelo Lema 3.7.2, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v_\lambda$ em $H^1(\Omega)$, para algum $v_\lambda \in H^1(\Omega)$. Logo, pela Proposição 1.2.2, (v_n) é limitada em $H^1(\Omega)$. E, pela imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [2,+\infty)$, a menos de subsequência, $v_n \to v_\lambda$ em $L^2(\Omega)$. Como Ω é limitado, segue que $v_n \to v_\lambda$ em $L^1(\Omega)$. Logo, pelo Teorema 1.1.7, a menos de subsequência, $v_n(x) \to v_\lambda(x)$ quase sempre em Ω.

Afirmação: $v_\lambda \neq 0$.

Suponhamos que $v_\lambda = 0$. No que segue, consideraremos dois casos.

Caso 1: $c_m = 0$.

Neste caso, $F = \{v \in H^1(\Omega) : \|v\| = R_0/2\}$ e como (v_n) satisfaz a condição $(PS)_{F,c_m}$ para $\widetilde{I}_\lambda$, pelo Lema 3.7.2, se $v_n \rightharpoonup 0$ em $H^1(\Omega)$, então

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x,v_n)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x,0)\ \mathrm{d}x = 0 \tag{3.54}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} \widetilde{H}_\lambda(x,v_n)\ \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \widetilde{H}_\lambda(x,0)\ \mathrm{d}x = 0. \tag{3.55}$$

Também pela condição $(PS)_{F,c_m}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \|v_n\|^2 - \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x,v_n)\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \widetilde{H}_\lambda(x,v_n)\ \mathrm{d}x \right) = c_m = 0,$$

o que implica $\frac{1}{2}\|v_n\|^2 \to 0$. Assim, $\|v_n\| \to 0$ em $H^1(\Omega)$. O que é um absurdo, pois como $(v_n) \subset F$, $\|v_n\| = R_0/2 > 0$, para todo n. Portanto, $v_\lambda \neq 0$.

Caso 2: $c_m \in \left(0, \frac{\pi}{2}(2-\beta)\right)$.

Usando novamente o fato de $v_n \rightharpoonup 0$ em $H^1(\Omega)$, obtemos as convergências em (3.54) e (3.55). Por outro lado, como (v_n) satisfaz a condição $(PS)_{F,c_m}$ para $\widetilde{I}_\lambda$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \|v_n\|^2 - \int_\Omega \widetilde{G}_\lambda(x,v_n)\ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \widetilde{H}_\lambda(x,v_n)\ \mathrm{d}x \right) = c_m.$$

Disto e das convergências em (3.54) e (3.55) segue que $\|v_n\|^2 \to 2c_m$. Assim, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, $\|v_n\|^2 < 2c_m + \delta$. Fazendo $\delta \to 0$, obtemos que $\|v_n\|^2 \leq 2c_m < \pi(2-\beta)$. Logo, existe $\epsilon > 0$ tal que, para n suficientemente grande, $\|v_n\|^2 \leq \pi(2-\beta) - \epsilon$. Sejam

$$0 < \delta < \frac{\epsilon}{\pi(2-\beta)-\epsilon} \text{ e } r = \frac{\pi(2-\beta)}{(1+\delta)(\pi(2-\beta)-\epsilon)}.$$

Notemos que $r > 1$, pois

$$(1+\delta)\left(\pi\left(2-\beta\right)-\epsilon\right) < \left(1+\frac{\epsilon}{\pi\left(2-\beta\right)-\epsilon}\right)\left(\pi\left(2-\beta\right)-\epsilon\right)$$
$$= \left(\frac{\pi\left(2-\beta\right)-\epsilon+\epsilon}{\pi\left(2-\beta\right)-\epsilon}\right)\left(\pi\left(2-\beta\right)-\epsilon\right) = \pi\left(2-\beta\right).$$

Do item (i) do Lema A.1.4, temos que existe $C > 0$ tal que, para todo $s \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ e $\beta \in [0,2)$, $\sup_{x\in\overline{\Omega}} |\widetilde{g}_\lambda(x,s)| \leq C\frac{e^{(1+\delta)s^2}}{|x|^\beta}$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}\backslash\{0\}$. Então,

$$\int_\Omega |\widetilde{g}_\lambda(x,v_n)v_n| \ \mathrm{d}x \leq C\int_\Omega \frac{|v_n|}{|x|^\beta} e^{(1+\delta)v_n^2}\ \mathrm{d}x. \tag{3.56}$$

Por outro lado, como $(1+\delta)\left(\pi\left(2-\beta\right)-\epsilon\right) < \pi\left(2-\beta\right)$, podemos escolher $1 < r_0 < r$ tal que $r_0\left(1+\delta\right)\left(\pi\left(2-\beta\right)-\epsilon\right) < \pi\left(2-\beta\right)$. Logo, $r_0\left(1+\delta\right)\|v_n\|^2 \leq r_0\left(1+\delta\right)\left(\pi\left(2-\beta\right)-\epsilon\right) < \pi\left(2-\beta\right)$. Além disso, como $\beta \in [0,2)$, podemos ter que $\frac{r_0(1+\delta)(\pi(2-\beta)-\epsilon)}{2\pi} + \frac{\beta}{2} < 1$. Usando a desigualdade de Hölder, temos que, para $\frac{1}{p} + \frac{1}{r_0} = 1$ e $\beta p < 2$,

$$\int_\Omega \frac{|v_n|}{|x|^\beta} e^{(1+\delta)v_n^2}\ \mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega \frac{|v_n|^p}{|x|^{\beta p}}\ \mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_\Omega e^{r_0(1+\delta)v_n^2}\ \mathrm{d}x\right)^{1/r_0}$$
$$= \|v_n\|_{L^p\left(\Omega,|x|^{-\beta}\right)}\left(\int_\Omega e^{r_0(1+\delta)\|v_n\|^2\left(\frac{v_n}{\|v_n\|}\right)^2}\ \mathrm{d}x\right)^{1/r_0}.$$

Pela desigualdade de Trudinger-Moser (3.5), $\int_\Omega e^{r_0(1+\delta)\|v_n\|^2\left(\frac{v_n}{\|v_n\|}\right)^2}\ \mathrm{d}x < \infty$. Logo,

$$\int_\Omega \frac{|v_n|}{|x|^\beta} e^{(1+\delta)v_n^2}\ \mathrm{d}x \leq C\,\|v_n\|_{L^p\left(\Omega,|x|^{-\beta}\right)}. \tag{3.57}$$

Agora, como $v_n \rightharpoonup 0$ em $H^1(\Omega)$, pela imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s\left(\Omega,|x|^{-\beta}\right)$, para todo $s \in [2,+\infty)$, $v_n \to 0$ em $L^s\left(\Omega,|x|^{-\beta}\right)$, para todo $s \in [2,+\infty)$. Como Ω é limitado, $v_n \to 0$ em $L^s\left(\Omega,|x|^{-\beta}\right)$, para todo $1 \leq s < 2$. Em particular, $v_n \to 0$ em $L^p\left(\Omega,|x|^{-\beta}\right)$. Logo, $\|v_n\|_{L^p\left(\Omega,|x|^{-\beta}\right)} \to 0$. Usando este resultado e (3.57), voltamos a (3.56) e obtemos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\widetilde{g}_\lambda(x,v_n)v_n|\ \mathrm{d}x = 0.$$

Disto segue que

$$0 \leq \left|\int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n)v_n\ \mathrm{d}x\right| \leq \int_\Omega |\widetilde{g}_\lambda(x,v_n)v_n|\ \mathrm{d}x \to 0,$$

o que implica

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n)v_n \ \mathrm{d}x = 0. \tag{3.58}$$

Usando que $v_n \rightharpoonup 0$ em $H^1(\Omega)$ e a imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$ e procedendo como no Lema 2.7.6 (ver 2.74), pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \widetilde{h}_\lambda(x,v_n)v_n \ \mathrm{d}x = 0. \tag{3.59}$$

Desde que (v_n) satisfaz a condição $(PS)_{F,c_m}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|v_n\|^2 \ \mathrm{d}x - \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n)v_n \ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_\lambda(x,v_n)v_n \ \mathrm{d}x\right) = 0.$$

Assim, usando (3.58) e (3.59), obtemos do limite anterior que $\|v_n\|^2 \to 0$. O que é um absurdo, pois tínhamos que $\|v_n\|^2 \to 2c_m > 0$. Concluimos, assim, que $v_\lambda \neq 0$ em Ω, e a afirmação segue.

No segue, nosso objetivo é mostrar que v_λ é solução fraca de (3.39). De fato, como (v_n) satisfaz a condição $(PS)_{F,c_m}$, pelo Lema 3.7.2, $v_n \rightharpoonup v_\lambda$ em $H^1(\Omega)$ e, além disso,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n) \ \mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_\lambda) \ \mathrm{d}x \text{ e } \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \widetilde{h}_\lambda(x,v_n) \ \mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{h}_\lambda(x,v_\lambda) \ \mathrm{d}x.$$

Procedendo como no Lema 2.7.6 (ver 2.75), tomemos $\varphi \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ e em seguida, usando argumento de densidade, obteremos das convergências acima que, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_n)\varphi \ \mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_\lambda)\varphi \ \mathrm{d}x \text{ e } \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \widetilde{h}_\lambda(x,v_n)\varphi \ \mathrm{d}x = \int_\Omega \widetilde{h}_\lambda(x,v_\lambda)\varphi \ \mathrm{d}x.$$

Também, já vimos que, se $v_n \rightharpoonup v_\lambda$ em $H^1(\Omega)$ (ver Lema 2.7.6, 2.77) pelo Teorema da Representação de Riesz,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (\nabla v_n \nabla\varphi + v_n\varphi) \ \mathrm{d}x = \int_\Omega (\nabla v_\lambda \nabla\varphi + v_\lambda\varphi) \ \mathrm{d}x,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Destes resultados e usando que $\lim_{n\to\infty}\left\|\widetilde{I}'_\lambda(v_n)\right\|_* = 0$, pois (v_n) satisfaz a condição $(PS)_{F,c_m}$ para $\widetilde{I}_\lambda$, obtemos que, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (\nabla v_\lambda \nabla\varphi + v_\lambda\varphi) \ \mathrm{d}x - \int_\Omega \widetilde{g}_\lambda(x,v_\lambda)\varphi \ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \widetilde{h}_\lambda(x,v_\lambda)\varphi \ \mathrm{d}x = 0.$$

Portanto, v_λ é solução fraca de (3.39). Deste resultado, juntamente do fato de $v_\lambda \neq 0$, usamos a Observação 3.7.1 e concluímos, pelo Lema 2.3.4, que $v_\lambda > 0$ em $\overline{\Omega}$. Com isto, terminamos a prova do lema. ■

No lema seguinte, cuja prova segue de forma análoga à prova do Lema 2.7.7, obteremos a segunda solução fraca de (Q_λ).

