

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre um Sistema do tipo Schrödinger-Poisson

por

Alex de Moura Batista

sob orientação do

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Abril/2012
João Pessoa - PB

Sobre um Sistema do tipo Schrödinger-Poisson

por

Alex de Moura Batista

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo - UFPA

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB (Suplente)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Abril/2012
João Pessoa - PB

Agradecimentos

- Agradeço a Deus por todas as oportunidades que tive durante minha vida. Agradeço pela saúde, pela força de vontade e por mais esta etapa concluída. Muito obrigado Deus!
- A minha mãe e ao meu pai por todo amor, carinho e confiança que sempre me deram. Vocês são o meu porto seguro e a razão do meu viver. Agradeço, ainda, ao meu irmão pelos momentos de descontração que tivemos.
- Ao meu orientador, Everaldo Souto de Medeiros, pela excelente orientação, pela paciência no início do nosso trabalho, por todo ensinamento a mim proporcionado, pela autonomia e confiança a mim concedida. Muito obrigado Everaldo!
- As minhas colegas de mestrado Elizabeth e Rainelly pela amizade, pelos momentos de estudo e de descontração. Um agradecimento especial a Elisânia, por todo o conhecimento compartilhado, pelas conversas, pelos conselhos e por ter me incentivado nos momentos em que mais precisei.
- Aos professores Giovany de Jesus Malcher Figueiredo e Uberlandio Batista Severo, por aceitarem avaliar meu trabalho, pelos comentários e sugestões tão necessárias para a melhoria deste trabalho.
- Aos professores Cleto Brasileiro Miranda Neto e Uberlandio Batista Severo pelo aprendizado que adquiri em suas aulas e por se apresentarem sempre atenciosos e disponíveis.
- Aos demais professores da Pós-Graduação em Matemática da UFPB que contribuíram para a minha formação.
- Um agradecimento especial a professora de graduação, Lourena Karin de Medeiros Rocha, por me ensinar a gostar de matemática, por todo ensinamento e incentivo. Agradeço, ainda ao professor Adriano Thiago Lopes Bernardino, pelo incentivo e conselhos.
- A todos os meus amigos e colegas da graduação. Vocês foram fundamentais pela graduação tão proveitosa que tive. Obrigado a todos!
- A dona Cida pela hospedagem durante esses anos de mestrado.
- Enfim, ao CNPq pelo apoio financeiro.

Dedicatória

Ao meu pai

Resumo

Nesta dissertação, estudaremos a existência de dois tipos de soluções fracas não negativas para uma classe de problemas do tipo Schrödinger-Poisson, os quais modelam fenômenos físicos, por exemplo, em Mecânica Quântica. Inicialmente, encontraremos através de argumentos de minimização, do Lema Splitting e do Princípio Variacional de Ekeland, uma solução fraca que minimiza o nível de energia mínima associado a variedade de Nehari $\mathcal{N}$. Tal solução é denominada do tipo ground state. Em seguida, encontraremos através do Teorema de Linking, uma solução fraca estritamente positiva que não é do tipo ground state. Tal solução é denominada do tipo bound state.

Palavras-chave:

Ground state, Bound state, Variedade de Nehari, Argumentos de Minimização, Lema Splitting, Princípio Variacional de Ekeland, Teorema de Linking.

Abstract

In this dissertation, we study the existence of two types of non-negative weak solutions for a class of problems of Schrodinger-Poisson type. This kind of problem models, for example, several physical phenomena in quantum mechanics. Initially, by minimization arguments, Splitting Lemma and the Variational Principle of Ekeland we find a weak solution that minimizes the minimum energy level associated to the variety of Nehari $\mathcal{N}$. This is the so-called ground state solution. Afterwards we will find, by using the Linking Theorem, a strictly positive weak solution which is not a ground state solution: the so-called bound state solution.

Keywords:

Ground state, Bound state, Variety of Nehari, Minimization arguments, Splitting Lemma, the Ekeland Variational Principle, Linking Theorem.

Sumário

1	Formulação Variacional do Problema	1
1.1	Equação de Acoplamento	1
1.2	Variedade de Nehari	7
2	Existência de Solução do tipo Ground State	14
2.1	Problemas Auxiliares	15
2.1.1	O Problema (P_∞)	15
2.1.2	O Problema (P_a)	24
2.2	Projeções Sobre a Variedade de Nehari	25
2.3	Um Resultado de Compacidade (Lema Splitting)	26
2.3.1	Prova da Proposição 2.3	41
2.4	Condição (PS)	42
2.5	Estimativa de Nível	44
2.5.1	Prova do Teorema 2.1	46
3	Existência de Solução do tipo Bound State	47
3.1	Não Existência de Solução do tipo Ground State	48
3.2	Funções Auxiliares	51
3.3	Ferramentas do Tipo Minimax	55
3.3.1	Outros níveis para a condição $(PS)_d$	57
3.3.2	Prova do Teorema 3.1	61
A	Resultados Utilizados	62
	Referências Bibliográficas	83

Notações

Neste trabalho, faremos uso das seguintes notações:

Notações gerais

- $B_\delta(x)$ denota a bola aberta de raio δ e centro x ;
- $\rightharpoonup, \rightarrow$ denota convergência fraca e forte, respectivamente;
- $\hookrightarrow$ denota imersão;
- $\mu(\Omega)$ denota a medida de Lebesgue do subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$;
- q.t.p. é uma abreviação de quase toda ponto;
- $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ denota a derivada parcial da função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ em relação a x_i ;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right)$ denota o gradiente da função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i}$ denota o laplaciano da função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota produto interno;
- $f = o(g)$ quando $x \rightarrow x_0$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|/|g(x)| = 0$;
- $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$.

Espaço de Funções

- $C(X, Y)$ denota o espaço das funções contínuas de X em Y ;
- $C_0(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas com suporte compacto em Ω ;
- $C^k(\Omega)$ denota o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω , $k \in \mathbb{N}$;
- $C^\infty(\Omega) = \cap_{k \geq 1} C^k(\Omega)$; $C_0^\infty(\Omega) = C_0(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$;
- $C^{0,\alpha}(\Omega) = \left\{ u \in C(\Omega); \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$ denota o espaço das funções de Hölder;
- $C^{m,\alpha}(\Omega) = \left\{ f \in C(\Omega); D^\beta f \in C^{0,\alpha}(\Omega) \text{ para todo } |\beta| \leq m \right\}$;

- Para $1 \leq p < +\infty$ denotemos

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \quad \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty \right\};$$

- $L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega') \quad \text{para todo compacto } \Omega' \subset \Omega \right\}$
- $L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; |u(x)| \leq C \quad \text{q.t.p sobre } \Omega \quad \text{para algum } C > 0 \right\};$
- $W^{1,p}(\Omega)$ é o espaço das funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que existem $g_i := \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ $i = 1, 2, 3$ satisfazendo

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \varphi g_i dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), i = 1, 2, 3$$

- Com g_i $i = 1, 2, 3$ satisfazendo a propriedade acima temos

$$D^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^{2^*}(\Omega) : \exists g_i \in L^2(\Omega) \quad i = 1, 2, 3 \right\};$$

- Para $p = 2$ temos $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$;
- $H^1_{rad}(\mathbb{R}^3)$ é o subespaço das funções radiais de $H^1(\mathbb{R}^3)$;
- H^{-1} denota o dual do espaço $H^1(\mathbb{R}^3)$;
- $\mathcal{D}^{-1,2^*}(\mathbb{R}^3)$ denota o dual do espaço $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$;

Normas

- $\|u\|_\infty = \inf\{C > 0; \quad |u(x)| \leq C \quad \text{q.t.p em } \Omega\}$ denota a norma do espaço $L^\infty(\Omega)$;
- $|u|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ denota a norma do espaço de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^3)$;
- $|u|_{p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ denota a norma do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$ com $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^3$;
- $\|u\|_{H^1} = \left(|u|_2^2 + \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ denota a norma sobre o espaço $H^1(\mathbb{R}^3)$;
- $\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}} = \left(\sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ denota a norma sobre o espaço $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$.

Constantes

- $C, C_1, C_2, \dots$ denota constantes positivas;
- $\overline{S}$ é a melhor constante da imersão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ contínua, mais precisamente

$$\overline{S} = \inf_{u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}}}{|u|_6};$$

- S é a melhor constante da imersão $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ contínua, mais precisamente

$$S = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{H^1}}{|u|_6}.$$

Introdução

Neste trabalho, estudaremos questões referentes a existência de soluções fracas não-negativas para a seguinte classe de sistemas:

$$\begin{cases} -\Delta u + u + K(x)\phi(x)u = a(x)|u|^{p-1}u & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = K(x)u^2 & \text{em } \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (\text{S})$$

onde as funções $a, K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são não-negativas e satisfazem algumas propriedades integrais.

A motivação do estudo do sistema (S) vem da análise da equação de Schrödinger não linear

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi + K(x)\phi(x)\psi = a(x)|\psi|^{p-1}\psi \quad \text{em } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty),$$

com a interação de um campo Magnético, onde a função $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é do tipo

$$\psi(x, t) = e^{it}u(x),$$

com $t \in \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Maiores detalhes sobre a dedução do sistema (S) podem ser encontradas em [1] ou [7]. Problemas semelhantes têm sido amplamente investigados e possuem forte relação com a física, uma vez que aparecem em modelos da mecânica quântica (veja, por exemplo, [7]) e na teoria de semicondutores (veja, por exemplo, [5]). Em particular, sistemas como (S) foram introduzidos em [5] e [6] como um modelo que descreve ondas solitárias não-lineares para equações estacionárias do tipo Schrödinger que interagem com um campo eletrostático, e são geralmente conhecidos como sistemas do tipo Schrödinger-Poisson. Com efeito, no sistema (S), a primeira equação é do tipo Schrödinger não-linear estacionária (onde, como de costume, o termo não-linear simula a interação entre muitas partículas), que é acoplada com uma equação do tipo Poisson. Isto significa que o potencial é determinado pela carga da função de onda.

Desde que usaremos técnicas variacionais, afim de que a imersão de Sobolev

$$H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^3)$$

seja compacta, vamos assumir no decorrer deste trabalho que $p \in (3, 5)$.

Como veremos, para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, o problema

$$-\Delta \phi = K(x)u^2 \quad \text{em } \mathbb{R}^3, \quad (\text{P})$$

possui uma única solução fraca denotada por $\phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Assim, resolver o sistema (S) é equivalente a encontramos soluções fracas para o problema

$$-\Delta u + u + K(x)\phi_u(x)u = a(x)|u|^{p-1}u \quad \text{em } \mathbb{R}^3. \quad (P_1)$$

A existência de soluções para o problema (P_1) será obtida através de técnicas variacionais, isto é, a ele associaremos o funcional energia $I : H^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)u^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p+1} dx, \quad (1)$$

cujos pontos críticos são soluções fracas do problema (P_1) . Desde que, não temos condições de simetria sobre as funções $K(x)$ e $a(x)$, o estudo do problema (P_1) será uma cuidadosa investigação do comportamento das sequências de Palais-Smale do funcional I .

Este trabalho foi baseado no artigo de Cerami-Vaira [12] e é constituído de três capítulos e um apêndice, conforme descreveremos a seguir.

No *Capítulo 1*, introduziremos as ferramentas variacionais necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. Isto será feito sob as condições:

$$(a_1) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = 1, \quad a \in L^\infty(\mathbb{R}^3) \text{ e } a \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^3;$$

$$(K) \quad K \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap C(\mathbb{R}^3) \text{ e } K > 0 \text{ em } \mathbb{R}^3.$$

Inicialmente, para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, mostraremos através do Teorema da Representação de Riesz que o problema (P) possui uma única solução fraca, denotada por $\phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Em seguida, estudaremos as principais propriedades desta solução. Visto que o funcional I não é limitado inferiormente, com o objetivo de obter uma solução via métodos de minimização, introduziremos a variedade de Nehari

$$\mathcal{N} := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}; \quad I'(u)u = 0 \right\},$$

associada ao funcional I definido em (1), na qual o funcional $I|_{\mathcal{N}}$ é limitado inferiormente. Assim, o nível de energia mínima associado ao funcional I

$$m = \inf \left\{ I(u); \quad u \in \mathcal{N} \right\}$$

está bem definido. Este nível será fundamental para o desenvolvimento dos próximos capítulos.

No *Capítulo 2*, assumindo que as funções a e K satisfazem:

$$(a_1) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = 1, \quad a \in L^\infty(\mathbb{R}^3);$$

$$(a_2) \quad a(x) \geq 1 \text{ em } \mathbb{R}^3 \text{ com } a \not\equiv 1;$$

$$(K) \quad K \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap C(\mathbb{R}^3) \text{ e } K > 0 \text{ em } \mathbb{R}^3,$$

encontraremos uma solução fraca $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ para o problema (P_1) que minimiza o nível de energia mínima m , ou seja, $I(u) = m$. Esta solução é denominada de solução do tipo *ground state* do problema (P_1) .

O principal resultado deste capítulo é:

Teorema 0.1 *Sob as condições (a_1) , (a_2) e (K) , assumindo que*

$$|K|_2^2 < \frac{m_\infty^\vartheta - m_a^\vartheta}{\sigma m_a^{1+\vartheta}},$$

com $\vartheta = \frac{p-3}{p+1}$ e $\sigma = 2^{\frac{p+1}{p-1}} \bar{S}^{-2} S^{-4}$, onde S e $\bar{S}$ são, respectivamente, as melhores constantes das imersões $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ e $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, então o problema (P_1) possui uma solução do tipo ground state.

Os números m_∞ e m_a são os níveis de energia mínima associados aos respectivos problemas

$$-\Delta w + w = |w|^{p-1}w \quad \text{em } \mathbb{R}^3 \quad (P_\infty)$$

e

$$-\Delta w + w = a(x)|w|^{p-1}w \quad \text{em } \mathbb{R}^3. \quad (P_a)$$

Um importante resultado deste capítulo será o Lema Splitting (Proposição 2.3), do qual, como consequência imediata, temos que o funcional $I|_{\mathcal{N}}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in (0, m_\infty)$ e que, além disso, $c = I(u)$, para alguma $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ solução fraca do problema (P_1) .

Afim de usarmos este resultado, mostraremos que $m \in (0, m_\infty)$ e, através o Princípio Variacional de Ekeland, mostraremos que existe uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}$ tal que

$$I(u_n) \rightarrow m \quad \text{e} \quad \|I(u_n)\|_* \rightarrow 0.$$

Assim, iremos garantir a existência de uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ que é solução do tipo ground state para o problema (P_1) . Uma vez que, nada sabemos quanto a mudança de sinal da função u obtida acima, para finalizarmos a prova do Teorema 0.1 provaremos, através do Teorema do Multiplicadores de Lagrange que, $|u| \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é uma solução do tipo ground state do problema (P_1) .

No *Capítulo 3*, assumindo que as funções a e K satisfazem:

$$(a_1) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = 1, \quad a \in L^\infty(\mathbb{R}^3);$$

$$(a_3) \quad a \leq 1 \text{ em } \mathbb{R}^3 \text{ e } a_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^3} a(x) > 0;$$

$$(K) \quad K \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap C(\mathbb{R}^3) \text{ e } K > 0 \text{ em } \mathbb{R}^3,$$

mostraremos que o problema (P_1) não possui solução do tipo ground state. Por outro lado, mostraremos que o problema (P_1) possui uma solução fraca estritamente positiva. Tal solução é denominada do tipo *bound state*.

O principal resultado deste capítulo é:

Teorema 0.2 *Sob as condições (a_1) , (a_3) e (K) , assumindo que*

$$\frac{1 + \eta |K|_2^2}{a_0} < 2^{\frac{p-3}{p+1}},$$

com $\eta = 2^{\frac{p+1}{p-1}} S^{-4} \bar{S}^{-2} m_\infty$, então o problema (P_1) possui uma solução do tipo bound state.

A prova deste resultado será estabelecida através de ferramentas do tipo minimax. Inicialmente, determinaremos $Q \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ de onde através deste subconjunto definiremos o caminho

$$\gamma := \left\{ h \in C(Q, \mathcal{N}); h|_{\partial Q} = id \right\},$$

e o nível minimax

$$c := \inf_{h \in \gamma} \max_{u \in Q} \varphi(h(u)).$$

No Capítulo 2 provaremos que o funcional $I|_{\mathcal{N}}$ satisfaz a condição $(PS)_d$ para todo $d \in (0, m_\infty)$. No entanto, o nível minimax c não pertence ao intervalo $(0, m_\infty)$. Para contornarmos esta dificuldade, afim de obtermos um importante resultado de compacidade, provaremos que o funcional $I|_{\mathcal{N}}$ satisfaz a condição $(PS)_d$ para todo d pertencente a um novo intervalo onde o nível minimax c pertence a este novo intervalo. Com isso, utilizando o Teorema de Linking, provaremos a existência de uma solução fraca não negativa para o problema (P_1) . Através de argumentos de regularidade e do Princípio do Máximo Forte provaremos que esta solução é estritamente positiva. Esta solução, não é do tipo ground state e, portanto, é do tipo bound state e, com isso, provaremos o Teorema 0.2.

No *Apêndice A*, enunciaremos alguns resultados que utilizamos no decorrer deste trabalho.

Capítulo 1

Formulação Variacional do Problema

Neste capítulo, iremos introduzir as ferramentas variacionais necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente, assumiremos que as funções $a, K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem

(a_1) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = 1$, $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ e $a \geq 0$ em $\mathbb{R}^3$;

(K) $K \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap C(\mathbb{R}^3)$ e $K > 0$ em $\mathbb{R}^3$.

As funções $a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ em e $K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $a \equiv 1$ em $\mathbb{R}^3$ e

$$K(x) = \begin{cases} 1/|x|, & \text{se } |x| > 1 \\ 1, & \text{se } |x| \leq 1, \end{cases}$$

são exemplos de funções que satisfazem as condições (a_1) e (K).

1.1 Equação de Acoplamento

Conforme provaremos abaixo, para cada função $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, o problema

$$-\Delta \phi = K(x)u^2 \quad \text{em } \mathbb{R}^3, \tag{1.1}$$

possui uma única solução fraca denotada por $\phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. O objetivo desta seção é estudar as principais propriedades desta função.

Iniciamos com o seguinte resultado:

Lema 1.1 *Para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, o problema (1.1) possui uma única solução $\phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$.*

Demonstração: Para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ considere a aplicação $L_u : \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$L_u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} K(x)u^2\varphi dx.$$

Desde que, $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, então $u^2 \in L^3(\mathbb{R}^3)$. Sendo assim, como $\varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ e $K \in L^2(\mathbb{R}^3)$, pela desigualdade de generalizada Hölder

$$|L_u(\varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} K(x)u^2\varphi dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^3} |K(x)u^2\varphi| dx \leq |K|_2 |u^2|_3 |\varphi|_6.$$

1.1 Equação de Acoplamento

Ainda pela imersão $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, segue

$$|L_u(\varphi)| \leq \bar{S}^{-1} |K|_2 |u|_6^2 \|\varphi\|_{\mathcal{D}^{1,2}}, \quad (1.2)$$

de onde concluímos que a aplicação L_u está bem definida e é limitada, pois claramente esta aplicação é linear. Como $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla \varphi dx,$$

pelo Teorema da Representação de Riesz, para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ existe um único $\phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_u \nabla \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) u^2 \varphi dx, \quad (1.3)$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Dessa forma, ϕ_u é a única solução fraca do problema (1.1), e isto completa a prova deste lema. ■

Ainda pelo Teorema da Representação de Riesz, temos

$$\|\phi_u\|_{\mathcal{D}^{1,2}} = \|L_u\|.$$

Com isso, por (1.2) e pela imersão $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, segue

$$\|\phi_u\|_{\mathcal{D}^{1,2}} \leq \bar{S}^{-1} S^{-2} |K|_2 \|u\|^2, \quad (1.4)$$

de onde por (1.3) temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u(x) u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \bar{S}^{-1} S^{-2} |K|_2 \|u\|^2,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u(x) u^2 dx \leq \bar{S}^{-2} S^{-4} |K|_2^2 \|u\|^4. \quad (1.5)$$

Agora, considere a aplicação

$$\Phi : H^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$$

que para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ associa $\Phi(u) := \phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ que é a única solução fraca do problema (1.1).

O lema abaixo é o principal resultado desta seção e contém as principais propriedades da aplicação Φ .

Lema 1.2 *A aplicação Φ satisfaz as seguintes propriedades:*

- 1) Φ aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados;
- 2) Se $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então a menos de subsequência $\Phi(u_n) \rightharpoonup \Phi(u)$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$;
- 3) $\Phi(tu) = t^2 \Phi(u)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$;
- 4) Se $u \neq 0$ então $\Phi(u) > 0$ em $\mathbb{R}^3$.

1.1 Equação de Acoplamento

Demonstração: Inicialmente provaremos o item 1). Seja $A \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ um subconjunto limitado. Por (1.4), segue que

$$\|\phi_u\|_{\mathcal{D}^{1,2}} \leq \bar{S}^{-1} S^{-2} |K|_2 C^2,$$

para todo $u \in A$ e para alguma constante $C > 0$, o que prova este item.

Agora, provaremos o item 2). Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Mostraremos que a menos de subsequência

$$\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u \quad \text{em} \quad \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3). \quad (1.6)$$

Note que, para provarmos a convergência acima, é suficiente mostrar que

$$\langle \phi_{u_n}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \varphi u_n^2 dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \varphi u^2 dx = \langle \phi_u, \varphi \rangle, \quad (1.7)$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, pois dado $f \in \mathcal{D}^{-1,2^*}(\mathbb{R}^3)$, pelo Teorema da Representação de Riesz existe única $u = u(f) \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ tal que $f(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle$ para todo $\varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Assim, supondo (1.7) temos

$$f(\phi_{u_n}) \rightarrow f(\phi_u),$$

e isto prova (1.6). Agora, provaremos (1.7) e, com isso, concluimos a prova deste item. As igualdades de (1.7) seguem de (1.3). Desde que, $u_n \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, temos $u_n^2 \in L^3(\mathbb{R}^3)$, além disso, $K \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, de onde pela desigualdade generalizada de Hölder temos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \varphi (u_n^2 - u^2) dx \right| \leq |\varphi|_6 \left(\int_{\mathbb{R}^3} (K(x))^{\frac{6}{5}} |u_n^2 - u^2|^{\frac{6}{5}} dx \right)^{\frac{5}{6}}. \quad (1.8)$$

Assim, para provarmos (1.7), é suficiente verificarmos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} (K(x))^{\frac{6}{5}} |u_n^2 - u^2|^{\frac{6}{5}} dx = 0. \quad (1.9)$$

Desde que, $K \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $u_n^2 - u^2 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ e (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, dado $\rho > 0$, pela desigualdade de Hölder, segue

$$\int_{B_\rho(0)^c} (K(x))^{\frac{6}{5}} |u_n^2 - u^2|^{\frac{6}{5}} dx \leq |K|_{2, B_\rho(0)^c}^{\frac{6}{5}} \left(\int_{B_\rho(0)^c} |u_n^2 - u^2|^3 dx \right)^{\frac{4}{10}} \quad (1.10)$$

e

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_n^2 - u^2|^3 dx \right)^{\frac{4}{10}} \leq |u_n - u|_6^{\frac{6}{5}} |u_n + u|_6^{\frac{6}{5}} \leq C_1, \quad (1.11)$$

para alguma constante $C_1 > 0$.

Além disso, $\chi_{B_\rho(0)^c} |K|^2 \leq |K|^2$, para todo $\rho > 0$. Desde que, $K \in L^2(\mathbb{R}^3)$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e pela Proposição A.6 (veja Apêndice), segue

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{B_\rho(0)^c} (K(x))^2 dx = 0.$$

o que implica que dado $\epsilon > 0$, temos

$$|K|_{2, B_\rho(0)^c} < \epsilon,$$

1.1 Equação de Acoplamento

para $\rho > 0$ suficientemente grande. Com isso, por (1.10) e (1.11), obtemos

$$\int_{B_\rho(0)^c} (K(x))^{\frac{6}{5}} |u_n^2 - u^2|^{\frac{6}{5}} dx \leq C_1 \epsilon, \quad (1.12)$$

para $\rho > 0$ suficientemente grande. Agora, dado $M > 0$, defina o conjunto

$$\Omega_M = \left\{ x \in B_\rho(0); \quad K(x) \geq M \right\},$$

com $\rho > 0$ obtido acima. Assim

$$M^2 \mu(\Omega_M) \leq \int_{\Omega_M} (K(x))^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} (K(x))^2 dx,$$

para todo $M > 0$, onde $\mu(\Omega_M)$ é a medida de Lebesgue do conjunto Ω_M . Desde que, $K \in L^2(\mathbb{R}^3)$, então $\lim \mu(\Omega_M) = 0$, quando $M \rightarrow \infty$. Dessa forma, pela Proposição A.6 (veja Apêndice), dado $\epsilon > 0$, temos

$$\left(\int_{\Omega_M} (K(x))^2 dx \right)^{\frac{6}{10}} \leq \epsilon,$$

para M suficientemente grande. Assim, pela desigualdade de Hölder e por (1.11), segue

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(0)} (K(x))^{\frac{6}{5}} |u_n^2 - u^2|^{\frac{6}{5}} dx &= \int_{\Omega_M} (K(x))^{\frac{6}{5}} |u_n^2 - u^2|^{\frac{6}{5}} dx + \int_{B_\rho(0) \setminus \Omega_M} (K(x))^{\frac{6}{5}} |u_n^2 - u^2|^{\frac{6}{5}} dx \\ &\leq C_2 \epsilon + M^{\frac{6}{5}} \int_{B_\rho(0) \setminus \Omega_M} |u_n^2 - u^2|^{\frac{6}{5}} dx. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Por outro lado, $u_n - u, u_n + u \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3)$. Assim, $(u_n - u)^{\frac{6}{5}}, (u_n + u)^{\frac{6}{5}} \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Pela desigualdade de Hölder

$$\int_{B_\rho(0) \setminus \Omega_M} |u_n^2 - u^2|^{\frac{6}{5}} dx \leq |u_n + u|_{\frac{12}{5}, B_\rho(0)}^{\frac{6}{5}} |u_n - u|_{\frac{12}{5}, B_\rho(0)}^{\frac{6}{5}}.$$

Sendo assim, como $(u_n + u)$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{\frac{12}{5}}(\mathbb{R}^3)$ e $u_n \rightarrow u$ em $L^{\frac{12}{5}}(B_\rho(0))$, pois $H^1(B_\rho(0)) \hookrightarrow L^{\frac{12}{5}}(B_\rho(0))$, compactamente e $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_\rho(0) \setminus \Omega_M} |u_n^2 - u^2|^{\frac{6}{5}} dx = 0.$$

Dessa forma, por (1.12) e (1.13), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} (K(x))^{\frac{6}{5}} |u_n^2 - u^2|^{\frac{6}{5}} dx = 0,$$

de onde por (1.8) segue (1.7) e isto completa a prova deste item.

Agora, provaremos o item **3**). Pelo Lema 1.1, para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, o problema

$$-\Delta \phi = K(x) u^2 \quad \text{em } \mathbb{R}^3$$

1.1 Equação de Acoplamento

possui uma única solução fraca denotada por ϕ_u . Mais precisamente,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_u \nabla \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) u^2 \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Assim, para todo $t \in \mathbb{R}$, segue

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_{tu} \nabla \varphi dx &= \int_{\mathbb{R}^3} K(x) (tu)^2 \varphi dx \\ &= t^2 \int_{\mathbb{R}^3} K(x) u^2 \varphi dx \\ &= t^2 \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_u \nabla \varphi dx, \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, o que implica em

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla (\phi_{tu} - t^2 \phi_u) \nabla \varphi dx = 0,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Em particular, tomando $\varphi = \phi_{tu} - t^2 \phi_u$, temos

$$\|\varphi\|_{\mathcal{D}^{1,2}}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \varphi \nabla \varphi = 0.$$

Desde que, $\|\cdot\|_{\mathcal{D}^{1,2}}$ é uma norma, segue $\varphi = 0$, o que implica em

$$\phi_{tu} = t^2 \phi_u,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, como queríamos.

