Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Um Teorema de Ponto Fixo e Aplicações a Equações Elípticas Semilineares

por

Dayvid Geverson Lopes Marques †

sob a orientação do

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com o apoio financeiro da Capes

Um Teorema de Ponto Fixo e Aplicações a Equações Elípticas Semilineares

por

Dayvid Geverson Lopes Marques

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza - UFPB

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto - UFCG

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Abril de 2012

M357u Marques, Dayvid Geverson Lopes.
Um teorema de ponto fixo e aplicações a equações elípticas semilineares / Dayvid Geverson Lopes Marques.-- João Pessoa, 2012.
61f.

Orientador: Uberlandio Batista Severo
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Espaços vetoriais ordenados. 3. Ponto fixo. 4. Equações elípticas semilineares.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Dedicatória

"A minha avó Ana Correia (*in memoriam)*"

Agradecimentos

- À Deus, que por sua infinita misericórdia concedeu-me mais essa vitória."Que darei eu ao senhor por todos os benefícios que me têm feito ?"(Sl 116.12), "Bendize, ó minha alma, ao Senhor e não te esqueças de nem um só de seus benefícios. (Sl 103.2)"

- A minha avó Ana Correia (*in memoriam*) pelo carinho, cuidado e imenso amor para comigo. Pelo seu esforço e dedicação para que eu tivesse a melhor educação possível. Pelo seu exemplo de vida e caráter sem os quais com certeza não teria sido capaz de realizar essa etapa da minha formação.

- A minha tia Marcia Rejane, pelo amor, carinho e cuidado os quais foram vitais para que eu tivesse uma educação de qualidade. Agradeço também pelo incentivo e por sempre acreditar na minha capacidade.

- A minha bisavó Maria Estela Alves, pelo amor, cuidado e exemplo de ser humano que eu levarei pelo resto da vida.

- Aos meus sobrinhos Diogo Henrique e Guinho, pela amizade sincera e pelo imenso carinho mesmo eu estando ausente nesse período de mestrado.

- À Paulo Maciel, sua esposa Seny e seus filhos pelo acolhimento, cuidado e pela imensa ajuda em um momento crucial da minha vida. Sem essa ajuda, com certeza, não teria chegado até aqui. E a Francisca Evaldite, pelo mesmo motivo.

- Aos professores da graduação na UFRN: Ronaldo Freire, André Gustavo, Vivianne Simioli, Rubens Leão de Andrade e Gabriela, pela enorme contribuição na minha formação.

- Aos professores da pós-graduação da UFPB: Uberlandio Batista Severo, Everaldo Souto de Medeiros, Cleto Brasileiro de Miranda Neto, Fernando Antônio Xavier de Souza, Manassés Xavier de Souza e Pedro Antonio Hinojosa Vera, pelos ensinamentos adquiridos durante o mestrado.

- Ao meu orientador, Professor Uberlandio Batista Severo, pela excelente orientação, paciência, pela disponibilidade em ajudar, pela amizade, pela competência e por sempre zelar pelo rigor da Matemática.

- Aos colegas de graduação na UFRN, em especial Thiago Valentim, Daniel o Geômetra, Zé Carlos, Eder a Reta, Geilson o Mestre, Lilly, Joelson, Ailton, Tonhaum, Laís, Marconio, Rafaela Horacina, Romildo e Otto, pelos excelentes momentos de discussão matemática e colaboração.

- Ao pessoal do PET de Matemática e ao professor Marcelo Gomes.

- Aos colegas do mestrado. Primeiramente, quero agradecer à Gilson e Yane pela ajuda, pelos momentos de descontração, pelo lanche, pelas xerox do material de Gilson, pelos momentos de estudo e pelo companheirismo; serei sempre grato. Ao amigo Reginaldo, pela parceria e pela assistência computacional sempre que solicitado. Ao amigo Diego Cabelinho, pela disponibilidade em discutir matemática e pelo humor. Ao amigo Pedrão, pelas discussões matemáticas sempre produtivas e pela cordialidade.

- Aos colegas do Milenium, pelos momentos de descontração, Eugênio, Gabriel, Hudson, Luan e Anderson.

- Ao povo de João Pessoa, pela simpatia e hospitalidade.

- Enfim, a Capes pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos um teorema de ponto fixo para operadores crescentes em espaços vetoriais ordenados e o aplicamos para obter resultados de existência de solução fraca para problemas elípticos semilineares do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) + h, \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz algumas condições convenientes e $h \in H^{-1}(\Omega)$.

Palavras-Chave: Espaços vetoriais ordenados; Ponto fixo; Equações elípticas semilineares.

Abstract

In this work, we study a fixed point theorem for increasing operators in ordered normed spaces and we apply it in order to obtain results of existence of weak solution for semilinear elliptic equations of type

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) + h, \quad \text{in} \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a smooth domain, $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfies some convenient conditions and $h \in H^{-1}(\Omega)$.

Keywords: Ordered normed spaces; Fixed point; Semilinear elliptic equations.

Sumário

Notações **2**

Introdução **4**

1 Análise em Espaços Vetoriais Ordenados **8**

1.1 Espaços Vetoriais Ordenados e Cones Ordenados 8

1.2 Um Teorema de Ponto Fixo 18

2 Um Problema Elíptico Não-Homogêneo Envolvendo o Expoente Crítico de Sobolev **25**

3 Um Problema Elíptico com uma Não-Linearidade Crítica Mais Geral **31**

4 Existência de Solução para uma Equação de Schrödinger Semilinear **38**

A Resultados Auxiliares **44**

B Um Exemplo de Espaço de Riesz em Teoria da Medida e Integração **49**

Referências Bibliográficas **52**

Notações

Abaixo, listamos as notações gerais que foram utilizadas nesse trabalho.

- $B\left[x_0, r\right]$ denota a bola fechada de centro x_0 e raio r;
- E denota um espaço de Banach real;
- E^* denota o dual topológico de E;
- $C(\left[0,1\right], \mathbb{R})$ denota o espaço das funções $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínuas;
- $\to$ denota convergencia forte em um espaço vetorial normado E;
- $|\cdot|$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^N$;
- $\|\cdot\|$ denota a norma de E;
- $\|\cdot\|_*$ denota a norma de E^*;
- $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ denota o espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$;
- $L^p(\Omega)$ denota o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\displaystyle\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$, para $p \in [1, \infty)$;
- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ denota o gradiente da função u;
- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o laplaciano da função u;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota produto interno e aplicação dualidade;

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ denota um domínio em $\mathbb{R}^N$;

- $\partial\Omega$ fronteira de Ω;

- $p^{'} = \frac{p}{p-1}$ é o conjugado hölderiano de p;

- $W^{1,p}(\Omega)$ denota o espaço das funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que existem $g_1, g_2, \cdots, g_N \in L^p(\Omega)$ satisfazendo $\displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\ dx = \int_\Omega g_i \varphi\ dx,\ \forall \varphi \in C_c^\infty,\ \forall i = 1, 2, \cdots, N$ com $p \in [1, \infty)$ ou $p = \infty$,

- $W_0^{1,p}(\Omega)$ o completamento de $C_c^1(\Omega)$ na norma de $W^{1,p}(\Omega)$, com $p \in [1, \infty)$;

- $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$;

- $H^{-1}(\Omega)$ denota o dual topológico de $H_0^1(\Omega)$;

- $|(x_1, x_2, \cdots, x_N)|_p = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^N |x_j|^p\right)^{1/p}$ denota a norma p em $\mathbb{R}^N$;

- $\|u\|_p = \left(\displaystyle\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$ denota a norma do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$;

- $\|\cdot\|_{1,p}$ denota a norma dos espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$;

- $\|\nabla u\|_2 = \left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p\ dx\right)^{1/2}$ denota a norma do espaço $H_0^1(\Omega)$ equivalente à norma usual $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$, quando Ω é um domínio limitado;

- $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$, se $p \in [1, N)$, é o expoente crítico de Sobolev;

- q.t.p. significa para quase todo ponto.

Introdução

Neste trabalho, baseados no artigo de Carl e Heikkillä [17] (veja também [25]), estudamos um resultado abstrato de ponto fixo para operadores crescentes em espaços normados ordenados. Em seguida, de posse deste teorema de ponto fixo, fazemos algumas aplicações. Mais precisamente, mostramos a existência de solução fraca para uma certa classe de problemas elípticos não homogêneos com crescimento crítico, em que consideramos domínios limitados e equações de Schrödinger. Os problemas aqui abordados se caracterizam pela perda de compacidade e são da forma

$$\begin{cases} -\Delta u &=& f(x,u) + h(x), \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &=& 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave, $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz hipóteses apropriadas e $h \in H^{-1}(\Omega)$. No caso das esquações de Schrödinger também temos a perda de compacidade, pois o domínio não é limitado.

O Problema (1) tem sido exaustivamente investigado nas últimas décadas por diversos autores, veja por exemplo, [3], [5] e [18]. Resultados de existência têm sido obtidos através de métodos variacionais, topológicos (técnicas de ponto fixo) e pela combinação desses métodos com métodos de subsolução e supersolução (para referências abordando estes métodos e problemas com crescimento crítico, veja [2, 4, 6, 12, 14, 19, 31]). Uma característica comum desses métodos refere-se a compacidade de um operador de Nemytskij

$$F : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega), \quad u \mapsto F(u)$$

associado à função f e definido por

$$\langle F(u), \varphi \rangle = \int_\Omega f(x,u)\varphi \, dx, \quad u, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Neste caso, a compacidade desse operador desempenha um papel fundamental. Definindo $A := -\Delta : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ por

$$\langle Au, \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx,$$

a correspondente formulação fraca para o Problema (1) pode ser escrita como

$$u \in H_0^1(\Omega) : \quad Au - F(u) = h \text{ em } H^{-1}(\Omega). \tag{2}$$

Na teoria dos operadores monótonos devido a Brezis e Browder, a compacidade do operador F garante a pseudo-monotonicidade do operador $A - F : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$, que juntamente com a sua coercividade, garante um resultado de existência para o problema (2).

A compacidade do operador F também permite transformar o problema (2) em uma equação de ponto fixo envolvendo um operador $G : K \longrightarrow K$ contínuo, sendo K um compacto, convexo e não-vazio. Desta forma, o Teorema do Ponto Fixo de Schauder garante a existência de um ponto fixo para o operador G e, consequentemente, um resultado de existência para o problema (2). Quando o intuito é aplicar métodos variacionais, uma condição de compacidade no funcional energia, associado ao problema (2), faz se necessária para garantirmos a convergência de uma subsequência de uma sequencia minimizante. Essa condição, que é conhecida como a condição de Palais-Smale, é também uma consequencia da compacidade do operador F, veja por exemplo [18]. Condições suficientes na função f que garantem a compacidade do operador de Nemytskij são, por exemplo, as seguintes:

(i) $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory.

(ii) f satisfaz uma condição de crescimento subcrítico:

$$|f(x,s)| \leq k(x) + c\,|s|^{p-1},$$

com $2 \leq p < 2^*$ $(N \geq 3)$ e $k \in L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Quando $p = 2^* = 2N/(N-2)$, o expoente crítico de Sobolev, ou quando a função f é, por exemplo, descontínua em relação a segunda variável, o problema (1) torna-se mais delicado, devido a perda da compacidade do operador F. Métodos especiais como, por exemplo, métodos de sub e supersolução combinados com técnicas de truncamento, princípio de concentração de compacidade, princípio variacional dual e teoria de pontos críticos não suaves baseada no gradiente generalizado de Clark foram desenvolvidos para superar a perda de compacidade na investigação de soluções para problemas elípticos semelhantes ao (1), veja por exemplo [1]. Para problemas elípticos em domínios não-limitados, como em $\mathbb{R}^N$, a situação torna-se ainda mais complicada, visto que a compacidade, em geral, é violada devido a perda de compacidade da imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$. Problemas elípticos em domínios não-limitados, com não-linearidades descontínuas e/ou com crescimento crítico, têm sido tratados por diferentes métodos, veja [7, 10, 13, 15, 21, 29].

Neste trabalho iremos estudar uma alternativa para esse problema de perda de compacidade, via um resultado abstrato de ponto fixo, para garantirmos a existência de solução fraca para problemas elípticos em domínios limitados e equações de Schrödinger.

Nosso trabalho está dividido em quatro capítulos e três apêndices.

No Capítulo 1, utilizando conhecimentos sobre espaços normados ordenados, provamos um resultado de ponto fixo para aplicações $G : B \longrightarrow B$, onde B é uma bola fechada de um semireticulado vetorial E, com a ordem induzida por um cone ordenado E_+.

No Capítulo 2, usando o resultado de ponto fixo, mostramos a existência de solução fraca para um problema elíptico do tipo (1), em que Ω é um domínio limitado e $f(x,s) = a|u|^{2^*-2}u + |u|^{p-2}u + h$, sendo $h \in H^{-1}(\Omega)$, $1 < p < 2$ e $a > 0$.

O Capítulo 3 trata um problema elíptico em domínio limitado, mas considerando-se uma não-linearidade $f(x,u)$ mais geral que a do capítulo anterior. Novamente, aplicamos o resultado de ponto fixo para obtermos a existência de solução fraca para este problema. Aqui, $f(x,s)$ satisfaz algumas condições convenientes, que estão destacadas no referido capítulo.

No capítulo 4, estudamos a existência de solução fraca para uma equação de Schrödinger não linear. Mais especificamente, de posse de nosso teorema de ponto fixo, obtemos a existência de uma solução para a seguinte equação:

$$-\Delta u + V(x)u = f(x,u) + h(x) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

A função $f(x,s)$ satisfaz certas hipóteses apropriadas, que estão apresentadas no texto do capítulo em questão.

No Apêndice A, são apresentadas algumas definições e resultados a respeito de espaços topológicos ordenados. O Apêndice B traz algumas definições e resultados a respeito de espaços topológicos ordenados e, finalmente, no Apêndice C, apresentamos um exemplo de um espaço de Riesz dentro do contexto da Teoria da Medida e Integração.

Finalizamos esta introdução chamando a atenção de que as provas de alguns resultados técnicos, que não se encontram neste trabalho, estão devidamente indicadas em livros-texto.

Capítulo 1

Análise em Espaços Vetoriais Ordenados

Neste capítulo, apresentamos uma breve introdução aos espaços vetoriais ordenados e cones ordenados, que será utilizada como base para o resultado abstrato mais importante deste capítulo. Esse resultado afirma que a bola fechada de centro 0 e raio R tem a propriedade de ponto fixo, no sentido de que qualquer operador crescente $G : B[0, R] \longrightarrow B[0, R]$ tem um ponto fixo. De posse desse resultado abstrato, vamos mostrar a existência de solução fraca para alguns problemas elípticos que envolvem crescimento crítico em domínios limitados e em todo o $\mathbb{R}^N$.

