Controlabilidade exata local para as trajetórias de um sistema não-linear acoplado

por

Diego Araujo de Souza

Orientador: Prof. Dr. Fágner Dias Araruna

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

setembro/2010

João Pessoa - PB

Controlabilidade exata local para as trajetórias de um sistema não-linear acoplado

por

Diego Araujo de Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, ccomo parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna (Presidente)
(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)

Prof. Dr. Enrique Fernández Cara
(Universidad de Sevilla - US)

Prof. Dr. Cícero Lopes Frota
(Universidade Estadual de Maringá - UEM)

Prof. Dr. Pablo Braz e Silva (Suplente)
(Universidade Federal de Pernambuco - UFPE)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Ficha Catalográfica

DE SOUZA, Diego Araujo.

Controlabilidade exata local para as trajetórias de um sistema não-linear acoplado.

Diego Araujo de Souza.

João Pessoa: UFPB/DM, 2010.

81 p. 29cm

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, DM.

I. Análise II. Título

Agradecimentos

- Aos meus Pais (Antonio e Antonia) e aos meus irmãos (Denis, Darielson e Daniele), por sempre acreditarem em mim, pelos incentivos e por todo o amor que temos compartido.

- Aos amigos que fiz na Universidade Federal do Piauí e que hoje em dia são parte de minha família: Felipe (Filipão), José Francisco (Zé), Maurício (Maurição) e Pitágoras (Pita).

- Ao professor Marcondes Rodrigues Clark que sempre foi excelente orientador, conselheiro, incentivador, um bom amigo e um exemplo a seguir.

- Ao professor Fágner Dias Araruna, por abrir as portas do mundo para mim, pela paciência, pela confiança e por apresentar temas bastante motivadores a todos os seus alunos.

- Ao professor Enrique Fernández Cara, pela excelente assistência dada durante o período que estive em Sevilha, no qual surgiu esse tema de dissertação e que tornou-se este trabalho. Muito obrigado!

- Aos amigos que me ajudaram matematicamente e na redação em latex deste trabalho. Muito obrigado Maurício, Felipe e Silvia!

- Aos amigos que fiz na Paraíba, pelos bons momentos que passamos ao longo dos dois anos que estivemos convivendo, em especial a: Disson, Elielson, Fágner e Roberto.

- Aos professores de graduação que tive na UFPI e pós-graduação da UFPB, que acreditando na minha dedicação e trabalho, incentivaram-me e sempre me ajudaram de alguma forma. Especialmente, aos professores: Barnabé Pessoa Lima, Daniel Marinho Pellegrino, Everaldo Souto de Medeiros, João Marcos Bezerra do Ó, Jurandir de Oliveira Lopes, Newton Luis Santos e Vicente de Paula Lima.

- À CAPES pelo apoio financeiro.

Dedicatória

À minha Família

e aos meus amigos.

Resumo

Esta dissertação é dedicada a provar a controlabilidade exata local às trajetórias para um sistema acoplado do tipo Boussinesq. No sistema estado, as variáveis desconhecidas são o campo velocidade e pressão do fuido $(\mathbf{y}, p)$, a temperatura θ e uma variável adicional c que pode ser vista como uma concentração de um soluto contaminante. A propriedade de controlabilidade nula desse sistema será obtida por meio de uma desigualdade de Carleman para um sistema apropriado e de um teorema de função inversa.

Palabras-Chave:

Sistema de Boussinesq, Controlabilidade, Desigualdade de Calerman.

Abstract

This dissertation is devoted to prove the local exact controllability to the trajectories for a coupled system, of the Boussinesq kind. In the state system, the unknowns are the velocity field and pressure of the fluid $(\mathbf{y}, p)$, the temperature θ and an additional variable c that can be viewed as the concentration of a contaminant solute. We prove several results, that essentially show that it is sufficient to act locally in space on the equations satisfied by θ and c. The controllability property of this system will be obtained by means of a Carleman inequality for apropriate system and of a inverse function theorem.

Key-words:

Boussinesq system, Controllability, Carleman inequality.

Sumário

Introdução **2**

1 Preliminares **5**

1.1 Funções testes e distribuições 5

1.2 Os espaços $L^p(\Omega)$ 7

1.3 Espaços de Sobolev 9

1.4 Espaços $C([0,T];X)$, $L^p(0,T;X)$ e $W^{m,p}(0,T;X)$ 12

1.5 Teoremas de representação e integração por partes 14

1.6 Um pouco sobre as equações do tipo Stokes 15

1.7 Desigualdade de Carleman 16

2 Controlabilidade exata local **19**

2.1 Formulação do problema 19

2.2 Estimativas de Carleman para o sistema (2.7) 22

2.3 Uma nova desigualdade de Carleman para o sistema adjunto 54

2.4 Controlabilidade nula 62

2.5 Controlabilidade exata às trajetórias 71

2.6 Comentários adicionais 74

Bibliografia **75**

Introdução

Ao longo desta dissertação, discutiremos alguns resultados relacionados à controlabilidade de um sistema do tipo Boussinesq. Do ponto de vista das aplicações, o sistema que apresentaremos pode ser interpretado como um modelo de escoamento de um fluido Newtoniano incompressível sofrendo efeitos térmicos e possuindo uma concentração (por exemplo, contaminante). Este modelo é descrito pelo seguinte sistema de EDP's:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_t - \Delta \mathbf{y} + (\mathbf{y}\cdot\nabla)\mathbf{y} + \nabla p = \mathbf{v}1_\omega + \theta\mathbf{e}_0 + c\,\overrightarrow{\mathbf{b}} & \text{em} \quad \Omega\times(0,T), \\ \nabla\cdot\mathbf{y} = 0 & \text{em} \quad \Omega\times(0,T), \\ \theta_t - \Delta\theta + \mathbf{y}\cdot\nabla\theta = w_1 1_\omega & \text{em} \quad \Omega\times(0,T), \\ c_t - \Delta c + \mathbf{y}\cdot\nabla c = w_2 1_\omega & \text{em} \quad \Omega\times(0,T), \\ \mathbf{y} = \mathbf{0},\ \theta = c = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega\times(0,T), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0,\ \theta(0) = \theta_0,\ c(0) = c_0 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

em que

- Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ou $N = 3$), interpretado como um recipiente por onde o fluido escoa;
- $\partial\Omega$ é a fronteira de Ω, interpretada como as "paredes"do recipiente;
- ω é um subdomínio de Ω onde irão atuar os controles (Região de controle);
- $T > 0$ representa o tempo final da observação do escoamento do fluido;
- As variáveis dependentes $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_N)$, p, θ e c representam, respectivamente, o campo de velocidade, a pressão do fluido, a temperatura do fluido e a concentração do soluto;

- $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_N)$, w_1 e w_2 representam as funções controles, interpretadas como densidades de forças externas;

- $\mathbf{e}_0$ representa vetor do $\mathbb{R}^N$ na direção da força gravitacional (no nosso caso, consideraremos a direção da força gravitacional sendo a do n-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^N$, o $\mathbf{e}_N$);

- $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ representa um vetor não nulo de $\mathbb{R}^N$.

A presença de uma equação de Navier-Stokes acoplada ao sistema (1) traz grandes dificuldades para obter resultados de controlabilidade para o sistema em questão (veja [21, 22]). Em vista disso, no próximo capítulo apresentaremos resultados interessantes obtidos para as equações de Navier-Stokes, os quais servirão para obtermos resultados semelhantes para o sistema (1).

Os resultados de controlabilidade das equações de Navier-Stokes tem sido o objetivo de intensas atividades de pesquisas nestes últimos anos. Uma das primeiras questões foi considerada por Jacques-Louis Lions no trabalho [36] apresentado durante as jornadas Hispano-Francesas, onde foi feita a seguinte conjectura relativa à controlabilidade aproximada das equações de Navier-Stokes:

> *Em um tempo finito, pode-se conduzir uma solução do sistema de Navier-Stokes de um dado estado inicial à uma vizinhança arbitrária de um dado estado final, por meio da ação de uma função controle.*

Esta conjectura gerou frutíferos trabalhos onde várias respostas parciais (positivas) foram fornecidas (veja as refências [5, 4, 6, 9] e [38]). Desdes trabalhos podemos destacar [5, 4] de Jean-Michel Coron. Nestes trabalhos, Coron provou a controlabilidade aproximada para a equação de Euler bidimensional. Daí, estendeu esse resultado para provar um resultado de controlabilidade aproximada para o sistema de Navier-Stokes bidimensional com condições de fronteira adequadas. Também nestes trabalhos, Coron prova um resultado de controlabilidade exata na fronteira para a equação de Euler. Posteriormente Olivier Glass, no trabalho [24], provou a controlabilidade aproximada para a equação de Euler tridimensional.

Nesta dissertação a principal ferramenta para obter resultados de controlabilidade será a desigualdade de Carleman cujo uso popularizou-se graças aos trabalhos de Fursikov Andrei Vladimirovich e Imanuvilov Oleg Yur'evich (veja [19], [30] e [28]). Com essa nova ferramenta, em [21], Fursikov e Imanuvilov provaram a controlabilidade exata local à trajetórias C^∞ do sistema de Navier-Stokes. Posteriormente, Enrique Fernández Cara, Sergio Guerrero, O. Yu. Imanuvilov e Jean-Pierre Puel, em [12], melhoraram este resultado provando o mesmo resultado para trajetórias L^∞. E em seguida, inspirado em [12, 21], Guerrero prova, em [26], a controlabilidade exata local à trajetórias do sistema de Boussinesq. E por último, usando os resultados dados em [12], Fernández-Cara, Guerrero, Imanuvilov e Puel provaram, sob algumas condições geométricas, a controlabilidade exata local para as trajetórias dos sistemas N-dimensionais de Navier-Stokes e Boussinesq com uma quantidade reduzida de controles escalares (veja [14]).

O Capítulo 1 contém alguns aspectos históricos da teoria do controle, notações, alguns resultados da análise funcional, da teoria das EDP's e de teoria do controle visando tornar a leitura da dissertação o mais auto-suficiente possível.

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo da controlabilidade exata local à trajetórias de (1). Primeiramente, provaremos uma desigualdade de Carleman e como consequência obteremos a controlabilidade nula para uma versão linear de (1). Daí, deduziremos os resultados a respeito da controlabilidade exata local à trajetórias por meio de um teorema da função inversa. Ao final, apresentaremos comentários muito interessantes e as questões que ainda estão em aberto.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos básicos e resultados relevantes da análise funcional, da teoria das equações diferenciais parciais e da teoria do controle, os quais poderão ser usados nos capítulos posteriores. Por serem de uso frequente, omitiremos as demonstrações, contudo, indicaremos as referências que as contém.

1.1 Funções testes e distribuições

Começamos esta seção introduzindo algumas terminologias e conceitos que serão usado ao longo deste capítulo.

Primeiramente, sejam Ω um subconjunto aberto não-vazio de $\mathbb{R}^N$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Seja $(K_i)_{i\in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos K_i de Ω tais que $u = 0$ quase sempre em K_i. Considerando o subconjunto aberto $K = \bigcup_{i\in I} K_i$ temos que $u = 0$ quase sempre em K. Assim, o suporte de u é definido como o subconjunto fechado

$$supp\ u := \Omega\backslash K,$$

e será denotado por *supp* u. Notemos que se u, além de mensurável, é contínua então *supp* u coincide com o fecho do conjunto $\{\ x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\ \}$.

A notação $w \subset\subset \Omega$ significa que $\overline{w}$ é um compacto de $\mathbb{R}^N$ contido em Ω, em que $\overline{w}$ é o fecho de w em $\mathbb{R}^N$.

O termo multi-índice denota uma N-upla

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$$

de inteiros não negativos α_i. A cada multi-índice α está associado um operador diferencial

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^{\alpha_N}$$

cuja ordem é

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N.$$

Uma função real u definida em Ω pertence a $C^\infty(\Omega)$ quando $D^\alpha u$ é contínua para todo multi-índice α. Representaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o subconjunto das funções de $C^\infty(\Omega)$ cujo suporte é um conjunto compacto de Ω. Com as operações usuais de soma de funções e de multiplicação por escalar, $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.

Se K é um subconjunto compacto de R^N, então D_K denota o espaço de todas $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ cujo suporte está em K. Se $K \subset \Omega$, então D_K pode ser identificado com um subespaço de $C_0^\infty(\Omega)$.

Agora apresentaremos uma noção de convergência para o espaço $C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.1.1. *Diz-se que uma sequência de funções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para u em $C_0^\infty(\Omega)$ se as seguintes condições forem satisfeitas:*

1. *Existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que supp $u \subset K$ e supp $u_n \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}$;*

2. *$D^\alpha u_n \to D^\alpha u$, uniformemente em K, para todo multi-índice α.*

Agora vamos definir uma topologia sobre $C_0^\infty(\Omega)$ cuja noção de convergência dessa topologia coincida com a noção de convergência dada na definição anterior.

Para isto, escolha conjuntos compactos K_i $(i = 1, 2, 3, ...)$ tais que K_i está no interior de K_{i+1} e $\Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$. Definamos as seminormas p_n sobre $C_0^\infty(\Omega)$, $n = 1, 2, 3, ...$, por

$$p_n(f) = max\{|D^\alpha f(\mathbf{x})|, \mathbf{x} \in K_n, |\alpha| \leq n\}.$$

Estas seminormas definem uma topologia localmente convexa metrizável sobre $C_0^\infty(\Omega)$ (ver p. 26 de [48]) cuja noção de convergência coincide com a noção da definição 1.1.1. O espaço espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com essa topologia será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e é chamado de *espaço das funções testes*.

Definição 1.1.2. *Um funcional linear sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínuo (com respeito a topologia descrita acima) é chamado de uma distribuição sobre Ω.*

O espaço de todas as distribuições sobre Ω é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Denota-se o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi \rangle$.

Considerando $\mathcal{D}'(\Omega)$ com a topologia fraca-* induzida por $\mathcal{D}(\Omega)$, temos a seguinte noção de convergência para $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definição 1.1.3. *Diz-se que uma sequência de distribuições* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *converge para* T *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *se a sequência numérica* $(\langle T_n, u\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergir para* $\langle T, u\rangle$ *em* $\mathbb{R}$ *para toda* $u \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.1.4. *Sejam* T *uma distribuição sobre* Ω *e* α *um multi-índice. Define-se a derivada* $D^\alpha T$ *(no sentido das distribuições) de ordem* α *da distribuição* T *como sendo o funcional definido por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 1.1.5.

1. *A definição acima nos diz que uma distribuição sobre* Ω *possui derivada de todas as ordens.*

2. *Se* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *então* $D^\alpha T$ *é uma distribuição sobre* Ω.

3. *A aplicação* $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, *tal que* $T \mapsto D^\alpha T$, *é linear e contínua (com respeito a topologia fraca-* de* $\mathcal{D}'(\Omega)$*).*

1.2 Os espaços $L^p(\Omega)$

Nesta dissertação, qualquer integração sobre qualquer aberto Euclidiano será entendida como uma integração no sentido de Lebesgue, bem como a mensurabilidade das funções envolvidas.

Definição 1.2.1. *Sejam* Ω *um conjunto aberto mensurável de* $\mathbb{R}^N$ *e* $1 \le p \le +\infty$. *Indicamos por* $L^p(\Omega)$ *o conjunto de todas as funções mensuráveis* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *tais que* $\|f\|_p < +\infty$, *em que*

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{p}} \ \textit{se } 1 \le p < +\infty,$$

e

$$\|f\|_\infty = \sup_{\mathbf{x}\in\Omega} ess\, |f(\mathbf{x})| = \inf\left\{C > 0; |f(\mathbf{x})| \le C, \ \textit{quase sempre em } \Omega\right\}.$$

Observação 1.2.2.

1. *Os espaços $L^p(\Omega)$ são espaços de Banach;*

2. *Quando $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno usual da integral. Em que, $(\cdot, \cdot)$ representa o produto interno em $L^2(\Omega)$ e $|\ \cdot\ |$ representaremos a norma associada;*

3. *$L^p(\Omega)$ é reflexivo, sempre que $1 < p < +\infty$.*

Agora definiremos o produto convolução de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ com uma função $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 1.2.3. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, with $1 \leq p \leq +\infty$. Então, para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$ a função $y \mapsto f(x-y)g(y)$ é integravél em $\mathbb{R}^N$ e definamos*

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}})g(\overline{\mathbf{x}})d\overline{\mathbf{x}}. \tag{1.1}$$

Além disso, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$$

Prova: Ver p. 66 de [3]. ■

A função $f * g$ é chamada de convolução de f e g.

Teorema 1.2.4. *Sejam $1 \leq p, q, r < +\infty$ tais que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ então $f * g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}.$$

Prova: Ver p. 19 de [31]. ■

Por meio das convoluções, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.2.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto qualquer. Então, $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < +\infty$.*

Prova: Ver p. 71 de [3]. ■

Agora definiremos o espaço das funções localmente integráveis.

Definição 1.2.6. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq p < +\infty$. Indicamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $f1_K \in L^p(\Omega)$, para todo compacto $K \subset \Omega$, em que 1_K representa a função característica de K.*

Notemos que para cada $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, o funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por:

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x},\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

define uma distribuição sobre Ω.

Lema 1.2.7 (Du Bois Raymond)**.** *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Tem-se que $T_u = 0$ se e só se $u = 0$ quase sempre em Ω.*

Prova: Ver p. 10 de [44]. ∎

Observação 1.2.8. *Como consequência do Lema 1.2.7, a aplicação*

$$\begin{aligned} \Psi : L^1_{loc}(\Omega) &\to \mathcal{D}'(\Omega) \\ u &\mapsto \Psi(u) = T_u \end{aligned}$$

é linear, contínua e injetiva. Em decorrência disso é comum identificar a distribuição T_u com a função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Nesse sentido tem-se que $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Desde que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, para todo $1 \leq p \leq \infty$, temos que todas as função de $L^p(\Omega)$ define uma distribuição sobre Ω, isto é, toda função de $L^p(\Omega)$ pode ser vista como uma distribuição. Assim, toda função de $L^p(\Omega)$ possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições.

1.3 Espaços de Sobolev

Definição 1.3.1. *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Define-se o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ como sendo o conjunto de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que para todo multi-índice α cuja ordem é menor ou igual que m tem-se que $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada distribucional de u de ordem α. Em síntese,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\ \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq m\}.$$

Para os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ definimos as seguintes normas

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^{\alpha}u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^{\alpha}u\|_{\infty}.$$

Observação 1.3.2.

1. *$\left(W^{m,p}(\Omega), \|.\|_{m,p}\right)$ é um espaço de Banach, para $1 \leq p \leq \infty$.*

2. *Quando $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ torna-se um espaço de Hilbert com o produto interno dado por*

$$(u,v)_{m,2} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^{\alpha}u, D^{\alpha}v), \text{ com } u, v \in W^{m,2}(\Omega).$$

E, usualmente, $W^{m,2}(\Omega)$ é representado por $H^m(\Omega)$.

Definição 1.3.3. *Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^{\infty}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.*

Observação 1.3.4.

1. *Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é representado por $H_0^m(\Omega)$.*

2. *Se $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ então o conjunto complementar de Ω em $\mathbb{R}^N$ possui medida de Lebesgue igual a zero.*

3. *$W_0^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) = W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.*

4. *O dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$ é denotado por $W^{-m,p'}(\Omega)$, em que p' é o conjugado de p (quando $p = 2$, $(H_0^m(\Omega))' = H^{-m}(\Omega)$).*

Teorema 1.3.5 (Desigualdade de Poincaré-Friedricks)**.** *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq p \leq \infty$, então existe uma constante $C(\Omega, p) > 0$ tal que*

$$\|u\|_p^2 \leq C \|\nabla u\|_p^2, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Prova: Ver p. 70 de [31]. ∎

A proposição a seguir é uma caracterização de $W^{-m,p'}(\Omega)$.

Proposição 1.3.6. *Seja f uma distribuição de Ω. Então, $f \in W^{-m,p'}(\Omega)$ se, e somente se, existem funções $f_\alpha \in L^p(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$, tais que*

$$f = \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha(f_\alpha).$$

Prova: Ver p. 31 de [44]. ■

Teorema 1.3.7 (Poincaré-Wirtinger)**.** *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira de classe C^1. Então existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $u \in W^{1,p}(\Omega),\ 1 \leq p \leq +\infty$,*

$$||u - \overline{u}||_p \leq C||\nabla u||_p,$$

em que

$$\overline{u} = \frac{1}{med(\Omega)} \int_\Omega u(x)dx$$

é a média de u sobre Ω.

Prova: Ver p. 88 de [31]. ■

Dados dois espaços de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$, dizemos que X está imerso continuamente em Y se $X \subset Y$ e existe uma constante $C > 0$ tal que $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$, para todo $x \in X$. Neste caso, escrevemos $X \hookrightarrow Y$. Diz-se que a imersão de X em Y é compacta quando cada sequência limitada em X é pré-compacta em Y, isto é, cada sequência limitada em X possui uma subsequência convergente em Y.

Agora, enuciaremos um dos teoremas importantes teoremas de compacidade no contexto de EDP's.

Teorema 1.3.8 (Rellich-Kondrachov)**.** *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto limitado de classe C^m. Então as seguintes imersões são compactas:*

1. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *com* $1 \leq q < \frac{Np}{N-mp}$, *se* $mp < N$;

2. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *com* $1 \leq q < +\infty$, *se* $mp = N$;

3. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$, *se* $mp > N$, *em que* k *é um inteiro não negativo e* $k < m - \frac{N}{p} \leq k + 1$.

Prova: Ver p. 84 [44]. ■

Teorema 1.3.9 (Teorema do Traço)**.** *Seja Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^N$ aberto e limitado cujo fronteira $\partial\Omega$, denotada por Γ, de classe C^{m+1}. Então, a aplicação* $\gamma : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *dada por*

$$\gamma(u) = (\gamma_0(u), \gamma_1(u), \ldots, \gamma_{m-1}(u)) = \left(u\big|_\Gamma, \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_\Gamma, \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial n^{m-1}}\bigg|_\Gamma \right), \ \forall \ u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}),$$

em que n é o vetor normal exterior a fronteira Γ, prolonga-se, por continuidade, a uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva de $H^m(\Omega)$ em $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *cujo núcleo é $H_0^m(\Omega)$.*

Prova: Ver p. 101 de [31]. ■

O prolongamento da aplicação γ é chamado de aplicação traço.

1.4 Espaços $C([0,T];X)$, $L^p(0,T;X)$ e $W^{m,p}(0,T;X)$

Dado um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$, denotaremos por $C([0,T];X)$ o espaço de Banach das funções contínuas $u : [0,T] \to X$. Definimos em tal espaço a norma

$$\|u\|_\infty = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X.$$

De forma análoga, denotaremos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < +\infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções $u : (0,T) \to X$ que são fortemente mensuráveis com $\|u(t)\|_X \in L^p(0,T)$. Nesse espaço, a norma é dada por

$$\|u\|_{p,X} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ representa-se o espaço de Banach de funções $u : (0,T) \to X$ mensuráveis e essencialmente limitadas em $(0,T)$, isto é,

$$\sup_{t\in(0,T)} ess \, \|u(t)\|_X < +\infty,$$

cuja norma é dada por

$$\|u(t)\|_{\infty,X} = \sup_{t\in(0,T)} ess \, \|u(t)\|_X .$$

Observação 1.4.1.

1. *Se X for reflexivo então $L^p(0,T;X)$, $1 < p < +\infty$, é reflexivo;*

2. *Se X é separável então podemos identificar*

$$[L^p(0,T;X)]' \approx L^q(0,T;X'),$$

onde $1 \leq p < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Agora, vamos apresentar alguns lemas de imersões entre esse espaços.

Lema 1.4.2. *Sejam X e Y dois espaços de Banach e suponhamos que $X \hookrightarrow Y$. Se $1 \leq s \leq r \leq +\infty$, então*

$$L^r(0,T;X) \hookrightarrow L^s(0,T;Y).$$

Prova: Ver p. 172 de [41]. ∎

Lema 1.4.3. *Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $u \in L^p(0,T;X)$ e $v \in L^q(0,T;X')$, então a função numérica $t \mapsto \langle v(t), u(t)\rangle_{X',X}$ está em $L^1(0,T)$.*

Prova: Ver p. 172 de [41]. ∎

Teorema 1.4.4. *Sejam X e Y espaços de Banach com $X \hookrightarrow Y$. Se $u \in L^p(0,T;X)$, com $u_t \in L^{p'}(0,T;Y)$, então $u \in C([0,T];Y)$.*

Prova: Ver p. 172 de [41]. ∎

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, com o produto interno $((\cdot,\cdot))_X$, o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$((u,v)) = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt, \text{ com } u,v \in L^2(0,T;X).$$

Indica-se por $\mathcal{D}'(0,T;X)$ o espaço das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$ com valores X, isto é, o espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X.

Se $u \in L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq +\infty$, então associa-se à u a distribuição vetorial T_u definida por

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt, \ \varphi \in \mathcal{D}(0,T),$$

em que a integral é tomada no sentido de Bochner em X. Demonstra-se que T_u é univocamente definida por u, e então, identificando u com T_u , pode-se dizer que

$$L^p(0,T;X) \subset \mathcal{D}'(0,T;X).$$

Definição 1.4.5. *Dada $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$, define-se a derivada de ordem n de S (no sentido das distribuições vetoriais) como sendo a distribuição vetorial dada por*

$$\left\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, podemos definir o seguinte espaço

$$W^{m,p}(0,T;X) = \left\{ u \in L^p(0,T;X); \frac{d^j u}{dt^j} \in L^p(0,T;X),\ j = 1, 2 \ldots, m \right\},$$

cuja a norma é dada por

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^{m} \left\| \frac{d^j u}{dt^j} \right\|_{L^p(0,T;X)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço $W^{m,p}(0,T;X)$, com a norma acima, é um espaço de Banach.

1.5 Teoremas de representação e integração por partes

Teorema 1.5.1 (Teorema de representação de Riesz-Fréchet)**.** *Seja H um espaço de Hilbert. Então, para todo $\phi \in H'$ existe um único $h \in H$*

$$\langle \phi, v \rangle = (h, v)_H,\ \forall v \in H.$$

Além disso, $||\phi||_{H'} = ||h||_H$.

Prova: Ver p. 81 de [3]. ∎

Teorema 1.5.2 (Lema de Lax-Milgram)**.** *Seja $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então, para todo $\phi \in H'$ existe um único $h \in H$ tal que*

$$a(h, v) = \langle \phi, v \rangle,\ \forall v \in H.$$

Prova: Ver p. 84 de [3]. ∎

Teorema 1.5.3 (Gauss-Green)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, limitado e com fronteira Γ de classe C^1. Suponha que $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então*

$$\int_\Omega u_{x_i} dx = \int_\Gamma u n_i dS \ (i = 1, \ldots, N).$$

Prova: Ver p. 629 de [8]. ∎

1.6 Um pouco sobre as equações do tipo Stokes

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados relacionados à existência, unicidade e regularidade de soluções de equações do tipo Stokes.

Quanto estivermos lidando com vetores de $\mathbb{R}^N$, funções vetoriais de $\mathbb{R}^N$ ou espaços de funções vetoriais de $\mathbb{R}^N$ usaremos letras em negrito para representá-los.

Introduzamos o seguintes espaços

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V} = \left\{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega);\ \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0 \text{ em } \Omega\right\};\\
&\mathbf{H} = \left\{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{L}^2(\Omega);\ \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0 \text{ em } \Omega \ e\ \boldsymbol{\varphi} \cdot n = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\right\};\\
&P = \left\{\pi \in L^2(\Omega);\ \int_\Omega \pi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0\right\}.
\end{aligned}$$

Primeiramente, apresentamos a seguinte sistema:

$$\begin{cases}
\mathbf{y}_t - \Delta\mathbf{y} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{em} & \Omega \times (0,T),\\
\nabla \cdot \mathbf{y} = 0 & \text{em} & \Omega \times (0,T),\\
\mathbf{y} = \mathbf{0} & \text{sobre} & \partial\Omega \times (0,T),\\
\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 & \text{em} & \Omega.
\end{cases} \tag{1.2}$$

Este sistema é conhecido como *sistema de Stokes*.

O próximo lema apresenta um resultado mostra que o sistema de Stokes está bem posto.

Lema 1.6.1. *Assumamos que* $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{V}$ *e* $\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{H})$. *Então, o sistema* (1.2) *possui uma única solução forte* $(\mathbf{y}, p)$, *isto é,*

- $\mathbf{y} \in L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega)) \cap C([0,T];\mathbf{V}),\ \mathbf{y}_t \in L^2(0,T;\mathbf{H})$;
- $p \in L^2(0,T;P \cap H^1(\Omega))$;
- $\mathbf{y}_t - \Delta\mathbf{y} + \nabla p = \mathbf{f}$ *e* $\nabla \cdot \mathbf{y} = 0$ *quase sempre em* $\Omega \times (0,T)$;
- $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$.

Além disso, existe uma constante $C > 0$, *dependendo apenas de* Ω, *tal que*

$$\|\mathbf{y}\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))} + \|\mathbf{y}_t\|_{\mathbf{L}^2(\Omega\times(0,T))} + \|p\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C\left(\|\mathbf{y}_0\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega\times(0,T))}\right).$$

Prova: Ver [51]. ■

Observação 1.6.2. *Se* $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{H}$ *e* $\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{H})$, *então o sistema* (1.2) *possui uma única solução fraca, isto é,*

- $\mathbf{y} \in L^\infty(0,T;\mathbf{V}) \cap C([0,T];\mathbf{H})$ *e* $\mathbf{y}_t \in L^2(0,T,\mathbf{V}')$;

- $p \in L^2(0,T;P)$;

- $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{y}(t),\mathbf{v}) + (\nabla\mathbf{y}(t),\nabla\mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t),\mathbf{v}),\ \forall\ \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *no sentido de* $D'(0,T)$;

- $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$.

Lema 1.6.3. *Sejam* $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{W}^{1,q_2}(\Omega) \cap \mathbf{H}$ *e* $\mathbf{f} \in L^{q_1}(0,T;\mathbf{L}^{q_2}(\Omega))$ *tal que* $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$, *onde* $1 < q_1, q_2 < +\infty$. *Então, a única solução* $(\mathbf{y}, p)$ *do sistema* (1.2) *satisfaz*

$$\mathbf{y} \in L^{q_1}(0,T;\mathbf{W}^{2,q_2}(\Omega)),\ \mathbf{y}_t \in L^{q_1}(0,T;\mathbf{L}^{q_2}(\Omega)),\ \nabla p \in L^{q_1}(0,T;\mathbf{L}^{q_2}(\Omega)).$$

Prova: Veja o Teorema 2.8 de [23]. ■

1.7 Desigualdade de Carleman

Nesta seção, serão apresentadas algumas *desigualdades do tipo Carleman* para algumas equações que serão usadas nesta desta dissertação.

Uma desigualdade de Carleman é uma estimativa L^2-ponderada contendo grandes parâmetros para uma solução de uma equação diferencial parcial.

Primeiramente, apresentaremos um resultado de existência de uma determinada função necessária nas desigualdades de Carleman descritas abaixo. Assim, temos o seguinte resultado:

Lema 1.7.1. *Seja* ω_0 *um aberto não-vazio de* $\mathbb{R}^N$, *com* $\omega_0 \subset\subset \Omega$. *Então, existe uma função* $\eta^0 \in C^2(\overline{\Omega})$ *tal que*

- $\eta^0(\mathbf{x}) > 0,\ \forall\ \mathbf{x} \in \Omega$;

- $\eta^0 \equiv 0$ *sobre* $\partial\Omega$;

- $|\nabla\eta^0(\mathbf{x})| > 0,\ \forall\ \mathbf{x} \in \overline{\Omega - \omega_0}$.

Prova: Veja p. 4 de [19]. ■

Com essa função η^0 podemos definir as seguintes funções peso que serão usadas nas desigualdades de Carleman. Para certos números reais positivos s e λ, definamos

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{x},t) &= \frac{e^{5/4\lambda m\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda\left(m\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(\mathbf{x})\right)}}{t^4(T-t)^4}, \\ \xi(\mathbf{x},t) &= \frac{e^{\lambda\left(m\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(\mathbf{x})\right)}}{t^4(T-t)^4}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

em que $m > 4$ é um número real fixo. Note que a condição $m > 4$ torna o peso α positivo.

Graças a esta escolha dos pesos podemos encontrar a seguinte desigualdade de Carleman:

Lema 1.7.2. *[Desigualdade de Carleman para a equação do calor] Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de classe C^2, ω um subconjunto aberto não-vazio contido em Ω e $T > 0$. Seja ω_0 tal que $\omega_0 \subset\subset \omega \subset \Omega$ e considere a função η^0, associada a ω_0, garantida pelo Lema* 1.7.1. *Então, existem constantes positivas $\lambda_1 = C(\Omega,\omega) \geq 1$, $s_1 = C(\Omega,\omega)(T^7 + T^8)$ e $C_1(\Omega,\omega) > 0$ tais que, para todo $\lambda \geq \lambda_1$ e todo $s \geq s_1$, a seguinte desigualdade vale:*

$$\begin{aligned} & s^{-1}\int_{\Omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^{-1}\left(|\varphi_t|^2 + |\Delta\varphi|^2\right)dxdt \\ & + s\lambda^2\int_{\Omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\varphi|^2dxdt + s^3\lambda^4\int_{\Omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2dxdt \\ & \leq C_1\left(\int_{\Omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}|\varphi_t + \Delta\varphi|^2dxdt + s^3\lambda^4\int_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\varphi|^2dxdt\right), \end{aligned}$$

em que $\varphi \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$ com $\varphi = 0$ sobre $\partial\Omega \times (0,T)$.