Lema 3.7.5 *Sejam v_λ e u_λ soluções fracas de* (3.39) *e* (Q_λ), *respectivamente. Então $w_\lambda = u_\lambda + v_\lambda$ é solução fraca de (Q_λ).*

3.8 Prova do teorema principal

No que segue, faremos a prova do principal teorema deste capítulo.

Prova do Teorema 3.1.1

Pelo Lema 3.5.2, (Q_λ) tem uma solução fraca u_λ que é mínimo local de I_λ, para cada $\lambda \in (0, \Lambda)$. E, pelo Lema 3.7.5, encontramos a segunda solução fraca para (Q_λ) dada por $w_\lambda = u_\lambda + v_\lambda$. Por definição de Λ, (Q_λ) não tem solução fraca para $\lambda > \Lambda$. No que segue, nosso objetivo é mostrar que (Q_λ) tem ao menos uma solução fraca para $\lambda = \Lambda$.
Com efeito, procedendo de maneira similar ao que fizemos na prova do Teorema 2.1.4, obteremos que, para $t > 0$ pequeno e $u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$, $\overline{I}_\lambda(tu) < 0$. Por outro lado, obtivemos na demonstração do Lema 3.5.2 que, para cada $\lambda \in (0, \Lambda)$, u_λ é mínimo global de $\overline{I}_\lambda$. Então, $\overline{I}_\lambda(u_\lambda) < 0$. Além disso, mostramos no Teorema 3.6.1 que $u_\lambda \in M_\lambda$, onde M_λ está definido em (3.33). Assim, se considerarmos a sequência $(\lambda_n) \subset (0, \Lambda)$ tal que $\lambda_n \to \Lambda$ e (u_{λ_n}) a correspondente sequência de soluções fracas de (Q_λ), podemos obter, para cada n, u_{λ_n} mínimo global de $\overline{I}_{\lambda_n}$. Assim,

$$\overline{I}_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) < 0 \text{ e } u_{\lambda_n} \in M_{\lambda_n}.$$

No Teorema 3.6.1, mostramos também que $\overline{I}_\lambda(u) = I_\lambda(u)$, para todo $u \in M_\lambda$. Assim, $I_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) = \overline{I}_\lambda(u_{\lambda_n}) < 0$. Logo, $\limsup_{n\to\infty} I_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) \leq 0$.

Afirmação: (u_{λ_n}) é limitada em $H^1(\Omega)$.

De fato, pelo resultado anterior, temos que, para n suficientemente grande,

$$\frac{1}{2}\left\|u_{\lambda_n}\right\|^2-\int_\Omega G\left(x,u_{\lambda_n}\right)\ \mathrm{d}x-\frac{\lambda_n}{q+1}\int_{\partial\Omega}\psi\left|u_{\lambda_n}\right|^{q+1}\ \mathrm{d}x\leq 0.$$

Por outro lado, sendo u_{λ_n} solução fraca de (Q_λ), $I'_{\lambda_n}\left(u_{\lambda_n}\right)\varphi=0$, para todo $\varphi\in H^1\left(\Omega\right)$. Em particular, para $\varphi=u_{\lambda_n}$. Assim,

$$\left\|u_{\lambda_n}\right\|^2-\int_\Omega g\left(x,u_{\lambda_n}\right)u_{\lambda_n}\ \mathrm{d}x-\lambda_n\int_{\partial\Omega}\psi\left|u_{\lambda_n}\right|^{q+1}\ \mathrm{d}x=0. \tag{3.60}$$

Pelo do item (ii) do Lema A.1.2, temos que dado $\epsilon>0$, existe $s_\epsilon>0$ tal que, para $s\geq s_\epsilon$, $G\left(x,s\right)\leq\epsilon g\left(x,s\right)s$ uniformemente em $x\in\overline{\Omega}\backslash\{0\}$. Logo,

$$\frac{1}{2}\left\|u_{\lambda_n}\right\|^2\leq\int_{\Omega\cap\{u_{\lambda_n}\leq s_\epsilon\}}G\left(x,u_{\lambda_n}\right)\ \mathrm{d}x+\epsilon\int_{\Omega\cap\{u_{\lambda_n}\geq s_\epsilon\}}g\left(x,u_{\lambda_n}\right)u_{\lambda_n}\ \mathrm{d}x+\frac{\lambda_n}{q+1}\int_{\partial\Omega}\psi\left|u_{\lambda_n}\right|^{q+1}\ \mathrm{d}x,$$

o que implica

$$\frac{1}{2}\left\|u_{\lambda_n}\right\|^2\leq C_\epsilon+\epsilon\int_\Omega g\left(x,u_{\lambda_n}\right)u_{\lambda_n}\ \mathrm{d}x+\frac{\lambda_n}{q+1}\int_{\partial\Omega}\psi\left|u_{\lambda_n}\right|^{q+1}\ \mathrm{d}x. \tag{3.61}$$

Além disso, usando (3.60), temos que

$$\int_\Omega g\left(x,u_{\lambda_n}\right)u_{\lambda_n}\ \mathrm{d}x\leq\left\|u_{\lambda_n}\right\|^2$$

e, já vimos na demonstração do Lema 2.3.1 (ver 2.7) que existe $C>0$ tal que

$$\int_{\partial\Omega}\psi\left|u_{\lambda_n}\right|^{q+1}\ \mathrm{d}x\leq C\left\|u_{\lambda_n}\right\|^{q+1}.$$

Consequentemente, existem C_1, $C_2>0$ tais que

$$\int_{\partial\Omega}\psi\left|u_{\lambda_n}\right|^{q+1}\ \mathrm{d}x\leq C_1+C_2\left\|u_{\lambda_n}\right\|^2.$$

Escolhamos $C_1>0$ tal que $C_2=\frac{q+1}{4\Lambda}$. Assim, voltando a (3.61) e usando que $\lambda_n\subset(0,\Lambda)$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|u_{\lambda_n}\right\|^2&\leq C_\epsilon+\epsilon\left\|u_{\lambda_n}\right\|^2+\frac{\lambda_n}{q+1}\left(C_1+C_2\left\|u_{\lambda_n}\right\|^2\right)\\&\leq C_\epsilon+\epsilon\left\|u_{\lambda_n}\right\|^2+\frac{\Lambda}{q+1}\left(C_1+\frac{q+1}{4\Lambda}\left\|u_{\lambda_n}\right\|^2\right),\end{aligned}$$

mostrando que

$$\left(\frac{1}{4}-\epsilon\right)\|u_{\lambda_n}\|^2 \leq C_\epsilon + \frac{\Lambda C_1}{q+1}.$$

Disto, do fato de $\Lambda < \infty$ e considerando $\epsilon < \frac{1}{4}$, segue que $\|u_{\lambda_n}\|$ é limitada. Assim, a afirmação está provada.

Sendo (u_{λ_n}) limitada em $H^1(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$ Hilbert, pelo Teorema 1.2.3, a menos de subsequência, $u_{\lambda_n} \rightharpoonup u_\Lambda$ em $H^1(\Omega)$, para algum $u_\Lambda \in H^1(\Omega)$. Além disso, pela imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [2, +\infty)$, $u_{\lambda_n} \to u_\Lambda$ em $L^2(\Omega)$. Desde que Ω é limitado, temos que $u_{\lambda_n} \to u_\Lambda$ em $L^1(\Omega)$.

Afirmamos agora que u_Λ é solução fraca de (Q_Λ).

Com efeito, como $u_{\lambda_n} \rightharpoonup u_\Lambda$ em $H^1(\Omega)$, usando o Teorema da Representação de Riesz (ver Lema 2.7.6, (2.77)),

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (\nabla u_{\lambda_n}\nabla\varphi + u_{\lambda_n}\varphi)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega (\nabla u_\Lambda\nabla\varphi + u_\Lambda\varphi)\ \mathrm{d}x, \tag{3.62}$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$ e, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, mostra-se que (veja Lema 2.3.2, (2.14))

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Omega}\psi\,|u_{\lambda_n}|^q\ \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\psi\,|u_\Lambda|^q\ \mathrm{d}x.$$

Por outro lado, como $I'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n})\varphi = 0$, temos que $\lim_{n\to\infty} I'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n})\varphi = 0$, para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, e fazendo $\varphi = u_{\lambda_n}$, temos que

$$\int_\Omega g(x, u_{\lambda_n})\,u_{\lambda_n}\ \mathrm{d}x + \lambda_n\int_{\partial\Omega}\psi\,|u_{\lambda_n}|^{q+1}\ \mathrm{d}x \leq \epsilon + \|u_{\lambda_n}\|^2 \leq \epsilon + C.$$

Consequentemente,

$$\sup_n \int_\Omega g(x, u_{\lambda_n})\,u_{\lambda_n}\ \mathrm{d}x < \infty.$$

Agora, pelo item (iii) do Lema A.1.4, $g(x, u_{\lambda_n})$, $g(x, u_\Lambda) \in L^1(\Omega)$. Portanto, pelo item (i) do Lema A.3.2,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g(x, u_{\lambda_n})\ \mathrm{d}x = \int_\Omega g(x, u_\Lambda)\ \mathrm{d}x.$$

Usando estas convergências e escolhendo primeiramente $\varphi \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$ e depois usando argumentos de densidade obtemos, de maneira análoga ao que fizemos no Lema 2.7.6 (ver (2.75)), que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} g\left(x, u_{\lambda_n}\right) \varphi \, \mathrm{d}x = \int_{\Omega} g\left(x, u_{\Lambda}\right) \varphi \, \mathrm{d}x \text{ e } \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} \psi \left|u_{\lambda_n}\right|^q \varphi \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \psi \left|u_{\Lambda}\right|^q \varphi \, \mathrm{d}x,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$.