Agora, provaremos o item 4). Inicialmente, afirmamos que $\phi_u \geq 0$. Com efeito, desde que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_u \nabla \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) u^2 \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, tomando $\varphi = \phi_u^-$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla (\phi_u^+ - \phi_u^-) \nabla \phi_u^- dx = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) u^2 \phi_u^- dx,$$

o que implica em

$$-\|\phi_u^-\|_{\mathcal{D}^{1,2}}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) u^2 \phi_u^- dx \geq 0,$$

isto é, $\|\phi_u^-\|_{\mathcal{D}^{1,2}} = 0$ o que prova a afirmação, pois $\phi_u = \phi_u^+ \geq 0$. Agora, visando utilizar um resultado de regularidade mostraremos que

$$\phi_u \in C^2(\mathbb{R}^3). \quad (1.14)$$

Note que, $\phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ satisfaz o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u + K(x)\phi(x)u = a(x)|u|^{p-1}u & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \phi = K(x)u^2 & \text{em } \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (\text{S})$$

1.1 Equação de Acoplamento

no sentido fraco. Assim, para provarmos (1.14) iremos utilizar o problema

$$-\Delta u + u + K(x)\phi_u(x)u = a(x)|u|^{p-1}u \quad \text{em } \mathbb{R}^3. \quad (P_1)$$

Note que podemos escrever

$$-\Delta u = \psi,$$

onde $\psi(x) := a(x)|u|^{p-1}u - u - K(x)\phi_u(x)u$. Assim,

$$|\psi(x)| \leq f(x)(1 + |u|),$$

com $f(x) := |a(x)|u|^{p-1} - 1 - K(x)\phi_u(x)|$. Agora, afirmamos que $f \in L^{\frac{3}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Desde que, $K \in L^2(\mathbb{R}^3)$ então $K^{\frac{3}{2}} \in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)$. Como $\phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ temos $\phi_u^{\frac{3}{2}} \in L^4(\mathbb{R}^3)$, o que pela desigualdade de Hölder segue $K\phi_u \in L^{\frac{3}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Assim, como $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ e sendo $3 < s := \frac{3}{2}(p-1) < 6$ ($p \in (3, 5)$) e $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^3)$ segue a afirmação. Pelo Teorema de Brezis-Kato (veja Proposição A.22 do Apêndice), $u \in L^q(\mathbb{R}^3)$ para todo $q < +\infty$. Agora, note que, $\phi_u^3 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e $u^3 \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Pela desigualdade de Hölder segue que $\phi_u u \in L^3(\mathbb{R}^3)$. Sendo assim, como $u \in L^q(\mathbb{R}^3)$ para todo $q < +\infty$ e pela condição (K) $K \in C(\mathbb{R}^3)$ segue que $\psi \in L^{\frac{3}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Disto, temos pela Proposição A.20 que $u \in W^{2,3}_{loc}(\mathbb{R}^3)$, o que pela Proposição A.17 implica que $u \in C^{0,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^3)$ para algum $\gamma < 1$. Dessa forma, $K\phi_u \in C^{0,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^3)$, o que pela Proposição A.19 implica (1.14), como queríamos.

Agora, mostraremos que $\phi_u > 0$ em $\mathbb{R}^3$ e, com isso, finalizar a prova deste item. Suponhamos por contradição que $\phi_u(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Desde que por (1.14) $\phi_u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ e

$$-\Delta \phi_u = K(x)u^2 \geq 0 \quad \text{em } B_\rho(x_0),$$

pelo Princípio do Máximo Forte (veja Proposição A.21 do Apêndice), temos $\phi_u = 0$ para toda bola $B_\rho(x_0)$, o que implica em $Ku^2 = 0$ em $B_\rho(x_0)$. Como $B_\rho(x_0)$ é arbitrária segue $Ku^2 = 0$ em $\mathbb{R}^3$. Desde que, pela condição (K) $K > 0$ em $\mathbb{R}^3$, temos $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^3$, o que é uma contradição. Portanto $\phi_u > 0$ em $\mathbb{R}^3$ e isto completa a prova deste lema. ■

Observação 1.1 *Agora, para aplicações futuras, daremos uma representação integral para $\phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ solução fraca do problema*

$$-\Delta \phi = K(x)u^2 \quad \text{em } \mathbb{R}^3, \quad (1.15)$$

onde $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Definindo $f := Ku^2$, pelo Teorema de Calderon-Zygmund (veja Proposição A.20 do Apêndice) o potencial newtoniano

$$N_f(x) = \frac{1}{3\omega_3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(y)}{|x-y|} u^2(y) dy$$

onde ω_3 é o volume da bola unitária de $\mathbb{R}^3$, é solução fraca do problema (1.15). Assim,

$$\phi_u(x) = \frac{1}{3\omega_3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(y)}{|x-y|} u^2(y) dy \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^3,$$

como queríamos.

1.2 Variedade de Nehari

Nesta seção, iremos introduzir a variedade de Nehari $\mathcal{N}$ e provar suas principais propriedades.

Observação 1.2 *Pelo Lema 1.1 para cada função $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ o problema*

$$-\Delta\phi = K(x)u^2 \quad \text{em } \mathbb{R}^3,$$

possui uma única solução fraca $\phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Logo, resolver o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u + K(x)\phi_u(x)u = a(x)|u|^{p-1}u & \text{em } \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi = K(x)u^2 & \text{em } \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (\text{S})$$

é equivalente a encontrarmos soluções fracas para o problema

$$-\Delta u + u + K(x)\phi_u(x)u = a(x)|u|^{p-1}u \quad \text{em } \mathbb{R}^3. \quad (P_1)$$

Agora, iremos obter a formulação variacional para o problema (P_1) . Entende-se como solução clássica de (P_1) uma função u de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$ que satisfaz (P_1) pontualmente. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ e suponhamos que u é uma solução clássica de (P_1) . Multiplicando (P_1) por φ e usando integração por partes, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^3} u \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)u \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p-1}u \varphi dx. \quad (1.16)$$

Por argumento de densidade, temos que (1.16) é válida para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Motivado por (1.16), temos a seguinte definição:

Definição 1.1 *Dizemos que $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é solução fraca do problema (P_1) se satisfaz a equação integral (1.16) para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$.*

Seja $I : H^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)u^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p+1} dx. \quad (1.17)$$

Pelo Corolário A.4 (veja Apêndice), este funcional está bem definido e

$$I'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^3} u \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)u \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p-1}u \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Portanto, pontos críticos do funcional I são soluções fracas do problema (P_1) .

Agora, afirmamos que o funcional I não é limitado inferiormente. Com efeito, por 3) do Lema 1.2, temos $\phi_{tu} = t^2\phi_u$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Assim,

$$I(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 + \frac{t^4}{4} \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)u^2 dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p+1} dx, \quad (1.18)$$

e isto implica que $I(tu) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$, já que $p > 3$. Assim, a seguinte definição é conveniente:

Definição 1.2 (Variedade de Nehari) A variedade de Nehari associada ao funcional I definido em (1.17) é definida por

$$\mathcal{N} := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}; \quad I'(u)u = 0 \right\}.$$

Observação 1.3 A variedade de Nehari $\mathcal{N}$ é não vazia. Com efeito, por 1) do Lema 1.3 que provaremos a seguir para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ existe único $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}$.

Essa definição é conveniente pois por 2) do Lema 1.3, que será provado a seguir, tem-se que $I|_{\mathcal{N}}$ é limitado inferiormente por uma constante positiva. Esta limitação será fundamental para os resultados que pretendemos obter.

Em seguida, mostraremos que o funcional $I|_{\mathcal{N}}$ assume formas simples. Se $u \in \mathcal{N}$ temos

$$\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u(x) u^2 dx = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u|^{p+1} dx - \frac{1}{4} \|u\|^2$$

e

$$-\frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u|^{p+1} dx = -\frac{1}{p+1} \|u\|^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u(x) u^2 dx.$$

Substituindo estas duas igualdades em (1.17), obtemos

$$\begin{aligned} I|_{\mathcal{N}}(u) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|u\|^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u(x) u^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \|u\|^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u|^{p+1} dx. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Como consequência, I é limitado inferiormente, pois $p \in (3, 5)$ e a, K são funções não-negativas.

Definição 1.3 O número

$$m = \inf \left\{ I(u); \quad u \in \mathcal{N} \right\}$$

é denominado de nível de energia mínima associado ao funcional I definido em (1.17).

Por (1.19) o número m está bem definido. O próximo lema contém as principais propriedades da variedade de Nehari $\mathcal{N}$. Antes de enunciá-lo, daremos as seguintes definições:

Definição 1.4 Sejam X um espaço de Banach, $\psi \in C^2(X, \mathbb{R})$ e $V = \{v \in X; \psi(v) = 1\}$ tal que, para todo $v \in V$, tem-se $\psi'(v) \neq 0$. Então, temos

i) O espaço tangente a V no ponto v é definido por

$$T_v V = \left\{ y \in X; \quad \langle \psi'(v), y \rangle = 0 \right\}.$$

ii) Sejam $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $v \in V$. A norma da derivada da restrição de φ a V em v é dada por

$$\|\varphi'(v)\|_* = \sup_{\substack{y \in T_v V \\ \|y\|=1}} \langle \varphi'(v), y \rangle.$$

iii) O ponto v é um ponto crítico de φ restrito a V se

$$\|\varphi'(v)\|_* = 0.$$

Assim, sabemos definir um ponto crítico do funcional $I|_{\mathcal{N}}$.

Lema 1.3 *Sobre a variedade de Nehari $\mathcal{N}$ podemos afirmar que*

- 1) Para toda $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ existe um único $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}$;
- 2) $\mathcal{N}$ é homeomorfa a esfera unitária de $H^1(\mathbb{R}^3)$;
- 3) O nível m dado na Definição 1.3 é estritamente positivo;
- 4) u é um ponto crítico do funcional I se, e somente se, u é um ponto crítico do funcional $I|_{\mathcal{N}}$.
- 5) Seja $u \in \mathcal{N}$ tal que $I(u) = m$, então u é solução fraca do problema (P_1) .

Demonstração: Inicialmente provaremos o item 1). Para isto, considerando (1.18), para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ definiremos a função $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(t) = I(tu) = \frac{t^2}{2} \|u\|^2 + \frac{t^4}{4} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u(x) u^2 dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u|^{p+1} dx.$$

Note que, esta função admite um ponto de máximo, pois

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = -\infty,$$

já que $p > 3$, mais precisamente, existe $t_u \in (0, +\infty)$ tal que

$$\max_{t>0} I(tu) = I(t_u u). \tag{1.20}$$

Agora, afirmamos que $t_u u \in \mathcal{N}$. Com efeito, desde que t_u é um ponto de máximo da função g , temos $g'(t_u) = 0$, de onde concluímos que

$$g'(t_u) t_u = \|t_u u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{t_u u}(x) (t_u u)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |t_u u|^{p+1} dx = 0,$$

disto segue por 3) do Lema 1.2 que

$$t_u^2 \|u\|^2 + t_u^4 \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u(x) u^2 dx - t_u^{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u|^{p+1} dx = 0$$

o que implica em $t_u u \in \mathcal{N}$. Agora, provaremos que t_u é único. Com efeito, suponhamos por contradição que existam $t_2 > t_1 > 0$ tais que $t_1 u, t_2 u \in \mathcal{N}$. Agora, considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = a + bt^2 - ct^{p-1},$$

onde

$$a = \|u\|^2, \quad b = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u(x) u^2 dx \quad \text{e} \quad c = \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u|^{p+1} dx.$$

Note que, pela condição (a_1) sendo $u \neq 0$, temos $c > 0$. Assim, $f(t_1) = f(t_2) = 0$, o que pelo Teorema de Rolle, existe $t_3 \in (t_1, t_2)$ tal que $f'(t_3) = 0$. Dessa forma,

$$t_3^{p-3} = \frac{2b}{c(p-1)} < \frac{b}{c},$$

pois $p > 3$. Por outro lado, $bt_1^2 < a + bt_1^2 = ct_1^{p-1}$, o que implica em

$$\frac{b}{c} < t_1^{p-3}.$$

Assim, $t_3 < t_1$ o que é uma contradição. Portanto, t_u é único e isto completa a prova deste item.

Agora provaremos o item **2)**, para isto considere as funções $\varphi : S^1 \rightarrow \mathcal{N}$ e $\psi : \mathcal{N} \rightarrow S^1$ definidas por

$$\varphi(u) = t_u u \quad \text{e} \quad \psi(u) = \frac{u}{\|u\|},$$

onde $t_u > 0$ é o único número tal que $t_u u \in \mathcal{N}$ e S^1 é a esfera unitária de $H^1(\mathbb{R}^3)$. Inicialmente, note que

$$(\psi \circ \varphi)(u) = \psi(t_u u) = \frac{t_u u}{\|t_u u\|} = \frac{t_u u}{t_u \|u\|} = \frac{t_u u}{t_u} = u$$

e denotando $v = \frac{u}{\|u\|}$, temos

$$(\varphi \circ \psi)(u) = \varphi(v) = t_v v = \frac{t_v}{\|u\|} u.$$

Sendo assim, desde que $u \in \mathcal{N}$, temos $t_v = \|u\|$, o que implica em

$$(\varphi \circ \psi)(u) = u.$$

Dessa forma, a função φ é bijetora. Com isso, para provarmos que a variedade de Nehari $\mathcal{N}$ é homeomorfa a S^1 , falta-nos provar apenas que as funções φ e ψ são contínuas. Provaremos inicialmente a continuidade da função φ . Para isto, seja $(u_n) \subset S^1$ e $u \in S^1$ tais que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3). \quad (1.21)$$

Note que, por 1) para cada $n \in \mathbb{N}$ existe único $t_n > 0$ tal que $t_n u_n \in \mathcal{N}$ e único $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}$. Nosso objetivo é mostrar que

$$t_n u_n \rightarrow t_u u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3). \quad (1.22)$$

Com efeito, desde que $t_n u_n \in \mathcal{N}$, temos

$$t_n^2 \|u_n\|^2 + t_n^4 \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{u_n} u_n^2 - t_n^{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u_n|^{p+1} = 0.$$

Sendo assim, por (1.21), por i) do Lema 2.10 e pela imersão $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^3)$ segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n^2 \|u\|^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} t_n^4 \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u u^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} t_n^{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u|^{p+1} = 0.$$

Note que, pela unicidade do número $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}$, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_u$ pois $t_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma,

$$\|t_n u_n - t_u u\| \leq \|t_n u_n - t_u u_n\| + \|t_u u_n - t_u u\| \leq |t_n - t_u| \|u_n\| + |t_u| \|u_n - u\|,$$

o que prova (1.22), de onde concluímos a continuidade da função φ . Além disso, a continuidade da função ψ é imediata. Portanto, a variedade de Nehari $\mathcal{N}$ é homeomorfa a esfera unitária S^1 de $H^1(\mathbb{R}^3)$, e isto completa a prova do item 2).

Agora provaremos o item 3). Inicialmente, mostraremos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\| \geq C, \quad (1.23)$$

para todo $u \in \mathcal{N}$. Com efeito, como $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, segue

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u|^{p+1} dx \leq \|a\|_\infty \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx.$$

Desde que, $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u|^{p+1} dx \leq C_1 \|u\|^{p+1},$$

para alguma constante $C_1 > 0$. Assim, se $u \in \mathcal{N}$, então

$$0 = \|u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u(x) u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u|^{p+1} dx \geq \|u\|^2 - C_1 \|u\|^{p+1},$$

o que implica que

$$\|u\| \geq \frac{1}{C_1^{\frac{1}{p-1}}} = C > 0,$$

para todo $u \in \mathcal{N}$, o que prova (1.23). Agora, note que, por (1.19)

$$I(u) = \frac{1}{4} \|u\|^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u|^{p+1} dx.$$

para todo $u \in \mathcal{N}$. Como $p > 3$ e a função a é não negativa, por (1.23) temos

$$I(u) \geq \frac{1}{4} \|u\|^2 \geq C_2 > 0, \quad (1.24)$$

para todo $u \in \mathcal{N}$ e para alguma constante $C_2 > 0$. Assim,

$$m \geq C_2 > 0$$

e isto completa a prova deste item.

Agora, provaremos o item 4). Inicialmente, definindo o funcional $G : H^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$G(u) = I'(u)u = \|u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u(x) u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u|^{p+1} dx,$$

provaremos que para alguma constante $c > 0$

$$G'(u)u < c < 0, \quad (1.25)$$

para todo $u \in \mathcal{N}$. De fato, pelo Corolário A.5 (veja Apêndice)

$$G'(u)\varphi = 2\langle u, \varphi \rangle + 4 \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)u\varphi dx - (p+1) \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p-1}u\varphi dx,$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Em particular,

$$G'(u)u = 2\|u\|^2 + 4 \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)u^2 dx - (p+1) \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p+1} dx.$$

Desde que $u \in \mathcal{N}$, temos

$$\|u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)u^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p+1} dx,$$

o que implica em

$$G'(u)u = (1-p)\|u\|^2 + (3-p) \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)u^2 dx.$$

Como as funções K e ϕ_u são não negativas e $p \in (3, 5)$ temos

$$G'(u)u \leq (1-p)\|u\|^2,$$

de onde por (1.23) concluímos (1.25), como queríamos. Agora, se u é ponto crítico do funcional I , então

$$I'(u)\varphi = 0,$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Em particular

$$\|I'(u)\|_* = \sup_{\substack{\varphi \in \ker G'(u) \\ \|\varphi\|=1}} I'(u)\varphi = 0,$$

o que por iii) da Definição 1.4 implica que u é ponto crítico de $I|_{\mathcal{N}}$. Reciprocamente, se u é ponto crítico de $I|_{\mathcal{N}}$, pelo Corolário A.2 (veja Apêndice) existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$I'(u) = \lambda G'(u).$$

Em particular,

$$I'(u)u = \lambda G'(u)u.$$

Desde que, $u \in \mathcal{N}$ temos $I'(u)u = 0$. Além disso, por (1.25), $G'(u)u < 0$. Isto implica que $\lambda = 0$, de onde concluímos que $I'(u) = 0$, isto é,

$$I'(u)\varphi = 0,$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Portanto, u é um ponto crítico do funcional I .

Agora provaremos o item **5**). Inicialmente, suponha que,

$$I(u) = m = \inf \left\{ I(v); \quad v \in \mathcal{N} \right\},$$

onde $\mathcal{N} = \{v \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}; \quad I'(v)v = G(v) = 0\}$. Sendo assim, desde que, por (1.25), $G'(u) \neq 0$, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (veja Proposição A.23 do Apêndice)

$$I'(u) = \lambda G'(u),$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo

$$I'(u)u = \lambda G'(u)u.$$

Como $u \in \mathcal{N}$ temos $I'(u)u = 0$. Além disso, por (1.25) $G'(u)u < 0$. Assim, $\lambda = 0$, o que implica em $I'(u) = 0$ e isto finaliza a prova deste lema. ■

Observação 1.4 *O item 5) do lema anterior será fundamental para obtermos, no Capítulo 2, uma solução fraca particular do problema (P_1) , que é a solução fraca do tipo ground state.*

Definição 1.5 *Conforme provado no item 1) do lema anterior, para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ existe único $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}$. A função $t_u u$ é denominada projeção de u sobre a variedade de Nehari $\mathcal{N}$.*

Capítulo 2

Existência de Solução do tipo Ground State

Neste capítulo, encontraremos uma solução do tipo *ground state* para o problema

$$-\Delta u + u + K(x)\phi_u(x)u = a(x)|u|^{p-1}u \quad \text{em } \mathbb{R}^3, \quad (P_1)$$

onde $p \in (3, 5)$ e as funções a e K satisfazem:

$$(a_1) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = 1, \quad a \in L^\infty(\mathbb{R}^3);$$

$$(a_2) \quad a(x) \geq 1 \text{ em } \mathbb{R}^3, \quad a \not\equiv 1;$$

$$(K) \quad K \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap C(\mathbb{R}^3) \text{ e } K > 0 \text{ em } \mathbb{R}^3.$$

As funções $a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$a(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| > 0 \\ 2, & \text{se } |x| = 0 \end{cases}$$

e

$$K(x) = \begin{cases} 1/|x|, & \text{se } |x| > 1 \\ 1, & \text{se } |x| \leq 1, \end{cases}$$

são exemplos de funções que satisfazem as condições (a_1) , (a_2) e (K) .

Definição 2.1 (Solução do tipo Ground State) *Entendemos como solução do tipo ground state para o problema (P_1) uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ que é solução fraca do problema (P_1) e $I(u) = m$, onde m é o nível de energia mínima dado na Definição 1.3.*

O principal resultado deste capítulo é:

Teorema 2.1 *Sob as condições (a_1) , (a_2) e (K) , assumindo que*

$$|K|_2^2 < \frac{m_\infty^\vartheta - m_a^\vartheta}{\sigma m_a^{1+\vartheta}}, \quad (2.1)$$

com $\vartheta = \frac{p-3}{p+1}$ e $\sigma = 2\frac{p+1}{p-1}\bar{S}^{-2}S^{-4}$, onde S e $\bar{S}$ são, respectivamente, as melhores constantes das imersões $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ e $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, então o problema (P_1) possui uma solução do tipo ground state não negativa.

Observação 2.1 *Os níveis de energia mínima m_a e m_∞ serão definidos a seguir.*

2.1 Problemas Auxiliares

Nesta seção, estudaremos os problemas

$$-\Delta w + w = |w|^{p-1}w \quad \text{em } \mathbb{R}^3 \quad (P_\infty)$$

e

$$-\Delta w + w = a(x)|w|^{p-1}w \quad \text{em } \mathbb{R}^3, \quad (P_a)$$

onde a função a satisfaz a condição (a_2) . Tal estudo será fundamental para a obtenção de resultados de compacidade.

2.1.1 O Problema (P_∞)

Nesta subseção estudaremos o problema (P_∞) . A este problema, associaremos o funcional energia $\mathcal{I}_\infty : H^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{I}_\infty(w) = \frac{1}{2}\|w\|^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} |w|^{p+1} dx \quad (2.2)$$

e a variedade de Nehari definida por

$$\mathcal{N}_\infty := \left\{ w \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}; \quad \mathcal{I}'_\infty(w)w = 0 \right\}.$$

Definição 2.2 *O número*

$$m_\infty = \inf \left\{ \mathcal{I}_\infty(w); \quad w \in \mathcal{N}_\infty \right\}$$

é o nível de energia mínima associado ao funcional $\mathcal{I}_\infty$ dado acima.

Observação 2.2 *Se $w \in \mathcal{N}_\infty$, então pela imersão $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^3)$ temos*

$$\|w\|^{p+1} C_1 \geq \|w\|^2 = |w|_{p+1}^{p+1},$$

para alguma constante C_1 . Assim, $\|w\|^2 \geq C_2$ para alguma constante $C_2 > 0$, o que implica em

$$\mathcal{I}_\infty(w) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|w\|^2 \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) C_2 > 0,$$

pois $p > 3$. Disto segue que $m_\infty > 0$.

De forma análoga feita para o problema (P_1) definimos uma solução do tipo *ground state* para o problema (P_∞) . A próxima proposição é o principal resultado desta subseção.

Proposição 2.1 *O problema (P_∞) possui uma solução do tipo ground state estritamente positiva $w \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Além disso;*

1 *w é radialmente simétrica e única a menos de translação;*

2 *Existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que*

$$|w(x)| \leq C_1 e^{-C_2|x|},$$

para $|x|$ suficientemente grande.

2.1 Problemas Auxiliares

Antes de provarmos esta proposição, faremos algumas observações. Entendemos por uma solução fraca do problema (P_∞) , uma função $w \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla w \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^3} w \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^3} |w|^{p-1} w \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Sejam $F : H^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ e $T : H^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ funcionais definidos por

$$F(w) = \frac{1}{2} \|w\|^2 \quad \text{e} \quad T(w) = \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} |w|^{p+1} dx.$$

Pelos Lemas A.6 e A.8 (veja Apêndice) temos que os funcionais F e T são de classe $C^1(H^1, \mathbb{R})$ e para toda $w, \varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$

$$F'(w)\varphi = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla w \nabla \varphi + w \varphi) dx \quad \text{e} \quad T'(w)\varphi = \int_{\mathbb{R}^3} |w|^{p-1} w \varphi dx.$$

Agora, defina

$$M = \{w \in H^1(\mathbb{R}^3); \quad T(w) = 1\}.$$

Note que, $M \neq \emptyset$, pois podemos tomar $\varphi \in C_0^\infty \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $|\varphi|_{p+1}^{p+1} = p+1$. A prova da proposição acima será feita em várias etapas com o auxílio dos lemas a seguir.

Lema 2.1 $\mathcal{S} = \inf_{w \in M} F(w) > 0$.

Demonstração: Desde que $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^3)$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|w|_{p+1}^2 \leq C \|w\|^2,$$

para todo $w \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Dado $w \in M$, então $|w|_{p+1}^{p+1} = p+1$. Assim,

$$0 < c = \frac{1}{2C} (p+1)^{\frac{2}{p+1}} \leq \frac{1}{2} \|w\|^2,$$

o que implica que

$$\mathcal{S} \geq c > 0,$$

como queríamos. ■

Lema 2.2 *O ínfimo $\mathcal{S} = \inf_{w \in M} F(w)$ é atingido por uma função $v \in H^1(\mathbb{R}^3)$ não negativa em $\mathbb{R}^3$.*

Demonstração: Note que existe uma sequência $(w_n) \subset M$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \|w_n\|^2 = \mathcal{S}.$$

Assim, $(w_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ é limitada, o que implica em

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{B_r(y)} |w_n|^s dx \right) \rightarrow 0,$$

2.1 Problemas Auxiliares

para todo $2 \leq s < 6$ e todo $r > 0$, pois do contrário se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{B_r(y)} |w_n|^s dx \right) \rightarrow 0,$$

pelo Lema de Lions (Proposição A.1, veja Apêndice) teríamos

$$w_n \rightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^{p+1}(\mathbb{R}^3),$$

o que seria contradição, já que $|w_n|_{p+1}^{p+1} = p+1$, pois $T(w_n) = 1$.

