

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Sobre a Fibra Especial de Ideais

Tarciana Maria Santos da Silva

João Pessoa

2010

Sobre a Fibra Especial de Ideais ¹

por

Tarciana Maria Santos da Silva

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da UFPB, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

sob orientação do

Prof. Dr. Roberto Bedregal

João Pessoa

2010

¹Este trabalho contou com o apoio financeiro do CNPQ.

S586s Silva, Tarciana Maria Santos da.
Sobre a fibra especial de ideais / Tarciana Maria Santos da Silva. - - João Pessoa:
[s.n.], 2010.
44 f. .
Orientador: Roberto Bedregal.
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN.
1.Matemática. 2.Multiplicidade mista. 3.Fibra especial. 4.Número de redução.

UFPB/BC

CDU: 51 (043)

Sobre a Fibra Especial de Ideais

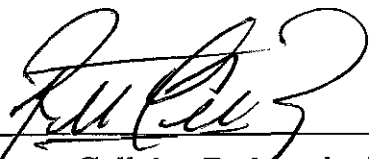
por

Tarciana Maria Santos da Silva

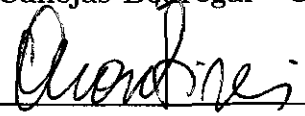
Dissertação apresentada ao corpo docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:



Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal - UFPB (Orientador)



Prof. Dr. Aron Simis - UFPE



Prof. Dr. Cleto Brasileiro Miranda Neto - UFPB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Dedicatória

*Dedico este trabalho aos meus pais, Robson e Roseani,
aos meus irmãos Luciana, Mariana e Bruno
e a toda minha família por apoiar minhas decisões
e sempre acreditar em mim.*

Agradecimentos

Eu não conseguiria agradecer à altura, ainda que houvesse espaço suficiente, ainda que conseguisse encontrar as palavras mais preciosas, porque todos que me cercaram nessa jornada me trouxeram o melhor! Porém tentarei o fazer mesmo assim.

Começo, então, por agradecer ao meu orientador Roberto Bedregal, pela paciência, apoio, disponibilidade e dedicação, sem o qual este trabalho não teria sido possível.

À todos os professores do programa de pós-graduação em matemática da UFPB, em especial a Fernando Xavier, Pedro Hinojosa, Jacqueline Rojas, João Marcos e Flávia Gerônimo pela oportunidade de crescimento, aprendizado, realização profissional e pessoal e pela confiança em mim depositada.

Aos professores Aron Simis e Cleto Brasileiro por aceitarem participar da Banca de defesa desta dissertação, proporcionando sugestões que servirão para o meu crescimento e aprendizado.

À todos os meus amigos e amigas que sempre estiveram presentes me aconselhando e incentivando com carinho e dedicação, em especial a Laudelino e Manassés que caminharam juntos comigo num percurso de quase três anos, sempre me fazendo seguir adiante.

Em especial também aos meninos que me receberam super bem e se tornaram grandes amigos, Ailton, Disson, Elano, Felipe, Gerson, José Francisco, Maicon, Marcos Aurélio e Paulo. Agradeço imensamente a Luis por toda sua ajuda e paciência nas nossas discussões durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Quero agradecer também à Juanice, Oldineia e Viviane que sempre serão a minha família de João Pessoa, obrigada pelo incentivo, preocupação, dedicação, pelos conselhos, e momentos felizes e de descontração que vivemos juntas.

Aos meus amigos do Dmat-UFPE, Adecarlos, André, Anete, Aventura, Bárbara, Bruna, Bruno, Gigi, Joilson, Karla, Lucas, Marcelo, Nicole, Paulo, Renata, Ricardo, Tiago, Waguinho, Will e Zaqueu, pelo apoio e incentivo.

Por fim, agradeço aos meus familiares que sempre me deram amor e força.

Resumo

Neste trabalho estudamos a Cohen-Macaulicidade e a Gorensteincidade da fibra especial de um ideal em um anel local (R, \mathfrak{m}) de Cohen-Macaulay com dimensão d . Também obtemos uma fórmula para a multiplicidade da fibra especial de um ideal \mathfrak{m} -primário I em termos da multiplicidade mista $e_{d-1}(\mathfrak{m}|I)$ e elementos superficiais. Como consequência dessa fórmula, temos que a Cohen-Macaulicidade da fibra especial de I , quando I tem multiplicidade mista minimal e quase minimal, é caracterizada em termos do número de redução de I .

Palavras-chave:

Fibra especial, multiplicidade mista, número de redução.

Abstract

In this dissertation, we study Cohen-Macaulay and Gorenstein properties of the fiber cone of an ideal I of d -dimensional Cohen-Macaulay local ring (R, \mathfrak{m}) . We also obtain a formula to express the multiplicity of the fiber cone of a \mathfrak{m} -primary ideal I in terms of mixed multiplicity $e_{d-1}(\mathfrak{m}|I)$ and superficial elements. As a consequence, we have that the Cohen-Macaulay properties of the fiber cone of I , with minimal mixed multiplicity and almost minimal, is characterized by the reduction number of I .

Keywords:

Fiber cone, mixed multiplicity, reduction number.

Sumário

1	Preliminares	4
1.1	Anéis de Cohen-Macaulay	4
1.2	Anéis de Gorenstein	6
1.3	Função de Hilbert	7
1.4	A Fibra Especial	9
1.5	Reduções	10
1.6	Sequências Especiais	12
1.7	Reduções em Família e Multiplicidades Mistas	13
1.8	Fórmulas de Multiplicidade para Fibras Especiais	15
2	Fibras Especiais de Cohen-Macaulay e de Gorenstein	22
2.1	Fibras Especiais de Cohen-Macaulay	22
2.2	Fibras Especiais de Gorenstein	26
3	Ideais de Multiplicidade Mista Minimal e Quase Minimal	32
3.1	Ideais de Multiplicidade Mista Minimal	34
3.2	Ideais de Multiplicidade Mista Quase Minimal	37
	Referências	42

Introdução

Sejam (R, \mathfrak{m}) um anel local Noetheriano com dimensão $d > 0$ e corpo residual infinito, e I um ideal de R . A álgebra de Rees $\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n t^n$, o anel graduado associado $\mathcal{G}_I(R) = \mathcal{R}(I)/I\mathcal{R}(I)$ e a fibra especial $F(I) = \mathcal{R}(I)/\mathfrak{m}\mathcal{R}(I)$ de I desempenham um papel importante no processo de explosão da variedade $\text{Spec}(R)$ ao longo da subvariedade $V(I)$. Por esse motivo estes objetos são frequentemente referidos como álgebras de explosão de I . Além disso, eles também são extensivamente usados para examinar diversas propriedades de I . Portanto, muita atenção tem-se prestado no passado para encontrar sob que circunstâncias essas álgebras tem uma boa estrutura algébrica.

Nesta dissertação focamos na fibra especial $F(I)$, pois existe uma falta de conhecimento sobre suas propriedades, em comparação com o restante das álgebras de explosão. Do ponto de vista algébrico, $F(I)$ produz informações sobre o ideal I . Por exemplo, a sua função de Hilbert é a função numérica que mede o crescimento do número mínimo de geradores $\mu(I^n)$ das potências de I . Para n suficientemente grande esta função é um polinômio em n de grau $\dim F(I) - 1$, cujo coeficiente líder $f_0 = f_0(I)$ é chamado de multiplicidade da fibra especial $F(I)$. Outro dado significativo atribuído a $F(I)$ é a sua dimensão de Krull, chamado de dispersão analítica $\ell(I)$ de I . Tal dispersão é limitada inferiormente pela altura de I e limitada superiormente pela dimensão de R . Ela coincide com o número mínimo de geradores de uma redução minimal de I . Uma redução minimal - uma noção que tem sido fundamental no estudo da álgebra de Rees de um ideal, pois ele carrega a maior parte das informações sobre o ideal original, em geral, com menos geradores - surge a partir da normalização de Noether de $F(I)$. De uma perspectiva mais geométrica, $\text{Proj}(F(I))$ corresponde à fibra sobre o ponto fechado da explosão do $\text{Spec}(R)$ ao longo de $V(I)$. Portanto, desempenha um papel importante na resolução de singularidades de variedades algébricas. Hironaka, no seu artigo [16] sobre resolução de

singularidades, introduziu o conceito de permissibilidade de I como centro de explosão. Lembrando que I é permissível em R se R/I é regular e $\mathcal{G}(I)$ é R/I -plano. Considerando a série de Hilbert de $\mathcal{G}(\mathfrak{m})$ e de $F(I)$

$$HS(\mathcal{G}(\mathfrak{m}), t) = \sum_{n=0}^{\infty} l \left(\frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}} \right) t^n \quad \text{e} \quad HS(F(I), t) = \sum_{n=0}^{\infty} l \left(\frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n} \right) t^n.$$

Seja e a dimensão de imersão de R/I . Em 1976, B. Singh em [31], demonstrou que I é um centro permissível de explosão se, e somente se, as séries de Hilbert de $\mathcal{G}(\mathfrak{m})$ e $F(I)$ estão relacionadas pela equação

$$HS(\mathcal{G}(\mathfrak{m}), t)(1 - t)^e = HS(F(I), t).$$

Agora vamos destacar alguns resultados da literatura que indicam a importância de um estudo sistemático da fibra especial. No que diz respeito às propriedades aritméticas da fibra especial, um dos primeiros resultados conhecidos foi dado por Huneke e Sally [21], que provaram que, se R é de Cohen-Macaulay, a fibra especial de qualquer ideal \mathfrak{m} -primário cujo número de redução é um é de Cohen-Macaulay. Este resultado foi posteriormente estendido por K. Shah [29, 30] para os ideais equimúltiplos de número de redução igual a um, dando também algumas condições de Cohen-Macaulicidade da fibra especial de ideais equimúltiplos de número de redução dois. Resultados subsequentes de Cortadellas e Zarzuela [7, 8], D’Cruz, Raghavan e Verma [11], e D’Cruz e Verma [9] completam os resultados de Shah para famílias de ideais mais gerais. Além disso, a fibra especial de um ideal de definição de uma curva monomial em \mathbb{P}^3 situada em uma quádrlica foi provado ser de Cohen-Macaulay por Morales e Simis [26]. Esse resultado foi mais tarde estendido por P. Gimenez [13] e Barile e Morales [2] para o ideal de definição de uma variedade projetiva monomial de codimensão dois.

Por outro lado, motivados pelo trabalho de R. Hübl [17], Hübl e Huneke [18] estudaram a Cohen-Macaulicidade da fibra especial de ideais especial em conexão com a teoria da evolução introduzida por Eisenbud e Mazur [12], que está relacionada aos trabalhos de A. Wiles sobre o Último Teorema Fermat. Hübl e Swanson [19] também têm feito alguns cálculos sobre a fibra especial neste contexto. Os trabalhos mais recentes sobre as propriedades da fibra especial (multiplicidade, função de Hilbert, Cohen-Macaulicidade, Gorensteincidade, profundidade,...) tem sido feito por Corso, Ghezzi, Polini e Ulrich [4], Corso, Polini e Vasconcelos [5], T. Cortadellas [6] D’Cruz e Puthenpurakal [10], Heinzer e Kim [14], Heinzer, Kim e Ulrich [15],

Jayanthan e Verma [22, 23], Jayanthan, Puthenpurakal e Verma [24], ou D. Q. Viêt [34] e outros.

O caso de ideais com redução um ideal principal também tem sido considerada em alguns detalhes por vários autores. S. Huckaba [20] estudou o número de redução e observou que, para uma ideal regular de dispersão analítica um, o número de redução não depende da redução minimal.

Neste trabalho, desenvolvemos em detalhes a teoria e resultados obtidos em [24, 11]. Mais precisamente, estudamos a Cohen-Macaulicidade e a Gorensteincidade da fibra especial de um ideal em um anel local (R, \mathfrak{m}) de Cohen-Macaulay com dimensão d . Também obtemos uma fórmula para a multiplicidade da fibra especial de um ideal \mathfrak{m} -primário I em termos da multiplicidade mista $e_{d-1}(\mathfrak{m}|I)$ e elementos superficiais. Como consequência dessa fórmula, temos que a Cohen-Macaulicidade da fibra especial de I , quando I tem multiplicidade mista minimal e quase minimal, é caracterizada em termos do número de redução de I .

Capítulo 1

Preliminares

O principal objetivo deste capítulo é definir a fibra especial de um ideal \mathfrak{m} -primário num anel local (R, \mathfrak{m}) e determinar uma fórmula para sua multiplicidade. Esta fórmula envolve as noções de multiplicidades mistas e sequências superficiais.

1.1 Anéis de Cohen-Macaulay

Nesta seção, citaremos alguns resultados básicos envolvendo sequências regulares, sistemas de parâmetros e o fato do anel ser de Cohen-Macaulay. Para as demonstrações, consulte [25].