Assim, usando novamente que $\lim_{n\to\infty} I'_{\lambda_n}\left(u_{\lambda_n}\right)\varphi = 0$, obtemos das últimas convergências e de (3.62) que

$$\int_{\Omega} \left(\nabla u_{\Lambda} \nabla \varphi + u_{\Lambda}\varphi\right) \, \mathrm{d}x - \int_{\Omega} g\left(x, u_{\Lambda}\right) \varphi \, \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \psi \left|u_{\Lambda}\right|^q \varphi \, \mathrm{d}x = 0,$$

para todo $\varphi \in H^1(\Omega)$. Disto segue que u_{Λ} é solução fraca de (Q_{Λ}). Assim, para $\lambda = \Lambda$, (Q_{Λ}) tem ao menos uma solução fraca, o que conclui a prova do teorema.

Apêndice A

Resultados fundamentais

Neste apêndice, demostraremos alguns resultados que foram usados nesta dissertação.

A.1 Desigualdades

Nesta seção, provaremos algumas desigualdades que utilizamos ao longo deste trabalho.

Para o lema seguinte, consideraremos $\alpha = 2$. Porém, o resultado também é válido para $\alpha \in (0, 2)$ e pode ser provado de maneira análoga ao caso $\alpha = 2$.

Lema A.1.1 *Sejam g, G, $\widetilde{g}_\lambda$ e $\widetilde{G}_\lambda$ as funções definidas em* (2.4), (2.49) *e* (2.50), *respectivamente. Então, para $\alpha = 2$ e para todo $s \in \mathbb{R}$, existem constantes positivas C_1, C_2, C_3 e C_4 tais que*

(i) $|G(s)| \leq C_1 |g(s)|$,

(ii) $|G(s)| \leq C_2 |g(s)s|$,

(iii) $\left|\widetilde{G}_\lambda(x, s)\right| \leq C_3 |\widetilde{g}_\lambda(x, s)|$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$,

(iv) $\left|\widetilde{G}_\lambda(x, s)\right| \leq C_4 |\widetilde{g}_\lambda(x, s)s|$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$.

Demonstração: Provaremos os itens (i) e (iii), pois os itens (ii) e (iv) são análogos aos itens (i) e (iii), respectivamente.

Para a prova do item (i), notemos que, se $s \leq 0$, $g(s) = G(s) = 0$ e o resultado segue. Fixando $s_0 > 0$, temos que

$$G(s) = \int_0^s p(t)e^{t^2} \, \mathrm{d}t = \int_0^{s_0} p(t)e^{t^2} \, \mathrm{d}t + \int_{s_0}^s \frac{tp(t)e^{t^2}}{t} \, \mathrm{d}t.$$

Como $p(s)$ é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, existe $C > 0$, tal que $\int_0^{s_0} p(t)e^{t^2} \, \mathrm{d}t \leq C$. Pela hipótese $(P_2)(b)$, $p(s)$ é não-decrescente, então

$$G(s) \leq C + \frac{p(s)}{2s_0} \int_{s_0}^s 2te^{t^2} \, \mathrm{d}t.$$

Ecrevendo $v = t^2$, temos $\mathrm{d}v = 2t \, \mathrm{d}t$. Assim,

$$\int_{s_0}^s 2te^{t^2} \, \mathrm{d}t = \int_{s_0}^s e^v \, \mathrm{d}v = e^{s^2} - e^{s_0^2}.$$

Logo,

$$G(s) \leq C + \frac{p(s)}{2s_0} \left(e^{s^2} - e^{s_0^2} \right).$$

Uma vez que $g(s)$ é não-decrescente, dividindo a estimativa anterior por $g(s)$ e fazendo $s \to +\infty$, obtemos

$$\frac{G(s)}{g(s)} \leq \frac{C}{g(s)} + \frac{1}{2s_0} \frac{p(s)\left(e^{s^2} - e^{s_0^2} \right)}{p(s)e^{s^2}} \to \frac{1}{2s_0}.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $s_\epsilon > 0$ tal que, para $s \geq s_\epsilon$,

$$\left| \frac{G(s)}{g(s)} - \frac{1}{2s_0} \right| < \epsilon. \tag{A.1}$$

Logo, $|G(s)| \leq C_1 |g(s)|$, onde $C_1 = \epsilon + \frac{1}{2s_0} > 0$, para todo $s \geq s_\epsilon$. Agora, para $s \in [0, s_\epsilon]$, usando a definição de G e o fato de g ser não-decrescente, obtemos que

$$G(s) = \int_0^s g(t) \, \mathrm{d}t \leq g(s)s \leq g(s)s_\epsilon.$$

Fazendo $C = \max\{C_1, s_\epsilon\}$, temos que $|G(s)| \leq C |g(s)|$, para todo $s \in \mathbb{R}$, e o item (i) segue.

Para o item (iii), notemos que, por definição, se $t < 0$, então $\widetilde{g}_\lambda(x,t) = 0$ e o resultado segue. Agora, se $t \geq 0$,

$$\widetilde{g}_\lambda(x,t) = p\left(t + u_\lambda(x)\right) e^{(t+u_\lambda(x))^2} - p\left(u_\lambda(x)\right) e^{u_\lambda^2(x)}.$$

Agora, como $u_\lambda(x)$ é limitada em $\mathbb{R}$, pois $u_\lambda(x)$ é contínua em $\overline{\Omega}$, e além disso, $p(u_\lambda(x))\, e^{u_\lambda^2(x)} \geq 0$, temos que $\widetilde{g}_\lambda(x,t) \leq p(t+u_\lambda(x))\, e^{(t+u_\lambda(x))^2}$. Tomemos novamente $s_0 > 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_\lambda(x,s) &= \int_0^s \widetilde{g}_\lambda(x,t)\ \mathrm{d}t \leq \int_0^s p(t+u_\lambda(x))\, e^{(t+u_\lambda(x))^2}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{s_0} p(t+u_\lambda(x))\, e^{(t+u_\lambda(x))^2}\ \mathrm{d}t + \int_{s_0}^s p(t+u_\lambda(x))\, e^{(t+u_\lambda(x))^2}\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Como $p(t+u_\lambda(x))\, e^{(t+u_\lambda(x))^2}$ é contínua e não-negativa, pelo Teorema de Weierstrass, $\int_0^{s_0} p(t+u_\lambda(x))\, e^{(t+u_\lambda(x))^2}\ \mathrm{d}t \leq C$. Assim,

$$\widetilde{G}_\lambda(x,s) \leq C + \int_{s_0}^s p(t+u_\lambda(x))\, e^{(t+u_\lambda(x))^2}\ \mathrm{d}t.$$

Sendo $u_\lambda(x) > 0$ e $p(s)$ não-decrescente, obtemos

$$\begin{aligned}\widetilde{G}_\lambda(x,s) &\leq C + \int_{s_0}^s \frac{(t+u_\lambda(x))}{(t+u_\lambda(x))} p(t+u_\lambda(x))\, e^{(t+u_\lambda(x))^2}\ \mathrm{d}t \\ &\leq C + \frac{p(s+u_\lambda(x))}{2(s_0+u_\lambda(x))} \int_{s_0}^s 2p(t+u_\lambda(x))\, e^{(t+u_\lambda(x))^2}\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Escrevendo $v = (t+u_\lambda(x))^2$, temos $\mathrm{d}v = 2(t+u_\lambda(x))\ \mathrm{d}t$. Assim,

$$\int_{s_0}^s 2p(t+u_\lambda(x))\, e^{(t+u_\lambda(x))^2}\mathrm{d}t = \int_{s_0}^s e^v \mathrm{d}v = e^{(s+u_\lambda(x))^2} - e^{(s_0+u_\lambda(x))^2}.$$

Substituindo este resultado na última estimativa, temos que

$$\widetilde{G}_\lambda(x,s) \leq C + \frac{p(s+u_\lambda(x))}{2(s_0+u_\lambda(x))} \left[e^{(s+u_\lambda(x))^2} - e^{(s_0+u_\lambda(x))^2}\right].$$

Agora, dividindo a desigualdade anterior por $\widetilde{g}_\lambda$, obtemos

$$\frac{\widetilde{G}_\lambda(x,s)}{\widetilde{g}_\lambda(x,s)} \leq \frac{C}{\widetilde{g}_\lambda(x,s)} + \frac{p(s+u_\lambda(x))\left[e^{(s+u_\lambda(x))^2} - e^{(s_0+u_\lambda(x))^2}\right]}{2(s_0+u_\lambda(x))\left[p(s+u_\lambda(x))\, e^{(s+u_\lambda(x))^2} - p(u_\lambda(x))\, e^{u_\lambda^2(x)}\right]}. \tag{A.2}$$

Sendo $g(s)$ não-decrescente e $u_\lambda(x)$ limitada em $\mathbb{R}$, temos que

$$p(s+u_\lambda(x))\left[e^{(s+u_\lambda(x))^2} - e^{(s_0+u_\lambda(x))^2}\right] < p(s+u_\lambda(x))\, e^{(s+u_\lambda(x))^2} - p(u_\lambda(x))\, e^{u_\lambda^2(x)}.$$

Fazendo $s \to +\infty$ em, (A.2), temos

$$\frac{C}{\widetilde{g}_\lambda(x,s)} \to 0$$

e

$$\frac{p\left(s+u_{\lambda}(x)\right)\left[e^{(s+u_{\lambda}(x))^{2}}-e^{(s_{0}+u_{\lambda}(x))^{2}}\right]}{2\left(s_{0}+u_{\lambda}(x)\right)\left[p\left(s+u_{\lambda}(x)\right)e^{(s+u_{\lambda}(x))^{2}}-p\left(u_{\lambda}(x)\right)e^{u_{\lambda}^{2}(x)}\right]}\rightarrow 0.$$

Portanto, pelas convergências acima, voltamos a (A.2) e obtemos que, dado $\epsilon > 0$, existe $s_{\epsilon} > 0$ tal que, para todo $s \geq s_{\epsilon}$,

$$\left|\frac{\widetilde{G}_{\lambda}(x,s)}{\widetilde{g}_{\lambda}(x,s)}\right| < \epsilon.$$

Assim, $\left|\widetilde{G}_{\lambda}(x,s)\right| \leq \epsilon\left|\widetilde{g}_{\lambda}(x,s)\right|$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$ e para todo $s \geq s_{\epsilon}$. Agora, para $s \in [0, s_{\epsilon}]$, usando a definição de $\widetilde{G}_{\lambda}$ e o fato de $\widetilde{g}_{\lambda}$ ser não-decrescente, obtemos que

$$\widetilde{G}_{\lambda}(x,s) = \int_{0}^{s} \widetilde{g}_{\lambda}(x,t)\ \mathrm{d}t \leq \widetilde{g}_{\lambda}(x,s)s \leq \widetilde{g}_{\lambda}(x,s)s_{\epsilon} \text{ uniformemente em } x \in \overline{\Omega}.$$

Tomando $C = \max\{\epsilon, s_{\epsilon}\}$, temos que $\left|\widetilde{G}_{\lambda}(x,s)\right| \leq C\left|\widetilde{g}_{\lambda}(x,s)\right|$, uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$ e para todo $s \in \mathbb{R}$. Disto, o item (iii) segue. ■

A prova do lema a seguir é similar à prova do lema anterior.