Sendo assim, consideremos $s = p+1$ e $r > 0$. Logo, existe $\rho > 0$ tal que, a menos de subsequência,

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{B_r(y)} |w_n|^{p+1} dx \geq \rho.$$

Fixe $n \in \mathbb{N}$. Usando a definição de supremo, existe $y_n \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\int_{B_r(y_n)} |w_n|^{p+1} dx \geq \frac{\rho}{2}. \quad (2.3)$$

Agora, definindo $v_n(x) := w_n(x + y_n)$, por mudança de variável, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} |v_n|^{p+1} dx = \int_{\mathbb{R}^3} |w_n|^{p+1} dx = p+1 \quad (2.4)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \|v_n\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \|w_n\|^2 = \mathcal{S}. \quad (2.5)$$

Desde que (v_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$, a menos de subsequência,

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3),$$

o que pelo Corolário A.1 (veja Apêndice) implica em

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|v_n|_{p+1}^{p+1} - |v_n - v|_{p+1}^{p+1}) = |v|_{p+1}^{p+1}.$$

Sendo assim, como $|v_n|_{p+1}^{p+1} = p+1$, segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |v_n - v|_{p+1}^{p+1} = (p+1) - |v|_{p+1}^{p+1}. \quad (2.6)$$

Dado $u \neq 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, seja

$$\varphi := (p+1)^{\frac{1}{p+1}} \frac{u}{|u|_{p+1}}.$$

Então $|\varphi|_{p+1}^{p+1} = p+1$ o que implica em $\varphi \in M$. Assim,

$$\frac{1}{2} \|\varphi\|^2 = (p+1)^{\frac{1}{p+1}} \frac{u}{|u|_{p+1}} \|^2 \geq \mathcal{S},$$

onde obtemos

$$\|u\|^2 \geq \frac{2}{(p+1)^{\frac{2}{p+1}}} \mathcal{S} |u|_{p+1}^2, \quad (2.7)$$

2.1 Problemas Auxiliares

para cada $u \neq 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Agora, defina

$$\mathcal{C} = \frac{2}{(p+1)^{\frac{2}{p+1}}} \mathcal{S}.$$

Desde que $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|v_n - v\|^2 + \|v\|^2).$$

Com isso, por (2.5), segue que

$$2\mathcal{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|v_n - v\|^2 + \|v\|^2).$$

Consequentemente, por (2.7),

$$\begin{aligned} 2\mathcal{S} &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}|v_n - v|_{p+1}^2 + \mathcal{C}|v|_{p+1}^2 \\ &= \mathcal{C} \lim_{n \rightarrow \infty} (|v_n - v|_{p+1}^{p+1} - (p+1) + (p+1))^{\frac{2}{p+1}} + \mathcal{C}(p+1)^{\frac{2}{p+1}} \left(\frac{|v|_{p+1}^{p+1}}{p+1} \right)^{\frac{2}{p+1}}, \end{aligned}$$

o que por (2.6) implica

$$2\mathcal{S} \geq \mathcal{C}(p+1)^{\frac{2}{p+1}} \left(1 - \frac{|v|_{p+1}^{p+1}}{p+1} \right)^{\frac{2}{p+1}} + \mathcal{C}(p+1)^{\frac{2}{p+1}} \left(\frac{|v|_{p+1}^{p+1}}{p+1} \right)^{\frac{2}{p+1}}. \quad (2.8)$$

Agora, definindo

$$b = \frac{|v|_{p+1}^{p+1}}{p+1},$$

afirmamos que

$$b > 0. \quad (2.9)$$

Com efeito, fazendo mudança de variável em (2.3) obtemos

$$\int_{B_r(0)} |v_n|^{p+1} dx \geq \frac{\rho}{2}.$$

Desde que $H^1(B_r(0)) \hookrightarrow L^{p+1}(B_r(0))$ compactamente e $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\int_{B_r(0)} |v|^{p+1} dx \geq \frac{\rho}{2} > 0,$$

e isto prova a afirmação. Como (v_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^3)$, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^3)$. Assim

$$|v|_{p+1} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |v_n|_{p+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} |v_n|_{p+1},$$

de onde por (2.4), segue que

$$|v|_{p+1}^{p+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |v_n|_{p+1}^{p+1} = p+1,$$

2.1 Problemas Auxiliares

o que implica em $b \leq 1$. Agora mostraremos que $b = 1$. Com efeito, se $b < 1$, defina $c = 1 - b$. Como por (2.9) $0 < b$, então

$$c, b \in (0, 1).$$

Desde que, $(c + d)^t < c^t + d^t$ para todo $c, d, t \in (0, 1)$, por (2.8) temos

$$2\mathcal{S} \geq \mathcal{C}(p+1)^{\frac{2}{p+1}}(b^{\frac{2}{p+1}} + (1-b)^{\frac{2}{p+1}}) > \mathcal{C}(p+1)^{\frac{2}{p+1}} = 2\mathcal{S},$$

o que é uma contradição. Assim, $b = 1$, isto é,

$$|v|_{p+1}^{p+1} = p+1. \quad (2.10)$$

Como $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então $\|v\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|$. Logo,

$$\frac{1}{2}\|v\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}\|v_n\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}\|v_n\|^2 = \mathcal{S},$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\|v\|^2 \leq \mathcal{S}.$$

Por outro lado, desde que, $|v|_{p+1}^{p+1} = p+1$, então $v \in M$. Sendo $\inf_{u \in M} F(u) = \mathcal{S}$, por definição de ínfimo

$$\frac{1}{2}\|v\|^2 \geq \mathcal{S},$$

o que implica em

$$\frac{1}{2}\|v\|^2 = \mathcal{S}.$$

Note que, se $w \in M$ então $|w| \in M$. Assim, podemos supor que v é não negativa, e isto completa a prova deste lema. ■

Lema 2.3 *Seja $w \in H^1(\mathbb{R}^3)$ uma solução fraca do problema (P_∞) . Então, $w \in C^2(\mathbb{R}^3)$.*

Demonstração: Veja que

$$-\Delta w = \psi(x),$$

onde $\psi(x) := |w|^{p-1}w - w$. Assim,

$$|\psi(x)| \leq a(x)(1 + |w|),$$

com $a(x) := ||w|^{p-1} - 1|$. Note que $a \in L^{\frac{3}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^3)$, pois $3 < s := (p-1)\frac{3}{2} < 6$ ($p \in (3, 5)$) e $w \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^3)$. Pelo Teorema de Brezis-Kato (veja Proposição A.22 do Apêndice) temos $w \in L^q(\mathbb{R}^3)$ para todo $q < +\infty$, o que implica em $\psi \in L^q(\mathbb{R}^3)$ para todo $q < +\infty$. Assim, pelo Teorema de Calderon-Zygmund (veja Proposição A.20 do Apêndice) $w \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Agora, tomando $q = 3$, pela Proposição A.17 (veja Apêndice) temos $w \in C^{0,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^3)$ com $\gamma < 1$, o que implica em $\psi \in C^{0,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Disto seque pela Proposição A.19 (veja Apêndice) que $w \in C^2(\mathbb{R}^3)$, como queríamos. ■

Lema 2.4 *O problema (P_∞) possui solução fraca estritamente positiva.*

Demonstração: Note que, pelo Lema 2.2, existe uma função $v \in H^1(\mathbb{R}^3)$ não negativa tal que

$$F(v) = \inf_{u \in M} F(u)$$

e por (2.10)

$$T'(v)v = \int_{\mathbb{R}^3} |v|^{p+1} dx = p + 1 \neq 0.$$

Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (Proposição A.23 veja Apêndice), existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$F'(v)\varphi = \lambda T'(v)\varphi,$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla v \nabla \varphi + v \varphi) dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^3} v^p \varphi dx \quad (2.11)$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Note que $\lambda > 0$. Com efeito, fazendo $\varphi = v$, obtemos

$$\|v\|^2 = \lambda |v|_{p+1}^{p+1}.$$

Desde que, pelo Lema 2.1, $\mathcal{S} > 0$, temos $\|v\|^2 = 2\mathcal{S} > 0$, o que implica que $\lambda > 0$, pois $|v|_{p+1}^{p+1} = p + 1$. Defina

$$w = \lambda^\sigma v,$$

onde o número σ será escolhido abaixo. Pelo Lema 2.2, v é não negativa. Assim, desde que $\lambda > 0$, w é não negativa. Agora, substituindo a função w em (2.11), obtemos

$$\frac{1}{\lambda^\sigma} \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla w \nabla \varphi + w \varphi) dx = \frac{\lambda}{\lambda^{\sigma p}} \int_{\mathbb{R}^3} w^p \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla w \nabla \varphi + w \varphi) dx = \lambda^{1+\sigma-\sigma p} \int_{\mathbb{R}^3} w^p \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Sendo assim, como $1 + \sigma - \sigma p = 0$, se e somente se, $\sigma = \frac{1}{p-1}$. Tomando $\sigma = \frac{1}{p-1}$ na equação acima, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla w \nabla \varphi + w \varphi) dx = \int_{\mathbb{R}^3} w^p \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Portanto, w é solução fraca não negativa do problema (P_∞) . Pelo Lema 2.3, $w \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Agora, mostraremos que w é positiva e, com isso, concluímos a prova deste lema. Suponhamos, por contradição, que existe $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tal que $w(x_0) = 0$. Seja $B_r(x_0)$ uma bola arbitrária. Então, $w \in C^2(B_r(x_0)) \cap C(\overline{B_r(x_0)})$. Desde que

$$-\Delta w + w = w^q \geq 0 \quad \text{em } B_r(x_0),$$

pois $w \geq 0$, pelo Princípio do Máximo Forte (Proposição A.21 veja Apêndice), temos $w = 0$ em $B_r(x_0)$. Sendo $B_r(x_0)$ arbitrária, segue que $w \equiv 0$ em $\mathbb{R}^3$. Uma vez que, $w = \lambda^\sigma v$, com $\lambda > 0$, então $v = 0$. Sendo

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \|v\|^2,$$

temos $\mathcal{S} = 0$, contradição, pois pelo Lema 2.1, $\mathcal{S} > 0$. Portanto, w que é solução fraca do problema (P_∞) é positiva. ■

Lema 2.5 Se $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^3)$, então

$$\|u\|^2 = \omega_3 \int_0^\infty (|u(r)|^2 + |u'(r)|^2) r^2 dr,$$

onde ω_3 é o volume da esfera unitária em $\mathbb{R}^3$.

Demonstração: Desde que $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^3)$, então $u(x) = u(r)$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ com $|x| = r$. Agora, note que,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{x_i}{|x|},$$

$i = 1, 2, 3$, o que implica em

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \left(\frac{x_i}{|x|} \right)^2.$$

Dessa forma,

$$|\nabla u(x)|^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{x_i}{|x|} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 = |u'(r)|^2.$$

Sendo assim, como

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx,$$

por mudança de variáveis segue o resultado desejado. ■

Lema 2.6 (Lema Radial) Se $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^3)$ então

$$|u(x)| \leq \omega_3^{-\frac{1}{2}} |x|^{-1} \|u\|.$$

Em particular, $u(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$.

Demonstração: Desde que o espaço das funções $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, é denso em $H_{rad}^1(\mathbb{R}^3)$ é suficiente verificarmos este lema para as funções contínuas de suporte compacto. Dado $\varphi \in C_0^\infty([0, +\infty[)$ temos

$$\begin{aligned} \varphi(r)^2 &= -2 \int_r^\infty \varphi'(s) \varphi(s) ds \\ &= -2 \int_r^\infty \varphi'(s) \varphi(s) s^{-2} s^2 ds \\ &\leq -r^{-2} \int_r^\infty 2\varphi'(s) \varphi(s) s^2 ds \\ &= r^{-2} \int_r^\infty (|\varphi'(s)|^2 + |\varphi(s)|^2) s^2 ds. \end{aligned}$$

Se $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^3) \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ temos $u(r) = u(x)$ onde $|x| = r$. Sendo assim, pela desigualdade acima e pelo Lema 2.5 temos o resultado desejado. ■

Pelo resultado anterior, temos que toda função $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^3)$ possui decaimento polinomial. No próximo resultado, com o acréscimo de algumas hipóteses mostraremos que u possui decaimento exponencial.

Corolário 2.1 *Seja $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^3) \cap C^2(\mathbb{R}^3)$ tal que*

$$\Delta u = g(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^3,$$

onde $\frac{g(u)}{u} \rightarrow -m$ quando $u \rightarrow 0$ para algum $m > 0$. Então, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$|u(x)| \leq C_1 e^{-C_2|x|},$$

para $|x|$ suficientemente grande.

Demonstração: Note que se $u \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^3)$, então $u(x) = u(|x|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Inicialmente, mostraremos que

$$-u''(r) - \frac{2}{r}u'(r) = g(u),$$

para todo $r = |x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}} \neq 0$. Veja que

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}} 2x_i = \frac{x_i}{r}$$

e que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u'(r) \frac{x_i}{r}$$

$i = 1, 2, 3$ para todo $r \neq 0$. Assim,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + u'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right),$$

$i = 1, 2, 3$ de onde segue que

$$-\Delta u = -g(u) = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) = u''(r) + \frac{2}{r}u'(r),$$

para todo $r \neq 0$, como queríamos. Dessa forma, definindo $v(r) := ru(r)$ temos

$$v''(r) = -\frac{g(u)}{u}v.$$

Desde que, pelo Lema Radial (Lema 2.6) $u(r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$ sendo

$$-\frac{g(u)}{u} \rightarrow m,$$

quando $u \rightarrow 0$, temos

$$-\frac{g(u(r))}{u(r)} \geq \frac{m}{2},$$

para todo $r \geq r_0$ para algum $r_0 > 0$. Se $w := v^2$, então

$$\frac{1}{2}w'' = v' + \left(-\frac{g(u)}{u} \right)w,$$

o que implica em $w'' \geq mw$ para todo $r \geq r_0$. Defina

$$z(r) := e^{-\sqrt{m}r}(w'(r) + \sqrt{m}w(r)).$$

Assim, $z'(r) = e^{-\sqrt{m}r}(w''(r) - mw(r)) \geq 0$, o que implica que z é não-decrescente em $(r_0, +\infty)$. Agora, suponhamos por contradição que exista $r_1 > r_0$ tal que $z(r_1) > 0$. Assim, $z(r) \geq z(r_1) > 0$ para todo $r \geq r_1$. Disto segue que

$$w'(r) + \sqrt{m}w(r) \geq (z(r_1))e^{\sqrt{m}r}.$$

Desde que, $(z(r_1))e^{\sqrt{m}r}$ é não integrável em $(r_1, +\infty)$, então $w' + \sqrt{m}w$ é não integrável em $(r_1, +\infty)$. No entanto, como $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ por mudança de variáveis sendo $w(r) = r^2u(r)^2$, temos que $w' + \sqrt{m}w$ é integrável, o que é uma contradição. Então, $z(r) \leq 0$ para todo $r \geq r_1$. Dessa forma,

$$(e^{\sqrt{m}r}w)' = e^{2\sqrt{m}r}z \leq 0,$$

para todo $r \geq r_1$. Disto, segue que

$$e^{\sqrt{m}r}w(r) - e^{\sqrt{m}r_1}w(r_1) \leq 0,$$

para todo $r \geq r_1$. Assim, desde que $w(r) = r^2u(r)^2$ temos

$$|u(r)| \leq C_1 e^{-\frac{\sqrt{m}}{2}r}$$

para todo $r \geq r_1$, para alguma constante $C_1 > 0$ e isto completa a demonstração. ■

Prova da Proposição 2.1: Pelo Lema 2.4 o problema (P_∞) possui solução fraca w estritamente positiva. Pelo Teorema C.4 (veja [21]) w é radialmente simétrica e única a menos de translação. Sendo assim, desde que $|w|^{p-1} - 1 \rightarrow -1$ quando $w \rightarrow 0$ pelo Lema 2.3 e Corolário 2.1 temos que w possui decaimento exponencial. A existência da solução do tipo ground state do problema (P_∞) é devida ao Teorema 4.2 (veja [21]).

Lema 2.7 *Se w é uma solução fraca, que muda de sinal, do problema (P_∞) então*

$$2m_\infty \leq \mathcal{I}_\infty(w).$$

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned} m_\infty &= \inf \left\{ \mathcal{I}_\infty(w); \quad w \in \mathcal{N}_\infty \right\} \\ &= \inf \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|w\|^2; \quad w \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\} \right\}. \end{aligned}$$

Sendo assim, desde que w muda de sinal, isto é, $w^+ \not\equiv 0$ e $w^- \not\equiv 0$ temos

$$m_\infty \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|w^+\|^2$$

e

$$m_\infty \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|w^-\|^2.$$

Agora, note que

$$\|w\|^2 = \|w^+\|^2 - 2\langle w^+, w^- \rangle + \|w^-\|^2 = \|w^+\|^2 + \|w^-\|^2,$$

pois $\nabla w^+ = \chi_{[w>0]} \nabla w$ e $\nabla w^- = \chi_{[w<0]} \nabla w$. Assim segue o resultado. ■

Lema 2.8 *Seja $u \in \mathcal{N}_\infty$ tal que $\mathcal{I}_\infty(u) = m_\infty$, então u é solução fraca do problema (P_∞) .*

Demonstração: Inicialmente, note que

$$J(u) := \mathcal{I}'_\infty(u)u = \|u\|^2 - |u|_{p+1}^{p+1}.$$

Pelos Lemas A.6 e A.8, segue que

$$J'(u)\varphi = 2\langle u, \varphi \rangle - (p+1) \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p-1}u\varphi dx,$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, o que em particular implica em

$$J'(u)u = 2\|u\|^2 - (p+1) \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx.$$

Desde que, $u \in \mathcal{N}_\infty$ temos

$$(1-p)\|u\|^2 = J'(u)u < 0,$$

pois $3 < p$. Sendo assim, como

$$\mathcal{I}_\infty(u) = m_\infty = \inf \left\{ \mathcal{I}_\infty(v); \quad v \in \mathcal{N}_\infty \right\},$$

onde

$$\mathcal{N}_\infty = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}; \quad J(v) = \mathcal{I}'_\infty(v)v = 0 \right\}$$

pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (veja Proposição A.23 do Apêndice) temos

$$\mathcal{I}'_\infty(u) = \lambda J'(u),$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Em particular temos

$$\mathcal{I}'_\infty(u)u = \lambda J'(u)u.$$

Como $u \in \mathcal{N}_\infty$ segue $\mathcal{I}'_\infty(u)u = 0$, além disso $J'(u)u < 0$. Assim, $\lambda = 0$ o que implica em

$$\mathcal{I}'_\infty(u) = 0.$$

Portanto u é solução fraca do problema (P_∞) como queríamos. ■

2.1.2 O Problema (P_a)

Nesta subseção, sob a condição (a_2) , visando obtermos resultados de compacidade, iremos estudar a equação de Schrödinger não-linear

$$-\Delta w + w = a(x)|w|^{p-1}w \quad \text{em } \mathbb{R}^3, \tag{P_a}$$

a qual associaremos o funcional energia $\mathcal{I}_a : H^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{I}_a(w) = \frac{1}{2}\|w\|^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|w|^{p+1} dx \tag{2.12}$$

e a variedade de Nehari definida por

$$\mathcal{N}_a := \left\{ w \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}; \quad \mathcal{I}'_a(w)w = 0 \right\}.$$

Definição 2.3 *O número*

$$m_a = \inf \left\{ \mathcal{I}_a(w); \quad w \in \mathcal{N}_a \right\}$$

é o nível de energia mínima associado ao funcional $\mathcal{I}_a$ dado acima.

Com uma demonstração análoga feita para provarmos que o nível m_∞ está bem definido provamos que o nível m_a está bem definido.

Proposição 2.2 *Sob as hipóteses (a_1) , (a_2) , o problema (P_a) possui uma solução fraca não negativa e, além disso, existe $w_a \in \mathcal{N}_a$ tal que*

$$m_a = \mathcal{I}_a(w_a).$$

Demonstração: A existência da solução fraca é devida a [2]. A existência de w_a que satisfaz $\mathcal{I}_a(w_a) = m_a$ é obtida usando-se o Princípio de Concentração e Compacidade (veja [20]). ■

2.2 Projeções Sobre a Variedade de Nehari

Nesta seção, iremos relacionar as variedades de Nehari $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_a$ e $\mathcal{N}_\infty$. Argumentando como em 1) do Lema 1.3, para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ existem únicos números $\tau_u, \xi_u > 0$ tais que $\tau_u u \in \mathcal{N}_a$ e $\xi_u u \in \mathcal{N}_\infty$ satisfazendo

$$\mathcal{I}_a(\tau_u u) = \max_{t>0} \mathcal{I}_a(tu) \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_\infty(\xi_u u) = \max_{t>0} \mathcal{I}_\infty(tu).$$

As funções $\tau_u u \in \mathcal{N}_a$ e $\xi_u u \in \mathcal{N}_\infty$ são denominadas projeções de u sobre as respectivas variedades de Nehari $\mathcal{N}_a$ e $\mathcal{N}_\infty$. O próximo resultado, relaciona os números τ_u e ξ_u com o único número $t_u > 0$ tal que $t_u u \in \mathcal{N}$.

Lema 2.9 *Dado $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$, sejam $t_u u, \tau_u u, \xi_u u$ ($t_u, \tau_u, \xi_u > 0$) as projeções de u sobre as respectivas variedades de Nehari $\mathcal{N}, \mathcal{N}_a, \mathcal{N}_\infty$. Então,*

a) $\tau_u \leq t_u$.

Além disso, sob a condição (a_3) , isto é, $a \leq 1$ em $\mathbb{R}^3$, temos

b) $\xi_u \leq t_u$.

Demonstração: Provaremos inicialmente o item a). Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$. Desde que, $t_u u \in \mathcal{N}$ e $\tau_u u \in \mathcal{N}_a$, temos

$$t_u^2 \|u\|^2 = -t_u^4 \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u(x) u^2 dx + t_u^{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u|^{p+1} dx$$

e

$$\tau_u^2 \|u\|^2 = \tau_u^{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u|^{p+1} dx.$$

Pela condição (a_1) , sendo $u \neq 0$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u|^{p+1} dx > 0.$$

2.3 Um Resultado de Compacidade (Lema Splitting)

Assim

$$\tau_u^{p-1} = \frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p+1} dx} = \frac{t_u^{p-1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p+1} dx - t_u^2 \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)u^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p+1} dx}.$$

Desde que, por 4) do Lema 1.2 ϕ_u é não negativa, sendo a e K funções não negativas pelas condições (a_1) e (K) , temos

$$\tau_u^{p-1} \leq t_u^{p-1},$$

ou seja

$$\tau_u \leq t_u$$

e isto prova o item a). Agora, provaremos o item b). Seja $\xi_u u$ a projeção de u sobre a variedade $\mathcal{N}_\infty$, ou seja,

$$\xi^2 \|u\|^2 = \xi^{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx.$$

Uma vez que, $u \neq 0$, então

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx > 0.$$

Dessa forma, pela condição (a_3) , temos

$$\xi_u^{p-1} = \frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx} = \frac{t_u^{p-1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p+1} dx - t_u^2 \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)u^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx} \leq t_u^{p-1},$$

o que implica

$$\xi_u \leq t_u,$$

e isto completa a prova do item b). ■

2.3 Um Resultado de Compacidade (Lema Splitting)

Nesta seção, vamos descrever o comportamento das sequências de Palais-Smale do funcional $I_{\mathcal{N}}$. Este estudo será fundamental para o estudo dos pontos críticos do funcional I definido em (1.17). A próxima proposição é uma versão de um resultado devido a M. Struwe. Veja [19].

Proposição 2.3 (Lema Splitting) *Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}$ uma sequência (PS), ou seja,*

a) $I(u_n)$ *é uma sequência limitada;*

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|I'(u_n)\|_* = 0$.

Então, passando se necessário a uma subsequência, existem $\bar{u}$ solução fraca de (P_1) , um número $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, k funções $u^1, \dots, u^k \in H^1(\mathbb{R}^3)$ e k sequências de pontos (y_n^j) , $y_n^j \in \mathbb{R}^3$, $1 \leq j \leq k$, tais que

i) $|y_n^j| \rightarrow +\infty$;

ii) $u_n - \sum_{j=1}^k u^j(\cdot - y_n^j) \rightarrow \bar{u}$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$;

2.3 Um Resultado de Compacidade (Lema Splitting)

iii) $I(u_n) \rightarrow I(\bar{u}) + \sum_{j=1}^k \mathcal{I}_\infty(u^j)$;

iv) u^j é uma solução fraca não trivial do problema (P_∞) .

Observação 2.3 Se $k = 0$, temos na proposição acima apenas os itens ii) e iii).

A prova desta proposição será feita em várias etapas com auxílio dos seguintes lemas abaixo:

Lema 2.10 Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Então,

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{u_n} u_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u u^2 dx$ e

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{u_n} u_n h dx = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u u h dx, \forall h \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

Demonstração: Inicialmente provaremos o item i). Note que

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x) (\phi_{u_n} u_n^2 - \phi_u u^2) dx = I_1(n) + I_2(n),$$

onde

$$I_1(n) = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) u^2 (\phi_{u_n} - \phi_u) dx \quad \text{e} \quad I_2(n) = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{u_n} (u_n^2 - u^2) dx.$$

Agora, mostraremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1(n) = 0. \quad (2.13)$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, por 2) do Lema 1.2, $\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Sendo assim, desde que, pelo Lema 1.1 para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, o funcional $L_u : \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$L_u(\phi) = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) u^2(x) \phi dx$$

é limitado segue (2.13). Agora, provaremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_2(n) = 0. \quad (2.14)$$

Uma vez que, $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Assim por 1) do Lema 1.2, (ϕ_{u_n}) é limitada em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$. Além disso, $u^2, u_n^2 \in L^3(\mathbb{R}^3)$, pois $u, u_n \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$. Logo, pela desigualdade generalizada de Hölder

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{u_n} (u_n^2 - u^2) dx \right| &\leq |\phi_{u_n}|_6 \left(\int_{\mathbb{R}^3} (K(x))^{\frac{6}{5}} |u_n^2 - u^2|^{\frac{6}{5}} dx \right)^{\frac{5}{6}} \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^3} (K(x))^{\frac{6}{5}} |u_n^2 - u^2|^{\frac{6}{5}} dx \right)^{\frac{5}{6}}, \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Sendo assim, desde que por (1.9)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} (K(x))^{\frac{6}{5}} |u_n^2 - u^2|^{\frac{6}{5}} dx = 0,$$

concluimos (2.14). Assim, por (2.13) segue a prova do item i).

2.3 Um Resultado de Compacidade (Lema Splitting)

Agora provaremos o item ii). Dado $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x)(\phi_{u_n} u_n - \phi_u u) h dx = I_3(n) + I_4(n)$$

onde

$$I_3(n) = \int_{\mathbb{R}^3} K(x)(\phi_{u_n} - \phi_u) u_n h dx \quad \text{e} \quad I_4(n) = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u (u_n - u) h dx.$$

Inicialmente, provaremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_4(n) = 0, \quad (2.15)$$

para todo $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, defina o funcional $F_u : H^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F_u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u \varphi h dx.$$

Note que, $h, \varphi \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$. Além disso, $K \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e $\phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$. Assim, pela desigualdade generalizada de Hölder

$$|F_u(\varphi)| \leq \|K\|_2 \|\phi_u\|_6 \|h\|_6 \|\varphi\|_6.$$

Novamente pela imersão $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, temos

$$|F_u(\varphi)| \leq \|K\|_2 \|\phi_u\|_6 \|h\|_6 \|\varphi\|, \quad (2.16)$$

de onde segue que $T_u \in H^{-1}$, pois claramente este funcional é linear. Sendo assim, desde que, $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, concluímos (2.15), como queríamos.