Sejam R um anel e M um R -módulo. Dizemos que $a \in R$ é um elemento M -regular se $az = 0$ para $z \in M$ implica $z = 0$, em outras palavras, se a é um não divisor de zero em M . Uma sequência regular é composta de sucessivos elementos regulares:

Definição 1.1. Sejam M um R -módulo e $x = (x_1, \dots, x_n)$ uma sequência de elementos de R . Esta sequência é chamada de *sequência regular* (ou M -*sequência*) quando as seguintes condições são satisfeitas:

1. $M/(x_1, \dots, x_n)M \neq 0$
2. x_{i+1} é um elemento $M/(x_1, \dots, x_i)M$ -regular, para $i = 1, \dots, n - 1$

Estamos interessados que os comprimentos das M -sequências a elementos de I sejam finitos. Por isso, definimos sequências regulares maximais:

A M -sequência que não admite inserção própria de novos elementos é chamada de M -*sequência máxima*.

Proposição 1.2. *Se R é um anel Noetheriano, M um R -módulo finitamente gerado e I um ideal de R tal que $IM \neq M$ então duas M -sequências máximas em I admitem o mesmo número de elementos.*

Definição 1.3. Sejam R um anel Noetheriano, M um R -módulo finitamente gerado e I um ideal de R tal que $IM \neq M$. Então o comprimento comum das M -sequências maximais em I é chamado de *profundidade* de I em M , denotado por $\text{depth}(I, M)$.

Em particular, para um anel local Noetheriano (R, \mathfrak{m}) , dizemos que a profundidade de M , denotada por $\text{depth}(M)$, é $\text{depth}(\mathfrak{m}, M)$.

Agora estamos aptos a definir um anel de Cohen-Macaulay:

Definição 1.4. Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local Noetheriano. Um R -módulo finitamente gerado $M \neq 0$ é um *módulo de Cohen-Macaulay* se $\text{depth}(M) = \dim(M)$. Se R é um R -módulo de Cohen-Macaulay, então R é chamado de um *anel de Cohen-Macaulay*.

Em geral, se R é um anel Noetheriano arbitrário, então M é um módulo de Cohen-Macaulay se $M_{\mathfrak{m}}$ é um módulo de Cohen-Macaulay para todos os ideais maximais $\mathfrak{m} \in \text{Supp}M$. Um anel R é dito ser de Cohen-Macaulay se $R_{\mathfrak{m}}$ é um anel local de Cohen-Macaulay para todos os ideais maximais \mathfrak{m} de R .

Proposição 1.5. *Sejam (R, \mathfrak{m}) um anel local Noetheriano e M um R -módulo finitamente gerado. Se M é um módulo de Cohen-Macaulay, então M_P é um módulo de Cohen-Macaulay sobre R_P para todo $P \in \text{Spec}R$.*

Outra caracterização de anéis de Cohen-Macaulay que será utilizada nesta dissertação requer a noção do invariante $\delta(M)$ e de sistemas de parâmetros:

Definição 1.6. Sejam (R, \mathfrak{m}) um anel local e M um R -módulo finitamente gerado, definimos o invariante $\delta(M)$ como sendo o menor inteiro $s \in \mathbb{N}$ tal que existem $x_1, \dots, x_s \in \mathfrak{m}$ de forma que

$$l\left(\frac{M}{x_1M + \dots + x_sM}\right) < \infty$$

Agora, podemos enunciar um importante resultado da teoria de dimensão:

Teorema 1.7. (Chevalley-Krull) *Sejam R um anel local Noetheriano e M um R -módulo finitamente gerado, então $\dim(M) = \delta(M)$*

Definição 1.8. Sejam (R, \mathfrak{m}) um anel local Noetheriano e M um R -módulo finitamente gerado de dimensão n . Uma sequência $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{m}$ é um sistema de parâmetros de M se $\dim M/(x_1, \dots, x_n)M = 0$.

Uma consequência do teorema acima, que será utilizada mais adiante, é: Se M é módulo de Cohen-Macaulay então, todo sistema de parâmetros de M é uma sequência regular em M .

1.2 Anéis de Gorenstein

Nesta seção admitiremos que o leitor esteja familiarizado com o Funtor Ext. As demonstrações podem ser encontradas em [3]. Durante toda a seção (R, \mathfrak{m}) denotará um anel local com único ideal maximal \mathfrak{m} e corpo residual $k = R/\mathfrak{m}$.

Consideremos M um R -módulo finitamente gerado e $n = \text{depth}(M)$, onde $\text{depth}(M)$ é o comprimento das sequências M -regulares maximais em \mathfrak{m} . O número n é bem determinado por

$$\text{Ext}^n(k, M) \neq 0 \text{ e } \text{Ext}^i(k, M) = 0 \text{ para } i < n$$

Definimos o *Tipo* de M como sendo a dimensão de $\text{Ext}^n(k, M)$ sobre k , e denotamos por $\text{Tipo}(M) = \dim_k \text{Ext}^n(k, M)$.

Agora podemos definir um anel de Gorenstein:

Definição 1.9. Um anel local (R, \mathfrak{m}) é dito ser de *Gorenstein* se

$$\text{Sup}\{i/\text{Ext}^i(k, R) \neq 0\} < \infty.$$

O conjunto $\text{Sup}\{i/\text{Ext}^i(k, R) \neq 0\}$ é também chamado de *dimensão injetiva* de R e é denotado por $\text{inj dim}(R)$.

Observação 1. Note que $n = \text{depht}(M) \leq \text{inj dim}(R)$.

Para saber quando um anel é ou não de Gorenstein temos o resultado seguinte que faz relação com os anéis de Cohen-Macaulay facilitando tal caracterização.

Teorema 1.10. *Seja (R, \mathfrak{m}) um anel Noetheriano local. Então R é um anel de Gorenstein se, e somente se, R é um anel de Cohen-Macaulay e $\text{Tipo}(R)=1$.*

Definição 1.11. Seja M um R -módulo finitamente gerado sobre (R, \mathfrak{m}) um anel local Noetheriano. Então

$$\text{Socle}(M) = (o :_M \mathfrak{m}) \cong \text{Hom}(k, M)$$

é chamado *o socle* de M .

Proposição 1.12. *Sejam (R, \mathfrak{m}, k) um anel local Noetheriano, onde $k = R/\mathfrak{m}$, M é um R -módulo finitamente gerado e $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ é uma sequência M -regular maximal em \mathfrak{m} . Então*

$$\text{Tipo}(M) = \dim_k \text{Socle} \left(\frac{M}{\underline{x}M} \right).$$

Definiremos o que venha a ser uma hipersuperfície para que possamos enunciar o resultado no qual faz relação com os anéis de Gorenstein.

Para isso, consideremos $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ um anel graduado, onde A é uma k -álgebra finitamente gerada, logo, existe um homomorfismo sobrejetivo $\varphi : k[x_1, \dots, x_s] \rightarrow A$. Assim, dizemos que A é uma *hipersuperfície* se, e somente se, $\ker \varphi$ for um ideal principal.

Corolário 1.13. *Se R é uma hipersuperfície, então R é um anel de Gorenstein.*

1.3 Função de Hilbert

Consideremos (R, \mathfrak{m}) um anel local Noetheriano, $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ uma álgebra graduada standard e $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ um A -módulo graduado. Suponhamos que R é Artiniano.

Definimos a função, o polinômio e a série de Hilbert para um módulo graduado M . Para cada A -módulo graduado M as componentes homogêneas M_n de M são R -módulos finitamente gerados e portanto tem comprimento finito.

Definição 1.14. Seja M um R -módulo graduado finitamente gerado. A função $HF(M, \cdot) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $HF(M, n) = l(M_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é a *função de Hilbert* de M , onde l denota a função comprimento.

Definição 1.15. A *série de Hilbert* é definida por

$$HS(M, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} HF(M, n)t^n$$

Teorema 1.16. (Hilbert) *Seja M um R -módulo finitamente gerado de dimensão d . Então existe um polinômio $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grau $d - 1$ tal que $HF(M, n) = p(n)$ para todo n suficientemente grande.*

Lema 1.17. *Seja $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ um polinômio de grau $d \geq 0$. As seguintes condições são equivalentes:*

1. $p(n) \in \mathbb{N}$ para todo n suficientemente grande
2. Existem únicos inteiros a_0, \dots, a_d tais que $a_d > 0$ e

$$p(t) = \sum_{i=0}^d a_i \binom{t+i}{i}$$

Estes resultados garantem que existe um único polinômio que coincide com a função de Hilbert $HF(M, n)$ quando n é suficientemente grande. Este polinômio é chamado de *polinômio de Hilbert* de M e escrito da seguinte forma:

$$HP(M, n) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{d-1-i} e_{d-1-i} \binom{n+i}{i}$$

O grau de M é o número e_0 .

Observemos que para a função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $\Delta f(n) = f(n) - f(n-1)$, portanto $\text{grau} \Delta f = \text{grau} f - 1$.

Proposição 1.18. *Seja $M \neq 0$ um R -módulo graduado finitamente gerado de dimensão d . Então existe um único $h(t) \in \mathbb{Z}[t]$ com $h(1) \neq 0$ tal que*

$$HS(M, t) = \frac{h(t)}{(1-t)^d}$$

e $e_i = h^{(i)}(1)/i!$ para $i = 0, \dots, d-1$, onde $h^{(i)}$ é a i -ésima derivada de $h(t)$ em relação a t . Em particular, $e_0 = h(1)$.

Se o polinômio $h(t)$ é dado por $h(t) = h_0 + h_1 t + \dots + h_s t^s$, chamamos $(h_0, \dots, h_s) \in \mathbb{Z}^{s+1}$ de h -vector de R . Com isso temos o seguinte resultado:

Teorema 1.19. *Se R é um anel de Gorenstein, então $h(t)$ for um polinômio simétrico.*

Todas as demonstrações dos resultados enunciados acima podem ser encontradas em [3].

1.4 A Fibra Especial

Esta seção traz algumas definições sobre o objeto que motiva a dissertação: A fibra especial.

Definição 1.20. Sejam R um anel, I um ideal de R e t uma variável sobre R . A *álgebra de Rees* de I é o subanel de $R[t]$ dado por

$$\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n t^n$$

Definição 1.21. Sejam R um anel, I um ideal de R e t uma variável sobre R . O *anel graduado associado* de I é

$$\mathcal{G}_I(R) = \bigoplus_{n \geq 0} \frac{I^n}{I^{n+1}} = \frac{\mathcal{R}(I)}{I\mathcal{R}(I)}$$

Depois dessas definições, podemos definir o que venha a ser uma fibra especial.

Definição 1.22. Seja (R, \mathfrak{m}) um anel Noetheriano local, a *fibra especial* de I é

$$F(I) = \bigoplus_{n \geq 0} \frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n} = \frac{\mathcal{R}(I)}{\mathfrak{m}\mathcal{R}(I)}$$

Sua dimensão de Krull é chamada de *dispersão analítica* de I e é denotada por $\ell(I)$.

Como nosso interesse é estudar as fibras especiais de ideais \mathfrak{m} -primários de um anel local de Cohen-Macaulay. Acrescentamos as definições de funções e polinômios de Hilbert que envolvem esta teoria. Além disso, enunciaremos alguns resultados sobre multiplicidade bastante utilizados ao longo de toda a dissertação.

A *função de Hilbert* $HF(F(I), n)$ da fibra especial $F(I)$ de um anel local (R, \mathfrak{m}) com dimensão d é dada por

$$HF(F(I), n) = l \left(\frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n} \right)$$

A função $HF(F(I), n)$ é um polinômio $HP(F(I), n)$ em n de grau $\ell(I) - 1$ para n suficientemente grande. Escrevemos este polinômio por

$$HP(F(I), n) = f_0(I) \binom{n + \ell - 1}{\ell - 1} - f_1(I) \binom{n + \ell - 2}{\ell - 2} + \cdots + (-1)^{\ell-1} f_{\ell-1}(I)$$

para certos inteiros $f_0(I), f_1(I), \dots, f_{\ell-1}(I)$, onde $l = \ell(I)$.

Observamos que se I é \mathfrak{m} -primário então $\ell(I) = d$ e portanto o grau de $HP(F(I), \mathfrak{m})$ é $d - 1$.

Definição 1.23. A *multiplicidade* de $F(I)$ é o número $f_0(I)$.

Para um ideal \mathfrak{m} -primário I em um anel Noetheriano local de dimensão d , defina

$$HF(I, n) = l\left(\frac{R}{I^n}\right)$$

como sendo a *função de Hilbert-Samuel* de I . Sabe-se que esta função coincide com o polinômio $HP(I, n)$ de grau d para n suficientemente grande. Escrevemos tal polinômio como segue

$$HP(I, n) = e_0(I) \binom{n+d-1}{d} - e_1(I) \binom{n+d-2}{d-1} + \cdots + (-1)^d e_d(I)$$

Definição 1.24. O coeficiente $e_0(I)$, denotado por $e(I)$, é chamado de *multiplicidade* de I .

1.5 Reduções

Nesta seção trataremos de alguns resultados básicos sobre reduções e suas relações com a dimensão da fibra especial e com as multiplicidades, além disso enunciaremos o famoso teorema de Rees, o qual caracteriza a noção de redução via multiplicidade de Hilbert-Samuel.

