

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Lineabilidade e espaçabilidade em conjuntos de operadores
que atingem a norma e em espaços de sequências

Kleber Soares Câmara

2012

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Lineabilidade e espaçabilidade em
conjuntos de operadores que atingem a
norma e em espaços de sequências

por

Kleber Soares Câmara

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Julho de 2012

João Pessoa-PB

Lineabilidade e espaçabilidade em conjuntos de operadores que atingem a norma e em espaços de sequências

por

Kleber Soares Câmara

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho (UFU)

Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva (UFCG)

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna (UFPB) - SUPLENTE

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

A minha família.

Agradecimentos.

Agradeço a Deus, *porque todos nós temos recebido da sua plenitude e graça sobre graça* (João 1:16).

Sou grato a minha família, pelo seu cuidado e carinho.

Agradeço ao meu orientador, Dr. Daniel Marinho Pellegrino, por demonstrar confiança em mim.

Por fim, agradeço a Capes, pelo apoio financeiro.

Resumo

A noção de lineabilidade surgiu nos anos 80, embora a essência da ideia seja bem anterior, como uma forma de medir a existência de estruturas lineares em ambientes *a priori* não lineares. Mais precisamente, um subconjunto de um espaço vetorial topológico é lineável (espaçável) se ele contiver, exceto possivelmente pelo vetor nulo, um subespaço (subespaço fechado) de dimensão infinita. Neste trabalho estudamos resultados de lineabilidade e espaçabilidade no contexto de operadores lineares que atingem a norma e também em espaços de sequências.

Palavras-Chave: lineabilidade, espaçabilidade, espaços de sequências, operadores que atingem a norma.

Abstract

The notion of lineability emerged in the eighties, albeit its essence is quite older, as a method to measure the existence of linear structures in *a priori* nonlinear frameworks. More precisely, a subset of a topological vector space is lineable (spaceable) if it contains, except eventually for the null vector, an infinite-dimensional subspace (infinite-dimensional closed subspace). In this work we investigate lineability and spaceability in the context of norm attaining operators and sequence spaces.

Key-Words: lineability, spaceability, sequence spaces, norm attaining operators.

Sumário

1	Lineabilidade no conjunto dos operadores que atingem a norma	2
1.1	Operadores que atingem a norma	2
1.2	Lineabilidade e espaçabilidade	6
1.3	Lineabilidade, espaçabilidade & Funcionais que atingem a norma	8
1.4	Lineabilidade no conjunto dos operadores que atingem a norma	10
2	Lineabilidade e espaçabilidade em espaços de seqüências	31
2.1	O conjunto $l_p - \cup_{0 < q < p} l_q$	31
2.2	Espaços de seqüências	34
2.3	Resultados	35
3	Apêndice	44
3.1	Aplicações multilineares e polinômios entre espaços de Banach	44
3.2	Os espaços l_p com $p > 0$	47
3.3	Uma demonstração construtiva do Teorema 2.1.3	51

Introdução

O estudo da existência de estruturas lineares em ambientes *a priori* não lineares teve início nos anos 80 como uma espécie de medida algébrica do tamanho de subconjuntos de espaços vetoriais de dimensão infinita. A essa “medida” algébrica deu-se o nome de lineabilidade, e diz-se que um subconjunto de um espaço vetorial topológico é lineável (espaçável) se ele contiver, exceto possivelmente pelo vetor nulo, um subespaço (subespaço fechado) de dimensão infinita. Neste trabalho apresentamos, de forma detalhada, resultados de lineabilidade e espaçabilidade no contexto de operadores lineares que atingem a norma e também em espaços de sequências, pretendendo transmiti-los de um modo acessível.

Inicialmente discorreremos sobre a teoria de operadores que atingem a norma e a teoria de lineabilidade e espaçabilidade num contexto mais amplo. Nessa linha, um problema natural é constatar propriedades, sobre os espaços de Banach em questão, que contribuam para que todos operadores lineares contínuos, definidos em tais espaços, atinjam suas normas. Entretanto, antes de estudarmos os operadores entre espaços de Banach arbitrários, tendo em vista a generalidade de tal estudo, achamos melhor considerar primeiro, ainda que de um modo bem objetivo, o caso de funcionais lineares sobre o corpo dos números reais. Mostramos como tais assuntos têm sido relacionados em trabalhos recentes e fazemos um estudo da lineabilidade do conjunto dos operadores que atingem a norma e da lineabilidade de classes gerais de espaços de sequências, almejando obter um texto que contribua para esse estudo. O artigo [27], em que estão baseados os principais resultados para o Capítulo 1, bem como as referências nele contidas, nos deixam um legado importante dos vários contextos em que a lineabilidade

aparece.