Prova: Ver [13]. ■

Observação 1.7.3. *Usando argumentos de densidade podemos garantir que a solução do problema adjunto da equação do calor, com dado inicial em $L^2(\Omega)$, verifica esta desigualdade.*

O próximo resultado será uma desigualdade do tipo Carleman para a solução de uma equação elíptica de segunda ordem geral com lado direito em $H^{-1}(\Omega)$ e com condição de fronteira de Dirichlet em $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, em que Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira Γ de classe C^2.

Sejam $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ e $f,\ f_i \in L^2(\Omega)$ para todo $i = 1, ldots, N$. Seja π uma solução da equação elíptico:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{N} \left(b_j \frac{\partial \pi}{\partial x_i} + \frac{\partial (c_i \pi)}{\partial x_i} \right) + d\,\pi = f + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} & \text{em} \quad \Omega \\ \pi = g & \text{sobre} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{1.4}$$

em que, $a_{ij} \in C^2(\overline{\Omega}),\ b_i,\ c_i,\ d \in L^\infty(\Omega)$ para $i,\ j = 1, \ldots, N$ e os a_{ij} verificam

$$\exists\ \beta > 0,\ \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\mathbf{x}) \xi_i \xi_j \geq \beta |\xi|^2,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\ \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Seja ω_1 um subconjunto aberto não vazio de Ω e η^0 a função dada pelo Lema 1.7.1, com $\omega_0 \subset\subset \omega_1$. Considere a função peso $\eta(\mathbf{x}) = e^{\lambda \eta^0(\mathbf{x})}$, em que $\lambda \geq 1$ é um parâmetro escolhido depois como um número suficientemente grande. Assim, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.7.4. *Assumindo as hipóteses acima, seja $\pi \in H^1(\Omega)$ uma solução de (1.4). Então, existem parâmetros $\hat{\lambda} > 1$, $\hat{\sigma} > 1$ e uma constante $C > 0$ (independente de λ e σ) tais que*

$$\int_\Omega |\nabla \pi|^2 e^{2\sigma\eta} d\mathbf{x} + \sigma^2 \lambda^2 \int_\Omega \eta^2 |\pi|^2 e^{2\sigma\eta} d\mathbf{x} \leq C \left(\sigma^{1/2} e^{2\sigma} \|g\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + \frac{1}{\sigma \lambda^2} \int_\Omega \frac{|f|^2}{\eta} e^{2\sigma\eta} d\mathbf{x} \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{N} \sigma \int_\Omega |f_j|^2 \eta e^{2\sigma\eta} d\mathbf{x} + \int_{\omega_1} (|\nabla \pi|^2 + \sigma^2 \lambda^2 \eta^2 |\pi|^2) e^{2\sigma\eta} d\mathbf{x} \right),$$

$\forall\ \lambda \geq \hat{\lambda}$ e $\forall\ \sigma \geq \hat{\sigma}$.

Prova: Veja [29]. ■

Terminaremos este capítulo enunciando um teorema de função inversa utilizado frequentemente na resolução de problemas de controle:

Teorema 1.7.5. *Sejam E e G dois espaços de Banach e seja $\mathcal{A} : E \to G$ tal que $\mathcal{A} \in C^1(E; G)$. Assumindo que $e_0 \in E$, $\mathcal{A}(e_0) = h_0$ e $\mathcal{A}'(e_0) : E \to G$ é sobrejetiva. Então existe $\delta > 0$ tal que, para todo $h \in G$ satisfazendo $\|h - h_0\|_G < \delta$, existe uma solução da equação*

$$\mathcal{A}(e) = h, \quad e \in E.$$

Prova: Ver [1]. ■

Capítulo 2

Controlabilidade exata local

Neste capítulo, apresentaremos um resultado sobre a controlabilidade exata local à trajetórias para um sistema do tipo Boussinesq com controles distribuídos em subconjuntos abertos de diâmetro pequeno. Em um primeiro passo, demonstraremos uma nova desigualdade do tipo Carleman para um sistema adjunto associado ao sistema em questão. Em seguida, obteremos um resultado sobre a controlabilidade nula para um sistema linearizado em qualquer tempo $T > 0$. Ao final, graças a um teorema da função inversa, deduziremos o resultado a respeito da controlabilidade exata local à trajetórias.

2.1 Formulação do problema

Sejam Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ou $N = 3$) cuja fronteira, $\partial\Omega$, é de classe C^2 e $T > 0$. Seja ω um subconjunto não-vazio aberto de Ω. Usaremos as notações $Q = \Omega \times (0, T)$ e $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$. representaremos por $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ o vetor normal unitário exterior a Ω no ponto $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Denotaremos por C as várias constantes positivas (usualmente dependendo somente de Ω e ω).

Estamos interessados em obter resultados de controle para o sistema (1). Vamos demonstrar que, sobre algumas condições geométricas, o sistema (1) poderá ser controlado com N controles escalares em $L^2(\omega \times (0, T))$, ou seja, vamos impor uma condição geométrica sobre o subconjunto ω que diminui de $N + 2$ à N o número de controles escalares necessários para controlar o sistema (1).

Devemos impor algumas condições sobre a regularidade dos dados. Para este propósito, introduzimos o seguinte espaço:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{H}, \text{ se } N = 2, \\ \mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{H}, \text{ se } N = 3. \end{cases}$$

Agora podemos estabelecer o conceito de controlabilidade exata local à trajetórias do sistema (1). Primeiramente, definiremos uma trajetória do sistema (1).

Definição 2.1.1. *Uma trajetória para o sistema* (1) *é uma solução fraca* $(\overline{\mathbf{y}}, \overline{p}, \overline{\theta}, \overline{c})$ *do sistema* (1) *com controles nulos, ou seja, é uma solução do sistema*

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{y}}_t - \Delta\overline{\mathbf{y}} + (\overline{\mathbf{y}}\cdot\nabla)\overline{\mathbf{y}} + \nabla\overline{p} = \overline{\theta}e_N + \overline{c}\,\overrightarrow{b}, \ \nabla\cdot\overline{\mathbf{y}} = 0 & em & Q, \\ \overline{\theta}_t - \Delta\overline{\theta} + \overline{\mathbf{y}}\cdot\nabla\overline{\theta} = 0 & em & Q, \\ \overline{c}_t - \Delta\overline{c} + \overline{\mathbf{y}}\cdot\nabla\overline{c} = 0 & em & Q, \\ \overline{\mathbf{y}} = \mathbf{0}, \ \overline{\theta} = \overline{c} = 0 & sobre & \Sigma, \\ \overline{\mathbf{y}}(0) = \overline{\mathbf{y}}_0, \ \overline{\theta}(0) = \overline{\theta}_0, \ \overline{c}(0) = \overline{c}_0 & em & \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

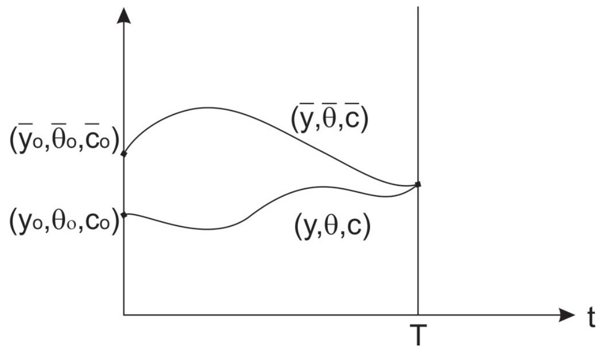
com $\overline{\mathbf{y}}_0 \in \mathbf{H}$ *e* $\overline{\theta}_0$, $\overline{c}_0 \in L^2(\Omega)$.

Definição 2.1.2. *Seja* $(\overline{\mathbf{y}}, \overline{p}, \overline{\theta}, \overline{c})$ *uma trajetória do sistema* (1). *Dizemos que o sistema* (1) *é exatamente controlável à trajetória* $(\overline{\mathbf{y}}, \overline{p}, \overline{\theta}, \overline{c})$ *quando existem controles escalares* $\mathbf{v}$, w_1, w_2 *em* $L^2(\mathcal{O}\times(0,T))$ $(\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_N))$ *tais que, toda solução de* (1), *satisfaça*

$$y(T) = \overline{\mathbf{y}}(T), \ \theta(T) = \overline{\theta}(T) \ e \ c(T) = \overline{c}(T). \tag{2.2}$$

Quando esta propriedade é válida para todas as trajetórias de (1), *dizemos que o sistema* (1) *tem a propriedade de controlabilidade exata à trajetórias.*

Aqui temos um esboço ilustrando como a solução $(\mathbf{y}, p, \theta, c)$ é dirigida à trajetória $(\overline{\mathbf{y}}, \overline{p}, \overline{\theta}, \overline{c})$ no tempo T.



Para obtermos a controlabilidade local para as trajetórias do sistema (1) com N controles escalares deveremos impor algumas hipóteses sobre o subconjunto ω e sobre as trajetórias. Assumiremos que existe $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$ e $\varepsilon > 0$ tal que $n_k(\mathbf{x}_0) \neq 0$ para algum $k < N$, e ainda,

$$\overline{\omega} \cap \partial\Omega \ \supset \ B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \cap \partial\Omega, \tag{2.3}$$

em que $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ é a bola centrada em $\mathbf{x}_0$ de raio ε e $n_k(\mathbf{x}_0)$ é a k-ésima coordenada de $\mathbf{n}$ no ponto $\mathbf{x}_0$.

Antes de enunciar o principal resultado desta dissertação, impomos algumas hipóteses sobre a trajetória:

$$\overline{\mathbf{y}} \in \mathbf{L}^\infty(Q),\ \overline{\mathbf{y}}_t \in L^2\big(0,T;\mathbf{L}^\kappa(\Omega)\big),\ \text{ em que } \begin{cases} \kappa > \frac{6}{5},\ \text{se } N = 3, \\ \kappa > 1,\ \text{se } N = 2 \end{cases} \tag{2.4}$$

e

$$\overline{\theta},\ \overline{c} \in L^\infty(Q),\ \overline{\theta}_t,\ \overline{c}_t \in L^2\left(0,T;L^\kappa(\Omega)\right),\ \text{em que } \begin{cases} \kappa > \frac{6}{5},\ \text{se } N = 3, \\ \kappa > 1,\ \text{se } N = 2. \end{cases} \tag{2.5}$$

Teorema 2.1.3. *Seja* $(\overline{\mathbf{y}},\overline{p},\overline{\theta},\overline{c})$ *uma trajetória de* (1) *satisfazendo as condições* (2.4) *e* (2.5)*. Então, para cada* $T > 0$*, existe uma constante* $\delta > 0$ *tal que, para qualquer* $(\mathbf{y}_0,\theta_0,c_0) \in \mathbf{E} \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *satisfazendo*

$$\|(\mathbf{y}_0,\theta_0,c_0) - (\overline{\mathbf{y}}_0,\overline{\theta}_0,\overline{c}_0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq \delta,$$

o sistema (1) *é exatamente controlável à trajetória* $(\overline{\mathbf{y}},\overline{p},\overline{\theta},\overline{c})$*. Além disso, se supormos que o subconjunto* $\omega \subset \Omega$ *satisfaz* (2.3)*, o resultado segue valendo com os controles* $\mathbf{v}$*,* w_1 *e* w_2 *tais que* $v_k = v_N = 0$*.*

Para provar este resultado, primeiramente trasformaremos o problema de controlabilidade exata local à trajetórias para o sistema (1) em um problema de controlabilidade nula local para um sistema equivalente. Em seguida, a partir deste sistema, definiremos uma aplicação e então, a tarefa será verificar que esta aplicação satisfaz as hipóteses do Teorema 1.7.5. Veremos que para obter uma determinada hipótese do Teorema 1.7.5 será suficiente provarmos um resultado de controlabilidade nula para a seguinte linearização do sistema (1) em torno da trajetória $(\overline{\mathbf{y}}, \overline{p}, \overline{\theta}, \overline{c})$:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_t - \Delta\mathbf{y} + (\mathbf{y}\cdot\nabla)\overline{\mathbf{y}} + (\overline{\mathbf{y}}\cdot\nabla)\mathbf{y} + \nabla p = \mathbf{F} + \mathbf{v}1_\omega + \theta\mathbf{e}_N + c\overrightarrow{\mathbf{b}} & \text{em} \quad Q, \\ \nabla\cdot\mathbf{y} = 0 & \text{em} \quad Q, \\ \theta_t - \Delta\theta + \overline{\mathbf{y}}\cdot\nabla\theta + \mathbf{y}\cdot\nabla\overline{\theta} = f_1 + w_1 1_\omega & \text{em} \quad Q, \\ c_t - \Delta c + \overline{\mathbf{y}}\cdot\nabla c + \mathbf{y}\cdot\nabla\overline{c} = f_2 + w_2 1_\omega & \text{em} \quad Q, \\ \mathbf{y} = \mathbf{0},\ \theta = c = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0,\ \theta(0) = \theta_0,\ c(0) = c_0 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

em que $F_i,\ f_1$ e f_2 são funções apropriadas que decaem exponencialmente a zero quando $t \to T^-$.

Provar o resultado de controlabilidade nula para o sistema (2.6) reduz-se a obtermos uma desigualdade de Carleman para o sistema adjunto de (2.6):

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\varphi}_t - \Delta\boldsymbol{\varphi} - D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}} + \nabla\pi = \mathbf{G} + \overline{\theta}\nabla\psi + \overline{c}\nabla\zeta & \text{em} \quad Q, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{\varphi} = 0 & \text{em} \quad Q, \\ -\psi_t - \Delta\psi - \overline{\mathbf{y}}\cdot\nabla\psi = g_1 + \boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{e}_N & \text{em} \quad Q, \\ -\zeta_t - \Delta\zeta - \overline{\mathbf{y}}\cdot\nabla\zeta = g_2 + \boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}} & \text{em} \quad Q, \\ \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0},\ \psi = \zeta = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \boldsymbol{\varphi}(T) = \boldsymbol{\varphi}_0,\ \psi(T) = \psi_0,\ \zeta(T) = \zeta_0 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.7}$$

em que $D\boldsymbol{\varphi}$ é o gradiente simétrico ($D\boldsymbol{\varphi} = \nabla\boldsymbol{\varphi} + (\nabla\boldsymbol{\varphi})^{tr}$) e $G_i,\ g_1,\ g_2 \in L^2(Q)$.

2.2 Estimativas de Carleman para o sistema (2.7)

Nesta seção iremos obter uma desigualdade de Carleman para o sistema adjunto (2.7), em que $\mathbf{G}_i,\ g_1$ e g_2 serão funções em $L^2(Q)$. Antes de apresentarmos essa desigualdade de Carleman, introduzimos algumas funções peso:

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}(t) &= \min_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{5/4\lambda m\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda(m+1)\|\eta^0\|_\infty}}{t^4(T-t)^4}, \\ \alpha^*(t) &= \max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{5/4\lambda m\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda m\|\eta^0\|_\infty}}{t^4(T-t)^4}, \\ \hat{\xi}(t) &= \min_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \xi(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{\lambda m\|\eta^0\|_\infty}}{t^4(T-t)^4}, \\ \xi^*(t) &= \max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} \xi(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{\lambda(m+1)\|\eta^0\|_\infty}}{t^4(T-t)^4}, \\ \hat{\mu}(t) &= s\lambda e^{-s\hat{\alpha}}\xi^*, \quad \mu(t) = s^{15/4}e^{-2s\hat{\alpha}+s\alpha^*}\xi^{*15/4}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

em que s e λ reais positivos, α e ξ foram definidas em (1.3), $m > 4$ é um número real fixo e $\eta^0 \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma função dada pelo Lema 1.7.1, com $\omega_0 \subset\subset \omega$.

Ao longo desta dissertação usaremos as seguintes notações:

$$\begin{aligned} I(s,\lambda;f) = s^{-1} &\int_Q e^{-2s\alpha}\xi^{-1}\left(|f_t|^2 + |\Delta f|^2\right) d\mathbf{x}dt \\ &+ s\lambda^2 \int_Q e^{-2s\alpha}\xi|\nabla f|^2 dxdt + s^3\lambda^4 \int_Q e^{-2s\alpha}\xi^3|f|^2 d\mathbf{x}dt \\ I(f,g,h) = I(s,\lambda;f) &+ I(s,\lambda;g) + I(s,\lambda;h), \end{aligned}$$

em que $f,\ g,\ h : Q \to \mathbb{R}$ são funções em que as integrais acima fazem sentido.

A desigualdade de Carleman citada acima é estabelecida pelo seguinte resultado:

Teorema 2.2.1. *Suponhamos que a trajetória* $(\overline{\mathbf{y}},\ \overline{p},\ \overline{\theta},\ \overline{c})$ *do sistema* (1) *satisfaz as condições* (2.4) *e* (2.5). *Então existem três constantes positivas* $\hat{s},\ \hat{\lambda},\ \widehat{C}$*, dependendo somente de* ω *e* Ω*, tais que, para todo* $(\boldsymbol{\varphi}_0, \psi_0, \zeta_0) \in \mathbf{H} \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *e* $(\mathbf{G}, g_1, g_2) \in \mathbf{L}^2(Q) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$*, a solução* $(\boldsymbol{\varphi},\ \pi,\ \psi,\ \zeta)$ *de* (2.7) *verifica*

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{\varphi},\psi,\zeta) \le \widetilde{C}\Bigg(&s^{15/2}\lambda^{24}\int_Q e^{-4s\hat{\alpha}+2s\alpha^*}\xi^{*15/2}(|\mathbf{G}|^2 + |g_1|^2 + |g_2|^2)d\mathbf{x}dt \\ &+ s^{16}\lambda^{48}\int_{\omega\times(0,T)} e^{-8s\hat{\alpha}+6s\alpha^*}\xi^{*16}(|\boldsymbol{\varphi}|^2 + |\psi|^2 + |\zeta|^2)d\mathbf{x}dt\Bigg), \end{aligned} \tag{2.9}$$

para $\widetilde{C} = \widehat{C}(1+T^2)$*, para todo* $s \ge \hat{s}(T^4 + T^8)$ *e*

$$\begin{aligned} \lambda \ \ge \ \hat{\lambda}\Big(&1 + \|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty + \|\overline{\theta}\|_\infty + \|\overline{c}\|_\infty + \|\overline{\mathbf{y}}_t\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^\kappa(\Omega))} + \|\overline{\theta}_t\|^2_{L^2(0,T;L^\kappa(\Omega))} \\ &+ \|\overline{c}_t\|^2_{L^2(0,T;L^\kappa(\Omega))} + \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^{1/2} + e^{\hat{\lambda}T\left(1+\|\overline{\mathbf{y}}\|^2_\infty + \|\overline{\theta}\|^2_\infty + \|\overline{c}\|^2_\infty\right)}\Big). \end{aligned}$$

Prova: Para compreendermos melhor, a prova será dividida em algumas etapas visando a eliminação de um termo que envolverá a pressão.

Etapa 1. Estimativas de Carleman para as equações do calor

Primeiramente, vamos olhar a primeira equação do sistema (2.7) da seguinte forma

$$-\boldsymbol{\varphi}_t - \Delta\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{G} + \overline{\theta}\nabla\psi + \overline{c}\nabla\zeta + D\varphi\overline{\mathbf{y}} - \nabla\pi.$$

Assim, podemos aplicar a desigualdade de Carleman para a equação do calor, dada no Lema 1.7.2, à equação satisfeita $\boldsymbol{\varphi}$. Daí, temos que existem constantes

$C = C(\Omega, \omega)$, $\lambda_0 \geq 1$ e $s_0 > 0$ tais que

$$
\begin{aligned}
I(s, \lambda; \boldsymbol{\varphi}) \leq C \Bigg(\int_Q & e^{-2s\alpha} \left(|D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}}|^2 + |\nabla \pi|^2 + |\mathbf{G}|^2 + |\overline{\theta} \nabla \psi|^2 + |\overline{c} \nabla \zeta|^2 \right) d\mathbf{x}dt \\
&+ s^3 \lambda^4 \int_{\omega \times (0,T)} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt \Bigg),
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

para todo $s \geq s_0(T^7 + T^8)$ e todo $\lambda \geq \lambda_0$.

Observemos que, em virtude da definição de ξ (veja (1.3)), temos que

$$
\xi^{-1} \leq CT^8, \tag{2.11}
$$

para algum $C > 0$, independente de λ.

Assim, podemos eliminar o termo envolvendo $D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}}$ no lado direito de (2.10). Para $s \geq s_1 T^8$ e $\lambda \geq \lambda_1 \|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty$, com $s_1 > 0$ e $\lambda_1 \geq \sqrt{\frac{8C^2}{s_1}}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
C|D\varphi\overline{\mathbf{y}}|^2 = C \left(\sum_{i=1}^{N} (\nabla \varphi_i \cdot \overline{\mathbf{y}} + \partial_i \boldsymbol{\varphi} \cdot \overline{\mathbf{y}})^2 \right) &\leq 4C \|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty^2 |\nabla \boldsymbol{\varphi}|^2 \\
&= \frac{4C}{s_1 T^8} s_1 T^8 \|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty^2 |\nabla \boldsymbol{\varphi}|^2 \leq \frac{4C^2}{s_1} \frac{1}{CT^8} s \|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty^2 |\nabla \boldsymbol{\varphi}|^2 \\
&\leq \frac{4C^2}{s_1} \xi s \|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty^2 |\nabla \boldsymbol{\varphi}|^2 \leq \frac{1}{2} \lambda^2 s \xi |\nabla \boldsymbol{\varphi}|^2.
\end{aligned}
$$

Combinando a desigualdade anterior e o termo envolvendo $D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}}$ no lado direito de (2.10), obtemos um termo que será absorvido pelo termo com $s\lambda^2$ que aparece na expressão de $I(s, \lambda; \boldsymbol{\varphi})$. Assim, deduzimos facilmente de (2.10) que

$$
\begin{aligned}
I(s, \lambda; \varphi) \leq C \Bigg(& \int_Q e^{-2s\alpha} |\nabla \pi|^2 d\mathbf{x}dt + \int_Q e^{-2s\alpha} |\mathbf{G}|^2 d\mathbf{x}dt \\
&+ \|\overline{\theta}\|_\infty^2 \int_Q e^{-2s\alpha} |\nabla \psi|^2 d\mathbf{x}dt + \|\overline{c}\|_\infty^2 \int_Q e^{-2s\alpha} |\nabla \zeta|^2 d\mathbf{x}dt \\
&+ s^3 \lambda^4 \int_{\omega \times (0,T)} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt \Bigg),
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

para todo $s \geq s_2(T^7 + T^8)$ e para todo $\lambda \geq \lambda_2(1 + ||\overline{\mathbf{y}}||_\infty)$.

Análogamente podemos aplicar o Lema 1.7.2 às equações satisfeitas por ψ e ζ, daí encontramos

$$
\begin{aligned}
I(s, \lambda; \psi) \leq C \Bigg(& \|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty^2 \int_Q e^{-2s\alpha} |\nabla \psi|^2 d\mathbf{x}dt + \int_Q e^{-2s\alpha} |\varphi_N|^2 d\mathbf{x}dt \\
&+ \int_Q e^{-2s\alpha} |g_1|^2 d\mathbf{x}dt + s^3 \lambda^4 \int_{\omega \times (0,T)} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\psi|^2 d\mathbf{x}dt \Bigg)
\end{aligned}
$$

e

$$I(s,\lambda;\zeta) \leq C\left(\|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty^2 \int_Q e^{-2s\alpha}|\nabla\zeta|^2 d\mathbf{x}dt + \int_Q e^{-2s\alpha}|\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}|^2 d\mathbf{x}dt \right.$$
$$\left. + \int_Q e^{-2s\alpha}|g_2|^2 d\mathbf{x}dt + s^3\lambda^4 \int_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\zeta|^2 d\mathbf{x}dt\right),$$

para todo $s \geq s_3(T^7+T^8)$ e $\lambda \geq \lambda_3$, em que $\varphi_N = \boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{e}_N$. Aplicando o argumento anterior, obtemos

$$\begin{aligned} I(s,\lambda;\psi) \leq C\Bigg(&\int_Q e^{-2s\alpha}|\varphi_N|^2) d\mathbf{x}dt + \int_Q e^{-2s\alpha}|g_1|^2 d\mathbf{x}dt \\ &+ s^3\lambda^4 \int_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\psi|^2 d\mathbf{x}dt\Bigg) \end{aligned} \tag{2.13}$$

e

$$\begin{aligned} I(s,\lambda;\zeta) \leq C\Bigg(&\int_Q e^{-2s\alpha}|\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}|^2 d\mathbf{x}dt + \int_Q e^{-2s\alpha}|g_2|^2 d\mathbf{x}dt \\ &+ s^3\lambda^4 \int_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|\zeta|^2 d\mathbf{x}dt\Bigg), \end{aligned} \tag{2.14}$$

para todo $s \geq s_4(T^7+T^8)$ e para todo $\lambda \geq \lambda_4(1+||\overline{\mathbf{y}}||_\infty)$.

Combinando (2.12), (2.13) e (2.14), podemos concluir que

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{\varphi},\psi,\zeta) \leq C\Bigg(&\int_Q e^{-2s\alpha}(|\mathbf{G}|^2 + |g_1|^2 + |g_2|^2) d\mathbf{x}dt \\ &+ s^3\lambda^4 \int_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|(\boldsymbol{\varphi}|^2 + |\psi|^2 + |\zeta|^2) d\mathbf{x}dt \\ &+ \int_Q e^{-2s\alpha}|\nabla\pi|^2 d\mathbf{x}dt + \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 \int_Q e^{-2s\alpha}|\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt \\ &+ + \int_Q e^{-2s\alpha}|\varphi_N|^2 d\mathbf{x}dt + \|\overline{\theta}\|_\infty^2 \int_Q e^{-2s\alpha}|\nabla\psi|^2 d\mathbf{x}dt \\ &+ \|\overline{c}\|_\infty^2 \int_Q e^{-2s\alpha}|\nabla\zeta|^2 d\mathbf{x}dt\Bigg), \end{aligned} \tag{2.15}$$

para todo $s \geq s_5(T^7+T^8)$ e para todo $\lambda \geq \lambda_5(1+\|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty)$.

Vários cálculos semelhantes aos anteriores levarão à absorção dos quatro últimos termos do lado direito de (2.15), fazendo uso das integral globais de $\boldsymbol{\varphi}$, $\nabla\psi$ e $\nabla\zeta$ que aparecem em $I(\boldsymbol{\varphi},\psi,\zeta)$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{\varphi},\psi,\zeta) \leq C\Bigg(&\int_Q e^{-2s\alpha}|\nabla\pi|^2 d\mathbf{x}dt + \int_Q e^{-2s\alpha}(|\mathbf{G}|^2 + |g_1|^2 + |g_2|^2) d\mathbf{x}dt \\ &+ s^3\lambda^4 \int_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3|(\boldsymbol{\varphi}|^2 + |\psi|^2 + |\zeta|^2) d\mathbf{x}dt\Bigg), \end{aligned} \tag{2.16}$$

para todo $s \geq s_6(T^7+T^8)$ e $\lambda \geq \lambda_6\left(1+\|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty + \|\overline{\theta}\|_\infty + \|\overline{c}\|_\infty + \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^{1/2}\right)$.

Etapa 2. Estimativa da pressão

Até agora, os argumentos usados foram clássicos. A parte mais delicada desta seção começará agora, onde iremos estimar a integra global ponderada de $|\nabla\pi|^2$ na desigualdade (2.16) em termos de: integrais locais ponderadas de $|\pi|^2$ e $|\nabla\pi|^2$; um termo relativo ao traço de π; e outras quatro integrais globais ponderadas envolvendo $|\mathbf{G}|^2$, $|\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2$, $|\nabla\psi|^2$ e $|\nabla\zeta|^2$. Com um argumento similar ao da etapa anterior, eliminaremos as integrais globais envolvendo $|\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2$, $|\nabla\psi|^2$ e $|\nabla\zeta|^2$. Para isto, usaremos argumentos semelhantes aos usados em [12] e [26].

Aplicando o operador divergência na primeira equação em (2.7), vemos que

$$\Delta\pi(t) = \nabla\cdot\big(D\boldsymbol{\varphi}x(t)\overline{\mathbf{y}}(t) + \overline{\theta}(t)\nabla\psi(t) + \overline{c}(t)\nabla\zeta(t) + \mathbf{G}(t)\big) \text{ em } \Omega, \tag{2.17}$$

para quase todo $t \in (0,T)$.

Desde que o lado direito de (2.17) pode ser visto como um termo de $H^{-1}(\Omega)$ ($\pi(t) \in H^1(\Omega)$, para quase todo $t \in (0,T)$), podemos aplicar Teorema 1.7.4. Daí, existem três constantes $C(\Omega,\omega_1) > 0$, $\overline{\sigma} > 1$ e $\overline{\lambda} > 1$, tais que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\pi|^2 e^{2\sigma\eta}d\mathbf{x} \le& \int_\Omega |\nabla\pi|^2 e^{2\sigma\eta}d\mathbf{x} + \sigma^2\lambda^2\int_\Omega \eta^2|\pi|^2e^{2\sigma\eta}d\mathbf{x}\\ \le& C\left(\sigma\int_\Omega \eta e^{2\sigma\eta}(D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}} + \overline{\theta}\nabla\psi + \overline{c}\nabla\zeta + \mathbf{G})(t)|^2 d\mathbf{x}\right.\\ &\left.+\sigma^{1/2}e^{2\sigma}\|\pi(t)\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \int_{\omega_1}(|\nabla\pi|^2 + \sigma^2\lambda^2\eta^2|\pi|^2)e^{2\sigma\eta}d\mathbf{x}\right),\end{aligned} \tag{2.18}$$

q. s. em $(0,T)$, para todo $\lambda \ge \overline{\lambda}$ e $\sigma \ge \overline{\sigma}$, onde $\omega_0 \subset\subset \omega_1 \subset\subset \omega$ e η dada em (1.4).

Vamos conectarmos esta última estimativa com (2.16). Para isto, tomemos

$$\sigma = \frac{s}{t^4(T-t)^4}e^{\lambda m\|\eta^0\|_\infty} \tag{2.19}$$

e multipliquemos a desigualdade (2.18) por e^r, onde

$$r = -2s\frac{e^{5/4\lambda m\|\eta^0\|_\infty}}{t^4(T-t)^4}.$$

Note que

$$\begin{aligned}&e^{2\sigma\eta}e^r = e^{-2s\alpha},\ \sigma\eta = s\xi,\\ &\sigma^{1/2} = s^{1/2}\hat{\xi}^{1/2},\ e^re^{2\sigma} = e^{-2s\alpha^*}\end{aligned}$$

Assim, integrando, em t, a desigualdade (2.18), obtemos

$$\begin{aligned}\int_Q e^{-2s\alpha}|\nabla\pi|^2 d\mathbf{x}dt \leq C\bigg[& s\int_Q \left(\|\overline{\theta}\|_\infty^2 e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\psi|^2 + \|\overline{c}\|_\infty^2 e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\zeta|^2\right) d\mathbf{x}dt \\ &+ s\int_Q \left(e^{-2s\alpha}\xi|\mathbf{G}|^2 + \|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty^2 e^{-2s\alpha}\xi|\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2\right) d\mathbf{x}dt \\ &+ s^{1/2}\int_0^T e^{-2s\alpha^*}\hat{\xi}^{1/2}\|\pi(t)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}^2 dt \\ &+\int_{\omega_1\times(0,T)} \left(e^{-2s\alpha}|\nabla\pi|^2 + s^2\lambda^2 e^{-2s\alpha}\xi^2|\pi|^2\right) d\mathbf{x}dt\bigg],\end{aligned} \tag{2.20}$$

para $\lambda \geq \lambda_7$ e $s \geq s_7 T^8$.

Observação 2.2.2. *Notemos que σ definido por* (2.19) *será maior que $\overline{\sigma}$ se tomarmos $s_7 \geq \overline{\sigma}e^{-\lambda_7 m\|\eta^0\|_\infty}$.*

Etapa 3. Estimativa do traço da pressão

Nesta etapa o objetivo é eliminar o termo do traço da pressão. Para isso, usaremos estimativas clássicas para as soluções dos sistemas de Stokes.