Um ideal $J \subseteq I$ é chamado uma *redução de I* se existe um número inteiro não negativo n tal que

$$JI^n = I^{n+1}.$$

O menor inteiro n tal que $JI^n = I^{n+1}$ é chamado de *número de redução* de I com relação a J , e será denotado por $r_J(I)$.

Se J é minimal com respeito a inclusão entre as reduções de I , então dizemos que J é uma *redução minimal de I* .

A proposição seguinte envolve reduções minimais e será bastante utilizada, sua demonstração pode ser vista em [32].

O número de redução $r(I)$ de I é o ínfimo dos $r_J(I)$, onde J varia sobre todas as reduções minimais de I .

Proposição 1.25. *Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local Noetheriano e J uma redução minimal de I . Então $J \cap \mathfrak{m}I = \mathfrak{m}J$.*

O resultado importante que faz conexão entre reduções minimais e fibras especiais é

Teorema 1.26. *Se R/\mathfrak{m} for infinito, então todas as reduções minimais de I são minimamente geradas por $\ell(I)$ elementos.*

Este resultado é uma consequência do teorema de Normalização de Noether e sua demonstração pode ser encontrada em [32]. Nesta mesma referência podemos encontrar a seguinte proposição:

Proposição 1.27. *Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local Noetheriano e I um ideal de R . Então,*

$$\text{alt}(I) \leq \ell(I) \leq \dim R \quad \text{e} \quad \ell(I) \leq \mu(I)$$

Observação 2. Dados um anel local (R, \mathfrak{m}) de dimensão d e I um ideal \mathfrak{m} -primário. A fibra especial deste ideal possui mesma dimensão do anel. Pois $\text{alt}(I) = \text{alt}(\mathfrak{m}) = \dim R$ e da Proposição 1.27 temos, $\text{alt}(I) \leq \dim F(I) \leq \dim R$, portanto, $\dim F(I) = \dim R$.

Como foi dito no início da seção, faremos um breve comentário sobre as conexões entre reduções e multiplicidades:

Proposição 1.28. *Sejam (R, \mathfrak{m}) um anel local de Cohen-Macaulay de dimensão d e $I = (x_1, \dots, x_d)$ um ideal \mathfrak{m} -primário. Então, $e(I) = l\left(\frac{R}{I}\right)$*

Teorema 1.29. *Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local Noetheriano. Se J é uma redução de I , então $e(I) = e(J)$.*

A recíproca deste Teorema é conhecida como Teorema de Rees, e é válida para anéis com completude equidimensional, isto é, todos os ideais primos associados tem a mesma dimensão do anel, ou ainda o anel não possui ideais primos imersos. O Teorema de Rees caracteriza completamente a noção de redução através da noção de multiplicidade de Hilbert-Samuel.

Teorema 1.30. (Rees) *Seja (R, \mathfrak{m}) é um anel local Noetheriano com completude equidimensional. Então J é uma redução de I se, e somente se, $e(I) = e(J)$.*

Uma consequência do Teorema 1.29 e Proposição 1.28 é

Proposição 1.31. *Sejam (R, \mathfrak{m}) um anel local de Cohen-Macaulay com corpo residual infinito e I um ideal \mathfrak{m} -primário. Se J é uma redução minimal qualquer de I , então $e(I) = l\left(\frac{R}{J}\right)$.*

1.6 Sequências Especiais

Começamos com uma discussão sobre sequências superficiais e suas relevâncias para reduções em família, continuamos com as sequências Rees-superficiais e as relações entre estes dois tipos de sequências.

O nosso interesse é trabalhar em anéis locais e em ideais \mathfrak{m} -primários, por isso, (R, \mathfrak{m}) sempre denotará um anel local e I um ideal \mathfrak{m} -primário.

Definição 1.32. Seja (R, \mathfrak{m}) anel local. Sejam I_1, \dots, I_r R - ideais \mathfrak{m} -primários. Um elemento $a \in I_1$ é chamado *superficial* para os ideais I_1, \dots, I_r se

$$\dim \left(\frac{R}{(a)} \right) = \dim(R) - 1$$

e para algum c inteiro não negativo e para todos $n_1 > c, n_2, \dots, n_r \geq 0$

$$(I_1^{n_1} \dots I_r^{n_r} : a) \cap I_1^c I_2^{n_2} \dots I_r^{n_r} = I_1^{n_1-1} I_2^{n_2} \dots I_r^{n_r}.$$

Definição 1.33. Uma sequência a_1, \dots, a_r de elementos em R é chamada uma *sequência superficial* para os ideais I_1, \dots, I_r se $a_i \in I_i$ e a imagem de a_i em $R_{i-1} = \frac{R}{(a_1, \dots, a_{i-1})}$ é superficial para as imagens dos ideais I_i, I_{i+1}, \dots, I_r em R_{i-1} para $i = 1, \dots, r$.

Inspirado por Rees na construção de Redução em família em seu artigo sobre reduções em família e multiplicidades mistas [27], Jayanthan, Puthenpurakal e Verma introduziram a seguinte:

Definição 1.34. Um elemento $a \in I_1$ é chamado *Rees-superficial* para ideais \mathfrak{m} -primários I_1, \dots, I_r se para todo n_1 suficientemente grande e para todo inteiro não negativo n_2, \dots, n_r

$$(a) \cap I_1^{n_1} \dots I_r^{n_r} = (a) I_1^{n_1-1} I_2^{n_2} \dots I_r^{n_r}$$

Definição 1.35. Uma sequência a_1, \dots, a_r de elementos em R é chamada uma *sequência Rees-superficial* para os ideais I_1, \dots, I_r se as imagens de a_i em $R_{i-1} = \frac{R}{(a_1, \dots, a_{i-1})}$ for Rees-superficial para as imagens dos ideais I_i, I_{i+1}, \dots, I_r em R_{i-1} para $i = 1, \dots, r$.

No mesmo artigo [27], Generalizações de reduções e multiplicidades mistas, Rees mostrou o seguinte Lema:

Lema 1.36. (Lema Básico de Rees) *Sejam I_1, \dots, I_r ideais de R , onde o corpo residual R/\mathfrak{m} é infinito. Seja P um conjunto finito de ideais primos de R tal que nenhum ideal primo em P contém o produto $I_1 \dots I_r$. Então existe um elemento Rees-superficial $a \in I_1$ para os ideais I_1, \dots, I_r tal que a não está em qualquer ideal primo em P .*

Com isso, podemos mostrar a relação entre as sequências superficiais e as sequências Rees-superficiais. E com a ajuda do Lema Básico de Rees, a existência das sequências Rees-superficiais maximais para um conjunto de ideais \mathfrak{m} - primário.

Observação 3. Se um elemento $a \in I_1$ é Rees-superficial para um conjunto de ideais (I_1, \dots, I_r) e não divisor de zero em $\frac{I_1}{I_1^2}$, então a é superficial para (I_1, \dots, I_r) . De fato, consideremos $b \in I_1^{n_1-1} I_2^{n_2} \dots I_r^{n_r}$, como $c \leq n_1 - 1$ temos que $b \in I_1^c I_2^{n_2} \dots I_r^{n_r}$. Por outro lado, $b \in I_1^{n_1-1} I_2^{n_2} \dots I_r^{n_r}$ implica que $ab \in I_1^{n_1} I_2^{n_2} \dots I_r^{n_r}$, pois $a \in I_1$, daí $b \in I_1^{n_1} \dots I_r^{n_r} : a$ e portanto, $b \in I_1^{n_1} \dots I_r^{n_r} : a \cap I_1^c I_2^{n_2} \dots I_r^{n_r}$. Reciprocamente, dado $b \in (I_1^{n_1} \dots I_r^{n_r} : a) \cap I_1^c I_2^{n_2} \dots I_r^{n_r}$ temos que $b \in (I_1^{n_1} \dots I_r^{n_r} : a)$, e assim, $ab \in (I_1^{n_1} \dots I_r^{n_r}) \cap (a)$, como a é Rees-superficial, $ab \in (a)(I_1^{n_1-1} I_2^{n_2} \dots I_r^{n_r})$, além disso a é não divisor de zero e portanto, $b \in (I_1^{n_1-1} I_2^{n_2} \dots I_r^{n_r})$. Consequentemente, se (a_1, \dots, a_d) é uma sequência Rees-superficial para (I_1, \dots, I_d) , ideais \mathfrak{m} -primários, a qual é uma sequência regular de R então (a_1, \dots, a_d) é uma sequência superficial para (I_1, \dots, I_d) . Além disso, em um anel local de Cohen-Macaulay com corpo residual infinito, as sequências Rees-superficiais maximais que também são sequências regulares existem para o conjunto de ideais \mathfrak{m} -primários, pelo lema básico de Rees.

1.7 Reduções em Família e Multiplicidades Mistas

Nesta seção introduzimos as propriedades básicas e as conexões entre reduções em família e multiplicidades mistas. Foi Rees quem primeiro introduziu o conceito de reduções em família de ideais o qual ajuda em cálculos de multiplicidades mistas.

Definimos, antes de tudo, o que vem a ser multiplicidades mistas:

Sejam I_1, \dots, I_r ideais \mathfrak{m} -primários. A função de Bhattacharya de I_1, \dots, I_r é a função numérica $BF : \mathbb{N}^r \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$BF(n_1, \dots, n_r) = l \left(\frac{R}{I_1^{n_1}, \dots, I_r^{n_r}} \right)$$

Bhattacharya provou (veja [33]) que para todo n_1, \dots, n_r suficientemente grande, a função é dada pelo polinômio $BP(n_1, \dots, n_r)$ de grau total d em n_1, \dots, n_r . Para $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_r$ definimos $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$. Escrevemos o polinômio Bhattacharya na forma

$$BP(n_1, \dots, n_r) = \sum_{|\alpha| \leq d} e_\alpha \binom{n_1 + \alpha_1}{\alpha_1} \dots \binom{n_r + \alpha_r}{\alpha_r}$$

onde e_α são inteiros.

Sejam $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r$ e $|\alpha| = d$. Um conjunto consistindo de α_1 cópias de I_1 , α_2 cópias de I_2 , ..., α_r cópias de I_r , será denotado por

$$(I_1^{[\alpha_1]} | I_2^{[\alpha_2]} | \dots | I_r^{[\alpha_r]})$$

No caso $|\alpha| = d$, escrevemos

$$e_\alpha = e(I_1^{[\alpha_1]} | I_2^{[\alpha_2]} | \dots | I_r^{[\alpha_r]}).$$

Estes inteiros são não negativos e são chamados de *multiplicidades mistas* dos ideais I_1, \dots, I_r . Quando $r = 2$ e $i + j = d$ adotamos uma notação simplificada

$$e(I^{[i]}, J^{[j]}) = e_j(I|J).$$

Rees mostrou, em [28], que $e_0(I|J) = e(I)$ e $e_d(I|J) = e(J)$. Onde $e(\cdot)$ denota a multiplicidade de Hibert-Samuel.

Outros resultados de Rees são bem importantes na teoria de multiplicidades mistas, para tal fez-se necessário introduzir a noção de redução em família.

Definição 1.37. Sejam (R, \mathfrak{m}) anel local de dimensão d e I_1, \dots, I_d ideais \mathfrak{m} - primários. Dizemos que $a_1 \in I_1, \dots, a_d \in I_d$ é uma *redução em família* de I_1, \dots, I_d se $a_1 I_2 \dots I_d + a_2 I_1 I_3 \dots I_d + \dots + a_d I_1 \dots I_{d-1}$ é uma redução de $I_1 \cdot I_2 \dots I_d$.

Primeiro a existência de reduções em família:

Teorema 1.38. *Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local de dimensão d . Se o corpo residual R/\mathfrak{m} for infinito, então existem reduções em família.*

Teorema 1.39. (Teorema de Rees para Multiplicidades Mistas). *Se (a_1, \dots, a_d) é uma redução em família do conjunto de ideais $(I_1^{[\alpha_1]}, I_2^{[\alpha_2]}, \dots, I_r^{[\alpha_r]})$, onde I_i é repetido α_i vezes e $|\alpha| = d$. Então*

$$e((a_1, \dots, a_d)) = e((I_1^{[\alpha_1]} | I_2^{[\alpha_2]} | \dots | I_r^{[\alpha_r]})).$$

O próximo teorema nos permite relacionar multiplicidades mistas e reduções em família. Este é uma generalização da Proposição 1.31 para reduções em família:

Teorema 1.40. *Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local de Cohen-Macaulay. Se (a_1, \dots, a_d) é uma redução em família do conjunto de ideiais $(I_1^{[\alpha_1]}, I_2^{[\alpha_2]}, \dots, I_r^{[\alpha_r]})$ onde I_i é repetido α_i vezes e $|\alpha| = d$. Então*

$$e((I_1^{[\alpha_1]} | I_2^{[\alpha_2]} | \dots | I_r^{[\alpha_r]})) = l \left(\frac{R}{(a_1, \dots, a_d)} \right).$$

Temos também uma relação entre elementos superficiais e reduções em família dada no seguinte Teorema:

Teorema 1.41. *Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local Noetheriano de dimensão d com corpo residual R/\mathfrak{m} infinito. Então existe elemento superficial. Além disso, se $\underline{a} = a_1, \dots, a_d$ é uma sequência superficial para os ideais \mathfrak{m} -primários $\underline{I} = I_1, \dots, I_d$ então, \underline{a} é uma redução em família de \underline{I} .*

1.8 Fórmulas de Multiplicidade para Fibras Especiais

Nesta seção deduzimos duas fórmulas para a multiplicidade da fibra especial de um ideal \mathfrak{m} -primário I de R em termos da multiplicidade $e(I)$, da multiplicidade mista $e_{d-1}(\mathfrak{m}|I)$ e das sequências superficiais. Isto foi feito por Jayanthan, Puthenpurakal e Verma em [24].