Inserimos ainda três apêndices; os dois primeiros objetivando tornar a leitura deste trabalho mais auto-suficiente e, o último, visando complementar o Teorema 2.1.3.

As nossas principais fontes de referência são os artigos [14] e [27].

Vejamos a estrutura em que apresentamos cada tópico desta dissertação:

Estrutura dos Tópicos Apresentados

No Capítulo 1 discorremos sobre lineabilidade no contexto do conjunto dos operadores entre espaços de Banach que atingem a norma, e apresentamos resultados de lineabilidade e espaçabilidade relacionados a esse conjunto.

No Capítulo 2, além de espaços de Banach, trabalhamos também com espaços quasi-Banach, na perspectiva de considerar classes mais gerais de espaços de sequências e, nesse contexto, apresentamos resultados de lineabilidade e espaçabilidade.

O primeiro apêndice trata de aplicações multilineares e polinômios entre espaços de Banach, que foi introduzido no intuito de facilitar o entendimento de algumas das afirmações feitas na Seção 1 do Capítulo 1.

No segundo apêndice fazemos uma breve exposição dos espaços l_p para $p > 0$, dando ênfase ao caso $0 < p < 1$, onde encontramos os espaços p -Banach e quasi-Banach.

Finalmente, no terceiro e último apêndice destacamos uma demonstração construtiva (baseada em [13]) para o Teorema 2.1.3, isto é, estabelecemos um algoritmo que gera muitos exemplos concretos de sequências que pertencem a l_p , $0 < p < \infty$, mas que não pertencem a l_q , para $0 < q < p$.

Notação e Terminologia

- Em todo este texto, \mathbb{K} denotará o corpo dos reais \mathbb{R} ou o corpo dos complexos \mathbb{C} . Os espaços vetoriais sempre serão considerados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , a menos que se mencione algo em contrário.
- Usaremos o termo “operador” com o mesmo sentido de “função”.

- Na maior parte deste texto, X, Y, X_i, Y_i, \dots denotarão espaços de Banach sobre \mathbb{K} . A norma de um espaço de Banach X será usualmente denotada por $\|\cdot\|$; quando maior precisão for necessária, nós usaremos $\|\cdot\|_X$. O símbolo B_X denotará a bola unitária fechada $\{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ de um espaço de Banach X . De maneira semelhante, S_X denotará a esfera unitária $\{x \in X; \|x\| = 1\}$.
- O dual (topológico) de um espaço de Banach X será denotado por X^* .
- Usaremos o símbolo $\mathcal{NA}(X; Y)$ para denotar o conjunto dos operadores lineares de X em Y que atingem a norma. Dado $x_0 \in S_X$, $\mathcal{NA}^{x_0}(X; Y)$ denotará o conjunto dos operadores que atingem a norma em x_0 .
- $\mathcal{L}(X; Y)$ é o conjunto dos operadores lineares contínuos de X em Y .
- Denotamos por $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ o espaço de Banach de todas as aplicações m -lineares contínuas de $X_1 \times \dots \times X_m$ em Y , com a norma usual do sup.
- $l_p, 0 < p < \infty$, é o espaço das sequências $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ com norma (p -norma, se $0 < p < 1$) $\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.
- Denotamos por q' o conjugado de que q , isto é, $q' = \frac{q}{q-1}$.

Capítulo 1

Lineabilidade no conjunto dos operadores que atingem a norma

Neste capítulo dedicamos as duas seções iniciais para descrever um pouco da teoria de operadores que atingem a norma e da teoria de lineabilidade e espaçabilidade. Na Seção 1.3 mostramos como tais assuntos têm sido relacionados em trabalhos recentes. Finalmente, na Seção 1.4, estudamos a lineabilidade do conjunto dos operadores que atingem a norma.

1.1 Operadores que atingem a norma

A norma de um operador linear contínuo $u : X \rightarrow Y$ entre espaços de Banach é definida como sendo o supremo dos valores $\|u(x)\|$ com x percorrendo os vetores da bola unitária fechada de X . A norma de u é denotada por $\|u\|$. Não é difícil ver que nem sempre tal supremo é atingido. Por exemplo, veremos na Seção 1.4 que, para $1 \leq p \leq q < \infty$, o operador linear contínuo $u : l_p \rightarrow l_q$, definido por

$$u((x_j)_{j=1}^\infty) = \left(\frac{jx_j}{j+1} \right)_{j=1}^\infty$$

não atinge sua norma. Esse tipo de acontecimento não é surpreendente se nos lembrarmos que a bola unitária fechada em um espaço de Banach de dimensão infinita nunca é compacta.