Agora, mostraremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_3(n) = 0. \quad (2.17)$$

Uma vez que, $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$. Assim, fixado $h \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, desde que $\phi_u, \phi_{u_n} \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ pela desigualdade generalizada de Hölder temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} K(x)(\phi_{u_n} - \phi_u) u_n h dx \right| \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^3} (K(x))^{\frac{3}{2}} |\phi_{u_n} - \phi_u|^{\frac{3}{2}} dx \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (2.18)$$

para alguma constante $C > 0$. Agora provaremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} (K(x))^{\frac{3}{2}} |\phi_{u_n} - \phi_u|^{\frac{3}{2}} dx = 0.$$

Considerando este limite, por (2.18), concluímos (2.17) e, conseqüentemente, o item ii). Desde que, $K \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e $(\phi_{u_n} - \phi_u) \in L^6(\mathbb{R}^3)$, dado $\rho > 0$, pela desigualdade generalizada de Hölder, segue

$$\int_{B_\rho(0)^c} (K(x))^{\frac{3}{2}} |\phi_{u_n} - \phi_u|^{\frac{3}{2}} dx \leq \|K\|_{2, B_\rho(0)^c}^{\frac{3}{2}} \|\phi_{u_n} - \phi_u\|_{6, B_\rho(0)^c}^{\frac{3}{2}}. \quad (2.19)$$

Desde que, (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$, por do 1) Lema 1.2 segue que (ϕ_{u_n}) é limitada em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$. Sendo assim,

$$\|\phi_{u_n} - \phi_u\|_6 \leq C_1, \quad (2.20)$$

2.3 Um Resultado de Compacidade (Lema Splitting)

para alguma constante $C_1 > 0$. Agora, note que, $\chi_{B_\rho(0)^c} |K|^2 \leq |K|^2$, para todo $\rho > 0$. Sendo assim, desde que, $K \in L^2(\mathbb{R}^3)$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e pela Proposição A.6 (veja Apêndice), segue que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{B_\rho(0)^c} (K(x))^2 dx = 0.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, temos

$$|K|_{2, B_\rho(0)^c} < \epsilon,$$

para $\rho > 0$ suficientemente grande. Com isso, por (2.19) e por (2.20), segue

$$\int_{B_\rho(0)^c} (K(x))^{\frac{3}{2}} |\phi_{u_n} - \phi_u|^{\frac{3}{2}} dx \leq C_1 \epsilon, \quad (2.21)$$

para $\rho > 0$ suficientemente grande. Agora, dado $M > 0$, defina o conjunto

$$\Omega_M = \left\{ x \in B_\rho(0); K(x) \geq M \right\},$$

com $\rho > 0$ obtido acima. Assim

$$M^2 \mu(\Omega_M) \leq \int_{\Omega_M} (K(x))^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} (K(x))^2 dx,$$

para todo $M > 0$ onde $\mu(\Omega_M)$ é a medida de Lebesgue do conjunto Ω_M . Desde que, $K \in L^2(\mathbb{R}^3)$, então $\lim_{M \rightarrow \infty} \mu(\Omega_M) = 0$, quando $M \rightarrow \infty$. Dessa forma, Pela Proposição A.6 (veja Apêndice), dado $\epsilon > 0$, temos

$$\left(\int_{\Omega_M} (K(x))^2 dx \right)^{\frac{3}{4}} \leq \epsilon,$$

para M suficientemente grande. Sendo assim, pela desigualdade de Hölder e por (2.20), segue

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(0)} (K(x))^{\frac{3}{2}} |\phi_{u_n} - \phi_u|^{\frac{3}{2}} dx &= \int_{\Omega_M} (K(x))^{\frac{3}{2}} |\phi_{u_n} - \phi_u|^{\frac{3}{2}} dx + \int_{B_\rho(0) \setminus \Omega_M} (K(x))^{\frac{3}{2}} |\phi_{u_n} - \phi_u|^{\frac{3}{2}} dx \\ &\leq C_2 \epsilon + M^{\frac{3}{2}} \int_{B_\rho(0) \setminus \Omega_M} |\phi_{u_n} - \phi_u|^{\frac{3}{2}} dx. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Por outro lado, como $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, por 2) do Lema 1.2, $\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Assim, como $\mathcal{D}^{1,2}(B_\rho(0)) = H^1(B_\rho(0)) \hookrightarrow L^{\frac{3}{2}}(B_\rho(0))$, compactamente, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_\rho(0) \setminus \Omega_M} |\phi_{u_n} - \phi_u|^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Dessa forma, por (2.21) e por (2.22), segue

$$\int_{\mathbb{R}^3} (K(x))^{\frac{3}{2}} |\phi_{u_n} - \phi_u|^{\frac{3}{2}} = 0,$$

de onde por (2.15) e (2.18) concluímos o item ii) e isto completa a prova deste lema. ■

2.3 Um Resultado de Compacidade (Lema Splitting)

Lema 2.11 *Considere a aplicação $G : H^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$G(u) = I'(u)u = \|u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p+1} dx.$$

Dada $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ uma sequência limitada, então a sequência $G'(u_n)h$ é limitada para todo $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

Demonstração: Dado $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$, pelo Corolário A.5 (veja Apêndice), temos

$$G'(u_n)h = 2\langle u_n, h \rangle + 4 \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{u_n}(x)u_n h dx - (p+1) \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u_n|^{p-1}u_n h dx.$$

Agora, note que, por (2.16)

$$\left| 2\langle u_n, h \rangle + 4 \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{u_n}(x)u_n h dx \right| \leq 2\|u_n\| \|h\| + 4\|K\|_2 \|\phi_{u_n}\|_6 \|u_n\|_6 \|h\|_6.$$

Como $p \in (3, 5)$ então $q := \frac{6}{6-p} \in (2, 6)$, assim $h \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^3)$. Além disso, $u_n \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ o que implica em $u_n^p \in L^{\frac{6}{p}}(\mathbb{R}^3)$. Assim pela desigualdade de Hölder segue

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u_n|^p h dx \right| \leq \|a\|_\infty \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^p |h| dx \leq \|a\|_\infty \|u_n\|_6^p \|h\|_q.$$

Como (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ por 1) do Lema 1.2 segue que (ϕ_{u_n}) é limitada em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$. Disto segue a prova deste lema. ■

Lema 2.12 *Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}$ uma sequência (PS). Então,*

$$I'(u_n)h \rightarrow 0,$$

para todo $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

Demonstração: Pela Proposição A.11 (veja Apêndice) temos

$$\|I'(u_n)\|_* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|I'(u_n) - \lambda G'(u_n)\|_{H^{-1}}.$$

Assim, para algum $\lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\|I'(u_n)\|_* = \|I'(u_n) - \lambda_n G'(u_n)\|_{H^{-1}}.$$

Desde que, $(u_n) \subset \mathcal{N}$ é uma sequência (PS) temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|I'(u_n)\|_* = 0,$$

o que implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|I'(u_n) - \lambda_n G'(u_n)\|_{H^{-1}} = 0. \quad (2.23)$$

Agora, mostraremos que (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Com efeito, desde que $(u_n) \subset \mathcal{N}$, por (1.19)

$$I(u_n) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|u_n\|^2.$$

2.3 Um Resultado de Compacidade (Lema Splitting)

Como (u_n) é uma sequência (PS) então $I(u_n)$ é limitada de onde segue que (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \|I'(u_n) - \lambda_n G'(u_n)\|_{H^{-1}} &\geq \frac{|I'(u_n)u_n - \lambda_n G'(u_n)u_n|}{\|u_n\|} \\ &\geq \frac{|I'(u_n)u_n - \lambda_n G'(u_n)u_n|}{C}, \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Sendo assim, por (2.23)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I'(u_n)u_n - \lambda_n G'(u_n)u_n) = 0. \quad (2.24)$$

Agora, afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0. \quad (2.25)$$

Com efeito, desde que, $(u_n) \subset \mathcal{N}$, então $I'(u_n)u_n = 0$. Além disso, por (1.25),

$$G'(u_n)u_n < c < 0,$$

para alguma constante $c > 0$, de onde prova-se a afirmação. Além disso, sendo $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ uma sequência limitada, pelo Lema 2.11 a sequência $G'(u_n)h$ é limitada para todo h em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Disto concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n G'(u_n)h = 0, \quad (2.26)$$

para todo $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Sendo assim, como

$$\|I'(u_n) - \lambda_n G'(u_n)\|_{H^{-1}} \geq \frac{|I'(u_n)h - \lambda_n G'(u_n)h|}{\|h\|},$$

para todo $h \neq 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, por (2.23) segue o resultado desejado. ■

Observação 2.4 *Agora, sob as condições da Proposição 2.3, mostraremos que o problema (P_1) possui pelo menos uma solução fraca. Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}$ uma sequência (PS) . Pelo lema anterior segue que (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Então, a menos de subsequência,*

$$u_n \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3).$$

Afirmção 1 $\bar{u}$ é solução fraca do problema (P_1) . Para provarmos esta afirmação vamos primeiramente provar alguns resultados técnicos.

Lema 2.13 *Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e $p \in (2, 6)$. Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} [|u_n|^{p-2}u_n - |u_n - u|^{p-2}(u_n - u)]h dx = \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p-2}uh dx,$$

para todo $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

2.3 Um Resultado de Compacidade (Lema Splitting)

Demonstração: Dadas $u, v \in H^1(\mathbb{R}^3)$ considere a função $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = |u - tv|^{p-2}(u - tv).$$

Note que,

$$\begin{aligned} |g'(t)| &= \left| (p-2)|u - tv|^{p-4}(u - tv)^2(-v) + |u - tv|^{p-2}(-v) \right| \\ &\leq (p-1)|u - tv|^{p-2}|v| \\ &\leq (p-1)(|u| + |v|)^{p-2}|v|. \end{aligned}$$

Assim, desde que pelo Teorema do Valor Médio $g(1) - g(0) = g'(\theta)$ para algum $\theta \in (0, 1)$ definindo a função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(u) = |u|^{p-2}u,$$

temos

$$|f(u_n) - f(u_n - u)| \leq (p-1)(|u_n| + |u|)^{p-2}|u|. \quad (2.27)$$

Note que, $\chi_{B_r(0)^c}|u|^p \leq |u|^p$, para todo $r > 0$. Assim, desde que, $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e pela Proposição A.6 (veja Apêndice), temos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r(0)^c} |u|^p dx = 0,$$

e isto implica que, dado $\epsilon > 0$

$$\int_{B_r(0)^c} |u|^p dx < \epsilon, \quad (2.28)$$

para $r > 0$ suficientemente grande. Como $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então (u_n) é limitado em $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$. Assim

$$\|u_n\| + \|u\|_p \leq C_1$$

para alguma constante $C_1 > 0$. Dessa forma, dadas $u, h \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$, desde que, $(|u_n| + |u|)^{p-2} \in L^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{R}^3)$, pela desigualdade de Hölder e por (2.27) e (2.28), segue

$$\left| \int_{B_r(0)^c} (f(u_n) - f(u_n - u))h dx \right| \leq C_2 |u|_{p, B_r(0)^c} \|u_n\| + |u|_{p, B_r(0)^c}^{p-2} \|h\|_{p, B_r(0)^c} \leq \epsilon C_2,$$

para $r > 0$ suficientemente grande. De forma análoga,

$$\left| \int_{B_r(0)^c} f(u)h dx \right| \leq |u|_{p, B_r(0)^c}^{p-1} \|h\|_{p, B_r(0)^c} \leq \epsilon C_3,$$

para $r > 0$ suficientemente grande. Assim

$$\left| \int_{B_r(0)^c} (f(u_n) - f(u_n - u) - f(u))h dx \right| \leq \epsilon C_4, \quad (2.29)$$

para $r > 0$ suficientemente grande. Agora, mostraremos que

$$f(u_n) - f(u_n - u) \rightarrow f(u) \quad \text{em} \quad L^l(B_r(0)), \quad (2.30)$$

2.3 Um Resultado de Compacidade (Lema Splitting)

para $l = \frac{p}{p-1}$. De fato, como $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$ onde $H^1(B_r(0)) \hookrightarrow L^p(B_r(0))$ compactamente temos $u_n \rightarrow u$ em $L^p(B_r(0))$. Disto, segue que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{q.t.p. em } B_r(0)$$

e

$$|u_n| \leq g \quad \text{q.t.p. em } B_r(0) \quad (2.31)$$

para alguma $g \in L^p(B_r(0))$. Assim

$$|u_n|^{p-2}u_n - |u_n - u|^{p-2}(u_n - u) \rightarrow |u|^{p-2}u \quad \text{q.t.p. em } B_r(0). \quad (2.32)$$

Além disso, desde que $(a + b)^q \leq 2^{q-1}(a^q + b^q)$ para todo $q \in [1, +\infty)$ e $a, b \in [0, +\infty)$ temos

$$\begin{aligned} \left| |u_n|^{p-2}u_n - |u_n - u|^{p-2}(u_n - u) - |u|^{p-2}u \right|^{\frac{p}{p-1}} &\leq \left(|u_n|^{p-1} + |u_n - u|^{p-1} + |u|^{p-1} \right)^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq 2^{\frac{1}{p-1}} \left(|u_n|^{p-1} + |u_n - u|^{p-1} \right)^{\frac{p}{p-1}} + 2^{\frac{1}{p-1}} |u|^p \\ &\leq 2^{\frac{2}{p-1}} \left(|u_n|^p + |u_n - u|^p \right) + 2^{\frac{1}{p-1}} |u|^p. \end{aligned}$$

Sendo assim, por (2.31), (2.32) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue (2.30). Dessa forma, como

$$\left| \int_{B_r(0)} f(u_n) - f(u_n - u) - f(u)h dx \right| \leq |f(u_n) - f(u_n - u) - f(u)|_{l, B_r(0)} |h|_{p, B_r(0)},$$

por (2.29) provamos o resultado desejado. ■

Lema 2.14 *Seja $a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo $\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = 1$ e $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Dado $p \in (3, 5)$, se $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ é tal que $u_n \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u_n|^{p+1} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{p+1} dx.$$

Demonstração: Como $\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = 1$, dado $\epsilon > 0$, existe $r > 0$, tal que para todo $x \in B_r(0)^c$, tem-se $|a(x) - 1| < \epsilon$. Desde que, $u_n \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^3)$. Assim,

$$\int_{B_r(0)^c} |a(x) - 1| |u_n|^{p+1} dx \leq \epsilon \int_{B_r(0)^c} |u_n|^{p+1} dx \leq C_1 \epsilon, \quad (2.33)$$

para alguma constante $C_1 > 0$. Por outro lado, como $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\int_{B_r(0)} |a(x) - 1| |u_n|^{p+1} dx \leq C_2 \int_{B_r(0)} |u_n|^{p+1} dx,$$

para alguma constante $C_2 > 0$. Dessa forma, como $u_n \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e $H^1(B_r(0)) \hookrightarrow L^{p+1}(B_r(0))$, compactamente, por (2.33), concluímos o resultado desejado. ■

2.3 Um Resultado de Compacidade (Lema Splitting)

Lema 2.15 *Sob as condições do Lema 2.14, temos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int a(x) |u_n|^{p-1} u_n h dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |u_n|^{p-1} u_n h dx,$$

para todo $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

Demonstração: Segue de forma análoga ao lema anterior. ■

Lema 2.16 *Seja $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ e $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e $p \in (3, 5)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u_n|^{p-1} u_n h dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u|^{p-1} u h dx,$$

para todo $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

Demonstração: Desde que, $p \in (3, 5)$, então $\frac{12}{7-p} \in (3, 6)$, assim $h \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{\frac{12}{7-p}}(\mathbb{R}^3)$. Como $\chi_{B_\rho(0)^c} |h|^{\frac{12}{7-p}} \leq |h|^{\frac{12}{7-p}}$, para todo $\rho > 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e pela Proposição A.6 (veja Apêndice), segue

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{B_\rho(0)^c} |h|^{\frac{12}{7-p}} dx = 0,$$

e isto implica que dado $\epsilon > 0$,

$$|h|_{\frac{12}{7-p}, B_\rho(0)^c} < \epsilon, \quad (2.34)$$

para $\rho > 0$ suficientemente grande. Como $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{\frac{12}{7-p}}(\mathbb{R}^3)$ e $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ temos $(|u_n| + |u|)^{p-1} \in L^{\frac{6}{p-1}}(\mathbb{R}^3)$ e $h, (u_n - u) \in L^{\frac{12}{7-p}}(\mathbb{R}^3)$. Sendo assim, desde que $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, pelo Lema A.4 (veja Apêndice) e pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_\rho(0)^c} a(x) h (|u_n|^{p-1} u_n - |u|^{p-1} u) dx \right| &\leq C \int_{B_\rho(0)^c} |h| |u_n - u| (|u_n| + |u|)^{p-1} dx \\ &\leq C |h|_{\frac{12}{7-p}, B_\rho(0)^c} \|u_n - u\|_{\frac{12}{7-p}, B_\rho(0)^c} \| |u_n| + |u| \|_{6, B_\rho(0)^c}^{p-1}, \end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Por outro lado, como $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3)$, assim por imersões, concluímos que

$$\|u_n - u\|_{\frac{12}{7-p}}, \| |u_n| + |u| \|_6 \leq C_1, \quad (2.35)$$

para alguma constante $C_1 > 0$. Dessa forma, por (2.34)

$$\left| \int_{B_\rho(0)^c} a(x) h (|u_n|^{p-1} u_n - |u|^{p-1} u) dx \right| \leq \epsilon C_2, \quad (2.36)$$

para $\rho > 0$ suficientemente grande. Além disso,

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_\rho(0)} a(x) h (|u_n|^{p-1} u_n - |u|^{p-1} u) dx \right| &\leq C \int_{B_\rho(0)} |h| |u_n - u| (|u_n| + |u|)^{p-1} dx \\ &\leq C |h|_{\frac{12}{7-p}, B_\rho(0)} \|u_n - u\|_{\frac{12}{7-p}, B_\rho(0)} \| |u_n| + |u| \|_{6, B_\rho(0)}^{p-1}. \end{aligned}$$

2.3 Um Resultado de Compacidade (Lema Splitting)

Sendo assim, desde que, $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e $H^1(B_\rho(0)) \hookrightarrow L^{\frac{12}{7-p}}(B_\rho(0))$, compactamente, por (2.35), temos

$$\left| \int_{B_\rho(0)} a(x)h(|u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u)dx \right| \leq \epsilon C_3,$$

consequentemente por (2.36)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}^3} a(x)h(|u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u)dx \right| = 0,$$

o que completa a prova deste lema. ■

Agora provaremos a Afirmação 1.

Lema 2.17 $\bar{u}$ é solução fraca de (P_1) .

Demonstração: Pelo Lema 2.12,

$$I'(u_n)h \rightarrow 0, \tag{2.37}$$

para todo $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Assim, é suficiente verificarmos que

$$I'(u_n)h \rightarrow I'(\bar{u})h, \tag{2.38}$$

para todo $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Note que, dado $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$,

$$I'(u_n)h = \langle u_n, h \rangle + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{u_n}u_n h dx - \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u_n|^{p-1}u_n h dx.$$

Desde que $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, de forma imediata

$$\langle u_n, h \rangle \rightarrow \langle \bar{u}, h \rangle$$

e por ii) do Lema 2.10

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{u_n}u_n h dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{\bar{u}}\bar{u} h dx.$$

Além disso, pelo Lema 2.16

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u_n|^{p-1}u_n h dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|\bar{u}|^{p-1}\bar{u} h dx,$$

o que prova (2.38), de onde por (2.37) concluimos que

$$I'(\bar{u})h = 0,$$

para todo $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$, como queríamos. ■

Observação 2.5 Considere a convergência fraca

$$u_n \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3)$$

2.3 Um Resultado de Compacidade (Lema Splitting)

obtida na Observação 2.4. Se

$$u_n \rightarrow \bar{u} \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3),$$

pelo lema acima esta provada a Proposição 2.3 com $k = 0$ nos itens ii) e iii) e sem os itens i) e iv). Isto ficará claro, pois para provarmos o Lema 2.21 é necessário que

$$u_n \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3). \quad (2.39)$$

(apenas a convergência fraca). Este lema será fundamental para obtermos a função $u^1 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ e a sequência (y_n^1) dos itens i) e iv) da Proposição 2.3, respectivamente. Portanto, no que se segue iremos considerar (2.39).

Lema 2.18 *Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Defina $z_n = u_n - u$. Então*

$$I(u_n) = I(u) + \mathcal{I}_\infty(z_n^1) + o(1).$$

Demonstração: Pelo Corolário A.1 (veja Apêndice)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|u_n|_{p+1}^{p+1} - |z_n|_{p+1}^{p+1}) = |u|_{p+1}^{p+1}.$$

Desde que pela condição (a_1) $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} a(x)(|u_n|^{p+1} - |z_n|^{p+1} - |u|^{p+1})dx \right| \leq \|a\|_\infty \left| \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^{p+1} - |z_n|^{p+1} - |u|^{p+1} dx \right|,$$

o que implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u_n|^{p+1} dx - \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|z_n|^{p+1} dx \right) = \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p+1} dx. \quad (2.40)$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|^2 - \|z_n\|^2) = \|u\|^2$$

e pelo Lema 2.14

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|z_n|^{p+1} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} |z_n|^{p+1} dx.$$

Portanto, por i) do Lema 2.10 e por (2.40), segue

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \frac{1}{2} \|u_n\|^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{u_n}(x) u_n^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u_n|^{p+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \|z_n\|^2 + \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u(x) u^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u|^{p+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} |z_n|^{p+1} dx + o(1) \\ &= I(u) + \mathcal{I}_\infty(z_n^1) + o(1), \end{aligned}$$

e isto completa a prova deste lema. ■

2.3 Um Resultado de Compacidade (Lema Splitting)

Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}$ uma sequência (PS) . Pela Observação 2.4

$$u_n \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3),$$

onde pelo Lema 2.12 $\bar{u}$ é solução fraca do problema (P_1) . Agora, definindo

$$z_n^1 = u_n - \bar{u},$$

temos que

Lema 2.19 Para todo $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\mathcal{I}'_\infty(z_n^1)h \rightarrow 0.$$

Demonstração: Note que pelo Lema 2.12,

$$o(1) = I'(u_n)h, \tag{2.41}$$

para todo $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$. De forma imediata

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, h \rangle = \langle \bar{u}, h \rangle \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle z_n^1, h \rangle = 0, \tag{2.42}$$

para todo $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Desde que, $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} a(x) (|u_n|^{p-1}u_n - |\bar{u}|^{p-1}\bar{u} - |z_n^1|^{p-1}z_n^1) h dx \right| \leq \|a\|_\infty \left| \int_{\mathbb{R}^3} (|u_n|^{p-1}u_n - |\bar{u}|^{p-1}\bar{u} - |z_n^1|^{p-1}z_n^1) h dx \right|,$$

o que pelo Lema 2.13 implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) (|u_n|^{p-1}u_n - |\bar{u}|^{p-1}\bar{u} - |z_n^1|^{p-1}z_n^1) h dx = 0.$$

Além disso, pelo Lema 2.15

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |z_n^1|^{p-1} z_n^1 h dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} |z_n^1|^{p-1} z_n^1 h dx.$$

Assim

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u_n|^{p-1} u_n h dx = \int_{\mathbb{R}^3} |z_n^1|^{p-1} z_n^1 h dx + \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |\bar{u}|^{p-1} \bar{u} h dx + o(1).$$

Portanto, por (2.41), (2.42) e por ii) do Lema 2.10, dado h em $H^1(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u_n, h \rangle + \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{u_n} u_n h dx - \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |u_n|^{p-1} u_n h dx + o(1) \\ &= \langle \bar{u}, h \rangle + \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{\bar{u}} \bar{u} h dx - \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |\bar{u}|^{p-1} \bar{u} h dx + \langle z_n^1, h \rangle - \int_{\mathbb{R}^3} |z_n^1|^{p-1} z_n^1 h dx + o(1) \\ &= I'(\bar{u})h + \mathcal{I}'_\infty(z_n^1)h + o(1). \end{aligned}$$

Desde que, pelo Lema 2.17, $\bar{u}$ é solução fraca do problema (P_1) , temos $I'(\bar{u})h = 0$, o que implica

$$o(1) = \mathcal{I}'_\infty(z_n^1)h,$$

para todo $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$, e isto completa a prova deste lema. ■

2.3 Um Resultado de Compacidade (Lema Splitting)

Lema 2.20 Desde que $z_n^1 \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então

$$\|z_n^1\|^2 = |z_n^1|_{p+1}^{p+1} + o(1).$$

Demonstração: Por (2.24) do Lema 2.12, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I'(u_n)u_n - \lambda_n G'(u_n)u_n) = 0.$$

De forma análoga feita para provarmos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n G'(u_n)h = 0,$$

para todo $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$, pela limitação da sequência (u_n) em $H^1(\mathbb{R}^3)$, prova-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n G'(u_n)u_n = 0.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I'(u_n)u_n = 0,$$

o que por i) do Lema 2.10, por (2.40) e pelo Lema 2.14 segue que

$$\begin{aligned} 0 = I'(u_n)u_n &= \|u_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{u_n}u_n^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u_n|^{p+1} dx + o(1) \\ &= \|\bar{u}\|^2 + \|z_n^1\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{\bar{u}}\bar{u}^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|\bar{u}|^{p+1} dx - \int_{\mathbb{R}^3} |z_n^1|^{p+1} dx + o(1) \\ &= I'(\bar{u})\bar{u} + \mathcal{I}'_{\infty}(z_n^1)(z_n^1) + o(1). \end{aligned}$$

Desde que, pelo Lema 2.17, $\bar{u}$ é solução fraca do problema (P_1) , temos $I'(\bar{u})\bar{u} = 0$, o que implica em

$$0 = \mathcal{I}'_{\infty}(z_n^1)(z_n^1) + o(1),$$

isto é,

$$\|z_n^1\|^2 = |z_n^1|_{p+1}^{p+1} + o(1),$$

e isto completa a prova deste lema. ■

Lema 2.21 Existe $(y_n^1) \subset \mathbb{R}^3$ tal que $|y_n^1| \rightarrow \infty$ com $z_n^1(\cdot + y_n^1) \rightharpoonup u^1$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, onde $u^1 \neq 0$.

Demonstração: Defina

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{B_1(y)} |z_n^1|^{p+1} dx \right).$$

Agora afirmamos que $\delta > 0$. Com efeito, se $\delta = 0$, pelo Lema de Lions (Proposição A.1 veja Apêndice), $z_n^1 \rightarrow 0$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^3)$. Assim, desde que, pelo Lema 2.20

$$\|z_n^1\|^2 = |z_n^1|_{p+1}^{p+1} + o(1),$$

concluimos que $z_n^1 \rightarrow 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, o que contradiz (2.39). Assim, existe $\rho > 0$ tal que a menos de subsequência

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{B_1(y)} |z_n^1|^{p+1} dx \geq \rho.$$

2.3 Um Resultado de Compacidade (Lema Splitting)

Fixe $n \in \mathbb{N}$, usando a definição de supremo existe y_n^1 em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\int_{B_1(y_n^1)} |z_n^1|^{p+1} dx \geq \frac{\rho}{2}. \quad (2.43)$$

Agora, assumindo que

$$z_n^1(\cdot + y_n^1) \rightharpoonup u^1 \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3), \quad (2.44)$$

afirmamos que $u^1 \neq 0$. Com efeito, por mudança de variável temos

$$\int_{B_1(0)} |z_n^1(x + y_n^1)|^{p+1} dx \geq \frac{\rho}{2}.$$

Sendo assim, como $H^1(B_1(0)) \hookrightarrow L^{p+1}(B_1(0))$, compactamente, segue

$$\int_{B_1(0)} |u^1(x)|^{p+1} dx \geq \frac{\rho}{2},$$

de onde concluímos que $u^1 \neq 0$, o que prova afirmação. Para finalizar, mostraremos que (y_n^1) não é limitada. De fato, se $|y_n^1| \leq C$, para alguma constante $C > 0$, teríamos $B_1(y_n^1) \subset B_{1+C}(0)$. Assim,

$$\int_{B_1(y_n^1)} |z_n^1|^{p+1} dx \leq \int_{B_{1+C}(0)} |z_n^1|^{p+1} dx.$$

Desde que, $z_n^1 \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e $H^1(B_{1+C}(0)) \hookrightarrow L^{p+1}(B_{1+C}(0))$, compactamente, segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{1+C}(0)} |z_n^1|^{p+1} dx = 0,$$

o que implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_1(y_n^1)} |z_n^1|^{p+1} dx = 0,$$

contradizendo (2.43). Portanto, (y_n^1) não é limitada e a menos de subsequência $|y_n^1| \rightarrow \infty$, como queríamos, e isto completa a prova deste lema. ■

Agora, sobre a função u^1 obtida no lema acima afirmamos que

Lema 2.22 u^1 é solução fraca não trivial do problema (P_∞) .