1.1 Espaços Vetoriais Ordenados e Cones Ordenados

Nesta seção, apresentaremos algumas propriedades básicas de espaços vetoriais ordenados e cones ordenados. Dado um conjunto não-vazio P, lembremos que uma relação $\leq$ em P é uma relação de ordem parcial, quando ela é reflexiva, simétrica e transitiva, isto é, uma relação binária $\leq$ em P é uma relação de ordem parcial se para quaisquer x, y, z pertencentes a P, valem as seguintes propriedades:

i) (**Reflexividade**) $x \leq x$.

ii) (**Antisimetria**) Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$.

iii) (**Transitividade**) Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$.

O par $(P, \leq)$ é dito um conjunto parcialmente ordenado. quando não houver perigo de confusão um conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ será denotado simplesmente por P.

Seja P um conjunto parcialmente ordenado e $a, b \in P$. Então, passaremos a utilizar a seguinte notação:

$$[a) = \{x \in P \; ; \; a \leq x\}, (b] = \{x \in P \; ; \; x \leq b\} \text{ e } [a,b] = \{x \in P \; ; \; a \leq x \leq b\}.$$

Definição 1.1 *Seja X um conjunto não-vazio munido de uma relação de ordem parcial $\leq$ e uma topologia τ, em que os conjuntos $[a)$ e $(a]$ são fechados para cada $a \in X$. A terna $(X, \leq, \tau)$ é dito um espaço topológico ordenado.*

Observe que o conjunto $[a, b]$ é fechado.

A proposição, a seguir, fornece um exemplo de um espaço topológico ordenado.

Proposição 1.2 *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach não-trivial e E_+ um cone ordenado de E. Considere o espaço vetorial ordenado $(E, \leq)$, onde $\leq$ é a relação de ordem parcial induzida pelo cone E_+. Então, a terna $(E, \leq, \sigma(E, E^*))$, onde $\sigma(E, E^*)$ é a topologia fraca, é um espaço topológico ordenado.*

Demonstração: Sejam $y, x \in [a)$ e $t \in [0, 1]$. Logo, $x \geq a$ e $y \geq a$. Como $t \in [0, 1]$ e E é um espaço vetorial ordenado, $(1 - t)x + ty \geq a$. Segue que o conjunto $[a)$ é convexo. Mostremos que o conjunto $[a)$ é fechado na topologia induzida pela norma $\|.\|$. Seja $z \in \overline{[a)}$. Logo, existe uma sequência (x_n) em $[a)$ tal que $z = \lim x_n$. Note que $z - a = \lim(x_n - a)$ e E_+ é fechado. Segue que $z - a \in E_+$ e, consequentemente, $z \in [a)$, donde o conjunto $[a)$ é fechado. Assim, como o conjunto $[a)$ é fechado forte e convexo, ele é fechado na topologia fraca. Analogamente, o conjunto $(a]$ é fechado na topologia fraca. Portanto, a terna $(E, \leq, \sigma(E, E^*))$ é um espaço topológico ordenado. ■

Definição 1.3 *Seja X um espaço topológico ordenado. Diz-se que $x \in X$ é um ponto de acumulação de uma sequência (x_n) em X, se para cada vizinhança U de x e para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m \geq n$ tal que $x_m \in U$.*

Proposição 1.4 *Se uma sequência monótona (x_n), em um espaço topológico ordenado X, tem um ponto de acumulação x, então $x = \sup \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se (x_n) é crescente, e $x = \inf \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se (x_n) é decrescente.*

Demonstração: Seja x um ponto de acumulação de uma sequência crescente (x_n). Dado $n \in \mathbb{N}$ e qualquer vizinhança aberta U de x, existe $m \geq n$ tal que $x_m \in U$. Note que $x_n \leq x_m$, então $[x_n) \cap U \neq \varnothing$. Assim, $x \in \overline{[x_n)}$. Observe que $[x_n)$ é fechado e dessa forma $x \in [x_n)$, ou seja, $x_n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, x é uma cota superior para o conjunto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Seja z uma cota superior para $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Então, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (z]$. Como $(z]$ é fechado e $x \in \overline{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$, então $x \in (z]$ e desta forma $x \leq z$. Portanto, $x = \sup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. A demonstração para o caso da sequência (x_n) ser decrescente é feita de modo análogo. ■

Corolário 1.5 *Uma sequência monótona em um espaço topológico ordenado X converge, se cada subsequência dessa sequência tem um ponto de acumulação.*

Demonstração: Assuma que cada subsequência de uma sequência crescente (x_n) de X tem um ponto de acumulação. Seja x tal ponto de acumulação de (x_n). Afirmamos que (x_n) converge para x. De fato, se (x_n) não convergisse para x existiria uma vizinhança V de x e uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $x_{n_k} \notin V$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por hipótese, (x_{n_k}) tem um ponto de acumulação y, que também é um ponto de acumulação de (x_n). Logo, pela proposição anterior $x = y$. Mas, isto contraria o fato que V não contém nenhum elemento de (x_{n_k}). Assim, (x_n) converge pra x e a prova está concluída. A prova quando (x_n) é decrescente é análoga. ■

A partir de agora, vamos considerar um espaço vetorial real E, munido de uma relação de ordem parcial que cumpre certas condições.

Definição 1.6 *Um espaço vetorial real E é dito um* **espaço vetorial ordenado** *quando ele está munido de uma relação de ordem parcial $\leq$, que é compatível com a estrutura algébrica de E, no sentido de que $\leq$ satisfaz os seguintes axiomas:*
i) Se $x \leq y$, então $x + z \leq y + z$ para qualquer $z \in E$.
ii) Se $x \leq y$, então $\lambda x \leq \lambda y$ para qualquer $\lambda \geq 0$.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de espaços vetoriais ordenados.

Exemplo 1.7 *O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, com a relação de ordem usual, é um espaço vetorial ordenado.*

Exemplo 1.8 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ e considere $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções de Ω em $\mathbb{R}$. Defina a seguinte relação de ordem parcial $\leq$ em E:*

$$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \ \forall \ x \in \Omega.$$

Facilmente, vê-se que $(\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}), \leq)$ *é um espaço vetorial ordenado.*

Exemplo 1.9 *Sejam* $x, y \in \mathbb{R}^N$ *tais que* $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$ *e* $y = (y_1, y_2, \cdots, y_N)$. *Defina a seguinte relação de ordem parcial em* $\mathbb{R}^N$:

$$x \leq y \Leftrightarrow x_j \leq y_j \ \forall \ j \in \{1, 2, \cdots, N\}.$$

Uma análise simples mostra que $(\mathbb{R}^N, \leq)$ *é um espaço vetorial ordenado.*

Seja E um espaço vetorial real não-trivial. A seguir, vamos considerar certos subconjuntos de E os quais nos trarão mais exemplos de espaços vetoriais ordenados.

Definição 1.10 *Seja* $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço vetorial normado, não-trivial, sobre* $\mathbb{R}$. *Um subconjunto* E_+ *de* E *é dito um* **cone ordenado** *se ele goza das seguintes propriedades:*
i) E_+ *é não-vazio, diferente do subespaço nulo, fechado e convexo;*
ii) Se $u \in E_+$ *e* $\lambda \geq 0$, *então* $\lambda u \in E_+$;
iii) Se $u \in E_+$ *e* $-u \in E_+$, *então* $u = 0$.

A próxima proposição garante que sempre podemos considerar um cone ordenado em um espaço vetorial normado não-trivial.

Proposição 1.11 *Todo espaço vetorial normado não-trivial admite um cone ordenado.*

Demonstração: Seja $v \in E$, $v \neq 0$. O conjunto $E_+ := \{tv \ ; \ t \geq 0\}$ é um cone ordenado. De fato, mostremos que E_+ é fechado. Os outros axiomas presentes na definição de cone ordenado são de fácil verificação.

Seja $u \in \overline{E_+}$. Então, existe uma sequência (u_n) em E_+ tal que $\|u_n - u\| \to 0$. Neste caso,

$$u_n = t_n \ v, \ t_n \geq 0.$$

Além disso, escrevendo

$$t_n = \frac{\|u_n\|}{\|v\|},$$

segue que $t_n \to \|u\| / \|v\|$.

Por outro lado,

$$\left\| u_n - \frac{\|u\|}{\|v\|} v \right\| = \left| t_n - \frac{\|u\|}{\|v\|} \right| \|v\|,$$

donde, $u_n \to (\|u\| / \|v\|)\, v$. Pela unicidade do limite, $u = (\|u\| / \|v\|)\, v$. Assim, $u \in E_+$ e, consequentemente, E_+ é fechado. Portanto, E_+ é um cone ordenado.

$\blacksquare$

Observação 1.12 *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado, não-trivial e E_+ um cone ordenado de E. Claramente, a relação $\leq$ definida por*

$$u \leq v \Leftrightarrow v - u \in E_+$$

é uma relação de ordem parcial em E que torna o par $(E, \leq)$ um espaço vetorial ordenado. Ademais, E_+ é exatamente o conjunto $\{u \in E\ ;\ u \geq 0\}$. Neste caso, dizemos que a relação $\leq$ é induzida pelo cone ordenado E_+.

Vejamos mais alguns exemplos de cones ordenados.

Exemplo 1.13 *Considere $E = C([0,1], \mathbb{R})$ munido com a norma*

$$\|u\| = \max_{t \in [0,1]} |u(t)|.$$

O conjunto $E_+ = \{u \in E\ ;\ u(t) \geq 0\ \forall\ t \in [0,1]\}$ é um cone ordenado. De fato, seja $u \in \overline{E_+}$. Então, existe uma sequência (u_n) em E_+ que converge uniformemente para a função u. Segue desse fato e de (u_n) ser uma sequência em E_+ que $u \in E_+$ e, consequentemente, E_+ é um conjunto fechado. Os demais axiomas presentes na definição de cone ordenado são de verificação imediata. Portanto, o conjunto E_+ é um cone ordenado.

Exemplo 1.14 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ um domínio e $p \in [1, +\infty)$. Considere $L^p(\Omega)$, munido com a norma $\|\cdot\|_p$, o conjunto $L^p_+(\Omega)$ definido por:*

$$L^p_+(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)\ ;\ u(x) \geq 0\ q.t.p.\ em\ \Omega\}.$$

$L^p_+(\Omega)$ é um cone ordenado em $L^p(\Omega)$. Com efeito, seja (u_n) uma sequência de funções em $L^p_+(\Omega)$ tal que $\|u_n - u\|_p \to 0$. Então, a menos de subsequência, $u_n(x) \to u(x)$ para quase todo $x \in \Omega$. Segue desse fato e de (u_n) ser uma sequência em $L^p_+(\Omega)$ que $u \in L^p_+(\Omega)$ e, consequentemente, o conjunto $L^p_+(\Omega)$ é fechado. Os demais axiomas presentes na definição de cone ordenado são de fácil verificação. Portanto, o conjunto $L^p_+(\Omega)$ é um cone ordenado. Em particular, $L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial ordenado com a relação $\leq$ induzida por $L^p_+(\Omega)$.

Dado um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio e limitado, são bem conhecidas as noções de cota inferior, cota superior, supremo e infímo de X. A seguir, vamos extender esses conceitos para espaços vetoriais ordenados.

Definição 1.15 *Sejam $(E, \leq)$ um espaço vetorial ordenado e X um subconjunto não-vazio de E. Dizemos que X é limitado superiormente (inferiormente) se existe $w \in E$ tal que $x \leq w$ $(w \leq x)$ para todo $x \in X$. Neste caso, dizemos que w é uma cota superior (cota inferior) de X.*

Definição 1.16 *Sejam $(E, \leq)$ um espaço vetorial ordenado e X um subconjunto não-vazio de E. Dizemos que a é o supremo (ínfimo) de X se*
i) a é uma cota superior (inferior) de X.
ii) Se b é uma cota superior (inferior) para X então $a \leq b$ $(b \leq a)$.

Notação: $a = \sup X$ $(b = \inf X)$.

De posse dessas definições, vamos à definição de um **Espaço de Riesz.**

Definição 1.17 *Seja $(E, \leq)$ um espaço vetorial ordenado. Se para quaisquer $u, v \in E$, existirem* $\sup\{u, v\}$ *e* $\inf\{u, v\}$*, dizemos que $(E, \leq)$ é um* **reticulado vetorial** *ou um* **Espaço de Riesz**.

Vejamos alguns exemplos de Espaços de Riesz.

Exemplo 1.18 *Pelo Exemplo 1.9, o par $(\mathbb{R}^N, \leq)$ com $N \geq 1$ é um espaço vetorial ordenado. É de verificação imediata que*

$$\sup\{x, y\} = (\max\{x_1, y_1\}, \max\{x_2, y_2\}, \cdots, \max\{x_N, y_N\})$$

$$\inf\{x, y\} = (\min\{x_1, y_1\}, \min\{x_2, y_2\}, \cdots, \min\{x_N, y_N\}).$$

Então, segue que o par $(\mathbb{R}^N, \leq)$ é um Espaço de Riesz.

Exemplo 1.19 *$(\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}), \leq)$ é um espaço de Riesz. De fato, já vimos que $(\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}), \leq)$ é um espaço vetorial ordenado e dadas $f, g \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ considere as funções em $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$, definidas por*

$$\sup\{f,g\} = \max\{f,g\} \text{ e } \inf\{f,g\} = \min\{f,g\}.$$

Exemplo 1.20 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio e $p \in [1,+\infty)$. Considere o espaço $L^p(\Omega)$ munido com a relação de ordem parcial $\leq$ definida por*

$$u \leq v \Leftrightarrow v - u \in L^p_+(\Omega).$$

Pelo Exemplo 1.14, segue que $(L^p(\Omega), \leq)$ é um espaço vetorial ordenado. Sejam u, v funções em $L^p(\Omega)$ e considere as funções $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \max\{u(x), v(x)\}$ e $g(x) = \min\{u(x), v(x)\}$. Note que $f, g \in L^p(\Omega)$, pois

$$f = \tfrac{1}{2}(u + v + |u - v|) \text{ e } g = \tfrac{1}{2}(u + v - |u - v|).$$

Além disso, é fácil ver que $f = \sup\{u, v\}$ e $g = \inf\{u, v\}$. Logo, $(L^p(\Omega), \leq)$ é um espaço de Riesz.

A proposição a seguir garante que os espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$ são exemplos de Espaços de Riesz.