Uma questão natural é averiguar propriedades sobre X e/ou Y que contribuam para que todos operadores lineares contínuos de X em Y atinjam suas normas. Antes de mergulhar em toda a generalidade de operadores entre espaços de Banach arbitrários X e Y , é natural que o caso de funcionais lineares sobre o corpo dos números reais ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) seja estudado primeiro. Nessa direção temos uma caracterização definitiva dos funcionais que atingem a norma:

Teorema 1.1.1 (R.C. James, 1972) ([23]) *Seja X um espaço de Banach. O conjunto dos funcionais lineares contínuos $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ que atingem a norma coincide com X^* se, e somente se, X é um espaço reflexivo.*

Para espaços não-reflexivos torna-se, portanto, interessante estudar propriedades do conjunto dos funcionais lineares contínuos que atingem a norma. Um resultado fundamental nessa linha é o Teorema de Bishop–Phelps demonstrado em 1961 por E. Bishop e R.R. Phelps:

Teorema 1.1.2 (Bishop–Phelps, 1961) ([12]) *Dado um espaço de Banach X , o conjunto dos funcionais lineares contínuos definidos em X que atingem a norma é denso em X^* .*

A demonstração mais conhecida do Teorema de Bishop–Phelps repousa em ferramentas não construtivas, como o Lema de Zorn (para uma referência em português, sugerimos [18]).

Não se deve esperar uma generalização do Teorema de Bishop–Phelps para operadores lineares contínuos entre espaços de Banach X e Y . Bishop e Phelps levantaram esta questão no mesmo trabalho em que provaram seu resultado fundamental (Teorema 1.1.2). Existem exemplos em [25] de espaços de Banach X e Y , devidos a J. Lindenstrauss, para os quais o conjunto dos operadores lineares contínuos de X em Y não é denso em $\mathcal{L}(X; Y)$. Em seu trabalho, Lindenstrauss definiu duas propriedades sobre os espaços de Banach X e Y , no intuito de tornar sua investigação mais criteriosa, já que a questão levantada por Bishop e Phelps era bem abrangente. Essas propriedades ficaram conhecidas como propriedades A e B. Para exibi-las de forma

mais clara, vamos denotar por $\mathcal{NA}(X; Y)$ o conjunto dos operadores lineares contínuos de X em Y que atingem a norma.

- Propriedade **A**.

*Seja X um espaço de Banach. Diz-se que X tem a propriedade **A** se, para todo espaço de Banach Y , o conjunto $\mathcal{NA}(X; Y)$ é denso com a norma do supremo em $\mathcal{L}(X; Y)$.*

- Propriedade **B**.

*Seja Y um espaço de Banach. Diz-se que Y tem a propriedade **B** se, para todo espaço de Banach X , o conjunto $\mathcal{NA}(X; Y)$ é denso com a norma do supremo em $\mathcal{L}(X; Y)$.*

Vemos assim que o Teorema de Bishop–Phelps diz, precisamente, que \mathbb{R} tem a propriedade **B**. Mais adiante veremos que existem espaços de Banach que não possuem a propriedade **B**.

Ainda nessa linha, Lindenstrauss mostrou que todo espaço de Banach reflexivo tem a propriedade **A**. Para enunciar este resultado, recordemos que, dado um operador linear contínuo $T : X \rightarrow Y$, definimos, a partir deste, os operadores

$$\begin{aligned} T^* : Y^* &\rightarrow X^* \\ f &\longmapsto T^*(f) = f \circ T \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T^{**} : X^{**} &\rightarrow Y^{**} \\ \varphi &\longmapsto T^{**}(\varphi) = \varphi \circ T^*. \end{aligned}$$

Denotando por $\mathcal{N}^{**}\mathcal{A}(X; Y)$ o conjunto dos operadores lineares contínuos $T : X \rightarrow Y$ tais que $T^{**} : X^{**} \rightarrow Y^{**}$ atinge a norma, enunciamos o teorema:

Teorema 1.1.3 (Lindenstrauss, 1963) ([25]) *O conjunto $\mathcal{N}^{**}\mathcal{A}(X; Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X; Y)$ para todos os espaços de Banach X e Y . Em particular, todo espaço reflexivo tem a propriedade **A**.*