Demonstração: Note que, pelo Lema 2.19,

$$\mathcal{I}'_\infty(z_n^1)h \rightarrow 0,$$

para todo $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Assim, é suficiente verificarmos que

$$\mathcal{I}'_\infty(z_n^1)h \rightarrow \mathcal{I}'_\infty(u^1)h, \quad (2.45)$$

para todo $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Agora, fixe $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Desde que, por (2.44),

$$z_n^1(\cdot + y_n^1) \rightharpoonup u^1 \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3),$$

2.3 Um Resultado de Compacidade (Lema Splitting)

temos

$$\langle z_n^1, h \rangle \rightarrow \langle u^1, h \rangle.$$

Além disso, pelo Lema 2.16 segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} |z_n^1|^{p-1} z_n^1 h dx = \int_{\mathbb{R}^3} |u^1|^{p-1} u^1 h dx.$$

Sendo assim, desde que

$$\mathcal{I}'_\infty(u)h = \langle u, h \rangle - \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p-1} u h dx,$$

para todo $u, h \in H^1(\mathbb{R}^3)$, segue (2.45), o que prova que u^1 é solução fraca do problema (P_∞) . Esta solução é não trivial devido ao Lema 2.21, e isto completa a prova deste lema. ■

Agora defina

$$z_n^2 = z_n^1(\cdot + y_n^1) - u^1.$$

Assim, temos

$$\textbf{Lema 2.23} \quad I(u_n) = I(\bar{u}) + \mathcal{I}_\infty(u^1) + \mathcal{I}_\infty(z_n^2) + o(1).$$

Demonstração: Note que, por (2.44) temos

$$z_n^1(\cdot + y_n^1) \rightharpoonup u^1,$$

o que implica em

$$\|z_n^1\|^2 - \|z_n^2\|^2 = \|u^1\|^2 + o(1),$$

além disso, pelo Corolário A.1 (veja Apêndice)

$$|z_n^1|_{p+1}^{p+1} - |z_n^2|_{p+1}^{p+1} = |u^1|_{p+1}^{p+1} + o(1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\infty(z_n^2) &= \|z_n^2\|^2 - \frac{1}{p+1} |z_n^2|_{p+1}^{p+1} \\ &= \|z_n^1\|^2 - \|u^1\|^2 - \frac{1}{p+1} (|z_n^1|_{p+1}^{p+1} - |u^1|_{p+1}^{p+1}) + o(1) \\ &= \mathcal{I}_\infty(z_n^1) - \mathcal{I}_\infty(u^1) + o(1). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Sendo assim, desde que, pelo Lema 2.18

$$I(u_n) = I(\bar{u}) + \mathcal{I}_\infty(z_n^1) + o(1),$$

segue o resultado desejado. ■

2.3.1 Prova da Proposição 2.3

Demonstração: Se $z_n^2 \rightarrow 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$ de forma análoga feita na Observação 2.5 está provada a Proposição 2.3 com $k = 1$ nos itens i)-iv). Se $z_n^2 \not\rightarrow 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, de forma análoga feita nos Lemas 2.21 e 2.22 obtemos uma sequência $(y_n^2) \subset \mathbb{R}^3$ tal que $y_n^2 \rightarrow \infty$, uma sequência de funções $z_n^3 = z_n^2 - u^2(\cdot - y_n^2)$, onde $z_n^3 \rightarrow 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$ (podendo convergir forte) e u^2 uma solução fraca não trivial do problema (P_∞) . Além disso, de forma análoga feita em (2.46) prova-se que

$$\mathcal{I}_\infty(z_n^3) = \mathcal{I}_\infty(z_n^2) - \mathcal{I}_\infty(u^2) + o(1),$$

de onde pelo Lema 2.23 temos

$$I(u_n) = I(\bar{u}) + \mathcal{I}_\infty(u^1) + \mathcal{I}_\infty(u^2) + \mathcal{I}_\infty(z_n^3).$$

Assim, repetindo esse processo k vezes obtemos uma sequência $(y_n^j) \subset \mathbb{R}^3$, $1 \leq j \leq k$ tal que $y_n^j \rightarrow \infty$, uma sequência de funções $z_n^{j+1} = z_n^j - u^j(\cdot - y_n^j)$ onde $z_n^{j+1} \rightarrow 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$ (podendo convergir forte) e u^j é uma solução não trivial de (P_∞) , além disso

$$I(u_n) = I(\bar{u}) + \sum_{j=1}^k \mathcal{I}_\infty(u^j) + \mathcal{I}_\infty(z_n^{k+1}) + o(1).$$

Agora, afirmamos que este processo para. Inicialmente, note que, desde que, $z_n^{k+1} \rightarrow 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, de forma análoga feita no Lema 2.23 prova-se que $\mathcal{I}_\infty(z_n^{k+1}) \rightarrow 0$. Assim, por a) da Proposição 2.3 segue

$$C \geq I(\bar{u}) + \sum_{j=1}^k \mathcal{I}_\infty(u^j),$$

para alguma constante $C > 0$. Dessa forma, como m_∞ é o nível de energia mínima associada ao funcional $\mathcal{I}_\infty$ e u^j , $1 \leq j \leq k$, são soluções fracas não triviais do problema P_∞ temos $\mathcal{I}_\infty(u^j) \geq m_\infty$. Disto segue que

$$C \geq I(\bar{u}) + \frac{(k+1)k}{2} m_\infty,$$

o que implica que o processo acima para em uma determinada etapa k , e isto prova a afirmação (note que pela Obsevação 2.2 $m_\infty > 0$). Sendo assim, para finalizarmos a prova desta proposição falta-nos provar que

$$u_n - \sum_{j=1}^k u^j(\cdot - y_n^j) \rightarrow \bar{u} \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3).$$

Desde que, $z_n^{j+1} = z_n^j - u^j(\cdot - y_n^j)$ para $1 \leq j \leq k$, temos

$$z_n^{k+1} = u_n - \sum_{j=1}^k u^j(\cdot - y_n^j) - \bar{u}.$$

Assim, para provarmos a convergência acima é suficiente verificarmos que

$$z_n^{k+1} \rightarrow 0 \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3).$$

Suponha, por contradição, que $z_n^{k+1} \not\rightarrow 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$ apenas $z_n^{k+1} \rightharpoonup 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Então, o processo continua, o que é uma contradição já que este processo para na etapa k e isto completa a prova desta proposição. ■

2.4 Condição (PS)

Nesta seção, daremos duas importantes consequências da Proposição 2.3. A primeira consequência se refere a não compacidade do funcional $I|_{\mathcal{N}}$, enquanto a segunda se refere a compacidade deste funcional. Inicialmente, daremos a seguinte definição.

Definição 2.4 (Sequência de Palais-Smale para o funcional $I|_{\mathcal{N}}$) O funcional $I|_{\mathcal{N}}$ satisfaz a condição (PS)_c se toda sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}$ tal que

$$I(u_n) \rightarrow c \quad e \quad \|I'(u_n)\|_* \rightarrow 0,$$

possui uma subsequência convergente.

Observação 2.6 Relembremos que m_∞ é o nível de energia mínima associado ao funcional $\mathcal{I}_\infty$ definido em (2.2).

Corolário 2.2 Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}$ tal que

$$I(u_n) \rightarrow m_\infty \quad e \quad \|I'(u_n)\|_* \rightarrow 0.$$

Se (u_n) não possui subsequência convergente em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então em iii) da Proposição 2.3, temos $k = 1$ e $\bar{u} = 0$. Além disso, $u^1 = w$ a menos de translação onde w é a solução ground state do problema (P_∞) .

Demonstração: Desde que, $I(u_n)$ é limitada e $\|I'(u_n)\|_* \rightarrow 0$, se (u_n) não possui subsequência convergente em $H^1(\mathbb{R}^3)$, temos que $k \neq 0$ em ii) da Proposição 2.3. Agora, mostraremos que $k = 1$. Inicialmente, note que, desde que, m_∞ é o nível de energia mínima associado ao funcional $\mathcal{I}_\infty$ e pela Proposição 2.3 u^j é solução fraca não trivial do problema (P_∞) para $1 \leq j \leq k$ temos

$$\mathcal{I}_\infty(u^j) \geq m_\infty.$$

Agora, suponhamos por contradição que $k \geq 2$. Como $I(u_n) \rightarrow m_\infty$, por iii) da Proposição 2.3 segue

$$\begin{aligned} m_\infty &= I(\bar{u}) + \sum_{j=1}^k \mathcal{I}_\infty(u^j) \\ &\geq I(\bar{u}) + (k+1) \frac{k}{2} m_\infty \\ &\geq I(\bar{u}) + 3m_\infty. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Note que, pela Proposição 2.3, $\bar{u}$ é solução fraca do problema (P_1) , assim temos duas possibilidades:

1ª **possibilidade:** se $\bar{u} = 0$, então $I(\bar{u}) = 0$, de onde por (2.47), teríamos $m_\infty \geq 3m_\infty$, contradição (note que pela Obsevarção 2.2 $m_\infty > 0$).

2ª **possibilidade:** se $\bar{u} \neq 0$, como $\bar{u}$ é ponto crítico do funcional I definido em (1.17), temos $I'(\bar{u})\bar{u} = 0$, o que implica em $\bar{u} \in \mathcal{N}$. Note que, por 3) do Lema 1.3

$$m = \inf\{I(u); u \in \mathcal{N}\} > 0.$$

Logo $I(\bar{u}) > 0$, de onde por (2.47) temos $m_\infty > 3m_\infty$, absurdo.

2.4 Condição (PS)

Sendo assim, $k = 1$. Agora, mostraremos que $\bar{u} = 0$. Com efeito, se $\bar{u} \neq 0$, conforme provado acima $I(\bar{u}) > 0$. Dessa forma, desde que $I(u_n) \rightarrow m_\infty$, por iii) da Proposição 2.3, teríamos

$$m_\infty = I(\bar{u}) + \mathcal{I}_\infty(u^1) > \mathcal{I}_\infty(u^1) \geq m_\infty,$$

contradição. Agora, afirmamos que $u^1 = w$ a menos de translação. Com efeito, pelo Lema 2.22 u^1 é solução fraca não trivial do problema (P_∞) . Como pela Proposição 2.1 w é única a menos de translação segue a afirmação, de onde concluímos a prova deste corolário. ■

O próximo resultado fornece valores $c \in \mathbb{R}$ tais que o funcional $I|_{\mathcal{N}}$ satisfaz a condição $(PS)_c$. Mais precisamente

Corolário 2.3 *O funcional $I|_{\mathcal{N}}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in (0, m_\infty)$. Além disso $c = I(\bar{u})$, para algum $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^3)$ solução fraca do problema (P_1) .*

Demonstração: Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}$ tal que

$$I(u_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad \|I'(u_n)\|_* \rightarrow 0.$$

Mostraremos, inicialmente, que a menos de subsequência

$$u_n \rightarrow \bar{u} \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3).$$

Pela Proposição 2.3,

$$I(u_n) \rightarrow I(\bar{u}) + \sum_{j=1}^k \mathcal{I}_\infty(u^j) = c, \quad (2.48)$$

onde $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é solução fraca do problema (P_1) . Note que, pelo lema anterior,

$$\mathcal{I}_\infty(u^j) \geq m_\infty,$$

$1 \leq j \leq k$. Assim

$$\begin{aligned} c &= I(\bar{u}) + \sum_{j=1}^k \mathcal{I}_\infty(u^j) \\ &\geq I(\bar{u}) + (k+1) \frac{k}{2} m_\infty \\ &> I(\bar{u}) + (k+1) \frac{k}{2} c, \end{aligned}$$

isto é, $c(1 - \frac{k}{2}(k+1)) > I(\bar{u})$. Agora mostraremos que $k = 0$. Com efeito, se $k \geq 1$, como $0 < c$, teríamos

$$I(\bar{u}) < 0.$$

Agora, note que, sendo $\bar{u}$ é solução fraca do problema (P_1) , conforme provado no lema anterior temos $I(\bar{u}) \geq 0$, o que é uma contradição. Sendo $k = 0$, por ii) da Proposição 2.3, temos

$$u_n \rightarrow \bar{u} \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3)$$

e isto prova que o funcional $I|_{\mathcal{N}}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in (0, m_\infty)$. Finalmente por iii) da Proposição 2.3,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) = I(\bar{u}) = c,$$

e isto completa a prova deste lema. ■

Observação 2.7 *Pelo corolário anterior temos que para exibirmos uma solução fraca do tipo ground state do problema (P_1) é suficiente que $m \in (0, m_\infty)$ e que exista uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}$ tal que*

$$I(u_n) \rightarrow m \quad e \quad \|I'(u_n)\|_* \rightarrow 0.$$

2.5 Estimativa de Nível

Na seção anterior, provamos que o funcional $I|_{\mathcal{N}}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in (0, m_\infty)$. Nesta seção, provaremos que o nível de energia mínima m pertence ao intervalo $(0, m_\infty)$.

Observação 2.8 *Relembremos que os números m , m_a e m_∞ são os níveis de energia mínimos associados ao funcionais (1.17), (2.12) e (2.2), respectivamente.*

Lema 2.24 *Sob as condições (a_1) , (a_2) e (K) , se*

$$|K|_2^2 < \frac{m_\infty^\vartheta - m_a^\vartheta}{\sigma m_a^{1+\vartheta}}, \quad (2.49)$$

com $\vartheta = \frac{p-3}{p+1}$ e $\sigma = 2^{\frac{p+1}{p-1}} \bar{S}^{-2} S^{-4}$, então

$$0 < m < m_\infty.$$

Demonstração: Por 3) do Lema 1.3 $0 < m$. Agora, mostraremos que $m < m_\infty$. Desde que a condição (a_2) é satisfeita, pela Proposição 2.2 existe $w_a \in \mathcal{N}_a$ tal que $m_a = \mathcal{I}_a(w_a)$, o que por (2.12) implica em

$$m_a = \mathcal{I}_a(w_a) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|w_a\|^2. \quad (2.50)$$

Por 1) do Lema 1.3, existe único $t > 0$ tal que $tw_a \in \mathcal{N}$. Como $w_a \in \mathcal{N}_a$, por a) do Lema 2.9, temos $t \geq 1$. Sendo assim, por (1.19) e (2.50), segue

$$\begin{aligned} m &\leq I(tw_a) = \frac{1}{4} \|tw_a\|^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |tw_a|^{p+1} dx \\ &\leq t^{p+1} \left[\frac{1}{4} \|w_a\|^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |w_a|^{p+1} dx \right] \\ &= t^{p+1} \left[\frac{1}{4} \|w_a\|^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1} \right) \|w_a\|^2 \right] \\ &= t^{p+1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|w_a\|^2 = t^{p+1} m_a \end{aligned} \quad (2.51)$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= t^2 \|w_a\|^2 + t^4 \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{w_a} w_a^2 dx - t^{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |w_a|^{p+1} dx \\ &\leq t^4 \|w_a\|^2 + t^4 \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{w_a} w_a^2 dx - t^{p+1} \|w_a\|^2, \end{aligned}$$

o que implica

$$t \leq \left(1 + \frac{\int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{w_a} w_a^2 dx}{\|w_a\|^2}\right)^{\frac{1}{p-3}}. \quad (2.52)$$

Além disso, por (1.5), temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{w_a} w_a^2 dx \leq \bar{S}^{-2} S^{-4} |K|_2^2 \|w_a\|^4,$$

consequentemente

$$t \leq \left(1 + \bar{S}^{-2} S^{-4} |K|_2^2 \|w_a\|^2\right)^{\frac{1}{p-3}}.$$

Por (2.50), temos

$$\|w_a\|^2 = 2 \frac{(p+1)}{p-1} m_a.$$

Assim, tomando

$$\sigma = 2 \frac{(p+1)}{p-1} \bar{S}^{-2} S^{-4}$$

na última desigualdade, temos

$$t \leq \left(1 + \sigma |K|_2^2 m_a\right)^{\frac{1}{p-3}}.$$

Dessa forma, por (2.49), segue

$$\begin{aligned} m_a \left(1 + \sigma |K|_2^2 m_a\right)^{\frac{p+1}{p-3}} &< m_a \left(1 + \frac{\sigma m_a (m_\infty^{\frac{p-3}{p+1}} - m_a^{\frac{p-3}{p+1}})}{\sigma m_a m_a^{\frac{p-3}{p+1}}}\right)^{\frac{p+1}{p-3}} \\ &= m_a \left(\left(\frac{m_\infty}{m_a}\right)^{\frac{p-3}{p+1}}\right)^{\frac{p+1}{p-3}} = m_\infty, \end{aligned}$$

o que por (2.51) implica

$$m \leq I(tw_a) \leq t^{p+1} m_a \leq \left(1 + \sigma |K|_2^2 m_a\right)^{\frac{p+1}{p-3}} m_a < m_\infty,$$

e isto completa a prova deste lema. ■

De acordo com a Observação 2.7 para exibirmos uma solução fraca do tipo ground state do problema (P_1) falta-nos apenas provar que,

Lema 2.25 *Existe uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}$ tal que*

$$I(u_n) \rightarrow m \quad e \quad \|I'(u_n)\|_* \rightarrow 0.$$

Demonstração: Basta notar que, sob nossas condições, no Corolário A.3 (veja Apêndice) temos

$$\inf_V F = m. \quad \blacksquare$$

Agora iremos provar o principal resultado deste capítulo.

2.5.1 Prova do Teorema 2.1

Pelo Lema 2.24, temos

$$m \in (0, m_\infty).$$

Sendo assim, desde que, pelo Lema 2.25, existe uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}$ tal que

$$I(u_n) \rightarrow m \quad \text{e} \quad \|I'(u_n)\|_* \rightarrow 0,$$

pelo Corolário 2.3, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ solução fraca do problema (P_1) tal que

$$I(u) = m,$$

de onde concluímos que u é uma solução não-trivial do tipo ground state do problema (P_1) . Desde que nada sabemos quanto a mudança de sinal da função u obtida acima, para concluímos a prova do Teorema 2.1, provaremos que $|u| \in H^1(\mathbb{R}^3)$ é uma solução fraca do tipo ground state do problema (P_1) . Pela Observação 1.1, sabemos que

$$\phi_u(x) = \frac{1}{3\omega_3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(y)}{|x-y|} u^2(y) dy \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^3,$$

onde ω_3 é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^3$. Logo, $\phi_u = \phi_{|u|}$ q.t.p. em $\mathbb{R}^3$. Consequentemente,

$$I(u) = I(|u|) = m.$$

Além disso, $|u| \in \mathcal{N}$, pois $u \in \mathcal{N}$, já que u é solução fraca do problema (P_1) . Assim, por 5) do Lema 1.3 temos que $|u|$ é uma solução fraca do problema (P_1) e isto completa a prova deste teorema.

Capítulo 3

Existência de Solução do tipo Bound State

Neste capítulo, encontraremos uma solução do tipo *bound state* para o problema

$$-\Delta u + u + K(x)\phi_u(x)u = a(x)|u|^{p-1}u \quad \text{em } \mathbb{R}^3, \quad (P_1)$$

onde $p \in (3, 5)$ e as funções a e K satisfazem

$$(a_1) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x) = 1, \quad a \in L^\infty(\mathbb{R}^3);$$

$$(a_3) \quad a \leq 1 \text{ em } \mathbb{R}^3 \text{ e } a_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^3} a(x) > 0;$$

$$(K) \quad K \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap C(\mathbb{R}^3) \text{ e } K > 0 \text{ em } \mathbb{R}^3.$$

As funções $a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$a(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| > 0 \\ 1/2, & \text{se } |x| = 0 \end{cases}$$

e

$$K(x) = \begin{cases} 1/|x|, & \text{se } |x| > 1 \\ 1, & \text{se } |x| \leq 1, \end{cases}$$

são exemplos de funções que satisfazem as condições (a_1) , (a_3) e (K) .

Definição 3.1 (Solução do tipo Bound State) *Entendemos como solução do tipo bound state para o problema (P_1) , uma solução fraca estritamente positiva que não é do tipo ground state.*

O principal resultado deste capítulo é.

Teorema 3.1 *Sob as condições (a_1) , (a_3) e (K) , assumindo que*

$$\frac{1 + \eta|K|_2^2}{a_0} < 2^{\frac{p-3}{p+1}}, \quad (3.1)$$

com $\eta = 2^{\frac{p+1}{p-1}} S^{-4} \bar{S}^{-2} m_\infty$, então o problema (P_1) possui uma solução fraca do tipo bound state.

3.1 Não Existência de Solução do tipo Ground State

Nesta seção, sob a condição (a_3) , mostraremos que o problema (P_1) não possui solução do tipo ground state. Para isto, provaremos que:

Lema 3.1 *Suponha que a condição (a_3) seja satisfeita. Então*

$$m = m_\infty.$$

Demonstração: Inicialmente, mostraremos que

$$m_\infty \leq m. \quad (3.2)$$

Dado $u \in \mathcal{N}_\infty$, por (a_3) e (1.20), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\infty(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)u^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p+1} dx \\ &= I(u) \leq I(t_u u), \end{aligned}$$

o que implica

$$m_\infty = \inf_{u \in \mathcal{N}_\infty} \mathcal{I}_\infty(u) \leq \inf_{u \in \mathcal{N}_\infty} I(t_u u).$$

Agora provaremos

$$\inf_{u \in \mathcal{N}_\infty} I(t_u u) \leq \inf_{u \in \mathcal{N}} I(u) = m, \quad (3.3)$$

e, com isso, concluiremos (3.2). Note que, por 2) do Lema 1.3 existe um homeomorfismo $\varphi : S^1 \rightarrow \mathcal{N}$ definido por

$$\varphi(u) = t_u u,$$

onde $t_u u$ é a projeção de u sobre a variedade $\mathcal{N}$. De forma análoga, existe um homeomorfismo $\psi : S^1 \rightarrow \mathcal{N}_\infty$ definido por

$$\psi(u) = \xi_u u,$$

onde $\xi_u u$ é a projeção de u sobre a variedade $\mathcal{N}_\infty$ cuja inversa $\psi^{-1} : \mathcal{N}_\infty \rightarrow S^1$ é dada por

$$\psi^{-1}(u) = \frac{u}{\|u\|}.$$

Assim, a aplicação $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathcal{N}_\infty \rightarrow \mathcal{N}$ é sobrejetora o que implica que dado $v \in \mathcal{N}$, existe $u \in \mathcal{N}_\infty$ tal que $\varphi \circ \psi^{-1}(u) = v$. Denotando $w = \frac{u}{\|u\|}$, temos

$$\varphi \circ \psi^{-1}(u) = t_w \frac{u}{\|u\|} = \frac{t_w}{\|u\|} u = t_u u = v.$$

Dessa forma, desde que

$$\inf_{u \in \mathcal{N}_\infty} I(t_u u) \leq I(t_u u),$$

dado $v \in \mathcal{N}$, para algum $u \in \mathcal{N}_\infty$, temos

$$\inf_{u \in \mathcal{N}_\infty} I(t_u u) \leq I(t_u u) = I(v),$$

3.1 Não Existência de Solução do tipo Ground State

o que prova (3.3), de onde concluímos (3.2). Agora, provaremos que

$$m \leq m_\infty. \quad (3.4)$$

Para isto, considere $w_n(\cdot) = w(\cdot - z_n)$, onde w é a solução do tipo ground state do problema (P_∞) e $|z_n| \rightarrow \infty$. Por 1) do Lema 1.3, existe único $t_{w_n} > 0$ tal que $u_n = t_{w_n} w_n \in \mathcal{N}$. Desde que,

$$m = \inf\{I(u); \quad u \in \mathcal{N}\} \leq I(u_n),$$

para provarmos (3.4) é suficiente verificarmos que

$$I(u_n) \rightarrow m_\infty. \quad (3.5)$$

Inicialmente, provaremos que

$$w_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3), \quad (3.6)$$

onde a função $u = 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^3$. Com efeito, por mudança de variável temos $\|w_n\| = \|w\|$. Assim, a menos de subsequência, $w_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Note que pela Proposição 2.1, w possui decaimento exponencial, isto é, existem constantes $C_1, C_2 > 0$, tais que

$$|w_n(x)| = |w(x - z_n)| \leq C_1 e^{-C_2|x-z_n|} \leq C_1 e^{C_2|x|-C_2|z_n|},$$

para $|x|$ suficientemente grande. Logo,

$$\int_{B_\rho(0)} |w_n| dx \leq C_1 e^{-C_2|z_n|} \int_{B_\rho(0)} e^{C_2|x|} dx,$$

para toda bola $B_\rho(0)$ com $\rho > 0$. Sendo assim, desde que, $|z_n| \rightarrow \infty$, temos $w_n \rightarrow 0$ em $L^1(B_\rho(0))$. No entanto, como $w_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$ e $H^1(B_\rho(0)) \hookrightarrow L^1(B_\rho(0))$, compactamente, temos $w_n \rightarrow u$ em $L^1(B_\rho(0))$, o que implica que $u = 0$ q.t.p em $B_\rho(0)$. Como $B_\rho(0)$ é arbitrária, temos que $u = 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^3$, e isto prova (3.6). Dessa forma, por ii) do Lema 2.10 e pelo Lema 2.14, segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{w_n}(x) w_n^2 dx = 0 \quad (3.7)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |w_n|^{p+1} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} |w_n|^{p+1} dx.$$

Como pela Proposição 2.1 w é única a menos de translação, $w_n \in \mathcal{N}_\infty$. Assim, desde que, por mudança de variável $\|w_n\| = \|w\|$, temos $\|w_n\|^2 = \|w\|^2 = |w|_{p+1}^{p+1} = |w|_{p+1}^{p+1}$, o que implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |w_n|^{p+1} dx = \int_{\mathbb{R}^3} |w|^{p+1} dx. \quad (3.8)$$

Com isso, desde que

$$I(u_n) = \frac{t_{w_n}^2}{2} \|w_n\|^2 + \frac{t_{w_n}^4}{4} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{w_n}(x) w_n^2 dx - \frac{t_{w_n}^{p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |w_n|^{p+1} dx$$

e

$$m_\infty = \mathcal{I}_\infty(w) = \frac{1}{2} \|w\|^2 - \frac{1}{p+1} |w|_{p+1}^{p+1},$$

3.1 Não Existência de Solução do tipo Ground State

por (3.7), temos que para provarmos (3.5) é suficiente verificarmos que $t_n \rightarrow 1$. Para fazermos tal verificação, note que, desde que, $t_{w_n} w_n \in \mathcal{N}$ temos

$$\frac{1}{t_{w_n}^{p-1}} \|w_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |w_n|^{p+1} dx - \frac{1}{t_{w_n}^{p-3}} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{w_n}(x) w_n^2 dx.$$

Além disso, como $w_n \in \mathcal{N}_\infty$, por b) do Lema 2.9, temos $t_{w_n} \geq 1$, o que implica que a sequência $(t_{w_n}^{-1})$ é limitada. Sendo assim, como $\|w\|^2 = \|w_n\|^2 = |w|_{p+1}^{p+1}$, por (3.7) e (3.8), temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w\|^2 \left(\frac{1}{t_{w_n}^{p-1}} - 1 \right) = 0,$$

de onde concluímos $t_{w_n} \rightarrow 1$. Assim, segue (3.5), o que implica (3.4). Portanto, por (3.2) temos $m = m_\infty$, e isto completa a prova deste lema. ■

A seguir, provaremos o principal resultado desta seção.