Tomemos

$$\gamma = s^{1/4}e^{-s\alpha^*}\hat{\xi}^{1/4}$$

e consideremos as seguintes funções:

$$\boldsymbol{\varphi}^* = \gamma\boldsymbol{\varphi}, \quad \pi^* = \gamma\pi,$$

onde $(\boldsymbol{\varphi}, \pi, \psi, \zeta)$ é solução do sistema (2.7). Dessa forma, podemos concluir que $(\boldsymbol{\varphi}^*, \pi^*)$ é solução do sistema:

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\varphi}_t^* - \Delta\boldsymbol{\varphi}^* + \nabla\pi^* = \mathbf{G}^* & \text{em} \quad Q, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{\varphi}^* = 0 & \text{em} \quad Q, \\ \boldsymbol{\varphi}^* = \mathbf{0} & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \boldsymbol{\varphi}^*(T) = \mathbf{0} & \text{em} \quad \Omega, \end{cases}$$

com

$$\mathbf{G}^* = \gamma\left(\mathbf{G} + D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}} + \overline{\theta}\nabla\psi + \overline{c}\nabla\zeta\right) - \gamma_t\boldsymbol{\varphi}.$$

Desde que $\mathbf{G}^* \in \mathbf{L}^2(Q)$, podemos usar as propriedades de regularidade das soluções do sistema Stokes (Veja o Lema 1.6.1) e deduzimos, em particular, que

$$\int_Q (|\pi^*|^2 + |\nabla\pi^*|^2) d\mathbf{x}dt \leq C\int_Q |\mathbf{G}^*|^2\, d\mathbf{x}dt.$$

Combinando a continuidade do operador traço com a desigualdade anterior, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \|\pi^*(t)\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)} dt \leq C \int_Q \left(|\pi^*|^2 + |\nabla \pi^*|^2\right) d\mathbf{x}dt \leq C \int_Q |\mathbf{G}^*|^2 d\mathbf{x}dt \\
\leq C \Bigg(s^{1/2} \|\overline{\mathbf{y}}\|^2_\infty \int_Q e^{-2s\alpha^*} \hat{\xi}^{1/2} |\nabla \boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt \\
+ s^{1/2} \|\overline{\theta}\|^2_\infty \int_Q e^{-2s\alpha^*} \hat{\xi}^{1/2} |\nabla \psi|^2 d\mathbf{x}dt \\
+ s^{1/2} \|\overline{c}\|^2_\infty \int_Q e^{-2s\alpha^*} \hat{\xi}^{1/2} |\nabla \zeta|^2 d\mathbf{x}dt \\
+ s^{1/2} \int_Q e^{-2s\alpha^*} \hat{\xi}^{1/2} |\mathbf{G}|^2 d\mathbf{x}dt \\
+ \int_Q |\gamma_t|^2 |\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt \Bigg).
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

Pelas definições das funções α^* e $\hat{\xi}$ (veja (2.8)), tendo em conta (2.11), temos que

$$
s^{1/2} e^{-2s\alpha^*} \hat{\xi}^{1/2} \leq s^{1/2} e^{-2s\alpha} \xi^{1/2} (CT^8 \xi)^{1/2} \leq s e^{-2s\alpha} \xi.
$$

Assim, estimamos integrais (2.21) envolvendo $\nabla\boldsymbol{\varphi}$, $\nabla\psi$, $\nabla\zeta$ e $\mathbf{G}$ por

$$
s \int_Q \left(e^{-2s\alpha} \xi |\mathbf{G}|^2 + \|\overline{\mathbf{y}}\|^2_\infty e^{-2s\alpha} \xi |\nabla \boldsymbol{\varphi}|^2 + \|\overline{\theta}\|^2_\infty e^{-2s\alpha} \xi |\nabla \psi|^2 + \|\overline{c}\|^2_\infty e^{-2s\alpha} \xi |\nabla \zeta|^2 \right) d\mathbf{x}dt,
$$

para $s \geq s_8 T^8$.

Agora obteremos uma estimativa da derivada com relação ao tempo da função peso γ:

$$
\gamma_t = (s^{1/4} e^{-s\alpha^*} \hat{\xi}^{1/4})_t = e^{-s\alpha^*} \left(-s^{5/4} \alpha^*_t \hat{\xi}^{1/4} + \frac{s^{1/4}}{4} \hat{\xi}^{-3/4} \hat{\xi}_t \right).
$$

Notemos que

$$
-\alpha^*_t = 4(T-2t) \frac{e^{5/4\lambda m \|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda m \|\eta^0\|_\infty}}{t^5 (T-t)^5} \leq 4T \left(\frac{e^{\lambda m \|\eta^0\|_\infty}}{t^4 (T-t)^4} \right)^{5/4} = 4T \hat{\xi}^{5/4};
$$

$$
\hat{\xi}_t = \, -4(T-2t) \frac{e^{\lambda m \|\eta^0\|_\infty}}{t^5 (T-t)^5} \leq 4T \frac{e^{5/4\lambda m \|\eta^0\|_\infty}}{t^5 (T-t)^5} \leq 4T \left(\frac{e^{\lambda m \|\eta^0\|_\infty}}{t^4 (T-t)^4} \right)^{5/4} = 4T \hat{\xi}^{5/4}.
$$

Assim, temos

$$
-s^{5/4} \alpha^*_t \hat{\xi}^{1/4} \leq 4T s^{5/4} \hat{\xi}^{3/2}; \tag{2.22}
$$

$$
\frac{s^{1/4}}{4} \hat{\xi}_t \hat{\xi}^{-3/4} \leq T s^{1/4} \hat{\xi}^{1/2}. \tag{2.23}
$$

Dessa forma, usando (2.22), (2.23) e que $1 \leq Cs\xi$, concluimos que

$$\gamma_t \leq e^{-s\alpha^*} s^{1/4} T(\hat{\xi}^{1/2} + 4s\hat{\xi}^{3/2}) \leq Cs^{5/4} T e^{-s\alpha} \xi^{3/2},$$

em que $s \geq s_9 T^8$ e $C > 0$ é uma constante independende de λ e s. Com isto, estimamos a integral envolvendo $\boldsymbol{\varphi}$ no direito de (2.21) por

$$CT^2 s^{5/2} \int_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt.$$

Usando (2.20), (2.21) e as estimativas acima, obtemos

$$\begin{aligned}\int_Q e^{-2s\alpha} |\nabla \pi|^2 d\mathbf{x}dt \leq C \Bigg[& s \int_Q \left(e^{-2s\alpha} \xi |\mathbf{G}|^2 + \|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty^2 e^{-2s\alpha} \xi |\nabla \boldsymbol{\varphi}|^2 \right) d\mathbf{x}dt \\ & + s \int_Q \left(\|\overline{\theta}\|_\infty^2 e^{-2s\alpha} \xi |\nabla \psi|^2 + \|\overline{c}\|_\infty^2 e^{-2s\alpha} \xi |\nabla \zeta|^2 \right) d\mathbf{x}dt \\ & + \int_{\omega_1 \times (0,T)} \left(e^{-2s\alpha} |\nabla \pi|^2 + s^2 \lambda^2 e^{-2s\alpha} \xi^2 |\pi|^2 \right) d\mathbf{x}dt \\ & + T^2 s^{5/2} \int_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt \Bigg],\end{aligned} \tag{2.24}$$

para $\lambda \geq \lambda_{10}$ e $s \geq s_{10} T^8$.

Combinando (2.16) e (2.24), encontramos

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{\varphi}, \psi, \zeta) \leq C \Bigg(& s \int_Q e^{-2s\alpha} \xi |\mathbf{G}|^2 d\mathbf{x}dt + \int_Q e^{-2s\alpha} (|g_1|^2 + |g_2|^2) d\mathbf{x}dt \\ & + s\|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty^2 \int_Q e^{-2s\alpha} \xi |\nabla \boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt + s\|\overline{\theta}\|_\infty^2 \int_Q e^{-2s\alpha} \xi |\nabla \psi|^2 d\mathbf{x}dt \\ & + s\|\overline{c}\|_\infty^2 \int_Q e^{-2s\alpha} \xi |\nabla \zeta|^2 d\mathbf{x}dt + T^2 s^{5/2} \int_Q e^{-2s\alpha} \xi^3 |\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt \\ & + \int_{\omega_1 \times (0,T)} e^{-2s\alpha} |\nabla \pi|^2 d\mathbf{x}dt + s^2 \lambda^2 \int_{\omega_1 \times (0,T)} e^{-2s\alpha} \xi^2 |\pi|^2 d\mathbf{x}dt \\ & + s^3 \lambda^4 \int_{\omega \times (0,T)} e^{-2s\alpha} \xi^3 (|\boldsymbol{\varphi}|^2 + |\psi|^2 + |\zeta|^2) d\mathbf{x}dt \Bigg),\end{aligned} \tag{2.25}$$

para $\lambda \geq \lambda_{11} \left(1 + \|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty + \|\overline{\theta}\|_\infty + \|\overline{c}\|_\infty + \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^{\frac{1}{2}} \right)$ e $s \geq s_{11}(T^7 + T^8)$.

Como mencionado antes, vamos eliminar as integrais globais envolvendo $\nabla \boldsymbol{\varphi}$, $\nabla \psi$, $\nabla \zeta$ e $\boldsymbol{\varphi}$ em (2.25). Assim, tomando $s \geq s_{12} T^4$ e $\lambda \geq \lambda_{12} \left(\|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty + \|\overline{\theta}\|_\infty + \|\overline{c}\|_\infty \right)$, temos

$$Cs^{5/2} T^2 \leq \frac{1}{2} s^3, \; C\|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty^2 \leq \frac{1}{2} \lambda^2, \; C\|\overline{\theta}\|_\infty^2 \leq \frac{1}{2} \lambda^2 \;\text{ e }\; C\|\overline{c}\|_\infty^2 \leq \frac{1}{2} \lambda^2.$$

Dessa forma, temos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{\varphi},\psi,\zeta) \leq C \Bigg(& s\int_Q e^{-2s\alpha}\xi|\mathbf{G}|^2 d\mathbf{x}dt + \int_Q e^{-2s\alpha}\left(|g_1|^2+|g_2|^2\right) d\mathbf{x}dt \\ & + \int_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\alpha}|\nabla\pi|^2 d\mathbf{x}dt + s^2\lambda^2 \int_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^2|\pi|^2 d\mathbf{x}dt \\ & + s^3\lambda^4 \int_{\omega\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^3| \left(\boldsymbol{\varphi}|^2+|\psi|^2+|\zeta|^2\right) d\mathbf{x}dt \Bigg), \end{aligned} \tag{2.26}$$

para $\lambda \geq \lambda_{13}(1+\|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty + \|\overline{\theta}\|_\infty + \|\overline{c}\|_\infty + \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^{1/2})$ e $s \geq s_{13}(T^4+T^8)$.

O resto da prova será dedicado a eliminarmos as integrais locais envolvendo a pressão e o gradiente da pressão que aparecem no lado direito de (2.26). Nossa estratégia será a seguinte: primeiro substituiremos a função peso na integral local da pressão por outra que não dependerá da variável espacial, mas apenas da variável temporal. Isto permitirá reduzirmos nosso problema a apenas estimarmos uma integral envolvendo $|\nabla\pi|^2$. Daí, desde que $(\boldsymbol{\varphi},\pi,\psi,\zeta)$ é solução de (2.7), a tarefa se reduzirá a estimarmos duas integrais locais envolvendo $|\Delta\boldsymbol{\varphi}|^2$ e $|\boldsymbol{\varphi}_t|^2$.

As definições de $\hat{\alpha}$, ξ^* e $\hat{\mu}$ (ver (2.8)) nos dão

$$s^2\lambda^2\int_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\alpha}\xi^2|\pi|^2 d\mathbf{x}dt \leq \int_{\omega_1\times(0,T)} |\hat{\mu}|^2|\pi|^2 d\mathbf{x}dt.$$

Vamos escolher a pressão π de maneira que sua média integral, em ω_1, seja zero, isto é,

$$\int_{\omega_1\times(0,T)} \pi(t) d\mathbf{x} = 0,$$

para quase todo $t \in (0,T)$.

Assim, aplicando a desigualdade de Poincaré-Wirtinger (Teorema 1.3.7), temos que existe $C>0$ tal que

$$\int_{\omega_1} |\pi(t)|^2 d\mathbf{x} \leq C\int_{\omega_1} |\nabla\pi(t)|^2 d\mathbf{x},$$

donde temos que

$$\int_{\omega_1\times(0,T)} |\hat{\mu}|^2|\pi|^2 d\mathbf{x}dt \leq C\int_{\omega_1\times(0,T)} |\hat{\mu}|^2|\nabla\pi|^2 d\mathbf{x}dt.$$

Desde que $1 \leq Cs^2\lambda^2\xi^2$, faremos a seguinte estimativa para as duas últimas integrais do lado direito de (2.26):

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1\times(0,T)} \left(e^{-2s\alpha}|\nabla\pi|^2 + s^2\lambda^2 e^{-2s\alpha}\xi^2|\pi|^2\right) d\mathbf{x}dt &\leq C\int_{\omega_1\times(0,T)} |\nabla\pi|^2\left(s^2\lambda^2 e^{-2s\alpha}\xi^2 + |\hat{\mu}|^2\right) d\mathbf{x}dt \\ &\leq C\int_{\omega_1\times(0,T)} |\hat{\mu}|^2|\nabla\pi|^2 d\mathbf{x}dt. \end{aligned}$$

Da desigualdade acima e de (2.26), obtemos

$$\begin{aligned}
I(\boldsymbol{\varphi}, \psi, \zeta) \leq C \Bigg(& s \int_Q e^{-2s\alpha} \xi |\mathbf{G}|^2 d\mathbf{x}dt + \int_Q e^{-2s\alpha} \left(|g_1|^2 + |g_2|^2 \right) d\mathbf{x}dt \\
& + s^3 \lambda^4 \int_{\omega \times (0,T)} e^{-2s\alpha} \xi^3 | \left(\boldsymbol{\varphi}|^2 + |\psi|^2 + |\zeta|^2 \right) d\mathbf{x}dt \\
& + \int_{\omega_1 \times (0,T)} |\hat{\mu}|^2 |\nabla \pi|^2 d\mathbf{x}dt \Bigg),
\end{aligned} \tag{2.27}$$

para $\lambda \geq \lambda_{14} \left(1 + \|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty + \|\overline{\theta}\|_\infty + \|\overline{c}\|_\infty + \| \overrightarrow{\mathbf{b}} \|^{1/2} \right)$ e $s \geq s_{14}(T^4 + T^8)$.

A primeira equação de (2.7), nos dá que

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_1 \times (0,T)} |\hat{\mu}|^2 |\nabla \pi|^2 d\mathbf{x}dt \leq C \Bigg[& \int_{\omega_1 \times (0,T)} \left(|\hat{\mu}|^2 |\mathbf{G}|^2 + \|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty^2 |\hat{\mu}|^2 |\nabla \boldsymbol{\varphi}|^2 \right) d\mathbf{x}dt \\
& + \int_{\omega_1 \times (0,T)} \left(\|\overline{\theta}\|_\infty^2 |\hat{\mu}|^2 |\nabla \psi|^2 + \|\overline{c}\|_\infty^2 |\hat{\mu}|^2 |\nabla \zeta|^2 \right) d\mathbf{x}dt \\
& + \int_{\omega_1 \times (0,T)} |\hat{\mu}|^2 |\boldsymbol{\varphi}_t|^2 d\mathbf{x}dt + \int_{\omega_1 \times (0,T)} |\hat{\mu}|^2 |\Delta \boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt \Bigg].
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Etap 4. Estimativa da integral local de $|\Delta \boldsymbol{\varphi}|^2$

Nesta etapa, estimaremos o termo local envolvendo $|\Delta \boldsymbol{\varphi}|^2$ em (2.28). Para isto, primeiramente introduzamos dois conjuntos abertos ω_2, ω_3 satisfazendo

$$\omega_1 \subset\subset \omega_2 \subset\subset \omega_3 \subset\subset \omega,$$

e uma função $\rho \in \mathcal{D}(\omega_3)$, em que $\rho \equiv 1$ em ω_2.

Assim, podemos definir

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mu}(t) \rho(\mathbf{x}) \Delta \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, T - t) \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0, T).$$

Observemos que $\mathbf{u}$ é estendida a $\mathbf{R}^N$, sendo zero fora de $\omega_3 \times (0, T)$. O objetivo será estimarmos a seguinte integral:

$$\int_{\omega_1 \times (0,T)} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}dt.$$

Notemos que $\mathbf{u}$ satisfaz uma equação do calor. De fato, aplicando o operador laplaciano na primeira equação do sistema (2.7), tendo em mente (2.17), obtemos que

$$(\Delta \boldsymbol{\varphi}(T - t))_t - \Delta(\Delta \boldsymbol{\varphi}(T - t)) = \mathbf{h}(t) \text{ em } \Omega, \tag{2.29}$$

para quase todo $t \in (0,T)$, em que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{h}(t) =&\Delta((D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}})(T-t)) + \Delta(\mathbf{G}(T-t)) + \Delta((\overline{\theta}\nabla\psi)(T-t)) + \Delta((\overline{c}\nabla\zeta)(T-t)) \\
&- \nabla\left[\nabla\cdot(D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}}) + \nabla\cdot\mathbf{G} + \nabla\cdot(\overline{\theta}\nabla\psi) + \nabla\cdot(\overline{c}\nabla\zeta)\right](T-t).
\end{aligned}
$$

Temos as seguintes identidades:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_t(\mathbf{x},t) =&\hat{\mu}(t)\rho(\mathbf{x})(\Delta\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},T-t))_t + \hat{\mu}_t(t)\rho(\mathbf{x})\Delta\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},T-t);\\
\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x},t) =&\hat{\mu}(t)[\Delta\rho(\mathbf{x})\Delta\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},T-t)+\rho(\mathbf{x})\Delta(\Delta\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},T-t))+2\nabla\rho(\mathbf{x})\cdot\nabla(\Delta\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},T-t))].
\end{aligned}
$$

Assim, graças a (2.29), deduzimos que $\mathbf{u}$ é solução do sistema

$$
\begin{cases}
\mathbf{u}_t - \Delta\mathbf{u} = \mathbf{L} & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0,T),\\
\mathbf{u}(0) = \mathbf{0} & \text{em} \quad \mathbb{R}^N,
\end{cases}
\tag{2.30}
$$

em que

$$
\mathbf{L}(t) = \rho\hat{\mu}(t)\mathbf{h}(t) + \rho\hat{\mu}_t(t)\Delta\boldsymbol{\varphi}(T-t) - 2\hat{\mu}(t)\nabla\rho\cdot\nabla(\Delta\boldsymbol{\varphi}(T-t)) - \Delta\rho\hat{\mu}(t)\Delta\boldsymbol{\varphi}(T-t),
$$

em $\Omega \times (0,T)$.

Observação 2.2.3.

1. *Notemos que* $\mathbf{L} \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{R}^N))$ *e a priori temos que* $\mathbf{u} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^N))$*;*

2. *Da equação* (2.30)*, temos que* $\mathbf{u}_t \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{R}^N))$*. Assim, graças ao Teorema* 1.4.4*, o cálculo de* $\mathbf{u}$ *em* $t=0$ *faz sentido;*

3. *Da forma como definimos as funções* α *e* ξ*, podemos definir* $\hat{\mu}(0) = \hat{\mu}(T) = 0$*, e assim,* $\hat{\mu} \in C[0,T]$*. Portanto, é natural termos o dado inicial* $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$*;*

4. *O sistema* (2.30) *possui exatamente uma solução* $\mathbf{u} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^N))$.

Agora, reescreveremos $\mathbf{L}$ em uma forma mais apropriada, isto é, como a soma de duas funções: na primeira, juntaremos todos os termos onde encontrarmos derivadas parciais de segunda ordem de $\rho\mathbf{G}$, $\rho D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}}$, $\rho\overline{\theta}\nabla\psi$, $\rho\overline{c}\nabla\zeta$ e $\rho\boldsymbol{\varphi}$; na segunda, incluiremos todos os outros termos. Mais precisamente, escreveremos $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$, com

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}_1(t) = {} & \hat{\mu}(t)\Delta\left(\rho D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}}\right)(T-t) + \hat{\mu}(t)\Delta(\rho\mathbf{G})(T-t) + \hat{\mu}(t)\Delta(\rho\overline{\theta}\nabla\psi)(T-t) \\
& + \hat{\mu}(t)\Delta(\rho\overline{c}\nabla\zeta)(T-t) - \hat{\mu}(t)\nabla\left[\nabla\cdot(\rho D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}})\right](T-t) \\
& - \hat{\mu}(t)\nabla\left[\nabla\cdot(\rho\overline{\theta}\nabla\psi)\right](T-t) - \hat{\mu}(t)\nabla\left[\nabla\cdot(\rho\overline{c}\nabla\zeta)\right](T-t) \\
& - \hat{\mu}(t)\nabla\left[\nabla\cdot(\rho\mathbf{G})\right](T-t) + \hat{\mu}_t(t)\Delta(\rho\boldsymbol{\varphi})(T-t);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}_2(t) = {} & -\hat{\mu}(t)\Delta\rho(D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}})(T-t) - 2\hat{\mu}(t)\nabla\rho\cdot\nabla((D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}})(T-t)) \\
& - \hat{\mu}(t)\Delta\rho\mathbf{G}(T-t) - 2\hat{\mu}(t)\nabla\rho\cdot\nabla(\mathbf{G}(T-t)) \\
& - \hat{\mu}(t)\Delta\rho(\overline{\theta}\nabla\psi)(T-t) - 2\hat{\mu}(t)\nabla\rho\cdot\nabla((\overline{\theta}\nabla\psi)(T-t)) \\
& - \hat{\mu}(t)\Delta\rho(\overline{\theta}\nabla\psi)(T-t) - 2\hat{\mu}(t)\nabla\rho\cdot\nabla((\overline{\theta}\nabla\psi)(T-t)) \\
& - \hat{\mu}(t)\Delta\rho(\overline{c}\nabla\zeta)(T-t) - 2\hat{\mu}(t)\nabla\rho\cdot\nabla((\overline{c}\nabla\zeta)(T-t)) \\
& + \hat{\mu}(t)\nabla(\nabla\rho\cdot((D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}})(T-t))) + \hat{\mu}(t)\nabla\rho(\nabla\cdot(D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}})(T-t)) \\
& + \hat{\mu}(t)\nabla(\nabla\rho\cdot\mathbf{G})(T-t) + \hat{\mu}(t)\nabla\rho(\nabla\cdot\mathbf{G}(T-t)) \\
& + \hat{\mu}(t)\nabla(\nabla\rho\cdot((\overline{\theta}\nabla\psi)(T-t))) + \hat{\mu}(t)\nabla\rho(\nabla\cdot(\overline{\theta}\nabla\psi)(T-t)) \\
& + \hat{\mu}(t)\nabla(\nabla\rho\cdot((\overline{c}\nabla\zeta))(T-t))) + \hat{\mu}(t)\nabla\rho(\nabla\cdot(\overline{c}\nabla\zeta)(T-t)) \\
& - \hat{\mu}_t(t)\Delta\rho\boldsymbol{\varphi}(T-t) - 2\hat{\mu}_t(t)\nabla\rho\cdot\nabla(\boldsymbol{\varphi}(T-t)) \\
& - 2\hat{\mu}(t)\nabla\rho\cdot\nabla(\Delta\boldsymbol{\varphi})(T-t) - \hat{\mu}(t)\Delta\rho\Delta\boldsymbol{\varphi}(T-t).
\end{aligned}
$$

Observemos que $\mathbf{L}_2(t)$ tem suporte contido em $\omega_3\backslash\overline{\omega}_2$ para quase todo $t \in (0,T)$ ($\rho = 1$ em ω_2 e derivadas de ρ aparecem em todos os termos de $\mathbf{L}_2(t)$). Notemos que $\mathbf{L},\ \mathbf{L}_1 \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{R}^N))$ e que $\mathbf{L}_2 \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}^N))$.

Se encontrassemos duas funções $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ em $L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^N))$ satisfazendo

$$
\begin{cases}
(\mathbf{u}_i)_t - \Delta\mathbf{u}_i = \mathbf{L}_i & \text{em} \quad \mathbb{R}^N\times(0,T), \\
\mathbf{u}_i(0) = \mathbf{0} & \text{em} \quad \mathbb{R}^N,
\end{cases}
\tag{2.31}
$$

para $i = 1,\ 2$, então teríamos $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ e seria suficiente estimarmos as integrais

$$
\int_{\omega\times(0,T)} |\mathbf{u}_i|^2 d\mathbf{x}dt,\ i = 1,\ 2.
$$

Nas próximas duas etapas nos concentraremos em encontrar e estimar as funções $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$.

Etapa 4.1. Definição e estimativa de $\mathbf{u}_1$

Desde que $\mathbf{L}_1 \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{R}^N))$ temos que $\mathbf{u}_1$ é a solução por transposição do problema de Cauchy (2.31) (para $i=1$).De fato, $\mathbf{u}_1$ é uma função em $L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^N))$ tal que, para cada $\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^N))$ vale a seguinte igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{f}\, d\mathbf{x}dt = \int_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{z}\, d\mathbf{x}dt, \tag{2.32}$$

em que $\mathbf{z}$ é a única solução do problema

$$\begin{cases} -\mathbf{z}_t - \Delta \mathbf{z} = \mathbf{f} & \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ \mathbf{z}(T) = \mathbf{0} & \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.33}$$

Observação 2.2.4. *Para todo $\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^N))$, o problema (2.33) possui uma única solução $\mathbf{z} \in L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^N))$, e esta depende continuamente de $\mathbf{f}$.*

Daí, $\mathbf{u}_1$ está bem definida (graças a unicidade de $\mathbf{z}$) e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{f}\, d\mathbf{x}dt &= \int_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{z}\, d\mathbf{x}dt \\ &\leq \|\mathbf{L}_1\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{R}^N))} \|\mathbf{z}\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\mathbb{R}^N))} \\ &\leq C\|\mathbf{L}_1\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{R}^N))} \|\mathbf{f}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^N))} \end{aligned}$$

Portanto, existe uma constante $C>0$ tal que

$$\|\mathbf{u}_1\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^N))} \leq C\|\mathbf{L}_1\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{R}^N))}. \tag{2.34}$$

Além disso, desde que $\mathbf{L}_1 \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{R}^N))$, o Teorema 1.4.4 garante que $\mathbf{u}_1 \in C^0([0,T];\mathbf{H}^{-2}(\mathbb{R}^N))$. Assim, $\mathbf{u}_1$ resolve (2.31), para $i=1$.

Usando o fato que

$$\hat{\mu}(T-t) = \hat{\mu}(t), \ \forall\, t \in (0,T),$$

a partir de (2.34) deduzimos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} |\mathbf{u}_1|^2 d\mathbf{x}dt \ &\leq \ C\left(\int_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} |\hat{\mu}\rho D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}}|^2 d\mathbf{x}dt + \int_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} |\hat{\mu}\rho\mathbf{G}|^2 d\mathbf{x}dt \right. \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} |\hat{\mu}\rho\overline{\theta}\nabla\psi|^2 d\mathbf{x}dt + \int_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} |\hat{\mu}\rho\overline{c}\nabla\zeta|^2 d\mathbf{x}dt \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N\times(0,T)} |\hat{\mu}_t\rho\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt \right), \end{aligned}$$

para alguma constante $C>0$.

Desde que ρ se anula fora de ω_3 e é limitada, finalmente obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\omega_1\times(0,T)}|\mathbf{u}_1|^2 d\mathbf{x}dt \leq \int_{\mathbb{R}^N\times(0,T)}|\mathbf{u}_1|^2 d\mathbf{x}dt \\ \leq C\left(\int_{\omega_3\times(0,T)}|\hat{\mu}\mathbf{G}|^2 d\mathbf{x}dt + \int_{\omega_3\times(0,T)}|\hat{\mu}_t\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt\right. \\ + \int_{\omega_3\times(0,T)}|\hat{\mu}D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}}|^2 d\mathbf{x}dt + \int_{\omega_3\times(0,T)}|\hat{\mu}\overline{\theta}\nabla\psi|^2 d\mathbf{x}dt \\ \left. + \int_{\omega_3\times(0,T)}|\hat{\mu}\overline{c}\nabla\zeta|^2 d\mathbf{x}dt\right),\end{aligned} \tag{2.35}$$

para alguma constante $C(\omega,\Omega) > 0$.

Etapa 4.2. Definição e estimativa de $\mathbf{u}_2$

Agora trataremos o caso $i = 2$ do problema de Cauchy (2.31), onde o lado direito é um elemento de $L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}^N))$. A existência e unicidade de solução para esse problema em $L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^N))$ é clássica. Relembremos que $\mathbf{L}_2(t)$ tem suporte em $\omega_3\backslash\overline{\omega_2}$ para quase todo $t \in (0,T)$ e que, ω_1 e $\omega_3\backslash\overline{\omega_2}$ são conjuntos disjuntos.

Primeiro escrevamos $\mathbf{u}_2$ em termos da solução fundamental $H = H(\mathbf{x},t)$ da equação do calor. Para isso, primeiro reescrevamos $\mathbf{L}_2$ na seguinte forma

$$\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_{21} + \nabla\cdot\mathbf{L}_{22}.$$

Observemos que $\mathbf{L}_{21}$ e $\mathbf{L}_{22}$ são funções de quadrado integrável, com *supp* $\mathbf{L}_{21}$ e *supp* $\mathbf{L}_{22}$ estão contidos em $\omega_3\backslash\overline{\omega}_2\times[0,T]$, escritas como somas de derivadas até segunda ordem de produtos $\hat{\mu}D^\beta\rho\mathbf{G}$, $\hat{\mu}D^\beta\rho\boldsymbol{\varphi}$, $\hat{\mu}D^\beta\rho D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}}$, $\hat{\mu}D^\beta\rho\overline{\theta}\nabla\psi$, $\hat{\mu}D^\beta\rho\overline{c}\nabla\zeta$ e $\hat{\mu}'D^\beta\rho\boldsymbol{\varphi}$, com $1 \leq |\beta| \leq 4$.

Definamos $d = dist(\partial\omega_3,\partial\omega_2) > 0$. Assim, para quaisquer $\overline{\mathbf{x}} \in \omega_3\backslash\overline{\omega}_2$ e $\mathbf{x} \in \omega_1$, temos $|\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}}| > d$. Portanto, a solução da equação calor (2.31) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{x},t) = \int_0^t\int_{\omega_3\backslash\overline{\omega}_2}\left(H(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}},t-r)\mathbf{L}_{21}(\overline{\mathbf{x}},r) - \mathbf{L}_{22}(\overline{\mathbf{x}},r)\cdot\nabla_{\overline{\mathbf{x}}}H(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}},t-r)\right)d\overline{\mathbf{x}}dr, \tag{2.36}$$

para todo $(\mathbf{x},t) \in \omega_1\times(0,T)$, onde

$$H(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}e^{-|\mathbf{x}|^2/4t},\ \forall(\mathbf{x},t) \in \mathbb{R}^N\times(0,+\infty);$$

$\nabla_{\overline{\mathbf{x}}}$ é o gradiente em relação a $\overline{\mathbf{x}}$.

Usando integração por partes em (2.36), isto é, passando todas as derivadas espaciais de $\mathbf{L}_{21}$ e $\mathbf{L}_{22}$ para H e $\nabla_{\overline{\mathbf{x}}}H$ (este cálculo é possível pois a integração está sendo realizada em uma região onde H é de classe C^{∞}). Assim, obtemos uma expressão para $\mathbf{u}_2$ da seguinte forma:

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{x},t)=\int_0^t\int_{\omega_3\backslash\overline{\omega}_2}\sum_{(\gamma,\beta)\in I\times J}D^{\gamma}_{\overline{\mathbf{x}}}H(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}},t-r)D^{\beta}_{\overline{\mathbf{x}}}\rho(\overline{\mathbf{x}})\mathbf{z}_{\gamma,\beta}(\overline{\mathbf{x}},r)d\overline{\mathbf{x}}dr, \qquad (2.37)$$

em que todo $\gamma\in I$ satisfaz $|\gamma|\leq 3$, todo $\beta\in J$ satisfaz $1\leq|\beta|\leq 4$ e

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_{\gamma,\beta}(\overline{\mathbf{x}},r)=\hat{\mu}(r)\big[&C_{\gamma,\beta}\mathbf{G}(\overline{\mathbf{x}},r)+D_{\gamma,\beta}\boldsymbol{\varphi}(\overline{\mathbf{x}},r)+E_{\gamma,\beta}D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}}(\overline{\mathbf{x}},r)+N_{\gamma,\beta}\overline{\theta}\nabla\psi(v,r)\\&+P_{\gamma,\beta}\overline{c}\nabla\zeta(\overline{\mathbf{x}},r)\big]+M_{\gamma,\beta}\hat{\mu}_r(r)\boldsymbol{\varphi}(\overline{\mathbf{x}},r),\end{aligned}$$

com $C_{\gamma,\beta}$, $D_{\gamma,\beta}$, $E_{\gamma,\beta}$, $M_{\gamma,\beta}$, $N_{\gamma,\beta}$, $P_{\gamma,\beta}\in\mathbb{R}$.