Lema A.1.2 *Sejam g, G, $\widetilde{g}_{\lambda}$ e $\widetilde{G}_{\lambda}$ as funções definidas em* (3.2), (3.36) *e* (3.37), *respectivamente. Então, para todo $s \in \mathbb{R}$, existem constantes positivas C_1, C_2, C_3 e C_4 tais que*

(i) $|G(x,s)| \leq C_1\,|g(x,s)|$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}\backslash\{0\}$,

(ii) $|G(x,s)| \leq C_2\,|g(x,s)s|$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}\backslash\{0\}$,

(iii) $\left|\widetilde{G}_{\lambda}(x,s)\right| \leq C_3\left|\widetilde{g}_{\lambda}(x,s)\right|$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}\backslash\{0\}$,

(iv) $\left|\widetilde{G}_{\lambda}(x,s)\right| \leq C_4\left|\widetilde{g}_{\lambda}(x,s)s\right|$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}\backslash\{0\}$.

Lema A.1.3 *Sejam g, G, $\widetilde{g}_{\lambda}$ e $\widetilde{G}_{\lambda}$ as funções definidas em* (2.4), (2.49) *e* (2.50), *respectivamente. Então, para $\alpha \in (0,2]$ e $\delta > 0$, temos que*

(i) existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$|g(s)| \leq C_1 e^{(1+\delta)s^{\alpha}} \text{ e } \left|\widetilde{g}_{\lambda}(x,s)\right| \leq C_2 e^{(1+\delta)s^{\alpha}} \text{ uniformemente em } x \in \overline{\Omega},$$

(ii) existem constantes positivas C_3 e C_4 tais que, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$|G(s)| \leq C_3 s e^{(1+\delta)s^\alpha} \text{ e } \left|\widetilde{G}_\lambda(x,s)\right| \leq C_4 s e^{(1+\delta)s^\alpha} \text{ uniformemente em } x \in \overline{\Omega}$$

(iii) e, para $u \in H^1(\Omega)$, temos que

$$g(u), G(u), \widetilde{g}_\lambda(\cdot, u) \text{ e } \widetilde{G}_\lambda(\cdot, u) \in L^1(\Omega).$$

Demonstração: Para a prova do item (i), notemos que se $s < 0$, pela hipótese $(P_2)(b)$ temos $p(s) = 0$ e, assim, $g(s) = 0$. E o resultado segue. Para $s \geq 0$, $\alpha \in (0, 2]$ e $\delta > 0$, temos que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{p(s)e^{s^\alpha}}{e^{(1+\delta)s^\alpha}} = 0.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $s_\epsilon > 0$, tal que, para $s \geq s_\epsilon$, $|g(s)| = \left|p(s)e^{s^\alpha}\right| \leq \epsilon e^{(1+\delta)s^\alpha}$. Para $s \in [0, s_\epsilon]$ como $\frac{g(s)}{e^{(1+\delta)s^\alpha}}$ é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, existe $C > 0$ tal que $|g(s)| \leq Ce^{(1+\delta)s^\alpha}$. Tomando $C_1 = \max\{\epsilon, C\}$, obtemos que, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$|g(s)| \leq C_1 e^{(1+\delta)s^\alpha}. \tag{A.3}$$

A prova de que existe $C_2 > 0$ tal que $|\widetilde{g}_\lambda(x,s)| \leq C_2 e^{(1+\delta)s^\alpha}$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$, segue de maneira análoga. Logo, o item (i) está provado.

Para mostrar o item (ii), é suficiente usar as definições de G e $\widetilde{G}_\lambda$ e o item (i). De fato, temos que

$$G(s) = \int_0^s g(t)\ \mathrm{d}t \leq C \int_0^s e^{(1+\delta)t^\alpha}\ \mathrm{d}t \leq Cse^{(1+\delta)s^\alpha}$$

e

$$\widetilde{G}_\lambda(x,s) = \int_0^s \widetilde{g}_\lambda(x,t)\ \mathrm{d}t \leq C \int_0^s e^{(1+\delta)t^\alpha}\ \mathrm{d}t \leq Cse^{(1+\delta)s^\alpha}$$

uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$.

Para a prova do item (iii), notemos inicialmente que, pelo ietm (i) e pela desigualdade de Trudinger-Moser (2.1), segue que

$$\int_\Omega |g(u)|\ \mathrm{d}x \leq C_1 \int_\Omega e^{(1+\delta)u^\alpha}\ \mathrm{d}x < \infty.$$

Logo, $g(u) \in L^1(\Omega)$. De maneira análoga, mostra-se que $\widetilde{g}_\lambda(x,u) \in L^1(\Omega)$. Agora, usando o item (ii), obtemos

$$\int_\Omega |G(u)| \, \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega u e^{(1+\delta)u^\alpha} \, \mathrm{d}x.$$

Pela desigualdade de Hölder e pela imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, segue da estimativa anterior que

$$\int_\Omega |G(u)| \, \mathrm{d}x \leq C \left(\int_\Omega e^{r(1+\delta)u^\alpha} \, \mathrm{d}x \right)^{1/r} \left(\int_\Omega |u|^{r'} \, \mathrm{d}x \right)^{1/r'} \leq C \left(\int_\Omega e^{r(1+\delta)u^\alpha} \, \mathrm{d}x \right)^{1/r} \|u\|$$

onde $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ e $r > 1$. Pela desigualdade de Trudinger-Moser (2.1), segue que $\int_\Omega e^{r(1+\delta)u^\alpha}$ $\mathrm{d}x < \infty$. Logo,

$$\int_\Omega |G(u)| \, \mathrm{d}x \leq C \|u\| < \infty.$$

Assim, $G(u) \in L^1(\Omega)$. De maneira similar, obtém-se que $\widetilde{G}_\lambda(x,u) \in L^1(\Omega)$. Portanto, o item (iii) está provado. ■

Também omitiremos a prova do próximo lema, pois esta é análoga à prova do Lema A.1.3.

Lema A.1.4 *Sejam g, G, $\widetilde{g}_\lambda$ e $\widetilde{G}_\lambda$ as funções definidas em* (3.2), (3.36) *e* (3.37), *respectivamente. Então, para $\beta \in [0,2)$ e $\delta > 0$, temos que*

(i) existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$|g(x,s)| \leq C_1 \frac{e^{(1+\delta)s^2}}{|x|^\beta} \text{ e } |\widetilde{g}_\lambda(x,s)| \leq C_2 \frac{e^{(1+\delta)s^2}}{|x|^\beta} \text{ uniformemente em } x \in \overline{\Omega} \backslash \{0\},$$

(ii) existem constantes positivas C_3 e C_4 tais que, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$|G(x,s)| \leq C_3 s \frac{e^{(1+\delta)s^2}}{|x|^\beta} \text{ e } \left|\widetilde{G}_\lambda(x,s)\right| \leq C_4 s \frac{e^{(1+\delta)s^2}}{|x|^\beta} \text{ uniformemente em } x \in \overline{\Omega} \backslash \{0\}$$

(iii) e, para $u \in H^1(\Omega)$, temos que

$$g(\cdot,u), G(\cdot,u), \widetilde{g}_\lambda(\cdot,u) \text{ e } \widetilde{G}_\lambda(\cdot,u) \in L^1(\Omega).$$

Lema A.1.5 *Sejam g e G as funções definidas em* (3.2). *Então, para $\beta \in [0,2)$ e para algum $k > 1$, temos que*

(i) existe constante positiva C_1 tal que, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$|g(x,s)| \leq C_1 s^k \frac{e^{s^2}}{|x|^\beta} \text{ uniformemente em } x \in \overline{\Omega} \backslash \{0\}$$

(ii) e existe constante positiva C_2 tal que, para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$|G(x,s)| \leq C_2 s^{k+1} \frac{e^{s^2}}{|x|^\beta} \text{ uniformemente em } x \in \overline{\Omega} \backslash \{0\}.$$

Demonstração: Se $s \leq 0$, pela hipótese $(H_2)\,(a)$, h é nula. Logo, g e G são nulas e assim os itens (i) e (ii) seguem. Agora, pela hipótese $(H_2)\,(d)$, dado $\epsilon > 0$, existe $s_\epsilon > 0$ tal que $|h(x,s)| \leq \epsilon\,|s|^k$, para todo $s \geq s_\epsilon$ e para algum $k > 1$. Por outro lado, pela hipótese $(H_2)(f)$, dado $\epsilon_1 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|h\,(x,s)| \leq \epsilon_1 s^k$, para todo $s \in (0, \delta]$ e para algum $k > 1$. Além disso, desde que $\frac{h(x,s)}{s^k}$ é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, existe constante positiva $C_1\,(\delta, \epsilon)$ tal que $|h(x,s)| \leq C_1\,(\delta,\epsilon)\,s^k$, para $s \in [\delta, s_\epsilon]$. Então, fazendo $C = \max\{\epsilon, \epsilon_1, C_1\,(\delta,\epsilon)\}$, obtemos $|h(x,s)| \leq C s^k$ uniformemente em $x \in \overline{\Omega}\backslash\{0\}$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Assim,

$$|g(x,s)| = \left| h(x,s) \frac{e^{s^2}}{|x|^\beta} \right| \leq C_1 s^k \frac{e^{s^2}}{|x|^\beta} \text{ uniformemente em } x \in \overline{\Omega} \backslash \{0\},$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. E o item (i) está provado.