Lema 3.2 *Sob a condição (a_3) , o problema (P_1) não possui solução do tipo ground state.*

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que existe $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ solução não trivial do problema (P_1) tal que

$$I(u) = m.$$

Note que $u \in \mathcal{N}$, pois $I'(u)u = 0$. Seja $\xi > 0$ tal que $\xi u \in \mathcal{N}_\infty$. Por b) do Lema 2.9, temos

$$\xi \leq 1. \quad (3.9)$$

Assim, como as funções K e $\phi_{\xi u}$ são não negativas, $p \in (3, 5)$, por (1.19) e pelo Lema 3.1 segue

$$\begin{aligned} m_\infty \leq \mathcal{I}_\infty(\xi u) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|\xi u\|^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|\xi u\|^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{\xi u}(x) (\xi u)^2 dx \\ &\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|u\|^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u(x) u^2 dx \\ &= I(u) = m = m_\infty, \end{aligned} \quad (3.10)$$

o que implica em

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{\xi u}(x) (\xi u)^2 dx = \xi^4 \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u(x) u^2 dx = 0,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u(x) u^2 dx = 0,$$

o que pela Proposição A.5 (veja Apêndice) segue

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^3; \quad K(x) \phi_u(x) u^2(x) > 0\}) = 0. \quad (3.11)$$

Note que por (3.9) $\xi \leq 1$. Agora, afirmamos que $\xi = 1$. De fato, se $\xi < 1$, por (3.10), teríamos $m_\infty < I(u) = m = m_\infty$, contradição. Dessa forma, $\xi u = u \in \mathcal{N}_\infty$, de onde por

3.2 Funções Auxiliares

(3.10), temos $\mathcal{I}_\infty(u) = m_\infty$. Assim $|u| \in \mathcal{N}_\infty$ e $\mathcal{I}_\infty(|u|) = m_\infty$ o que pelo Lema 2.8 temos que $|u|$ é solução fraca do problema (P_∞) . Com o mesmo argumento utilizado no Lema 2.4, prova-se que $|u| > 0$ em $\mathbb{R}^3$. Logo

$$\{x \in \mathbb{R}^3; \quad K(x) > 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^3; \quad K(x)\phi_u(x)u^2(x) > 0\},$$

pois por 4) do Lema 1.2 $\phi_u > 0$ em $\mathbb{R}^3$. Assim, por (3.11) temos

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^3; \quad K(x) > 0\}) = 0,$$

o que é uma contradição, pois pela condição (K) , $K > 0$ em $\mathbb{R}^3$. Portanto, não existe u solução fraca do problema (P_1) tal que $I(u) = m$, e isto completa a prova deste lema. ■

Observação 3.1 *Pelo resultado anterior, temos que para provarmos o Teorema 3.1 é suficiente exibirmos uma solução fraca do problema (P_1) estritamente positiva, já que esta solução não será do tipo ground state e, portanto, será do tipo bound state.*

3.2 Funções Auxiliares

A prova do Teorema 3.1 que é o principal resultado deste capítulo será feita com o auxílio de ferramentas do tipo minimax. Para utilizarmos tais ferramentas, será fundamental a introdução da função baricentro ao qual definiremos a seguir e a função Γ definida em (3.15).

Inicialmente, para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$, definiremos as funções $\psi_u, \hat{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi_u(x) = \frac{1}{\mu(B_1(0))} \int_{B_1(x)} |u(y)| dy \quad \text{e} \quad \hat{u}(x) = \left(\psi_u(x) - \frac{1}{2} \max_{x \in \mathbb{R}^3} \psi_u(x) \right)^+,$$

onde $\mu(B_1(0))$ é a medida de Lebesgue da bola $B_1(0)$. A função baricentro é a aplicação $\beta : H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\beta(u) = \frac{1}{|\hat{u}|_1} \int_{\mathbb{R}^3} x \hat{u}(x) dx.$$

O próximo resultado contém as principais propriedades da função baricentro.

Lema 3.3 *A função baricentro satisfaz as seguintes propriedades:*

- 1) β é contínua em $H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$;
- 2) se $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ é radialmente simétrica então $\beta(u) = 0$;
- 3) para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e todo $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$, tem-se $\beta(tu) = \beta(u)$;
- 4) dado $z \in \mathbb{R}^3$, então definindo $u_z(x) = u(x - z)$, temos $\beta(u_z) = \beta(u) + z$.

Demonstração: Veja [11]. ■

Definindo

$$b_0 = \inf \{I(u); \quad u \in \mathcal{N}; \beta(u) = 0\},$$

temos

Lema 3.4 $b_0 > m$.

Demonstração: Inicialmente afirmamos que o conjunto $\{I(u); u \in \mathcal{N}; \beta(u) = 0\} \neq \emptyset$. Com efeito, por 2) da Proposição 2.1, w que é a solução do tipo ground state do problema (P_∞) é radialmente simétrica. Como por 1) do Lema 1.3 existe único $t_w > 0$ tal que $t_w w \in \mathcal{N}$, por 2) e 3) do Lema 3.3, segue que $\beta(t_w w) = \beta(w) = 0$, e isto prova a afirmação. É imediato que $b_0 \geq m$. Agora, mostraremos que $b_0 > m$. Com efeito, suponhamos por contradição que $b_0 = m$. Desde que, o conjunto $\{I(u); u \in \mathcal{N}; \beta(u) = 0\} \neq \emptyset$, por definição de ínfimo, existe uma sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}$ tal que

$$I(u_n) \rightarrow m = b_0 \quad \text{e} \quad \beta(u_n) = 0, \quad (3.12)$$

o que pelo Lema 3.1 implica

$$I(u_n) \rightarrow m_\infty. \quad (3.13)$$

Dessa forma, pelo Corolário A.3 (veja Apêndice), existe uma sequência $(v_n) \subset \mathcal{N}$ tal que $\|I'(v_n)\|_* \rightarrow 0$, $I(v_n) \rightarrow m$ e $\|u_n - v_n\| \rightarrow 0$. Assim, (v_n) é uma sequência (PS) , de onde pelo Lema 2.12, concluímos que $I'(v_n)h \rightarrow 0$, para todo $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$ e que $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ é limitada. Com isso, pelo Lema A.9

$$I'(u_n)h \rightarrow 0,$$

para todo $h \in H^1(\mathbb{R}^3)$, o que em particular implica que

$$\|I'(u_n)\|_* \rightarrow 0, \quad (3.14)$$

o que por (3.12) temos que (u_n) é uma sequência (PS) . Note que, pela Observação 2.4, $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, onde pelo Lema 2.17, $\bar{u}$ é solução fraca do problema (P_1) . Agora, afirmamos que não existe subsequência de (u_n) que converge forte em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Com efeito, se existisse alguma subsequência denotada por (u_n) tal que $u_n \rightarrow \bar{u}$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, como $I(u_n) \rightarrow b_0 = m$, por ii) e iii) da Proposição 2.3, teríamos

$$I(u_n) \rightarrow I(\bar{u}) = m.$$

Assim, $\bar{u}$ é uma solução do tipo ground state do problema (P_1) , o que contradiz o Lema 3.2 e isto prova a afirmação. Sendo assim, por (3.13) (3.14) e pelo Corolário 2.2, temos que em ii) da Proposição 2.3, $k = 1$, $\bar{u} = 0$ e $u^1 = w$ a menos de translação. Assim,

$$u_n(x) = w(x - z_n) + o(1),$$

onde por i) da Proposição 2.3, $|z_n| \rightarrow \infty$. Por translação temos

$$u_n(x + z_n) = w(x) + o(1).$$

Dessa forma, desde que, pela Proposição 2.1 w é radialmente simétrica, por 1), 2) e 4) do Lema 3.3, e por (3.12) segue

$$\beta(u_n(x + z_n)) = \beta(u_n) - z_n = -z_n$$

e

$$\beta(u_n(x + z_n)) \rightarrow \beta(w(x)) = 0,$$

3.2 Funções Auxiliares

contradição, pois $|z_n| \rightarrow \infty$. Com está contradição, concluímos que $b_0 > m$, como queríamos. ■

Agora considere a aplicação

$$\Gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{N},$$

definida por

$$\Gamma[z](x) = t_z w(x - z), \quad (3.15)$$

onde $t_z w(\cdot - z)$ é a projeção de $w(\cdot - z)$ sobre a variedade de Nehari $\mathcal{N}$ e w é a solução do tipo ground state do problema (P_∞) . Desde que w é radialmente simétrica, por 2), 3) e 4) do Lema 3.3 temos

$$\beta(\Gamma[z](x)) = \beta(t_z w(x - z)) = \beta(w(x - z)) = \beta(w(x)) + z = z. \quad (3.16)$$

Além disso, sendo w única a menos de translação, $w(\cdot - z) \in \mathcal{N}_\infty$, o que por b) do Lema 2.9 implica

$$t_z \geq 1, \quad (3.17)$$

para todo $z \in \mathbb{R}^3$. Os próximos lemas fornecem propriedades importantes da aplicação Γ definida acima. No que se segue, por efeito de simplificação denotaremos $w_z(x) = w(x - z)$.

Lema 3.5 *A aplicação Γ é contínua.*

Demonstração: Para provarmos a continuidade da aplicação Γ é suficiente verificarmos que se

$$z_n \rightarrow z \quad \text{em } \mathbb{R}^3$$

então

$$t_{z_n} w_{z_n} \rightarrow t_z w_z \quad \text{em } H^1(\mathbb{R}^3). \quad (3.18)$$

Inicialmente, afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{z_n} = w_z \quad \text{em } H^1(\mathbb{R}^3). \quad (3.19)$$

Com efeito, pelo Lema 2.3, $w \in C^2(\mathbb{R}^3)$, de onde concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_{z_n} - w_z\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|w(\cdot - z_n) - w(\cdot - z)\| = 0,$$

o que prova a afirmação. Agora provaremos (3.18). Desde que, $t_{z_n} w_{z_n} \in \mathcal{N}$, temos

$$t_{z_n}^2 \|w_{z_n}\|^2 + t_{z_n}^4 \int_{\mathbb{R}^3} K(x) w_{z_n}(x) (w_{z_n})^2 - t_{z_n}^{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |w_{z_n}|^{p+1} = 0.$$

Assim, por (3.19) pela imersão $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^3)$ e i) do Lema 2.10 segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{z_n}^2 \|w_z\|^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} t_{z_n}^4 \int_{\mathbb{R}^3} K(x) w_z(x) (w_z)^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} t_{z_n}^{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |w_z|^{p+1} = 0.$$

Sendo assim, como $t_z > 0$ é o único número tal que $t_z w_z \in \mathcal{N}$ temos $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{z_n} = t_z$ pois $t_{z_n} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, por (3.19)

$$\begin{aligned} \|t_{z_n} w_{z_n} - t_z w_z\| &\leq \|t_{z_n} w_{z_n} - t_z w_{z_n}\| + \|t_z w_{z_n} - t_z w_z\| \\ &\leq |t_{z_n} - t_z| \|w_{z_n}\| + |t_z| \|w_{z_n} - w_z\| \end{aligned}$$

o que prova (3.18), de onde concluímos a prova deste lema. ■

Lema 3.6 $\lim_{|z| \rightarrow \infty} I(\Gamma[z]) = m_\infty$.

Demonstração: É a mesma demonstração feita para provar (3.5). ■

Lema 3.7 *Suponhamos que*

$$\frac{1 + \eta |K|_2^2}{a_0} < 2^{\frac{p-3}{p+1}}, \quad (3.20)$$

com $\eta = 2^{\frac{p+1}{p-1}} S^{-4} \bar{S}^{-2} m_\infty$ e $a_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^3} a(x) > 0$, então

$$I(\Gamma[z]) < 2m_\infty.$$

Demonstração: Desde que pela Proposição 2.1, w é uma solução do tipo ground state e única a menos de translação do problema (P_∞) temos

$$\mathcal{I}_\infty(w) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|w\|^2 = m_\infty \quad (3.21)$$

e $w_z \in \mathcal{N}_\infty$, o que implica em $\|w_z\|^2 = |w_z|_{p+1}^{p+1}$. Além disso, por mudança de variáveis $\|w_z\| = \|w\|$. Sendo assim, como $\Gamma[z] \in \mathcal{N}$ por (1.19), (3.17) e (a_3) , segue

$$\begin{aligned} I(\Gamma[z]) &= \frac{1}{4} \|\Gamma[z]\|^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |\Gamma[z]|^{p+1} dx \\ &= \frac{1}{4} t_z^2 \|w_z\|^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1} \right) t_z^{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |w_z|^{p+1} dx \\ &\leq t_z^2 \frac{1}{4} \|w_z\|^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1} \right) t_z^{p+1} |w_z|_{p+1}^{p+1} \\ &\leq t_z^{p+1} \left[\frac{1}{4} \|w_z\|^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1} \right) \|w_z\|^2 \right] \\ &= t_z^{p+1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|w\|^2 = t_z^{p+1} m_\infty. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Assim, para provarmos este lema é suficiente verificarmos que

$$t_z^{p+1} < 2, \quad (3.23)$$

para todo $z \in \mathbb{R}^3$. Agora, desde que, $t_z w_z \in \mathcal{N}$, por (3.17) temos

$$\begin{aligned} 0 &= t_z^2 \|w_z\|^2 + t_z^4 \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{w_z} w_z^2 dx - t_z^{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |w_z|^{p+1} dx \\ &\leq t_z^4 \|w_z\|^2 + t_z^4 \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{w_z} w_z^2 dx - t_z^{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x) |w_z|^{p+1} dx, \end{aligned}$$

o que implica

$$t_z \leq \left(\frac{\|w_z\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{w_z} w_z^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^3} a(x) |w_z|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-3}}. \quad (3.24)$$

Por outro lado, como $a_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^3} a(x)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(x) |w_z|^{p+1} dx \geq a_0 \int_{\mathbb{R}^3} |w_z|^{p+1} dx. \quad (3.25)$$

Por (1.5)

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{w_z} w_z^2 dx \leq \bar{S}^{-2} S^{-4} |K|_2^2 \|w_z\|^4 = \bar{S}^{-2} S^{-4} |K|_2^2 \|w\|^4.$$

Sendo assim, como por (3.21), $\|w\|^2 = 2^{\frac{(p+1)}{p-1}} m_\infty$, por (3.20), (3.24) e (3.25), temos

$$\begin{aligned} t_z &\leq \left(\frac{\|w_z\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{w_z} w_z^2 dx}{a_0 \|w_z\|^2} \right)^{\frac{1}{p-3}} \leq \left(\frac{1 + \|w_z\|^{-2} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{w_z} w_z^2 dx}{a_0} \right)^{\frac{1}{p-3}} \\ &\leq \left(\frac{1 + \bar{S}^{-2} S^{-4} |K|_2^2 \|w_z\|^2}{a_0} \right)^{\frac{1}{p-3}} \\ &= \left(\frac{1 + \bar{S}^{-2} S^{-4} 2^{\frac{(p+1)}{p-1}} m_\infty |K|_2^2}{a_0} \right)^{\frac{1}{p-3}} \\ &< (2^{\frac{p-3}{p+1}})^{\frac{1}{p-3}} = 2^{\frac{1}{p+1}}, \end{aligned}$$

o que prova (3.23). Portanto, por (3.22), segue o resultado desejado. $\blacksquare$

Lema 3.8 *Existe $\rho > 0$ tal que*

$$\max_{|z|=\rho} I(\Gamma[z]) < b_0.$$

Demonstração: Pelos Lemas 3.4 e 3.6, temos

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} I(\Gamma[z]) = m_\infty < b_0.$$

Assim, dado $\epsilon = b_0 - m_\infty$, existe $\bar{\rho} > 0$ tal que para todo $|z| > \bar{\rho}$ implica $|I(\Gamma[z]) - m_\infty| < \epsilon$. Com isso, fixado $\rho > \bar{\rho}$ temos

$$I(\Gamma[z]) < b_0,$$

para todo $|z| = \rho$. Agora, afirmamos que o conjunto $\{I(\Gamma[z]); |z| = \rho\}$ possui um elemento máximo. Com efeito, desde que, o conjunto $\{z \in \mathbb{R}^3; \|z\| = \rho\}$ é compacto, para provarmos esta afirmação é suficiente verificarmos que o funcional $I \circ \Gamma$ é contínuo e depois utilizarmos o teorema de Weierstrass. Por ii) do Lema 2.10 e pela imersão $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^3)$, se $u_n \rightarrow u$, em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então $I(u_n) \rightarrow I(u)$, o que prova que o funcional I é contínuo. Além disso, o operador Γ é contínuo pelo Lema 3.5. Assim pelo Teorema de Weierstrass, segue a afirmação, de onde concluímos o resultado desejado. $\blacksquare$

3.3 Ferramentas do Tipo Minimax

O principal objetivo desta seção é encontrarmos uma solução fraca do tipo bound state para o problema (P_1) . Para isto, utilizaremos o Teorema de Linking (Proposição A.13 veja Apêndice). Para utilizarmos tal teorema, será fundamental provarmos alguns resultados prévios.

Corolário 3.1 *Com $\rho > 0$ obtido no lema anterior definindo*

$$Q = \Gamma(\bar{B}_\rho(0)) \quad e \quad S = \{u \in \mathcal{N}; \beta(u) = 0\},$$

então

$$\max_{\partial Q} I < \inf_S I.$$

Demonstração: Desde que $b_0 = \inf \left\{ I(u), u \in \mathcal{N}, \beta(u) = 0 \right\}$ a demonstração segue de forma imediata pelo lema anterior. ■

Lema 3.9 *Existe um link entre S e ∂Q , isto é,*

a) $\partial Q \cap S = \emptyset$;

b) $h(Q) \cap S \neq \emptyset, \forall h \in \gamma = \{h \in C(Q, \mathcal{N}); h|_{\partial Q} = id\}$.

Demonstração: Provaremos inicialmente a). Para isso, dado $u \in \partial Q$, mostraremos que $u \notin S$. Com efeito, desde que, $u \in \partial Q$, então $u = \Gamma[z]$, onde $\|z\| = \rho$. Assim, por (3.16) temos $\beta(u) = \beta(\Gamma[z]) = z \neq 0$, e isto implica que $u \notin S$, como queríamos. Agora, provaremos b). Para isto, para cada $h \in \gamma$ defina a função $T : \overline{B}_\rho(0) \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$T(z) = (\beta \circ h \circ \Gamma)(z)$$

que é contínua. Com efeito, conforme consta no Lema 3.8, Γ é contínua, h é contínua por hipótese, e pelo Lema 3.3, β é contínua. Além disso,

$$T(z) = z \tag{3.26}$$

para todo $z \in \partial \overline{B}_\rho(0)$. De fato, desde que, $z \in \partial \overline{B}_\rho(0)$, então $\Gamma(z) \in \partial Q$ o que implica em $h(\Gamma(z)) = \Gamma(z)$ pois $h|_{\partial Q} = id$. Sendo assim, por (3.16)

$$T(z) = (\beta \circ h \circ \Gamma)(z) = z,$$

como queríamos. Agora mostraremos que existe $z \in \overline{B}_\rho(0)$ tal que

$$T(z) = 0. \tag{3.27}$$

Com efeito, suponha por contradição que para todo $z \in \overline{B}_\rho(0)$ tenhamos $T(z) \neq 0$. Sendo assim, defina a função $\varphi : \overline{B}_\rho(0) \rightarrow \partial \overline{B}_\rho(0)$ por

$$\varphi(z) = \frac{\rho T(z)}{\|T(z)\|}$$

que é contínua pois a função T é contínua. Além disso, por (3.26), temos $\varphi(z) = z$, para todo $z \in \partial \overline{B}_\rho(0)$, e isto implica que a função é φ uma retração de $\overline{B}_\rho(0)$ em $\partial \overline{B}_\rho(0)$, que pela Proposição A.24 (veja Apêndice) é uma contradição, o que prova (3.27). Portanto,

$$T(z) = (\beta \circ h \circ \Gamma)(z) = 0,$$

para algum $z \in \overline{B}_\rho(0)$ e isto implica que $h(\Gamma(z)) \in S$, ou seja

$$h(Q) \cap S \neq \emptyset,$$

para todo $h \in \gamma$, e isto completa a prova do item b). ■

3.3.1 Outros níveis para a condição $(PS)_d$

Observação 3.2 *Para provarmos o Teorema 3.1 a principal ferramenta é o Teorema de Linking. Para utilizarmos tal teorema precisamos definir o seguinte nível minimax*

$$c := \inf_{h \in \gamma} \max_{u \in Q} I(h(u)). \quad (3.28)$$

No Capítulo 2, mostramos que o funcional $I|_{\mathcal{N}}$ satisfaz a condição $(PS)_d$ para todo $d \in (0, m_\infty)$. No entanto, este nível minimax c não pertence ao intervalo $(0, m_\infty)$. Para contornarmos esta dificuldade, afim de obtermos um importante resultado de compacidade, provaremos que o funcional $I|_{\mathcal{N}}$ satisfaz a condição $(PS)_d$ para todo d pertencente a um novo intervalo onde o nível minimax c pertence a este novo intervalo.

Observação 3.3 *Relembremos que o funcional $I|_{\mathcal{N}}$ satisfaz a condição $(PS)_d$ se toda sequência $(u_n) \subset \mathcal{N}$ tal que*

$$I(u_n) \rightarrow d \quad \text{e} \quad \|I'(u_n)\|_* \rightarrow 0,$$

possui uma subsequência convergente.

Lema 3.10 *O funcional $I|_{\mathcal{N}}$ satisfaz a condição $(PS)_d$ para todo $d \in (m_\infty, 2m_\infty)$.*

Demonstração: Seja $(u_n) \subset \mathcal{N}$ tal que

$$I(u_n) \rightarrow d \quad \text{e} \quad \|I'(u_n)\|_* \rightarrow 0,$$

mostraremos que a menos de subsequência

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3)$$

para alguma função $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Note que por ii) da Proposição 2.3

$$u_n - \sum_{j=1}^k u^j(\cdot - y_n^j) \rightarrow u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3) \quad (3.29)$$

onde u é solução fraca do problema (P_1) . Assim, para provarmos este lema, é suficiente verificarmos que $k = 0$ no limite acima. Mostraremos inicialmente que $k \leq 1$. Por iii) da Proposição 2.3, temos

$$I(u_n) \rightarrow I(u) + \sum_{j=1}^k \mathcal{I}_\infty(u^j) = d, \quad (3.30)$$

onde u^j é solução fraca não trivial do problema (P_∞) para $1 \leq j \leq k$. Como m_∞ é o nível de energia mínima associado ao funcional $\mathcal{I}_\infty$, segue que

$$\mathcal{I}_\infty(u^j) \geq m_\infty. \quad (3.31)$$

Suponhamos por contradição que $k \geq 2$, então

$$\begin{aligned} 2m_\infty > d &\geq I(u) + \frac{(k+1)k}{2} m_\infty \\ &\geq I(u) + 3m_\infty. \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.3 Ferramentas do Tipo Minimax

Sendo u solução fraca do problema (P_1) , conforme demonstrado no Corolário 2.2 temos $0 \leq I(u)$ o que implica em $2m_\infty > 3m_\infty$, contradição já que pela Proposição 3.1 $m = m_\infty$, onde por 3) do Lema 1.3 $m > 0$, e isto prova que $k \leq 1$. Agora mostraremos que $k = 0$. Com efeito, se $k = 1$, teríamos duas possibilidades:

1ª **possibilidade:** se $u \neq 0$, como u é solução fraca do problema (P_1) temos $u \in \mathcal{N}$, o que pelo Lema 3.1 implica $I(u) \geq m = m_\infty$. Sendo assim, por (3.30) e (3.31), segue

$$2m_\infty > d = \lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) = I(u) + \mathcal{I}_\infty(u^1) \geq 2m_\infty,$$

contradição.

2ª **possibilidade:** se $u = 0$, então $I(u) = 0$. Assim, por (3.30) segue

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} I(u_n) = \mathcal{I}_\infty(u^1) \in (m_\infty, 2m_\infty).$$

Consequentemente, a função u^1 não muda de sinal pois do contrário pelo Lema 2.7 teríamos $\mathcal{I}_\infty(u^1) \geq 2m_\infty$ que é uma contradição. Assim, podemos supor que u^1 é positiva. Desde que, pela Proposição 2.1 w que é a solução ground state positiva do problema (P_∞) é única a menos de translação, temos $u^1 = w$ a menos de translação, o que implica em $\mathcal{I}_\infty(u^1) = m_\infty$, contradição. Se u^1 é negativa, repete-se o mesmo processo com $|u^1|$ que é ainda solução fraca de (P_∞) . Portanto, $k = 0$ em (3.29) e isto prova que

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3),$$

como queríamos. ■

Lema 3.11 *O funcional $I|_{\mathcal{N}}$ satisfaz a condição $(PS)_c$, para o nível minimax c definido em (3.28).*

Demonstração: Desde que, pelo Lema 3.10 o funcional $I|_{\mathcal{N}}$ satisfaz a condição $(PS)_d$ para todo $d \in (m_\infty, 2m_\infty)$, para provarmos este lema é suficiente verificarmos que $c \in (m_\infty, 2m_\infty)$. Mostraremos inicialmente que

$$c < 2m_\infty. \tag{3.33}$$

Desde que, a função identidade pertence ao conjunto γ , temos

$$c \leq \max_{u \in Q} I(u) = \max_{z \in \overline{B}_\rho(0)} I(\Gamma(z)).$$

Assim, para verificarmos (3.33) é suficiente provamos que

$$\max_{z \in \overline{B}_\rho(0)} I(\Gamma(z)) < 2m_\infty. \tag{3.34}$$

Note que, pelo Lema 3.7, $I(\Gamma(z)) < 2m_\infty$, para todo $z \in \mathbb{R}^3$. Sendo assim, pela compacidade do conjunto $\overline{B}_\rho(0)$ e pela continuidade do funcional $I \circ \Gamma$ provada no Lema 3.8, segue (3.34). Dessa forma, está provado (3.33), como queríamos. Agora mostraremos que

$$m_\infty < c. \tag{3.35}$$

3.3 Ferramentas do Tipo Minimax

Note que, pelo Lema 3.4 e pelo Lema 3.1

$$m = m_\infty < b_0. \quad (3.36)$$

Assim para provarmos (3.35) é suficiente verificarmos que

$$b_0 \leq c. \quad (3.37)$$

Desde que $b_0 = \inf \left\{ I(u); u \in \mathcal{N}; \beta(u) = 0 \right\}$, temos

$$b_0 \leq I(u),$$

para todo $u \in \mathcal{N}$ com $\beta(u) = 0$. Note que por b) do Lema 3.9, para todo $h \in \gamma$ existe $u \in Q$ tal que $h(u) \in S$, isto é, $\beta(h(u)) = 0$. Assim,

$$b_0 \leq I(h(u)),$$

para todo $h(u) \in \mathcal{N}$ com $\beta(h(u)) = 0$. Com isso

$$b_0 \leq \max_{u \in Q} I(h(u)),$$

de onde provamos (3.37). Dessa forma por (3.36) concluimos (3.35), como queríamos. Assim por (3.33) temos

$$m_\infty < c < 2m_\infty,$$

o que pelo Lema 3.10, concluimos a prova deste lema. ■

Pelo lema acima temos que o funcional $I|_{\mathcal{N}}$ satisfaz a condição $(PS)_c$, para o nível minimax c definido em (3.28). Agora, mostraremos que o funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$.