Logo, de (2.37) obtemos

$$|\mathbf{u}_2(\mathbf{x},t)|\leq\int_0^t\int_{\omega_3\backslash\overline{\omega}_2}\sum_{\gamma\in I}|D^{\gamma}_{\overline{\mathbf{x}}}H(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}},t-r)|\;|\mathbf{z}(\overline{\mathbf{x}},r)|d\overline{\mathbf{x}}dr,$$

para todo $(\mathbf{x},t)\in\omega_1\times(0,T)$, em que

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(\overline{\mathbf{x}},r)=\hat{\mu}(r)\big[&C_1\mathbf{G}(\overline{\mathbf{x}},r)+C_2\boldsymbol{\varphi}(\overline{\mathbf{x}},r)+C_3D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}}(\overline{\mathbf{x}},r)+C_4\overline{\theta}\nabla\psi(v,r)\\&+C_5\overline{c}\nabla\zeta(\overline{\mathbf{x}},r)\big]+C_6\hat{\mu}_r(r)\boldsymbol{\varphi}(\overline{\mathbf{x}},r).\end{aligned}$$

Notemos que para $0<\delta<d$, existe uma constante $C(\omega)$ tal que

$$|D^{\gamma}H(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}},t-r)|\leq Ce^{-\delta^2/4(t-r)},$$

para todo $(\mathbf{x},t)\in\omega_1\times(0,T)$, $(\overline{\mathbf{x}},r)\in(\omega_3\backslash\overline{\omega}_2)\times(0,t)$ e qualquer $\gamma\in I$.

Dessa forma, existe uma constante $C=C(\omega)>0$, tal que

$$|\mathbf{u}_2(\mathbf{x},t)|\leq C\int_{(\omega_3\backslash\overline{\omega}_2)\times(0,t)}e^{\left(\frac{-\delta^2}{4(t-r)}\right)}|\mathbf{z}(\overline{\mathbf{x}},r)|d\overline{\mathbf{x}}dr.$$

Integrando $|\mathbf{u}_2|^2$ em $\omega_1\times(0,T)$ e usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\int_{\omega_1\times(0,T)}|\mathbf{u}_2|^2d\mathbf{x}dt&\leq C\int_0^T\left(\int_0^t\left(\int_{\omega_3\backslash\overline{\omega}_2}e^{-\delta^2/4(t-r)}|\mathbf{z}(\overline{\mathbf{x}},r)|d\overline{\mathbf{x}}\right)dr\right)^2dt\\&\leq C\int_0^T\left[\left(\int_0^t dr\right)\int_0^t\left(\int_{\omega_3}e^{-\delta^2/4(t-r)}|\mathbf{z}(\overline{\mathbf{x}},r)|d\overline{\mathbf{x}}\right)^2dr\right]dt\\&\leq CT\int_0^T\left(\int_0^t e^{-\delta^2/2(t-r)}\|\mathbf{z}(\cdot,r)\|^2_{L^2(\omega_3)}dr\right)dt,\end{aligned}$$

para algum $C(\omega) > 0$.

Agora, escrevamos o último termo da desigualdade anterior como uma convolução, isto é,

$$\int_0^T (h_1 * h_2)(t)dt,$$

onde

$$h_1(t) = e^{-\delta^2/2t} 1_{(0,+\infty)}(t) \in L^1(\mathbb{R});$$
$$h_2(t) = \|\mathbf{z}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\omega_3)} 1_{[0,T]}(t) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Assim, usando a desigualdade de Young (veja o Teorema 1.2.3), obtemos

$$\int\int_{\omega_1\times(0,T)} |\mathbf{u}_2|^2 d\mathbf{x}dt \le CT \int_{\omega_3\times(0,T)} |\mathbf{z}|^2 d\mathbf{x}dt.$$

De acordo com a expressão de $\mathbf{z}$, encontramos

$$\begin{aligned}\int_{\omega_1\times(0,T)} |\mathbf{u}_2|^2 d\mathbf{x}dt \le CT \Bigg(&\int_{\omega_3\times(0,T)} |\hat{\mu}_t\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt + \int_{\omega_3\times(0,T)} |\hat{\mu}|^2 |D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}}|^2 d\mathbf{x}dt \\ &+ \int_{\omega_3\times(0,T)} |\hat{\mu}|^2 |\overline{\theta}\nabla\psi|^2 d\mathbf{x}dt + \int_{\omega_3\times(0,T)} |\hat{\mu}|^2 |\overline{c}\nabla\zeta|^2 d\mathbf{x}dt \\ &+ \int_{\omega_3\times(0,T)} |\hat{\mu}|^2 |\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt + \int_{\omega_3\times(0,T)} |\hat{\mu}|^2 |\mathbf{G}|^2 d\mathbf{x}dt\Bigg).\end{aligned} \tag{2.38}$$

Juntando (2.35) e (2.38), temos a estimativa desejada para o laplaciano de $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\begin{aligned}\int_{\omega_1\times(0,T)} |\hat{\mu}|^2 |\Delta\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt \le C(1+T) \Bigg(&\int_{\omega_3\times(0,T)} |\hat{\mu}|^2 |D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}}|^2 d\mathbf{x}dt \\ &+ \int_{\omega_3\times(0,T)} |\hat{\mu}_t\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt + \int_{\omega_3\times(0,T)} |\hat{\mu}|^2 |\overline{\theta}\nabla\psi|^2 d\mathbf{x}dt \\ &+ \int_{\omega_3\times(0,T)} |\hat{\mu}|^2 |\overline{c}\nabla\zeta|^2 d\mathbf{x}dt + \int_{\omega_3\times(0,T)} |\hat{\mu}|^2 |\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt \\ &+ \int_{\omega_3\times(0,T)} |\hat{\mu}|^2 |\mathbf{G}|^2 d\mathbf{x}dt\Bigg).\end{aligned} \tag{2.39}$$

Etapa 5. Estimativa da integral local de $|\boldsymbol{\varphi}_t|^2$

Nesta etapa, continuaremos seguindo as idéias dadas em [12, 26] para limitarmos o termo envolvendo $|\boldsymbol{\varphi}_t|^2$ no lado direito de (2.28). Para este fim, vamos decompor nossa solução como a soma de duas soluções, $(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}},\ \widetilde{\pi},\ \widetilde{\psi},\ \widetilde{\zeta})$ e $(\widehat{\boldsymbol{\varphi}},\ \widehat{\pi},\ \widehat{\psi},\ \widehat{\zeta})$, de sistemas do mesmo tipo de (2.7). Em particular, olharemos para os sistemas de

Stokes cujas soluções são $(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}},\ \widetilde{\pi})$ e $(\widehat{\boldsymbol{\varphi}},\ \widehat{\pi})$. A solução $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$ receberá um tratamento global e aplicaremos apenas estimativas de energia de sistemas do tipo Stokes. Por outro lado, trabalharemos com termos locais de $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$, onde a vantagem está no fato que $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{tt}$ terá sentido.

Sejam $(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}},\ \widetilde{\pi},\ \widetilde{\psi},\ \widetilde{\zeta})$ e $(\widehat{\boldsymbol{\varphi}},\ \widehat{\pi},\ \widehat{\psi},\ \widehat{\zeta})$ as respectivas soluções (únicas) dos sistemas:

$$\begin{cases} -\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_t - \Delta\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} - D\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}\overline{\mathbf{y}} + \nabla\widetilde{\pi} = \mu\mathbf{G} + \overline{\theta}\nabla\widetilde{\psi} + \overline{c}\nabla\widetilde{\zeta} & \text{em} \quad Q, \\ \nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} = 0 & \text{em} \quad Q, \\ -\widetilde{\psi}_t - \Delta\widetilde{\psi} - \overline{\mathbf{y}}\cdot\nabla\widetilde{\psi} = \mu g_1 & \text{em} \quad Q, \\ -\widetilde{\zeta}_t - \Delta\widetilde{\zeta} - \overline{\mathbf{y}}\cdot\nabla\widetilde{\zeta} = \mu g_2 & \text{em} \quad Q, \\ \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{0},\ \widetilde{\psi} = \widetilde{\zeta} = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(T) = \mathbf{0},\ \widetilde{\psi}(T) = \widetilde{\zeta}(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.40}$$

e

$$\begin{cases} -\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_t - \Delta\widehat{\boldsymbol{\varphi}} - D\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\overline{\mathbf{y}} + \nabla\widehat{\pi} = -\mu_t\boldsymbol{\varphi} + \overline{\theta}\nabla\widehat{\psi} + \overline{c}\nabla\widehat{\zeta} & \text{em} \quad Q, \\ \nabla\cdot\widehat{\boldsymbol{\varphi}} = 0 & \text{em} \quad Q, \\ -\widehat{\psi}_t - \Delta\widehat{\psi} - \overline{\mathbf{y}}\cdot\nabla\widehat{\psi} = -\mu_t\psi + \mu\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{e}_N & \text{em} \quad Q, \\ -\widehat{\zeta}_t - \Delta\widehat{\zeta} - \overline{\mathbf{y}}\cdot\nabla\widehat{\zeta} = -\mu_t\zeta + \mu\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}} & \text{em} \quad Q, \\ \widehat{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{0}, \widehat{\psi} = \widehat{\zeta} = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(T) = \mathbf{0},\ \widehat{\psi}(T) = \widehat{\zeta}(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.41}$$

em que $\widetilde{\pi}(t)$ e $\widehat{\pi}(t)$ tem média integral nula sobre ω_1, para todo $t \in (0,T)$.

Adicionando (2.40) e (2.41) veremos que $(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} + \widehat{\boldsymbol{\varphi}},\ \widetilde{\pi} + \widehat{\pi},\ \widetilde{\psi} + \widehat{\psi},\ \widetilde{\zeta} + \widehat{\zeta})$ e $(\mu\boldsymbol{\varphi}, \mu\pi, \mu\psi, \mu\zeta)$ resolvem o mesmo sistema, em que $(\boldsymbol{\varphi}, \pi, \psi, \zeta)$ é a solução de (2.7). Assim, pela unicidade de solução de sistemas do tipo (2.7), concluimos que

$$\mu\boldsymbol{\varphi} = \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} + \widehat{\boldsymbol{\varphi}},\ \mu\pi = \widetilde{\pi} + \widehat{\pi},\ \mu\psi = \widetilde{\psi} + \widehat{\psi},\ \mu\zeta = \widetilde{\zeta} + \widehat{\zeta}.$$

Consequentemente, o termo a ser limitado será

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1\times(0,T)} |\hat{\mu}|^2 \boldsymbol{\varphi}_t^2 d\mathbf{x}dt &= \int_{\omega_1\times(0,T)} \mu^{-2}\hat{\mu}^2 |\mu\boldsymbol{\varphi}_t|^2 d\mathbf{x}dt \\ &\leq \int_{\omega_1\times(0,T)} \mu^{-2}\hat{\mu}^2 \left(|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_t|^2 + |\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_t|^2 + |\mu_t\boldsymbol{\varphi}|^2\right) d\mathbf{x}dt, \end{aligned} \tag{2.42}$$

em que $\mu^{-2}\hat{\mu}^2 = s^{-11/2}\lambda^2 e^{-2s\alpha^* + 2s\hat{\alpha}}(\xi^*)^{-11/2}$.

Concentraremos nossa atenção em encontrar estimativas para as derivadas com relação ao tempo de $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$ e $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$.

Etapa 5.1. Estimativa de $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_t$

Nesta etapa, vamos obter uma estimativa da integral local de $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_t$. Para isto, vamos estimar a integral local de $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_t$ por uma integral global em Q e em seguida, combinaremos estimativas de regularidade para sistemas de Stokes e calor, sem o uso da função peso, para obter a estimativa desejada.

Sendo mais preciso, tomaremos s e λ de forma que $s \geq s_{15}T^8$ e $\lambda \geq \lambda_{15}$ para obtemos

$$\begin{aligned} e^{-2s\alpha^* + 2s\hat{\alpha}} = e^{-2s\left(\frac{e^{\lambda m\|\eta^0\|}\left(e^{\lambda\|\eta^0\|}-1\right)}{t^4(T-t)^4}\right)} &\leq e^{-2s_{15}(e^{\|\eta^0\|_\infty}-1)e^{\lambda m\|\eta^0\|_\infty}} \\ &\leq e^{-Ce^{\lambda m\|\eta^0\|_\infty}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} s^{-11/2}\lambda^2(\xi^*)^{-11/2}e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}} &\leq s^{-11/2}\lambda^2(\xi^*)^{-11/2}e^{-Ce^{\lambda m\|\eta^0\|_\infty}} \\ &\leq (s_{15}T^8)^{-11/2}\lambda^2(CT^8)^{11/2}e^{-Ce^{\lambda m\|\eta^0\|_\infty}} \\ &\leq C\lambda^2 e^{-Ce^{\lambda m\|\eta^0\|_\infty}}. \end{aligned}$$

Observação 2.2.5. *Notemos que $C\lambda^2 e^{-Ce^{\lambda m\|\eta^0\|_\infty}}$ é uniformemente limitada para λ suficientemente grande.*

Portanto, aplicando as estimativas de regularidade para a solução de (2.40) deduzimos que $\widetilde{\varphi}_i$, $\widetilde{\psi}$ e $\widetilde{\zeta}$ pertencem a $H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$ e, além disso,

$$\begin{aligned} &\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}\|^2_{H^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))\cap L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))} + \|\widetilde{\psi}\|^2_{H^1(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^2(\Omega))} \\ &+\|\widetilde{\zeta}\|^2_{H^1(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq R\left(\|\mu\mathbf{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\mu g_1\|^2_{L^2(Q)} + \|\mu g_2\|^2_{L^2(Q)}\right), \end{aligned} \tag{2.43}$$

em que

$$R = C\left[1 + \left(\|\overline{\mathbf{y}}\|^2_\infty + \|\overline{\theta}\|^2_\infty + \|\overline{c}\|^2_\infty\right)e^{CT\left(1+\|\overline{\mathbf{y}}\|^2_\infty+\|\overline{\theta}\|^2_\infty+\|\overline{c}\|^2_\infty\right)}\right].$$

Combinado a desigualdade (2.43) e a Observação 2.2.5, obtemos a seguinte desigualdade desejada:

$$\int_{\omega_1\times(0,T)} \mu^{-2}\hat{\mu}^2|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_t|^2 d\mathbf{x}dt \leq R\left(\|\mu\mathbf{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\mu g_1\|^2_{L^2(Q)} + \|\mu g_2\|^2_{L^2(Q)}\right), \tag{2.44}$$

em que

$$R = \widetilde{C}\left[1 + \left(\|\overline{\mathbf{y}}\|^2_\infty + \|\overline{\theta}\|^2_\infty + \|\overline{c}\|^2_\infty\right)e^{CT\left(1+\|\overline{\mathbf{y}}\|^2_\infty+\|\overline{\theta}\|^2_\infty+\|\overline{c}\|^2_\infty\right)}\right].$$

Etapa 5.2. Estimativa de $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_t$

Nesta etapa, o principal objetivo é obter uma estimativa da integral local do termo $\mu^{-2}\hat{\mu}^2|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_t|^2$. Conseguir uma estimativa deste termo é uma tarefa bastante difícil. Usando como ferramentas as estimativas a priori para o sistemas de Stokes e calor obteremos uma estimativa da integral envolvendo $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_t$ em termos de outras integrais que serão absorvidas posteriormente. Isto será possível graças às hipóteses de regularidade impostas sobre as trajetórias. Mais precisamente, no termo envolvendo $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_t$ em (2.42), integraremos duas vezes por partes em relação a t. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
&s^{-11/2}\lambda^2\int_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}(\xi^*)^{-11/2}|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_t|^2 d\mathbf{x}dt\\
&=\frac{1}{2}s^{-11/2}\lambda^2\int_{\omega_1\times(0,T)}(e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}(\xi^*)^{-11/2})_{tt}|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}|^2 d\mathbf{x}dt \qquad (2.45)\\
&-s^{-11/2}\lambda^2\int_{\omega_1\times(0,T)} e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}(\xi^*)^{-11/2}\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{tt}\cdot\widehat{\boldsymbol{\varphi}}d\mathbf{x}dt.
\end{aligned}$$

Tal integração é possível porque $e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}(\xi^*)^{-11/2}$ e sua derivada em relação a t pertencem a $C_0^\infty(0,T)$.

Notemos que seguindo os mesmos passos feitos na etapa anterior, encontramos que $s^{-11/2}\lambda^2(e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}(\xi^*)^{-11/2})_{tt}$ é limitado superiormente para $s \geq s_{16}(T^4+T^8)$ e $\lambda \geq \lambda_{16}$, então fixamos nossa atenção na última integral de (2.45). Primeiramente, definamos a função

$$\tau = s^{-11/2}\lambda^{-5}e^{-2s\alpha^*+2s\hat{\alpha}}(\xi^*)^{-11/2}.$$

Utilizando as desigualdades de Hölder e Young, deduzimos heurísticamente, que

$$\begin{aligned}
-\lambda^7\int_{\omega_1\times(0,T)}\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{tt}\cdot\widehat{\boldsymbol{\varphi}}d\mathbf{x}dt &\leq \lambda^7\left\|\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{tt}\right\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\omega_1))}\left\|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\right\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^{r'}(\omega_1))}\\
&\leq \frac{1}{2}\left\|\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{tt}\right\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\omega_1))}+\frac{1}{2}\lambda^{14}\left\|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\right\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^{r'}(\omega_1))},
\end{aligned} \qquad (2.46)$$

em que $\frac{6}{5} < r < \kappa$ se $N = 3$ e $1 < r < \kappa$ se $N = 2$, com r' é o expoente conjugado de r (κ foi definido em (2.4)).

Posteriormente, veremos que $\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{tt} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\omega_1))$. Dessa forma, desde que $\widehat{\boldsymbol{\varphi}} \in L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))$, temos que a desigualdade (2.46) é válida devido as seguintes imersões de Sobolev

$$H^2(\Omega)\hookrightarrow H^1(\Omega)\hookrightarrow L^l(\Omega),\ \text{com}\ \begin{cases} 1\leq l<+\infty,\ \text{se}\ N=2;\\ 1\leq l<6,\ \text{se}\ N=3.\end{cases}$$

Veremos que um ponto chave da prova foi a forma como aplicamos a desigualdade de Hölder. Observemos que a função peso agora acompanha somente $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{tt}$. Isto dará consequencias desejáveis, uma vez que seremos capazes de fazermos um tratamento local para termo em $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$, ao passo que apenas um argumento global será possível para o termo em $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{tt}$.

Vamos analisar agora o último termo do lado direito de (2.46). Para isso, consideremos uma função $\nu \in C^2(\omega_2)$ tal que

$$\omega_1 \subset supp\ \nu \subset \omega_2,\ 0 \leq \nu \leq 1 \text{ em } \omega_2 \text{ e } \nu \equiv 1 \text{ em } \omega_1.$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^{r'}(\omega_1))} &\leq C\,\|\nu\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\omega_2)\cap\mathbf{H}^1_0(\omega_2))} \leq C\,\|\Delta(\nu\widehat{\boldsymbol{\varphi}})\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_2))} \\ &= C\,\|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\Delta\nu + 2(\nabla\nu\cdot\nabla)\widehat{\boldsymbol{\varphi}} + \nu\Delta\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_2))}, \end{aligned}$$

uma vez que $\mathbf{H}^2(\omega_2)\cap\mathbf{H}^1_0(\omega_2)$ está imerso continuamente em $\mathbf{L}^{r'}(\omega_2)$.

Agora, da mesma maneira que fizemos na etapa 4, obtemos uma estimativa de $\|\nu\Delta\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_2))}$. De fato, uma vez que $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(T) = \mathbf{0}$, é suficiente aplicarmos a estimativa (2.39) com $\boldsymbol{\varphi} = \widehat{\boldsymbol{\varphi}}$, $\psi = \widehat{\psi}$, $\zeta = \widehat{\zeta}$, $\pi = \widehat{\pi}$, $\hat{\mu} = 1$, $\mathbf{G} = -\mu_t\varphi$, $\omega_1 = \omega_2$, $\omega_2 = \omega_3$ e $\omega_3 = \omega_4$, em que ω_4 é um conjunto aberto satisfazendo

$$\omega_3 \subset\subset \omega_4 \subset\subset \omega.$$

Com isso temos

$$\begin{aligned} \|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^{r'}(\omega_1))} &\leq C\int_{\omega_2\times(0,T)} \left(|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}|^2 + |\nabla\widehat{\boldsymbol{\varphi}}|^2 + |\Delta\widehat{\boldsymbol{\varphi}}|^2\right) d\mathbf{x}dt \\ &\leq C(1+T)\left[\int_{\omega_2\times(0,T)}\left(|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}|^2 + |\nabla\widehat{\boldsymbol{\varphi}}|^2\right) d\mathbf{x}dt + \int_{\omega_4\times(0,T)}|D\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\overline{\mathbf{y}}|^2 d\mathbf{x}dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{\omega_4\times(0,T)}(|\overline{\theta}\nabla\widehat{\psi}|^2 + |\overline{c}\nabla\widehat{\zeta}|^2 + |\widehat{\boldsymbol{\varphi}}|^2 + |\mu_t\boldsymbol{\varphi}|^2) d\mathbf{x}dt\right]. \end{aligned}$$

Lembrando da forma como definimos $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$, $\widehat{\psi}$ e $\widehat{\zeta}$, temos que

$$\begin{aligned} |\widehat{\boldsymbol{\varphi}}|^2 + |\nabla\widehat{\boldsymbol{\varphi}}|^2 &\leq 2[|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}|^2 + |\nabla\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}|^2 + |\mu|^2(|\boldsymbol{\varphi}|^2 + |\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2)]; \\ |\nabla\widehat{\psi}|^2 &\leq 2(|\nabla\widetilde{\psi}|^2 + |\mu|^2|\nabla\psi|^2); \\ |\nabla\widehat{\zeta}|^2 &\leq 2(|\nabla\widetilde{\zeta}|^2 + |\mu|^2|\nabla\zeta|^2). \end{aligned}$$

Assim, desde que $(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\zeta})$ é a solução fraca do sistema (2.40), podemos utilizar os resultados da etapa 5.1 (veja (2.43)) para obtermos

$$\begin{aligned} \|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^{r'}(\omega_1))} \leq \; & R(1+T)\Big[\|\mu\mathbf{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\mu g_1\|^2_{L^2(Q)} + \|\mu g_2\|^2_{L^2(Q)} \\ & + \int_{\omega_4\times(0,T)} (|\mu|^2 + |\mu_t|^2)|\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt \\ & + \int_{\omega_4\times(0,T)} |\mu|^2(|\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2 + |\nabla\psi|^2 + |\nabla\zeta|^2) d\mathbf{x}dt\Big], \end{aligned} \tag{2.47}$$

em que R é dado como em (2.43).

Os quatro primeiros termos do lado direito de (2.47) serão mantidos até chegarmos à desigualdade final, enquanto o quinto será analisado posteriormente.

Agora trataremos com o termo envolvendo $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{tt}$ em (2.46).

Graças a (2.41), temos que a quádrupla $(\breve{\boldsymbol{\varphi}}, \breve{\pi}, \breve{\psi}, \breve{\zeta}) := (\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_t, \tau\widehat{\pi}_t, \tau\widehat{\psi}_t, \tau\widehat{\zeta}_t)$ é solução do sistema:

$$\begin{cases} -\breve{\boldsymbol{\varphi}}_t - \Delta\breve{\boldsymbol{\varphi}} - D\breve{\boldsymbol{\varphi}}\overline{\mathbf{y}} + \nabla\breve{\pi} = \breve{\mathbf{G}} + \overline{\theta}\nabla\breve{\psi} + \overline{c}\nabla\breve{\zeta} & \text{em} \quad Q, \\ \nabla\cdot\breve{\boldsymbol{\varphi}} = 0 & \text{em} \quad Q, \\ -\breve{\psi}_t - \Delta\breve{\psi} - \overline{\mathbf{y}}\cdot\nabla\breve{\psi} = \breve{g}_1 & \text{em} \quad Q, \\ -\breve{\zeta}_t - \Delta\breve{\zeta} - \overline{\mathbf{y}}\cdot\nabla\breve{\zeta} = \breve{g}_2 & \text{em} \quad Q, \\ \breve{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{0},\ \breve{\psi} = \breve{\zeta} = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \breve{\boldsymbol{\varphi}}(T) = \mathbf{0},\ \breve{\psi}(T) = \breve{\zeta}(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.48}$$

em que

$$\begin{aligned} \breve{\mathbf{G}} &= -\tau[\mu_{tt}\boldsymbol{\varphi} + \mu_t\boldsymbol{\varphi}_t - D\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\overline{\mathbf{y}}_t - \overline{\theta}_t\nabla\widehat{\psi} - \overline{c}_t\nabla\widehat{\zeta}] - \tau_t\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_t; \\ \breve{g}_1 &= -\tau[\mu_{tt}\psi + \mu_t\psi_t - \mu(\boldsymbol{\varphi}_N)_t - \mu_t\boldsymbol{\varphi}_N - \overline{\mathbf{y}}_t\cdot\nabla\widehat{\psi}] - \tau_t\widehat{\psi}_t; \\ \breve{g}_2 &= -\tau[\mu_{tt}\zeta + \mu_t\zeta_t - \mu(\boldsymbol{\varphi}_t\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}) - \mu_t\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}} - \overline{\mathbf{y}}_t\cdot\nabla\widehat{\zeta}] - \tau_t\widehat{\zeta}_t. \end{aligned}$$

A fim de obtermos uma estimativa de $\breve{\boldsymbol{\varphi}}_t$ em $L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))$, primeiramente deduziremos estimativas de $D\breve{\boldsymbol{\varphi}}\overline{\mathbf{y}}$, $\overline{\theta}\nabla\breve{\psi}$ e $\overline{c}\nabla\breve{\zeta}$ neste mesmo espaço. Com efeito, basta olharmos $(\breve{\boldsymbol{\varphi}}, \breve{\pi}, \breve{\psi}, \breve{\zeta})$ como a solução fraca de (2.48). Assim, temos que

$$\begin{aligned} & \|\breve{\boldsymbol{\varphi}}\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})} + \|\breve{\psi}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|\breve{\zeta}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\ & \leq C\left(\|\breve{\mathbf{G}}\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))} + \|\breve{g}_1\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \|\breve{g}_2\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\right), \end{aligned} \tag{2.49}$$

em que

$$C = Ce^{CT(1+\|\overline{\mathbf{y}}\|^2_\infty + \|\overline{\theta}\|^2_\infty + \|\overline{c}\|^2_\infty)}.$$

Logo, temos uma limitação para $\|D\breve{\boldsymbol{\varphi}}\|_{\mathbf{L}^2(Q)}$, $\|\nabla\breve{\psi}\|_{\mathbf{L}^2(Q)}$ e $\|\nabla\breve{\zeta}\|_{\mathbf{L}^2(Q)}$.

A partir de agora, vamos aceitar que os seguintes termos $(\tau D\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\overline{\mathbf{y}}_t)_i$, $(\tau\overline{\theta}_t\nabla\widehat{\psi})_i$, $(\tau\overline{c}_t\nabla\widehat{\zeta})_i$, $\tau\overline{\mathbf{y}}_t\cdot\nabla\widehat{\psi}$, $\tau\overline{\mathbf{y}}_t\cdot\nabla\widehat{\zeta}$ pertencem a $L^2(0,T;L^r(\Omega))$, e isto será provado na etapa 6.

Agora, vamos decompor os termos da primeira equação do sistema (2.48) que não tem divergência nula. Mais precisamente, graças à *decomposição de Helmholtz*, existem funções reais, h_1 e h_2, e funções vetoriais, $\mathbf{h}_3$ e $\mathbf{h}_4$, tais que

$$
\begin{aligned}
D\breve{\boldsymbol{\varphi}}\overline{\mathbf{y}} + \overline{\theta}\nabla\breve{\psi} + \overline{c}\nabla\breve{\zeta} &= \nabla h_1 + \mathbf{h}_3;\\
\tau D\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\overline{\mathbf{y}}_t + \tau\overline{\theta}_t\nabla\widehat{\psi} + \tau\overline{c}_t\nabla\widehat{\zeta} &= \nabla h_2 + \mathbf{h}_4
\end{aligned}
$$

em que $\nabla h_1,\ \mathbf{h}_3 \in \mathbf{L}^2(Q)$, $\nabla\cdot\mathbf{h}_3 = 0$ e $\nabla h_1,\ \mathbf{h}_3$ dependem continuamente de $D\breve{\boldsymbol{\varphi}}\overline{\mathbf{y}} + \overline{\theta}\nabla\breve{\psi} + \overline{c}\nabla\breve{\zeta}$ em $\mathbf{L}^2(Q)$; $\nabla h_2,\ \mathbf{h}_4 \in L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))$, $\nabla\cdot\mathbf{h}_4 = 0$ e $\nabla h_2,\ \mathbf{h}_4$ dependem continuamente de $\tau D\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\overline{\mathbf{y}}_t + \tau\overline{\theta}_t\nabla\widehat{\psi} + \tau\overline{c}_t\nabla\widehat{\zeta}$ em $L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))$.

Desta forma, a primeira equação do sistema (2.48) pode ser escrita da seguinte forma:

$$
-\breve{\boldsymbol{\varphi}}_t - \Delta\breve{\boldsymbol{\varphi}} + \nabla\breve{m} = \breve{\mathbf{J}},
$$

em que $\breve{m} = \breve{\pi} - h_1 - h_2$ e $\breve{\mathbf{J}} = \tau\mu_{tt}\boldsymbol{\varphi} - \tau\mu_t\boldsymbol{\varphi}_t - \tau_t\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_t + \mathbf{h}_3 + \mathbf{h}_4$.

Notemos que $\breve{\mathbf{J}}$ tem divergência nula, ou seja, $\nabla\cdot\breve{\mathbf{J}} = 0$. Assim, aplicando o Lema 1.6.3, podemos deduzir que $\breve{\boldsymbol{\varphi}}_t \in L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))$ e temos a seguinte estimativa

$$
\|\breve{\boldsymbol{\varphi}}_t\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))} \leq C\|\breve{\mathbf{J}}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))}, \tag{2.50}
$$

para uma constante positiva C que depende somente de Ω.

Uma vez que $\mathbf{L}^r(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, (2.49) e (2.50) implicam que

$$
\begin{aligned}
\|\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{tt}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))} \leq C\Big(&\|\tau\mu_{tt}\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\tau\mu_t\boldsymbol{\varphi}_t\|_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\tau D\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\overline{\mathbf{y}}_t\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))}\\
&+ \|\tau\overline{\theta}_t\nabla\widehat{\psi}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))} + \|\tau\overline{c}_t\nabla\widehat{\zeta}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))} + \|\tau_t\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_t\|_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+ \|\tau\mu_{tt}\psi\|_{L^2(Q)} + \|\tau\mu_t\psi_t\|_{L^2(Q)} + \|\tau\mu(\boldsymbol{\varphi}_N)_t\|_{L^2(Q)}\\
&+ \|\tau\mu_t\boldsymbol{\varphi}_N\|_{L^2(Q)} + \|\tau\overline{\mathbf{y}}_t\cdot\nabla\widehat{\psi}\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} + \|\tau_t\widehat{\psi}_t\|_{L^2(Q)}\\
&+ \|\tau\mu_{tt}\zeta\|_{L^2(Q)} + \|\tau\mu_t\zeta_t\|_{L^2(Q)} + \|\tau\mu\boldsymbol{\varphi}_t\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}\|_{L^2(Q)}\\
&+ \|\tau\mu_t\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}\|_{L^2(Q)} + \|\tau\overline{\mathbf{y}}_t\cdot\nabla\widehat{\zeta}\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} + \|\tau_t\widehat{\zeta}_t\|_{L^2(Q)}\Big),
\end{aligned}
$$

em que $C = C[1 + (\|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty^2 + \|\overline{\theta}\|_\infty^2 + \|\overline{c}\|_\infty^2)e^{CT(1+\|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty^2+\|\overline{\theta}\|_\infty^2+\|\overline{c}\|_\infty^2)}]$.

Combinando a última desigualdade com (2.45), (2.46), (2.47) e fazendo algumas estimativas, obtemos uma desigualdade de seguinte forma

$$
\begin{aligned}
\int_{\omega_1\times(0,T)} \mu^{-2}\hat{\mu}^2|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_t|^2 d\mathbf{x}dt \leq C\Big[&\lambda^{14}(1+T)\Big(\|\mu\mathbf{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\mu g_1\|^2_{L^2(Q)} + \|\mu g_2\|^2_{L^2(Q)}\\
&+\|\mu\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))}+\|\mu_t\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))}+\|\mu\nabla\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))}\\
&+\|\mu\nabla\psi\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))} + \|\mu\nabla\zeta\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))}\Big) + \|\tau\mu_{tt}\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+ \|\tau\mu_t\boldsymbol{\varphi}_t\|_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau D\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\overline{\mathbf{y}}_t\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))}+\|\tau\overline{\theta}_t\nabla\widehat{\psi}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))}\\
&+ \|\tau\overline{c}_t\nabla\widehat{\zeta}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))} + \|\tau_t\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_t\|_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\tau\mu_{tt}\psi\|_{L^2(Q)}\\
&+ \|\tau\mu_t\psi_t\|_{L^2(Q)} + \|\tau\mu(\boldsymbol{\varphi}_N)_t\|_{L^2(Q)} + \|\tau\mu_t\boldsymbol{\varphi}_N\|_{L^2(Q)}\\
&+ \|\tau\overline{\mathbf{y}}_t\cdot\nabla\widehat{\psi}\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} + \|\tau_t\widehat{\psi}_t\|_{L^2(Q)} + \|\tau\mu_{tt}\zeta\|_{L^2(Q)}\\
&+ \|\tau\mu_t\zeta_t\|_{L^2(Q)} + \|\tau\mu\boldsymbol{\varphi}_t\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}\|_{L^2(Q)} + \|\tau\mu_t\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}\|_{L^2(Q)}\\
&+ \|\tau\overline{\mathbf{y}}_t\cdot\nabla\widehat{\zeta}\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} + \|\tau_t\widehat{\zeta}_t\|_{L^2(Q)}\Big].
\end{aligned}
$$

em que C é da mesma forma como na desigualdade anterior.