Proposição 1.42. *Sejam (R, \mathfrak{m}) um anel local e I um ideal \mathfrak{m} -primário. Seja a um não divisor de zero em R o qual é Rees-superficial para I e \mathfrak{m} . Considere a classe residual $\bar{R} = \frac{R}{aR}$. Então, para n suficientemente grande,*

$$HF(F(\bar{I}), n) = \Delta HF(F(I), n).$$

Demonstração. Consideremos a seguinte sequência

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow \frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n} \xrightarrow{\mu_a} \frac{I^{n+1}}{\mathfrak{m}I^{n+1}} \longrightarrow C_n \longrightarrow 0$$

onde

$$K_n = \frac{(\mathfrak{m}I^{n+1} : a) \cap I^n}{\mathfrak{m}I^n}, \quad C_n = \frac{I^{n+1}}{aI^n + \mathfrak{m}I^{n+1}} \quad \text{e} \quad \mu_a(x + \mathfrak{m}I^n) = ax + \mathfrak{m}I^{n+1}.$$

A seqüência dada acima é exata pois, $\ker\mu_a = K_n$ e $\text{coker}\mu_a = C_n$.

Pelas propriedades da função comprimento em seqüências exatas temos

$$l(K_n) - l\left(\frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}\right) + l\left(\frac{I^{n+1}}{\mathfrak{m}I^{n+1}}\right) - l(C_n) = 0$$

Por hipótese, a é Rees-superficial para \mathfrak{m} e I e não divisor de zero em R , logo a é superficial para \mathfrak{m} e I , pela Observação 3, $(\mathfrak{m}I^{n+1} : a) \cap I^n = \mathfrak{m}I^n$ para todo n suficientemente grande, portanto, $K_n = 0$ para todo n suficientemente grande, conseqüentemente $l(K_n) = 0$ para todo $n \gg 0$. Assim,

$$l\left(\frac{I^{n+1}}{\mathfrak{m}I^{n+1}}\right) - l\left(\frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}\right) = l(C_n) \quad (1.1)$$

para todo $n \gg 0$. E $\Delta HF(F(I), n+1) = l(C_n)$ para todo n suficientemente grande.

Além disso,

$$HF(F(\bar{I}), n+1) = l\left(\frac{\bar{I}^{n+1}}{\mathfrak{m}\bar{I}^{n+1}}\right) = l\left(\frac{\frac{I^{n+1}+aR}{aR}}{\frac{\mathfrak{m}I^{n+1}+aR}{aR}}\right) = l\left(\frac{I^{n+1}+aR}{\mathfrak{m}I^{n+1}+aR}\right)$$

para todo n suficientemente grande.

Mostraremos as seguintes igualdades abaixo:

$$l\left(\frac{I^{n+1}+aR}{\mathfrak{m}I^{n+1}+aR}\right) = l\left(\frac{I^{n+1}}{\mathfrak{m}I^{n+1}+aR \cap I^{n+1}}\right) \quad (1.2)$$

$$= l\left(\frac{I^{n+1}}{\mathfrak{m}I^{n+1}+aI^n}\right) \quad (1.3)$$

$$= \Delta HF(F(I), n+1) \quad (1.4)$$

Para a primeira igualdade (1.2), vamos mostrar que

$$\frac{I^{n+1}+aR}{\mathfrak{m}I^{n+1}+aR} = \frac{I^{n+1}}{\mathfrak{m}I^{n+1}+aR \cap I^{n+1}}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{I^{n+1}+aR}{\mathfrak{m}I^{n+1}+aR} &= \frac{I^{n+1}+aR+\mathfrak{m}I^{n+1}}{aR+\mathfrak{m}I^{n+1}} \\ &= \frac{I^{n+1}}{I^{n+1} \cap (aR+\mathfrak{m}I^{n+1})} \\ &= \frac{I^{n+1}}{\mathfrak{m}I^{n+1}+aR \cap I^{n+1}} \end{aligned}$$

Concluindo a igualdade (1.2).

A segunda igualdade (1.3), é obtida a partir da definição de a ser Rees-superficial $aR \cap I^{n+1} = aI^n$. Portanto,

$$\frac{I^{n+1}}{\mathfrak{m}I^{n+1} + aR \cap I^{n+1}} = \frac{I^{n+1}}{\mathfrak{m}I^{n+1} + aI^n}$$

Pela equação (1.1) temos que $\Delta HF(F(I), n+1) = l(C_n)$ para todo n suficientemente grande. Portanto, segue a igualdade (1.4). Logo

$$HF(F(\bar{I}), n+1) = \Delta HF(F(I), n+1)$$

□

O próximo teorema dá-nos fórmulas para a multiplicidade da fibra especial.

Teorema 1.43. *Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local de Cohen-Macaulay de dimensão positiva d . Considere I um ideal \mathfrak{m} -primário.*

1. *Sejam $a_1, \dots, a_{d-1} \in I$ e $x \in \mathfrak{m}$ uma seqüência regular em R o qual é Rees-superficial para o conjunto $(I^{[d-1]}|\mathfrak{m}^{[1]})$. Então*

$$f_0(I) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) - \lim_{n \rightarrow \infty} l \left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}I^{n-1}} \right)$$

2. *Se $a_1, \dots, a_d \in I$ é uma seqüência regular em R o qual é Rees-superficial para o conjunto $(I^{[d-1]}|\mathfrak{m}^{[1]})$. Então*

$$f_0(I) = e(I) - \lim_{n \rightarrow \infty} l \left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{a_d I^n + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}I^{n-1}} \right)$$

Demonstração. 1. Utilizaremos indução sobre d .

Para $d = 1$ precisamos mostrar que

$$f_0(I) = e(\mathfrak{m}) - \lim_{n \rightarrow \infty} l \left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n} \right)$$

Usamos o Teorema 1.39 para garantir que $e(\mathfrak{m}) = e_0(\mathfrak{m}|I)$. Além disso, temos as seguintes seqüências exatas:

$$0 \longrightarrow \frac{xR}{xI^n} \longrightarrow \frac{R}{xI^n} \longrightarrow \frac{R}{xR} \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow \frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n} \longrightarrow \frac{R}{xI^n} \longrightarrow \frac{R}{\mathfrak{m}I^n} \longrightarrow 0$$

Daí segue,

$$l\left(\frac{R}{xI^n}\right) = l\left(\frac{xR}{xI^n}\right) + l\left(\frac{R}{xR}\right)$$

e

$$l\left(\frac{R}{xI^n}\right) = l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n}\right) + l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I^n}\right)$$

Assim,

$$l\left(\frac{xR}{xI^n}\right) + l\left(\frac{R}{xR}\right) = l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n}\right) + l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I^n}\right)$$

Logo,

$$\begin{aligned} l\left(\frac{R}{xR}\right) &= l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I^n}\right) - l\left(\frac{xR}{xI^n}\right) + l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n}\right) \\ &= l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I^n}\right) - l\left(\frac{R}{I^n}\right) + l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n}\right) \\ &= l\left(\frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}\right) + l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n}\right) \\ &= \mu(I^n) + l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n}\right) \end{aligned} \tag{1.5}$$

(1.5) resulta do fato de x ser um não divisor de zero em R . Sendo $x \in \mathfrak{m}$ superficial para \mathfrak{m} , pelo Teorema 1.41, xR é uma redução minimal de \mathfrak{m} , e como R é um anel de Cohen-Macaulay segue da Proposição 1.31 que $l\left(\frac{R}{xR}\right) = e(\mathfrak{m})$. Assim,

$$e(\mathfrak{m}) = \mu(I^n) + l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n}\right)$$

e portanto,

$$\mu(I^n) = e(\mathfrak{m}) - l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n}\right)$$

Tomando o limite em ambos os lados, temos

$$f_0(I) = e(\mathfrak{m}) - \lim_{n \rightarrow \infty} l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n}\right)$$

Isto conclui o caso $d = 1$.

Agora suponhamos que $d = 2$. Seja (a, x) uma sequência regular o qual é Rees-superficial para I, \mathfrak{m} . Pelo Teorema 1.41, (a, x) é uma redução em família de

(I, \mathfrak{m}) . Do Teorema 1.39, $e_1(\mathfrak{m}|I) = e(a, x)$, e juntamente com o fato de R ser Cohen-Macaulay temos pelo Teorema 1.40 que

$$e_1(\mathfrak{m}|I) = l\left(\frac{R}{(a, x)}\right) \quad (1.6)$$

Consideremos a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow \frac{R}{(I^n : a) \cap (\mathfrak{m}I^{n-1} : x)} \xrightarrow{\psi} \frac{R}{I^n} \oplus \frac{R}{\mathfrak{m}I^{n-1}} \xrightarrow{\phi} \frac{(x, a)}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}} \longrightarrow 0,$$

onde, $\psi(t') = ((-ta)', (tx)')$ e $\phi(r', s') = (rx + sa)'$ e $(\)'$ denota a classe de equivalência.

Pelas propriedades da função comprimento l , temos:

$$l\left(\frac{R}{(I^n : a) \cap (\mathfrak{m}I^{n-1} : x)}\right) - l\left(\frac{R}{I^n}\right) - l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) + l\left(\frac{(x, a)}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) = 0$$

Substituindo $l\left(\frac{R}{I^n}\right)$ e $l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I^{n-1}}\right)$:

$$\begin{aligned} l\left(\frac{R}{(I^n : a) \cap (\mathfrak{m}I^{n-1} : x)}\right) - l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I^n}\right) + l\left(\frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}\right) \\ - l\left(\frac{I^{n-1}}{\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) - l\left(\frac{R}{I^{n-1}}\right) + l\left(\frac{(x, a)}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) = 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} l\left(\frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}\right) - l\left(\frac{I^{n-1}}{\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) = l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I^n}\right) + l\left(\frac{R}{I^{n-1}}\right) \\ - l\left(\frac{R}{(I^n : a) \cap (\mathfrak{m}I^{n-1} : x)}\right) - l\left(\frac{(x, a)}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right)$ do lado direito da igualdade acima, temos

$$HF(F(I), n) - HF(F(I), n-1) = l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I^n}\right) + l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) + l\left(\frac{R}{I^{n-1}}\right)$$

$$-l\left(\frac{R}{(I^n : a) \cap (\mathfrak{m}I^{n-1} : x)}\right) - l\left(\frac{(x, a)}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) - l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right)$$

Daí

$$\begin{aligned} \Delta HF(F(I), n) &= l\left(\frac{R}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) + l\left(\frac{(I^n : a) \cap (\mathfrak{m}I^{n-1} : x)}{I^{n-1}}\right) \\ &\quad - l\left(\frac{(x, a)}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) - l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\Delta HF(F(I), n) = l\left(\frac{R}{(x, a)}\right) + l\left(\frac{(I^n : a) \cap (\mathfrak{m}I^{n-1} : x)}{I^{n-1}}\right) - l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right)$$

Logo, por (1.6)

$$\Delta HF(F(I), n) = e_1(\mathfrak{m}|I) + l\left(\frac{(I^n : a) \cap (\mathfrak{m}I^{n-1} : x)}{I^{n-1}}\right) - l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) \quad (1.7)$$

Sendo (a, x) superficial para (I, \mathfrak{m}) , a é superficial para I e para \mathfrak{m} , e regular em R . Temos que $I^n : a = I^{n-1}$ para n suficientemente grande. De fato, dado $b \in I^n : a$, temos que $ba \in I^n \cap (a)$, mas $I^n \cap (a) = (a)I^{n-1}$, pois a é superficial para I e para \mathfrak{m} , logo, $ba \in (a)I^{n-1}$, e pelo fato de a ser regular em R , podemos concluir que $b \in I^{n-1}$. Claramente a recíproca é verdadeira. Com isso, o segundo termo do lado esquerdo de (1.7) é anulado. Desde que $HP(F(I), n)$ tem grau polinomial 1, $\Delta HS(F(I), n) = f_0(I)$ para n suficientemente grande.

Desta forma,

$$f_0(I) = e_1(\mathfrak{m}|I) - \lim_{n \rightarrow \infty} l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + a\mathfrak{m}I^{n-1}}\right)$$

Suponhamos, agora, que $d \geq 3$. Chamando $\overline{R} = \frac{R}{(a_1)}$ e $L = (a_2, a_3, \dots, a_{d-1})$.