Para a prova do item (ii), é suficiente usar a definição de G e o item (i). Ou seja, como $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\ \mathrm{d}t$, pelo item (i), temos que

$$G(x,s) = \int_0^s g(x,t)\ \mathrm{d}t \leq C \int_0^s t^k \frac{e^{t^2}}{|x|^\beta}\ \mathrm{d}t,$$

o que implica

$$G(x,s) \leq C \frac{e^{s^2}}{|x|^\beta} \int_0^s t^k\ \mathrm{d}t \leq \frac{C}{k+1} s^{k+1} \frac{e^{s^2}}{|x|^\beta} = C_2 s^{k+1} \frac{e^{s^2}}{|x|^\beta} \text{ uniformemente em } x \in \overline{\Omega} \backslash \{0\}.$$

Disto, segue o item (ii). ■

A.2 Funcionais diferenciáveis

Consideremos os funcionais I_1, I_2 e I_3 definidos em $H^1(\Omega)$ por

$$I_1\,(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2 \right)\ \mathrm{d}x,\ I_2\,(u) = \int_\Omega G(u)\ \mathrm{d}x \text{ e } \ I_3\,(u) = \frac{\lambda}{q+1} \int_{\partial\Omega} \psi\,|u|^{q+1}\ \mathrm{d}x,$$

onde G é a função definida em (2.4) e ψ uma função que satisfaz a hipótese (P_1).

Nosso objetivo é mostrar que estes funcionais são de classe $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$. Inicialmente, mostraremos que tais funcionas estão bem definidos. Com efeito, notemos que:

(i) dada $u \in H^1(\Omega)$, então $\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\|u\|^2 < \infty$;

(ii) pelo item (ii) do Lema A.1.3, temos que $G(s) \le Cse^{2s^2}$, então

$$\int_\Omega G(u)\ \mathrm{d}x \le C\int_\Omega ue^{2u^2}\ \mathrm{d}x.$$

Pela desigualdade de Hölder e pela imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, segue da estimativa anterior que

$$\int_\Omega |G(u)|\ \mathrm{d}x \le C\left(\int_\Omega e^{2ru^2}\ \mathrm{d}x\right)^{1/r}\left(\int_\Omega |u|^{r'}\ \mathrm{d}x\right)^{1/r'} \le C\left(\int_\Omega e^{2ru^2}\ \mathrm{d}x\right)^{1/r}\|u\|,$$

onde $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ e $1 < r, r' < +\infty$. Pela desigualdade de Trudinger-Moser (2.1), $\int_\Omega e^{2ru^2}$ $\mathrm{d}x < \infty$. Logo,

$$\int_\Omega |G(u)|\ \mathrm{d}x \le C\left(\int_\Omega e^{2ru^2}\ \mathrm{d}x\right)^{1/r}\|u\| < \infty.$$

Assim, I_2 está bem definido.

(iii) pela hipótese (P_1), $|\psi(x)| \le \|\psi\|_\infty$, para $x \in \overline{\Omega}$. Usando a imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, obtemos que

$$\frac{\lambda}{q+1}\int_{\partial\Omega} \psi\,|u|^{q+1}\ \mathrm{d}x \le \frac{\lambda\,\|\psi\|_\infty}{q+1}\int_{\partial\Omega} |u|^{q+1}\ \mathrm{d}x = C_1\,\|u\|^{q+1}_{L^{q+1}(\partial\Omega)} \le C\,\|u\|^{q+1} < \infty.$$

Logo, os funcionais I_1, I_2 e I_3 estão bem definidos.

Afirmação 1: O funcional I_1 é de classe $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Existência da derivada de Gateaux de I_1

Seja $u \in H^1(\Omega)$, então para cada $v \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_1(u)}{\partial v} &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left[\frac{I_1(u+tv) - I_1(u)}{t}\right] = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left[\frac{\|u+tv\|^2 - \|u\|^2}{t}\right] \\ &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left[\frac{\langle u+tv, u+tv\rangle - \langle u, u\rangle}{t}\right] = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left[2\langle u, v\rangle + t\,\|u\|^2\right] = \langle u, v\rangle.\end{aligned}$$

Logo, $\frac{\partial I_1(u)}{\partial v} = \langle u, v\rangle$ é a candidata a derivada de I_1.

Existência da derivada de Fréchet de I_1

Seja $u \in H^1(\Omega)$. Para cada $v \in H^1(\Omega)$, temos que

$$\lim_{\|v\|\to 0}\left[\frac{\frac{1}{2}\|u+v\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2 - \langle u, v\rangle}{\|v\|}\right] = \lim_{\|v\|\to 0}\frac{\|v\|^2}{2\|v\|} = \lim_{\|v\|\to 0}\frac{1}{2}\|v\| = 0.$$

Assim, I_1 é diferenciável em $H^1(\Omega)$ com $I_1'(u)v = \langle u, v\rangle$.

Continuidade de I_1'

Consideremos a sequência $(u_n) \subset H^1(\Omega)$, com $u_n \to u$ em $H^1(\Omega)$. Afirmamos que $I_1'(u_n) \to I_1'(u)$ em $H^{-1}(\Omega)$. Com efeito, desde que $u_n \to u$ em $H^1(\Omega)$, dado $\epsilon > 0$ e $v \in H^1(\Omega)$ tal que $\|v\| \leq 1$, temos que

$$|(I_1'(u_n) - I_1'(u))\,v| = |I_1'(u_n)v - I_1'(u)\,v| = |\langle u_n - u, v\rangle| \leq \|u_n - u\|\,\|v\| < \epsilon,$$

para n suficientemente grande. Então,

$$\|I_1'(u_n) - I_1'(u)\|_* = \sup_{\substack{v\in H^1(\Omega)\\ \|v\|\leq 1}} |(I_1'(u_n) - I_1'(u))\,v| < \epsilon$$

e disto segue que $I_1'(u_n) \to I_1'(u)$ em $H^{-1}(\Omega)$. Portanto, $I_1 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Afirmação 2: O funcional I_2 é de classe $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Existência da derivada de Fréchet de I_2

Fixado $u \in H^1(\Omega)$, seja $v \in H^1(\Omega)$. Consideremos

$$r(v) = I_2(u+v) - I_2(u) - \int_\Omega g(u)v \,\mathrm{d}x.$$

Nosso objetivo é mostrar que

$$\lim_{\|v\|\to 0}\frac{|r(v)|}{\|v\|} = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{\|v_n\|\to 0}\frac{|r(v_n)|}{\|v_n\|} = 0.$$

Consideremos $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $h(t) = G(u + tv_n)$. Como $G(u) = \int_0^u g(s)\,\mathrm{d}s$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, G é diferenciável. Logo, G é contínua. Assim, h é contínua e $h'(t) = G'(u + tv_n) = g(u + tv_n)v_n$. Então, usando novamente o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\int_0^1 h'(t)\ \mathrm{d}t = h(1) - h(0).$$

Como

$$\int_0^1 h'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{d}{dt}G(u + tv_n)\ \mathrm{d}t,$$

segue que

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}G(u + tv_n)\ \mathrm{d}t.$$

Logo,

$$G(u + v_n) - G(u) = \int_0^1 \frac{d}{dt}G(u + tv_n)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 g(u + tv_n)v_n\ \mathrm{d}t.$$

Então,

$$\begin{aligned} r(v_n) = I_2(u + v_n) - I_2(u) - \int_\Omega g(u)v_n\ \mathrm{d}x &= \int_\Omega \int_0^1 g(u + tv_n)v_n\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x - \int_\Omega g(u)v_n\ \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \int_0^1 \left(g(u + tv_n) - g(u)\right) v_n\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

o que implica

$$|r(v_n)| \le \int_\Omega \int_0^1 |g(u + tv_n) - g(u)|\, |v_n|\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x.$$

Pelo Teorema de Fubini e pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$|r(v_n)| \le \int_0^1 \int_\Omega |g(u + tv_n) - g(u)|\, |v_n|\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \le \int_0^1 ||g(u + tv_n) - g(u)||_{L^r(\Omega)}\, ||v_n||_{L^{r'}(\Omega)}\, \mathrm{d}t,$$

onde $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ e $1 < r, r' < \infty$. Assim,

$$|r(v_n)| \le ||v_n||_s \int_0^1 ||g(u + tv_n) - g(u)||_{L^r(\Omega)}\ \mathrm{d}t.$$

Pela imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, existe $C > 0$ tal que

$$|r(v_n)| \le C\, ||v_n|| \int_0^1 ||g(u + tv_n) - g(u)||_{L^r(\Omega)}\ \mathrm{d}t. \tag{A.4}$$

Por outro lado, segue do item (i) do Lema A.1.3 que

$$\begin{aligned} |g(u + tv_n) - g(u)|^r \le C^r \left(e^{2(u+tv_n)^\alpha} + e^{u^\alpha}\right)^r &\le 2^{r-1}C^r \left(e^{2r(u+v_n)^\alpha} + e^{ru^\alpha}\right) \\ &= C\left(e^{2r(u+v_n)^\alpha} + e^{ru^\alpha}\right). \end{aligned} \tag{A.5}$$

Desde que $\|v_n\| \to 0$ em $H^1(\Omega)$, $v_n \to 0$ em $H^1(\Omega)$. Assim, pela Proposição 1.3.5, temos que, a menos de subsequência, existe $\hat{h} \in H^1(\Omega)$ tal que $|v_n(x)| \leq \hat{h}(x)$ quase sempre em Ω. Logo, por (A.5), temos que

$$|g(u+tv_n) - g(u)|^r \leq C\left(e^{2r(|u|+\hat{h})^\alpha} + e^{ru^\alpha}\right).$$

Usando a desigualdade de Trudinger-Moser (2.1), obtemos

$$\int_\Omega e^{2r(|u|+\hat{h})^\alpha}\ \mathrm{d}x < \infty \text{ e } \int_\Omega e^{ru^\alpha}\ \mathrm{d}x < \infty.$$

Logo, $\left(e^{2r(|u|+\hat{h})^\alpha} + e^{ru^\alpha}\right) \in L^1(\Omega)$.