Lema 3.12 *Se $I(u_n) \rightarrow c$ e $I'(u_n) \rightarrow 0$ em H^{-1} , então a menos de subsequência*

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3).$$

Demonstração: Note que,

$$\|I'(u_n)\|_* = \sup_{\substack{h \in \ker G'(u_n) \\ \|h\|=1}} I'(u_n)h \leq \sup_{h \in H^1(\mathbb{R}^3)} |I'(u_n)h| = \|I'(u_n)\|_{H^{-1}}.$$

Desde que pelo Lema 2.12 para algum $\lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\|I'(u_n)\|_* = \|I'(u_n) - \lambda_n G'(u_n)\|_{H^{-1}} \geq 0,$$

sendo $I'(u_n) \rightarrow 0$ em H^{-1} , temos $\|I'(u_n)\|_* \rightarrow 0$. Como $I(u_n) \rightarrow c$, pelo Lema 3.11 temos

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^3),$$

como queríamos. ■

Agora, temos todas as condições necessárias para usarmos o Teorema de Linking (Proposição A.13, veja Apêndice). Com este teorema, estabeleceremos o seguinte resultado

Corolário 3.2 *O problema (P_1) possui uma solução fraca não trivial.*

Demonstração: Pela continuidade da função baricentro β , concluímos que S é um subconjunto fechado de $H^1(\mathbb{R}^3)$. Agora, note que, pelo Lema 3.9, existe um link entre S e ∂Q . Além disso, pelo Corolário 3.1, $\max_{\partial Q} I < \inf_S I$. Sendo assim, desde que, pelo Lema 3.12 o funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$ para o nível c definido em (3.28), pelo Teorema de Linking (Proposição A.13 veja Apêndice), c é valor crítico de I , isto é, para algum $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, tem-se $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$, de onde concluímos que u é solução fraca do problema (P_1) . Note que, $u \neq 0$, pois pelo Lema 3.11, $0 < m = m_\infty < b_0 \leq c$ e isto completa a prova deste corolário. ■

Corolário 3.3 *O problema (P_1) possui solução fraca estritamente positiva.*

Demonstração: Com uma demonstração análoga feita no corolário anterior prova-se que o problema auxiliar

$$-\Delta u + u + K(x)\phi_u(x)u = a(x)(u^+)^p \quad \text{em } \mathbb{R}^3,$$

possui uma solução fraca não trivial. Inicialmente, note que esta solução é não negativa. Com efeito

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi) dx + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)u\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^3} a(x)(u^+)^p \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, o que em particular temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u \nabla u^- + uu^-) dx + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)uu^- dx = \int_{\mathbb{R}^3} a(x)(u^+)^p u^- dx,$$

assim,

$$-\|u^-\| - \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)(u^-)^2 dx = 0.$$

Desde que, pela condição (K) e 4) do Lema 1.2 K e ϕ_u são funções não negativas, segue que $u^- \equiv 0$, como queríamos. Agora, visando utilizar um resultado de regularidade mostraremos que

$$u \in C^2(\mathbb{R}^3). \quad (3.38)$$

Para isto, note que

$$-\Delta u = \psi,$$

onde $\psi(x) := a(x)|u|^{p-1}u - u - K(x)\phi_u(x)u$. Assim,

$$|\psi(x)| \leq f(x)(1 + |u|),$$

com $f(x) := |a(x)|u|^{p-1} - 1 - K(x)\phi_u(x)|$. Afirmamos que $f \in L^{\frac{3}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Com efeito, desde que, $K \in L^2(\mathbb{R}^3)$ então $K^{\frac{3}{2}} \in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3)$. Como $\phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ temos $\phi_u^{\frac{3}{2}} \in L^4(\mathbb{R}^3)$, o que pela desigualdade de Hölder segue $K\phi_u \in L^{\frac{3}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Assim, como pela condição (a_1) $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ sendo $3 < s := \frac{3}{2}(p-1) < 6$ ($p \in (3, 5)$) e $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^3)$ segue a afirmação. Pelo Teorema de Brezis-Kato (Proposição A.22 do Apêndice), $u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$ para todo $q < +\infty$. Assim, desde que, pela condição (K) e por 4) do Lema 1.2 $\phi_u, K \in C(\mathbb{R}^3)$, temos que $\psi \in L^3_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Disto segue pela Proposição A.20 que

$u \in W_{loc}^{2,3}(\mathbb{R}^3)$, o que pela Proposição A.17 implica em $u \in C_{loc}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^3)$ para $\gamma < 1$. Assim, $\psi \in C_{loc}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^3)$. Seja N_ψ o potencial Newtoniano da função ψ . Pela Proposição A.19 (veja Apêndice) $N_\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ e

$$-\Delta N_\psi = \psi \quad \text{em } \mathbb{R}^3.$$

Assim, $u = N_\psi$ q.t.p em $\mathbb{R}^3$, o que prova (3.38). Agora, mostraremos que $u > 0$ em $\mathbb{R}^3$ e, com isso, finalizar a prova deste corolário. Suponhamos por contradição que $u(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Seja $B_\rho(x_0)$ uma bola arbitrária. Assim, desde que

$$-\Delta u + uc = a(x)(u^+)^p \geq 0 \quad \text{em } B_\rho(x_0),$$

onde $c = 1 + K(x)\phi_u \geq 0$, pelo Princípio do Máximo Forte (veja Proposição A.21 no Apêndice) segue $u = 0$ em $B_\rho(x_0)$. Como $B_\rho(x_0)$ é arbitrária, segue que $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^3$ o que pelo corolário anterior é uma contradição e isto completa a prova deste resultado. ■

A seguir iremos provar o principal resultado deste capítulo.

3.3.2 Prova do Teorema 3.1

Pelo Corolário 3.3 o problema (P_1) possui uma solução fraca estritamente positiva. Pelo Lema 3.2 esta solução não é do tipo ground state e, portanto, é do tipo bound state, e isto prova o resultado desejado.

Apêndice A

Resultados Utilizados

Neste apêndice, enunciaremos alguns resultados que utilizamos no decorrer deste trabalho. Alguns serão demonstrados e, para os demais, iremos citar onde a prova pode ser encontrada.

Resultados Técnicos

Proposição A.1 (Lema de Lions) *Sejam $r > 0$ e $2 \leq q < 6$. Se $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ é uma sequência limitada tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{y \in \mathbb{R}^3} \int_{B_r(y)} |u_n|^q \right) = 0,$$

então

$$u_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad L^p(\mathbb{R}^3)$$

para cada $2 < p < 6$.

Demonstração: Veja Lema 1.21 em [21]. ■

Proposição A.2 (Lema de Brezis-Lieb) *Seja $(u_n) \subset L^p(\mathbb{R}^3)$, $1 \leq p < \infty$, tal que*

i) (u_n) é limitada em $L^p(\mathbb{R}^3)$ e

ii) $u_n \rightarrow u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^3$.

Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|u_n|_p^p - |u_n - u|_p^p) = |u|_p^p.$$

Demonstração: Veja Lema 1.32 em [21]. ■

Corolário A.1 *Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$. Se $p \in [2, 6)$ então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|u_n|_p^p - |u_n - u|_p^p) = |u|_p^p.$$

Demonstração: Desde que, $H^1(B_\rho(0)) \hookrightarrow L^p(B_\rho(0))$, compactamente, para todo $\rho > 0$ temos $u_n \rightarrow u$ em $L^p(B_\rho(0))$. Assim, a menos de subsequência $u_n(x) \rightarrow u(x)$ q.t.p em $B_\rho(0)$. Note que, $\{x \in \mathbb{R}^3; u_n(x) \not\rightarrow u(x)\} = \cup_{\rho>0} \{x \in B_\rho(0); u_n(x) \not\rightarrow u(x)\}$, então

$$u_n \rightarrow u \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^3.$$

Além disso, (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$. Dessa forma, pelo Lema de Brezis-Lieb temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|u_n|_p^p - |u_n - u|_p^p) = |u|_p^p,$$

como queríamos. ■

Resultados de Medida e Integração

O próximo resultado é conhecido como Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Proposição A.3 *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ tal que*

- i) $f_n \rightarrow f$ q.t.p. em Ω ;
- ii) *existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$|f_n| \leq g, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Então, $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n - f|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

Demonstração: Veja Teorema 4.2 em [10]. ■

Proposição A.4 *Seja (u_n) uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, tal que $u_n \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$. Então, a menos de subsequência,*

- i) $u_n \rightarrow u$ q.t.p. em Ω e
- ii) $|u_n| \leq h$ q.t.p. em Ω , para alguma função h em $L^p(\Omega)$.

Demonstração: Veja Teorema 4.9 em [10]. ■

Proposição A.5 *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável à Lebesgue não negativa. Então $f = 0$ q.t.p. em Ω se, e somente se,*

$$\int_{\Omega} f d\mu = 0.$$

Demonstração: Veja Corolário 4.10 em [3]. ■

Proposição A.6 *Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável à Lebesgue, não negativa tal que $\int_{\Omega} f d\mu < \infty$. Então, $\int_{\Omega} f d\mu$ é absolutamente contínua com relação a μ , isto é, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mu(\Omega) < \delta$ implica $\int_{\Omega} f d\mu < \epsilon$.*

Demonstração: Veja Corolário 4.1.2 em [15]. ■

Proposição A.7 (Desigualdade Generalizada de Hölder) *Suponha que as funções $f_1, f_2, \dots, f_k : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são tais que*

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega) \quad i = 1, 2, \dots, k \quad \text{com} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Então, o produto $f = f_1 f_2 \dots f_k \in L^p(\Omega)$ e

$$|f|_p \leq |f_1|_{p_1} |f_2|_{p_2} \dots |f_k|_{p_k}.$$

Demonstração: Veja Teorema 4.6 em [10]. ■

Resultados de Análise Funcional

O resultado a seguir é conhecido como Teorema da Representação de Riesz.

Proposição A.8 *Seja E um espaço de Hilbert. Dado $f \in E'$, então existe um único $z = z(f) \in E$ tal que*

$$f(x) = \langle x, z \rangle,$$

todo $x \in E$. Além disso, $\|z\|_E = \|f\|_{E'}$.

Demonstração: Veja Teorema 5.5 em [10]. ■

Proposição A.9 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sequência limitada em E . Então, (x_n) possui uma subsequência que converge na topologia fraca de E .*

Demonstração: Veja Teorema 3.18 em [10]. ■

Uma Versão do Princípio Variacional de Ekeland

Nesta seção, através do Lema de Deformação, provaremos uma versão do Princípio Variacional de Ekeland. Este resultado foi fundamental para a obtenção de pontos críticos do funcional I associado ao problema (P_1) . Inicialmente, precisamos introduzir algumas definições e notações básicas.

Definição A.1 *Sejam X um espaço de Banach, $\psi \in C^2(X, \mathbb{R})$ e $V = \{v \in X; \psi(v) = 1\}$ tal que, para todo $v \in V$, tem-se $\psi'(v) \neq 0$. Então, temos:*

i) *O espaço tangente a V no ponto v é definido por*

$$T_v V = \left\{ y \in X; \langle \psi'(v), y \rangle = 0 \right\}.$$

ii) *Sejam $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $v \in V$. A norma da derivada da restrição de φ a V em v é dada por*

$$\|\varphi'(v)\|_* = \sup_{\substack{y \in T_v V \\ \|y\|=1}} \langle \varphi'(v), y \rangle.$$

iii) O ponto v é um ponto crítico de φ restrito a V se

$$\|\varphi'(v)\|_* = 0.$$

iv) $\varphi^c = \{v \in V; \varphi(v) \leq c\}$, com $c \in \mathbb{R}$.

Lema A.1 (Lema de Deformação) *Sejam $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $S \subset V$, $c \in \mathbb{R}$, $\epsilon, \delta > 0$ tais que*

$$\forall u \in \varphi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta} \quad \text{tem-se} \quad \|\varphi'(u)\|_* \geq \frac{8\epsilon}{\delta},$$

onde

$$S_{2\delta} = \left\{ u \in X; \text{dist}(u, S) \leq 2\delta \right\}.$$

Então, existe $\eta \in C([0, 1] \times V, V)$ tal que

i) $\eta(t, u) = u$ se $t = 0$ ou $u \notin \varphi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$;

ii) $\eta(1, \varphi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \varphi^{c-\epsilon}$;

iii) $\varphi(\eta(., u))$ é não crescente $\forall u \in V$.

Demonstração: Veja Lema 5.15 em [21]. ■

Como consequência imediata do Lema de Deformação, temos o seguinte resultado que é uma versão do Princípio Variacional de Ekeland.

Proposição A.10 (Princípio Variacional de Ekeland) *Sejam X um espaço de Banach e $G \in C^2(X, \mathbb{R})$ tal que para todo $v \in V = \{v \in X; G(v) = 1\}$, tem-se $G'(v) \neq 0$. Sejam $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ limitado inferiormente em V , $v \in V$ e $\epsilon, \delta > 0$ tais que*

$$F(v) \leq \inf_V F + \epsilon.$$

Então, existe $u_\epsilon \in V$ tal que

i) $F(u_\epsilon) \leq \inf_V F + 2\epsilon$;

ii) $\|u_\epsilon - v\| \leq 2\delta$;

iii) $\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|F'(u_\epsilon) - \lambda G'(u_\epsilon)\| \leq 8\epsilon/\delta$.

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que para todo $u \in V$ tal que

$$F(u) \leq \inf_V F + 2\epsilon, \quad \|u - v\| \leq 2\delta,$$

tenhamos

$$\|F'(u)\|_* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|F'(u) - \lambda G'(u)\| > \frac{8\epsilon}{\delta},$$

isto é,

$$\forall u \in F^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}, \quad \text{temos} \quad \|F'(u)\|_* > \frac{8\epsilon}{\delta},$$

onde $c = \inf_V F$ e $S = \{v\}$. Pelo Lema A.1 existe $\eta : [0, 1] \times V \rightarrow V$ contínua tal que

$$\eta(1, F^{c+\epsilon} \cap S) \subset F^{c-\epsilon}.$$

Note que, $F(v) \leq c + \epsilon$, isto é, $v \in F^{c+\epsilon}$. Assim,

$$F^{c+\epsilon} \cap S = \{v\},$$

o que implica $\eta(1, v) \in F^{c-\epsilon}$, de onde obtemos $F(\eta(1, v)) \leq c - \epsilon < c$. Sendo assim, desde que, $\eta(1, v) \in V$ e $c = \inf_V F$, obtemos

$$c = \inf_V F \leq F(\eta(1, v)) \leq c - \epsilon,$$

o que é uma contradição, e isto prova o resultado desejado. ■

Proposição A.11 *Seja E um espaço de Hilbert. Dados $f, g \in E'$, então*

$$\sup_{\substack{y \in \ker g \\ \|y\|=1}} \langle f, y \rangle = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|f - \lambda g\|.$$

Demonstração: Com efeito, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{y \in \ker g \\ \|y\|=1}} \langle f, y \rangle &= \sup_{\substack{y \in \ker g \\ \|y\|=1}} \langle f - \lambda g, y \rangle \\ &\leq \sup_{\|u\|=1} \langle f - \lambda g, u \rangle = \|f - \lambda g\|, \end{aligned}$$

isto é, $\sup_{\substack{y \in \ker g \\ \|y\|=1}} \langle f, y \rangle$ é uma cota inferior do conjunto

$$\left\{ \|f - \lambda g\|; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Note que, pelo Teorema de Hahn Banach, existe $\widehat{f} : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = \widehat{f}$ em $\ker g$ e

$$\|\widehat{f}\| = \sup_{\substack{y \in \ker g \\ \|y\|=1}} \langle f, y \rangle.$$

Desde que $f = \widehat{f}$ em $\ker g$, temos $\ker g \subset \ker(f - \widehat{f})$. Assim, existe λ_0 em $\mathbb{R}$ tal que $\widehat{f} = f - \lambda_0 g$, o que implica que

$$\sup_{\substack{y \in \ker g \\ \|y\|=1}} \langle f, y \rangle = \|\widehat{f}\| = \|f - \lambda_0 g\|,$$

de onde concluímos que $\|f - \lambda_0 g\|$ é o mínimo do conjunto $\left\{ \|f - \lambda g\|; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. Portanto,

$$\sup_{\substack{y \in \ker g \\ \|y\|=1}} \langle f, y \rangle = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|f - \lambda g\|,$$

como queríamos. ■

Proposição A.12 *Sejam $\psi, \varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $u \in V = \{v \in X; \psi(v) = 1\}$. Então,*

$$\|\varphi'(u)\|_* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\varphi'(u) - \lambda\psi'(u)\|.$$

Demonstração: Com efeito,

$$\begin{aligned} \|\varphi'(u)\|_* &= \sup_{\substack{y \in T_u V \\ \|y\|=1}} \langle \varphi'(u), y \rangle \\ &= \sup_{\substack{y \in \ker \psi'(u) \\ \|y\|=1}} \langle \varphi'(u), y \rangle \\ &= \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\varphi'(u) - \lambda\psi'(u)\|. \end{aligned}$$

■

Pelas condições da proposição acima, temos

Corolário A.2 *u é ponto crítico de $\varphi|_V$ se, e somente se, existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\varphi'(u) = \lambda_0\psi'(u).$$

Demonstração: Se u é ponto crítico de $\varphi|_V$, por iii) da Definição A.1, $\|\varphi'(u)\|_* = 0$. Assim, pela Proposição A.12

$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\varphi'(u) - \lambda\psi'(u)\| = 0,$$

consequentemente

$$\varphi'(u) = \lambda_0\psi'(u),$$

para algum $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, se $\varphi'(u) = \lambda_0\psi'(u)$, para algum $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, então $\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|\varphi'(u) - \lambda\psi'(u)\| = 0$, de onde obtemos pela Proposição A.12

$$\|\varphi'(u)\|_* = 0,$$

isto é, u é ponto crítico de $\varphi|_V$, o que prova o resultado desejado. ■

Sob as hipóteses da Proposição A.10, como consequência da Proposição A.12, temos:

Corolário A.3 *Seja $(v_n) \subset V$ uma sequência tal que*

$$F(v_n) \rightarrow \inf_V F.$$

Então, existe uma sequência $(u_n) \subset V$ tal que

a) $F(u_n) \rightarrow \inf_V F$;

b) $\|u_n - v_n\| \rightarrow 0$;

c) $\|F'(u_n)\|_* \rightarrow 0$.

Demonstração: Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $v_n \in V$ tal que

$$\inf_V F \leq F(v_n) \leq \inf_V F + 1/n^2.$$

Assim, pela Proposição A.10 existe $u_n \in V$ tal que

a) $\inf_V F \leq F(u_n) < \inf_V F + 2/n^2$;

b) $\|u_n - v_n\| \leq 2/n$;

c) $\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|F'(u_n) - \lambda G'(u_n)\| = \|F'(u_n)\|_* \leq 8n/n^2$,

e isto prova o resultado desejado. ■

Teorema de Linking

Enunciaremos, agora, um resultado que utilizamos para encontrar pontos críticos do funcional I associado ao problema (P_1) .

Começaremos introduzindo as seguinte definições:

Definição A.2 (Sequência de Palais-Smale) *Sejam X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que o funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$, se toda sequência $(u_n) \subset X$ tal que*

$$I(u_n) \rightarrow c \quad e \quad I'(u_n) \rightarrow 0,$$

possui uma subsequência convergente.

Observação A.1 *Relembramos que $I^c = \{u \in X; I(u) \leq c\}$.*

Lema A.2 *Sejam X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Suponha que $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$ e $\epsilon, \delta > 0$ são tais que*

$$\|I'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta}$$

para todo $u \in I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$, onde $S_\delta = \{u \in X; \text{dist}(u, S) \leq \delta\}$. Então, existe $\eta \in ([0, 1] \times X, X)$ satisfazendo

- i) $\eta(0, u) = u$, para todo $u \in X$;
- ii) $\eta(t, u) = u$, se $u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$ para todo $t \in [0, 1]$;
- iii) $\eta(1, I^{c+\epsilon} \cap S) \subset I^{c-\epsilon} \cap S_\delta$;
- iv) $\eta(t, \cdot)$ é um homeomorfismo para todo $t \in [0, 1]$.

Demonstração: Veja Lema 2.3 em [21]. ■

Lema A.3 *Suponha que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfas a condição $(PS)_c$ para algum $c \in \mathbb{R}$. Se c não é valor crítico do funcional I , então para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\eta \in ([0, 1] \times X, X)$ tal que para todo $u \in X$ e $t \in [0, 1]$, tem-se:*

- i) $\eta(0, u) = u$;
- ii) $\eta(t, u) = u$, se $u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$;
- iii) $\eta(1, I^{c+\epsilon} \cap S) \subset I^{c-\epsilon}$;
- iv) $\eta(t, \cdot)$ é um homeomorfismo.

Demonstração: Inicialmente, mostraremos que existem α, β tais que

$$\|I'(u)\| \geq \beta$$

para todo $u \in I^{-1}([c - 2\alpha, c + 2\alpha])$. Suponhamos, por contradição que exista uma sequência $(u_n) \subset X$ satisfazendo

$$\|I'(u_n)\| < \frac{1}{n} \quad , \quad c - \frac{2}{n} \leq I(u_n) \leq c + \frac{2}{n}.$$

Assim,

$$I(u_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad I'(u_n) \rightarrow 0.$$

Desde que o funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$ a menos de subsequência temos $u_n \rightarrow u$ em X . Disto segue que

$$I'(u_n) \rightarrow I'(u) \quad \text{e} \quad I(u_n) \rightarrow I(u),$$

o que pela unicidade do limite temos que c é um valor crítico do funcional I , o que é uma contradição. Portanto, tomando $S = X$, $\epsilon \in (0, \alpha]$ e $\delta = \frac{4\epsilon}{\beta}$ no Lema A.2 temos o resultado desejado. ■

Definição A.3 *Sejam X um espaço de Banach, $S \subset X$ um subconjunto fechado e $Q \subset X$. Dizemos que existe um link entre S e ∂Q se*

- i) $S \cap \partial Q = \emptyset$;
- ii) *para toda função $h \in \gamma = \{h \in C(X, X); h|_{\partial Q} = id\}$ existe $u \in S$ tal que $h(u) \in Q$.*

Proposição A.13 (Teorema de Linking) *Sejam $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional que satisfaz a condição $(PS)_c$ para o nível minimax $c \in \mathbb{R}$ definido em (A.1), $S \subset X$ um subconjunto fechado e $Q \subset X$. Supondo que*

- 1) *existe um link entre S e ∂Q ;*
- 2) $b := \inf_{u \in S} I(u) > a := \sup_{u \in \partial Q} I(u)$,

considerando

$$\gamma := \{h \in C(X, X); h|_{\partial Q} = id\},$$

temos que o nível minimax

$$c := \inf_{h \in \gamma} \max_{u \in Q} I(h(u)) \tag{A.1}$$

é um valor crítico do funcional I , isto é, para algum $u \in X$, $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$.

Demonstração: Desde que existe um link entre ∂Q e S , dada $h \in \gamma$, existe $u_0 \in Q$ tal que $h(u_0) \in S$. Assim,

$$\max_{u \in Q} I(h(u)) \geq I(h(u_0)) \geq \inf_{u \in S} I(u) = b,$$

para todo $h \in \gamma$, o que implica que

$$c \geq b > a. \tag{A.2}$$

Agora, suponhamos por contradição que o nível minimax c dado em (A.1) não é valor crítico do funcional I . Pelo Lema A.3 existem

$$0 < \epsilon < (b - a)/2 \tag{A.3}$$

e $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$ tais que

$$\eta(t, u) = u, \quad \text{se} \quad u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \tag{A.4}$$

para todo $t \in [0, 1]$ e

$$\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subset I^{c-\epsilon}. \quad (\text{A.5})$$

Note que, por definição de ínfimo, para $\epsilon > 0$ obtido acima, existe $h \in \gamma$ tal que

$$\max_{u \in Q} I(h(u)) < c + \epsilon. \quad (\text{A.6})$$

Agora, defina $\tilde{h} : Q \rightarrow X$ por

$$\tilde{h}(u) := \eta(1, h(u)).$$

Se $u \in \partial Q$ sendo $a = \max_{u \in \partial Q} I(u)$, por (A.2) e (A.3) temos

$$I(u) \leq a < c - 2\epsilon,$$

o que implica em

$$u \notin I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]).$$

Assim, como $u \in \partial Q$ e $h \in \gamma$ por (A.4) segue

$$\tilde{h}(u) = \eta(1, h(u)) = \eta(1, u) = u,$$

de onde temos $\tilde{h} \in \gamma$. Além disso, por (A.6) temos $h(u) \in I^{c+\epsilon}$ para todo $u \in Q$, de onde por (A.5) obtemos

$$\tilde{h}(u) = \eta(1, h(u)) \in I^{c-\epsilon},$$

isto é, $I(\tilde{h}(u)) \leq c - \epsilon$. Assim, desde que $\tilde{h} \in \gamma$ temos

$$c \leq \max_{u \in Q} I(\tilde{h}(u)) \leq c - \epsilon,$$

o que é uma contradição. Portanto, c é um valor crítico do funcional I como queríamos. ■

Espaços de Hölder

Definição A.4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto. Dizemos que uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é Hölder contínua com expoente γ , se para algum $0 < \gamma \leq 1$ tem-se*

$$\sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\gamma} < \infty.$$

Denotaremos por $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ o espaço vetorial das funções Hölder contínua. Dizemos que uma função é localmente Hölder contínua com expoente γ , se ela for Hölder contínua com expoente γ em todo subconjunto compacto de Ω .

Agora, definiremos o conjunto

$$C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ f \in C(\overline{\Omega}); D^\beta f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ para todo } |\beta| \leq m \right\}.$$

Imersões de Sobolev

Proposição A.14 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) *A imersão*

$$H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$$

é contínua, mais precisamente, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u|_{L^6(\mathbb{R}^3)} \leq C |\nabla u|_{L^2(\mathbb{R}^3)},$$

para todo $u \in C_c^1(\mathbb{R}^3)$.

Demonstração: Veja Teorema 9.9 em [10]. ■

Proposição A.15 *A imersão*

$$H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^3),$$

é contínua para todo q em $[2, 6]$.

Demonstração: Veja Corolário 9.10 em [10]. ■

Denotamos por S a melhor constante da imersão $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ contínua, mais precisamente

$$S := \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|}{|u|_6}.$$

Proposição A.16 (Kellich-Kondrachov) *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um subconjunto aberto e limitado de classe C^1 , então a imersão*

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

é compacta para todo q em $[1, 6)$.

Demonstração: Veja Teorema 9.15 em [10]. ■

Proposição A.17 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um subconjunto aberto e limitado de classe C^1 . Suponha que $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Se $k > \frac{3}{p}$, então $u \in C^{k-\lceil \frac{3}{p} \rceil - 1, \gamma}(\overline{\Omega})$, onde*

$$\gamma = \begin{cases} \left\lceil \frac{3}{p} \right\rceil + 1 - \frac{3}{p}, & \text{se } \frac{3}{p} \text{ não é um inteiro} \\ \text{qualquer } \gamma < 1, & \text{se } \frac{3}{p} \text{ é um inteiro.} \end{cases}$$

Demonstração: Veja Teorema 6 em [14]. ■

O Espaço $H_{rad}^1(\mathbb{R}^3)$

Nesta seção, iremos introduzir o espaço $H_{rad}^1(\mathbb{R}^3)$. Para maiores detalhes veja [21]. Denotaremos o conjunto dos operadores lineares $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que preserva o produto interno por

$$O(3) = \left\{ A \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3); \quad \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \right\}.$$

Prova-se que $A \in O(3)$ então $\det A = \pm 1$. Com isso, o conjunto

$$SO(3) = \left\{ A \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3); \quad \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{e} \quad \det A = 1 \right\}$$

é um subgrupo de $O(3)$.

Definição A.5 $H_{rad}^1(\mathbb{R}^3) = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^3); \quad u(x) = u(g(x)); \forall g \in SO(3), \forall x \in \mathbb{R}^3 \right\}.$

O Espaço $\mathcal{D}^{1,2}$

Nesta seção, vamos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto. Definimos o espaço $\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)$ como sendo o conjunto

$$\mathcal{D}^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^{2^*}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, 3\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)} := |u|_{L^{2^*}(\Omega)} + |\nabla u|_{L^2(\Omega)}.$$

Definimos $\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$ como sendo o completamento de $C_c^\infty(\Omega)$ com respeito a norma $\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)}$.

O próximo resultado relaciona os espaços $\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)$ e $W^{1,2}(\Omega)$, no caso em que $\Omega = \mathbb{R}^3$.

Proposição A.18 $W^{1,2}(\mathbb{R}^3) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3) \subsetneq \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) = \mathcal{D}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)$.

Demonstração: Veja Lema 1.2 em [4]. ■

Com este resultado, podemos afirmar que

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)} := |\nabla u|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

é uma norma sobre $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Com efeito, dado $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, existe uma sequência $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$\varphi_n \rightarrow u \quad \text{em} \quad \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3).$$

Note que, pela Proposição A.14

$$|\varphi_n|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^3)} \leq C|\nabla \varphi_n|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Consequentemente,

$$|u|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^3)} \leq C|\nabla u|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Assim,

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)} \leq (1 + C)|\nabla u|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Por outro lado,

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)} \geq |\nabla u|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Portanto, segue a afirmação. Além disso, segue que $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ está imerso continuamente em $L^{2^*}(\mathbb{R}^3)$.