Por hipótese de indução e pela Proposição 1.42 temos,

$$\begin{aligned}
f_0(I) &= f_0(\bar{I}) \\
&= e_{d-2}(\bar{\mathfrak{m}}|\bar{I}) - \lim_{n \rightarrow \infty} l \left(\frac{\mathfrak{m}I^n + a_1R}{xI^n + L\mathfrak{m}I^{n-1} + a_1R} \right) \\
&= e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) - \lim_{n \rightarrow \infty} l \left(\frac{\mathfrak{m}I^n + a_1R}{xI^n + L\mathfrak{m}I^{n-1} + a_1R} \right) \tag{1.8}
\end{aligned}$$

$$= e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) - \lim_{n \rightarrow \infty} l \left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + L\mathfrak{m}I^{n-1} + \mathfrak{m}I^n \cap a_1R} \right) \tag{1.9}$$

$$= e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) - \lim_{n \rightarrow \infty} l \left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + L\mathfrak{m}I^{n-1} + (a_1)\mathfrak{m}I^{n-1}} \right) \tag{1.10}$$

$$= e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) - \lim_{n \rightarrow \infty} l \left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}I^{n-1}} \right) \tag{1.11}$$

(1.8) resulta do fato de a_1 ser superficial para \mathfrak{m} e I e aplicando o Teorema 17.4.6 de [32], temos que $e_{d-2}(\bar{\mathfrak{m}}|\bar{I}) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I)$. E (1.9) resulta de

$$\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{m}I^n + a_1R}{L\mathfrak{m}I^{n-1} + xI^n + a_1R} &= \frac{\mathfrak{m}I^n}{\mathfrak{m}I^n \cap (xI^n + L\mathfrak{m}I^{n-1} + a_1R)} \\
&= \frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + L\mathfrak{m}I^{n-1} + \mathfrak{m}I^n \cap a_1R}
\end{aligned}$$

(1.10) segue de a_1 ser Rees-superficial para I e portanto, $\mathfrak{m}I^n \cap a_1R = (a_1)\mathfrak{m}I^{n-1}$. E (1.11) diretamente de $L\mathfrak{m}I^{n-1} + (a_1)\mathfrak{m}I^{n-1} = (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}I^{n-1}$.

Isto conclui o primeiro item.

2. Basta substituir x por a_d na demonstração do item 1.

□

Capítulo 2

Fibras Especiais de Cohen-Macaulay e de Gorenstein

O objetivo deste capítulo é estudar as propriedades de Cohen-Macaulay e de Gorenstein da Fibra Especial

$$F(I) = \bigoplus_{n \geq 0} \frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}$$

de um ideal em um anel local de Cohen-Macaulay (R, \mathfrak{m}) . Estes são alguns dos problemas centrais da dissertação.

2.1 Fibras Especiais de Cohen-Macaulay

Nesta seção estudamos um dos problemas centrais da dissertação: A caracterização da Cohen-Macaulicidade da fibra especial. Isso é feito via série de Hilbert e multiplicidade da fibra especial. Antes, precisamos mostrar o seguinte lema:

Lema 2.1. *Sejam (R, \mathfrak{m}) um anel Artiniano, $G = \bigoplus_{n \geq 0} G_n$ uma álgebra graduada finitamente gerada, $G_0 = R$ e $a \in G_1$ um elemento não divisor de zero de G . Então,*

$$HS(G, t) = \frac{1}{(1-t)} HS\left(\frac{G}{aG}, t\right)$$

Demonstração. De fato, consideremos a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow G_{n-1} \xrightarrow{\times a} G_n \longrightarrow \frac{G_n}{aG_{n-1}} \longrightarrow 0$$

Pelas propriedades da função comprimento,

$$l\left(\frac{G_n}{aG_{n-1}}\right) = l(G_n) - l(G_{n-1})$$

Como

$$HS\left(\frac{G}{aG}, t\right) = \sum_{n \leq 0} l\left(\frac{G_n}{aG_{n-1}}\right) t^n$$

Temos que

$$\begin{aligned} HS\left(\frac{G}{aG}, t\right) &= \sum_{n \leq 0} [l(G_n) - l(G_{n-1})] t^n \\ &= \sum_{n \leq 0} l(G_n) t^n - \sum_{n \leq 0} l(G_{n-1}) t^n \\ &= \sum_{n \leq 0} l(G_n) t^n - \sum_{n \leq 0} l(G_{n-1}) t^{n-1} \cdot t \\ &= HS(G, t) - HS(G, t) \cdot t \\ &= HS(G, t)(1 - t). \end{aligned}$$

□

Feito isso, mostraremos um dos resultados principais deste trabalho: As condições necessárias e suficientes para que a fibra especial seja de Cohen-Macaulay.

Teorema 2.2. *Sejam (R, \mathfrak{m}) um anel local e I um ideal qualquer de R . Considere J uma redução minimal de I . Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. $F(I)$ é de Cohen-Macaulay

2. $HS(F(I), t) = \frac{1}{(1-t)^\ell} \sum_{i=0}^r l\left(\frac{I^i}{JJ^{i-1} + \mathfrak{m}I^i}\right) t^i$, onde $r = r_J(I)$ e $\ell = \ell(I)$ é a dispersão analítica de I

3. $f_0(I) = \sum_{n=0}^r l\left(\frac{I^n}{JJ^{n-1} + \mathfrak{m}I^n}\right)$

Demonstração. (1) \Rightarrow (2). Notemos que $\frac{F(I)}{JF(I)} = \bigoplus_{n \geq 0} \frac{I^n}{JJ^{n-1} + \mathfrak{m}I^n}$. Como J é redução minimal de I , temos que $JJ^{n-1} = I^n$, para todo $n \geq r+1$, logo $\frac{I^n}{JJ^{n-1} + \mathfrak{m}I^n} = 0$ a partir de $n = r+1$. Assim, $\frac{F(I)}{JF(I)}$ é finito e portanto é soma direta de

uma família finita de módulos de comprimento finito, ou seja, $l\left(\frac{F(I)}{JF(I)}\right) < \infty$, daí $\dim\left(\frac{F(I)}{JF(I)}\right) = 0$. Logo, $JF(I)$ é gerado por um sistema de parâmetros homogêneos. E como $F(I)$ é de Cohen-Macaulay, segue que $JF(I)$ é gerado por uma sequência regular. Além disso, J é uma sequência regular gerada por ℓ elementos em $F(I)$, segue do Lema 2.1 que

$$HS(F(I), t) = \frac{1}{(1-t)^\ell} HS\left(\frac{F(I)}{JF(I)}, t\right). \quad (2.1)$$

Por outro lado, vimos que

$$\frac{F(I)}{JF(I)} = \bigoplus_{i=0}^r \frac{I^i}{JI^{i-1} + \mathfrak{m}I^i},$$

aplicando a função comprimento em ambos os lados temos,

$$l\left(\frac{F(I)}{JF(I)}\right) = \sum_{i=0}^r l\left(\frac{I^i}{JI^{i-1} + \mathfrak{m}I^i}\right).$$

Logo, $HS\left(\frac{F(I)}{JF(I)}, t\right) = \sum_{i=0}^r l\left(\frac{I^i}{JI^{i-1} + \mathfrak{m}I^i}\right) t^i$. E portanto,

$$HS(F(I), t) = \frac{1}{(1-t)^\ell} \sum_{i=0}^r l\left(\frac{I^i}{JI^{i-1} + \mathfrak{m}I^i}\right) t^i$$

(2) \Rightarrow (3). Pela definição de multiplicidade de Hilbert-Samuel dada da seguinte forma: $HS(M, t) = \frac{h(t)}{(1-t)^d}$, com $h(1) \neq 0$, temos que a multiplicidade é exatamente colocar $t = 1$ no numerador, ou seja,

$$h(1) = f_0(I) = \sum_{i=0}^r l\left(\frac{I^i}{JI^{i-1} + \mathfrak{m}I^i}\right)$$

(3) \Rightarrow (1). Observamos que $M = F_+(I) = \bigoplus_{n \geq 1} \frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}$ é o ideal homogêneo maximal de $F(I)$, pois

$$\frac{F(I)}{F_+(I)} = \frac{R}{\mathfrak{m}} = k.$$

Sabemos que $F(I)$ é de Cohen-Macaulay se, e somente se, $F(I)_M$ é de Cohen-Macaulay.

Sendo $F(I)$ um anel graduado homogêneo, o anel graduado associado é dado por,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(MF(I)_M, F(I)_M) &\simeq \bigoplus_{n \geq 0} \frac{(MF(I)_M)^n}{(MF(I)_M)^{n+1}} \\ &\simeq \bigoplus_{n \geq 0} \frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n} \\ &\simeq F(I). \end{aligned}$$

Assim, $l\left(\frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}\right) = l\left(\frac{(MF(I)_M)^n}{(MF(I)_M)^{n+1}}\right)$, logo as multiplicidades de $F(I)$ e $F(I)_M$ coincidem. Além disso,

$$l\left(\frac{F(I)}{JF(I)}\right) = l\left(\frac{F(I)_M}{JF(I)_M}\right)$$

Por hipótese,

$$\begin{aligned} l\left(\frac{F(I)}{JF(I)}\right) &= f_0(I) \\ &= e(MF(I)_M, F(I)_M) \end{aligned}$$

Isto resulta que

$$l\left(\frac{F(I)_M}{JF(I)_M}\right) = e(MF(I)_M, F(I)_M)$$

Portanto se $JF(I)_M$ for redução minimal de $MF(I)_M$ temos que $F(I)_M$ é de Cohen-Macaulay.

Assim, falta mostrar que $JF(I)_M$ é redução minimal de $MF(I)_M$. Vejamos que $JF(I)$ é uma redução de M . Para isso, precisamos mostrar que $(JF(I))M^r = M^{r+1}$. De fato, sendo

$$JF(I) = \left(\bigoplus_{i=1}^r \frac{JI^{i-1} + \mathfrak{m}I^i}{\mathfrak{m}I^i} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=r+1}^{\infty} \frac{I^i}{\mathfrak{m}I^i} \right)$$

e

$$M = \left(\bigoplus_{i=1}^r \frac{I^i}{\mathfrak{m}I^i} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=r+1}^{\infty} \frac{I^i}{\mathfrak{m}I^i} \right)$$

daí,

$$M^r = \bigoplus_{i=r+1}^{\infty} \frac{I^i}{\mathfrak{m}I^i}$$

observe que o primeiro termo de $(JF(I))M^r$ é $\left(\frac{J + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I} \right) \cdot \left(\frac{I^r}{\mathfrak{m}I^r} \right) = \left(\frac{I^{r+1}}{\mathfrak{m}I^{r+1}} \right)$.

Desenvolvendo é possível mostrar que $(JF(I))M^r = M^{r+1}$. Assim, $JF(I)_M$ é redução minimal de $MF(I)_M$. E portanto, $F(I)_M$ é de Cohen-Macaulay, que por sua vez implica que $F(I)$ é de Cohen-Macaulay concluindo a demonstração do Teorema. \square

2.2 Fibras Especiais de Gorenstein

Esta seção é dedicada ao estudo de um outro problema central deste trabalho: A caracterização da fibra especial segundo a propriedade de Gorenstein. Esta caracterização será feita de acordo com o número de redução do ideal. Durante toda a seção assumiremos que (R, \mathfrak{m}) é um anel local de Cohen-Macaulay de dimensão d com corpo residual infinito e $F(I)$ de Cohen-Macaulay. Denotaremos $\ell(I)$ por ℓ .

Se $r(I) = 0$, então $F(I)$ é um anel de polinômios em $\ell(I)$ variáveis com coeficientes em $k = R/\mathfrak{m}$. Assim, podemos começar com o caso em que $r(I) = 1$. Neste caso $F(I)$ é de Cohen-Macaulay, por [29, Teorema 1].

Proposição 2.3. *Assuma que $r(I) = 1$. Se $F(I)$ é Gorenstein, então $\mu(I) = \ell + 1$.*

Demonstração. Escolhendo J uma redução minimal de I , tal que $r_J(I) = 1$. Como $F(I)$ é de Cohen-Macaulay, temos pelo Teorema 2.2,

$$HS(F(I), t) = \frac{1}{(1-t)^\ell} \sum_{i=0}^r l \left(\frac{I^i}{JI^{i-1} + \mathfrak{m}I^i} \right) t^i$$

como $r(I) = 1$ temos que,

$$\begin{aligned}
HS(F(I), t) &= \frac{1}{(1-t)^\ell} \sum_{i=0}^1 l \left(\frac{I^i}{JI^{i-1} + \mathfrak{m}I^i} \right) t^i \\
&= \frac{1}{(1-t)^\ell} \left[l \left(\frac{R}{\mathfrak{m}} \right) + l \left(\frac{I}{J + \mathfrak{m}I} \right) t \right] \\
&= \frac{1}{(1-t)^\ell} \left[1 + \left(l \left(\frac{I}{\mathfrak{m}I} \right) - l \left(\frac{J + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I} \right) \right) t \right] \\
&= \frac{1}{(1-t)^\ell} \left[1 + \left(\mu(I) - l \left(\frac{J}{J \cap \mathfrak{m}I} \right) \right) t \right] \\
&= \frac{1}{(1-t)^\ell} [1 + (\mu(I) - \mu(J))t] \\
&= \frac{1 + (\mu(I) - \ell)t}{(1-t)^\ell} \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$HS(F(I), t) = \frac{h(t)}{(1-t)^\ell} \tag{2.3}$$

(2.2) e (2.3) nos diz que

$$\frac{1 + (\mu(I) - \ell)t}{(1-t)^\ell} = \frac{h(t)}{(1-t)^\ell} \tag{2.4}$$

Portanto, $1 + (\mu(I) - \ell)t = h(t)$. Como $F(I)$ é Gorenstein, temos que $h(t)$ é um polinômio simétrico e assim $\mu(I) - \ell = 1$. \square

A recíproca desta proposição é válida, se $\mu(I) = \ell + 1$ então $F(I)$ é um anel de Gorenstein. Porém é possível mostrar um resultado ainda mais geral, se $\mu(I) = \ell + 1$ então $F(I)$ é uma hipersuperfície, já que sendo $F(I)$ uma hipersuperfície, segue que $F(I)$ é de Gorenstein.