Agora, como $v_n \to 0$ em $H^1(\Omega)$, pela imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [2, +\infty)$, temos que, a menos de subsequência, $v_n \to 0$ em $L^2(\Omega)$. Usando que Ω é limitado, temos que $v_n \to 0$ em $L^1(\Omega)$. Assim, pelo Teorema 1.1.7, a menos de subsequência, $v_n(x) \to 0$ quase sempre em Ω. Logo, pela continuidade da função g, temos que $|g(u(x)+tv_n(x)) - g(u(x))| \to 0$ quase sempre em Ω e disto segue que

$$|g(u(x)+tv_n(x)) - g(u(x))|^r \to 0 \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$||g(u+tv_n) - g(u)||_{L^r(\Omega)} \to 0.$$

Voltando a (A.4), temos

$$\frac{|r(v_n)|}{\|v_n\|} \leq C \int_0^1 ||g(u+tv_n) - g(u)||_{L^r(\Omega)}\ \mathrm{d}t,$$

o que implica

$$\lim_{\|v_n\|\to 0} \frac{|r(v_n)|}{\|v_n\|} \leq C \int_0^1 \lim_{\|v_n\|\to 0} ||g(u+tv_n) - g(u)||_{L^r(\Omega)}\ \mathrm{d}t = 0.$$

É fácil ver que o funcional $T(u) : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$T(u)\,v = \int_\Omega g(u)v\ \mathrm{d}x$$

é linear. Além disso, $T(u)$ é contínuo. De fato, como

$$|T(u)v| = \left|\int_\Omega g(u)v\ \mathrm{d}x\right| \leq \int_\Omega |g(u)|\,|v|\ \mathrm{d}x,$$

segue, da desigualdade de Hölder e da imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, que existe $C_1 > 0$ tal que,

$$\int_\Omega |g(u)| \, |v| \ \mathrm{d}x \leq ||g(u)||_{L^r(\Omega)} \, ||v||_{L^{r'}(\Omega)} \leq C_1 \, ||g(u)||_{L^r(\Omega)} \, ||v|| \, ,$$

onde $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ e $1 < r, r' < \infty$. Por outro lado, temos de Trudinger-Moser (2.1) que $||g(u)||_{L^r(\Omega)} < \infty$. Assim, $|T(u)v| \leq C \, ||v||$, onde $C = C_1 \, ||g(u)||_{L^r(\Omega)}$. Então, o funcional I_2 é diferenciável em $H^1(\Omega)$, com

$$I_2'(u)v = \int_\Omega g(u)v \ \mathrm{d}x.$$

Afirmação: $I_2' : H^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ é contínuo.

De fato, consideremos a sequência $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $H^1(\Omega)$. Assim,

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_* = \sup_{\|v\| \leq 1} \left| \int_\Omega (g(u_n) - g(u))v \ \mathrm{d}x \right| \leq \sup_{\|v\| \leq 1} \int_\Omega |g(u_n) - g(u)| \, |v| \ \mathrm{d}x.$$

Pela desigualdade de Hölder e pela imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, existe $C > 0$ tal que

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_* \leq \sup_{\|v\| \leq 1} \|g(u_n) - g(u)\|_{L^r(\Omega)} \, \|v\|_{L^{r'}(\Omega)} \leq \sup_{\|v\| \leq 1} C \, \|g(u_n) - g(u)\|_{L^r(\Omega)} \, \|v\| \, .$$

Pela desigualdade de Trudinger-Moser (2.1), $\|g(u_n) - g(u)\|_{L^r(\Omega)} < \infty$. Assim,

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_* \leq C \, \|g(u_n) - g(u)\|_{L^r(\Omega)} < \infty.$$

Usando novamente a desigualdade de Trudinger-Moser (2.1) e, procedendo de maneira análoga aos cálculos anteriores, obtemos que

$$\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_* \to 0.$$

Logo, I_2' é contínuo e a Afirmação 2 segue.

Observação A.2.1 *De forma análoga, mostra-se que o funcional* $I : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *dado por*

$$I(u) = \int_\Omega G(x,u) \ \mathrm{d}x$$

está bem definido e é de classe $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$*, onde* $G(x,s) = \int_0^s g(x,t) \ dt$ *e* $g(x,t) = \frac{h(x,t)e^{t^\alpha}}{|x|^\beta}$.

Afirmação 3: O funcional I_3 é de classe $C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Existência da derivada de Gateaux de I_3

Seja $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \psi |u+tv|^{q+1}$, onde $u, v \in H^1(\Omega)$. Sendo f contínua, pelo Teorema do Valor Médio, existe $t_0 \in (0,t)$ tal que $f(t) - f(0) = f'(t_0)t$. Assim,

$$|f'(t_0)| = \frac{|f(t)-f(0)|}{t} = \frac{\left|\psi(|u+tv|^{q+1} - |u|^{q+1})\right|}{t}.$$

Escrevendo $t_0 = \epsilon t$ e, sendo $f'(t) = \psi(q+1)|u+tv|^{q-1}(u+tv)v$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\left|\psi(|u+tv|^{q+1} - |u|^{q+1})\right|}{t} &= \left|\psi(q+1)|u+\epsilon tv|^{q-1}(u+\epsilon tv)v\right| = (q+1)|\psi||v||u+\epsilon tv|^q \\ &\leq (q+1)|\psi||v|(|u|+\epsilon t|v|)^q \leq (q+1)|\psi||v|(|u|+|v|)^q.\end{aligned}$$

Pela hipótese (P_1), existe $C_1 > 0$ tal que $|\psi(x)| \leq C_1$. Assim,

$$\left|\psi(q+1)|u+\epsilon tv|^{q-1}(u+\epsilon tv)v\right| \leq C|v|(|u|+|v|)^q,$$

onde $C = (q+1)C_1$. Então,

$$\int_{\partial\Omega} \left|\psi(q+1)|u+\epsilon tv|^{q-1}(u+\epsilon tv)v\right| \, dx \leq \int_{\partial\Omega} C|v|(|u|+|v|)^q \, dx.$$

Em seguida, mostraremos que $f'(t_0) \in L^1(\partial\Omega)$. Pela desigualdade anterior, é suficiente mostrar que

$$\int_{\partial\Omega} |v|(|u|+|v|)^q \, dx < \infty.$$

De fato, se $q = 0$, usamos a imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, e obtemos que

$$\int_{\partial\Omega} |v|(|u|+|v|)^q \, dx = \int_{\partial\Omega} |v| \, dx = \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq C\|v\| < \infty.$$

Agora, se $q \in (0,1)$, consideremos $p = \frac{1}{q}$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Usando a desigualdade de Hölder e novamente a imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} |v|(|u|+|v|)^q \, dx &\leq \left(\int_{\partial\Omega} |v|^{p'} \, dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\partial\Omega} \left[(|u|+|v|)^{\frac{1}{p}}\right]^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|v\|_{L^{p'}(\partial\Omega)} \left(\int_{\partial\Omega} (|u|+|v|) \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|v\|_{L^{p'}(\partial\Omega)} \||u|+|v|\|^q_{L^1(\partial\Omega)} \leq C\|v\| \||u|+|v|\|^q < \infty.\end{aligned}$$

Logo, $f'(t_0) \in L^1(\partial\Omega)$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned}\lim_{t_n\to 0}\frac{I_3(u+t_nv)-I_3(u)}{t_n} &= \lim_{t_n\to 0}\frac{\lambda}{(q+1)}\int_{\partial\Omega}\frac{\psi(|u+t_nv|^{q+1}-|u|^{q+1})}{t_n}\ \mathrm{d}x\\ &= \lim_{t_n\to 0}\lambda\int_{\partial\Omega}\psi\,|u+\epsilon t_nv|^{q-1}\,(u+\epsilon t_nv)v\ \mathrm{d}x = \lambda\int_{\partial\Omega}\psi\,|u|^{q-1}\,uv\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial I_3\,(u)}{\partial v} = \lambda\int_{\partial\Omega}\psi\,|u|^{q-1}\,uv\ \mathrm{d}x$$

é a canditada a derivada de I_3.

Existência da derivada de Fréchet de I_3

Fixe $u \in H^1(\Omega)$ e seja $v \in H^1(\Omega)$. Consideremos

$$r(v) = I_3(u+v) - I_3(u) - \lambda\int_{\partial\Omega}\psi\,|u|^{q-1}\,uv\ \mathrm{d}x.$$

Mostraremos que

$$\lim_{\|v\|\to 0}\frac{|r(v)|}{\|v\|} = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{\|v_n\|\to 0}\frac{|r(v_n)|}{\|v_n\|} = 0. \tag{A.6}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}r(v_n) &= \frac{\lambda}{q+1}\int_{\partial\Omega}\psi\left(|u+v_n|^{q+1}-|u|^{q+1}\right)\ \mathrm{d}x - \lambda\int_{\partial\Omega}\psi\,|u|^{q-1}\,uv_n\ \mathrm{d}x\\ &= \frac{\lambda}{q+1}\int_{\partial\Omega}\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi\left(|u+tv_n|^{q+1}\right)\ \mathrm{d}t\right)\ \mathrm{d}x - \lambda\int_{\partial\Omega}\int_0^1\psi\,|u|^{q-1}\,uv_n\ \mathrm{d}t\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

o que mostra

$$\begin{aligned}r(v_n) &= \int_{\partial\Omega}\frac{\lambda}{q+1}\left(\int_0^1(q+1)\,\psi\left(|u+tv_n|^q\,v_n\right)\ \mathrm{d}t\right)\ \mathrm{d}x - \lambda\int_{\partial\Omega}\int_0^1\psi\,|u|^{q-1}\,uv_n\ \mathrm{d}t\mathrm{d}x\\ &= \int_{\partial\Omega}\lambda\left(\int_0^1\psi\left(|u+tv_n|^q - |u|^{q-1}\,u\right)v_n\ \mathrm{d}t\right)\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Disto, segue que

$$\begin{aligned}|r(v_n)| &= \left|\int_{\partial\Omega}\lambda\left(\int_0^1\psi\left(|u+tv_n|^q - |u|^{q-1}\,u\right)v_n\ \mathrm{d}t\right)\ \mathrm{d}x\right|\\ &\le \int_{\partial\Omega}\lambda\int_0^1\left|\psi\left(|u+tv_n|^q - |u|^{q-1}\,u\right)v_n\right|\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema de Fubini,

$$|r(v_n)| = \lambda \int_0^1 \int_{\partial\Omega} \left|\psi\left(|u+tv_n|^q - |u|^{q-1}u\right)\right| |v_n| \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}t.$$