Para finalizar esta etapa, combinamos (2.42), (2.44) e a desigualdade anterior para obtemos a seguinte estimativa de $\boldsymbol{\varphi}_t$

$$
\begin{aligned}
\int_{\omega_1\times(0,T)} \hat{\mu}^2|\boldsymbol{\varphi}_t|^2 d\mathbf{x}dt \leq C\Big[&\lambda^{14}(1+T)\Big(\|\mu\mathbf{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\mu g_1\|^2_{L^2(Q)} + \|\mu g_2\|^2_{L^2(Q)}\\
&+ \|\mu\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))} + \|\mu_t\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))}\\
&+ \|\mu\nabla\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))} + \|\mu\nabla\psi\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))}\\
&+\|\mu\nabla\zeta\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))}\Big) + \|\tau\mu_{tt}\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\tau\mu_t\boldsymbol{\varphi}_t\|_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+ \|\tau D\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\overline{\mathbf{y}}_t\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))} + \|\tau\overline{\theta}_t\nabla\widehat{\psi}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))}\\
&+ \|\tau\overline{c}_t\nabla\widehat{\zeta}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))} + \|\tau_t\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_t\|_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\tau\mu_{tt}\psi\|_{L^2(Q)}\\
&+ \|\tau\mu_t\psi_t\|_{L^2(Q)} + \|\tau\mu(\boldsymbol{\varphi}_N)_t\|_{L^2(Q)} + \|\tau\mu_t\boldsymbol{\varphi}_N\|_{L^2(Q)}\\
&+ \|\tau\overline{\mathbf{y}}_t\cdot\nabla\widehat{\psi}\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} + \|\tau_t\widehat{\psi}_t\|_{L^2(Q)} + \|\tau\mu_{tt}\zeta\|_{L^2(Q)}\\
&+ \|\tau\mu_t\zeta_t\|_{L^2(Q)} + \|\tau\mu\boldsymbol{\varphi}_t\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}\|_{L^2(Q)} + \|\tau\mu_t\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}\|_{L^2(Q)}\\
&+ \|\tau\overline{\mathbf{y}}_t\cdot\nabla\widehat{\zeta}\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} + \|\tau_t\widehat{\zeta}_t\|_{L^2(Q)}\Big],
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

em que C é da mesma forma como na desigualdade anterior.

Etapa 6. Estimativas de $\tau D\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\overline{\mathbf{y}}_t,\ \tau\overline{\theta}_t\nabla\widehat{\psi},\ \tau\overline{\mathbf{y}}_t\cdot\nabla\widehat{\psi},\ \tau\overline{c}_t\nabla\widehat{\zeta},\ \tau\overline{\mathbf{y}}_t\cdot\nabla\widehat{\zeta}$.

A estratégia que seguimos nesta etapa é deduzir uma estimativa de $\tau\widehat{\varphi}_i$, $\tau\widehat{\psi}$ e $\tau\widehat{\zeta}$, em $L^\infty(0,T;W^{1,l}(\Omega))$ para todo $l<+\infty$. Note que, uma vez que isto é alcançado, das hipóteses (2.4) e (2.5) e da escolha que fizemos para r podemos obter, sem muita dificuldade, uma estimativa de $(\tau D\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\overline{\mathbf{y}}_t)_i$, $(\tau\overline{\theta}_t\nabla\widehat{\psi})_i$, $(\tau\overline{c}_t\nabla\widehat{\zeta})_i$, $\tau\overline{\mathbf{y}}_t\cdot\nabla\widehat{\psi}$, $\tau\overline{\mathbf{y}}_t\cdot\nabla\widehat{\zeta}$ em $L^2(0,T;L^r(\Omega))$. Por exemplo, usando a desigualdade de Hölder, temos

$$
\begin{aligned}
\|\overline{\mathbf{y}}_t\cdot\tau\nabla\widehat{\psi}\|^2_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} &\le \int_0^T\left(\|\overline{\mathbf{y}}_t(t)\|_{\mathbf{L}^\kappa(\Omega)}\|\tau(t)\nabla\widehat{\psi}(t)\|_{\mathbf{L}^{\frac{\kappa r}{\kappa-r}}(\Omega)}\right)^2dt\\
&\le \int_0^T\left(\|\overline{\mathbf{y}}_t(t)\|_{\mathbf{L}^\kappa(\Omega)}\|\tau(t)\widehat{\psi}(t)\|_{W^{1,\frac{\kappa r}{\kappa-r}}(\Omega)}\right)^2dt\\
&\le \|\tau\widehat{\psi}\|^2_{L^\infty(0,T;W^{1,\frac{\kappa r}{\kappa-r}}(\Omega))}\int_0^T\|\overline{\mathbf{y}}_t(t)\|^2_{\mathbf{L}^\kappa(\Omega)}dt\\
&\le \|\tau\widehat{\psi}\|^2_{L^\infty(0,T;W^{1,\frac{\kappa r}{\kappa-r}}(\Omega))}\|\overline{\mathbf{y}}_t\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^\kappa(\Omega))}
\end{aligned}
$$

Nesta etapa, precisaremos das seguintes imersões:

$$
\begin{aligned}
&L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))\cap L^\infty(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))\hookrightarrow L^{k_1}(0,T;\mathbf{L}^{k_2}(\Omega));\\
&L^2(0,T;\mathbf{L}^6(\Omega))\cap L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))\hookrightarrow L^{k_3}(0,T;\mathbf{L}^{k_4}(\Omega));\\
&\text{em que } \frac{2}{k_1}+\frac{6}{k_2}=1 \text{ e } \frac{4/3}{k_3}+\frac{2}{k_4}=1.
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

A quádrupla $(\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}},\ \tau\widehat{\pi},\ \tau\widehat{\psi},\ \tau\widehat{\zeta})$ resolve o seguinte sistema:

$$
\begin{cases}
-(\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}})_t-\Delta(\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}})-D(\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}})\overline{\mathbf{y}}+\nabla(\tau\widehat{\pi})=\mathbf{M} & \text{em} \quad Q,\\
\nabla\cdot(\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}})=0 & \text{em} \quad Q,\\
-(\tau\widehat{\psi})_t-\Delta(\tau\widehat{\psi})-\overline{\mathbf{y}}\cdot\nabla(\tau\widehat{\psi})=m_1 & \text{em} \quad Q,\\
-(\tau\widehat{\zeta})_t-\Delta(\tau\widehat{\zeta})-\overline{\mathbf{y}}\cdot\nabla(\tau\widehat{\zeta})=m_2 & \text{em} \quad Q,\\
\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}}=\mathbf{0},\ \tau\widehat{\psi}=\tau\widehat{\zeta}=0 & \text{sobre} \quad \Sigma,\\
(\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}})(T)=\mathbf{0},\ (\tau\widehat{\psi})(T)=(\tau\widehat{\zeta})(T)=0 & \text{em} \quad \Omega,
\end{cases}
\tag{2.53}
$$

em que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}&=-\tau_t\widehat{\boldsymbol{\varphi}}-\tau\mu_t\boldsymbol{\varphi}+\overline{\theta}\nabla(\tau\widehat{\psi})+\overline{c}\nabla(\tau\widehat{\zeta});\\
m_1&=-\tau_t\widehat{\psi}-\tau\mu_t\psi+\tau\mu(\boldsymbol{\varphi}_N);\\
m_2&=-\tau_t\widehat{\zeta}-\tau\mu_t\zeta+\tau\mu(\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}).
\end{aligned}
$$

Vamos deduzir que $\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_i$, $\tau\widehat{\psi}$ e $\tau\widehat{\zeta}$ pertencem a $L^\infty(0,T;W^{1,l}(\Omega))$ por meio de um argumento de *bootstrap*.

Primeiramente, olhando $\tau\mathbf{r}^2\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$, $\tau\widehat{\psi}$ e $\tau\widehat{\zeta}$ como a solução forte de (2.53) e usando o fato que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, concluimos que

$$D(\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}})\overline{\mathbf{y}},\ \overline{\theta}\nabla(\tau\widehat{\psi}),\ \overline{c}\nabla(\tau\widehat{\zeta}) \in L^2(0,T;\mathbf{L}^6(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)).$$

Daí, por (2.52), estes termos também pertencem ao espaço $L^{k_3}(0,T;\mathbf{L}^{k_4}(\Omega))$.

Usando novamente a decomposição de Helmholtz, escrevemos

$$D(\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}})\overline{\mathbf{y}} + \overline{\theta}\nabla(\tau\widehat{\psi}) + \overline{c}\nabla(\tau\widehat{\zeta}) = \mathbf{h}_5 + \nabla h_6,$$

para $\mathbf{h}_5$, $\nabla h_6 \in L^{k_3}(0,T;\mathbf{L}^{k_4}(\Omega))$, com $\nabla \cdot \mathbf{h}_5 = 0$, em que $\mathbf{h}_5$ e ∇h_6 dependem continuamente de $D(\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}})\overline{\mathbf{y}} + \overline{\theta}\nabla(\tau\widehat{\psi}) + \overline{c}\nabla(\tau\widehat{\zeta})$ no espaço $L^{k_3}(0,T;\mathbf{L}^{k_4}(\Omega))$.

Agora, olharemos a primeira equação do sistema (2.53) com uma pressão $\tau\widehat{\pi} - h_6$ e um lado direito $-\tau_t\widehat{\boldsymbol{\varphi}} - \tau\mu_t\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{h}_5$ cuja divergência é nula. Portanto, usando o Lema 1.6.3, deduzimos que $\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$ pertence a $L^{k_3}(0,T;\mathbf{W}^{2,k_4}(\Omega))$. Podemos também concluir que $\tau\widehat{\psi}$ e $\tau\widehat{\zeta}$ pertencem a $L^{k_3}(0,T;W^{2,k_4}(\Omega))$ e que

$$\begin{aligned}\|\tau(\widehat{\boldsymbol{\varphi}},\widehat{\psi},\widehat{\zeta})\|_{L^{k_3}(0,T;\mathbf{W}^{2,k_4}(\Omega))} \leq{}& C\|\mathbf{h}_5 - \tau_t\widehat{\boldsymbol{\varphi}} - \tau\mu_t\boldsymbol{\varphi}\|_{L^{k_3}(0,T;\mathbf{L}^{k_4}(\Omega))}\\ &+ \|\overline{\mathbf{y}}\cdot\nabla(\tau\widehat{\psi}) - \tau_t\widehat{\psi} - \tau\mu_t\psi + \tau\mu\varphi_N\|_{L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega))}\\ &+ \|\tau\overline{\mathbf{y}}\cdot\nabla\widehat{\zeta} - \tau_t\widehat{\zeta} - \tau\mu_t\zeta + \tau\mu(\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}})\|_{L^{k_3}(0,T;L^{k_4}(\Omega))}.\end{aligned} \tag{2.54}$$

Portanto, $(D(\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}}))_i$, $\nabla(\tau\widehat{\psi})$ e $\nabla(\tau\widehat{\zeta})$ pertencem a $L^{k_3}(0,T;W^{1,k_4}(\Omega))$.

Agora, podemos escolher $k_4 \in [3,6)$ e assim concluirmos que $(D(\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}}))_i$, $\nabla(\tau\widehat{\psi})$ e $\nabla(\tau\widehat{\zeta})$ pertencem ao espaço $L^{k_3}(0,T;\mathbf{L}^l(\Omega)$, com $l > 6$ e $k_3 \in (2,4]$ (veja (2.52)).

Observação 2.2.6. *Acima, usamos o fato de que a condição* $3 \leq k_4$ *nos garante que* $\mathbf{W}^{1,k_4}(\Omega)$ *está imerso continuamente em* $\mathbf{L}^l(\Omega)$.

Em segundo lugar, vamos fazer outra decomposição de Helmholtz aplicada ao seguinte termo $D(\tau\mathbf{r}^2)\overline{\mathbf{y}} + \overline{\theta}\nabla(\tau w^2) + \overline{c}\nabla(\tau z^2)$ e escrevemos

$$D(\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}})\overline{\mathbf{y}} + \overline{\theta}\nabla(\tau\widehat{\psi}) + \overline{c}\nabla(\tau\widehat{\zeta}) = \mathbf{h}_7 + \nabla h_8,$$

para $\mathbf{h}_7$, $\nabla h_8 \in L^{k_3}(0,T;\mathbf{L}^l(\Omega))$, com $\nabla \cdot \mathbf{h}_7 = 0$, em que $\mathbf{h}_7$ e ∇h_8 dependem continuamente de $D(\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}})\overline{\mathbf{y}} + \overline{\theta}\nabla(\tau\widehat{\psi}) + \overline{c}\nabla(\tau\widehat{\zeta})$ no espaço $L^{k_3}(0,T;\mathbf{L}^l(\Omega))$.

Assim, utilizando novamente o Lema 1.6.3, obtemos que $\nabla(\tau\widehat{\pi})$ pertencem a

$L^{k_3}(0,T;\mathbf{L}^l(\Omega))$ e

$$
\begin{aligned}
\|\nabla(\tau\widehat{\pi}-h_8)\|_{L^{k_3}(0,T;\mathbf{L}^l(\Omega))} \leq R\big(&\|\tau\Delta\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau_t\Delta\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|(\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}})_t\|_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+\|(\tau_t\widehat{\boldsymbol{\varphi}})_t\|_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau\mu_t\Delta\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|(\tau\mu_t\boldsymbol{\varphi})_t\|_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+\|\tau\Delta\widehat{\psi}\|_{L^2(Q)}+\|\tau_t\widehat{\psi}\|_{L^2(Q)}+\|(\tau\widehat{\psi})_t\|_{L^2(Q)}\\
&+\|\tau_t\nabla\widehat{\psi}\|_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau\mu_t\nabla\psi\|_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau\mu_t\psi\|_{L^2(Q)}\\
&+\|\tau\Delta\widehat{\zeta}\|_{L^2(Q)}+\|\tau_t\widehat{\zeta}\|_{L^2(Q)}+\|(\tau\widehat{\zeta})_t\|_{L^2(Q)}\\
&+\|\tau_t\nabla\widehat{\zeta}\|_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau\mu_t\nabla\zeta\|_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau\mu_t\zeta\|_{L^2(Q)}\\
&+\|\tau\mu\varphi_N\|_{L^2(Q)}+\|\tau\mu\nabla\varphi_N\|_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+\|\tau\mu(\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}})\|_{L^2(Q)}+\|\tau\mu\nabla(\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}})\|_{\mathrm{L}^2(Q)}\big).
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

em que $R=C(1+\|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty^2+\|\overline{\theta}\|_\infty^2+\|\overline{c}\|_\infty^2)$.

Esta desigualdade é suficiente para assegurarmos que $\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_i$, $\tau\widehat{\psi}$ e $\tau\widehat{\zeta}$ estão no espaço $L^\infty(0,T;W^{1,l}(\Omega))$ com estimativas explícitas. Por exemplo, vamos encontrar uma estimativa de $\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$ em $L^\infty(0,T;\mathbf{W}^{1,l}(\Omega))$. Para este fim, olharemos para a primeira equação de (2.53) como um sistema de N equações do calor em que o lado direito é dado por

$$B_i := -\tau_t\widehat{\varphi}_i-\tau\theta_t\varphi_i+(\mathbf{h}_7)_i+\partial_i(\tau\widehat{\pi}-h_8)\in L^{k_3}(0,T;L^l(\Omega))$$

e representaremos a solução através do semigrupo do operador da equação do calor. Assim, temos

$$\|\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(t)\|_{\mathbf{W}^{1,l}(\Omega)}\leq C\int_0^t (t-s)^{-1/2}\|\mathbf{B}(s)\|_{\mathbf{L}^l(\Omega)}\,ds,\ \forall\ t\in(0,T).$$

em que $\mathbf{B}=(B_1,\dots,B_N)$. Desde que $\|\mathbf{B}(\cdot)\|_{\mathbf{L}^l(\Omega)}\in L^{k_3}(0,T)$ e $k_3>2$, pois tomamos $k_4<6$, a desigualdade de Hölder garante que $\|\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\cdot)\|_{\mathbf{W}^{1,l}(\Omega)}\in L^\infty(0,T)$ e

$$\|\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{W}^{1,l}(\Omega))}\leq C(1-k_3'/2)^{-1/k_3'}T^{-1/2+1/k_3'}\|\mathbf{B}\|_{L^{k_3}(0,T;\mathbf{L}^l(\Omega))},$$

em que $\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_3'}=1$.

O mesmo é verdade para $\tau\widehat{\psi}$ e $\tau\widehat{\zeta}$. Então, de (2.55), obtemos a regularidade desejada para $\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$, $\tau\widehat{\psi}$ e $\tau\widehat{\zeta}$ e

$$\begin{aligned}\|\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{W}^{1,l}(\Omega))} \leq CT^{-1/2+1/k_3'}R\Big(&\|\tau\Delta\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\tau'\Delta\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+ \|(\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}})_t\|_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|(\tau'\widehat{\boldsymbol{\varphi}})_t\|_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\tau\mu'\Delta\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+ \|(\tau\mu'\boldsymbol{\varphi})_t\|_{\mathbf{L}^2(Q)} + \left\|\tau\Delta\widehat{\psi}\right\|_{L^2(Q)} + \left\|\tau'\widehat{\psi}\right\|_{L^2(Q)}\\
&+ \left\|(\tau\widehat{\psi})_t\right\|_{L^2(Q)} + \left\|\tau'\nabla\widehat{\psi}\right\|_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\tau\mu'\nabla\psi\|_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+ \|\tau\mu'\psi\|_{L^2(Q)} + \left\|\tau\Delta\widehat{\zeta}\right\|_{L^2(Q)} + \left\|\tau'\widehat{\zeta}\right\|_{L^2(Q)}\\
&+ \left\|\tau'\nabla\widehat{\zeta}\right\|_{\mathbf{L}^2(Q)} + \left\|(\tau\widehat{\zeta})_t\right\|_{L^2(Q)} + \|\tau\mu'\nabla\zeta\|_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+ \|\tau\mu'\zeta\|_{L^2(Q)} + \|\tau\mu\varphi_N\|_{L^2(Q)} + \|\tau\mu\nabla\varphi_N\|_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+ \left\|\tau\mu(\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}})\right\|_{L^2(Q)} + \left\|\tau\mu\nabla(\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}})\right\|_{\mathbf{L}^2(Q)}\Big).\end{aligned} \tag{2.56}$$

em que $R = C(1 + \|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty^2 + \left\|\overline{\theta}\right\|_\infty^2 + \|\overline{c}\|_\infty^2)$.

Como mencionamos anteriormente, combinando (2.4), (2.5) e (2.56) encontramos que $(\tau D\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\overline{\mathbf{y}}_t)_i$, $(\tau\overline{\theta}_t\nabla\widehat{\psi})_i$, $(\tau\overline{c}_t\nabla\widehat{\zeta})_i$, $\tau\overline{\mathbf{y}}_t\cdot\nabla\widehat{\psi}$, $\tau\overline{\mathbf{y}}_t\cdot\nabla\widehat{\zeta} \in L^2(0,T;L^r(\Omega))$. Além disso,

$$\begin{aligned}&\|\tau D\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\overline{\mathbf{y}}_t\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega)} + \left\|\tau\overline{\theta}_t\nabla\widehat{\psi}\right\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))} + \left\|\tau\overline{c}_t\nabla\widehat{\zeta}\right\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))}\\
&+ \left\|\tau\overline{\mathbf{y}}_t\cdot\nabla\widehat{\psi}\right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} + \left\|\tau\overline{\mathbf{y}}_t\cdot\nabla\widehat{\zeta}\right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))}\\
\leq\ &\widehat{K}\Big(\|\tau\Delta\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\tau'\Delta\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|(\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}})_t\|_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|(\tau'\widehat{\boldsymbol{\varphi}})_t\|_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+ \|\tau\mu'\Delta\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|(\tau\mu'\boldsymbol{\varphi})_t\|_{\mathbf{L}^2(Q)} + \left\|\tau\Delta\widehat{\psi}\right\|_{L^2(Q)} + \left\|\tau'\widehat{\psi}\right\|_{L^2(Q)}\\
&+ \left\|(\tau\widehat{\psi})_t\right\|_{L^2(Q)} + \left\|\tau'\nabla\widehat{\psi}\right\|_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\tau\mu'\nabla\psi\|_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\tau\mu'\psi\|_{L^2(Q)}\\
&+ \left\|\tau\Delta\widehat{\zeta}\right\|_{L^2(Q)} + \left\|\tau'\widehat{\zeta}\right\|_{L^2(Q)} + \left\|(\tau\widehat{\zeta})_t\right\|_{L^2(Q)} + \left\|\tau'\nabla\widehat{\zeta}\right\|_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+ \|\tau\mu'\nabla\zeta\|_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\tau\mu'\zeta\|_{L^2(Q)} + \|\tau\mu\varphi_N\|_{L^2(Q)} + \|\tau\mu\nabla\varphi_N\|_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+ \left\|\tau\mu(\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}})\right\|_{L^2(Q)} + \left\|\tau\mu\nabla(\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}})\right\|_{\mathbf{L}^2(Q)}\Big),\end{aligned} \tag{2.57}$$

em que

$$\widehat{K} = T^{-1/2+1/k_3'}R\left(\|\overline{\mathbf{y}}_t\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))} + \left\|\overline{\theta}_t\right\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))} + \|\overline{c}_t\|_{L^2(0,T;L^r(\Omega))}\right)$$

with $R = C(1 + \|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty^2 + \left\|\overline{\theta}\right\|_\infty^2 + \|\overline{c}\|_\infty^2)$.

Observação 2.2.7. *A potência de T depende somente de κ, veja (2.4) e (2.5), uma vez que κ determina os valores admissíveis de l e k_3. Com efeito, do fato que $2 < k_3 \leq 4$ encontramos que $4/3 \leq k_3' < 2$ e portanto, $0 < -1 + 2/k_3' \leq 1/2$.*

Combinando as estimativas (2.51) e (2.57), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\omega_1\times(0,T)} |\hat{\mu}|^2|\boldsymbol{\varphi}_t|^2 d\mathbf{x}dt \leq\ & C(1+\|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty^6+\left\|\overline{\theta}\right\|_\infty^6+\|\overline{c}\|_\infty^6)e^{CT(1+\|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty^2+\left\|\overline{\theta}\right\|_\infty^2+\|\overline{c}\|_\infty^2)}\\
&\times\Big(\|\overline{\mathbf{y}}_t\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^r(\Omega))}+\left\|\overline{\theta}_t\right\|^2_{L^2(0,T;L^r(\Omega))}+\|\overline{c}_t\|^2_{L^2(0,T;L^r(\Omega))}\Big)\\
&\Big[\lambda^{14}(1+T)\Big(\|\mu\mathbf{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\mu g_1\|^2_{L^2(Q)}+\|\mu g_2\|^2_{L^2(Q)}\\
&+\|\mu\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))}+|\mu'\boldsymbol{\varphi}|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))}\\
&+\|\mu\nabla\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))}+\|\mu\nabla\psi\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))}\\
&+\|\mu\nabla\zeta\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))}\Big)+(1+T^{1/2})\left(J_1(\boldsymbol{\varphi})+J_2(\psi)\right.\\
&\left.+J_3(\zeta)+J_4(\widehat{\boldsymbol{\varphi}})+J_5(\widehat{\psi})+J_6(\widehat{\zeta})\right)\Big],
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

em que

$$
\begin{aligned}
J_1(\boldsymbol{\varphi}) =\ & \|\tau\mu''\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau'\mu'\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau\mu'\boldsymbol{\varphi}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+\|\tau\mu'\Delta\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau\mu(\varphi_N)_t\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau\mu'\varphi_N\|^2_{L^2(Q)}\\
&+\|\tau'\mu\varphi_N\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau\mu\Delta\varphi_N\|^2_{L^2(Q)}+\left\|\tau\mu(\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{b}})_t\right\|^2_{L^2(Q)}\\
&+\left\|\tau\mu'(\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{b}})\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|\tau'\mu(\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{b}})\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|\tau\mu\Delta(\varphi\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{b}})\right\|^2_{L^2(Q)};\\
J_2(\psi) =\ & \|\tau\mu''\psi\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau\mu'\psi_t\|^2_{L^2(Q)}\\
&+\|\tau\mu'\Delta\psi\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau'\mu'\psi\|^2_{L^2(Q)};\\
J_3(\zeta) =\ & \|\tau\mu''\zeta\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau\mu'\zeta_t\|^2_{L^2(Q)}\\
&+\|\tau\mu'\Delta\zeta\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau'\mu'\zeta\|^2_{L^2(Q)};\\
J_4(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}) =\ & \|\tau\Delta\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau'\Delta\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau'\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+\|\tau'\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau''\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)};\\
J_5(\widehat{\psi}) =\ & \left\|\tau\Delta\widehat{\psi}\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|(\tau)'\Delta\widehat{\psi}\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|\tau''\widehat{\psi}\right\|^2_{L^2(Q)}\\
&+\left\|\tau'\widehat{\psi}_t\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|\tau\widehat{\psi}_t\right\|^2_{L^2(Q)};\\
J_6(\widehat{\zeta}) =\ & \left\|\tau\Delta\widehat{\zeta}\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|(\tau)'\Delta\widehat{\zeta}\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|\tau''\widehat{\zeta}\right\|^2_{L^2(Q)}\\
&+\left\|\tau'\widehat{\zeta}_t\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|\tau\widehat{\zeta}_t\right\|^2_{L^2(Q)}.
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

Etapa 7. Últimos arranjamentos e conclusões

Uma vez que $(\widehat{\boldsymbol{\varphi}},\ \widehat{\psi},\ \widehat{\zeta}) = (-\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} + \mu\boldsymbol{\varphi},\ -\widehat{\psi} + \mu\psi,\ -\widehat{\zeta} + \mu\zeta)$, podemos estimar $J_4(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}})$, $J_5(\widehat{\psi})$ e $J_6(\widehat{\zeta})$, respectivamente, por

$$
\begin{aligned}
&\|\tau\Delta\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\tau'\Delta\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+ \|\tau'\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\tau'\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+ \|\tau''\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\tau\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+ \|\tau\Delta\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\tau'\Delta\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+ \|\tau'\boldsymbol{\varphi}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\tau'\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+ \|\tau''\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\tau\boldsymbol{\varphi}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}\,,
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\|\tau\Delta\widetilde{\psi}\right\|^2_{L^2(Q)} + \left\|(\tau)'\Delta\widetilde{\psi}\right\|^2_{L^2(Q)}\\
&+ \left\|\tau''\widetilde{\psi}\right\|^2_{L^2(Q)} + \left\|\tau'\widetilde{\psi}_t\right\|^2_{L^2(Q)}\\
&+ \left\|\tau\widetilde{\psi}_t\right\|^2_{L^2(Q)} + \|\tau\Delta\psi\|^2_{L^2(Q)}\\
&+ \|(\tau)'\Delta\psi\|^2_{L^2(Q)} + \|\tau''\psi\|^2_{L^2(Q)}\\
&+ \|\tau'\psi_t\|^2_{L^2(Q)} + \|\tau\psi_t\|^2_{L^2(Q)}
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\left\|\tau\Delta\widetilde{\zeta}\right\|^2_{L^2(Q)} + \left\|(\tau)'\Delta\widetilde{\zeta}\right\|^2_{L^2(Q)}\\
&+ \left\|\tau''\widetilde{\zeta}\right\|^2_{L^2(Q)} + \left\|\tau'\widetilde{\zeta}_t\right\|^2_{L^2(Q)}\\
&+ \left\|\tau\widetilde{\zeta}_t\right\|^2_{L^2(Q)} + \|\tau\Delta\zeta\|^2_{L^2(Q)}\\
&+ \|(\tau)'\Delta\zeta\|^2_{L^2(Q)} + \|\tau''\zeta\|^2_{L^2(Q)}\\
&+ \|\tau'\zeta_t\|^2_{L^2(Q)} + \|\tau\zeta_t\|^2_{L^2(Q)}\,.
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

Para todos os termos relativos a $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$, $\widetilde{\psi}$ e $\widetilde{\zeta}$, usaremos a estimativa (2.43) desde que τ, τ' e τ'' são funções limitadas em $[0,T]$, para $s \geq s_6(T^4 + T^8)$. Assim, usando

(2.58)-(2.62), temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\omega_1\times(0,T)}|\hat{\mu}|^2|\boldsymbol{\varphi}_t|^2 d\mathbf{x}dt \leq C\widetilde{K}\Big[&\lambda^{14}(1+T)\Big(\|\mu\mathbf{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\mu g_1\|^2_{L^2(Q)}+\|\mu g_2\|^2_{L^2(Q)}\\
&+\|\mu\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))}+|\mu'\boldsymbol{\varphi}|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))}+\|\mu\nabla\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(\mathbf{L}^2(\omega_4))}\\
&+\|\mu\nabla\psi\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))}+\|\mu\nabla\zeta\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))}\Big)\\
&+(1+T^{1/2})\Big(\|\tau\mu''\varphi\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau'\mu'\varphi\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+\|\tau\mu'\boldsymbol{\varphi}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau\mu\Delta\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau'\mu\Delta\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+\|\tau'\mu\boldsymbol{\varphi}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau'\mu\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau''\mu\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+\|\tau\mu'\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau\mu\boldsymbol{\varphi}_t\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}+\|\tau\mu'\Delta\boldsymbol{\varphi}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}\\
&+\|\tau'\mu\Delta\psi\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau\mu\Delta\psi\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau'\mu'\psi\|^2_{L^2(Q)}\\
&+\|\tau''\mu\psi\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau'\mu\psi_t\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau\mu'\psi\|^2_{L^2(Q)}\\
&+\|\tau\mu'\psi\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau\mu\psi_t\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau\mu''\psi\|^2_{L^2(Q)}\\
&+\|\tau\mu'\psi_t\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau\mu'\Delta\psi\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau\mu'\Delta\zeta\|^2_{L^2(Q)}\\
&+\|\tau'\mu\Delta\zeta\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau\mu\Delta\zeta\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau'\mu'\zeta\|^2_{L^2(Q)}\\
&+\|\tau''\mu\zeta\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau'\mu\zeta_t\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau\mu'\zeta\|^2_{L^2(Q)}\\
&+\|\tau\mu'\zeta\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau\mu\zeta_t\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau\mu''\zeta\|^2_{L^2(Q)}\\
&+\|\mu'\zeta_t\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau\mu(\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}})_t\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau\mu'(\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}})\|^2_{L^2(Q)}\\
&+\|\tau'\mu(\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}})\|^2_{L^2}+\|\tau\mu\Delta(\boldsymbol{\varphi}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}})\|^2_{L^2}+\|\tau\mu(\varphi_N)_t\|^2_{L^2}\\
&+\|\tau\mu'\varphi_N\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau'\mu\varphi_N\|^2_{L^2(Q)}+\|\tau\mu\Delta\varphi_N\|^2_{L^2(Q)}\Big)\Big],
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

em que

$$\widetilde{K}=(1+\|\overline{\mathbf{y}}\|^8_\infty+\|\overline{\theta}\|^8_\infty+\|\overline{c}\|^8_\infty)(\|\overline{\mathbf{y}}_t\|_{L^2(\mathbf{L}^r)}+\|\overline{\theta}_t\|_{L^2(L^r)}+\|\overline{c}_t\|_{L^2(L^r)})e^{CT(1+\|\overline{\mathbf{y}}\|^2_\infty+\|\overline{\theta}\|^2_\infty+\|\overline{c}\|^2_\infty)}.$$

Agora estimaremos os termos globais em $\boldsymbol{\varphi}$, ψ e ζ e mostraremos que eles podem ser eliminados usando o lado esquerdo de (2.27). Para este fim, vamos primeiro escrever abaixo algumas limitações das funções peso que aparecem em (2.63):

$$
\begin{aligned}
&|\tau\mu|\leq C_{18}Ts^{-7/4}\lambda^{-5}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{-7/4},\\
&|\tau\mu'|+|\tau'\mu|\leq C_{19}Ts^{-3/4}\lambda^{-4}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{-1/2},\\
&|\tau'\mu'|+|\tau''\mu|+|\tau\mu''|\leq C_{20}T^2s^{1/4}\lambda^{-4}e^{-s\alpha^*}\hat{\xi}^{3/4}.
\end{aligned}
$$

Com isto, para $0 < \beta \leq 1/2$, temos

$$T^{\beta}(|\tau\mu'| + |\tau'\mu|) \leq C_{21}s^{-1/2}\lambda^{-4}e^{-s\alpha^*}(\xi^*)^{-1/2},$$
$$T^{\beta}(|\tau'\mu'| + |\tau''\mu| + |\tau\mu''|) \leq C_{22}s^{3/2}\lambda^{-4}e^{-s\alpha^*}\hat{\xi}^{3/2},$$

para $s \geq s_7(T^7 + T^8)$.