O fato de todo espaço reflexivo ter a propriedade **A** é decorrente da inclusão $\mathcal{N}^{**}\mathcal{A}(X;Y) \subset \mathcal{N}\mathcal{A}(X;Y)$, que ocorre para todo espaço de Banach Y sempre que X é reflexivo. Como, neste caso, o teorema afirma que $\mathcal{N}^{**}\mathcal{A}(X;Y)$ é denso em $\mathcal{L}(X;Y)$, com maior razão obtemos a densidade de $\mathcal{N}\mathcal{A}(X;Y)$ em $\mathcal{L}(X;Y)$, ou seja, X tem a propriedade **A**. Provemos a validade da referida inclusão. Com efeito, dado $T \in \mathcal{N}^{**}\mathcal{A}(X;Y)$, e sendo X reflexivo, existe $J_{x_0} \in X^{**}$, onde J_{x_0} é a injeção canônica aplicada no vetor unitário x_0 , tal que

$$\begin{aligned} \|T^{**}\| &= \|T^{**}(J_{x_0})\| = \|J_{x_0} \circ T^*\| = \sup_{\|f\|_{Y^*} \leq 1} \|J_{x_0}(T^*(f))\| \\ &= \sup_{\|f\|_{Y^*} \leq 1} \|J_{x_0}(f \circ T)\| = \sup_{\|f\|_{Y^*} \leq 1} \|f(T(x_0))\| = \|T(x_0)\|. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|T^{**}\| &= \sup_{\|J_x\|_{X^{**}} \leq 1} \|T^{**}(J_x)\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|J_x \circ T^*\| \\ &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \left(\sup_{\|f\|_{Y^*} \leq 1} \|J_x(T^*(f))\| \right) = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \left(\sup_{\|f\|_{Y^*} \leq 1} \|J_x(f \circ T)\| \right) \\ &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \left(\sup_{\|f\|_{Y^*} \leq 1} \|f(T(x))\| \right) = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\| = \|T\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|T\| = \|T^{**}\| = \|T(x_0)\|$$

isto é, $T \in \mathcal{N}\mathcal{A}(X;Y)$, e isto nos dá a inclusão $\mathcal{N}^{**}\mathcal{A}(X;Y) \subset \mathcal{N}\mathcal{A}(X;Y)$ desejada.

A publicação deste teorema despertou o interesse pelo estudo das propriedades **A** e **B**. Ao estudar tais propriedades, W.T. Gowers mostrou o seguinte:

Teorema 1.1.4 (Gowers, 1990) ([21]) *Os espaços l_p , para $1 < p < \infty$, não têm a propriedade **B**.*

Para provar esta afirmação, Gowers construiu um espaço de Banach especial que, em sua homenagem, é atualmente chamado de espaço G . Fazendo uso de tal espaço, M. D. Acosta, F. J. Aguirre e R. Payá [1] provaram que não existe nenhum teorema do tipo Bishop–Phelps para o caso de aplicações bilineares. A partir disso conseguiu-se provar

o caso multilinear. Mais precisamente, provou-se que, se X é um espaço de Banach estritamente convexo e G é o espaço de Gowers, então, para todo $m > 1$, o conjunto $\mathcal{NA}(^m G; X)$ das aplicações m -lineares contínuas que atingem a norma não é denso no conjunto $\mathcal{L}(^m G; X)$ das aplicações m -lineares contínuas.

Mesmo não existindo uma extensão do Teorema de Bishop–Phelps para o caso multilinear, R. Aron, C. Finet e E. Werner [5] iniciaram uma pesquisa nessa linha, conseguindo estabelecer condições suficientes (como, por exemplo, a propriedade de Radon-Nikodým) sobre um espaço de Banach X para que nele se verifique uma versão multilinear do Teorema de Bishop–Phelps.

Houve ainda outros resultados nessa linha, mas queremos frisar o caso dos polinômios 2-homogêneos. Neste caso, R. Aron, D. García e M. Maestre conseguiram obter um resultado do tipo Bishop–Phelps, semelhante ao Teorema de Lindenstrauss:

Teorema 1.1.5 (Aron–García–Maestre) ([6]) *Seja X um espaço de Banach. O conjunto dos polinômios 2-homogêneos em X a valores em \mathbb{R} , cuja extensão a X^{**} atinge a norma, é denso no correspondente conjunto dos polinômios 2-homogêneos.*

No teorema acima, a extensão de polinômios refere-se à sua extensão canônica, também conhecida como extensão de Aron–Berner (ao leitor interessado, indicamos a leitura de [4]).