Pela desigualdade de Hölder e pela imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, temos que

$$\begin{aligned} |r(v_n)| &\leq \lambda \int_0^1 \left\|\psi\left(|u+tv_n|^q - |u|^{q-1}u\right)\right\|_{L^{r'}(\partial\Omega)} \|v_n\|_{L^r(\partial\Omega)} \ \mathrm{d}t \\ &\leq \lambda \|v_n\| \int_0^1 \left\|\psi\left(|u+tv_n|^q - |u|^{q-1}u\right)\right\|_{L^{r'}(\partial\Omega)} \ \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{A.7}$$

onde $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ e $1 < r, r' < \infty$. Desde que $\|v_n\| \to 0$ em $H^1(\Omega)$, $v_n \to 0$ em $H^1(\Omega)$. Assim, pela imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, a menos de subsequência, $v_n \to 0$ em $L^1(\partial\Omega)$. Então, pelo Teorema 1.1.7, temos que, a menos de subsequência, $v_n(x) \to 0$ quase sempre sobre $\partial\Omega$ e existe $\overline{h} \in L^1(\partial\Omega)$ tal que $|v_n(x)| \leq \overline{h}(x)$ quase sempre sobre $\partial\Omega$. Logo,

$$\begin{aligned} \left|\psi\left(|u+tv_n|^q - |u|^{q-1}u\right)\right|^{r'} &\leq \|\psi\|_\infty^{r'} \left|\left(|u+tv_n|^q + |u|^{q-1}u\right)\right|^{r'} \\ &\leq C\left(|u+tv_n|^{qr'} + |u|^{qr'}\right) \leq C\left(\left|u+t\overline{h}\right|^{qr'} + |u|^{qr'}\right). \end{aligned}$$

Desde que $u \in H^1(\Omega)$, pela imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\partial\Omega)$, $u \in L^1(\partial\Omega)$. Assim, $\left|u+t\overline{h}\right|$, $|u| \in L^1(\partial\Omega)$. Escolhendo $s \in (1, +\infty)$ tal que $sq > 1$, obtemos que $\left|u+t\overline{h}\right|^{qr'}$, $|u|^{qr'} \in L^{qr'}(\partial\Omega)$ e como Ω é limitado, $\left|u+t\overline{h}\right|^{qr'}$, $|u|^{qr'} \in L^1(\partial\Omega)$. Logo, $C\left(\left|u+t\overline{h}\right|^{qr'} + |u|^{qr'}\right) \in L^1(\partial\Omega)$. Por outro lado, se $v_n(x) \to 0$ quase sempre sobre $\partial\Omega$, então

$$\left|\psi(x)\left(|u(x)+tv_n(x)|^q - |u(x)|^{q-1}u(x)\right)\right|^{r'} \to 0$$

quase sempre sobre $\partial\Omega$. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\left\|\psi\left(|u+tv_n|^q - |u|^{q-1}u\right)\right\|_{L^{r'}(\partial\Omega)} \to 0.$$

Deste resultado e de (A.7), obtemos (A.6).

Afirmação: O funcional $T_3(u) : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$T_3(u)v = \lambda \int_{\partial\Omega} \psi |u|^{q-1} uv \ \mathrm{d}x$$

é linear e contínuo.

Com efeito, nota-se facilmente que $T_3(u)$ é linear. Para mostrar que $T_3(u)$ é contínuo, note que

$$|T_3(u)v| = \lambda \left| \int_{\partial\Omega} \psi \, |u|^{q-1} uv \ \mathrm{d}x \right| \leq \lambda \, \|\psi\|_\infty \int_{\partial\Omega} |u|^q \, |v| \ \mathrm{d}x = C \int_{\partial\Omega} |u|^q \, |v| \ \mathrm{d}x,$$

onde $C = \lambda \, \|\psi\|_\infty$. Analisemos dois casos. Seja $q = 0$. Usando a imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, temos

$$\int_{\partial\Omega} |u|^q \, |v| \ \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} |v| \ \mathrm{d}x = \|v\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq C_1 \, \|v\| \, .$$

Logo, $|T_3(u)v| \leq C \, \|v\|$. Agora, se $q \in (0,1)$, pela desigualdade de Hölder e pela imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, segue que

$$\int_{\partial\Omega} |u|^q \, |v| \ \mathrm{d}x \leq \left(\int_{\partial\Omega} |u|^{qp} \ \mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_{\partial\Omega} |v|^{p'} \ \mathrm{d}x \right)^{1/p'} \leq C_2 \, \|u\|^q \, \|v\| \, ,$$

com $p = \frac{1}{q}$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então,

$$|T_3(u)v| \leq C \, \|v\| \, \|u\|^q = C \, \|v\| \, .$$

Assim, $T_3(u)$ é contínuo. Logo, I_3 é diferenciável e

$$I_3'(u)v = \lambda \int_{\partial\Omega} \psi \, |u|^{q-1} uv \ \mathrm{d}x.$$

Afirmação: $I_3' : H^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ é contínuo.

Seja $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ uma sequência tal que $u_n \to u$ em $H^1(\Omega)$. Mostraremos que $I_3'(u_n) \to I_3'(u)$ em $H^{-1}(\Omega)$. De fato, sendo

$$f(u) = \begin{cases} \lambda\psi u^q, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases} ,$$

temos que

$$\begin{aligned} |(I_3'(u_n) - I_3'(u)) \, v| &= \lambda \left| \int_{\partial\Omega} \psi \left(|u_n|^{q-1} u_n - |u|^{q-1} u \right) v \ \mathrm{d}x \right| \\ &\leq \lambda \int_{\partial\Omega} |\psi| \, |(|u_n|^q - |u|^q)| \, |v| \ \mathrm{d}x \\ &\leq \lambda \, \|\psi\|_\infty \left(\int_{\partial\Omega} |u_n|^q \, |v| \ \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} |u|^q \, |v| \ \mathrm{d}x \right). \end{aligned} \tag{A.8}$$

Desde que, $u_n \to u$ em $H^1(\Omega)$, pela imersão compacta de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in (1, +\infty)$, a menos de subsequência, $u_n \to u$ em $L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in (1, +\infty)$. Assim, pelo Teorema 1.1.7, temos que, a menos de subsequência, $u_n(x) \to u(x)$ quase sempre sobre $\partial\Omega$ e existe $l \in L^s(\partial\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq l(x)$ quase sempre sobre $\partial\Omega$, para todo $s \in [1, +\infty)$. Logo, $|u_n^q(x)\, v(x) - u^q(x)\, v(x)| \to 0$ quase sempre sobre $\partial\Omega$. Além disso,

$$|u_n^q(x)\, v(x) - u^q(x)\, v(x)| \leq |u_n^q(x)\, v(x)| + |u^q(x)\, v(x)| \leq l^q(x)\, |v(x)| + |u^q(x)\, v(x)|$$

quase sempre sobre $\partial\Omega$. Em seguida, nosso objetivo é mostrar que $l^q\,|v| \in L^1(\partial\Omega)$. De fato, procedendo como antes, consideremos $q = 0$ e obtemos

$$\int_{\partial\Omega} |l|^q\,|v| \;\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} |v| \;\mathrm{d}x < \infty.$$

Para $q \in (0, 1)$, usamos a desigualdade de Hölder e a imersão contínua de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^s(\partial\Omega)$, para todo $s \in [1, +\infty)$, e obtemos que

$$\int_{\partial\Omega} |l|^q\,|v| \;\mathrm{d}x \leq \|l\|^q_{L^p(\partial\Omega)}\,\|v\|_{L^{p'}(\partial\Omega)} \leq C\,\|l\|^q_{L^p(\partial\Omega)}\,\|v\| < \infty,$$

com $p = \frac{1}{q}$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Logo, $l^q\,|v| \in L^1(\partial\Omega)$. De maneira similar, prova-se que $|u|^q\,|v| \in L^1(\partial\Omega)$. Então, $l^q\,|v| + |u|^q\,|v| \in L^1(\partial\Omega)$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} |u_n|^q\,|v| \;\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} |u|^q\,|v| \;\mathrm{d}x.$$

Por (A.8), obtemos

$$|(I_3'(u_n) - I_3'(u))\, v| \to 0,$$

o que implica

$$||I_3'(u_n) - I_3'(u)||_* = \sup_{\substack{v \in H^1(\partial\Omega)\\ \|v\| \leq 1}} |(I_3'(u_n) - I_3'(u))\, v| \to 0.$$

Logo, $I_3'(u_n) \to I_3'(u)$ em $H^{-1}(\Omega)$ e isto prova a afirmação. Assim, $I_3 \in C^1(H^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Então, os funcionais $J_\lambda : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $I_\lambda : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dados por

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= I_1(u) - I_2(u) - I_3(u) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right) \;\mathrm{d}x - \int_\Omega G(u) \;\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\partial\Omega} \psi\,|u|^{q+1} \;\mathrm{d}x \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= I_1(u) - I(u) - I_3(u) \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega G(x,u)\ \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q+1}\int_{\partial\Omega} \psi\,|u|^{q+1}\ \mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

são de classe $C^1(H^1(\Omega),\mathbb{R})$ e,.além disso, temos que

$$
J'_\lambda(u)\,v = \int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega g(u)v\ \mathrm{d}x - \lambda\int_{\partial\Omega} \psi\,|u|^{q-1}\,uv\ \mathrm{d}x \tag{A.9}
$$

e

$$
I'_\lambda(u)\,v = \int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv)\ \mathrm{d}x - \int_\Omega g(x,u)v\ \mathrm{d}x - \lambda\int_{\partial\Omega} \psi\,|u|^{q-1}\,uv\ \mathrm{d}x, \tag{A.10}
$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$.

A.3 Resultados de convergência

Nesta seção mostraremos alguns resultados de convergência que usamos nesta disertação.

Lema A.3.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e suave e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Dada uma sequência $(v_n) \subset L^1(\Omega)$ tal que $v_n \to v$ em $L^1(\Omega)$ e $f(x,v_n)$, $f(x,v) \in L^1(\Omega)$, temos que*

(i) se $\sup_n \int_\Omega |f(x,v_n)\,v_n|\ \mathtt{d}x < \infty$, então

$$
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(x,v_n)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x,v)\ \mathrm{d}x
$$

(ii) e se $\sup_n \int_\Omega |f(x,v_n)\,v_n^2|\ \mathtt{d}x < \infty$, então

$$
\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(x,v_n)\,v_n\ \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x,v)\,v\ \mathrm{d}x.
$$

Demonstração: Daremos apenas a prova do item (i), pois o item (ii) segue como consequência do item (i) e da desigualdade de Trudinger-Moser.