Seja $J = (x_1, \dots, x_a)$ uma redução minimal de I . Sendo $F(I)$ de Cohen-Macaulay, sabemos a forma da sua série de Hilbert pelo Teorema 2.2, daí podemos concluir que o número de redução de I com relação a J é o grau do polinômio $h(t)$ de $F(I)$.

Proposição 2.4. *Sejam J uma redução minimal de I e $r = r_J(I)$. Então*

$$\text{Socle} \frac{F(I)}{JF(I)} \cong \bigoplus_{n=1}^{r-1} \frac{(I^{n+1}\mathfrak{m} + JI^n : I) \cap I^n}{I^n\mathfrak{m} + JI^{n-1}} \bigoplus \frac{I^r}{\mathfrak{m}I^r + JI^{r-1}}$$

Demonstração. Consideremos

$$S = \frac{F(I)}{JF(I)} = \bigoplus_{n=0}^r \frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n + JI^{n-1}}.$$

Sabemos que $S = \bigoplus_{n=0}^r S_n$ é uma k -álgebra graduada standard, onde $k = S_0$ é um corpo. Assim,

$$\text{Socle} S = (0 :_S S_+),$$

onde $S_+ = \bigoplus_{n=1}^r S_n$ é o ideal maximal de S . Além disso, $(0 :_S S_+) = (0 :_S S_1)$, pois S é uma k -álgebra graduada standard.

Por outro lado, $(0 :_S S_1) = \bigoplus_{n=0}^r (0 :_{S_n} S_1) = (0 :_{R/\mathfrak{m}} S_1) \oplus \bigoplus_{n=1}^r (0 :_{S_n} S_1)$, como R/\mathfrak{m} é k -espaço vetorial segue que $(0 :_{R/\mathfrak{m}} S_1) = 0$. E portanto,

$$(0 :_S S_1) = \bigoplus_{n=1}^r (0 :_{S_n} S_1)$$

Como $(0 :_{S_n} S_1) = \frac{(I^{n+1}\mathfrak{m} + JI^n : I) \cap I^n}{I^n\mathfrak{m} + JI^{n-1}}$, assim concluímos que

$$(0 :_S S_1) = \text{Socle} \frac{F(I)}{JF(I)} \cong \bigoplus_{n=1}^{r-1} \frac{(I^{n+1}\mathfrak{m} + JI^n : I) \cap I^n}{I^n\mathfrak{m} + JI^{n-1}} \bigoplus \frac{I^r}{\mathfrak{m}I^r + JI^{r-1}}$$

□

Quando $r(I) = 2$ temos uma condição para buscar a propriedade de Gorenstein de $F(I)$ dada pelo corolário seguinte:

Corolário 2.5. *Seja $r(I) = 2$ e seja J redução minimal de I , tal que $r_J(I) = 2$. Então $F(I)$ é Gorenstein se, e somente se, $(I^2\mathfrak{m} + JI : I) \cap I = \mathfrak{m}I + J$ e $l\left(\frac{I^2}{JI + \mathfrak{m}I^2}\right) = 1$.*

Demonstração. Escrevamos $J = (x_1, \dots, x_a)$. Denotemos por x° a classe de $x \in I$ em $I/\mathfrak{m}I$. Sabemos que $F(I)$ é Gorenstein se, e somente se, $F(I)$ é de Cohen-Macaulay e Tipo $F(I) = 1$. Sendo $(x_1^\circ, \dots, x_a^\circ)$ uma sequência regular para $F(I)$ no qual estamos considerando de Cohen-Macaulay, temos que,

$$F(I) \text{ é Gorenstein se, e somente se, } \dim_k \left(\text{Socle} \frac{F(I)}{(x_1^\circ, \dots, x_a^\circ)F(I)} \right) = 1.$$

Como $(x_1^\circ, \dots, x_a^\circ)$ é uma sequência regular para $F(I)$ temos,

$$\text{Socle} \frac{F(I)}{JF(I)} \cong \text{Socle} \frac{F(I)}{(x_1^\circ, \dots, x_a^\circ)F(I)}$$

Assim,

$$F(I) \text{ é Gorenstein se, e somente se, } \dim_k \left(\text{Socle} \frac{F(I)}{JF(I)} \right) = 1.$$

$$F(I) \text{ é Gorenstein se, e somente se, } l \left(\text{Socle} \frac{F(I)}{JF(I)} \right) = 1.$$

Como $r(I) = 2$ e J é uma redução minimal de I , pela Proposição 2.4 $\text{Socle} \frac{F(I)}{JF(I)} = \frac{(I^2\mathfrak{m} + JI : I) \cap I}{I\mathfrak{m} + J} \oplus \frac{I^2}{\mathfrak{m}I^2 + JI}$. Logo,

$$F(I) \text{ é Gorenstein se, e somente se, } l \left(\frac{(I^2\mathfrak{m} + JI : I) \cap I}{I\mathfrak{m} + J} \right) + l \left(\frac{I^2}{\mathfrak{m}I^2 + JI} \right) = 1.$$

Portanto,

$$F(I) \text{ é Gorenstein se, e somente se, } l \left(\frac{(I^2\mathfrak{m} + JI : I) \cap I}{I\mathfrak{m} + J} \right) = 0 \text{ e } l \left(\frac{I^2}{\mathfrak{m}I^2 + JI} \right) = 1.$$

Caso contrário, $l \left(\frac{I^2}{\mathfrak{m}I^2 + JI} \right) = 0$ teríamos que $I^2 = \mathfrak{m}I^2 + JI$, pelo Lema de Nakayama, $I^2 = JI$ contradizendo o fato de $r(I) = 2$. Com isso concluímos o corolário.

$$F(I) \text{ é Gorenstein se, e somente se, } (I^2\mathfrak{m} + JI : I) \cap I = I\mathfrak{m} + J \text{ e } l \left(\frac{I^2}{\mathfrak{m}I^2 + JI} \right) = 1. \quad \square$$

Agora, veremos uma consequência de $F(I)$ ser de Gorenstein quando o número de redução $r(I) \geq 3$.

Proposição 2.6. *Sejam J uma redução minimal de I e $r = r_J(I) \geq 3$. Se $F(I)$ é Gorenstein, então*

$$\mu(I) = \ell + l \left(\frac{I^{r-1}}{\mathfrak{m}I^{r-1} + JI^{r-2}} \right).$$

Demonstração. Sabemos que $S = \frac{F(I)}{JF(I)}$ é um anel graduado standard de Gorenstein de dimensão zero e consideremos

$$S_i = \frac{I^i}{\mathfrak{m}I^i + JI^{i-1}}, \quad i = 0, \dots, r$$

Como

$$\begin{aligned}
HS(F(I), t) &= \frac{1}{(1-t)^\ell} \sum_{i=0}^r l\left(\frac{I^i}{JI^{i-1} + \mathfrak{m}I^i}\right) t^i \\
&= \frac{1}{(1-t)^\ell} \sum_{i=0}^r l(S_i) t^i \\
&= \frac{l(S_0) + l(S_1)t + l(S_2)t^2 + \dots + l(S_r)t^r}{(1-t)^\ell}
\end{aligned}$$

Por hipótese $F(I)$ é anel de Gorenstein, portanto $h(t)$ é um polinômio simétrico, além disso $h(t)$ é o termo da série de Hilbert dada pela função $HS(F(I), t) = \frac{h(t)}{(1-t)^\ell}$. Também por hipótese, $r \geq 3$ isto implica em $l(S_1) = l(S_{r-1})$. Observamos que,

$$\begin{aligned}
l(S_1) &= l\left(\frac{I}{\mathfrak{m}I + J}\right) \\
&= l\left(\frac{I}{\mathfrak{m}I}\right) - l\left(\frac{\mathfrak{m}I + J}{\mathfrak{m}I}\right) \\
&= \mu(I) - l\left(\frac{\mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I \cap J}\right) \\
&= \mu(I) - l\left(\frac{J}{\mathfrak{m}J}\right) \\
&= \mu(I) - \mu(J) \\
&= \mu(I) - \ell
\end{aligned}$$

Ou seja, $l(S_{r-1}) = \mu(I) - \ell$ e portanto $\mu(I) = \ell + l\left(\frac{I^{r-1}}{\mathfrak{m}I^{r-1} + JI^{r-2}}\right)$. □

Definiremos o que venha a ser um ideal de Sally para concluir essa seção caracterizando a propriedade de Gorenstein de $F(I)$ para ideais desse tipo.

Definição 2.7. Um ideal I \mathfrak{m} -primário de um anel de Cohen Macaulay satisfazendo a condição $l\left(\frac{I^2}{JI}\right) = 1$ para qualquer redução minimal J é chamado *ideal de Sally*.

Corolário 2.8. *Seja I ideal de Sally com $r(I) \geq 3$. Se $F(I)$ é anel de Gorenstein, então $\mu(I) = \ell + 1$.*

Demonstração. Se J for uma redução de I , então $I^2 \neq JI$, pois $r(I) \geq 3$.

Sendo I ideal de Sally temos $l\left(\frac{I^{n+1}}{JI^n}\right) \leq 1$, para todo $n \geq 1$, segue que $\mathbf{m}I^{n+1} \subseteq JI^n$ para todo $n \geq 1$ e $l\left(\frac{I^{n+1}}{JI^n}\right) = 1$ para todo $n = 2, \dots, r$. Assim podemos escrever

$$\frac{I^{r-1}}{JI^{r-2}} = \frac{I^{r-1}}{\mathbf{m}I^{r-1} + JI^{r-2}}$$

e portanto,

$$1 = l\left(\frac{I^{r-1}}{JI^{r-2}}\right) = l\left(\frac{I^{r-1}}{\mathbf{m}I^{r-1} + JI^{r-2}}\right)$$

Pela Proposição 2.6,

$$\mu(I) = \ell + l\left(\frac{I^{r-1}}{\mathbf{m}I^{r-1} + JI^{r-2}}\right) = \ell + 1.$$

□

Capítulo 3

Ideais de Multiplicidade Mista Minimal e Quase Minimal

Neste último capítulo continuamos estudando as propriedades de Cohen-Macaulay da Fibra Especial

$$F(I) = \bigoplus_{n \geq 0} \frac{I^n}{\mathfrak{m}I^n}$$

porém, em ideais \mathfrak{m} -primários com multiplicidade mista minimal e quase minimal em um anel local de Cohen-Macaulay (R, \mathfrak{m}) com dimensão d .