Proposição 1.21 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ um domínio e $p \in [1,+\infty)$. Então, os Espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$ são espaços de Riesz.*

Demonstração: A relação $\leq$, dada no Exemplo 1.20, induz uma relação de ordem parcial nos espaços $W^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$ de modo que $(W^{1,p}(\Omega)\ \leq)$ e $(W_0^{1,p}(\Omega), \leq)$ são espaços vetoriais ordenados. Pelo Teorema A.2 do Apêndice A, temos que se u pertence à $W^{1,p}(\Omega)$, então u^+ e u^- também pertencem à $W^{1,p}(\Omega)$. Da mesma forma, se u pertence à $W_0^{1,p}(\Omega)$ então as funções u^+ e u^- também pertencem à $W_0^{1,p}(\Omega)$. Em particular, a função $|u|$ também pertence aos espaços $W^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$, pois $|u| = u^+ + u^-$. Segue que as funções $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \max\{u(x), v(x)\}$ e $g(x) = \min\{u(x), v(x)\}$ pertencem a $W^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$, pois

$$f = \tfrac{1}{2}(u + v + |u - v|) \text{ e } g = \tfrac{1}{2}(u + v - |u - v|).$$

Além disso, é fácil ver que $f = \sup\{u, v\}$ e $g = \inf\{u, v\}$. Portanto, $W^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$, com a relação de ordem dada no Exemplo 1.20 são espaços de Riesz. ■

Seja E um Espaço de Riesz. De agora em diante, passemos a utilizar a seguinte notação: $x^+ = \sup\{0, x\}$ e $x^- = \inf\{0, x\}$. De posse dessas notações, vamos definir um **semireticulado vetorial**.

Definição 1.22 *Seja $(E, \|.\|)$ um espaço vetorial normado munido de uma relação de ordem parcial $\leq$. Se $(E, \leq)$ é um espaço de Riesz e, além disso, $\|x^{\pm}\| \leq \|x\|$ para todo x em E, então E é dito um* **semireticulado vetorial.**

Vejamos alguns exemplos de semireticulados vetoriais.

Exemplo 1.23 *De acordo com Exemplo 1.18, o par $(\mathbb{R}^N, \leq)$, é um Espaço de Riesz. Seja p em $[1, \infty)$ e considere o espaço normado $(\mathbb{R}^N, |\cdot|_p)$, em que*

$$|(x_1, x_2, \cdots, x_N)|_p = \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p \right)^{1/p}.$$

É fácil ver que $|x^+|_p \leq |x|_p$ e $|x^-|_p \leq |x|_p$ para todo x em $\mathbb{R}^N$. Segue que $(\mathbb{R}^N, |\cdot|_p)$ é um semireticulado vetorial.

Exemplo 1.24 *Pelo Exemplo 1.20, temos que $(L^p(\Omega), \leq)$ é um espaço de Riesz e, para qualquer função u em $L^p(\Omega)$, vale $\|u^+\|_p \leq \|u\|_p$ e $\|u^-\|_p \leq \|u\|_p$. Assim, segue que $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ é um semireticulado vetorial.*

A próxima proposição garante que os espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$ são semireticulados vetoriais.

Proposição 1.25 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ um domínio e $p \in [1, +\infty)$. Então, os Espaços de Sobolev $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ e $(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p})$ são semireticulados vetoriais.*

Demonstração: Pela Proposição 1.21, os espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$ com a relação de ordem parcial $\leq$, induzida pelo cone ordenado $L_+^p(\Omega)$, são espaços de Riesz. Por outro lado, pelo Teorema A.2 do Apêndice A, temos que

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u, & \text{se} \quad u > 0 \\ 0, & \text{se} \quad u \leq 0 \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad u \geq 0 \\ \nabla u, & \text{se} \quad u < 0. \end{cases}$$

Daí, $|\nabla u^+| \leq |\nabla u|$ e $|\nabla u^-| \leq |\nabla u|$ q.t.p. em Ω e, portanto,

$$\|u^+\|_{1,p} \leq \|u\|_{1,p} \text{ e } \|u^-\|_{1,p} \leq \|u\|_{1,p}.$$

Assim, $W^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$ são semireticulados vetoriais. ■

A seguir, veremos algumas definições relativas aos cones ordenados.

Definição 1.26 *Uma sequência (x_n) em um espaço vetorial ordenado é ordenadamente limitada se existem a, b em E tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Um cone ordenado E_+ de um espaço vetorial ordenado E é* **regular**, *se cada sequência (x_n) em E_+ crescente e ordenadamente limitada é fortemente convergente.*

Definição 1.27 *Um cone ordenado E_+ de um espaço vetorial normado E é* **completamente regular** *se cada sequência crescente e limitada de E_+ é fortemente convergente.*

Se uma sequência (x_n) em um espaço vetorial ordenado é ordenadamente limitada, significa que ela é limitada no sentido da ordem parcial definida em E. Quando ela é simplesmente limitada, significa que existe uma constante positiva C tal que $\|x_n\| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. No primeiro caso, a estrutura envolvida é a de espaço vetorial ordenado e no segundo é a de espaço vetorial normado.

Definição 1.28 *Dizemos que um cone ordenado E_+ de um espaço vetorial normado E é* **fracamente completamente regular** *se cada sequência crescente e limitada de E_+ é fracamente convergente.*

Note que se E_+ é um cone completamente regular, então E_+ é um cone fracamente completamente regular, pois convergência forte implica em convergência fraca.

A próxima proposição afirma que, em espaços vetoriais normados de dimensão finita, cones ordenados são completamente regulares.

Proposição 1.29 *Sejam E um espaço vetorial normado e E_+ um cone ordenado de E. Se E tem dimensão finita então E_+ é completamente regular. Em particular, E_+ é um cone fracamente completamente regular.*

Demonstração: Suponha que $\dim E = N$ e considere $\beta = \{e_1, e_2, \cdots, e_N\}$ uma base de E. Dado $x \in E$, existem únicos reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ tais que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_N e_N$. Desde que todas as normas em E são equivalentes, podemos considerar

$$\|x\|_\infty = \max\{|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_N|\}$$

como uma norma em E e, sem perda de generalidade, podemos considerar $E = \mathbb{R}^N$, ou seja, $x = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$. Agora, sejam (x_n) uma sequência crescente e limitada em E_+ e $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de (x_n). Denotemos a subsequência $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ simplesmente por (x_j). Considere

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (\lambda_{11}, \lambda_{12}, \cdots, \lambda_{1N}) \\
x_2 &= (\lambda_{21}, \lambda_{22}, \cdots, \lambda_{2N}) \\
&\vdots \\
x_j &= (\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \cdots, \lambda_{jN}) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

as coordenadas dos termos da sequência (x_j) em relação à base β. Assim, obtemos N sequências, $(\lambda_{km})_{k\in\mathbb{N}}$, $m \in \{1, \cdots, N\}$, de números reais. Note que para cada $m \in \{1, \cdots, N\}$ a sequência $(\lambda_{km})_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, pois (x_n) é uma sequência limitada. Segue, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, que cada sequência $(\lambda_{km})_{k\in\mathbb{N}}$ com $m \in \{1, \cdots, N\}$ possui uma subsequência fortemente convergente. Considere em E o vetor $x_0 = (\beta_1, \cdots, \beta_N)$ cujas coordenadas são exatamente os limites dessas subsequências. Como $\dim E$ é finita podemos extrair uma subsequência da sequência (x_j) convergindo para x_0. Deste modo, toda subsequência de (x_n) tem um ponto de acumulação. Pela Proposição 1.2 do Apêndice B, temos que E, com a relação de ordem parcial induzida por E_+, é um espaço topológico ordenado. Pelo Corolário 1.5, segue que (x_n) é fortemente convergente e, portanto, E_+ é um cone completamente regular. ■

Proposição 1.30 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio e considere $L^p(\Omega)$ com $p \in (1, \infty)$. Então, $L^p_+(\Omega)$ é um cone ordenado fracamente completamente regular.*

Demonstração: Primeiramente, mostremos que $L^p_+(\Omega)$ é um cone ordenado regular. Seja (u_n) uma sequência crescente e ordenadamente limitada em $L^p_+(\Omega)$, ou seja, existem h, g em $L^p(\Omega)$ tais que $g \le u_n \le h$ para todo n em $\mathbb{N}$. Logo, para cada x em Ω, a sequência $(u_n(x))$ em $\mathbb{R}$ é crescente e limitada para quase todo $x \in \Omega$. Assim, está bem definida a função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(x) = \sup u_n(x)$. Além disso, u é mensurável e está em $L^p(\Omega)$, pois $g \le u \le h$ q.t.p. em Ω. Mostremos que $\|u_n - u\|_p \to 0$. É fácil ver que

(u_n) é uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$ e $u_n(x) \to u(x)$ para quase todo $x \in \Omega$. Por outro lado, como $g(x) \leq u_n(x) \leq h(x)$ q.t.p. em Ω vem que $|u_n - u|^p \leq |g - u|^p$. Visto que $|g - u|^p \in L^1(\Omega)$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que $\|u_n - u\|_p \to 0$. Assim, $L^p_+(\Omega)$ é um cone ordenado regular. Segue pelo Teorema A.4 do Apêndice A que $L^p_+(\Omega)$ é um cone ordenado completamente regular. Em particular, $L^p_+(\Omega)$ é um cone ordenado fracamente completamente regular. ■

1.2 Um Teorema de Ponto Fixo

Nessa seção, estudamos um resultado abstrato que será utilizado nos capítulos seguintes para garantirmos a existência de solução fraca para determinados problemas elípticos. Inicialmente, apresentaremos algumas definições e resultados técnicos que serão utilizados na prova desse teorema.

Definição 1.31 *Seja $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Um subconjunto C de P é dito uma cadeia se $x \leq y$ ou $y \leq x$ para quaisquer $x, y \in C$. A cadeia C é dita bem ordenada (inversamente bem ordenada) se cada subconjunto não-vazio de C admite mínimo (máximo).*

Definição 1.32 *Seja $E = (E, \|.\|, \leq)$ um espaço vetorial ordenado. Um subconjunto P de E é dito fracamente sequencialmente ordenadamente compacto se toda sequência monótona de P possui limite fraco em P.*

Exemplo 1.33 *Considere $E = (\mathbb{R}, |\cdot|, \leq)$ onde $\leq$ é a relação de ordem usual dos reais. Seja $P \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto. Facilmente, temos que P é fracamente sequencialmente ordenadamente compacto.*

Definição 1.34 *Sejam $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $M \subset P$. Dizemos que $a \in M$ é um supremo central (infimo central) de M se $\sup\{a, y\}$ ($\inf\{a, y\}$) existe e pertence a M para todo $y \in M$.*

Exemplo 1.35 *Considere o conjunto $\mathbb{R}$ munido com a relação de ordem usual e um intervalo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Claramente b é um supremo central do intervalo I. Se $J = [a, b)$ vê-se facilmente que b não é um supremo central do intervalo J.*

Definição 1.36 *Sejam* $(P, \leq)$ *e* $(P_1, \triangleleft)$ *conjuntos parcialmente ordenados. Uma aplicação* $G : P \to P_1$ *é crescente se para quaisquer* $x, y \in P$ *vale:*

$$x \leq y \Rightarrow G(x) \triangleleft G(y).$$

Definição 1.37 *Seja* $(P, \leq)$ *um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que* P *possui a propriedade do ponto fixo se cada operador crescente* $G : P \to P$ *tem um ponto fixo.*

A seguir, apresentamos alguns resultados que serão utilizados na demonstração de um teorema de ponto fixo.

Teorema 1.38 *Sejam* $(P, \leq)$ *um conjunto parcialmente ordenado,* $G : P \longrightarrow P$ *uma aplicação e* $a \in P$*. Então, existe uma única cadeia bem-ordenada* C *em* P *(chamada uma bem-ordenada cadeia de* $G-$*iterações de* a *) satisfazendo:*
i) $a = \min C$ *e* $a < x \in C$ *se, e somente se,* $x = \sup G(\{y \in C \ ; \ y < x\})$*.*
ii) Se $x_* = \sup G(C)$ *existe e* $a \leq x_* \leq G(x_*)$*, então* $x_* = \max C$ *e* x_* *é um ponto fixo do operador* G*.*

Demonstração: Seja $\mathcal{P}(P)$ o conjunto das partes de P e $f : \mathcal{P}(P) \to P$ uma aplicação tal que $f(\varnothing) = a$ e $f(U) = \sup G(U)$ se $U \subset P$, $U \neq \varnothing$ e $\sup G(U)$ existe. Pelo Lema A.3 do Apêndice A, existe C uma bem-ordenada cadeia de $G-$iterações de a em P. Neste caso, $x \in C$ se, e somente se, $x = f(\{y \in C \ ; \ y < x\})$. Em particular, $\min C = f(\{y \in C \ ; \ y < \min C\})$. Logo, $\min C = f(\varnothing) = a$. Seja $x \in P$ tal que $a < x$. Deste modo, o conjunto $U = \{y \in C \ ; \ y < x\}$ é um subconjunto de P não-vazio. Se $x = \sup G(U)$, então $\sup G(U)$ existe e $x = f(U)$. Logo, pelo item i) do Lema A.3, $x \in C$. Reciprocamente, se $x \in C$ temos que $x = f(U)$. Além disso, note que existe $\sup G(U)$. Assim, $x = \sup G(U)$ e segue o item i) da proposição. Suponha agora que $x_* := \sup G(C)$ existe e $a \leq x_* \leq G(x_*)$. Se $x \in C$ e $x \neq a$ então $x = \sup G(\{y \in C \ ; \ y < x\}) \leq \sup G(C) = x_*$. Logo, x_* é uma cota superior de C. Note que $\sup G(\{y \in C \ ; \ y < x_*\}) = \sup G(C) = x_*$. Pelo item i), $x_* \in C$ e, assim, $x_* = \max C$. Em particular, $G(x_*) \leq \sup G(C) = x_*$. Porém, por hipótese, $x_* \leq G(x_*)$. Portanto, $x_* = G(x_*)$ e a prova está finalizada.

■

Corolário 1.39 *Sejam $P = (P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $G : P \to P$ um operador crescente. Então, para cada $a \in P$, existe uma única cadeia bem-ordenada C em P (chamada uma bem-ordenada cadeia de $G-$iterações de a satisfazendo: se $a \leq G(a)$ e se $x_* = \sup G(C)$ existe, então $x_* = \max C$ e x_* é um ponto fixo de G.*

Demonstração: Suponha que $a \leq G(a)$ e $x_* = \sup G(C)$ existe. Pelo teorema anterior, temos que $a \leq x \leq x_*$ para cada $x \in C$, pois $a = \min C$. Logo, $G(x) \leq G(x_*)$ para todo $x \in C$, pois G é um operador crescente. Assim, $x_* = \sup G(C) \leq G(x_*)$. Dessa forma, temos que $a \leq x_* \leq G(x_*)$. Portanto, pelo Teorema anterior, x_* é um ponto fixo do operador G e $x_* = \max C$.

■

Agora, enunciamos uma teorema e um corolário que são os resultados duais ao Teorema 1.38 e ao Corolário 1.39, respectivamente. As demonstrações desse teorema e desse corolário serão omitidas, pois são feitas de modo análogo as demonstrações do Teorema 1.38 e do Corolário 1.39.