Existem outros resultados, nessa linha, para polinômios e para funções holomorfas, e ainda algumas questões abertas para o caso das aplicações multilineares.

1.2 Lineabilidade e espaçabilidade

O conceito de lineabilidade apareceu primeiramente em [22] como uma espécie de medida algébrica do tamanho de subconjuntos de espaços vetoriais de dimensão infinita. O termo *lineável* parece ter sido usado pela primeira vez por V. Gurariy e tem sido explorado de forma ampla em diversos contextos.

Recentemente tem-se publicado alguns trabalhos relativos à lineabilidade dos conjuntos $\mathcal{NA}(X; \mathbb{K})$ e $\mathcal{L}(X; \mathbb{K}) \setminus \mathcal{NA}(X; \mathbb{K})$ (veja [2]), onde a geometria de X tem um

papel essencial nesse estudo. Se substituirmos \mathbb{K} por um espaço de Banach Y com dimensão infinita, então a geometria de Y parece ter um papel decisivo nesse estudo. Isto será esclarecido na Seção 1.4. Veremos que a presença de um espaço de Banach Y de dimensão infinita em lugar de um corpo \mathbb{K} de escalares nos permite estudar a lineabilidade do conjunto $\mathcal{NA}^{x_0}(X; Y)$ dos operadores que atingem a norma em um vetor unitário x_0 fixo.

Para estudar se um subconjunto de um espaço vetorial possui algum tipo de estrutura linear, o conceito de lineabilidade é essencial. Vejamos, com precisão, a definição de lineabilidade e espaçabilidade:

Definição 1.2.1 *Seja E um espaço vetorial de dimensão infinita. Diz-se que um conjunto $A \subset E$ é lineável se $A \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial de dimensão infinita.*

Definição 1.2.2 *Um subconjunto S de um espaço de Banach E é chamado espaçável se existe um subespaço vetorial fechado de dimensão infinita $W \subset E$ tal que $W \subset S \cup \{0\}$. De um modo mais geral, diz-se que um subconjunto S de um espaço de Banach ou quasi-Banach E é μ -lineável (espaçável) se $S \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial μ -dimensional (fechado de dimensão infinita) de E .*

O termo *espaçabilidade* de um subconjunto de um espaço vetorial topológico foi usado primeiramente em [20] e posteriormente em [6], onde foi mostrado que, mesmo em conjuntos fortemente não-lineares e, aparentemente, patológicos, encontra-se com frequência esta propriedade. Entretanto, o termo *espaçável* só foi introduzido mais tarde em [8]. Muitos outros trabalhos têm sido publicados envolvendo este conceito, como por exemplo em [10], e sobre a sua noção mais fraca, a lineabilidade, que omite a condição de ser fechado o subespaço em questão. Sobre esta noção, G. Botelho, D. Diniz e D. Pellegrino provaram, em [15], a lineabilidade (sob certas hipóteses) do conjunto complementar

$$\mathcal{L}(X; Y) \setminus \Pi_p(X; Y)$$

dos operadores absolutamente p -somantes entre os espaços de Banach X e Y , com $1 \leq p < \infty$. Nessa linha, D. Kitson e R. M. Timoney (vide [24]) conseguiram melhorar

este resultado ao provar a espaçabilidade de conjuntos do tipo

$$\mathcal{L}(X; Y) \setminus \cup_p \Pi_p(X; Y).$$

1.3 Lineabilidade, espaçabilidade & Funcionais que atingem a norma

Sejam X um espaço de Banach e $\mathcal{NA}(X)$ o conjunto dos funcionais lineares $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que atingem a norma em algum ponto da bola unitária B_X . Na Seção 1.1 vimos o Teorema de James, o qual diz que $\mathcal{NA}(X) = X^*$ se, e somente se, X é um espaço de Banach reflexivo. Nesta Seção, porém, discorreremos sobre algumas condições suficientes para assegurar que o conjunto $\mathcal{NA}(X)$ ou $X^* \setminus \mathcal{NA}(X)$ é lineável ou espaçável.