Assim, começamos com um resultado geral. Para um anel local de Cohen-Macaulay (R, \mathfrak{m}) de dimensão d , Abhyankar mostrou em [1] que $e(\mathfrak{m}) \geq \mu(\mathfrak{m}) - d + 1$. D’Cruz, Raghavan e Verma em [11] estenderam este resultado para os ideais \mathfrak{m} -primários:

Teorema 3.1. *Sejam (R, \mathfrak{m}) um anel local de Cohen-Macaulay com dimensão d e I um ideal \mathfrak{m} -primário. Então*

$$e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) \geq \mu(I) - d + 1$$

Demonstração. Passando para o anel $R(X) = R[X]_{\mathfrak{m}R[X]}$ podemos assumir que o corpo residual R/\mathfrak{m} é infinito. Tomando x, a_1, \dots, a_{d-1} uma redução em família de $\mathfrak{m}, I, \dots, I$, onde I é repetido $d - 1$ vezes. A seguinte aplicação:

$$f : \frac{R}{I} \oplus \left(\frac{R}{\mathfrak{m}} \right)^{d-1} \longrightarrow \frac{(x, a_1, \dots, a_{d-1})}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}},$$

é definida por $f(a', b'_1, \dots, b'_{d-1}) = (xa + a_1b_1 + \dots + a_{d-1}b_{d-1})'$, onde $(\)'$ é a classe de equivalência e $K = \text{kernel} f$. Conseqüentemente a seguinte sequência é exata

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \frac{R}{I} \oplus \left(\frac{R}{\mathfrak{m}}\right)^{d-1} \xrightarrow{f} \frac{(x, a_1, \dots, a_{d-1})}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}} \longrightarrow 0.$$

Pelas propriedades da função comprimento, segue que

$$l(K) - l\left(\frac{R}{I}\right) - (d-1) + l\left(\frac{(x, a_1, \dots, a_{d-1})}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) = 0$$

Como

$$l\left(\frac{(x, a_1, \dots, a_{d-1})}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) = l\left(\frac{R}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - l\left(\frac{R}{(x, a_1, \dots, a_{d-1})}\right)$$

temos

$$l(K) - l\left(\frac{R}{I}\right) - (d-1) + l\left(\frac{R}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - l\left(\frac{R}{(x, a_1, \dots, a_{d-1})}\right) = 0$$

Sabemos, pelo Teorema 1.40, que sendo R um anel de Cohen-Macaulay $e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) = l\left(\frac{R}{(x, a_1, \dots, a_{d-1})}\right)$, assim

$$e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) = l(K) - l\left(\frac{R}{I}\right) - (d-1) + l\left(\frac{R}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right)$$

Somando e subtraindo $l\left(\frac{R}{I\mathfrak{m}}\right)$ do lado direito da equação acima, temos:

$$\begin{aligned} e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) &= l(K) + l\left(\frac{R}{I\mathfrak{m}}\right) - l\left(\frac{R}{I}\right) - (d-1) + l\left(\frac{R}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - l\left(\frac{R}{I\mathfrak{m}}\right) \\ &= l(K) + l\left(\frac{I}{I\mathfrak{m}}\right) - (d-1) + l\left(\frac{I\mathfrak{m}}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) \\ &= l(K) + \mu(I) - d + 1 + l\left(\frac{I\mathfrak{m}}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) \geq \mu(I) - d + 1$$

□

Como consequência temos o resultado de Abhyankar mencionado no início deste capítulo:

Corolário 3.2. *Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local de Cohen-Macaulay com dimensão d . Então,*

$$e(\mathfrak{m}) \geq \mu(\mathfrak{m}) - d + 1$$

Demonstração. Colocando $I = \mathfrak{m}$ e usando o fato de $e_i(\mathfrak{m}|\mathfrak{m}) = e(\mathfrak{m})$ para todo i . □

3.1 Ideais de Multiplicidade Mista Minimal

Nesta seção caracterizaremos numericamente quando a fibra especial de um ideal \mathfrak{m} -primário, de um anel local (R, \mathfrak{m}) , de multiplicidade mista minimal é de Cohen-Macaulay. Esta caracterização foi feita por Jayanhtan, Puthenpurakal e Verma em [24] utilizando a Proposição 3.4 mostrada por D’Cruz, Raghavan e Verma no artigo: Fibra especial de Cohen-Macaulay, [11].

Antes de mostrar ambos os resultados, definimos multiplicidade mista minimal.

Definição 3.3. Um ideal \mathfrak{m} -primário I de um anel local de Cohen-Macaulay (R, \mathfrak{m}) é dito ter *multiplicidade mista minimal* se $e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) = \mu(I) - d + 1$.

Proposição 3.4. *Sejam (R, \mathfrak{m}) um anel local de Cohen-Macaulay d -dimensional, I um ideal \mathfrak{m} -primário com multiplicidade mista minimal e $a_1, \dots, a_{d-1} \in I$, $x \in \mathfrak{m}$ formam uma sequência regular. Então,*

$$\mathfrak{m}I^n = xI^n + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}I^{n-1}.$$

Demonstração. Basta provar que $\mathfrak{m}I = xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}$, pois

$$\mathfrak{m}I \cdot I^{n-1} = xI \cdot I^{n-1} + (a_1, \dots, a_{d-1}) \cdot I^{n-1}\mathfrak{m} \Rightarrow \mathfrak{m}I^n = xI^n + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}I^{n-1}.$$

Definimos a seguinte função:

$$f : \frac{R}{I} \oplus \left(\frac{R}{\mathfrak{m}} \right)^{d-1} \longrightarrow \frac{(x, a_1, \dots, a_{d-1})}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}$$

$$(\bar{y}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{d-1}) \longrightarrow xy + \sum_i a_i z_i$$

Aplicando a função comprimento, temos:

$$\begin{aligned}
l\left(\frac{R}{I}\right) + d - 1 &= l\left(\frac{(x, a_1, \dots, a_{d-1})}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) + l(K) \\
&= l\left(\frac{R}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - l\left(\frac{R}{(x, a_1, \dots, a_{d-1})}\right) + l(K)
\end{aligned}$$

$$d - 1 + l\left(\frac{R}{(x, a_1, \dots, a_{d-1})}\right) = l\left(\frac{R}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - l\left(\frac{R}{I}\right) + l(K).$$

Como R é um anel de Cohen-Macaulay e I tem multiplicidade mista minimal, segue que $l\left(\frac{R}{(x, a_1, \dots, a_{d-1})}\right) = e(\mathfrak{m}|I^{[d-1]}) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) = \mu(I) - d + 1$. Portanto,

$$\begin{aligned}
d - 1 + \mu(I) - d + 1 &= l\left(\frac{R}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - l\left(\frac{R}{I}\right) + l(K) \\
&= l\left(\frac{R}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - \left[l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I}\right) - l\left(\frac{I}{\mathfrak{m}I}\right)\right] + l(K) \\
&= l\left(\frac{R}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I}\right) + \mu(I) + l(K) \\
&= l\left(\frac{\mathfrak{m}I}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) + \mu(I) + l(K)
\end{aligned}$$

Assim,

$$l\left(\frac{\mathfrak{m}I}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) + l(K) = 0$$

Portanto, $\mathfrak{m}I = xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}$, como queríamos. \square

Este resultado que acabamos de mostrar será importante na caracterização da fibra especial em termos da multiplicidade mista minimal, o qual será visto no próximo teorema:

Teorema 3.5. *Sejam (R, \mathfrak{m}) um anel local de Cohen-Macaulay de dimensão d e I um ideal \mathfrak{m} -primário de multiplicidade mista minimal. Então, $F(I)$ é de Cohen-Macaulay se, e somente se, $r(I) \leq 1$.*

Demonstração. Tomamos J como sendo qualquer redução minimal de I . Então, pelo Teorema 2.2, $F(I)$ é Cohen-Macaulay se, e somente se, $f_0(I) = l\left(\frac{F(I)}{JF(I)}\right)$. Sendo

$$\frac{F(I)}{JF(I)} = \frac{R}{\mathfrak{m}} \oplus \frac{I}{J + \mathfrak{m}I} \oplus \left(\bigoplus_{n=2}^{\infty} \frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathfrak{m}I^n}\right)$$

temos que,

$$l\left(\frac{F(I)}{JF(I)}\right) = l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}}\right) + l\left(\frac{I}{J + \mathfrak{m}I}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathfrak{m}I^n}\right) \quad (3.1)$$

Sabemos que,

$$l\left(\frac{I}{J + \mathfrak{m}I}\right) = l\left(\frac{I}{\mathfrak{m}I}\right) - l\left(\frac{J + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}\right)$$

E que $\text{alt}(I) \leq \dim(F(I)) \leq \dim R$, porém $\text{alt}(I) = \text{alt}(\mathfrak{m}) = \dim R = d$, logo $\dim(F(I)) = d$.

Além disso, como J é uma redução minimal de I segue da Proposição 1.25 e do Teorema 1.26, que $J \cap \mathfrak{m}I = \mathfrak{m}J$ e $\mu(J) = d$. Assim,

$$l\left(\frac{J + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}\right) = l\left(\frac{J}{J \cap \mathfrak{m}I}\right) = l\left(\frac{J}{\mathfrak{m}J}\right) = d$$

Portanto,

$$l\left(\frac{I}{J + \mathfrak{m}I}\right) = \mu(I) - d$$

Substituindo em (3.1), temos que

$$l\left(\frac{F(I)}{JF(I)}\right) = 1 + \mu(I) - d + \sum_{n=2}^{\infty} l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathfrak{m}I^n}\right) \quad (3.2)$$

Por outro lado, pelo Teorema 1.43, para qualquer sequência Rees-superficial $(a_1, a_2, \dots, a_{d-1}, x)$, onde $a_1, a_2, \dots, a_{d-1} \in I$ e $x \in \mathfrak{m}$ temos

$$f_0(I) = e_{d-1}(m|I) - \lim_{n \rightarrow \infty} l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}I^{n-1}}\right)$$

Como foi dito no início da demonstração, $F(I)$ é de Cohen-Macaulay se, e somente se, $f_0(I) = l\left(\frac{F(I)}{JF(I)}\right)$. Por (3.2), $F(I)$ é Cohen-Macaulay se, e somente se,

$$\begin{aligned} f_0(I) &= 1 + \mu(I) - d + \sum_{n=2}^{\infty} l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + mI^n}\right) \\ &= e_{d-1}(m|I) - \lim_{n \rightarrow \infty} l\left(\frac{mI^n}{xI^n + (a_1, \dots, a_{d-1})mI^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.4, I tem multiplicidade mista minimal se, e somente se, $I^n \mathfrak{m} = xI^n + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}I^{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Isso nos oferece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l \left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}I^{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} l \left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{\mathfrak{m}I^n} \right) = 0.$$

Assim, $F(I)$ é Cohen-Macaulay se, e somente se,

$$e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) = \mu(I) - d + 1 + \sum_{n=2}^{\infty} l \left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathfrak{m}I^n} \right)$$

Novamente usando o fato de I ter multiplicidade mista minimal, concluímos que $\sum_{n=2}^{\infty} l \left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathfrak{m}I^n} \right) = 0$, pois $e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) = \mu(I) - d + 1$. Segue que, $l \left(\frac{I^2}{JI + \mathfrak{m}I^2} \right) = 0$, isto implica em $I^2 = JI + \mathfrak{m}I^2$, pelo lema de Nakayama, concluímos que $I^2 = JI$, ou seja, $r(I) \leq 1$. \square

3.2 Ideais de Multiplicidade Mista Quase Minimal

Nesta seção caracterizaremos numericamente quando a fibra especial de um ideal \mathfrak{m} -primário, de um anel local (R, \mathfrak{m}) , de multiplicidade mista quase minimal é de Cohen-Macaulay. Tal caracterização foi feita em [24] por Jayanhtan, Puthenpurakal e Verma.

Definição 3.6. Um ideal I \mathfrak{m} -primário de um anel local de Cohen-Macaulay (R, \mathfrak{m}) é dito ter *multiplicidade mista quase minimal* se $e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) = \mu(I) - d + 2$.

Para caracterizar as propriedades das fibras especiais em termos das multiplicidades mistas quase minimal precisaremos dos dois resultados seguintes, mostrados por D'Cruz e Verma em [9]:

Lema 3.7. *Seja (R, \mathfrak{m}) um anel local de Cohen-Macaulay com corpo residual infinito. Suponha que I é um ideal \mathfrak{m} -primário com multiplicidade mista quase minimal. Então para qualquer redução em família (x, a_1, \dots, a_{d-1}) de $(\mathfrak{m}|I^{d-1})$ tem-se*

$$l \left(\frac{\mathfrak{m}I}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}} \right) \leq 1.$$

Demonstração. Tomamos (a_1, \dots, a_{d-1}) uma redução em família de $(\mathfrak{m}|I^{d-1})$. E consideremos a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \frac{R}{I} \oplus \left(\frac{R}{\mathfrak{m}}\right)^{d-1} \xrightarrow{f} \frac{(x, a_1, \dots, a_{d-1})}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}} \longrightarrow 0,$$

onde f é definida por $f(\bar{y}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{d-1}) = xy + \sum_i a_i z_i$ e $K = \ker f$. Aplicando a função comprimento temos:

$$\begin{aligned} l\left(\frac{R}{I}\right) + d - 1 &= l\left(\frac{(x, a_1, \dots, a_{d-1})}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) + l(K) \\ &= l\left(\frac{R}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - l\left(\frac{R}{(x, a_1, \dots, a_{d-1})}\right) + l(K) \end{aligned}$$

$$d - 1 + l\left(\frac{R}{(x, a_1, \dots, a_{d-1})}\right) = l\left(\frac{R}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - l\left(\frac{R}{I}\right) + l(K)$$

Como R é um anel de Cohen-Macaulay e I tem multiplicidade mista quase minimal segue que $l\left(\frac{R}{(x, a_1, \dots, a_{d-1})}\right) = e(\mathfrak{m}|I^{d-1}) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) = \mu(I) - d + 2$. Portanto,

$$\begin{aligned} d - 1 + \mu(I) - d + 2 &= l\left(\frac{R}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - l\left(\frac{R}{I}\right) + l(K) \\ &= l\left(\frac{R}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - \left[l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I}\right) - l\left(\frac{I}{\mathfrak{m}I}\right)\right] + l(K) \\ &= l\left(\frac{R}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) - l\left(\frac{R}{\mathfrak{m}I}\right) + \mu(I) + l(K) \\ &= l\left(\frac{\mathfrak{m}I}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) + \mu(I) + l(K) \end{aligned}$$

Assim,

$$1 = l\left(\frac{\mathfrak{m}I}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) + l(K)$$

ou seja,

$$l\left(\frac{\mathfrak{m}I}{xI + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}}\right) \leq 1$$

□

Proposição 3.8. *Sejam (R, \mathfrak{m}) um anel local de Cohen-Macaulay de dimensão $d > 0$ e I um ideal \mathfrak{m} -primário de R com multiplicidade mista quase minimal. Então, para qualquer redução em família (x, a_1, \dots, a_{d-1}) de $(\mathfrak{m}|I^{d-1})$ tem-se para cada $n \geq 1$*

$$l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + (a_1, \dots, a_{d-1})\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) \leq 1.$$

Demonstração. Consideramos $J = (a_1, \dots, a_{d-1})$. Sendo I com multiplicidade mista quase minimal, temos pelo Lema 3.7 que

$$l\left(\frac{\mathfrak{m}I}{xI + J\mathfrak{m}}\right) \leq 1$$

Se $l\left(\frac{\mathfrak{m}I}{xI + J\mathfrak{m}}\right) = 0$, então $\mathfrak{m}I = xI + \mathfrak{m}J$ isto implica que $\mathfrak{m}I^n = xI^n + \mathfrak{m}JI^{n-1}$, daí

$$l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + \mathfrak{m}JI^{n-1}}\right) = 0$$

ou seja,

$$l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + \mathfrak{m}JI^{n-1}}\right) \leq 1$$

Se $l\left(\frac{\mathfrak{m}I}{xI + J\mathfrak{m}}\right) = 1$, logo existe $y \in \mathfrak{m}$ e $b \in I$ tal que $\mathfrak{m}I = xI + \mathfrak{m}J + (yb)$ e $\mathfrak{m}yb \subset J\mathfrak{m} + xI$.