Teorema 1.40 *Sejam $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado, $G : P \longrightarrow P$ uma aplicação e $b \in P$. Então, existe uma única cadeia inversamente bem-ordenada D em P (chamada uma inversamente bem-ordenada cadeia de $G-$iterações de b) satisfazendo:*
i) $b = \max D$ e $x < b \in D$ se, e somente se, $x = \inf G(\{y \in D \ ; \ x < y\})$.
ii) Se $x^* = \inf G(D)$ existe e $G(x^*) \leq x^* \leq b$, então $x^* = \min D$ e x^* é um ponto fixo do operador G.

Corolário 1.41 *Sejam $P = (P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $G : P \to P$ um operador crescente. Então, para cada $b \in P$, existe uma única cadeia inversamente bem-ordenada D em P (chamada uma inversamente bem-ordenada cadeia de $G-$iterações de b) satisfazendo: $G(b) \leq b$ e se $x^* = \inf G(D)$ existe, então $x^* = \min D$ e x_* é um ponto fixo de G.*

O próximo teorema é o resultado mais importante deste capítulo.

Teorema 1.42 *Sejam $(E, \|\cdot\|, \leq)$ um espaço vetorial ordenado e $P \subset E$ um conjunto fracamente sequencialmente ordenadamente compacto. Se P admite um supremo-central ou um ínfimo central, então P tem a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração: Sejam $a \in P$ um supremo central (se a é um ínfimo central a demonstração é análoga) e $G : P \to P$ um operador crescente. Defina a seguinte aplicação:

$$F : P \to P$$

$$x \mapsto F(x) = \sup \{a, G(x)\}.$$

Como a é um supremo-central, F está bem definida.

Sejam $x, y \in P$ tais que $x \leq y$. Então, $G(x) \leq G(y)$, pois G é crescente. Por outro lado, $F(y) \geq a$ e $F(y) \geq G(y)$. Assim, $F(y)$ é cota superior para o conjunto $\{a, G(x)\}$ e, consequentemente, $F(x) = \sup \{a, G(x)\} \leq F(y)$ o que mostra que F é crescente. Logo, pelo Corolário 1.39 existe uma cadeia C bem ordenada de $F-$iterações de a em P. Note que $G(C)$ é uma cadeia bem ordenada em P, pois G é crescente.

Seja (y_n) uma sequência crescente em $G(C)$. Em particular, (y_n) é uma sequência crescente em P. Como P é fracamente sequencialmente ordenadamente compacto, $y_n \rightharpoonup y$ com $y \in P$. Assim, pelo Lema A.5 do Apêndice A, $\sup G(C)$ existe e $G(C)$ contém uma sequência crescente (z_n) tal que $z_n \rightharpoonup \sup G(C)$. Novamente, como P é fracamente sequencialmente ordenadamente compacto, $\sup G(C) \in P$.

Por outro lado, a é um supremo-central de P. Neste caso, $\sup \{a, \sup G(C)\}$ existe e pertence a P. Verifiquemos que $\sup \{a, \sup G(C)\} = \sup F(C)$. Temos que $\sup \{a, \sup G(C)\} \geq G(x)$ para todo $x \in C$ e $\sup \{a, \sup G(C)\} \geq a$. Daí, segue que $\sup \{a, \sup G(C)\}$ é cota superior para $F(C)$. Agora, mostremos que $\sup \{a, \sup G(C)\}$ é a menor das cotas superiores para $F(C)$. Seja d uma cota superior para $F(C)$. Assim, $F(x) \leq d$ para todo $x \in C$. Logo, $\sup \{a, G(x)\} \leq d$ para todo $x \in C$. Segue que $a \leq d$ e $G(x) \leq d$ para todo $x \in C$. Daí, $a \leq d$ e $\sup G(C) \leq d$ e, consequentemente, $\sup \{a, \sup G(C)\} \leq d$. Dessa forma, $\sup \{a, \sup G(C)\} = \sup F(C)$ o que garante a existência de $\sup F(C)$. Assim, como $a \leq F(a)$ e aplicando o Corolário 1.39, obtemos que $w = \sup F(C)$ é um ponto fixo de F, ou seja, $F(w) = w$. Logo, $w \geq G(w)$. Em seguida, temos as seguintes possibilidades: $w = G(w)$ ou $w > G(w)$. Se $w = G(w)$ então w é um ponto fixo de G e a demonstração acaba. Suponha que $w > G(w)$. Pelo Corolário 1.41, existe uma cadeia inversamente bem-ordenada D de $G-$iterações de b em P. Como G é crescente, $G(D)$ é uma cadeia inversamente bem ordenada em $G(P)$.

Seja (t_n) uma sequência decrescente em $G(D)$. Em particular, (t_n) é uma sequência decrescente em P. Como P é fracamente sequencialmente ordenadamente compacto,

$t_n \rightharpoonup t$ com $t \in P$. Então, novamente pelo Lema A.5 do Apêndice A, $\inf G(D)$ existe. Logo, como $w \geq G(w)$ e $\inf G(D)$ existe, temos, pelo Corolário 1.41, que w é um ponto fixo de G, finalizando a demonstração. ■

Observação 1.43 *A demonstração do Teorema acima revela que podemos substituir a hipótese de P ser fracamente sequencialmente ordenadamente compacto pela hipótese de toda cadeia bem-ordenada e inversamente bem-ordenada de $G(P)$ possuírem supremo e ínfimo em P.*

Corolário 1.44 *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado não-trivial e E_+ um cone ordenado de E. Considere $(E, \leq)$ onde $\leq$ é a relação de ordem parcial induzida por E_+. Se E_+ é (fracamente) completamente regular, então cada subconjunto P de E, limitado e (fracamente) fechado que possui um supremo-central ou ínfimo-central tem a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração: Todo cone completamente regular é, em particular, um cone fracamente completamente regular. Dessa forma, suponhamos que E_+ seja um cone fracamente completamente regular e seja (x_n) uma sequência monótona em P. Sem perda de generalidade, suponha (x_n) crescente. Considere a sequência crescente (y_n) definida por $y_n = x_n - x_1$. Note que (y_n) é uma sequência em E_+, pois $x_1 \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como E_+ é um cone fracamente completamente regular e (y_n) é limitada, pois P é limitado, segue que $y_n \rightharpoonup y$. Porém, P é fracamente fechado. Logo, $y \in P$. Assim, P é um conjunto fracamente sequencialmente ordenadamente compacto. Além disso, por hipótese, P tem um supremo central ou um ínfimo central. Assim, pelo Teorema 1.42, segue que P tem a propriedade do ponto fixo.

■

Corolário 1.45 *Seja E um semireticulado vetorial de Banach que é reflexivo ou tem um cone ordenado fracamente completamente regular E_+. Então, qualquer bola fechada $B[a, r] = \{u \in E \ ; \ \|u - a\| \leq r\}$ tem a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração: Suponha que E tem um cone ordenado fracamente completamente regular e considere a bola $B[a, r] = \{u \in E \ ; \ \|u - a\| \leq r\}$. Mostremos que a é um supremo-central e um ínfimo-central. Seja $y \in B[a,r]$. Como E é um espaço vetorial ordenado, temos que

$$\sup\{a,y\} - a = (y-a)^+ \text{ e } \inf\{a,y\} - a = -(a-y)^+$$

onde $(y-a)^+ = \sup\{0, y-a\}$ e $(a-y)^+ = \sup\{0, a-y\}$. Logo,

$$\|\sup\{a,y\} - a\| = \left\|(y-a)^+\right\| \text{ e } \|\inf\{a,y\} - a\| = \left\|-(a-y)^+\right\|.$$

Porém, por hipótese, E é um semireticulado vetorial. Desse modo,

$$\left\|(y-a)^+\right\| \leq \|y-a\| \text{ e } \left\|(a-y)^+\right\| \leq \|y-a\|.$$

Assim, segue que $\sup\{a,y\}$ e $\inf\{a,y\}$ pertencem a bola $B[a,r]$. Logo, a é um supremo-central e um ínfimo-central. Por outro lado, o conjunto $B[a,r]$ é limitado, convexo e fracamento fechado. Portanto, pelo Corolário 1.44 a bola $B[a,r]$ tem a propriedade do ponto fixo. Agora, suponha que E seja um espaço reflexivo e seja E_+ um cone ordenado de E. Mostremos que E_+ é um cone ordenado fracamente completamente regular. Seja (x_n) uma sequência crescente e limitada em E_+ e considere (x_{n_j}) uma subsequência de (x_n). Em particular, a subsequência (x_{n_j}) é limitada. Como o espaço E é reflexivo, a sequência (x_{n_j}) possui uma subsequência que converge fracamente para algum $a \in E$. Em particular, a é um ponto de acumulação para a subsequência (x_{n_j}). Logo, cada subsequência da sequência (x_n) tem um ponto de acumulação. Assim, pelo Corolário 1.5 (veja também Proposição 1.2), a sequência (x_n) é fracamente convergente. Portanto, E_+ é um cone ordenado fracamente completamente regular e o resultado segue argumentando-se de maneira análoga ao que foi feito acima.

■

Observação 1.46 *Sob as hipóteses do Corolário 1.45, a monotonicidade do operador $G : P \longrightarrow P$, onde $P = B[a,r]$, pode ser enfraquecida pela seguinte hipótese: existe uma constante positiva M tal que o operador $\psi : P \longrightarrow P$ definido por $\psi(x) = G(x) + Mx$ é crescente. Se isso ocorre, então o operador $\tilde{G} : P \longrightarrow P$ dado por*

$$\tilde{G}(x) = \frac{1}{1+M}(G(x) + Mx)$$

é também crescente. Logo, existe $x_0 \in P$ tal que $\tilde{G}(x_0) = x_0$ e, portanto, $G(x_0) = x_0$.

Corolário 1.47 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio e* $p \in (1, \infty)$. *Então, bolas fechadas, nos espaços a seguir, têm a propriedade do ponto fixo:*

i) $(\mathbb{R}^N, \leq)$ *onde* $\leq$ *é a ordem dada no Exemplo 1.9.*

ii) $(L^p(\Omega), \leq)$ *onde* $\leq$ *é a ordem induzida pelo cone ordenado* $L^p_+(\Omega)$.

iii) $(W^{1,p}(\Omega), \leq)$ *e* $(W^{1,p}_0(\Omega), \leq)$ *onde* $\leq$ *é a ordem induzida pelo cone ordenado* $L^p_+(\Omega)$.

Demonstração: Todos esses espaços são semireticulados vetoriais (veja Exemplos 1.23 e 1.24 e Proposição 1.25) e são reflexivos. Assim, o resultado segue imediatamente pelo Corolário 1.45. ■

Capítulo 2

Um Problema Elíptico Não-Homogêneo Envolvendo o Expoente Crítico de Sobolev

Neste capítulo, vamos utilizar o resultado abstrato apresentado no capítulo anterior para analisar a existência de uma solução fraca para um problema elíptico não-homogêneo em um domínio limitado envolvendo o expoente crítico de Sobolev. Mais precisamente, sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 e consideremos o seguinte problema elíptico semilinear:

$$\begin{cases} -\Delta u &= a|u|^{2^*-2}u + |u|^{p-2}u + h, \quad \text{em} \quad \Omega \\ \quad u &= 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $h \in H^{-1}(\Omega)$, $2^* = 2N/(N-2)$ é o expoente crítico de Sobolev, $1 < p < 2$ e $a > 0$ é uma constante a ser determinada. Uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ é dita uma solução fraca do problema (2.1) se, para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, valer a igualdade

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega (a|u|^{2^*-2}u + |u|^{p-2}u)\varphi \, dx + \langle h, \varphi \rangle .$$

No intuito de mostrarmos que (2.1) possui uma solução fraca, considere o operador $F : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ definido por

$$\langle F(v), \varphi \rangle = \int_\Omega (a|v|^{2^*-2}v + |v|^{p-2}v)\varphi \, dx + \langle h, \varphi \rangle , \quad v, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Dado $v \in H_0^1(\Omega)$, a linearidade de h e da integral garantem que $F(v)$ é um funcional linear. Dada $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ e denotando por $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_{1,2}$ e $\|\cdot\|_*$, respectivamente, as normas em $L^p(\Omega), H_0^1(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega)$, obtemos pela Desigualdade de Hölder a seguinte estimativa:

$$|\langle F(v), \varphi\rangle| \leq a \|v\|_{2^*}^{2^*-1} \|\varphi\|_{2^*} + \|v\|_p^{p-1} \|\varphi\|_p + \|h\|_* \|\varphi\|_{1,2} . \tag{2.2}$$

Como $H_0^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^q(\Omega)$, para $q \in [1, 2^*]$, existe uma constante positiva $C = C(\|v\|_{2^*}, \|v\|_p, N)$ tal que

$$|\langle F(v), \varphi\rangle| \leq (C + \|h\|_*) \|\varphi\|_{1,2} .$$

Logo, $F(v) \in H^{-1}(\Omega)$ e o operador F está bem definido.

Verifiquemos que o operador F é contínuo. Sejam $u \in H_0^1(\Omega)$ e (u_n) uma sequência em $H_0^1(\Omega)$ tal que $\|u_n - u\|_{1,2} \to 0$. Desde que $H_0^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^p(\Omega)$ para qualquer $p \in [1, 2^*]$, temos que $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Então, a menos de subsequência, $u_n(x) \to u(x)$ para quase todo x em Ω e existe uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq h(x)$ para quase todo x em Ω. Assim, para qualquer $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned}|\langle F(u_n), \varphi\rangle - \langle F(u), \varphi\rangle| &\leq a \int_\Omega \left| |u_n|^{2^*-2} u_n - |u|^{2^*-2} u \right| |\varphi| \, dx \\ &+ \int_\Omega \left| |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \right| |\varphi| \, dx. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Por outro lado, a sequência (x_n) definida por $x_n = \left| |u_n|^{2^*-2} u_n - |u|^{2^*-2} u \right|$ é uma sequência em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$. De fato, existe uma constante positiva M_1 tal que

$$\left| |u_n|^{2^*-2} u_n - |u|^{2^*-2} u \right|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \leq M_1 \left(|u_n|^{2^*} + |u|^{2^*} \right).$$

Daí,

$$\int_\Omega \left| |u_n|^{2^*-2} u_n - |u|^{2^*-2} u \right|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \leq M_1 \int_\Omega \left(|u_n|^{2^*} + |u|^{2^*} \right) dx.$$

Como $H_0^1(\Omega)$ está imerso em $L^{2^*}(\Omega)$ segue que $\varphi, u \in L^{2^*}(\Omega)$ e (u_n) é uma sequência em $L^{2^*}(\Omega)$. Logo, (x_n) é uma sequência em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$. Argumentando-se de maneira análoga, segue que a sequência (y_n) definida por $y_n = \left| |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \right|$ é uma sequência em $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$. Desse modo, aplicando a Desigualdade de Hölder na estimativa (2.3), obtemos

$$|\langle F(u_n), \varphi\rangle - \langle F(u), \varphi\rangle| \leq a \left(\int_\Omega \left| |u_n|^{2^*-2} u_n - |u|^{2^*-2} u \right|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \|\varphi\|_{2^*}$$

$$+ \left(\int_\Omega \left| |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \right|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \|\varphi\|_p . \tag{2.4}$$

Usando as imersões de Sobolev na estimativa (2.4), temos que existem constantes positivas C_1, C_2 tais que

$$\|F(u_n) - F(u)\|_* \leq aC_1 \left(\int_\Omega \left| |u_n|^{2^*-2} u_n - |u|^{2^*-2} u \right|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}}$$

$$+ C_2 \left(\int_\Omega \left| |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \right|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} . \tag{2.5}$$

Por outro lado, as sequências (z_n) e (t_n) definidas por

$$z_n = \left| |u_n|^{2^*-2} u_n - |u|^{2^*-2} u \right|^{\frac{2}{2^*-1}} \text{ e } t_n = \left| |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \right|^{\frac{2}{p-1}}$$

são sequências em $L^1(\Omega)$, pois as sequências (x_n) e (y_n) são sequências em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\Omega)$ e $L^{\frac{p}{p-1}}$, respectivamente. Além disso, a menos de subsequência, $z_n(x) \to 0$ e $t_n(x) \to 0$ para quase todo $x \in \Omega$ e existem $h_1 \in L^{2^*}(\Omega)$ e $h_2 \in L^p(\Omega)$, respectivamente, tais que $|u_n(x)| \leq h_1(x)$ e $|u_n(x)| \leq h_2(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para quase todo $x \in \Omega$. Neste caso, existem constantes positivas K_1, K_2 tais que

$$\left| |u_n|^{2^*-2} u_n - |u|^{2^*-2} u \right|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \leq K_1 \left(h_1^{2^*} + |u|^{2^*} \right)$$

e

$$\left| |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \right|^{\frac{p}{p-1}} \leq K_2 \left(h_1^p + |u|^p \right).$$

Passando o limite em (2.5) e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que $\|F(u_n) - F(u)\|_* \to 0$. Portanto, F é contínuo.