Combinando isto com (2.63), temos

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\omega_2}|\hat{\mu}|^2|\varphi_t|^2 d\mathbf{x}dt \leq & \widehat{C}\widetilde{K}\Big[\lambda^{14}(1+T)\Big(\|\mu\mathbf{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\mu g_1\|^2_{L^2(Q)} + \|\mu g_2\|^2_{L^2(Q)} \\ & + \|\mu\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4)} + |\mu'\boldsymbol{\varphi}|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4)} + \|\mu\nabla\psi\|^2_{L^2(\mathbf{L}^2(\omega_4))} \\ & +\|\mu\nabla\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))} + \|\mu\nabla\zeta\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4)))}\Big) \\ & + s^3\lambda^{-10}\int_Q e^{-2s\alpha*}(\hat{\xi})^3(|\boldsymbol{\varphi}|^2 + |\psi|^2 + |\zeta|^2)d\mathbf{x}dt \\ & + s^{-1}\int_Q e^{-2s\alpha*}(\xi^*)^{-1}(|\boldsymbol{\varphi}_t|^2 + |\Delta\boldsymbol{\varphi}|^2 + |\psi_t|^2)d\mathbf{x}dt \\ & + s^{-1}\int_Q e^{-2s\alpha*}(\xi^*)^{-1}(|\Delta\psi|^2 + |\zeta_t|^2 + |\Delta\zeta|^2)d\mathbf{x}dt,\end{aligned}$$

para $s \geq s_8(T^4 + T^8)$ e

Desde que $\alpha^*(t) = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}}\alpha(x,t)$, tomando

$$\lambda \geq \lambda_0\left(1+\|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty+\left\|\overline{\theta}\right\|_\infty+\|\overline{c}\|_\infty+\|\overline{\mathbf{y}}_t\|^2_{L^2(\mathbf{L}^r)}+\|\overline{\theta}_t\|^2_{L^2(L^r)}+\|\overline{c}_t\|^2_{L^2(L^r)}+e^{CT(1+\|\overline{\mathbf{y}}\|^2_\infty+\left\|\overline{\theta}\right\|^2_\infty+\|\overline{c}\|^2_\infty)}\right),$$

vemos que

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\omega_2}|\hat{\mu}|^2|\boldsymbol{\varphi}_t|^2 d\mathbf{x}dt \leq C\lambda^{24}(1+T)\Big(&\|\mu\mathbf{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\mu g_1\|^2_{L^2(Q)} + \|\mu g_2\|^2_{L^2(Q)} \\ & + \|\mu\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))} + \|\mu'\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))} \\ & +\|\mu\nabla\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))} + \|\mu\nabla\psi\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))} \\ & +\|\mu\nabla\zeta\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\mathcal{O}_4))}\Big) + \varepsilon I(s,\lambda;\boldsymbol{\varphi},\theta,\zeta),\end{aligned} \tag{2.64}$$

para $C > 0$, em que ε é uma constante pequena que depende de Ω e ω.

Finalmente, combinando (2.27), (2.28), (2.39) e (2.64), encontramos

$$\begin{aligned}I(s,\lambda;\boldsymbol{\varphi},\theta,\zeta) \leq C\lambda^{24}(1+T)\Big(&\|\mu\mathbf{G}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\mu g_1\|^2_{L^2(Q)} + \|\mu g_2\|^2_{L^2(Q)} \\ & + \|\mu\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))} + \|\mu'\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))} \\ & +\|\mu\nabla\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))} + \|\mu\nabla\psi\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))} \\ & +\|\mu\nabla\zeta\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega_4))}\Big),\end{aligned} \tag{2.65}$$

para $s \geq s_{10}(T^4+T^8)$ e

$$\lambda \geq \widetilde{\lambda}\left(1+\|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty+\|\overline{\theta}\|_\infty+\|\overline{c}\|_\infty+\|\overline{\mathbf{y}}_t\|^2_{L^2(\mathbf{L}^r)}+\|\overline{\theta}_t\|^2_{L^2(L^r)}+\|\overline{c}_t\|^2_{L^2(L^r)}+e^{CT(1+\|\overline{\mathbf{y}}\|^2_\infty+\|\overline{\theta}\|^2_\infty+\|\overline{c}\|^2_\infty)}\right),$$

Resta apenas livrar-nos dos termos locais de $\nabla\varphi$, $\nabla\psi$ e $\nabla\zeta$ que aparecem no lado direito de (2.65). Então, introduzimos uma função $\vartheta \in C_0^2(\omega)$ tal que

$$\vartheta \equiv 1 \text{ em } \omega_4,\ 0 \leq \vartheta \leq 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\omega_4} |\mu|^2|\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt \leq &\int_0^T\int_{\omega} |\mu|^2\vartheta|\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt \\ = &\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\omega} |\mu|^2\Delta\vartheta|\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt - \int_0^T\int_{\omega} |\mu|^2\vartheta\Delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi} d\mathbf{x}dt.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young na última integral obtemos seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\omega_4} |\mu|^2|\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt \leq C s\lambda^{24}(1+T) &\int_0^T\int_{\omega} e^{2s\alpha^*}|\mu|^4\xi^*|\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt \\ + \frac{s^{-1}\lambda^{-24}(1+T)^{-1}}{2C} &\int_0^T\int_{\omega} e^{-2s\alpha^*}|\mu|^4(\xi^*)^{-1}|\Delta\boldsymbol{\varphi}|^2 d\mathbf{x}dt,\end{aligned}$$

para uma constante $C(\Omega,\omega)>0$. Cálculos análogos podem ser feitos para as integrais de $\nabla\psi$ e $\nabla\zeta$ e obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\omega_4} |\mu|^2|\nabla\psi|^2 d\mathbf{x}dt \leq C s\lambda^{24}(1+T) &\int_0^T\int_{\omega} e^{2s\alpha^*}|\mu|^4\xi^*|\psi|^2 d\mathbf{x}dt \\ + \frac{s^{-1}\lambda^{-24}(1+T)^{-1}}{2C} &\int_0^T\int_{\omega} e^{-2s\alpha^*}|\mu|^4(\xi^*)^{-1}|\Delta\psi|^2 d\mathbf{x}dt,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\omega_4} |\mu|^2|\nabla\zeta|^2 d\mathbf{x}dt \leq C s\lambda^{24}(1+T) &\int_0^T\int_{\omega} e^{2s\alpha^*}|\mu|^4\xi^*|\zeta|^2 d\mathbf{x}dt \\ + \frac{s^{-1}\lambda^{-24}(1+T)^{-1}}{2C} &\int_0^T\int_{\omega} e^{-2s\alpha^*}|\mu|^4(\xi^*)^{-1}|\Delta\zeta|^2 d\mathbf{x}dt,\end{aligned}$$

Consequentemente, para quaisquer

$$\lambda \geq \widetilde{\lambda}\left(1+\|\overline{\mathbf{y}}\|_\infty+\|\overline{\theta}\|_\infty+\|\overline{c}\|_\infty+\|\overline{\mathbf{y}}_t\|^2_{L^2(\mathbf{L}^r)}+\|\overline{\theta}_t\|^2_{L^2(L^r)}+\|\overline{c}_t\|^2_{L^2(L^r)}+e^{CT(1+\|\overline{\mathbf{y}}\|^2_\infty+\|\overline{\theta}\|^2_\infty+\|\overline{c}\|^2_\infty)}\right),$$

e $s \geq s_9(T^4+T^8)$, obtemos de (2.65) que

$$\begin{aligned}I(s,\lambda;\boldsymbol{\varphi},\theta,\zeta) \leq &\widetilde{C}\left(s^{\frac{15}{2}}\lambda^{24}\int_Q e^{-4s\hat{\alpha}+2s\alpha^*}\xi^{*\frac{15}{2}}(|\mathbf{G}|^2+|g_1|^2+|g_2|^2)d\mathbf{x}dt\right. \\ &\left. + s^{16}\lambda^{48}\int_0^T\int_{\omega} e^{-8s\hat{\alpha}+6s\alpha^*}\xi^{*16}(|\boldsymbol{\varphi}|^2+|\theta|^2+|\zeta|^2)d\mathbf{x}dt\right).\end{aligned}$$

Esta é exatamente a desigualdade de Carleman dada no Teorema 2.2.1. ■

2.3 Uma nova desigualdade de Carleman para o sistema adjunto

Estabeleceremos uma nova desigualdades de Carleman para as soluções de (2.7) e, a partir desta, obteremos um resultado de controlabilidade nula para o sistema (2.6) com um número reduzido de controles escalares. Assumiremos que ω, $\overline{\mathbf{y}}$, $\overline{\theta}$ e $\overline{c}$ satisfazem (2.3)-(2.5) e, por simplicidade, que $N = 3$ e $n_1(\mathbf{x}_0) \neq 0$ (veja (2.3)).

A desigualdade de Carleman que encontraremos terá a seguinte forma

$$
\begin{aligned}
I(\boldsymbol{\varphi}, \psi, \zeta) \leq C \Bigg(& \int_Q \rho_1^2 (|\mathbf{G}|^2 + |g_2|^2) d\mathbf{x}dt + \int_Q \rho_2^2 |g_1|^2 d\mathbf{x}dt \\
& + \int_0^T \int_\omega \rho_3^2 |\varphi_2|^2 d\mathbf{x}dt + \int_0^T \int_\omega \rho_4^2 |\psi|^2 d\mathbf{x}dt \\
& + \int_0^T \int_\omega \rho_5^2 |\zeta|^2 d\mathbf{x}dt \Bigg),
\end{aligned}
$$

em que $I(\boldsymbol{\varphi}, \psi, \zeta)$ foi definido na seção 2.2, e ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 e ρ_5 são apropriadas funções peso que se anulam exponencialmente quando $t \to T^-$. Na próxima seção, utilizaremos está desigualdade para provarmos a controlabilidade nula de (2.6) com controles $\mathbf{v}1_\omega$, $w_1 1_\omega$ e $w_2 1_\omega$ satisfazendo $v_1 \equiv v_N \equiv 0$.

Lema 2.3.1. *Suponhamos que $N = 3$, $n_1(\mathbf{x}_0) \neq 0$ e ω, $\overline{\mathbf{y}}$, $\overline{\theta}$ e $\overline{c}$ satisfazem* (2.3)-(2.5)*. Então existem constantes positivas C, $\overline{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$ dependendo de Ω, ω, T, $\overline{\mathbf{y}}$, $\overline{\theta}$ e $\overline{c}$ com $0 < \tilde{\alpha} < \overline{\alpha}$ e $16\tilde{\alpha} - 15\overline{\alpha} > 0$ tais que, para quaisquer $\mathbf{G} \in \mathbf{L}^2(Q)$, $g_1 \in L^2(Q)$, $g_2 \in L^2(Q)$, $\boldsymbol{\varphi}_0 \in \mathbf{H}$, $\psi_0 \in L^2(\Omega)$ e $\zeta_0 \in L^2(\Omega)$, a solução associada de* (2.7) *satisfaz*

$$
\begin{aligned}
I(s, \lambda; \boldsymbol{\varphi}, \theta, \zeta) \leq C \Bigg(& \int_Q e^{\frac{-4\tilde{\alpha}+2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-30}(T-t)^{-30} (|\mathbf{G}|^2 + |g_2|^2) d\mathbf{x}dt \\
& + \int_Q e^{\frac{-32\tilde{\alpha}+30\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-252}(T-t)^{-252} |g_1|^2 d\mathbf{x}dt \\
& + \int_0^T \int_\omega e^{\frac{-16\tilde{\alpha}+14\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-132}(T-t)^{-132} |\varphi_2|^2 d\mathbf{x}dt \\
& + \int_0^T \int_\omega e^{\frac{-32\tilde{\alpha}+30\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-268}(T-t)^{-268} |\psi|^2 d\mathbf{x}dt \\
& + \int_0^T \int_\omega e^{\frac{-8\tilde{\alpha}+6\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-64}(T-t)^{-64} |\zeta|^2 d\mathbf{x}dt \Bigg).
\end{aligned}
\tag{2.66}
$$

Prova: Da desigualdade de Carleman (2.9) (veja o Teorema 2.2.1), é claro que, tomando

$$\overline{\alpha} = s_0(e^{5/4\lambda_1 m\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda_1 m\|\eta^0\|_\infty}),$$

$$\widetilde{\alpha} = s_0(e^{5/4\lambda_1 m\|\eta^0\|_\infty} - e^{\lambda_1(m+1)\|\eta^0\|_\infty}),$$

e

$$C_1 = \widehat{C}(1+T^2)s_1^{17}\lambda_1^{48}e^{17\lambda_1(m+1)\|\eta^0\|_\infty},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{\frac{-2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^4(T-t)^4(|\boldsymbol{\varphi}_t|^2 + |\psi_t|^2 + |\zeta_t|^2 + |\Delta\boldsymbol{\varphi}|^2 + |\Delta\psi|^2 + |\Delta\zeta|^2)d\mathbf{x}dt \\
&\quad + \int_Q e^{\frac{-2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-4}(T-t)^{-4}(|\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2 + |\nabla\psi|^2 + |\nabla\zeta|^2)d\mathbf{x}dt \\
&\quad + \int_Q e^{\frac{-2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-12}(T-t)^{-12}(|\boldsymbol{\varphi}|^2 + |\psi|^2 + |\zeta|^2)d\mathbf{x}dt \qquad (2.67)\\
&\leq C_1 \left(\int_Q e^{\frac{-4\widetilde{\alpha}+2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-30}(T-t)^{-30}(|\mathbf{G}|^2 + |g_1|^2 + |g_2|^2)d\mathbf{x}dt \right.\\
&\quad \left. + \int_0^T\int_{\omega_0} e^{\frac{-8\widetilde{\alpha}+6\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-64}(T-t)^{-64}(|\boldsymbol{\varphi}|^2 + |\theta|^2 + |\zeta|^2)d\mathbf{x}dt \right).
\end{aligned}$$

Notemos que $0 < \widetilde{\alpha} < \overline{\alpha}$. Além disso, observando que λ_1 pode ser tomado suficientemente grande, $16\widetilde{\alpha} - 15\overline{\alpha} = s_0 e^{\lambda_1(m+1)\|\eta^0\|_\infty}\left(e^{\frac{\lambda_1}{4}(m-4)\|\eta^0\|_\infty} + 15e^{-\lambda_1\|\eta^0\|_\infty} - 16\right) > 0$.

Apliquemos (2.67) para o conjunto aberto $\omega_0 \subset \omega$ definido como segue. Escolhamos $\varepsilon > 0$ tal que

$$n_1(\mathbf{x}) \neq 0 \ \forall \mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \cap \partial\omega \cap \partial\Omega =: \Gamma_\varepsilon.$$

Então, definamos

$$\omega_0 = \{x \in \Omega : \ x = w + \tau\mathbf{e}_1, \ w \in \Gamma_\varepsilon, \ |\tau| < \tau^0\}. \qquad (2.68)$$

Tomando $\varepsilon, \tau^0 > 0$ suficientemente pequenos, ainda obtemos

$$\omega_0 \subset \omega \text{ e } d_0 := dist(\overline{\omega}_0, \partial\omega \cap \Omega) > 0. \qquad (2.69)$$

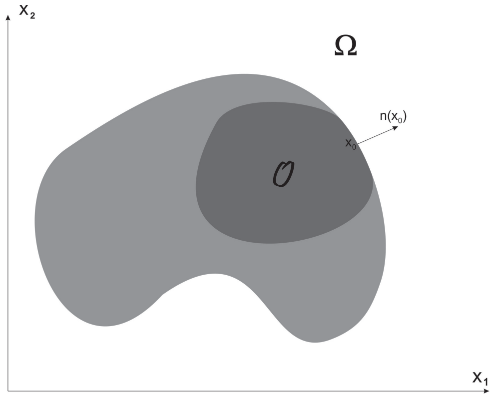
Observemos que com esta escolha, para cada $P \in \omega_0$ temos que um dos dois pontos da reta $\{P + \mathbf{R}\mathbf{e}_1\}$, que instersecta $\partial\Omega$, pertence a $\partial\omega_0$.

Depois que aplicamos a desigualdade (2.67) ao conjunto ω_0, nosso objetivo será estimar o termo

$$\int_0^T \int_{\omega_0} e^{\frac{-8\widetilde{\alpha}+6\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-64}(T-t)^{-64}(|\varphi_1|^2 d\mathbf{x}dt$$

em termos das integrais locais de φ_2 e φ_3.

Agora apresentamos um esboço dessa situação:



Para este fim, para cada $(\mathbf{x},t) \in \omega_0 \times (0,T)$ denotaremos por $l(\mathbf{x},t)$ (respectivamente, $\tilde{l}(\mathbf{x},t)$) o segmento que começa em $(\mathbf{x},t)$ com direção $\mathbf{e}_1$ no sentido positivo (respectivamente, negativo) e termina em $\partial\omega_0 \times \{t\}$. Assim, desde que $\boldsymbol{\varphi}$ tem divergência nula e $\boldsymbol{\varphi} = 0$ sobre Σ, obtemos

$$\varphi_1(\mathbf{x},t) = \int_{l(\mathbf{x},t)} (\partial_2\varphi_2 + \partial_3\varphi_3)(\overline{x}_1, x_2, x_3, t)d\overline{x}_1,$$

para cada $(\mathbf{x},t) = (x_1,x_2,x_3,t) \in \omega_0 \times (0,T)$.

Para simplificar, introduzamos a notação

$$\beta(t) = e^{\frac{-8\tilde{\alpha}+6\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-64}(T-t)^{-64} \ \forall t \in (0,T).$$

Agora, aplicando a desigualdade de Hölder e o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T\!\!\int_{\omega_0} \beta(t)|\varphi_1|^2 d\mathbf{x}dt &\le C_2 \int_0^T\!\!\int_{\omega_0} \beta(t) \left(\int_{l(\mathbf{x},t)} (|\partial_2\varphi_2|^2 + |\partial_3\varphi_3|^2) d\overline{x}_1 \right) d\mathbf{x}dt \\
&= C_2 \int_0^T\!\!\int_{\omega_0} (|\partial_2\varphi_2|^2 + |\partial_3\varphi_3|^2) \left(\int_{\tilde{l}(\overline{x}_1)} \beta(t)dx_1 \right) d\overline{x}_1 dx_2 dx_3 dt \quad (2.70) \\
&\le \int_0^T\!\!\int_{\omega_0} \beta(t)(|\partial_2\varphi_2|^2 + |\partial_3\varphi_3|^2) d\mathbf{x}dt
\end{aligned}$$

em que $\tilde{l}(\overline{x}_1)$ representa o segmento $\tilde{l}(\overline{x}_1, x_2, x_3, t)$. Então, introduzamos um apropriado conjunto aberto não-vazio ω_{00} verificando

$$\omega_0 \subset \omega_{00} \subset \omega, \ d_1 := dist(\overline{\omega}_{00}, \partial\omega \cap \Omega) > 0 \text{ e } d_2 := dist(\overline{\omega}_0, \partial\omega_{00} \cap \Omega) > 0$$

e uma função $\vartheta \in C^2(\overline{\omega}_{00})$ tal que

$$\vartheta \equiv 1 \text{ em } \omega_0, \ 0 \le \vartheta \le 1$$

e $\vartheta(\mathbf{x}) = 0$ em qualquer ponto $\mathbf{x} \in \omega_{00}$ satisfazendo $dist(\mathbf{x}, \partial\omega_{00} \cap \Omega) \leq d_2/2$, em particular ϑ e suas derivadas se anulam em $\partial\omega_{00} \cap \Omega$. Disto e do fato que $\boldsymbol{\varphi}|_{\Sigma} \equiv \mathbf{0}$ segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^T\!\!\int_{\omega_0} \beta(t)|\partial_i\varphi_i|^2 d\mathbf{x}dt \leq & \int_0^T\!\!\int_{\omega_{00}} \vartheta\beta(t)|\partial_i\varphi_i|^2 d\mathbf{x}dt \\
= & \int_0^T\!\!\int_{\omega_{00}} \beta(t)\left[\partial_i(\vartheta\partial_i\varphi_i\varphi_i - \frac{1}{2}\partial_i\vartheta|\varphi_i|^2) - \vartheta\partial_{ii}\varphi_i\varphi_i + \frac{1}{2}\partial_{ii}\vartheta|\varphi_i|^2\right] d\mathbf{x}dt \\
= & \frac{1}{2}\int_0^T\!\!\int_{\omega_{00}} \beta(t)\partial_{ii}\vartheta|\varphi_i|^2 d\mathbf{x}dt - \int_0^T\!\!\int_{\omega_{00}} \beta(t)\vartheta\partial_{ii}\varphi_i\varphi_i d\mathbf{x}dt,
\end{aligned}$$

para $i = 2, 3$.

Finalmente, em vista da desigualdade de Young e das estimativas de regularidades para φ_i em Ω

$$\varphi_i \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ e } \|\varphi_i\|_{H^2(\Omega)} \leq C_3\|\Delta\varphi_i\|_{L^2(\Omega)},$$

temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T\!\!\int_{\omega_0} \beta(t)|\partial_i\varphi_i|^2 d\mathbf{x}dt \leq & \frac{1}{2}C\int_0^T\!\!\int_{\omega_{00}} \beta(t)|\varphi_i|^2 d\mathbf{x}dt + C\int_0^T\!\!\int_{\omega_{00}} \beta(t)|\partial_{ii}\varphi_i||\varphi_i| d\mathbf{x}dt \\
\leq & \frac{1}{2}C\int_0^T\int_{\omega_{00}} \beta(t)|\varphi_i|^2 d\mathbf{x}dt \\
& + C\left[\frac{1}{2CC_1C_3}\int_0^T\!\!\int_{\omega_{00}} e^{\frac{-2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^4(T-t)^4|\Delta\varphi_i|^2 d\mathbf{x}dt\right. \\
& \left. + \frac{1}{2}CC_1C_2C_3\int_0^T\!\!\int_{\omega_{00}} e^{\frac{-16\widetilde{\alpha}+14\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-132}(T-t)^{-132}|\varphi_i|^2 d\mathbf{x}dt\right] \\
\leq & \frac{1}{2}C\int_0^T\!\!\int_{\omega_{00}} e^{\frac{-16\widetilde{\alpha}+14\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-132}(T-t)^{-132} e^{\frac{8\widetilde{\alpha}-8\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{66}(T-t)^{66}|\varphi_i|^2 d\mathbf{x}dt \\
& + \frac{1}{2C_1C_3}\int_Q e^{\frac{-2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^4(T-t)^4|\Delta\varphi_i|^2 d\mathbf{x}dt \\
& + \frac{1}{2}CC_1C_2C_3\int_0^T\!\!\int_{\omega_{00}} e^{\frac{-16\widetilde{\alpha}+14\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-132}(T-t)^{-132}|\varphi_i|^2 d\mathbf{x}dt \\
\leq & C_4\int_0^T\!\!\int_{\omega_{00}} e^{\frac{-16\widetilde{\alpha}+14\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-132}(T-t)^{-132}|\varphi_i|^2 d\mathbf{x}dt \\
& + \frac{1}{2C_1C_3}\int_Q e^{\frac{-2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^4(T-t)^4|\Delta\varphi_i|^2 d\mathbf{x}dt.
\end{aligned}$$

Aqui, usamos que $0 < \widetilde{\alpha} < \overline{\alpha}$ e que $e^{\frac{8\widetilde{\alpha}-8\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{66}(T-t)^{66}$ é limitada.

Portanto, a desigualdade anterior combinada com (2.67) e (2.70), obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{\frac{-2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^4(T-t)^4(|\boldsymbol{\varphi}_t|^2+|\psi_t|^2+|\zeta_t|^2+|\Delta\boldsymbol{\varphi}|^2+|\Delta\psi|^2+|\Delta\zeta|^2)d\mathbf{x}dt\\
&+\int_Q e^{\frac{-2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-4}(T-t)^{-4}(|\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2+|\nabla\psi|^2+|\nabla\zeta|^2)d\mathbf{x}dt\\
&+\int_Q e^{\frac{-2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-12}(T-t)^{-12}(|\boldsymbol{\varphi}|^2+|\psi|^2+|\zeta|^2)d\mathbf{x}dt\\
\leq{}& C\left(\int_Q e^{\frac{-4\tilde{\alpha}+2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-30}(T-t)^{-30}(|\mathbf{G}|^2+|g_1|^2+|g_2|^2)d\mathbf{x}dt\right.\\
&+\int_0^T\int_{\omega_{00}} e^{\frac{-16\tilde{\alpha}+14\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-132}(T-t)^{-132}(|\varphi_2|^2+|\varphi_3|^2)d\mathbf{x}dt\\
&\left.+\int_0^T\int_{\omega} e^{\frac{-32\tilde{\alpha}+30\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-64}(T-t)^{-64}(|\psi|^2+|\zeta|^2)d\mathbf{x}dt\right).
\end{aligned}\tag{2.71}$$

Nossa última tarefa será estimarmos a integral

$$\int_0^T\int_{\omega_{00}} e^{\frac{-16\tilde{\alpha}+14\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-132}(T-t)^{-132}|\varphi_3|^2d\mathbf{x}dt$$

em termos de $\varepsilon I(\varphi_3)$ e das integrais locais de ψ e g_2.

Para isto, definamos

$$\overline{\beta}(t)=e^{\frac{-16\tilde{\alpha}+14\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-132}(T-t)^{-132}\ \forall t\in(0,T)$$

e uma função $\vartheta_0\in C^2(\omega)$ tal que

$$\vartheta_0\equiv 1 \text{ em } \omega_{00},\ 0\leq\vartheta\leq 1 \tag{2.72}$$

e $\vartheta_0(\mathbf{x})=0$ em qualquer ponto $\mathbf{x}\in\omega$ satisfazendo $dist(\mathbf{x},\partial\omega\cap\Omega)\leq d_1/2$, em particular $\vartheta_0(\mathbf{x})=0$ em $\partial\omega\cap\Omega$. Da equação diferencial satisfeita por ψ (veja (2.7), temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_{\omega_{00}}\overline{\beta}(t)|\varphi_3|^2d\mathbf{x}dt &\leq \int_0^T\int_{\omega}\overline{\beta}(t)\vartheta_0|\varphi_3|^2d\mathbf{x}dt\\
&= \int_0^T\int_{\omega}\overline{\beta}(t)\vartheta_0\varphi_3(-\psi_t-\Delta\psi-\overline{\mathbf{y}}\cdot\nabla\psi-g_1)d\mathbf{x}dt.
\end{aligned}\tag{2.73}$$

Para terminar a prova, realizaremos integrações por partes na última integral e passaremos todas as derivadas de ψ para φ_3.

Observemos que $\overline{\beta}$ é uma função que se anula em $t=0$ e em $t=T$, isto é, $\overline{\beta}(0)=\overline{\beta}(T)=0$. Assim, pode integrar por parte no tempo e daí obtemos a seguinte desigualdade de (2.73)

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T\int_\omega \overline{\beta}(t)\vartheta_0\varphi_3\psi_t d\mathbf{x}dt =& \int_0^T\int_\omega \beta_{1,t}(t)\vartheta_0\varphi_3\psi d\mathbf{x}dt \\
&+\int_0^T\int_\omega \overline{\beta}(t)\vartheta_0\varphi_{3,t}\psi d\mathbf{x}dt \\
\leq& \ C_7\int_Q e^{\frac{-16\tilde{\alpha}+14\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-137}(T-t)^{-137}\varphi_3\psi d\mathbf{x}dt \\
&+\int_0^T\int_\omega \left[(2\varepsilon)^{1/2}e^{\frac{-\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}}t^2(T-t)^2\varphi_{3,t}\right] \\
&\times\left[C_7(2\varepsilon)^{-1/2}e^{\frac{-16\tilde{\alpha}+15\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}}t^{-134}(T-t)^{-134}\psi\right]d\mathbf{x}dt \\
\leq& \int_0^T\int_\omega \left[(2\varepsilon)^{1/2}e^{\frac{-\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}}t^{-6}(T-t)^{-6}\varphi_3\right] \\
&\times\left[C_7(2\varepsilon)^{-1/2}e^{\frac{-16\tilde{\alpha}+15\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}}t^{-131}(T-t)^{-131}\psi\right]d\mathbf{x}dt \\
&+\varepsilon\int_Q e^{\frac{-2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}}t^4(T-t)^4|\varphi_{3,t}|^2 d\mathbf{x}dt \\
&+C_7(\varepsilon)\int_0^T\int_\omega e^{\frac{-32\tilde{\alpha}+30\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}}t^{-268}(T-t)^{-268}|\psi|^2 d\mathbf{x}dt \\
\leq& \ \varepsilon\left[\int_Q e^{\frac{-2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}}t^4(T-t)^4|\varphi_{3,t}|^2 d\mathbf{x}dt\right. \\
&\left.+\int_Q e^{\frac{-2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}}t^{-12}(T-t)^{-12}|\varphi_3|^2 d\mathbf{x}dt\right] \\
&+C_7(\varepsilon)\int_0^T\int_\omega e^{\frac{-32\tilde{\alpha}+30\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}}t^{-268}(T-t)^{-268}|\psi|^2 d\mathbf{x}dt.
\end{aligned}
\tag{2.74}
$$

Observação 2.3.2. *Notemos que na desigualdade acima aplicamos a desigualdade de Young e o fato de a derivada temporal de $\overline{\beta}$ verificar a seguinte estimativa*

$$\overline{\beta}_t(t) \leq C_5 e^{\frac{-16\tilde{\alpha}+14\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-137}(T-t)^{-137}.$$

Agora, vamos integrar por partes na variável espacial. Neste passo, usamos o fato que as propriedades da função ϑ_0 (veja (2.72)) juntamente com as condições de fronteira de Dirichlet para φ_3 implicam que o produto $\vartheta_0\varphi_3 = 0$ em $\partial\omega$.

Assim, temos

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T\int_{\mathcal{O}}\overline{\beta}(t)\vartheta_0\varphi_3\Delta\psi d\mathbf{x}dt =& -\int_0^T\int_{\omega}\overline{\beta}(t)\Delta(\vartheta_0\varphi_3)\psi d\mathbf{x}dt+\int_0^T\int_{\partial\omega}\vartheta_0\varphi_3\partial_{\mathbf{n}}\psi dSdt\\
=& -\int_0^T\int_{\mathcal{O}}\overline{\beta}(t)\Delta(\vartheta_0\varphi_3)\psi dxdt\\
=& \int_0^T\int_{\omega}\overline{\beta}(t)(-\Delta\vartheta_0\varphi_3-2\nabla\vartheta_0\cdot\nabla\varphi_3-\vartheta_0\Delta\varphi_3)\psi d\mathbf{x}dt\\
\leq& \ \varepsilon\left[\int_Q e^{\frac{-2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}}t^{-4}(T-t)^{-4}|\nabla\varphi_3|^2d\mathbf{x}dt\right.\\
&+\int_Q e^{\frac{-2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}}t^{-12}(T-t)^{-12}|\varphi_3|^2d\mathbf{x}dt\\
&\left.+\int_Q e^{\frac{-2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}}t^{4}(T-t)^{4}|\Delta\varphi_3|^2d\mathbf{x}dt\right]\\
&+C_8(\varepsilon)\int_0^T\int_{\omega}e^{\frac{-32\widetilde{\alpha}+30\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}}t^{-268}(T-t)^{-268}|\psi|^2d\mathbf{x}dt.
\end{aligned}
$$

Usando integração por partes com respeito a variável espacial e a condição de incompressibilidade sobre $\overline{\mathbf{y}}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T\int_{\omega}\overline{\beta}(t)\vartheta_0\varphi_3\overline{\mathbf{y}}\cdot\nabla\psi d\mathbf{x}dt =& -\int_0^T\int_{\omega}\overline{\beta}(t)\nabla\cdot(\vartheta_0\varphi_3\overline{\mathbf{y}}\psi)d\mathbf{x}dt\\
&-\int_0^T\int_{\omega}\overline{\beta}(t)\overline{\mathbf{y}}(\vartheta_0\nabla\varphi_3+\varphi_3\nabla\vartheta_0)\psi d\mathbf{x}dt\\
&-\int_0^T\int_{\omega}\overline{\beta}(t)\vartheta_0\varphi_3\psi\nabla\cdot\overline{\mathbf{y}}d\mathbf{x}dt\\
=& -\int_0^T\int_{\omega}\overline{\beta}(t)(\vartheta_0\varphi_3\overline{\mathbf{y}}\psi)\cdot\mathbf{n}\ dSdt\\
&+\int_0^T\int_{\omega}\overline{\beta}(t)\overline{\mathbf{y}}(\vartheta_0\nabla\varphi_3+\varphi_3\nabla\vartheta_0)\psi d\mathbf{x}dt \qquad (2.75)\\
=& \int_0^T\int_{\omega}\overline{\beta}(t)\overline{\mathbf{y}}(\vartheta_0\nabla\varphi_3+\varphi_3\nabla\vartheta_0)\psi d\mathbf{x}dt\\
\leq& \ \varepsilon\left[\int_Q e^{\frac{-2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}}t^{-4}(T-t)^{-4}|\nabla\varphi_3|^2d\mathbf{x}dt\right.\\
&\left.+\int_Q e^{\frac{-2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}}t^{-12}(T-t)^{-12}|\varphi_3|^2d\mathbf{x}dt\right]\\
&+C_9(\varepsilon)\int_0^T\int_{\omega}e^{\frac{-32\widetilde{\alpha}+30\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}}t^{-268}(T-t)^{-268}|\psi|^2d\mathbf{x}dt.
\end{aligned}
$$

Finalmente aplicamos a desigualdade de Young no último termo e temos

$$\begin{aligned}
-\int_0^T\!\!\int_\omega \overline{\beta}(t)\vartheta_0\varphi_3 g_1 d\mathbf{x}dt &\leq C_{10}\int_0^T\!\!\int_\omega e^{\frac{-16\widetilde{\alpha}+14\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-132}(T-t)^{-132}\varphi_3 g_1 d\mathbf{x}dt \\
&= \int_0^T\!\!\int_\omega \left[(2\varepsilon)^{1/2} e^{\frac{-\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-6}(T-t)^{-6}|\varphi_3|\right] \\
&\quad \times\left[C_{10}(2\varepsilon)^{-1/2} e^{\frac{-16\widetilde{\alpha}+15\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-126}(T-t)^{-126}|g_1|\right] d\mathbf{x}dt \qquad (2.76) \\
&\leq \varepsilon\int_0^T\!\!\int_\omega e^{\frac{-2\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-12}(T-t)^{-12}|\varphi_3|^2 \\
&\quad + C_{11}(\varepsilon)\int_0^T\!\!\int_\omega e^{\frac{-32\widetilde{\alpha}+30\overline{\alpha}}{t^4(T-t)^4}} t^{-252}(T-t)^{-252}|g_1|^2 d\mathbf{x}dt.
\end{aligned}$$

De (2.71) e (2.73)-(2.76), levando em conta que $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, deduzimos a desigualdade (2.66). ■

2.4 Controlabilidade nula

Vamos obter um resultado de controlabilidade nula para o sistema linear (2.6) utilizando argumentos análogos aos utilizados em [12, 26].