Observação A.2 Se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um subconjunto aberto de medida finita com fronteira de classe C^1 , então

$$H^1(\Omega) = \mathcal{D}^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

compactamente para todo $q \in [1, 2^*)$. Além disso, $\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)$ e $\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$ são espaços de Hilbert separáveis.

Denotamos por $\bar{S}$ é a melhor constante da imersão $\mathcal{D}^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ contínua, mais precisamente

$$\bar{S} := \inf_{u \in \mathcal{D}^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}}}{|u|_6}.$$

Em [21], vemos que essa constante é atingida somente quando $\Omega = \mathbb{R}^3$.

Resultados de Regularidade

A equação homogênea

$$\Delta u = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^3$$

é chamada equação de Laplace.

Definição A.6 A função

$$\Gamma(x - y) = \frac{1}{3\omega_3|x - y|},$$

definida para $x \in \mathbb{R}^3$, $x \neq y$, é a solução fundamental da equação de Laplace, onde ω_3 é o volume da esfera unitária em $\mathbb{R}^3$.

Definição A.7 Definimos o potencial Newtoniano $N_f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de uma função mensurável $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$N_f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma(x - y)f(y)dy.$$

Para maiores detalhes veja [16]. Os dois próximos resultados nos fornecem propriedades importantes do pontecial Newtoniano de uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposição A.19 Sejam Ω um domínio limitado e uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Hölder contínua com expoente $\alpha \leq 1$. Então, $N_f \in C^2(\Omega)$ e

$$-\Delta N_f = f \quad \text{em } \Omega.$$

Demonstração: Veja Lema 4.2 em [16]. ■

Proposição A.20 (Teorema de Calderon-Zygmund) Sejam Ω um domínio limitado e uma função $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$. Então, $N_f \in W^{2,p}(\Omega)$ e

$$-\Delta N_f = f \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Demonstração: Veja Teorema 9.9 em [16]. ■

Proposição A.21 (Princípio do Máximo Forte) Considere o operador elíptico L dado por

$$Lu = -\Delta u + cu \quad \text{em } \Omega,$$

onde $c \in L^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é limitado e conexo, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $c \geq 0$ em Ω . Se $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge um mínimo em Ω , então u é constante em Ω .

Demonstração: Veja Teorema 3.5 em [16]. ■

Proposição A.22 (Teorema de Brezis-Kato) Sejam Ω um domínio em $\mathbb{R}^3$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Caracetheódory tal que

$$|g(x, u)| \leq a(x)(1 + |u|) \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

para alguma função $a \in L^{\frac{3}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Se $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ é solução fraca do problema

$$-\Delta u = g(x, u) \quad \text{em } \Omega,$$

então $u \in L^q_{loc}(\Omega)$ para todo $q < +\infty$. Além disso, se $u \in H^1_0(\Omega)$ e $a \in L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$ então $u \in L^q(\Omega)$ para todo $q < +\infty$.

Demonstração: Veja Lema B.3 em [20]. ■

Teorema dos Multiplicadores de Lagrange

Definição A.8 Seja X um espaço de Banach, $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ e um conjunto de vínculos

$$S := \{u \in X; F(u) = 0\}.$$

Suponhamos que para todo $u \in S$, tenhamos $F'(u) \neq 0$. Seja $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é valor crítico de J sobre S se existem $u \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $J(u) = c$ e $J'(u) = \lambda F'(u)$. Neste caso dizemos que u é um ponto crítico de J sobre S e o número λ é denominado de multiplicador de Lagrange para o valor crítico c .

Proposição A.23 (Teorema dos Multiplicadores de Lagrange) Sejam X um espaço de Banach, $F, G \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $u_0 \in X$ um extremo local de F restrito ao conjunto

$$S = \{u \in X; G(u) = 1\},$$

isto é,

$$F(u_0) = \inf_{u \in S} F(u).$$

Se $G'(u_0) \neq 0$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$F'(u_0) = \lambda G'(u_0).$$

Demonstração: Veja Proposição 14.3 em [17]. ■

Grau de Brouwer

Nesta seção, definiremos uma função que nos dará informações quanto a existência e unicidade de soluções da equação $\varphi(x) = b$, onde $\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um aberto e limitado e b é um ponto fixado em $\mathbb{R}^3$. Tal função é denotada por d , que a cada terna (φ, Ω, b) associa a um número natural $d(\varphi, \Omega, b)$ que é denominado de grau de φ sobre Ω com respeito a b . Os próximos resultados podem ser encontrados em [8] ou [13].

Definição A.9 Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aberto e limitado, $\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ tal que $b \in \mathbb{R}^3$ é valor regular da restrição $\varphi|_{\Omega}$, ou seja, se $x \in \varphi^{-1}(b)$, então $\varphi'(x)$ é invertível. Pelo Teorema da Aplicação Inversa $\varphi^{-1}(b)$ é finito. O grau de φ sobre Ω com respeito a b é definido por

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{x \in \varphi^{-1}(b)} \text{sgn} \det \varphi'(x).$$

Abaixo, listamos algumas propriedades da teoria do grau:

g_1) **Continuidade com relação a função.** Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Então, existe uma vizinhança V de φ em $C(\Omega, \mathbb{R}^3)$ tal que para todo $\psi \in V$,

$$b \notin \psi(\partial\Omega) \quad \text{e} \quad d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b).$$

g_2) **Invariância por Homotopia.** Sejam $H \in C(\overline{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^3)$ e $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$. Então,

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b)$$

é constante para todo $t \in [0, 1]$.

g_3) **Aditividade.** Seja $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, onde Ω_1 e Ω_2 são abertos de $\mathbb{R}^3$ tais que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Se $b \notin \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\partial\Omega_2)$ então

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b).$$

g_4) **Propriedade de Existência.** Se $0 \notin \varphi(\partial\Omega)$ e $d(\varphi, \Omega, 0) \neq 0$, então $0 \in \varphi(\Omega)$.

Teorema da Não Retração

Com propriedades da teoria do grau dadas acima, iremos estabelecer uma importante relação entre os conjuntos

$$\overline{B}_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| \leq 1\} \quad \text{e} \quad S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = 1\}.$$

Inicialmente, daremos a seguinte definição:

Definição A.10 *Uma retração do espaço topológico X no subespaço Y é uma aplicação contínua $\varphi : X \rightarrow Y$ tal que*

$$\varphi(y) = y,$$

para todo $y \in Y$.

Agora, mostraremos que

Proposição A.24 *Não existe retração de $\overline{B}_1(0)$ em S^2 .*

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que existe uma retração

$$\varphi : \overline{B}_1(0) \rightarrow S^2.$$

Denote por U o interior de $\overline{B}_1(0)$. Agora, note que, definindo a homotopia $H : U \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ por

$$H(x, t) := (1 - t)x + t\varphi(x),$$

temos que $0 \notin H(S^2 \times [0, 1])$. Com efeito, como φ é uma retração de $\overline{B}_1(0)$ em S^2 , temos para todo $x \in S^2$, $\varphi(x) = x$. Assim, para todo $t \in [0, 1]$

$$H(x, t) = (1 - t)x + tx = x,$$

como queríamos. Assim, pela Propriedade g_2), temos

$$d(id, U, 0) = d(\varphi, U, 0) = 1.$$

Dessa forma, desde que $0 \notin \varphi(S^2)$, pela Propriedade g_4) temos

$$0 \in \varphi(U) \subset S^2,$$

o que é uma contradição, e isto prova o resultado desejado. ■

Observação A.3 *Em [21] vemos que o resultado anterior é equivalente ao Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.*

Uma Desigualdade Elementar

Lema A.4 *Se $p \in [1, \infty)$ então para quaisquer funções $u, v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$*

$$||u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v| \leq \beta|u - v|(|u| + |v|)^{p-1},$$

para alguma constante $\beta > 0$.

Demonstração: Defina a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(t) = |v + t(u - v)|^{p-1}(v + t(u - v)).$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$||u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v| = |f(1) - f(0)| = \left| \int_0^1 f'(t)dt \right| \leq \int_0^1 |f'(t)|dt.$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} |f'(t)| &\leq (p-1)|v + t(u - v)|^{p-1}|u - v| + |v + t(u - v)|^{p-1}|u - v| \\ &= p|v + t(u - v)|^{p-1}|u - v| \end{aligned}$$

e para todo $t \in [0, 1]$ temos

$$|v + t(u - v)| \leq |v| + t|u - v| \leq |v| + |u - v| \leq |v| + |u| + |v| \leq 2(|v| + |u|),$$

de onde concluímos que

$$|f'(t)| \leq p2^{p-1}(|u| + |v|)^{p-1}|u - v|.$$

Portanto,

$$||u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v| \leq p2^{p-1}(|u| + |v|)^{p-1}|u - v|,$$

o que prova o lema com $\beta = p2^{p-1}$. ■

Funcionais Diferenciáveis

Definição A.11 *Seja X um espaço de Banach e $U \subset X$ aberto, considere um funcional $I : U \rightarrow \mathbb{R}$. Este funcional possui derivada de Gateaux $f \in X'$ no ponto $u \in U$ se para toda $\varphi \in X$ tem-se*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + t\varphi) - I(u) - f(\varphi)t}{t} = 0.$$

Definição A.12 *O funcional $I : U \rightarrow \mathbb{R}$ possui derivada de Fréchet em $u \in U$, se existir $f \in X'$ verificando*

$$\lim_{\|\varphi\| \rightarrow 0} \frac{|I(u + \varphi) - I(u) - f(\varphi)|}{\|\varphi\|} = 0$$

para toda $\varphi \in X$. Dizemos que $I \in C^1(U, \mathbb{R})$ se a derivada de Fréchet é contínua.

O próximo resultado relaciona as derivadas de Fréchet e de Gateaux do funcional $I : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Lema A.5 *Seja $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional definido em um espaço de Banach X . Se a derivada de Gateaux é contínua em X' , então as derivadas de Gateaux e de Fréchet coincidem e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Denotemos por $I'(u)$ a derivada de Gateaux no ponto $u \in X$. Agora, consideremos

$$r(\varphi) := I(u + \varphi) - I(u) - I'(u)\varphi. \quad (\text{A.7})$$

Nosso objetivo é mostrar que

$$\frac{|r(\varphi)|}{\|\varphi\|} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \|\varphi\| \rightarrow 0. \quad (\text{A.8})$$

Inicialmente, defina a função $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi(t) = I(u + t\varphi).$$

Esta função é diferenciável. Com efeito,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(\xi + t) - \psi(\xi)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(u + \xi\varphi + t\varphi) - I(u + \xi\varphi)}{t} \\ &= I'(u + \xi\varphi)\varphi. \end{aligned}$$

Desde que, o funcional I é Gateaux diferenciável, segue a diferenciabilidade da função ψ e que $\psi'(\xi) = I'(u + \xi\varphi)\varphi$. Sendo assim, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\varsigma \in (0, 1)$ tal que

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\varsigma).$$

Assim,

$$I(u + \varphi) - I(u) = I'(u + \varsigma\varphi)\varphi,$$

o que por (A.7) implica em

$$r(\varphi) = I'(u + \varsigma\varphi)\varphi - I'(u)\varphi = (I'(u + \varsigma\varphi) - I'(u))\varphi.$$

Consequentemente,

$$|r(\varphi)| \leq \|I'(u + \varsigma\varphi) - I'(u)\| \|\varphi\|.$$

Pela continuidade da derivada de Gateaux em X' , segue (A.8), e isto completa a prova deste lema. ■

Agora considere os funcionais $I_1, I_2, I_3 : H^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ definidos por

$$I_1(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2, \quad I_2(u) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)u^2 dx \quad \text{e} \quad I_3(u) = \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p+1} dx.$$

Nosso objetivo é mostrar que estes funcionais são de classe $C^1(H^1(\mathbb{R}^3), \mathbb{R})$. Inicialmente, mostraremos que os funcionais I_1 , I_2 e I_3 estão bem definidos. Com efeito,

i) Sendo $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, então $I_1(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 < \infty$.

ii) Como $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, então $u^2 \in L^3(\mathbb{R}^3)$. Além disso, $K \in L^2(\mathbb{R}^3)$ e $\phi_u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$. Pela desigualdade generalizada de Hölder segue

$$\int_{\mathbb{R}^3} |K(x)\phi_u(x)u^2| dx \leq \|K\|_2 \|u^2\|_3 \|\phi_u\|_6,$$

de onde temos que I_2 está bem definido.

iii) Desde que, $a \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^3)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p+1} dx \leq \|a\|_\infty \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{p+1} dx \leq C\|u\|^{p+1},$$

para alguma constante $C > 0$. Assim I_3 , está bem definido.

Lema A.6 Se $I_1 : H^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$I_1(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2,$$

então $I_1 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^3), \mathbb{R})$ e

$$I'_1(u)\varphi = \langle u, \varphi \rangle,$$

para toda $u, \varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

Demonstração: Mostraremos inicialmente que I_1 é Gateaux diferenciável. Dados $u, \varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, então

$$\begin{aligned} I'_1(u)\varphi &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\|u + t\varphi\|^2 - \|u\|^2)}{t} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} (2\langle u, \varphi \rangle + t\|\varphi\|^2) = \langle u, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

de onde segue que I_1 é Gateaux diferenciável. Agora mostraremos que essa derivada é contínua. Para isto, é suficiente verificarmos que se $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então $I'_1(u_n) \rightarrow I'_1(u)$ em H^{-1} . Dado $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\|\varphi\| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} |I'_1(u_n)\varphi - I'_1(u)\varphi| &= |\langle u_n, \varphi \rangle - \langle u, \varphi \rangle| \\ &= |\langle u_n - u, \varphi \rangle| \leq \|u_n - u\| \|\varphi\| \leq \|u_n - u\|. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Desde que

$$\|I'_1(u_n) - I'_1(u)\|_{H^{-1}} = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |(I'_1(u_n) - I'_1(u))\varphi|,$$

tomando o supremo na ultima desigualdade e fazendo $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, obtemos que $I'_1(u_n) \rightarrow I'_1(u)$ em H^{-1} . Assim, a derivada de Gateaux é contínua. Portanto, pelo Lema A.5, segue o resultado desejado. ■

Lema A.7 Se $I_2 : H^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$I_2(u) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u(x) u^2 dx,$$

então $I_2 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^3), \mathbb{R})$ e

$$I'_2(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u(x) u \varphi dx,$$

para toda u, φ em $H^1(\mathbb{R}^3)$.

Demonstração: Mostraremos inicialmente que I_2 é Gateaux diferenciável. Dadas $u, \varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, pela Observação 1.1, temos

$$\phi_u(x) = \frac{1}{3\omega_3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(y)}{|x-y|} u^2(y) dy \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^3,$$

onde ω_3 é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^3$. Assim,

$$\begin{aligned} g(t) &:= \frac{\phi_{(u+t\varphi)}(x) - \phi_u(x)}{t} = \frac{1}{3\omega_3 t} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(y)}{|x-y|} (u+t\varphi)^2 dy - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(y)}{|x-y|} u^2 dy \right) \\ &= \frac{1}{3\omega_3} \left(2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(y)}{|x-y|} (u\varphi) dy + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(y)}{|x-y|} (t\varphi^2) dy \right), \end{aligned}$$

q.t.p em $\mathbb{R}^3$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \frac{2}{3\omega_3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(y)}{|x-y|} (u\varphi) dy. \quad (\text{A.10})$$

Agora, definindo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(t) = \frac{1}{4} K(x) \phi_{(u+t\varphi)}(x) (u+t\varphi)^2,$$

temos

$$h(t) := \frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{1}{4} K(x) u^2 \left(\frac{\phi_{(u+t\varphi)}(x) - \phi_u(x)}{t} \right) + \frac{1}{4} K(x) \phi_{(u+t\varphi)}(x) (2u\varphi + t\varphi^2).$$

Desde que,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \phi_{(u+t\varphi)}(x) = \phi_u(x),$$

por (A.10) temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \frac{1}{2} K(x) u^2 \frac{1}{3\omega_3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(y)}{|x-y|} (u\varphi) dy + \frac{1}{2} K(x) \phi_u(x) u\varphi,$$

o que pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue implica

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_2(u+t\varphi) - I_2(u)}{t} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) u^2 \frac{1}{3\omega_3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(y)}{|x-y|} (u\varphi) dy \right) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u(x) u\varphi dx.$$

Note, pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} K(x) u^2 \frac{1}{3\omega_3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(y)}{|x-y|} (u\varphi) dy \right) dx &= \int_{\mathbb{R}^3} K(x) u\varphi \frac{1}{3\omega_3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(y)}{|x-y|} u^2 dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u(x) u\varphi dx, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$I'_2(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_u(x) u\varphi dx$$

é a derivada de Gateaux do funcional I_2 . Agora mostraremos que essa derivada é contínua. Para isto, é suficiente verificarmos que se $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então $I'_2(u_n) \rightarrow I'_2(u)$ em H^{-1} . Dado $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$ tal que, $\|\varphi\| \leq 1$, desde que, $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, por ii) do Lema 2.10, dado $\epsilon > 0$

$$|I'_2(u_n)\varphi - I'_2(u)\varphi| = \left| \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \varphi (\phi_{u_n}(x) u_n - \phi_u(x) u) dx \right| < \epsilon, \quad (\text{A.11})$$

para $n > 0$ suficientemente grande. Sendo assim, como

$$\|I'_2(u_n) - I'_2(u)\|_{H^{-1}} = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |(I'_2(u_n) - I'_2(u))\varphi|,$$

temo que o funcional I_2 é contínuo. Pelo Lema A.5 concluímos o resultado desejado. ■

Lema A.8 Se $I_3 : H^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$I_3(u) = \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p+1} dx,$$

então $I_3 \in C^1(H^1(\mathbb{R}^3), \mathbb{R})$ e

$$I'_3(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p-1}u\varphi dx,$$

para toda u, φ em $H^1(\mathbb{R}^3)$.

Demonstração: Mostraremos inicialmente que I_3 é Gateaux diferenciável. Para isto considere $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |t| < 1$, $u, \varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$ e a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(s) = \frac{a}{p+1} |u + st\varphi|^{p+1}.$$

Note que

$$f'(s) = at|u + st\varphi|^{p-1}(u + st\varphi)\varphi.$$

Sendo f diferenciável em $(0, 1)$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $f(1) - f(0) = f'(\theta)$, o que implica que

$$g(t) := \frac{a}{t(p+1)} (|u + t\varphi|^{p+1} - |u|^{p+1}) = a|u + \theta t\varphi|^{p-1}(u + \theta t\varphi)\varphi.$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = a|u|^{p-1}u\varphi.$$

Como $(a+b)^q \leq 2^{q-1}(a^q + b^q)$ para todo $q \in [1, +\infty)$ e $a, b \in [0, +\infty)$, sendo $0 < |t| < 1$ e $\theta \in (0, 1)$, temos

$$\begin{aligned} |g(t)| &= \left| at|u + \theta t\varphi|^{p-1}(u + \theta t\varphi)\varphi \right| \leq \|a\|_\infty |u + \theta t\varphi|^p |\varphi| \\ &\leq 2^{p-1} \|a\|_\infty (|u|^p + |\varphi|^p) |\varphi|. \end{aligned}$$

Afim de usarmos um resultado de convergência, afirmamos que $(|u|^p + |\varphi|^p)\varphi \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Com efeito, como $u, \varphi \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ temos $(|u|^p + |\varphi|^p) \in L^{\frac{6}{p}}$. Desde que, $p \in (3, 5)$ então $\frac{6}{6-p} \in (2, 6)$. Assim, como $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{\frac{6}{6-p}}(\mathbb{R}^3)$, pela desigualdade de Hölder segue a afirmação. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (I_3(u + t\varphi) - I_3(u)) = \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p-1}u\varphi dx,$$

isto é,

$$I'_3(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p-1}u\varphi dx$$

é a derivada de Gateaux do funcional I_3 . Agora, mostraremos que essa derivada é contínua. Para isto, é suficiente verificarmos que se $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então $I'_3(u_n) \rightarrow I'_3(u)$ em H^{-1} . Desde que, $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, então (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$, assim

$$\|u_n\| + \|u\|_6 \leq C,$$

para alguma constante $C > 0$. Desde que $p \in (3, 5)$, temos $\frac{12}{7-p} \in (3, 6)$. Assim, $\varphi, u \in H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{\frac{12}{7-p}}(\mathbb{R}^3)$. Por outro lado, $(|u_n| + |u|)^{p-1} \in L^{\frac{6}{p-1}}$. Pelo Lema A.4 e pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
|I'_3(u_n)\varphi - I'_3(u)\varphi| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} a(x)\varphi(|u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u)dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} |a(x)||\varphi| \left| |u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u \right| dx \\
&\leq \|a\|_\infty \beta \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi| |u_n - u| (|u_n| + |u|)^{p-1} dx \\
&\leq \|a\|_\infty \beta |\varphi|_{\frac{12}{7-p}} \|u_n - u\|_{\frac{12}{7-p}} \| |u_n| + |u| \|_6^{p-1} \\
&\leq C_1 \|h\| \|u_n - u\|,
\end{aligned} \tag{A.12}$$

para alguma constante $C_1 > 0$. Desde que $u_n \rightarrow u$ em $H^1(\mathbb{R}^3)$, dado $\epsilon > 0$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} a(x)\varphi(|u_n|^{p-1}u_n - |u|^{p-1}u)dx \right| \leq \epsilon,$$

para n suficientemente grande. Portanto, como

$$\|I'_3(u_n) - I'_3(u)\|_{H^{-1}} = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |(I'_3(u_n) - I'_3(u))\varphi|,$$

pelo Lema A.5 segue o resultado desejado. ■

Como consequência imediata dos Lemas A.6, A.7 e A.8, temos os seguintes resultados:

Corolário A.4 *Considere o funcional $I : H^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)u^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p+1} dx.$$

Então,

$$I'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^3} u\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)u\varphi dx - \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p-1}u\varphi dx,$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

Corolário A.5 *Considere o funcional $G : H^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$G(u) = I'(u)u = \|u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p+1} dx.$$

Então

$$G'(u)\varphi = 2\langle u, \varphi \rangle + 4 \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u(x)u\varphi dx - (p+1) \int_{\mathbb{R}^3} a(x)|u|^{p-1}u\varphi dx,$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$.

Lema A.9 *Sejam (u_n) e (v_n) seqüências em $H^1(\mathbb{R}^3)$ tais que $\|u_n - v_n\| \rightarrow 0$ onde $I'(v_n)\varphi \rightarrow 0$ para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Se $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ é limitada então $I'(u_n)\varphi \rightarrow 0$ para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$.*

Demonstração: Inicialmente, mostraremos que

$$|I'(u_n)\varphi - I'(v_n)\varphi| \rightarrow 0, \quad (\text{A.13})$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Note que,

$$|I'(u_n)\varphi - I'(v_n)\varphi| = |I'_1(u_n)\varphi - I'_1(v_n)\varphi| + |I'_2(u_n)\varphi - I'_2(v_n)\varphi| + |I'_3(u_n)\varphi - I'_3(v_n)\varphi|.$$

Por (A.9) e (A.12) temos que

$$|I'_1(u_n)\varphi - I'_1(v_n)\varphi| \rightarrow 0 \quad (\text{A.14})$$

e

$$|I'_3(u_n)\varphi - I'_3(v_n)\varphi| \rightarrow 0, \quad (\text{A.15})$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$ quando $\|u_n - v_n\| \rightarrow 0$. Assim, para provarmos (A.13) é suficiente verificarmos que

$$|I'_2(u_n)\varphi - I'_2(v_n)\varphi| \rightarrow 0, \quad (\text{A.16})$$

para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$ quando $\|u_n - v_n\| \rightarrow 0$. Como $(v_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ é limitada então $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ é limitada pois $\|u_n - v_n\| \rightarrow 0$. Desde que, $K \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $f(y) := |x - y|^{-1} \in L^6(\mathbb{R}^3)$, pela limitação de (u_n^2) em $L^3(\mathbb{R}^3)$ e pela Observação 1.1 segue pela desigualdade generalizada de Hölder que

$$|\phi_{u_n}(x)| = \left| \frac{1}{3\omega_3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{K(y)}{|x - y|} u_n^2 dy \right| \leq \frac{1}{3\omega_3} |K|_2 |f|_6 |u_n|_6^2 \leq C_1 \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^3,$$

para alguma constante C_1 , onde ω_3 é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^3$. De forma análoga pela limitação de (v_n) em $L^6(\mathbb{R}^3)$ prova-se que

$$|\phi_{v_n}(x)| \leq C_2 \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^3,$$

para alguma constante C_2 . Seja $C_3 = \max\{C_1, C_2\}$. Assim, por (A.11) e pela desigualdade generalizada de Hölder segue

$$\begin{aligned} |I'_2(u_n)\varphi - I'_2(v_n)\varphi| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\varphi(\phi_{u_n}(x)u_n - \phi_{v_n}(x)v_n)dx \right| \\ &\leq C_3 \left| \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\varphi(u_n - v_n)dx \right| \\ &\leq C_3 |K|_2 |\varphi|_3 |u_n - v_n|_6. \end{aligned}$$

Como, $u_n - v_n \rightarrow 0$ em $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ segue (A.16), o que por (A.14) e (A.15) implica (A.13). Assim, desde que $I'(v_n)\varphi \rightarrow 0$ para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, temos $I'(u_n)\varphi \rightarrow 0$ para toda $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$ como queríamos. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Ambrosetti, A., *On Schrödinger-Poisson systems*. Milan J. Math. **76** (2008), 257-274.
- [2] Bahri, A., LI, Y.Y. , *On a min-max procedure for the existence of a positive solution for certain scalar field equations in $\mathbb{R}^N$* , Rev. Mat. Iberoamericana **6** (1990), 1-15.
- [3] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, New York, 1995.
- [4] Ben-Naoum, A. K.; Troestler, C.; Willem, M. *Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains*. Nonlinear Anal. **26** (1996), no. 4, 823-833.
- [5] Benci, V.; Fortunato, D., *An eigenvalue problem for the Schrödinger-Maxwell equations*. Topol. Methods Nonlinear Anal. **11** (1998), no. 2, 283-293.
- [6] Benci, V.; Fortunato, D., *Solitary waves in abelian gauge theories*. Adv. Nonlinear Stud. **8** (2008), no. 2, 327-352.
- [7] Benguria, R.; Brézis, H.; Lieb, E. H., *The Thomas-Fermi-von Weizsäcker theory of atoms and molecules*. Comm. Math. Phys. **79** (1981), no. 2, 167-180.
- [8] Berestycki, H., *Methodes topologiques et problemes aux limites non lineaires*, Thèse de Doctorat, Universite de Paris VI, 1975.
- [9] Berestycki, H.; Lions, P.-L. *Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state*. Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), no. 4, 313-345.
- [10] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [11] Cerami, G., Donato P., *The effect of concentrating potentials in some singularly perturbed problems*. Calc. Var. Partial Differential Equations **17** (2003), no. 3, 257-281.
- [12] Cerami, G., Vaira, G., *Positive solutions for some non-autonomous Schrödinger-Poisson systems*. J. Differential Equations **248** (2010), no. 3, 521-543.
- [13] Deimling, Klaus, *Nonlinear Funcional Analysis*, Springer Verlag, Berlin, 1985.
- [14] Evans, L. C., *Partial differential equations*. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [15] Fernandez, P. J., *Medida e Integração*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2002.

- [16] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S., *Elliptic partial differential equations of second order*. Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin,, 2001.
- [17] Kavian, O., *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*, Springer-Verlag, 1993
- [18] Kwong, M.K., *Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^N$* . Arch. Rational Mech. Anal. **105** (1989), no. 3, 243-266.
- [19] Struwe, M., *A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities*. Math. Z. **187** (1984), no. 4, 511-517.
- [20] Struwe, M., *Variational methods*, Springer, Berlin, 1990.
- [21] Willem, M., *Minimax Theorems*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlim, (1996).