Agora, dado $g \in H^{-1}(\Omega)$, considere o problema de Dirichlet linear

$$\begin{cases} -\Delta u = g, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.6}$$

Dizemos que $w \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca de (2.6) se, e somente se,

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi \, dx = \langle g, \varphi \rangle \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Por outro lado, se $g \in H^{-1}(\Omega)$, então, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe uma única função $w_g \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\langle g, \varphi \rangle = (\varphi, w_g)$ para qualquer $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, onde

$(\cdot,\cdot)$ é o produto interno usual em $H_0^1(\Omega)$, ou seja, existe uma única função $w_g \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle g, \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla w_g \nabla \varphi \; dx, \; \forall \; \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular, o problema (2.6) tem uma única solução. Dessa forma, está bem definido o operador $A^{-1} : H^{-1}(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ dado por $A^{-1}g = w_g$, onde $w_g \in H_0^1(\Omega)$ é a única solução fraca de (2.6). A linearidade do laplaciano, e o fato de (2.6) ter solução única para cada $g \in H^{-1}(\Omega)$ garantem a linearidade do operador A^{-1}. Por outro lado, sejam $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $A^{-1}f = u_f$. Assim, u_f é a única solução fraca para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, \quad \text{em} \quad \Omega \\ \quad u &= 0, \quad \text{sobre} \quad \partial.\Omega \end{cases} \tag{2.7}$$

Logo,

$$\int_\Omega \nabla(A^{-1}f)\nabla(A^{-1}f) \; dx = \left\langle f, A^{-1}f \right\rangle$$

e, portanto,

$$\left\|\nabla(A^{-1}f)\right\|_2^2 \leq \|f\|_* \left\|A^{-1}f\right\|.$$

Daí, e pela Desigualdade de Poincaré, existe uma constante positiva C tal que

$$\left\|A^{-1}f\right\| \leq C \|f\|_* \; \forall f \in H^{-1}(\Omega).$$

Assim, o operador A^{-1} é limitado. Note que $G : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$, definido por $G := A^{-1} \circ F$, é contínuo, pois é a composição de operadores contínuos.

Mostremos, agora, que $A^{-1} : H^{-1}(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ é um operador crescente. Sejam $h_1, h_2 \in H^{-1}(\Omega)$ tais que $\langle h_1, \varphi \rangle \leq \langle h_2, \varphi \rangle$ para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L_+^2(\Omega)$. Denotemos $u_1 = A^{-1}h_1$ e $u_2 = A^{-1}h_2$. Neste caso, temos que

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla \varphi \; dx = \langle h_1, \varphi \rangle \, \text{e} \int_\Omega \nabla u_2 \nabla \varphi \; dx = \langle h_2, \varphi \rangle \; \forall \; \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Logo,

$$\int_\Omega (\nabla u_1 - \nabla u_2)\nabla \varphi \; dx \leq 0 \text{ para toda } \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L_+^2(\Omega).$$

Em particular, se tomarmos a função teste $\varphi = (u_1 - u_2)^+$, obtemos

$$\int_\Omega \nabla(u_1 - u_2)\nabla(u_1 - u_2)^+ \; dx \leq 0,$$

o que mostra que $\|\nabla(u_1 - u_2)^+\|_2 \leq 0$, ou seja, $(u_1 - u_2)^+ = 0$. Assim, $u_1(x) \leq u_2(x)$ para quase todo $x \in \Omega$ e, portanto, o operador A^{-1} é crescente.

Para $v \in H_0^1(\Omega)$, considere $u = G(v)$. Pela definição do operador A^{-1}, temos que a função u é a única solução fraca para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= F(v), \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.8}$$

Dessa forma,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx = \langle F(v), \varphi \rangle \ \forall \ \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular, para $\varphi = u$, segue que

$$\|\nabla u\|_2^2 = \langle F(v), u \rangle .$$

Pela estimativa (2.2), temos

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq a \|v\|_{2^*}^{2^*-1} \|u\|_{2^*} + \|v\|_p^{p-1} \|u\|_p + \|h\|_* \|u\|_{1,2} . \tag{2.9}$$

Aplicando as imersões de Sobolev e a Desigualdade de Poincaré em (2.9), temos que existem constantes positivas $C, \tilde{c}$ tais que

$$C \|u\|_{1,2}^2 \leq (a \|v\|_{1,2}^{2^*-1} + \|v\|_{1,2}^{p-1} + \tilde{c} \|h\|_*) \|u\|_{1,2} . \tag{2.10}$$

Portanto,

$$C \|G(v)\|_{1,2} \leq a \|v\|_{1,2}^{2^*-1} + \|v\|_{1,2}^{p-1} + \tilde{c} \|h\|_* . \tag{2.11}$$

Teorema 2.1 *O Problema (2.1) tem uma solução fraca para a suficientemente pequeno.*

Demonstração: Desde que $0 < p-1 < 1$ temos que $\lim\limits_{R \to +\infty} (CR - R^{p-1} - \tilde{c} \|h\|_*) = +\infty$. Assim, existe um $R_0 > 0$, suficientemente grande , tal que $cR_0 - R_0^{p-1} - \tilde{c} \|h\|_* > 0$. Logo, para a suficientemente pequeno, vale a estimativa

$$aR_0^{2^*-1} + R_0^{p-1} + \tilde{c} \|h\|_* \leq CR_0. \tag{2.12}$$

Agora, consideremos a bola fechada em $H_0^1(\Omega)$

$$B[0, R_0] = \left\{ w \in H_0^1(\Omega) \ ; \ \|w\|_{1,2} \leq R_0 \right\} .$$

Verifiquemos que o operador $G : B[0, R_0] \longrightarrow B[0, R_0]$ está bem definido, no sentido de que $G(B[0, R_0]) \subset B[0, R_0]$. Seja $y \in G(B[0, R_0])$. Logo, existe $x \in H_0^1(\Omega)$, $\|x\|_{1,2} \leq R_0$ tal que $y = G(x)$. Por outro lado, note que a função $\psi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\psi(z) = az^{2^*-1} + z^{p-1} + \tilde{c}\|h\|_*$, é crescente. Deste modo, $\psi(\|x\|_{1,2}) \leq \psi(R_0)$. Consequentemente,

$$a\|x\|_{1,2}^{2^*-1} + \|x\|_{1,2}^{p-1} + \tilde{c}\|h\|_* \leq aR_0^{2^*-1} + R_0^{p-1} + \tilde{c}\|h\|_* \tag{2.13}$$

Usando as estimativas (2.11) e (2.12), temos que $\|G(x)\| \leq R_0$ e, portanto, o operador $G : B[0, R_0] \longrightarrow B[0, R_0]$ está bem definido.

Observe que G é um operador crescente, pois os operadores A^{-1} e F são crescentes. Ademais, $H_0^1(\Omega)$ é um semireticulado vetorial com a ordem induzida pelo cone $L_+^2(\Omega)$. Assim, pelo Corolário 1.45, o operador G tem um ponto fixo.

Seja $w \in H_0^1(\Omega)$ um ponto fixo de G, isto é, $G(w) = w$. Assim, pela definição do operador A^{-1}, w é a única solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= F(w), \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.14}$$

Em particular,

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \varphi \, dx = \langle F(w), \varphi \rangle \text{ para toda } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

de onde concluímos que $w \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do Problema (2.1).

■

Observação 2.2 *Observe que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Banach. Além disso, o operador $G : B[0, R] \longrightarrow B[0, R]$ é contínuo e $B[0, R]$ é um conjunto convexo não-vazio. Porém, o conjunto $B[0, R]$ não é compacto. Logo, não podemos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Schauder. Note que, no teorema de ponto fixo que consideramos, não foi necessária a compacidade do conjunto $B[0, R]$, nem mesmo a continuidade do operador G.*

Capítulo 3

Um Problema Elíptico com uma Não-Linearidade Crítica Mais Geral

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Neste capítulo, aplicaremos o Corolário 1.45 do Capítulo 2 para garantirmos a existência de uma solução fraca para o seguinte problema elíptico:

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u), \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função satisfazendo as seguintes hipóteses:

(H_1) Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável, então a aplicação $N_f(u) : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por $N_f(u)(x) := f(x,u)$ é mensurável.

(H_2) $|f(x,s)| \leq k_1(x) + c_1 |s|^{p_1 - 1}$ para quase todo $x \in \Omega$ e para todo $s \in \mathbb{R}$, onde $1 < p_1 \leq 2^*$, $k_1 \in L^{\frac{p_1}{p_1-1}}(\Omega)$ e $c_1 \geq 0$.

(H_3) Para quase todo $x \in \Omega$, a função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(s) := q(x,s) + f(x,s)$ é crescente (a hipótese sobre a função q está descrita a seguir);

(q) $q : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory, $q(x,\cdot)$ é crescente, $q(\cdot,0) = 0$ e $|q(x,s)| \leq k_2(x) + c_2 |s|^{p_2 - 1}$ para quase todo $x \in \Omega$ e para todo $s \in \mathbb{R}$, onde $k_2 \in L^{\frac{p_2}{p_2-1}}(\Omega), 1 < p_2 \leq 2^*$ e $c_2 \geq 0$.

Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do Problema (3.1) se, e somente se,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \ dx = \int_\Omega f(x,u)v \ dx \ \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.2}$$

Considere o operador $A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ definido por

$$\langle Au, v\rangle = a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \ dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Dado $u \in H_0^1(\Omega)$, a linearidade do gradiente e da integral garantem que Au é um funcional linear. Ademais, pela Desigualdade de Poincaré, temos

$$|\langle Au, v\rangle| \leq C \left\|\nabla u\right\|_2 \left\|v\right\|_{1,2} \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega)$$

para alguma constante C positiva. Logo, Au é um funcional linear limitado e, desta forma, o operador A está bem definido. Argumentando-se de forma semelhante, verifica-se que A é um operador linear limitado.

Em seguida, considere o operador $N_f : L^{p_1}(\Omega) \to L^{\frac{p_1}{p_1-1}}(\Omega)$ dado por

$$N_f(u)(x) := f(x,u).$$

Para $u \in L^{p_1}(\Omega)$, a hipótese (H_1) garante a mensurabilidade da função $N_f(u)$ e, para $x \in \Omega$, temos

$$|N_f(u)(x)|^{\frac{p_1}{p_1-1}} \leq \left(k_1(x) + c_2 \left|u(x)\right|^{p_1-1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}.$$

Desde que $|u|^{p_1-1} \in L^{\frac{p_1}{p_1-1}}(\Omega)$, segue da estimativa acima que $N_f(u) \in L^{\frac{p_1}{p_1-1}}(\Omega)$ e, consequentemente, o operado N_f está bem definido.

Agora, considere o operador $F : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ definido pela seguinte expressão:

$$\langle F(u), v\rangle = \int_\Omega N_f(u)(x)v \ dx \ u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Para $u \in H_0^1(\Omega)$, a linearidade da integral garante que $F(u)$ é um funcional linear. Se $v \in H_0^1(\Omega)$, a Desigualdade de Hölder e o fato de $H_0^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^{p_1}(\Omega)$ garantem a existência de uma constante $C > 0$ tal que

$$|\langle F(u), v\rangle| \leq C \left\|N_f(u)\right\|_{\frac{p_1}{p_1-1}} \left\|v\right\|_{1,2} \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega).$$

Logo, $F(u)$ é um funcional linear limitado para $u \in H_0^1(\Omega)$. Dessa forma, o operador F está bem definido. Em seguida, considere o operador de Nemytskii $N_q : L^{p_2}(\Omega) \to L^{\frac{p_2}{p_2-1}}(\Omega)$ definido por

$$N_q(u)(x) := q(x,u).$$

Se $u \in L^{p_1}(\Omega)$, pela hipótese (H_3), q é uma função de Carathéodory, o que garante a mensurabilidade de $N_q(u)$. Um argumento análogo ao utilizado com o operador N_f garante que o operador de Nemytskii acima está bem definido.

Agora, verifiquemos a continuidade do operador N_q. Seja $u \in L^{p_2}(\Omega)$ e (u_n) uma sequência em $L^{p_2}(\Omega)$ tal que $\|u_n - u\|_{p_2} \to 0$. Então, a menos de subsequência, $u_n \to u$ para quase todo $x \in \Omega$ e existe $h \in L^{p_2}(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq h(x)$ para quase todo $x \in \Omega$. Daí, pela hipótese (H_3), obtemos

$$|N_q(u_n)(x) - N_q(u)(x)|^{\frac{p_2}{p_2-1}} \leq M \left(|k_2(x)|^{\frac{p_2}{p_2-1}} + |h(x)|^{p_2} + |N_q(u)(x)|^{\frac{p_2}{p_2-1}} \right)$$

para alguma constante M maior do que zero. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que $\|N_q(u_n) - N_q(u)\|_{\frac{p_2}{p_2-1}} \to 0$. Portanto, N_q é contínuo.

Seja $Q : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ o operador definido por

$$\langle Q(u), v \rangle = \int_\Omega N_q(u)(x) v dx.$$

Dada $u \in H_0^1(\Omega)$, a linearidade da integral garante que $Q(u)$ é um funcional linear. Além disso, a Desigualdade de Hölder e o fato de $H_0^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^{p_2}(\Omega)$ implicam que $Q(u)$ é limitado. Assim, o operador Q está bem definido.