Consideremos

$$
\widehat{C} = \sup_n \int_\Omega |f(x,v_n)v_n|\ \mathrm{d}x < \infty.
$$

Dado $\epsilon > 0$, definamos

$$\mu_\epsilon := \max_{\substack{x\in\overline{\Omega} \\ |s|\leq \frac{2\widehat{C}}{\epsilon}}} |f(x,s)|\,.$$

Então, para $A \subset \Omega$, com $|A| \leq \frac{\epsilon}{2\mu_\epsilon}$, temos

$$\int_A |f(x,v_n)|\ \mathrm{d}x \leq \int_{A\cap\{|v_n|\geq \frac{2\widehat{C}}{\epsilon}\}} \frac{|f(x,v_n)v_n|}{|v_n|}\ \mathrm{d}x + \int_{A\cap\{|v_n|\leq \frac{2\widehat{C}}{\epsilon}\}} |f(x,v_n)|\ \mathrm{d}x.$$

Se $|v_n| \geq \frac{2\widehat{C}}{\epsilon}$, temos $\frac{1}{|v_n|} \leq \frac{\epsilon}{2\widehat{C}}$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{A\cap\{|v_n|\geq \frac{2\widehat{C}}{\epsilon}\}} \frac{|f(x,v_n)v_n|}{|v_n|}\ \mathrm{d}x \ &\leq \frac{\epsilon}{2\widehat{C}} \int_{A\cap\{|v_n|\geq \frac{2\widehat{C}}{\epsilon}\}} |f(x,v_n)v_n|\ \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{\epsilon}{2\widehat{C}} \int_\Omega |f\,(x,v_n)\,v_n|\ \mathrm{d}x \leq \frac{\epsilon}{2\widehat{C}}\widehat{C} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_{A\cap\{|v_n|\leq \frac{2\widehat{C}}{\epsilon}\}} |f(x,v_n)|\ \mathrm{d}x \leq \int_{A\cap\{|v_n|\leq \frac{2\widehat{C}}{\epsilon}\}} \mu_\epsilon\ \mathrm{d}x \leq \mu_\epsilon\,|A|\,.$$

Então, obtemos que

$$\int_A |f(x,v_n)|\ \mathrm{d}x \leq \frac{\epsilon}{2} + \mu_\epsilon\,|A| \leq \frac{\epsilon}{2} + \mu_\epsilon \frac{\epsilon}{2\mu_\epsilon} = \epsilon. \tag{A.11}$$

Agora, consideremos $B = \Omega$. Assim, $B^c = \varnothing$ e $|B| < \infty$. Então, dado $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\int_{B^c} |f\,(x,v_n)|\ \mathrm{d}x = 0 < \epsilon. \tag{A.12}$$

Como $v_n \to v$ em $L^1(\Omega)$, pelo Teorema 1.1.7, a menos de subsequência, $v_n(x) \to v(x)$ quase sempre em Ω. Então, desde que f contínua, $f(x,v_n(x)) \to f(x,v(x))$ quase sempre em Ω. Agora, como $|\Omega| < \infty$, pelo Teorema de Egorov, $f(x,v_n) \to f(x,v)$ quase uniforme em Ω. Assim, pela Proposição 1.1.6,

$$f(x,v_n) \to f(x,v) \text{ em medida.} \tag{A.13}$$

Pelos resultados obtidos em (A.11), (A.12) e (A.13), usamos o Teorema da Convergência de Vitali e obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x,v_n)\ \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x,v)\ \mathrm{d}x.$$

■

O lema seguinte foi usado no Capítulo 3 desta dissertação e a prova segue de maneira similar à prova do lema anterior.

Lema A.3.2 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *um domínio limitado e suave e* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e* $\beta \in [0,2)$. *Dada uma sequência* $(v_n) \subset L^1(\Omega)$ *tal que* $v_n \to v$ *em* $L^1(\Omega)$ *e* $\frac{f(x,v_n)}{|x|^\beta}$, $\frac{f(x,v)}{|x|^\beta} \in L^1(\Omega)$, *temos que*

(i) se $\sup_n \int_\Omega \left|\frac{f(x,v_n)v_n}{|x|^\beta}\right| \mathtt{d}x < \infty$, *então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{f(x,v_n)}{|x|^\beta}\, \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{f(x,v)}{|x|^\beta}\, \mathrm{d}x$$

(ii) e se $\sup_n \int_\Omega \left|\frac{f(x,v_n)v_n^2}{|x|^\beta}\right| \mathtt{d}x < \infty$, *então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{f(x,v_n)\, v_n}{|x|^\beta}\, \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{f(x,v)\, v}{|x|^\beta}\, \mathrm{d}x.$$

Referências Bibliográficas

[1] Adimurthi, *Existence of positive solutions of the semilinear Dirichlet problem with critical growth for the n-Laplacian*, Ann. Della. Scuola. Norm. Sup. di Pisa, Serie IV XVII (3) (1990) 393-413.

[2] A. Adimurthi, K. Sandeep, *A singular Moser-Trudinger embedding and its applications*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **13** (2007), no. 5-6, 585-603.

[3] Adimurthi, S. L. Yadava, *Critical exponent problem in $\mathbb{R}^2$ with Neumann boundary condition*, Comm. Partial Differential Equations **15** (4) (1990) 461-501.

[4] Adimurthi, Y. Yang, *An interpolation of Hardy inequality and Trundinger-Moser inequality in $\mathbb{R}^N$ and its applications*. Int. Math., no. 13, (2010) 2394–2426.

[5] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, Funct. Anal. **14** (1973), 349-381.

[6] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, New York, 1995.

[7] J. Biezuner, Notas de aula: *Equações Diferenciais Parciais I/II*, UFMG, 2010.

[8] H. Brezis, *Analyse Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2010.

[9] H. Brezis, L. Nirenberg, *H^1 versus C^1 local minimizers*, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. **317** (5) (1993) 465-472.

[10] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Vol. 19, AMS, Berkeley, 1997.

[11] P. J. Fernandez, *Medida e Integração*, IMPA, Projeto Euclides, 2002.

[12] D.G. de Figueiredo, O. H. Miyagaki, B. Ruf, *Elliptic equations in* $\mathbb{R}^2$ *with nonlinearities in the critical growth range*, Calc. Var. Partial Differential Equations **3** (2) (1995) 139-153.

[13] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, New York, 2001.

[14] N. Ghoussoub, D. Preiss, *A general mountain pass principle for locating and classifying critical points*, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire **6** (5) (1989) 321-330.

[15] C. Isnard, *Introdução à Teoria da Medida e Integração*, IMPA, Projeto Euclides, 2009.

[16] Y. Jabri, *The Moutain Pass Theorem*, Cambridge Univ. Press, 2003.

[17] B. S. Kaur, R. Dhanya, K. Sreenadh, *On Multiplicity of Positive Solutions for Quasilinear Equation with Co-normal Boundary Condition*, Advanced Nonlinear Studies, **10** (2010) 511-536.

[18] B. S. Kaur, K. Sreenadh, *Multiple positive solutions for a singular elliptic equation with Neumann boundary condition in two dimensios*, Eletronic Journal of Differential Equations, **2009** (2009), 43, 1-13.

[19] M. Lucia, S. Prashanth, *Strong comparison principle for solutions of quasilinear equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (4) (2004) 1005-1011.

[20] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. **20** (11) (1971) 1077-1092.

[21] W. M. Ni, I. Takagi, *On the shape of least-energy solutions to a Neumann problem*, Comm. Pure Appl. Math. XLIV (8-9) (1991) 819-851.

[22] J. M. do Ó, *Semilinear Dirichlet problems for the N-Laplacian in* $\mathbb{R}^N$ *with nonlinearities in the critical growth range*, Differential and Integral Equations **9** (1996) 967–979.

[23] J. M. do Ó, *N-Laplacian equations in* $\mathbb{R}^N$ *with critical growth*, Abstr. Appl. Anal. **2** (1997), no. 3-4, 301–315.

[24] J. M. do Ó, Y. Yang, *A quasi-linear elliptic equation with critical growth on compact Riemannian manifold without boundary*, Ann. Global Anal. Geom. **38** (2010), no. 3, 317–334.

[25] S. Prashanth, K. Sreenadh, *Multiple positive solutions for a superlinear elliptic problem in* $\mathbb{R}^2$ *with a sublinear Neumann boundary condition*, Nonlinear Analysis, **67** (2007) 1246-1254.

[26] S. Prashanth, K. Sreenadh, *Corrigendum to "Multiple positive solutions for a superlinear elliptic problem in* $\mathbb{R}^2$ *with a sublinear Neumann boundary condition"*, Nonlinear Analysis, **67** (2007) 1246-1254.

[27] S. Prashanth, K. Sreenadh, *Multiplicity of solutions to a nonhomogeneous elliptic equation in* $\mathbb{R}^2$, Differential Integral Equations **18** (2005), no. 6, 681–698.

[28] B. Ruf, *A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in* $\mathbb{R}^2$. J. Funct. Anal. **219** (2005), no. 2, 340–367.

[29] M. X. de Souza, *Problemas Envolvendo o N-Laplaciano em Subdomínios do* $\mathbb{R}^N$ *e Crescimento Crítico*, Dissertação de Mestrado, 2006.

[30] M. X. de Souza, *On a singular class of elliptic systems involving critical growth in* $\mathbb{R}^2$, Nonlinear Anal. Real World Appl. **12** (2011), no. 2, 1072–1088.

[31] M. X. de Souza, *On a singular elliptic problem involving critical growth in* $\mathbb{R}^N$, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **18** (2011), no. 2, 199–215.

[32] M. X. de Souza, J. M. do Ó, *On a singular and nonhomogeneous N-Laplacian equation involving critical growth*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **380** (2011) 241-263.

[33] M. Struwe, *Variational Methods*, Springer-Verlang, 1996.

[34] N. S. Trudinger, *On the embedding into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. **17** (1967), 473–483.

[35] H. Yang, *Multiplicity and asymptotic behavior of positive solutions for a singular semilinear elliptic problem*, J. Differential Equations, **189**, (2003), 487-512.

[36] H. Yang, J. Chen, *A result on Hardy-Sobolev critical elliptic equations with boundary singularities*, Commun. Pure Appl. Anal. **6** (2007), no. 1, 192-201.