Antes de provar a controlabilidade nula, apresentaremos uma desigualdade de Carleman com funções peso que não se anulam no tempo $t = 0$. Esta desigualdade será importante pois reduziremos o problema de controlabilidade nula para o sistema (2.6) a um resultado de existência de solução para problema de minimização formulado em um espaço adequado. Em outras palavras, vamos considerar a função

$$b(t) = \begin{cases} \dfrac{T^2}{4} & \text{para} \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ t(T-t) & \text{para} \quad \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

e as seguintes funções peso:

$$\begin{aligned} &\beta_1(t) = e^{\frac{\overline{\alpha}}{[b(t)]^4}}\,[b(t)]^2, \qquad \beta_2(t) = e^{\frac{\overline{\alpha}}{[b(t)]^4}}\,[b(t)]^6, \quad \beta_3(t) = e^{\frac{2\tilde{\alpha}-\overline{\alpha}}{[b(t)]^4}}\,[b(t)]^{15}, \\ &\beta_4(t) = e^{\frac{16\tilde{\alpha}-15\overline{\alpha}}{[b(t)]^4}}\,[b(t)]^{126}, \quad \beta_5(t) = e^{\frac{8\tilde{\alpha}-7\overline{\alpha}}{[b(t)]^4}}\,[b(t)]^{66}, \quad \beta_6(t) = e^{\frac{16\tilde{\alpha}-15\overline{\alpha}}{[b(t)]^4}}\,[b(t)]^{134}, \\ &\beta_7(t) = e^{\frac{2\tilde{\alpha}-3\overline{\alpha}}{[b(t)]^4}}\,[b(t)]^{32}, \end{aligned}$$

em que as constantes $\overline{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$ foram fornecidas no lema 2.3.1.

Lema 2.4.1. *Suponhamos que $N = 2$ e que ω, $\overline{y}$, $\overline{\theta}$ e $\overline{c}$ satisfazem* (2.3)-(2.5) (*com* $n_1(\mathbf{x}^0) \neq 0$). *Então existem constantes positivas C, $\overline{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$ dependendo de Ω, ω, T, $\overline{\mathbf{y}}$, $\overline{\theta}$ e $\overline{c}$, com $0 < \tilde{\alpha} < \overline{\alpha}$ e $16\tilde{\alpha} - 15\overline{\alpha} > 0$, tais que, para quaisquer $\mathbf{G} \in \mathbf{L}^2(Q)$, $g_1,\ g_2 \in L^2(Q)$, $\boldsymbol{\varphi}_0 \in \mathbf{H}$ e $\psi_0,\ \zeta_0 \in L^2(\Omega)$, a solução $(\boldsymbol{\varphi}, \pi, \psi, \zeta)$ de* (2.7) *verifica a desigualdade:*

$$\begin{aligned} &\int_Q \beta_1^{-2}(|\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2 + |\nabla\psi|^2 + |\nabla\zeta|^2)d\mathbf{x}dt + \int_Q \beta_2^{-2}(|\boldsymbol{\varphi}|^2 + |\psi|^2 + |\zeta|^2)d\mathbf{x}dt \\ &+\|\boldsymbol{\varphi}(0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\psi(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|\zeta(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\int_Q \beta_3^{-2}(|\mathbf{G}|^2 + |g_2|^2)d\mathbf{x}dt\right. \\ &\left.+\int_Q \beta_4^{-2}|g_1|^2 d\mathbf{x}dt + \int_0^T\!\!\int_\omega \beta_6^{-2}|\psi|^2 d\mathbf{x}dt + \int_0^T\!\!\int_\omega \beta_7^{-2}|\zeta|^2 d\mathbf{x}dt\right). \end{aligned} \tag{2.77}$$

Também podemos apresentar um resultado semelhante para o caso $N = 3$.

Lema 2.4.2. *Suponhamos que $N = 3$ e que ω, $\overline{y}$, $\overline{\theta}$ e $\overline{c}$ satisfazem* (2.3)-(2.5) (*com* $n_1(\mathbf{x}^0) \neq 0$). *Então existem constantes positivas C, $\overline{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$ dependendo de Ω, ω, T, $\overline{\mathbf{y}}$, $\overline{\theta}$ e $\overline{c}$, com $0 < \tilde{\alpha} < \overline{\alpha}$ e $16\tilde{\alpha} - 15\overline{\alpha} > 0$, tais que, para quaisquer $\mathbf{G} \in \mathbf{L}^2(Q)$,*

$g_1,\ g_2 \in L^2(Q)$, $\boldsymbol{\varphi}_0 \in \mathbf{H}$ e $\psi_0,\ \zeta_0 \in L^2(\Omega)$, a solução $(\boldsymbol{\varphi}, \pi, \psi, \zeta)$ de (2.7) verifica a desigualdade:

$$\begin{aligned}
&\int_Q \beta_1^{-2}(|\nabla \boldsymbol{\varphi}|^2 + |\nabla \psi|^2 + |\nabla \zeta|^2) d\mathbf{x}dt + \int_Q \beta_2^{-2}(|\boldsymbol{\varphi}|^2 + |\psi|^2 + |\zeta|^2) d\mathbf{x}dt \\
&+\|\boldsymbol{\varphi}(0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\psi(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|\zeta(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\int_Q \beta_3^{-2}(|\mathbf{G}|^2 + |g_2|^2) d\mathbf{x}dt \right. \\
&\left. + \int_Q \beta_4^{-2}|g_1|^2 d\mathbf{x}dt + \int_0^T\!\!\int_\omega \left(\beta_5^{-2}|\varphi_2|^2 + \beta_6^{-2}|\psi|^2 + \beta_7^{-2}|\zeta|^2\right) d\mathbf{x}dt \right).
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Para provar (2.78), é suficiente usar (2.66) e as estimativas clássicas para equações parabólicas verificadas pelo sistema (2.7). O argumento para provar esta desigualdade já foi usado nas referências [12, 19, 26, 28] em situações bastante similares, portanto omitiremos sua demonstração.

A partir daqui, usaremos as seguintes notações:

$$\begin{aligned}
L_1(\mathbf{y}) &= \mathbf{y}_t - \Delta \mathbf{y} + (\mathbf{y} \cdot \nabla)\overline{\mathbf{y}} + (\overline{\mathbf{y}} \cdot \nabla)\mathbf{y}, \\
L_2(\theta) &= \theta_t - \Delta \theta + \overline{\mathbf{y}} \cdot \nabla \theta, \\
L_3(c) &= c_t - \Delta c + \overline{\mathbf{y}} \cdot \nabla c.
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Vamos agora apresentar um resultado de controlabilidade nula para (2.6) em que as soluções são bastante regulares. Na verdade, iremos provar um resultado de existência de solução para o sistema (2.6) em um espaço com peso adequado que dependerá da dimensão da varíavel espacial. Isto será essencial para deduzirmos as propriedades de controlabilidade para o sistema não-linear (1) na seguinte seção. Para este fim, vamos definir os espaços em que o problema de controlabilidade nula será resolvido. Consideramos

$$\begin{aligned}
E_0 \;=\; &\Big\{ (\mathbf{y}, \theta, c, \mathbf{v}, w_1, w_2) : (\beta_3 y_i),\ (\beta_4 \theta),\ (\beta_3 c), \in L^2(Q)\ (1 \leq i \leq N), \\
&(\beta_5 v_i 1_\omega),\ (\beta_6 w_1 1_\omega),\ (\beta_7 w_2 1_\omega) \in L^2(Q)\ (1 \leq i \leq N), \\
&v_1 \equiv v_N \equiv 0,\ \beta_1^{1/2}\mathbf{y} \in L^2(0,T;\mathbf{V}) \cap L^\infty(0,T;\mathbf{H}) \\
&\beta_1^{1/2}\theta,\ \beta_1^{1/2}c \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \Big\}, \\
\mathbf{E}_2 \;=\; &\Big\{ (\mathbf{y}, p, \theta, c, \mathbf{v}, w_1, w_2) : (\mathbf{y}, \theta, c, \mathbf{v}, w_1, w_2) \in E_0, \\
&\beta_1(L_1\mathbf{y} + \nabla p - \mathbf{v}1_\omega) \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)), \\
&\beta_1(L_2\theta + \mathbf{y} \cdot \nabla \overline{\theta} - w_1 1_\omega) \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), \\
&\beta_1(L_3 c + \mathbf{y} \cdot \nabla \overline{c} - w_2 1_\omega) \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \Big\},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_3 \;=\; \Big\{ & (\mathbf{y},p,\theta,c,\mathbf{v},w_1,w_2) : (\mathbf{y},\theta,c,\mathbf{v},w_1,w_2) \in E_0, \\
& \beta_1^{1/2}\mathbf{y} \in L^4(0,T;\mathbf{L}^{12}(\Omega)), \\
& \beta_1(L_1\mathbf{y} + \nabla p - \mathbf{v}1_\omega) \in L^2(0,T;\mathbf{W}^{-1,6}(\Omega)) \\
& \beta_1(L_2\theta + \mathbf{y}\cdot\nabla\overline{\theta} - w_1 1_\omega) \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), \\
& \beta_1(L_3 c + \mathbf{y}\cdot\nabla\overline{c} - w_2 1_\omega) \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \Big\},
\end{aligned}
$$

Aqui, $\mathbf{E}_i$ é um espaço quando a dimensão da varíavel espacial é i, $i = 2, 3$.

Nós temos que E_0, $\mathbf{E}_2$ e $\mathbf{E}_3$ são espaços de Banach com as respectivas normas

$$
\begin{aligned}
\|(\mathbf{y},\theta,c,\mathbf{v},w_1,w_2)\|_{E_0} = \Big(& \|\beta_3\mathbf{y}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\beta_4\theta\|^2_{L^2(Q)} + \|\beta_3 c\|^2_{L^2(Q)} \\
& + \|\beta_5\mathbf{v}1_\omega\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} + \|\beta_6 w_1 1_\omega\|^2_{L^2(Q)} + \|\beta_7 w_2 1_\omega\|^2_{L^2(Q)} \\
& + \|\beta_1^{1/2}\mathbf{y}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{V})} + \|\beta_1^{1/2}\mathbf{y}\|^2_{L^\infty(0,T;\mathbf{H})} \\
& + \|\beta_1^{1/2}\theta\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|\beta_1^{1/2}\theta\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\
& + \|\beta_1^{1/2}c\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|\beta_1^{1/2}c\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \Big)^{1/2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|(\mathbf{y},p,\theta,c,\mathbf{v},w_1,w_2)\|_{E_2} = \Big(& \|(\mathbf{y},\theta,c,\mathbf{v},w_1,w_2)\|^2_{E_0} \\
& + \|\beta_1(L_1\mathbf{y} + \nabla p - \mathbf{v}1_\omega)\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))} \\
& + \|\beta_1(L_2\theta + \mathbf{y}\cdot\nabla\overline{\theta} - w_1 1_\omega)\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \\
& + \|\beta_1(L_3 c + \mathbf{y}\cdot\nabla\overline{c} - w_2 1_\omega)\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \Big)^{1/2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|(\mathbf{y},p,\theta,c,\mathbf{v},w_1,w_2)\|_{E_3} = \Big(& \|(\mathbf{y},\theta,c,\mathbf{v},w_1,w_2)\|^2_{E_0} + \|\beta_1^{1/2}\mathbf{y}\|^2_{L^4(0,T;\mathbf{L}^{12}(\Omega))} \\
& + \|\beta_1(L_1\mathbf{y} + \nabla p - \mathbf{v}1_\omega)\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{W}^{-1,6}(\Omega))} \\
& + \|\beta_1(L_2\theta + \mathbf{y}\cdot\nabla\overline{\theta} - w_1 1_\omega)\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \\
& + \|\beta_1(L_3 c + \mathbf{y}\cdot\nabla\overline{c} - w_2 1_\omega)\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \Big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Em vista das desigualdades de Carleman (2.77) e (2.78), temos o seguinte resultado:

Proposição 2.4.3. *Suponhamos que* ω, $\overline{\mathbf{y}}$, $\overline{\theta}$ *e* $\overline{c}$ *satisfazem* (2.3), (2.4), (2.5) (*com* $n_1(\mathbf{x}^0) \neq 0$). *Sejam* $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{E}$, $\theta_0 \in L^2(\Omega)$ *e* $c_0 \in L^2(\Omega)$ *e vamos assumir que*

$$
\beta_1(\mathbf{F}, f_1, f_2) \in \begin{cases} L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \times [L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))]^2, & se\ N = 2, \\ L^2(0,T;\mathbf{W}^{-1,6}(\Omega)) \times [L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))]^2, & se\ N = 3. \end{cases}
$$

Então podemos encontrar controles $\mathbf{v}$, w_1 *e* w_2 *tal que a solução de* (2.6) *junto com esses controles satisfazem* $(\mathbf{y},p,\theta,c,\mathbf{v},w_1,w_2) \in E_N$. *Em particular,* $v_1 \equiv v_N \equiv 0$ *e* $\mathbf{y}(T) = \mathbf{0}$, $\theta(T) = 0$ *e* $c(T) = 0$.

Prova: Usaremos os argumentos usados na referência [26], fazendo as devidas adaptações ao nosso sistema. Por simplicidade, nesta prova consideramos somente o caso $N = 3$.

Vamos introduzir agora o seguinte problema de controle optimo auxiliar:

$$\begin{cases} \inf \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_Q \left[\beta_3^2(|\mathbf{y}|^2 + |c|^2) + \beta_4^2|\theta|^2 + (\beta_5^2|\mathbf{v}|^2 + \beta_6^2|w_1|^2 + \beta_7^2|w_2|^2)1_\omega\right] d\mathbf{x}dt \right) \\ \text{sujeito a } v_i,\ w_1,\ w_2 \in L^2(\omega \times (0,T)),\ \text{com } v_1 \equiv v_3 \equiv 0 \\ \text{e } (\mathbf{y}, \theta, c),\ \text{junto com alguma } p,\ \text{verificando} \\ \begin{cases} L_1(\mathbf{y}) + \nabla p = \mathbf{F} + \theta \mathbf{e}_N + c\overrightarrow{\mathbf{b}} + \mathbf{v}1_\omega, \quad \nabla \cdot \mathbf{y} = 0 & \text{em} \quad Q, \\ L_2(\theta) + \nabla \cdot (\overline{\theta}\mathbf{y}) = f_1 + w_1 1_\omega & \text{em} \quad Q, \\ L_3(c) + \nabla \cdot (\overline{c}\mathbf{y}) = f_2 + w_2 1_\omega & \text{em} \quad Q, \\ \mathbf{y} = \mathbf{0},\ \theta = c = 0 & \text{sobre} \ \Sigma, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0,\ \theta(0) = \theta_0,\ c(0) = c_0,\ \mathbf{y}(T) = \mathbf{0},\ \theta(T) = c(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \end{cases} \tag{2.80}$$

Suponhamos que encontramos uma solução $(\widehat{\mathbf{y}}, \widehat{p}, \widehat{\theta}, \widehat{c}, \widehat{\mathbf{v}}, \widehat{w_1}, \widehat{w_2})$ para (2.80). Então, em vista do princípio de Lagrange, existem variáveis duais $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$, $\widehat{q}$, $\widehat{\psi}$ e $\widehat{\zeta}$ tais que

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{y}} = \beta_3^{-2}(L_1^*\widehat{\boldsymbol{\varphi}} + \nabla\widehat{q} - \overline{\theta}\nabla\widehat{\psi} - \overline{c}\nabla\widehat{\zeta}), \quad \nabla \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}} = 0 & \text{em} \quad Q \\ \widehat{\theta} = \beta_4^{-2}(L_2^*\widehat{\psi} - \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{e}_N) & \text{em} \quad Q \\ \widehat{c} = \beta_3^{-2}(L_3^*\widehat{\zeta} - \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}) & \text{em} \quad Q \\ \widehat{\mathbf{v}} = -\beta_5^{-2}\widehat{\boldsymbol{\varphi}},\ \widehat{w}_1 = -\beta_6^{-2}\widehat{\psi},\ \widehat{w}_2 = -\beta_7^{-2}\widehat{\zeta}, & \text{em} \quad \omega \times (0,T) \\ \widehat{\boldsymbol{\varphi}} = 0,\ \widehat{\psi} = \widehat{\zeta} = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \end{cases} \tag{2.81}$$

em que L_i^* é o operador adjunto de L_i $(i = 1, 2, 3)$, isto é,

$$\begin{aligned} L_1^*\boldsymbol{\varphi} &= -\boldsymbol{\varphi}_t - \Delta\varphi - D\boldsymbol{\varphi}\overline{\mathbf{y}}, \\ L_2^*\psi &= -\psi_t - \Delta\psi - \overline{\mathbf{y}} \cdot \nabla\psi \\ L_3^*\zeta &= -\zeta_t - \Delta\zeta - \overline{\mathbf{y}} \cdot \nabla\zeta. \end{aligned}$$

Agora vamos definir o espaço

$$P_0 = \left\{ (\boldsymbol{\varphi}, q, \psi, \zeta) \in \mathbf{C}^\infty(\overline{Q});\ \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0 \text{ em } Q,\ (\boldsymbol{\varphi}, \psi, \zeta)|_\Sigma = \mathbf{0},\ \int_\Omega q(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

Também podemos definir uma forma bilinear $a : P_0 \times P_0 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} a((\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}, \widetilde{q}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\zeta}), (\boldsymbol{\varphi}, q, \psi, \zeta)) &= \int_0^T\int_\omega (\beta_5^{-2}\widetilde{\varphi}_2\varphi_2 + \beta_6^{-2}\widetilde{\psi}\psi + \beta_7^{-2}\widetilde{\zeta}\zeta)dxdt \\ &+ \int_Q \beta_3^{-2}(L_1^*\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} + \nabla\widetilde{q} - \overline{\theta}\nabla\widetilde{\psi} - \overline{c}\nabla\widetilde{\zeta}) \cdot (L_1^*\boldsymbol{\varphi} + \nabla q - \overline{\theta}\nabla\psi - \overline{c}\nabla\zeta)d\mathbf{x}dt \\ &+ \int_Q \beta_4^{-2}(L_2^*\widetilde{\psi} - \widetilde{\varphi}_N)(L_2^*\psi - \varphi_N)d\mathbf{x}dt + \int_Q \beta_3^{-2}(L_3^*\widetilde{\zeta} - \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}})(L_3^*\zeta - \boldsymbol{\varphi} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}})d\mathbf{x}dt, \end{aligned}$$

para todo $(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}, \widetilde{q}, \widetilde{\psi}, \widetilde{\zeta}), (\boldsymbol{\varphi}, q, \psi, \zeta) \in P_0$ e a forma linear $l_0 : P_0 \to \mathbb{R}$ dada por

$$
\begin{aligned}
\langle l_0, (\boldsymbol{\varphi}, q, \psi, \zeta)\rangle \;=\;& \int_0^T \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi}\rangle_{\mathbf{H}^{-1},\mathbf{H}_0^1} dt + \int_0^T \langle f_1, \psi\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt \\
&+ \int_0^T \langle f_2, \zeta\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_\Omega \mathbf{y}_0 \boldsymbol{\varphi}(0) dx \\
&+ \int_\Omega \theta_0 \psi(0) dx + \int_\Omega u_0 \zeta(0) dx.
\end{aligned} \tag{2.82}
$$

Então, $(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}, \widehat{q}, \widehat{\psi}, \widehat{\zeta})$ deverá satisfazer a seguinte formulação de Lax-Milgram

$$
a((\widehat{\boldsymbol{\varphi}}, \widehat{q}, \widehat{\psi}, \widehat{\zeta}), (\varphi, q, \psi, \zeta)) = \langle l_0, (\varphi, q, \psi, \zeta)\rangle, \quad \forall (\varphi, q, \psi, \zeta) \in P_0. \tag{2.83}
$$

Assim, a próxima etapa é demonstrar que existe uma única $(\widehat{\varphi}, \widehat{q}, \widehat{\psi}, \widehat{\zeta})$ satisfazendo (2.83). E daí definiremos ($\widehat{\mathbf{y}}$, $\widehat{\theta}$, $\widehat{c}$, $\widehat{\mathbf{v}}$, $\widehat{w_1}$, $\widehat{w_2}$) usando (2.81) e verificaremos que $(\widehat{\mathbf{y}}, \widehat{\theta}, \widehat{c}, \widehat{\mathbf{v}}, \widehat{w_1}, \widehat{w_2})$, juntamente com alguma $\hat{p}$, cumpre as propriedades desejadas.

De fato, consideramos o espaço vetorial P_0 e a forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ em P_0. Notemos que $a(\cdot,\cdot)$ é um produto interno, pois a desigualdade Carleman (2.78) é válida para todo $(\boldsymbol{\varphi}, q, \psi, \zeta) \in P_0$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
&\int_Q \beta_1^{-2}(|\nabla \boldsymbol{\varphi}|^2 + |\nabla \psi|^2 + |\nabla \zeta|^2) d\mathbf{x}dt + \int_Q \beta_2^{-2}(|\boldsymbol{\varphi}|^2 + |\psi|^2 + |\zeta|^2) d\mathbf{x}dt \\
&+\|\boldsymbol{\varphi}(0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\psi(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|\zeta(0)\|_{L^2(\Omega)} \le C a((\boldsymbol{\varphi}, q, \psi, \zeta), (\boldsymbol{\varphi}, q, \psi, \zeta))
\end{aligned} \tag{2.84}
$$

para todo $(\boldsymbol{\varphi}, q, \psi, \zeta) \in P_0$.

Daí,

$$
\beta_1^{-1}\boldsymbol{\varphi} \in L^2(0,T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)), \; \beta_1^{-1}\psi \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)),
$$

$$
\beta_1^{-1}\zeta \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), \; \psi(0) \in L^2(\Omega), \; \zeta(0) \in L^2(\Omega) \text{ e } \boldsymbol{\varphi}(0) \in \mathbf{H}.
$$

Introduzamos o espaço P dado pelo completamento de P_0 com a norma associada ao produto interno $a(\cdot,\cdot)$ (que denotamos por $\|\cdot\|_P$). Este espaço é um espaço de Hilbert e $a(\cdot,\cdot)$ é uma forma bilinear contínua e coerciva sobre P.

Vamos também introduzir a forma linear l_0 dada por (2.82), para todo $(\boldsymbol{\varphi}, q, \psi, \zeta)$ pertencente P. Após um cálculo simples, vemos que

$$
\begin{aligned}
|\langle l_0, (\boldsymbol{\varphi}, q, \psi, \zeta)\rangle| \;\le\;& \|\beta_1 \mathbf{F}\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))} \|\beta_1^{-1}\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega))} \\
&+\|\beta_1 f_1\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \|\beta_1^{-1}\psi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
&+\|\beta_1 f_2\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \|\beta_1^{-1}\zeta\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
&+\|\mathbf{y}_0\|_H \|\boldsymbol{\varphi}(0)\|_H + \|\theta_0\|_{L^2(\Omega)} \|\psi(0)\|_{L^2(\Omega)} \\
&+\|c_0\|_{L^2(\Omega)} \|\zeta(0)\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

para todo $(\boldsymbol{\varphi}, q, \psi, \zeta)$ pertencente a P_0. Em particular, usando (2.84) e a densidade de P_0 em P, encontramos que

$$\begin{aligned}|\langle l_0, (\varphi, q, \psi, \zeta)\rangle| \;\leq\;& C(\|\beta_1 \mathbf{F}\|_{L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))} + \|\beta_1 f_1\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \\ &+ \|\beta_1 f_2\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \|\mathbf{y}_0\|_{\mathbf{H}} + \|\theta_0\| + \|c_0\|)\|(\boldsymbol{\varphi}, q, \psi, \zeta)\|_P,\end{aligned}$$

para todo $(\boldsymbol{\varphi}, q, \psi, \zeta) \in P$.

Em outras palavras, l_0 é uma forma linear contínua sobre P. Consequentemente, em vista do Lema de Lax-Milgram (veja o Teorema 1.5), existe um único $(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}, \widehat{q}, \widehat{\psi}, \widehat{\zeta})$ pertencente a P satisfazendo

$$a((\widehat{\boldsymbol{\varphi}}, \widehat{q}, \widehat{\psi}, \widehat{\zeta}), (\boldsymbol{\varphi}, q, \psi, \zeta)) = \langle l_0, (\boldsymbol{\varphi}, q, \psi, \zeta)\rangle, \;\forall (\boldsymbol{\varphi}, q, \psi, \zeta) \in P. \tag{2.85}$$

Assim, podemos definir

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{y}} = \beta_3^{-2}(L_1^*\widehat{\boldsymbol{\varphi}} + \nabla\widehat{q} - \overline{\theta}\nabla\widehat{\psi} - \overline{c}\nabla\widehat{\zeta}), \quad \nabla\cdot\widehat{\boldsymbol{\varphi}} = 0 & \text{em } Q, \\ \widehat{\theta} = \beta_4^{-2}(L_2^*\widehat{\psi} - \widehat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\mathbf{e}_N) & \text{em } Q, \\ \widehat{c} = \beta_3^{-2}(L_3^*\widehat{\zeta} - \widehat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{b}}) & \text{em } Q, \\ \widehat{\mathbf{v}} = (0, -\beta_5^{-2}\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_2, 0)\; \widehat{w}_1 = -\beta_6^{-2}\widehat{\psi}, \;\widehat{w}_2 = -\beta_7^{-2}\widehat{\zeta}, & \text{em } \omega\times(0,T). \end{cases} \tag{2.86}$$

Logo, nos resta ver que $(\widehat{\mathbf{y}}, \widehat{\theta}, \widehat{c}, \widehat{\mathbf{v}}, \widehat{w_1}, \widehat{w_2})$ verifica

$$\int_Q \left[\beta_3^2(|\widehat{\mathbf{y}}|^2 + |\widehat{c}|^2) + \beta_4^2|\widehat{\theta}|^2 + (\beta_5^2|\widehat{\mathbf{v}}|^2 + \beta_6^2|\widehat{w}_1|^2 + \beta_7^2|\widehat{w}_2|^2)1_\omega\right] d\mathbf{x}dt < +\infty \tag{2.87}$$

e é solução do sistema em (2.80) para alguma pressão $\hat{p}$.

A primeira propriedade é fácil de verificar, desde que $(\widehat{\varphi}, \widehat{q}, \widehat{\psi}, \widehat{\zeta})$ pertence a P e

$$\begin{aligned} a((\widehat{\boldsymbol{\varphi}}, \widehat{q}, \widehat{\psi}, \widehat{\zeta}), (\widehat{\boldsymbol{\varphi}}, \widehat{q}, \widehat{\psi}, \widehat{\zeta})) \;=\;& \int_Q \left[\beta_3^2(|\widehat{\mathbf{y}}|^2 + |\widehat{c}|^2) + \beta_4^2|\widehat{\theta}|^2\right] d\mathbf{x}dt \\ &+ \int_0^T\!\!\int_\omega \left(\beta_5^2|\widehat{\mathbf{v}}|^2 + \beta_6^2|\widehat{w}_1|^2 + \beta_7^2|\widehat{w}_2|^2\right) d\mathbf{x}dt. \end{aligned}$$

Para verificar a segunda propriedade, notemos que $\widehat{\mathbf{y}} \in \mathbf{L}^2(Q)$, $\widehat{\theta} \in L^2(Q)$, $\widehat{c} \in L^2(Q)$, $\widehat{\mathbf{v}} \in \mathbf{L}^2(\omega\times(0,T))$, $\widehat{w_1}$, $\widehat{w_2} \in L^2(\omega\times(0,T))$. Então, introduzamos a solução fraca $(\widetilde{\mathbf{y}}, \widetilde{p}, \widetilde{\theta}, \widetilde{c})$ para o seguinte sistema:

$$\begin{cases} L_1(\widetilde{\mathbf{y}}) + \nabla\widetilde{p} = \mathbf{F} + \widetilde{\theta}\mathbf{e}_N + \widetilde{c}\,\overrightarrow{b} + \widehat{\mathbf{v}}1_\omega, \quad \nabla\cdot\widetilde{\mathbf{y}} = 0 & \text{em} \quad Q, \\ L_2(\widetilde{\theta}) + \nabla\cdot(\overline{\theta}\widetilde{\mathbf{y}}) = f_1 + \widehat{w}_1 1_\omega & \text{em} \quad Q, \\ L_3(\widetilde{c}) + \nabla\cdot(\overline{c}\widetilde{\mathbf{y}}) = f_2 + \widehat{w}_2 1_\omega & \text{em} \quad Q, \\ \widetilde{\mathbf{y}} = \mathbf{0}, \;\widetilde{\theta} = \widetilde{c} = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \widetilde{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{y}_0, \;\widetilde{\theta}(0) = \theta_0, \;\widetilde{c}(0) = c_0 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.88}$$

Sabemos que $(\widetilde{\mathbf{y}}, \widetilde{\theta}, \widetilde{c})$, junto com $\widetilde{p}$, é a única solução de (2.88) definida por transposição. Isto significa que $(\widetilde{\mathbf{y}}, \widetilde{\theta}, \widetilde{c})$ é a única função em $\mathbf{L}^2(Q) \times L^2(Q) \times L^2(Q)$ satisfazendo

$$
\begin{aligned}
&\int_Q \widetilde{\mathbf{y}} \cdot \widetilde{\mathbf{m}}\; d\mathbf{x}dt + \int_Q \widetilde{\theta}\, \widetilde{j}_1\; d\mathbf{x}dt + \int_Q \widetilde{c}\, \widetilde{j}_2\; d\mathbf{x}dt = \int_0^T \langle \mathbf{F}(t), \boldsymbol{\varphi}(t)\rangle_{\mathbf{H}^{-1},\mathbf{H}_0^1} dt \\
&+ \int_0^T \langle f_1(t), \psi(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_0^T \langle f_2(t), \zeta(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt + \int_\Omega \mathbf{y}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}(0) d\mathbf{x} \\
&+ \int_\Omega \theta_0 \psi(0) d\mathbf{x} + \int_\Omega c_0 \zeta(0) d\mathbf{x} + \int_Q (\widehat{\mathbf{v}} 1_\omega \boldsymbol{\varphi} + \widehat{w_1} 1_\omega \psi + \widehat{w_2} 1_\omega \zeta) d\mathbf{x}dt,
\end{aligned}
\tag{2.89}
$$

para todo $(\widetilde{\mathbf{m}}, \widetilde{j}_1, \widetilde{j}_2)$ pertencente a $\mathbf{L}^2(Q) \times L^2(Q) \times L^2(Q)$, em que $(\boldsymbol{\varphi}, \psi, \zeta)$, junto com alguma q, é a solução de

$$
\begin{cases}
L_1^* \boldsymbol{\varphi} + \nabla q - \overline{\theta} \nabla \psi - \overline{c} \nabla \zeta = \widetilde{\mathbf{m}},\ \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0 & \text{em} \quad Q, \\
L_2^* \psi - \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{e}_N = \widetilde{j}_1 & \text{em} \quad Q, \\
L_3^* \zeta - \boldsymbol{\varphi} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} = \widetilde{j}_2 & \text{em} \quad Q, \\
\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0},\ \psi = \zeta = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\
\boldsymbol{\varphi}(T) = 0,\ \psi(T) = \zeta(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega.
\end{cases}
$$

Notemos que $(\boldsymbol{\varphi}, q, \psi, \zeta) \in P$. Assim, de (2.85) e (2.86), vemos que $(\widehat{\mathbf{y}}, \widehat{\theta}, \widehat{c}, \widehat{\mathbf{v}}, \widehat{w_1}, \widehat{w_2})$ satisfaz também (2.89). Da unicidade de solução por transposição temos que $(\widehat{\mathbf{y}}, \widehat{\theta}, \widehat{c}) = (\widetilde{\mathbf{y}}, \widetilde{\theta}, \widetilde{c})$. Portanto, $(\widehat{\mathbf{y}}, \widehat{\theta}, \widehat{c})$, juntamente com $\widehat{p} = \widetilde{p}$, é a solução para o sistema em (2.80).