Verifiquemos que Q é um operador contínuo. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ e (u_n) uma sequência em $H_0^1(\Omega)$ tal que $\|u_n - u\|_{1,2} \to 0$. A Desigualdade de Hölder e o fato de $H_0^1(\Omega)$ estar imerso continuamente em $L^{p_2}(\Omega)$ garante que

$$\|Q(u_n) - Q(u)\|_* \leq C \|N_q(u_n) - N_q(u)\|_{\frac{p_2}{p_2-1}}.$$

Daí, e da continuidade de N_q, segue que Q é contínuo.

Vamos utilizar o seguinte resultado para garantir a existência de uma solução fraca para o Problema (3.1):

Lema 3.1 *O operador $A + Q : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ é uma bijeção. Ademais, considerando os semireticulados vetoriais $(H^{-1}(\Omega), \leq)$ e $(H_0^1(\Omega), \lhd)$ onde $\leq, \lhd$ são definidas, respectivamente, por*

$$h_1 \leq h_2 \Leftrightarrow \langle h_1, v \rangle \leq \langle h_2, v \rangle \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L_+^2(\Omega) \ \ e$$

$$u_1 \lhd u_2 \Leftrightarrow u_2 - u_1 \in L_+^2(\Omega),$$

tem-se que o operador $(A + Q)^{-1} : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ é crescente.

Demonstração: Fixados $u, v, w \in H_0^1(\Omega)$ arbtitrariamente, a função $\overline{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $\overline{f}(t) = \langle (A+Q)(u+tv), w\rangle$ é contínua, pois o operador $A+Q$ é contínuo. Se $u, v \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\langle (A+Q)(u) - (A+Q)(v), u-v\rangle = a(u-v, u-v)$$

$$+ \int_\Omega \left(N_q(u)(x) - N_q(v)(x)\right)\left(u(x) - v(x)\right) dx.$$

Porém, pela hipótese (H_3), a função $q(x,\cdot)$ é crescente. Logo,

$$\int_\Omega \left(N_q(u)(x) - N_q(v)(x)\right)\left(u(x) - v(x)\right) dx \geq 0.$$

Assim,

$$\langle (A+Q)(u) - (A+Q)(v), u-v\rangle \geq a(u-v, u-v).$$

Pela Desigualdade de Poincaré,

$$\langle (A+Q)(u) - (A+Q)(v), u-v\rangle \geq C\,\|u-v\|_{1,2}^2 \ \ \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$

para alguma constante positiva C. Em particular, se $v = 0$, obtemos

$$\langle (A+Q)(u), u\rangle \geq C\,\|u\|_{1,2}^2 \ \ \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.3}$$

Daí,

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle (A+Q)(u), u\rangle}{\|u\|} = \infty.$$

Logo, pelo Teorema A.10 do Apêndice A, existe o operador $(A+Q)^{-1}$.

Verifiquemos que $(A+Q)^{-1}$ é crescente. Sejam $h_1, h_2 \in H^{-1}(\Omega)$ tais que $h_1 \leq h_2$, ou seja, $\langle h_1, v\rangle \leq \langle h_2, v\rangle$ para todo $v \in H_0^1(\Omega) \cap L_+^2(\Omega)$. Denotemos $u_i = (A+Q)^{-1}(h_i),\ i = 1, 2$. Dessa forma, para qualquer $v \in H_0^1(\Omega) \cap L_+^2(\Omega)$ vale

$$a(u_1 - u_2, v) + \int_\Omega \left(N_q(u_1)(x) - N_q(u_2)(x)\right) v(x)dx \leq 0.$$

Em particular,

$$a(u_1 - u_2, (u_1 - u_2)^+) + \int_\Omega \left(N_q(u_1)(x) + N_q(u_2)(x)\right)(u_1 - u_2)^+(x)dx \leq 0.$$

Porém, pela hipótese (H_3), a função $q(x,\cdot)$ é crescente. Logo,

$$\int_\Omega \left(N_q(u_1)(x) - N_q(u_2)(x)\right)\left(u_1 - u_2\right)^+(x)dx \geq 0$$

e, dessa forma,

$$a(u_1 - u_2, (u_1 - u_2)^+) \leq 0.$$

Além disso,

$$a((u_1 - u_2)^+, (u_1 - u_2)^+) = a(u_1 - u_2, (u_1 - u_2)^+) + a((u_1 - u_2)^-, (u_1 - u_2)^+).$$

Observando que

$$a((u_1 - u_2)^-, (u_1 - u_2)^+) = 0,$$

tem-se

$$a((u_1 - u_2)^+, (u_1 - u_2)^+) \leq 0.$$

Por outro lado, pela Desigualdade de Poincaré,

$$a((u_1 - u_2)^+, (u_1 - u_2)^+) \geq C \left\|(u_1 - u_2)^+\right\|_{1,2}^2.$$

Assim, $\|(u_1 - u_2)^+\|_{1,2} = 0$. Portanto, o operador $(A + Q)^{-1}$ é crescente.

■

Teorema 3.2 *Sob as hipóteses $(H_1) - (H_3)$, o Problema (3.1) possui uma solução fraca nos seguintes casos:*

(a) $1 < p_1,\ p_2 < 2$;

(b) $p_1 = p_2 = 2$ *e as constantes* c_1 *e* c_2 *em* $\mathbb{R}$ *são suficientemente pequenas;*

(c) $2 < p_1,\ p_2 \leq 2^*$ *e as normas* $\|k_1\|_{\frac{p_1}{p_1-1}}$ *e* $\|k_2\|_{\frac{p_2}{p_2-1}}$ *em* $\mathbb{R}$ *são suficientemente pequenas.*

Demonstração: Considere $H_0^1(\Omega)$ munido com a relação de ordem parcial $\lhd$, induzida pelo cone ordenado $L_+^2(\Omega)$ e a norma

$$\|u\| = \left(\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

É de verificação imediata que $(H_0^1(\Omega), \|.\|, \lhd)$ é um semireticulado vetorial.

Considerando o operador $F + Q : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, sejam $u, v \in H_0^1(\Omega)$ tais que $u \lhd v$. Pela hipótese (H_3), a função ϕ definida por $\phi(s) = q(x, s) + f(x, s)$ é crescente para quase todo $x \in \Omega$. Assim,

$$[q(x, u(x)) + f(x, (u(x))]\, w(x) \leq [q(x, v(x)) + f(x, (v(x))]\, w(x)$$

para qualquer $w \in H_0^1(\Omega) \cap L_+^2(\Omega)$. Dessa forma, $(F+Q)(u) \leq (F+Q)(v)$. Logo, o operador $F+Q$ é crescente. Por outro lado, pelo Lema 3.1, o operador $(A+Q)^{-1}$ é crescente. Deste modo, o operador $G : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, definido por $G := (A+Q)^{-1} \circ (F+Q)$, também é crescente, pois é a composição de operadores crescentes.

Nosso objetivo agora é encontrar um $R > 0$ tal que $G(B[0,R]) \subseteq B[0,R]$, onde $B[0,R] = \{x \in H_0^1(\Omega) \ ; \ \|x\| \leq R\}$. Pelas hipóteses (H_1) e (H_2), Desigualdade de Hölder e o fato de $H_0^1(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^{p_1}(\Omega)$ e em $L^{p_1}(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} |\langle (F+Q)(v), u\rangle| \ &\leq \ \left(\|k_1\|_{\frac{p_1}{p_1-1}} + c_1 \|v\|_{p_1}^{p_1-1}\right) \|u\|_{p_1} \\ &+ \left(\|k_2\|_{\frac{p_2}{p_2-1}} + c_2 \|v\|_{p_2}^{p_2-1}\right) \|u\|_{p_2}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Por (3.3) e pelo fato das normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{1,2}$ serem equivalentes, temos que

$$\langle (A+Q)(u), u\rangle \geq C\|u\|^2 \ \ \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

para alguma constante positiva C. Logo, tomando $u = G(v)$ e usando a estimativa (3.4), obtemos

$$\|u\|^2 \leq \frac{1}{C}\left(\|k_1\|_{\frac{p_1}{p_1-1}} + c_1\|v\|_{p_1}^{p_1-1}\right)\|u\|_{p_1} + \frac{1}{C}\left(\|k_2\|_{\frac{p_2}{p_2-1}} + c_2\|v\|_{p_2}^{p_2-1}\right)\|u\|_{p_2}.$$

Daí, e pelo fato de $H_0^1(\Omega)$ estar imerso continuamente em $L^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, 2$, temos a desigualdade

$$\|G(v)\| \leq d\left(\|k_1\|_{\frac{p_1}{p_1-1}} + \|k_2\|_{\frac{p_2}{p_2-1}} + \tilde{c_1}\|v\|^{p_1-1} + \tilde{c_2}\|v\|^{p_2-1}\right),$$

onde $d, \tilde{c_1}, \tilde{c_2}$ são constantes positivas.

Por outro lado, considere a função $\psi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(R) = d\left(\tilde{c_1}R^{p_1-1} + \tilde{c_2}R^{p_2-1}\right)$. Neste caso, tomando $M = d\left(\|k_1\|_{\frac{p_1}{p_1-1}} + \|k_2\|_{\frac{p_2}{p_2-1}}\right)$, podemos escrever

$$\|G(v)\| \leq M + \psi(\|v\|). \tag{3.5}$$

a) Se $p_1 > 1$ e $p_2 < 2$, então $p_1 - 1 > 0$ e $p_2 - 1 < 1$. Logo, $\lim\limits_{R\to\infty}(R - \psi(R)) = \infty$. Assim, existe $R > 0$ tal que $M + \psi(R) \leq R$ para R suficientemente grande.

b) Se $p_1 = p_2 = 2$, então $\psi(R) = bR$ onde $b = d(\tilde{c_1} + \tilde{c_2})$. Se existirem constantes c_1 e c_2 suficientemente pequenas tais que $b < 1$, então existe $R > 0$ tal que $R \geq \dfrac{M}{1-b}$. Assim, $1 - b \leq \dfrac{M}{R}$. Deste modo, $b \leq 1 - \dfrac{M}{R}$. Portanto, $M + \psi(R) \leq R$.

c) Se $p_1, p_2 \in (2, 2^*]$ então existe $R > 0$ tal que $\psi(R) < R$. Consequentemente, se as normas $\|k_1\|_{\frac{p_1}{p_1-1}}, \|k_2\|_{\frac{p_2}{p_2-1}}$ são suficientemente pequenas, então $M + \psi(R) \leq R$.

Em qualquer um dos casos acima, existe $R > 0$ tal que $M + \psi(R) \leq R$. Assim, dado $u \in G\left(B\left[0, R\right]\right)$, existe $v \in H_0^1(\Omega)$, $\|v\| \leq R$ tal que $u = G(v)$. Por outro lado, note que ψ é uma função crescente e, dessa forma $M + \psi(\|v\|) \leq M + \psi(R)$. Logo, pela Equação (3.5) vale $\|u\| \leq M + \psi(R) \leq R$, de onde concluímos que $G\left(B\left[0, R\right]\right) \subset B\left[0, R\right]$. Dessa forma, como G é crescente e $(H_0^1(\Omega), \|.\|, \triangleleft)$ é um semireticulado vetorial, pelo Corolário 1.45, existe $w \in B\left[0, R\right]$ tal que $w = G(w)$, de onde segue que $(A + Q)(w) = (F + Q)(w)$. Portanto, pela Equação (3.2) w é uma solução fraca para o Problema (3.1) e isto finaliza a prova do teorema.

■

Capítulo 4

Existência de Solução para uma Equação de Schrödinger Semilinear

Neste capítulo, utilizamos o resultado abstrato obtido no Capítulo 1 para analisar a existência de solução fraca para uma equação de Schrödinger semilinear. Mais precisamente, sejam $N \geq 3$, $2^* = 2N/(N-2)$ e consideremos o seguinte problema elíptico em todo $\mathbb{R}^N$:

$$-\Delta u + V(x)u = f(x,u) + h(x). \tag{4.1}$$

Aqui, trabalhamos no espaço de Hilbert $X := D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, definido como sendo o completamento de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito a norma

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \ dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Equações do tipo (4.1) estão relacionadas a muitos problemas da Física-Matemática. Por exemplo, as soluções de (4.1) estão associadas à existência de soluções do tipo onda estacionária para equações de Schrödinger não-lineares da forma

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta \varphi + W(z)\varphi - g(|\varphi|)\varphi, \quad z \in \mathbb{R}^N.$$

Uma solução do tipo onda estácionária é uma função $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi(t,z) = e^{iEt}u(z),$$

em que $E \in \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função e $t \in \mathbb{R}$.

De agora em diante, vamos impor as seguintes hipóteses sobre as funções V, h e f :

(A_1) $V \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$ e $h \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$.

(A_2) Para cada $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mensurável, a função $\psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definida por $\psi(x) = f(x, u(x))$, é mensurável.

(A_3) Para cada $x \in \mathbb{R}^N$, $f(x, s)$ é crescente em s e, além disso, para todo $(x, s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$,

$$|f(x,s)| \leq \beta(x) |s|^{r-1} + c |s|^{2^*-1},$$

para algum $c > 0$, $2 < r < 2^*$ e $\beta \in L^{\frac{2^*}{2^*-r}}(\mathbb{R}^N)$.