Afirmção 3.9. *Para cada $n \geq 1$ tem-se $\mathfrak{m}I^n = J\mathfrak{m}I^{n-1} + xI^n + (yb^n)$*

De fato, o caso $n = 1$ resulta do Lema 3.7. Se $n > 1$, então pela hipótese indutiva temos,

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}I^n &= (\mathfrak{m}I^{n-1})I = (J\mathfrak{m}I^{n-2} + xI^{n-1} + (yb^{n-1}))I \\ &= J\mathfrak{m}I^{n-1} + xI^n + (yb^{n-1})I. \end{aligned}$$

Para concluirmos a afirmação basta mostrar que $(yb^{n-1})I \subseteq J\mathfrak{m}I^{n-1} + xI^n + (yb^n)$, pois $(yb^n) \subseteq yb^{n-1}I$.

Observe que $(yb^{n-1})I \subseteq b\mathfrak{m}I^{n-1} = b(J\mathfrak{m}I^{n-2} + xI^{n-1} + (yb^{n-1})) \subseteq J\mathfrak{m}I^{n-1} + xI^n + (yb^n)$. Isto conclui a afirmação.

Sendo $\mathfrak{m}(yb) \subseteq J\mathfrak{m} + xI$, temos

$$\mathfrak{m}(yb^n) = \mathfrak{m}(yb)(b^{n-1}) \subseteq (J\mathfrak{m} + xI)(b^{n-1}) \subseteq (J\mathfrak{m} + xI)I^{n-1} \subseteq J\mathfrak{m}I^{n-1} + xI^n$$

ou seja,

$$\mathfrak{m}(yb^n) \subseteq J\mathfrak{m}I^{n-1} + xI^n$$

Portanto,

$$l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + J\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) \leq 1$$

□

Agora vamos caracterizar quando a fibra especial é de Cohen-Macaulay de um ideal \mathfrak{m} -primário com multiplicidade mista quase minimal.

Teorema 3.10. *Sejam (R, \mathfrak{m}) um anel local de Cohen-Macaulay com corpo residual infinito e I um ideal \mathfrak{m} -primário de multiplicidade mista quase minimal. Então,*

1. Ou $f_0(I) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I)$ ou $f_0(I) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) - 1$
2. Seja $f_0(I) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I)$. Então, $F(I)$ é Cohen-Macaulay se, e somente se, $r(I) = 2$ e $l\left(\frac{I^2}{JI + \mathfrak{m}I^2}\right) = 1$.
3. Seja $f_0(I) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) - 1$. Então $F(I)$ é Cohen-Macaulay se, e somente se, $r(I) \leq 1$.

Demonstração. 1. Consideremos $a_1, \dots, a_{d-1} \in I, x \in \mathfrak{m}$ uma sequência regular em R que é Rees-superficial para $(I^{[d-1]}, \mathfrak{m}^{[1]})$, $L = (a_1, \dots, a_{d-1})$ e $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + L\mathfrak{m}I^{n-1}}\right)$. Como I tem multiplicidade mista quase minimal, pela Proposição 3.8, segue que para qualquer valor de n

$$l\left(\frac{\mathfrak{m}I^n}{xI^n + L\mathfrak{m}I^{n-1}}\right) \leq 1$$

Portanto, $\alpha = 0$ ou 1.

Pelo Teorema 1.43, $f_0(I) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) - \alpha$ assim, $f_0(I) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I)$ ou $f_0(I) = e_{d-1}(\mathfrak{m}|I) - 1$. Isto conclui a demonstração do primeiro item.

O fato seguinte será utilizado para demonstrar os itens restantes.

Parte da demonstração do Teorema 3.5 nos garante que $F(I)$ é Cohen-Macaulay se, e somente se,

$$f_0(I) = 1 + \mu(I) - d + \sum_{n=2}^{\infty} l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathfrak{m}I^n}\right)$$

Novamente a partir do Teorema 1.43 e do fato de I possuir multiplicidade mista quase minimal segue que $f_0(I) = e_{d-1}(\mathbf{m}|I) - \alpha = \mu(I) - d + 2 - \alpha$. Assim,

$$\mu(I) - d + 2 - \alpha = 1 + \mu(I) - d + \sum_{n=2}^{\infty} l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathbf{m}I^n}\right)$$

Logo,

$$\sum_{n=2}^{\infty} l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathbf{m}I^n}\right) = 1 - \alpha$$

ou seja,

$$F(I) \text{ é Cohen-Macaulay se, e somente se, } \sum_{n=2}^{\infty} l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathbf{m}I^n}\right) = 1 - \alpha \quad (3.3)$$

De posse deste resultado, podemos provar os próximos itens.

2. Por hipótese $f_0(I) = e_{d-1}(\mathbf{m}|I)$. Então, pelo item 1 segue que $\alpha = 0$. Assim por (3.3), $F(I)$ é Cohen-Macaulay se, e somente se,

$$\sum_{n=2}^{\infty} l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathbf{m}I^n}\right) = 1.$$

Mas, isto acontece se, e somente se, $l\left(\frac{I^2}{JI + \mathbf{m}I^2}\right) = 1$ e $l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathbf{m}I^n}\right) = 0$, para todo $n \geq 3$. Portanto, $I^3 = \mathbf{m}I^3 + JI^2$, isto é, $I^3 = JI^2$. Logo $F(I)$ é de Cohen-Macaulay se, e somente se, $r(I) = 2$ e $l\left(\frac{I^2}{JI + \mathbf{m}I^2}\right) = 1$.

3. Por hipótese $f_0(I) = e_{d-1}(\mathbf{m}|I) - 1$. Então pelo item 1 $\alpha = 1$.

Por (3.3),

$$F(I) \text{ é Cohen-Macaulay se, e somente se, } \sum_{n=2}^{\infty} l\left(\frac{I^n}{JI^{n-1} + \mathbf{m}I^n}\right) = 0$$

$$\text{se, e somente se, } l\left(\frac{I^2}{JI + \mathbf{m}I^2}\right) = 0 \text{ se, e somente se, } I^2 = \mathbf{m}I^2 + JI$$

$$\text{se, e somente se, } I^2 = JI \text{ se, e somente se, } r(I) \leq 1.$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] Abhyankar, S. *Local rings of high embedding dimension*, Amer. J. Math. **89**, (1967), 1073-1077.
- [2] Barile, M. e Morales, M., *On certain algebras of reduction number one*, Journal Algebra **206** No 1, (1998), 113-128.
- [3] Bruns, W. e Herzog, J., *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics. **39**, Cambridge University Press, (1996).
- [4] Corso, A., Guezzi, L., Polini, C., Ulrich, B. *Cohen-Macaulayness fiber cone rings*, In: Special Issue in Honor of Steven L. Kleiman, Commutative Algebra **31** No 8, (2003), 3713-3734.
- [5] Corso A., Polini, C. e Vasconcelos, W., *Multiplicity of the special fiber of blowups*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **140** No2, (2006), 207-219.
- [6] Cortadellas, T., *Fiber cones with almost maximal depth*, Comm. Algebra **33** No 3, (2005), 953-963.
- [7] Cortadellas, T. e Zarzuela, S., *On The Depth of the Fiber Cone of Filtrations*, Journal of Algebra. **198** No 2, (1997), 428-445.
- [8] Cortadellas, T. e Zarzuela, S., *On the Cohen-Macaulay property of the fiber cone of ideals with reduction number at most one*, In: Commutative Algebra, Algebraic Geometry, and Computacional Methods, Hanoi, (1996), Springer-Verlag, Singapore, (1999), 215-222.
- [9] D’Cruz, C. e Verma, J. K., *Hilbert Series of Fiber Cones of Ideals with Almost Minimal Mixed Multiplicity*, Journal of Algebra. **251** (2002), 98-109.

- [10] D’Cruz C. e Puthenpurakal, T., *The Hilbert Coefficients of the Fiber Cone and the a -Invariant of the Associated Graded Ring*, preprint, arXiv: math.AC/0601510, (2006).
- [11] D’Cruz, C., Raghavan, K. N. e Verma, J. K., *Cohen-Macaulay Fiber Cones*, Commutative Algebra, Algebraic Geometry and Computational Methods. Springer-Verlag, Singapore, (1999), 233-246.
- [12] Eisenbud e D., Mazur, B., *Evolutions, symbolic squares, and Fitting ideals*, J. Reine Angew. Math. **488**, (1997), 189- 201.
- [13] Gimenez, P., *Étude de la fibre spéciale de l’éclatement d’une variété monomiale en codimension deux*, Dissertation, Univ. of Grenoble, (1993).
- [14] Heinzer, W. e Kim, M., *Properties of the Fiber Cone of Ideals in Local Rings*, Comm. Algebra **31** No 7, (2003), 3529-3546.
- [15] Heinzer, W., Kim, M. e Ulrich, B., *The Gorenstein and complete intersection properties of associated graded rings*, J. Pure Appl. Algebra **201** 1-3, (2005), 264-283.
- [16] Hironaka, H., *Resolution of singularities*, Ann. of Math. **79**, (1964), 109-326.
- [17] Hübl, R., *Evolutions and valuations associated to an ideal*, J. Reine Angew. Math. **517**, (1999), 81-101.
- [18] Hübl, R. e Huneke, C., *Fiber cones and the integral closure of ideals*, Collect. Math. **52** No1, (2001), 85-100.
- [19] Hübl, R. e Swanson, I., *Normal cones of monomial primes*, Math. Comp. **72** (241), (2003), 459-475, (electronic).
- [20] Huckaba, S., *Reduction numbers for ideals of analytic spread one*, Journal Algebra **108** No 2, (1987), 503-512.
- [21] Huneke, C., e Sally, J., *Birational extensions in dimension two and integrally closed ideals*, Journal of Algebra. **115** No 2, (1998), 481-500.
- [22] Jayanthan, A. V. e Verma, J. K., *Hilbert Coefficients and Depth of Fiber Cones*, Journal of Pure and Applied Algebra. **201** (2005), 97-115.

- [23] Jayanthan, A.V. e Verma, J.K. *Fiber cones of ideals with almost minimal multiplicity*, Nagoya Math. J. **177**, (2005), 155-179.
- [24] Jayanthan, A. V., Puthenpurakal, T. J. e Verma, J. K., *On Fiber Cones of \mathfrak{m} -Primary Ideals*, Canadian Journal of Mathematics. **59** No 1 (2007), 109-126.
- [25] Matsumura, H., *Commutative Ring Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, (1986).
- [26] Morales, M. e Simis, A., *Symbolic of monomial curves in P^3 lying on a quadric surface*, Commutative Algebra. **20** No 4, (1992), 1109-1121.
- [27] Rees, D. *Generalizations of reductions and mixed multiplicities*, J. London Math. Soc. (2)**29** No 3, (1984), 397-414.
- [28] Rees, D. *a -transforms of local rings and a theorem on multiplicities of ideals*, Proc. Cambridge Philos Soc. **57**, (1961), 8-17.
- [29] Shah, K., *On the Cohen-Macaulayness of the fiber cone of an ideal*, Journal Algebra. **143** No 1, (1991), 156-172.
- [30] Shah, K., *On equimultiple ideals*, Math. Z. **215** No 1, (1994), 13-24.
- [31] Singh, B., *A numerical criterion for the permissibility of a blowing-up*, Compositio Math. **33**, (1976), 15-28.
- [32] Swanson, I. e Huneke, C., *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules*, Cambridge University Press, (2006).
- [33] Teissier, B., *Cicle évanescent, sections planes, et conditions de Whitney*, Soc. Math. France, Paris. In: Singularités à Cargèse, Astérisque **7-8** (1973), 285-362.
- [34] Viêt, D.Q., *On the Cohen-Macaulayness of fiber cones*, Proc Amer. Math. Soc. **136** No 12 (2008), 4185-4195.