Finalmente, devemos verificar que $(\widehat{\mathbf{y}}, \widehat{\theta}, \widehat{c}, \widehat{\mathbf{v}}, \widehat{w_1}, \widehat{w_2})$ pertence a E_N. Já sabemos que

$$
(\beta_3 \widehat{\mathbf{y}})_i,\ \beta_4 \widehat{\theta},\ \beta_3 \widehat{c},\ (\beta_5 \widehat{\mathbf{v}} 1_\omega)_i,\ \beta_6 \widehat{w}_1 1_\omega,\ \beta_7 \widehat{w}_2 1_\omega \in L^2(Q),
$$

$$
\beta_1(L_1(\widehat{\mathbf{y}}) + \nabla \widehat{p} - \widehat{\theta} e_N - \widehat{c}\, \overrightarrow{b} - \widehat{\mathbf{v}} 1_\omega) \in
\begin{cases}
L^2(0,T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \text{ se } N = 2, \\
L^2(0,T; \mathbf{W}^{-1,6}(\Omega)) \text{ se } N = 3,
\end{cases}
$$

$$
\beta_1(L_2(\widehat{\theta}) + \nabla \cdot (\overline{\theta} \widehat{\mathbf{y}}) - \widehat{w}_1 1_\omega) \in
\begin{cases}
L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)) \text{ se } N = 2, \\
L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)) \text{ se } N = 3,
\end{cases}
$$

$$
\beta_1(L_3(\widehat{c}) + \nabla \cdot (\overline{c} \widehat{\mathbf{y}}) - \widehat{w}_2 1_\omega) \in
\begin{cases}
L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)) \text{ se } N = 2, \\
L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)) \text{ se } N = 3.
\end{cases}
$$

Assim, resta-nos apenas verificar que

$$
\beta_1^{1/2} \widehat{\theta},\ \beta_1^{1/2} \widehat{c} \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega)),
$$

$$\beta_1^{1/2}\widehat{\mathbf{y}} \in L^2(0,T;\mathbf{V}) \cap L^\infty(0,T;\mathbf{H}) \text{ e } \beta_1^{1/2}\widehat{\mathbf{y}} \in L^4(0,T;\mathbf{L}^{12}(\Omega))(\text{quando } N=3).$$

Para isto, vamos introduzir as funções $\mathbf{y}^* = \beta_1^{1/2}\widehat{\mathbf{y}}$, $p^* = \beta_1^{1/2}\widehat{p}$, $\theta^* = \beta_1^{1/2}\widehat{\theta}$, $c^* = \beta_1^{1/2}\widehat{c}$, $\mathbf{F}^* = \beta_1^{1/2}(\mathbf{F}+\widehat{\mathbf{v}}1_\omega)$, $f_1^* = \beta_1^{1/2}(f_1+\widehat{w}_1 1_\omega)$ e $f_2^* = \beta_1^{1/2}(f_2+\widehat{w}_2 1_\omega)$. Então, temos que

$$\begin{cases} L_1\mathbf{y}^* + \nabla p^* = \mathbf{F}^* + \theta^*\mathbf{e}_N + c^*\overrightarrow{\mathbf{b}} + (\beta_1^{1/2})_t\widehat{\mathbf{y}}, \;\; \nabla\cdot\mathbf{y}^* = 0 & \text{em} \quad Q, \\ L_2\theta^* + \nabla\cdot(\overline{\theta}\mathbf{y}^*) = f_1^* + (\beta_1^{1/2})_t\widehat{\theta} & \text{em} \quad Q, \\ L_3 c^* + \nabla\cdot(\overline{c}\mathbf{y}^*) = f_2^* + (\beta_1^{1/2})_t\widehat{c} & \text{em} \quad Q, \\ \mathbf{y}^* = \mathbf{0}, \;\; \theta^* = c^* = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \mathbf{y}^*(0) = \beta_1^{1/2}(0)\mathbf{y}_0, \;\; \theta^*(0) = \beta_1^{1/2}(0)\theta_0, \;\; c^*(0) = \beta_1^{1/2}(0)c_0 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.90}$$

Desde que $\mathbf{F}^* \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$, $f_1^*,\ f_2^* \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $(\beta_1^{1/2})_t\widehat{\mathbf{y}} \in \mathbf{L}^2(Q)$, $(\beta_1^{1/2})_t\widehat{\theta},\ (\beta_1^{1/2})_t\widehat{c} \in L^2(Q)$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{H}$, $\theta_0 \in L^2(\Omega)$ e $c_0 \in L^2(\Omega)$, temos que

$$\mathbf{y}^* \in L^2(0,T;\mathbf{V}) \cap L^\infty(0,T;\mathbf{H}) \;\text{ e }\; \theta^*, c^* \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Nossa última tarefa será deduzir que $\mathbf{y}^* \in L^4(0,T;\mathbf{L}^{12}(\Omega))$. Para isto, consideremos para cada $\mathbf{g} \in L^{4/3}(0,T;\mathbf{L}^{12/11}(\Omega))$, o sistema de Stokes

$$\begin{cases} -\mathbf{w}_t - \Delta\mathbf{w} + \nabla h = \mathbf{g} & \text{em} \quad Q, \\ \nabla\cdot\mathbf{w} = 0 & \text{em} \quad Q, \\ \mathbf{w} = \mathbf{0} & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \mathbf{w}(T) = \mathbf{0} & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.91}$$

Temos o seguinte resultado:

Lema 2.4.4. *Seja $N=3$ e $\overline{\mathbf{y}} \in \mathbf{L}^\infty(Q)$. Então, para cada $\mathbf{g} \in L^{4/3}(0,T;\mathbf{L}^{12/11}(\Omega))$, existe uma única solução $\mathbf{w}$ para o sistema de Stokes* (2.91) *satisfazendo*

$$\mathbf{w} \in L^2(0,T;\mathbf{W}_0^{1,6/5}(\Omega)) \cap C^0([0,T];\mathbf{L}^{4/3}(\Omega))$$

que depende continuamente de $\mathbf{g}$ nesses espaços.

Prova: Veja [12], p. 1538. ■

Assim, pelo lema 2.4.4, temos que

$$\mathbf{w} \in L^2(0,T;\mathbf{W}_0^{1,6/5}(\Omega)) \cap C^0([0,T];\mathbf{L}^{4/3}(\Omega)), \tag{2.92}$$

e esta depende continuamente de $\mathbf{g}$ nesses espaços. Então $\mathbf{y}^*$ deve ser idêntica à solução por transposição da primeira equação de (2.90), a saber, a única função $\mathbf{y}^*_* \in L^4(0,T;\mathbf{L}^{12}(\Omega))$ satisfazendo

$$\int_Q \mathbf{y}^*_* \cdot \mathbf{g}\, d\mathbf{x}dt = \int_\Omega \beta_1^{1/2}(0)\mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{w}(0)d\mathbf{x} + \int_0^T \langle \mathbf{A}^*(t), w(t)\rangle_{\mathbf{W}^{-1,6},\mathbf{W}_0^{1,6/5}} dt \tag{2.93}$$

para todo $\mathbf{g}$ pertencente a $L^{4/3}(0,T;\mathbf{L}^{12/11}(\Omega))$. Em (2.90), temos que

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{F}^* + \theta^*\mathbf{e}_N + c^*\overrightarrow{\mathbf{b}} + (\beta_1^{1/2})_t\widehat{\mathbf{y}} - (\mathbf{y}^* \cdot \nabla)\overline{\mathbf{y}} - (\overline{\mathbf{y}} \cdot \nabla)\mathbf{y}^*$$

e $(\mathbf{w}, h)$ é a solução de (2.91) associada a $\mathbf{g}$. Observemos que, graças às hipóteses sobre $\mathbf{F}$ e $\mathbf{y}_0$, desde que $\theta^*, c^* \in L^2(Q)$ e $\mathbf{y}^* \in L^2(0,T;\mathbf{L}^6(\Omega))$, todos os termos da definição (2.93) fazem sentido em virtude de (2.92). Portanto, $\mathbf{y}^* \in L^4(0,T;\mathbf{L}^{12}(\Omega))$. Isto finaliza a prova da Proposição 2.4.3. ■

Observação 2.4.5. *Observemos que, além da controlabilidade nula, temos duas propriedades adicionais (e essenciais) para a solução* $(\widehat{\mathbf{y}}, \widehat{\theta}, \widehat{c})$ *de* (2.7)*:*

- *Primeiro, encontramos que* $\widehat{\mathbf{y}}$*,* $\widehat{\theta}$ *e* $\widehat{c}$ *decrescem exponencialmente quando* $t \to T^-$*.*
- *Segundo, uma propriedade de regularidade adicional foi obtida para* $\widehat{\mathbf{y}}$*.*

2.5 Controlabilidade exata às trajetórias

Nesta seção utilizaremos alguns argumentos semelhantes aos argumentos usados na referência [28]. Graças a isto, seremos capazes de provar o Teorema 2.1.3.

Primeiramente, façamos as seguintes mudanças de variáveis $\mathbf{y} = \overline{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$, $p = \overline{p} + q$, $\theta = \overline{\theta} + \rho$ e $c = \overline{c} + \varsigma$. Desde que a quádrupla $(\overline{\mathbf{y}}, \overline{p}, \overline{\theta}, \overline{c})$ resolve (2.1), então $(\mathbf{y}, p, \theta, c)$ resolve (1) se, e somente se, $(\mathbf{z}, q, \rho, \varsigma)$ resolve

$$\begin{cases} L_1\mathbf{z} + (\mathbf{z}\cdot\nabla)\mathbf{z} + \nabla q = \mathbf{v}1_\omega + \rho\mathbf{e}_N + \varsigma\overrightarrow{\mathbf{b}} & \text{em} \quad Q, \\ \nabla\cdot\mathbf{z} = 0 & \text{em} \quad Q, \\ L_2\rho + \mathbf{z}\cdot\nabla\rho + \mathbf{z}\cdot\nabla\overline{\theta} = w_1 1_\omega & \text{em} \quad Q, \\ L_3\varsigma + \mathbf{z}\cdot\nabla\varsigma + \mathbf{z}\cdot\nabla\overline{c} = w_2 1_\omega & \text{em} \quad Q, \\ \mathbf{z} = \mathbf{0}, \ \rho = \varsigma = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \ \rho(0) = \rho_0, \ \varsigma(0) = \varsigma_0 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases} \tag{2.94}$$

em que L_1, L_2 e L_3 foram definidos em (2.79) e os dados iniciais são dados por $\mathbf{z}_0 = \mathbf{y}_0 - \overline{\mathbf{y}}_0$, $\rho_0 = \theta_0 - \overline{\theta}$ e $\varsigma_0 = c_0 - \overline{c}_0$.

Então, a controlabilidade exata local à trajetórias se reduz a um resultado de controlabilidade nula local para o sistema não-linear (2.94).

Para isto, aplicamos o teorema 1.7.5 considerando os seguintes espaços $E = \mathbf{E}_N$ e $G = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2$ com

$$\mathbf{G}_1 = \begin{cases} \beta_1^{-1}L^2((0,T);\mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \times [\beta_1^{-1}L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))]^2, & \text{se} \quad N = 2, \\ \beta_1^{-1}L^2((0,T);\mathbf{W}^{-1,6}(\Omega)) \times [\beta_1^{-1}L^2((0,T);H^{-1}(\Omega))]^2, & \text{se} \quad N = 3, \end{cases}$$

$$\mathbf{G}_2 = \begin{cases} \mathbf{H} \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), & \text{se} \quad N = 2, \\ (\mathbf{L}^4(\Omega) \cap \mathbf{H}) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), & \text{se} \quad N = 3 \end{cases}$$

e o operador $\mathcal{A}$ é definido por

$$\mathcal{A}(\mathbf{z}, q, \rho, \varsigma, \mathbf{v}, w_1, w_2) = (\mathcal{A}_1(\mathbf{z}, q, \rho, \varsigma, \mathbf{v}),\ \mathcal{A}_2(\mathbf{z}, \rho, w_1),\ \mathcal{A}_3(\mathbf{z}, \varsigma, w_2),\ \mathbf{z}(0),\ \rho(0),\ \varsigma(0))$$

para todo $(\mathbf{z}, q, \rho, \varsigma, \mathbf{v}, w_1, w_2) \in \mathbf{E}_N$, em que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(\mathbf{z}, q, \rho, \varsigma, \mathbf{v}) &= L_1\mathbf{z} + (\mathbf{z}\cdot\nabla)\mathbf{z} + \nabla q - \mathbf{v}1_\omega - \rho\mathbf{e}_N - \varsigma\overrightarrow{\mathbf{b}}, \\ \mathcal{A}_2(\mathbf{z}, \rho, w_1) &= L_2\rho + \mathbf{z}\cdot\nabla\rho + \nabla\cdot(\overline{\theta}\mathbf{z}) - w_1 1_\omega, \\ \mathcal{A}_3(\mathbf{z}, \varsigma, w_2) &= L_3\varsigma + \mathbf{z}\cdot\nabla\varsigma + \nabla\cdot(\overline{c}\mathbf{z}) - w_2 1_\omega. \end{aligned}$$

Na proposição seguinte, veremos que as escolhas anteriores serão suficientes para aplicarmos o Teorema 1.7.5.

Proposição 2.5.1. *Assumindo que* $\overline{\mathbf{y}}$, $\overline{\theta}$, $\overline{c} \in \mathbf{L}^\infty(Q)$. *Então,* $\mathcal{A} \in C^1(E;G)$.

Prova: Começamos observando que todos os termos que aparecem na definição de $\mathcal{A}$ são lineares e contínuos (e consequentemente $C^1(E;G)$), exceto os seguintes termos: $(\mathbf{z}\cdot\nabla)\mathbf{z}$, $\mathbf{z}\cdot\nabla\rho$ e $\mathbf{z}\cdot\nabla\varsigma$. No entanto, a aplicação

$$\big((\mathbf{z},q,\rho,\varsigma,\mathbf{v},w_1,w_2),\ (\tilde{\mathbf{z}},\tilde{q},\tilde{\rho},\tilde{\varsigma},\tilde{\mathbf{v}},\tilde{w}_1,\tilde{w}_2)\big)\mapsto \big((\mathbf{z}\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{z}},\ \mathbf{z}\cdot\nabla\tilde{\rho},\ \mathbf{z}\cdot\nabla\tilde{\varsigma}\big) \tag{2.95}$$

é bilinear, então é suficiente provarmos sua continuidade de $E_N \times E_N$ em G_1.

Primeiramente vamos considerar o caso em que a dimensão é $N=2$. Notemos que $(\mathbf{z}\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{z}} = \nabla\cdot(\mathbf{z}\otimes\tilde{\mathbf{z}})$. Desde que $\beta_1^{1/2}(\mathbf{z},\tilde{\mathbf{z}},\tilde{\rho},\tilde{\varsigma}) \in \mathbf{L}^4(Q)$ (veja a definição do espaço $\mathbf{E}_2$) para todo par $\big((\mathbf{z},q,\rho,\varsigma,\mathbf{v},w_1,w_2),\tilde{\mathbf{z}},\tilde{q},\tilde{\rho},\tilde{\varsigma},\tilde{\mathbf{v}},\tilde{w}_1,\tilde{w}_2)\big)\in E_2\times E_2$ e temos

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{z}\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{z}}\|_{\beta_1 L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))} &\le C\|\mathbf{z}\otimes\tilde{\mathbf{z}}\|_{\beta_1 L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\\ &\le C\left\|\beta_1^{1/2}\mathbf{z}\right\|_{\mathbf{L}^4(Q)}\left\|\beta_1^{1/2}\tilde{\mathbf{z}}\right\|_{\mathbf{L}^4(Q)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{z}\cdot\nabla\tilde{\rho}\|_{\beta_1 L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\le C\|\tilde{\rho}\mathbf{z}\|_{\beta_1 L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\\ &\le C\left\|\beta_1^{1/2}\mathbf{z}\right\|_{\mathbf{L}^4(Q)}\left\|\beta_1^{1/2}\tilde{\rho}\right\|_{L^4(Q)}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|\mathbf{z}\cdot\nabla\tilde{\varsigma}\|_{\beta_1 L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\le C\|\tilde{\varsigma}\mathbf{z}\|_{\beta_1 L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\\ &\le C\left\|\beta_1^{1/2}\mathbf{z}\right\|_{\mathbf{L}^4(Q)}\left\|\beta_1^{1/2}\tilde{\varsigma}\right\|_{L^4(Q)}.\end{aligned}$$

Em segundo lugar vamos considerar o caso em que a dimensão é $N=3$. Assim, desde que $\beta_1^{1/2}(\mathbf{z},\tilde{\mathbf{z}}) \in L^4(0,T;\mathbf{L}^{12}(\Omega))$ e que $\beta_1^{1/2}(\mathbf{z},\tilde{\mathbf{z}},\tilde{\rho},\tilde{\varsigma}) \in \mathbf{L}^4(Q)$, encontramos que

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{z}\cdot\nabla)\tilde{\mathbf{z}}\|_{\beta_1 L^2(0,T;\mathbf{W}^{-1,6}(\Omega))} &\le C\|\mathbf{z}\otimes\tilde{\mathbf{z}}\|_{\beta_1 L^2(0,T;\mathbf{L}^6(\Omega))}\\ &\le C\left\|\beta_1^{1/2}\mathbf{z}\right\|_{L^4(0,T;\mathbf{L}^{12}(\Omega))}\left\|\beta_1^{1/2}\tilde{\mathbf{z}}\right\|_{L^4(0,T;\mathbf{L}^{12}(\Omega))},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{z}\cdot\nabla\tilde{\rho}\|_{\beta_1 L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\le C\|\tilde{\rho}\mathbf{z}\|_{\beta_1 L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\\ &\le C\left\|\beta_1^{1/2}\mathbf{z}\right\|_{L^4(0,T;\mathbf{L}^6(\Omega))}\left\|\beta_1^{1/2}\tilde{\rho}\right\|_{L^4(0,T;L^3(\Omega))}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|\mathbf{z}\cdot\nabla\tilde{\varsigma}\|_{\beta_1 L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\le C\|\tilde{\varsigma}\mathbf{z}\|_{\beta_1 L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\\ &\le C\left\|\beta_1^{1/2}\mathbf{z}\right\|_{L^4(0,T;\mathbf{L}^6(\Omega))}\left\|\beta_1^{1/2}\tilde{\varsigma}\right\|_{L^4(0,T;L^3(\Omega))}.\end{aligned}$$

Assim, obtemos a continuidade da aplicação definida em (2.95) nos casos bidimensional e tridimensional. Com isto terminamos a prova do teorema 2.5.1.

■

Com este resultado, aplicaremos o teorema 1.7.5 para $e_0 = \mathbf{0} \in E$ e $h_0 = \mathbf{0} \in G$. Para isto, devemos mostrar que $\mathcal{A}'(e_0) : E \longrightarrow G$ é sobrejetiva. De fato, note que $\mathcal{A}'(e_0) : E \longrightarrow G$ é a aplicação que a cada $(\mathbf{z}, q, \rho, \varsigma, \mathbf{v}, w_1, w_2) \in E$ associa ao seguinte termo de G:

$$(L_1\mathbf{z}+\nabla q-\mathbf{v}1_\omega-\rho\mathbf{e}_N-\varsigma\overrightarrow{\mathbf{b}}, L_2\rho+\nabla\cdot(\overline{\theta}\mathbf{z})-w_1 1_{\mathcal{O}}, L_3\varsigma+\nabla\cdot(\overline{c}\mathbf{z})-w_2 1_{\mathcal{O}}, \mathbf{z}(0), \rho(0), \varsigma(0)).$$

Graças à controlabilidade nula para sistema (2.6) (veja a proposição 2.4.3), temos que $\mathcal{A}'(e_0)$ é sobrejetiva. Assim, o teorema 1.7.5 garante que existe $\delta > 0$ tal que, se

$$\|(\mathbf{0}, 0, 0, \mathbf{z}(0), \rho(0), \varsigma(0))\|_G = \|(\mathbf{z}(0), \rho(0), \varsigma(0))\|_{\mathbf{G_2}} < \delta$$

então podemos encontrar um controle $(\mathbf{v}, w_1, w_2)$, com $v_1 \equiv v_N \equiv 0$, tal que as soluções associadas à (2.94) verificam $(\mathbf{z}(T), \rho(T), \varsigma(T)) = (\mathbf{0}, 0, 0)$ em Ω. Isto estabelece o resultado de controlabilidade nula para o sistema (2.94) e, portanto, concluimos a prova do teorema 2.1.3.

■

2.6 Comentários adicionais

Nesta seção faremos alguns comentários importantes a respeito da controlabilidade do sistema (1), alguns deles ainda são problemas em aberto.

a) O resultado de controlabilidade exata local para as tragetórias do sistema (1) poderia ser obtido sem a hipótese (2.4), visto que esta foi utilizada somente para reduzir o número de controles de $N+1$ a N;

b) No caso bidimensional, o sistema é localmente controlado com controles atuando somente nas equações da temperatura e da concentração; Isto é, existem controle w_1 e w_2 tais que a solução do sistema

$$\begin{cases} \mathbf{y}_t - \Delta\mathbf{y} + (\mathbf{y}\cdot\nabla)\mathbf{y} + \nabla p = \theta\mathbf{e}_N + c\,\overrightarrow{\mathbf{b}} & \text{em} \quad \Omega\times(0,T), \\ \nabla\cdot\mathbf{y} = 0 & \text{em} \quad \Omega\times(0,T), \\ \theta_t - \Delta\theta + \mathbf{y}\cdot\nabla\theta = w_1 1_\omega & \text{em} \quad \Omega\times(0,T), \\ c_t - \Delta c + \mathbf{y}\cdot\nabla c = w_2 1_\omega & \text{em} \quad \Omega\times(0,T), \\ \mathbf{y} = \mathbf{0},\ \theta = c = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega\times(0,T), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0,\ \theta(0) = \theta_0,\ c(0) = c_0 & \text{em} \quad \Omega, \end{cases}$$

verifica (2.2) se os dados iniciais são "pequenos".

d) A partir do teorema 2.1.3 pode-se provar um resultado de controlabilidade nula global para T suficientemente grande, ou seja, para qualquer dado inicial $(\mathbf{y}_0, \theta_0, c_0) \in (\mathbf{L}^{2N-2}(\Omega)\cap\mathbf{H})\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$, existem $T > 0$ (suficientemente grande) e controles $(\mathbf{v}, w_1, w_2)$ em L^2 tais que a solução $(\mathbf{y}, \theta, c)$ de (1) satistaz a condição:

$$(\mathbf{y}(T),\ \theta(T),\ c(T)) = (\mathbf{0},\ 0,\ 0);$$

Para isto, basta observar que que o sistema (1) decai exponencialmente a zero quando $T \to +\infty$.

f) Existe um outro método para obter um resultado análogo para o sistema (1) (veja [25]); Este método está baseando em usar um controle adicional na equação da incompressibilidade para obter um resultado de controle. E depois eliminar este controle atuando na equação de incompressibilidade.

g) Alguns problemas em aberto:

- Resultado análogo no caso tridimensional com $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ou seja, com controles atuando somente nas equações da temperatura e da concentração;

- Controlabilidade exata local com as tragetórias não necessariamente em L^∞;

- Controlabilidade nula global;

- Controlabilidade aproximada global;

- Controlabilidade exata para as trajetórias com um número reduzido de controles escalares sem a hipótese sobre o subdomínio.

Referências Bibliográficas

[1] ALEKSEEV, V. M., FOMIN, S. V., TIKHOMIROV, V. M., Optimal control, Contemp. Soviet Math, Consultants Bureau, New York, 1987. Traduzido do Russo por V. M. Volosov.

[2] AUBIN, J. P., EKELAND, I., Applied Nonlinear Analysis, Dover, New York, 2006.

[3] BREZIS, H., Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Dunod, Paris, 1999.

[4] CORON, J.-M., On the controllability of the 2-D incompressible Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions, ESAIM: Control, Optim. Calc. Var., 1 (1996), 35-75.

[5] CORON, J.-M., On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids, J.M.P.A., 75 (1996), 155-188.

[6] CORON, J.-M., FURSIKOV, A.V., Global exact controllability of the $2-D$ Navier-Stokes equations on a manifold without boundary, Russian J. Math. Physics, 4 (4), (1996), 1-19.

[7] EGOROV, Yu. V., Some problems in the theory of optimal control, Zh. Vyschisl. Mat. i Mat. Fiz. 5 (1963) 887-904; traduzido em USSR Comput. Math. and Math. Phys. 5 (1963).

[8] EVANS, L. C., Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, 1997.

[9] FABRE, C., Uniqueness results for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems, ESAIM: Control, Optim. Calc. Var., 1 (1995/96), 267-302.

[10] FABRE, C., PUEL, J. -P., ZUAZUA, E., Approximated controllability of the semilinear heat equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 125 (1995), 31-61.

[11] FATTORINI, H., Boundary control of temperature distribuitons in a parallepipedon, SIAM J. Control Optim., 13 (1975), 1-13.

[12] FERNÁNDEZ-CARA, E., GUERRERO, S., IMANUVILOV, O. Yu., PUEL, J.-P., Local exact controllability of the Navier-Stokes system, J. Math. Pures Appl., 83 (12)(2004), 1501-1542.

[13] FERNÁNDEZ-CARA, E., GUERRERO, S., Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability, SIAM J. Control Optimization, 45 (4), (2006), 1395-1446.

[14] FERNÁNDEZ-CARA, E., GUERRERO, S., IMANUVILOV, O. Yu., PUEL, J.-P., Some controllability results for the N-dimensional Navier-Stokes and Boussinesq systems with N - 1 scalar controls, SIAM J. Control Optim., Vol. 45, No 1, (2006), 146-173.

[15] FERNÁNDEZ-CARA, E., GUERRERO, S., Local exact controllability of micropolar fluids, J. Math. Fluid. Mech., 9, (2007), 419-453.

[16] FERRER, J. L., MEDEIROS, L. A., Remarks on Approximate Controllability in Nocylindrical Domains, Comunications in Applied Analysis 6 (3) (2002), 375-392.

[17] FURSIKOV, A. V., IMANUVILOV, O. Yu., On exact boundary zero-controllability of two-dimensional Navier-Stokes equations", Acta Appl. Math., 37 (1994), 67-76.

[18] FURSIKOV, A. V., IMANUVILOV, O. Yu., Exact boundary zero controllability of three dimensional Navier-Stokes equations, J. Dynamical and Control Systems, 1 (1995), 325-350.

[19] FURSIKOV, A. V., IMANUVILOV, O. Yu., Controllability of Evolutions Equations, Lectures Notes Series, Vol. 34, Seoul National University, 1996.

[20] FURSIKOV, A. V., IMANUVILOV, O. Yu., Exact local controllability of two dimensional Navier-Stokes equations (Russo), Mat. Sb. 187 (9) (1996) 103-138; traduzido em Sb. Math., 187 (9) (1996), 1335-1390.

[21] FURSIKOV, A. V., IMANUVILOV, O. Yu., Local exact controllability of the Navier-Stokes equations, Res. Inst. Math. - GARC Preprint Series, 95-92, Feb. 1996.

[22] FURSIKOV, A. V., IMANUVILOV, O. Yu., Exact controllability of the Navier-Stokes equations and Boussinesq equation, Russian Math. Surveys, 54 (3) (1999), 565-618.

[23] GIGA, Y., SOHR, H., Abstract L^p estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier-Stokes equations in exterior domains, J. Functional Anal., 102 (1991), 72-94.

[24] GLASS, O., Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles en dimension 3", C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 325 (1997), 987-992.

[25] GONZÁLEZ-BURGOS, M., GUERRERO, S., PUEL, J. -P., Local exact controllability to the trajectories of the Boussinesq system via a fictitious control on the divergence equation, Communications on pure and applied analysis (2009), 311 - 333.

[26] GUERRERO, S., Local exact controllability to the trajectories of the Boussinesq system, Annales de l'Institut Henri Poincaré Analyse Non Linéaire 23 (2006), no. 1, 29–61.

[27] HO, L. F. Observabilitè frontière de l'équation des ondes, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér I Math. v.302, p. 443-446. 1986.

[28] IMANUVILOV, O. Yu., Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations, ESAIM Control Optim. Cal. Var., 6 (2001), 39-72.

[29] IMANUVILOV, O. Yu., PUEL, J.-P., Global Carleman estimates for weak solutions of elliptic nonhomogeneous Dirichlet problems C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 335 (2002), 33-38.

[30] IMANUVILOV, O. Yu., YAMAMOTO, M., Carleman estimate for a parabolic equation in a Sobolev space of negative order and its applications, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Dekker, New York, 218 (2001), 113-137.

[31] KESAVAN, S., Topics in Functional Analysis and Applications, Wiley Easten Limited, New Delhi, 1990.

[32] LEE, E. B., MARKUS, L., Foundations of Optimal Control Theory, The SIAM Series in Applied Mathematics, John Wiley & Sons, 1967.

[33] LIONS, J.-L., Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites Non Lineáires, Dunod, Paris, 1969.

[34] LIONS, J.-L., Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome I. Contrôlabilité Exacte, Rech. Math. Appl. 8, Masson, Paris, 1988.

[35] LIONS, J.-L., Exact controllability, stabilization and perttubation for distributed systems, SIAM Review, 30 (1988), 1-68.

[36] LIONS, J.-L., Are there connections between turbulence and controllability? *9^e Conférence internationale de l'INRIA, Antibes,12-15 juin 1990.*

[37] LIONS, J. -L., Remarks sur la contrôlabilité approchée, in "Spanish-French Conference on Distribuited Systems Control", Univ. Málaga, (1990), 77-87.

[38] LIONS, J.-L., ZUAZUA, E., Contrôlabilitè exacte des approximations de Galerkin des équations de Navier-Stokes, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 234 (1997), 1015-1021.

[39] LIONS, J.-L., ZUAZUA, E., On the cost of controlling unstable systems: The case of boundary controls, J. Anal. Math., 73 (1997).

[40] LIONS, J.-L., ZUAZUA, E., Exact boundary controllability of Galerkin's approximations of Navier-Stokes equations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, XXVI (1998), 605-621.

[41] MATOS, M. P., Integral de Bochner e Espaços $L^p(0,T;X)$, Notas de Aulas do Curso de Verão, UFPB, João Pessoa, 1998.

[42] MEDEIROS, L. A., Exact Controllability for Wave Equations-HUM, 37º Seminário Brasileiro de Análise, Rio de Janeiro (1993), 63-173.

[43] MEDEIROS, L. A.,Tópicos em Equações Diferenciais Parciais, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2006.

[44] MEDEIROS, L. A., MILLA MIRANDA, M., Espaços de Sobolev, IM-UFRJ, RIo de Janeiro, 2000.

[45] MEDEIROS, L. A., RIVERA, P. H., Espaços de Sobolev e Equacões Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos nº9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1975.

[46] ROCKAFELLAR, R. T., Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1969.

[47] RUSSEL, D., A unified boundary controllability theory for hipperbolic and parabolic partial and differential equations, Stud. Appl. Math., 52 (1973), 189-212.

[48] RUDIN, W., Functional Analysis, McGraw Hill, 1973. Hill, 1987.

[49] RUSSELL, D., Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions, SIAM Rev., 20 (1978), 639-739.

[50] TARTAR, L., An introduction to Sobolev Spaces and interpolation spaces, Lectures Notes of the Unione Matematica Italiana, 2000.

[51] TEMAM, R., Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis, Stud. Math. Appl., vol. 2, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1977.

[52] ZUAZUA, E., Exact boundary controllability for the semi-linear wave equation, Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, 10 (1989), 357-391.