Dizemos que $u \in X$ é uma solução fraca do Problema (4.1) se, e somente se,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi \; dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u \varphi \; dx = \int_{\mathbb{R}^N} (h(x) + f(x,u)) \varphi \; dx \;\forall\; \varphi \in X. \tag{4.2}$$

Consideremos a aplicação bilinear $B : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por

$$B(u, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u \varphi \; dx.$$

Desde que $V \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$, $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e $1/(N/2) + 1/2^* + 1/2^* = 1$, temos, pela desigualdade de Hölder, que $V(x)u\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Em particular, a aplicação B está bem definida. Além disso,

$$|B(u, \varphi)| \leq \|V\|_{N/2} \|u\|_{2^*} \|\varphi\|_{2^*}. \tag{4.3}$$

Por (4.3) e pelo fato de X está imerso continuamente em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, temos que existe uma constante positiva γ tal que

$$|B(u, \varphi)| \leq \gamma \|V\|_{N/2} \|u\| \|\varphi\| \;\; \forall \; u, \varphi \in X. \tag{4.4}$$

Por outro lado, pela hipótese (A_3), existe uma constante positiva M tal que

$$|f(x, v(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \leq M \left(|\beta(x)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} |v(x)|^{\frac{2^*(r-1)}{2^*-1}} + |v(x)|^{2^*} \right) \;\forall\; x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.5}$$

Ademais, pela desigualdade de Young,

$$|\beta(x)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} |v(x)|^{\frac{2^*(r-1)}{2^*-1}} \leq \frac{2^*-r}{2^*-1} |\beta(x)|^{\frac{2^*}{2^*-r}} + \frac{r-1}{2^*-1} |v(x)|^{2^*}. \tag{4.6}$$

Assim, pelas estimativas (4.5) e (4.6) obtemos

$$|f(x, v(x))|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \leq M \left(\frac{2^*-r}{2^*-1} |\beta(x)|^{\frac{2^*}{2^*-r}} + \frac{2^*-2+r}{2^*-1} |v(x)|^{2^*} \right). \tag{4.7}$$

Porém, $v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, visto que X está imerso em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, pela hipótese (A_3), a aplicação β pertence a $L^{\frac{2^*}{2^*-r}}(\mathbb{R}^N)$. Dessa forma, e por (4.7), temos que $f(x, v(x)) \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$. Logo, a aplicação $f(x, v(x)) + h(x)$ pertence à $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$. Assim, pela desigualdade de Hölder, para qualquer $\varphi \in X$, a aplicação $(f(x, v(x)) + h(x))\varphi$ pertence à $L^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto, está bem definida a aplicação $C : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por

$$C(v, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} (f(x, v) + h)\, \varphi\; dx.$$

Note que C é uma aplicação linear em relação a segunda variável. Além disso, pela hipótese (A_3), obtemos a estimativa

$$|C(v, \varphi)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\beta(x)|\, |\varphi|\, |v|^{r-1}\; dx + \int_{\mathbb{R}^N} c\, |v|^{2^*-1} |\varphi|\; dx + \int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|\, |\varphi|\; dx. \tag{4.8}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder em (4.8), temos

$$|C(v, \varphi)| \leq \left(c\, \|v\|_{2^*}^{2^*-1} + \|h\|_{\frac{2^*}{2^*-1}} + \|\beta\|_{\frac{2^*}{2^*-r}}\right) \|\varphi\|_{2^*}. \tag{4.9}$$

Por (4.9) e, desde que X está imerso continuamente em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, segue que

$$|C(v, \varphi)| \leq \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\gamma^{\frac{r-1}{2}} \|\beta\|_t + c\gamma^{\frac{2^*-1}{2}} \|v\|^{2^*-1} + \|h\|_{\frac{2^*}{2^*-1}}\right) \|\varphi\|. \tag{4.10}$$

Agora, considere o operador $A : X \to X^*$ definido por

$$\langle A(u), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi\; dx + B(u, \varphi).$$

Pelo Teorema A.20 do Apêndice A, o espaço X pode ser caracterizado por

$$X = \left\{ v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)\ ;\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N),\ i = 1, \cdots, N \right\}.$$

Logo, para qualquer $u \in X$, o funcional $A(u)$ está bem definido. Pela linearidade do gradiente e da integral, tem-se que o funcional $A(u)$ é um funcional linear. Pela desigualdade de Hölder e pela estimativa (4.3), existe uma constante positiva M tal que

$$|\langle A(u), \varphi \rangle| \leq M\, \|\varphi\|\ \ \forall\ \varphi \in X.$$

Portanto, o funcional Au é limitado e, consequentemente, o operador A está bem definido. Ademais, pela linearidade da integral e do gradiente, segue que A é um operador linear. Verifiquemos que A é um operador limitado. Seja (u_n) uma sequência em X tal que

$\|u_n - u\| \to 0$. Pela desigualdade de Hölder e por (4.3), para qualquer $\varphi \in X$ com $\|\varphi\| = 1$, obtemos

$$|\langle A(u_n) - A(u), \varphi\rangle| \leq \left(1 + \gamma \|V\|_{\frac{N}{2}}\right) \|u_n - u\| \;\; \forall \varphi \in X, \;\; \|\varphi\| = 1. \tag{4.11}$$

Assim, por (4.11), temos que

$$\|A(u_n) - A(u)\|_* \leq \left(1 + \gamma \|V\|_{\frac{N}{2}}\right) \|u_n - u\|. \tag{4.12}$$

Portanto, $\|Au_n - Au\|_* \to 0$, o que mostra que A é um operador linear limitado.

A seguir, vamos apresentar dois resultados auxiliares que serão utilizados para provarmos um teorema, que garante a existência de uma solução fraca para o Problema (4.1). Denotemos X_+ como sendo um cone ordenado de X.

Lema 4.1 *Se $\gamma \|V\|_{\frac{N}{2}} < 1$, então o operador $A : X \to X^*$ definido acima é invertível e A^{-1} é lipschitiziano. Ademais, considerando os semireticulados vetoriais $(X^*, \leq)$ e $(X, \triangleleft)$ onde $\leq, \triangleleft$ são definidas, respectivamente, por*

$$h_1 \leq h_2 \Leftrightarrow \langle h_1, v\rangle \leq \langle h_2, v\rangle \;\; \forall \; v \in X \cap X_+$$

e

$$u_1 \triangleleft u_2 \Leftrightarrow u_2 - u_1 \in X_+,$$

tem-se que o operador $A^{-1} : X^* \to X$ é crescente.

Demonstração: Pela desigualdade (4.4), temos

$$\langle Au, u\rangle \geq \left(1 - \gamma \|V\|_{N/2}\right) \|u\|^2 \;\; \forall \; u \in X. \tag{4.13}$$

Logo, A é fortemente monótono e

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} = \infty.$$

Como A é limitado, em particular A é hemicontínuo (veja definição no Apêndice A). Além disso, X é um espaço de Hilbert separável, pois $L^2(\mathbb{R}^N)$ é separável e a aplicação $T : X \to \left(L^2(\mathbb{R}^N)\right)^N$, definida por

$$T(u) = \nabla u$$

é uma isometria linear sobre a sua imagem. Logo, pelo Teorema de Browder-Minty (veja Apêndice A), existe o operador A^{-1} e este é lipschitiziano. Verifiquemos que o operador A^{-1} é crescente. Sejam $b_1, b_2 \in X^*$ tais que

$$\langle b_1, \varphi \rangle \leq \langle b_2, \varphi \rangle \ \ \forall \varphi \in X \cap X_+,$$

onde $u_i = A^{-1}b_i,\ i = 1, 2$. Em particular, tomando a função teste $\varphi = (u_1 - u_1)^+$ e usando a definição do operador A, temos

$$\left\|(u_1 - u_2)^+\right\|^2 + B((u_1 - u_2)^+, (u_1 - u_2)^+) \leq 0. \tag{4.14}$$

Porém, por (4.4),

$$-B((u_1 - u_2)^+, (u_1 - u_2)^+) \leq \gamma \left\|V\right\|_{N/2} \left\|(u_1 - u_2)^+\right\|^2. \tag{4.15}$$

Assim, por (4.14) e (4.15),

$$\left\|(u_1 - u_2)^+\right\|^2 \left(1 - \gamma \left\|V\right\|_{N/2}\right) \leq 0.$$

Mas, por hipótese, $\gamma \left\|V\right\|_{N/2} < 1$, de onde segue que $\|(u_1 - u_2)^+\| = 0$ e, dessa forma, $u_1 \lhd u_1$. Portanto, o operador A^{-1} é crescente. ∎

Lema 4.2 *Seja $F : X \to X^*$ definido por*

$$\langle F(u), \varphi \rangle = C(u, \varphi).$$

Então, o operador F está bem definido, é limitado e crescente com as relações de ordem parcial $\leq, \lhd$ definidas no Lema 4.1.

Demonstração: Dada $u \in X$, o funcional $F(u)$ está bem definido, pois a função C está bem definida. Além disso, a linearidade da função C, em relação a segunda variável, garante que $F(u)$ é um funcional linear. Por outro lado, pela Desigualdade (4.10), para qualquer $u \in X$, temos

$$|\langle F(u), \varphi \rangle| \leq \gamma^{1/2} \left(\|\beta\|_{\frac{2^*}{2^*-r}} \gamma^{\frac{r-1}{2}} \left\|u\right\|^{r-1} + c\gamma^{\frac{2^*-1}{2}} \left\|u\right\|^{2^*-1} + \|h\|_{\frac{2^*}{2^*-1}} \right) \|\varphi\|.$$

Assim, para todo $u \in X$ segue que $F(u)$ é um funcional linear limitado. Logo, o operador F está bem definido. Verifiquemos que F é um operador crescente. Sejam $u_1, u_1 \in X$ tais que $u_1(x) \leq u_2(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $\varphi \in X \cap X_+$. Então, pela hipótese (A_3), $f(x, u_1) \leq f(x, u_2)$. Portanto,

$$\langle F(u_1), \varphi \rangle \leq \langle F(u_2), \varphi \rangle \ \ \forall \varphi \in X \cap X_+,$$

isto é, F é um operador crescente. ■

Teorema 4.3 *Se as Hipóteses $(A_1), (A_2)$ são satisfeitas, $\gamma \|V\|_{\frac{N}{2}} < 1$ e $\|h\|_{\frac{2^*}{2^*-1}}$ é suficientemente pequena, então o Problema (4.1) admite uma solução fraca.*

Demonstração: Pela Equação (4.2), $u \in X$ é uma solução fraca para o Problema (4.1) se $A(u) = F(u)$ em X^*. Assim, encontrar uma solução fraca $u \in X$ para o Problema (4.1) é equivalente a encontrar um ponto fixo para o operador $G : X \to X$ dado por $G(u) = (A^{-1} \circ F)(u)$. Note que G é um operador crescente, pois é a composição de operadores crescentes. Fazendo $u = G(v)$ em (4.13) segue que

$$\left(1 - \gamma \|V\|_{N/2}\right) \|G(v)\|^2 \leq |C(v, G(v))| . \tag{4.16}$$

Por outro lado, pela estimativa (4.10), obtemos

$$|C(v, G(v))| \leq \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\gamma^{\frac{r-1}{2}} \|\beta\|_{\frac{2^*}{2^*-r}} + c\gamma^{\frac{2^*-1}{2}} \|v\|^{2^*-1} + \|h\|_{\frac{2^*}{2^*-1}} \right) \|G(v)\| . \tag{4.17}$$

Logo, por (4.16) e (4.17) temos

$$(1 - \gamma \|V\|_{N/2}) \|G(v)\| \leq \gamma^{\frac{1}{2}} \left(\|\beta\|_{\frac{2^*}{2^*-r}} \gamma^{\frac{r-1}{2}} \|v\|^{r-1} + c\gamma^{\frac{2^*-1}{2}} \|v\|^{2^*-1} + \|h\|_{\frac{2^*}{2^*-1}} \right) . \tag{4.18}$$

Se $\|h\|_{\frac{2^*}{2^*-1}}$ é suficientemente pequena, então existe $R > 0$ tal que

$$\frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \gamma \|\alpha\|_{\frac{N}{2}}\right)} \left(\|\beta\|_t \gamma^{\frac{r-1}{2}} R^{r-1} + c\gamma^{\frac{2^*-1}{2}} R^{2^*-1} + \|h\|_{\frac{2^*}{2^*-1}} \right) \leq R. \tag{4.19}$$

Agora, considere a função $\psi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(t) = \|\beta\|_{\frac{2^*}{2^*-r}} \gamma^{\frac{r-1}{2}} t^{r-1} + c\gamma^{\frac{2^*-1}{2}} t^{2^*-1} + \|h\|_{\frac{2^*}{2^*-1}} .$$

Se $z \in G(B[0, R])$, então existe $w \in B[0, R]$ tal que $z = G(w)$. Logo, por (4.18)

$$\|z\| \leq \frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{1 - \gamma \|V\|_{N/2}} \left(\|\beta\|_{\frac{2^*}{2^*-r}} \gamma^{\frac{r-1}{2}} \|w\|^{r-1} + c\gamma^{\frac{2^*-1}{2}} \|w\|^{2^*-1} + \|h\|_{\frac{2^*}{2^*-1}} \right) . \tag{4.20}$$

Por outro lado, $\|w\| \leq R$, pois $w \in B[0, R]$. Além disso, note que a função ψ é crescente. Em particular, $\psi(\|w\|) \leq \psi(R)$. Dessa forma, pelas estimativas (4.19) e (4.20) segue que $\|z\| \leq R$ e, portanto, $G(B[0, R]) \subset B[0, R]$. Como $G : B[0, R] \to B[0, R]$ é crescente, o Corolário 1.45 assegura a existência de um ponto fixo para G e, consequentemente, uma solução fraca para o Problema (4.1). Isto finaliza a prova de nosso resultado principal. ■

Apêndice A

Resultados Auxiliares

Neste apêndice, enunciamos os principais lemas e teoremas (alguns já adaptados ao nosso contexto) que foram utilizados em nosso trabalho. Aqui, Ω representa um domínio de $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 1$.

Teorema A.1 *Sejam (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e seja $f \in L^p(\Omega)$ tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tais que*
i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ para quase todo $x \in \Omega$;
ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e para quase todo $x \in \Omega$.

Demonstração: Veja [11], página 94. ■

Teorema A.2 *Sejam Ω um domínio de $\mathbb{R}^N$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $(W_0^{1,p}(\Omega))$. Então, u^+ e u^- pertencem a $W^{1,p}(\Omega)$ $(W_0^{1,p}(\Omega))$. Além disso,*

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u, & se \quad u > 0 \\ 0, & se \quad u \leq 0 \end{cases}$$

e

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0, & se \quad u \geq 0 \\ \nabla u, & se \quad u < 0 \end{cases}.$$

Demonstração: Veja [30, **?**] Teorema 1.56, página 79. ■

Lema A.3 *Sejam P um conjunto parcialmente ordenado, D uma classe de subconjuntos de P tal que $\varnothing \in D$ e $f : D \longrightarrow P$ uma aplicação. Então, existe uma única cadeia bem ordenada C satisfazendo a seguinte propriedade: $x \in C$ se, e somente se, $x = f(\{y \in C \; ; \; y < x\})$.*

Demonstração: Veja [25] Lema 1.1.1, página 4. ∎

Teorema A.4 *Seja E um espaço de Banach munido com uma relação de ordem parcial induzida por um cone ordenado E_+. Se E_+ é regular então ele é completamente regular. Se E for reflexivo, então vale a recíproca.*

Demonstração: Veja [30, 23, 20, 28] ∎

Lema A.5 *Seja C um subconjunto bem ordenado (inversamente bem ordenado) de um espaço normado E. Se toda sequência crescente (decrescente) em C converge fracamente em E, então $\sup C$ $(\inf C)$ existem. Além disso, existe uma sequência crescente (decrescente) em C que converge fracamente para o $\sup C$ $(\inf C)$.*

Demonstração: Veja [17] Lema A.3.1, página 281. ∎

Definição A.6 *Seja E um spaço de Banach real. Um operador $A : E \to E^*$ é dito coercivo se*

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|} = +\infty.$$

Definição A.7 *Seja E um espaço de Banach real. Um operador $A : E \to E^*$ é dito hemicontínuo, se para quaisquer $u, v, w \in E$, a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \langle A(u + tv), w \rangle$ é contínua.*

Definição A.8 *Seja E um espaço de Banach real. Um operador $A : E \to E^*$ é dito monótono se*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0, \; \forall \; u, v \in E.$$

Definição A.9 *Seja E um espaço de Banach real. Um operador $A : E \to E^*$ é dito fortemente monótono, se existe $c > 0$ tal que*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq c \|u - v\|^2 , \ \forall \ u, v \in E.$$

Teorema A.10 (Browder-Minty) *Sejam E um espaço de Banach (real), separável e reflexivo e $A : E \to E^*$ um operador fortemente monótono, coercivo e hemicontínuo, então existe o operador A^{-1} e ele é Lipschitziano.*

Demonstração: Veja [23] Teorema 26.A, página 557 e [33]. ■

Teorema A.11 (Teorema do Ponto fixo de Schauder) *Seja E um espaço de Banach, $K \subset E$ um compacto, convexo e não-vazio e $f : K \longrightarrow K$ uma aplicação contínua. Então, f possui um ponto fixo.*

Demonstração: Veja [5] Teorema 3.4.1, página 79. ■

Lema A.12 (Lema de Brezis-Lieb) *Sejam $p \in [1, \infty)$ e (f_n) uma sequência de funções limitadas em $L^p(\Omega)$ tais que $f_n \to f$ q.t.p. em Ω. Então, $f \in L^p(\Omega)$ e:*

$$\|f\|_p^p = \lim_{n\to\infty} (\|f_n\|_p^p - \|f - f_n\|_p^p).$$

Demonstração: Veja [26] Lema 4.6, página 10. ■

Teorema A.13 (Desigualdade de Hölder) *Sejam Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$, $1 < p < +\infty$ e $1 < q < +\infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então*

$$f.g \in L^1(\Omega) \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N} |f.g| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Veja [11], página 92. ■

Teorema A.14 (Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funcionais em $L^1(\Omega)$. Suponhamos que*
i) $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω;
ii) Existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω. Então, $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$.

Demonstração: Veja [8], página 44. ■

Teorema A.15 (Desigualdade de Interpolação) *Sejam* $f_1, f_2, \cdots, f_k$ *tais que* $f_i \in L^{p_i}(\Omega), i = 1, \cdots, k$ *com*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Então, o produto $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_k$ *pertence a* $L^p(\Omega)$ *e*

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)} .$$

Em particular, se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq q \leq \infty$*, então* $f \in L^r(\Omega)$ *para todo* $p \leq r \leq q$ *e vale*

$$\|f\|_r \leq \|f\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)}$$

onde $1/r = \alpha/p + (1-\alpha)/q, \alpha \in [0,1]$ *.*

Demonstração: Veja [11], página 93. ■

Teorema A.16 (Teorema da Representação de Riesz) *Seja* H *um espaço de Hilbert. Para qualquer* $\varphi \in H^*$*, existe um único* $f \in H$ *tal que*

$$\langle \varphi, u \rangle = \langle f, u \rangle \ \ \forall u \in H.$$

Além disso,

$$\|f\| = \|\varphi\|_* .$$

Demonstração: Veja [11], página 135. ■

Teorema A.17 (Desigualdade de Poincaré) *Suponha que* $p \in [1, \infty)$ *e* Ω *é um aberto limitado. Então, existe uma constante* C *(dependendo de* Ω *e* p*) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \ \ \forall \ u \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ *define uma norma em* $W^{1,p}_0(\Omega)$ *equivalente a norma* $\|u\|_{W^{1,p}_0(\Omega)}$*. Em* $H^1_0(\Omega)$*, a expressão*

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

é o produto interno que induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$*, a qual é equivalente a norma* $\|u\|_{H^1_0(\Omega)}$ *.*

Demonstração: Veja, por exemplo, [22]. ■

Teorema A.18 (Sobolev - Gagliardo - Nirenberg) *Se $p \in [1, N)$ então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N), \text{ onde } p^* \text{ é dado por } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

e existe uma constante $C = C(p, N)$ tal que

$$\|u\|_{p^*} \leq C \|\nabla u\|_p \ \ \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração: Veja [11], página 279 e também [27]. ■

Teorema A.19 *Se C é um subconjunto convexo de um espaço vetorial normado E, então C é fechado na topologia fraca $\sigma(E, E^*)$ se, e somente se, C é fechado na topologia forte.*

Demonstração: Veja [11], página 60. ■

Teorema A.20 *Seja $X = D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ o completamento de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito a norma*

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \ dx.$$

Então,

$$X = \left\{ v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \ ; \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N), \ i = 1, \cdots, N \right\}.$$

Demonstração: Veja [9]. ■

Apêndice B

Um Exemplo de Espaço de Riesz em Teoria da Medida e Integração

Neste apêndice, apresentamos um exemplo de um espaço de Riesz dentro do contexto da Teoria da Medida e Integração. Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X.

Definição B.1 *Uma função $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ é dita aditiva, se para cada família finita $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de subconjuntos de $\mathcal{A}$, dois a dois disjuntos, com $\cup_{i=1}^{n} A_1 \in \mathcal{A}$, vale a igualdade*

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Definição B.2 *Seja $\mathcal{A}$ uma $\sigma-$álgebra e $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$. A função μ é dita uma carga com sinal se μ goza das seguintes propriedades:*

i) μ é aditiva.

ii) μ assume no máximo um dos valores $+\infty$ ou $-\infty$.

iii) $\mu(\varnothing) = 0$.

Se μ assume apenas valores não negativos, μ é dita simplesmente uma carga.

Definição B.3 *Sejam $\mathcal{A}$ uma $\sigma-$álgebra de subconjuntos de um conjunto X e $A \in \mathcal{A}$. Uma partição do conjunto A é uma coleção finita $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ de subconjuntos de $\mathcal{A}$, dois a dois disjuntos, tal que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.*

Definição B.4 *Seja $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma carga com sinal. A variação de μ é definida por*

$$V_\mu = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)| \ ; \ \{A_1, A_2, \cdots, A_n\} \ \textit{é uma partição de } X \right\}.$$

Se V_μ for finita, diz-se que μ é de variação limitada.

Claramente, se $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma carga com sinal de variação limitada, então μ assume apenas valores finitos. Passemos a utilizar a notação

$$Char(\mathcal{A}) = \left\{ \mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}} \ ; \ \mu \text{ é uma carga com sinal de variação limitada} \right\}.$$

É imediato que $Char(A)$, com as operações $(\mu+\nu)(A) = \mu(A)+\nu(A)$ e $(\lambda\mu)(A) = \lambda\mu(A)$, é um espaço vetorial real.

Defina a seguinte relação de ordem parcial em $Char(\mathcal{A})$: $\nu \leq \mu$ se, e somente se, $\nu(A) \leq \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Claramente, o par $(Char(\mathcal{A}), \leq)$ é um espaço vetorial ordenado.

Lema B.5 *Se $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ uma carga com sinal e $A, B \in \mathcal{A}$ são tais que $A \subset B$, $B \backslash A \in \mathcal{A}$, então*

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

Demonstração: *Segue imediatamente do fato de $B = A \dot{\cup} (B \setminus A)$.* ■

Proposição B.6 *O par $(Char(\mathcal{A}), \leq)$ é um espaço de Riesz.*

Demonstração: Sejam $\mu, \nu \in Char(\mathcal{A})$ e considere a função $\omega : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $\omega(A) = \sup\{\mu(B) + \nu(A \setminus B) \ ; \ B \in \mathcal{A} \text{ e } B \subset A\}$. Mostremos que $\omega \in Char(\mathcal{A})$ e $\omega = \sup\{\mu, \nu\}$. Sejam $A, B \in \mathcal{A}$ tais que $A \cap B = \varnothing$. Considere os conjuntos $C, D \in \mathcal{A}$ tais que $C \subset A$ e $D \subset B$. Assim,

$$\begin{aligned}[\mu(C) + \nu(A \setminus C)] + [\mu(D) + \nu(B \setminus D)] &= \mu(C \cup D) + \nu((A \cup B) \setminus (C \cup D)) \\ &\leq \omega(A \cup B).\end{aligned}$$

Segue que $\omega(A) + \omega(B) \leq \omega(A \cup B)$. Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$ existe $C \in \mathcal{A}$, com $C \subset A \cup B$ tal que

$$\omega(A \cup B) - \varepsilon < \mu(C) - \nu((A \cup B) \setminus C)$$

$$= [\mu(C \cap A) + \nu(A \setminus C)] + [\mu(C \cap B) + \nu(B \setminus C)]$$

$$\leq \omega(A) + \omega(B).$$

Pela arbitrariedade do ε tomado, temos que $\omega(A \cup B) \leq \omega(A) + \omega(B)$ e, consequentemente, $\omega(A \cup B) = \omega(A) + \omega(B)$. Donde, a função ω é aditiva. Claramente, a função ω admite apenas valores reais e $\omega(\varnothing) = 0$. Dessa forma, $\omega \in Char(\mathcal{A})$.

Agora, mostremos que $\omega = \sup\{\mu, \nu\}$. É fácil ver que $\mu \leq \omega$ e $\nu \leq \omega$. Por outro lado, sejam $\theta \in Char(\mathcal{A})$ tal que $\mu \leq \theta$ e $\nu \leq \theta$ e $A \in \mathcal{A}$, e considere $B \in \mathcal{A}$ tal que $B \subset A$. Assim,

$$\mu(B) + \nu(A \setminus B) \leq \theta(B) + \theta(A \setminus B) = \theta(A).$$

Segue que $\omega(A) \leq \theta(A)$. Portanto, $\omega = \sup\{\mu, \nu\}$. Analogamente, mostra-se que $\inf\{\mu, \nu\} = \inf\{\mu(B) + \nu(A \setminus B)\ ;\ B \in \mathcal{A} \text{ e } B \subset A\}$. Portanto, o conjunto $Char(\mathcal{A})$ munido com a relação de ordem parcial $\leq$, definida acima, é um espaço de Riesz. ∎

Referências Bibliográficas

[1] **Adly, S., Buttazzo, G. e Thera, M.**, *Critical points for nonsmooth energy functions and applications*, Nonlinear Anal. **27** (1996), 327-338.

[2] **Ali, I. e Castro, A.**, *Positive solutions for a semilinear elliptic problem with critical exponent*, Nonlinear Anal. **32** (1998), 711-718.

[3] **Ambrosetti, A.**, *Critical points and nonlinear variational problems*, Mem. Soc. Math. France **49** (1992), 1-139.

[4] **Ambrosetti, A. e Badiale, M.**, *The dual variational principle and elliptic problems with discontinuos nonlinearities*, Journal Math. Anal. Appl. **140** (1989), 363-373.

[5] **Ambrosetti, A., Brezis, H. e Cerami, G.**, *Combined effects of concave and convex nonlinearites in some elliptic problems*, Journal Functional Analysis **122** (1994), 519-543.

[6] **Ambrosetti, A. e Struwe, M.**, *A note on the problem* $-\Delta u = \lambda u + u\,|u|^{2^*-2}$, Manus. Math. **54** (1986), 373-379.

[7] **Badiale, M.**, *Semilinear elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$ *with discontinuous nonlinearities*, Atti del Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **43** (1995), 293-305.

[8] **Bartle, R. G.**, *The Elements of Integration*, Jonh Wiley and Sons, New York, (1966).

[9] **Ben-Naoum, A. C., Troestler C. e Willem, M.**, *Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains* Nonlinear Analysis, Theory, Methods and aplications **26** (1996), 823-833.

[10] **Bertone, A. M. e Gonçalves, J. V.**, *Discontinuous elliptic problems in $\mathbb{R}^N$: lower and upper solutions and variational principles*, DCDS **6** (2000), 315-328.

[11] **Brezis, H.**, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential*, Springer, New York, (2011).

[12] **Brezis, H. e Nirenberg, L.**, *Positive Solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437-477.

[13] **Carl, S.**, *Extremal solution for quasilinear elliptic inclusions in all $\mathbb{R}^N$ with state dependent subdifferentials.* J. Optim. Theory Appl, **104** (2000), 323-342.

[14] **Carl, S. e Dietrich, H.**, *The weak upper and lower solution method for quasilinear ellptic equations with generalized subdifferentiable pertubations*, Appl. Anal. **56** (1995), 263-278.

[15] **Carl, S. e Heikkila, S.**, *A free boundary value problem for quasilinear elliptic equations in exterior domains.* Differential and Integral Equations, **11** (1998), 409-423.

[16] **Carl, S. e Heikkila,S**, *Nonlinear Differential Equations in Ordered Spaces*, Chapman e Hall/CRC, London, 2000.

[17] **Carl, S. e Heikkillä, H.**, *Elliptic problems with lack of compactness via a new fixed point theorem* Journal of Differential Equations **186** (2002), 122-140.

[18] **Chabrowski, J.**, *Variational Methods for Potential Operator Equations*, Walther de Gruyter, Berlin, 1997.

[19] **Chang, K. C.**, *Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations*, Journal Math. Anal. Appl. **80** (1981), 102-129.

[20] **Deimling, K.**, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, New York, 1985.

[21] **Drabek, P. e Huang, Y. X.**, *Multiplicity of positive solutions for some quasilinear elliptic equation in $\mathbb{R}^N$ with critical Sobolev exponent*, J. Differential Equations **140** (1997), 106-132.

[22] **Evans, L. C.**, *Partial Differential Equations*, Rhode Island: American Math. Society, (1999).

[23] **Guo, D. and Lakshmikantham, V.**, *Nonlinear Problems in Abstract Cones*, Academic Press, New York-London, 1988.

[24] **Heikkila, S.**, *A method to solve discontinuos boundary value problems*, Nonlinear Anal. **47** (2001), 2387-2394.

[25] **Heikkila,S. e Lakshmikantham, V.**, *Monotone Iterative Techniques for Discontinuous Nonlinear Differential Equations*, Marcel Dekker, New York, Basel, 1994.

[26] **Kavian, O.**, *Introduction à la théorie des points critiques*, Springer-Verlag, Paris, 1993.

[27] **Kesavan, S.**, *Nonlinear Functional Analysis,* Hindustan Agência Book, (1905).

[28] **Krasnosel'skii, M. A.**, *Positive Solutions of Operator Equations*, Noordhoff-Groningen, The Netherlands, 1964.

[29] **Pao, C. V.**, *Nonlinear elliptic boundary-value problems in unbounded domains*, Nonlinear Anal. **18** (1992), 759-774.

[30] **Sun, J**, *On the equivalence of normal cones and fully regular cones in reflexive Banach spaces* (in chinese), Kexue Tongbao, 28: 382.

[31] **Tarantelo, G.**, *On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire Anal. Appl. **9** (1992), 281-304.

[32] **Troianiello, G. M.**, *Elliptic Differential Equations and Obstacle Problems*, Plenum Press, New York, 1987.

[33] **Zeidler, E.**, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/B-Nonlinear Monotone Operators*, Springer-Verlag, New York, 1990.