Ainda não se sabe se o espaço $\mathcal{NA}(X)$ sempre contém um subespaço de dimensão infinita, ou até mesmo um subespaço de dimensão 2. O leitor interessado deve ler [9]. Por outro lado veremos que, em muitos casos, o seu complementar $X^* \setminus \mathcal{NA}(X)$ união com $\{0\}$ contém um subespaço vetorial fechado de dimensão infinita, isto é, que $X^* \setminus \mathcal{NA}(X)$ é espaçável para vários tipos de espaços de Banach X . Também ainda não se sabe se o fato de $X^* \setminus \mathcal{NA}(X)$ ser lineável caracteriza os espaços não-reflexivos X .

Vejamos alguns resultados sobre lineabilidade e espaçabilidade do conjunto $\mathcal{NA}(X)$, bem como do seu complementar $X^* \setminus \mathcal{NA}(X)$, num contexto menos geral, onde X é um espaço de Banach específico como, por exemplo, o espaço $\mathcal{C}(X)$ das funções contínuas sobre um espaço de Banach X :

Teorema 1.3.1 (Acosta–Aizpuru–Aron–García, 2007)

Se K é um espaço topológico de Hausdorff compacto e infinito, então $\mathcal{NA}(\mathcal{C}(K))$ é lineável.

Observação 1.3.2 *Este teorema e os próximos resultados desta Seção foram extraídos de [2].*

Vale ressaltar que existe algum espaço K , nas condições do Teorema 1.3.1, em que $\mathcal{NA}(\mathcal{C}(K))$ não é espaçável. Isto fica esclarecido na Proposição 2.20 de [9].

Há um resultado semelhante a este para o complementar $\mathcal{C}(K)^* \setminus \mathcal{NA}(\mathcal{C}(K))$, o qual é ainda melhorado ao adicionarmos certa hipótese. Antes, porém, de enunciá-lo, vale recordar que uma sequência convergente $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é dita não-trivial se $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$.

Teorema 1.3.3 (Acosta–Aizpuru–Aron–García, 2007) *Se K é um espaço topológico de Hausdorff compacto e infinito, então $\mathcal{C}(K)^* \setminus \mathcal{NA}(\mathcal{C}(K))$ é lineável. Se, além disso, K possui uma sequência convergente não-trivial, então $\mathcal{C}(K)^* \setminus \mathcal{NA}(\mathcal{C}(K))$ é espaçável.*

Para funções integráveis, há também resultados interessantes nessa linha.

Lema 1.3.4 (Acosta–Aizpuru–Aron–García, 2007) *Seja (Ω, μ) um espaço de medida, onde μ é uma medida σ -finita. Então, dado um funcional $f \in L_1(\mu)^* \equiv L_{\infty}(\mu)$, temos $f \in \mathcal{NA}(L_1(\mu))$ se, e somente se, existe um conjunto A mensurável com medida $\mu(A) > 0$ tal que $\|f\| = |f(x)|$ para todo $x \in A$.*

Teorema 1.3.5 (Acosta–Aizpuru–Aron–García, 2007) *Se (Ω, μ) é um espaço de medida tal que $L_1(\mu)$ tem dimensão infinita e μ é uma medida σ -finita, então $L_1(\mu)^* \setminus \mathcal{NA}(L_1(\mu))$ é espaçável.*

Num contexto mais geral existem vários outros resultados, os quais, em sua maioria, estão relacionados à geometria dos espaços de Banach. Entretanto, destacamos apenas o seguinte:

Teorema 1.3.6 (Acosta–Aizpuru–Aron–García, 2007) *Seja X um espaço de Banach com base de Schauder $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Se $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é monótona, então o conjunto $\mathcal{NA}(X)$ é lineável.*

Corolário 1.3.7 (Acosta–Aizpuru–Aron–García, 2007) *Seja X um espaço de Banach. Se X possui um subespaço complementado de dimensão infinita Y com base de Schauder, então X pode ser renormado, com uma norma equivalente, de forma que seja lineável o conjunto $\mathcal{NA}(X)$.*

1.4 Lineabilidade no conjunto dos operadores que atingem a norma

Embora já tenhamos definido a noção de operadores que atingem a norma, preferimos isolar este conceito para facilitar a leitura do texto. Os resultados da presente Seção são baseados em [27].

Definição 1.4.1 *Sejam E e F espaços normados. Um operador linear $u : E \rightarrow F$ atinge a norma em $x_0 \in E, \|x_0\| = 1$, quando*

$$\|u(x_0)\| = \|u\|.$$

O conjunto dos operadores lineares $u : E \rightarrow F$ que atingem a norma em x_0 será denotado por $\mathcal{NA}^{x_0}(E; F)$. Mais precisamente

$$\mathcal{NA}^{x_0}(E; F) = \{u \in \mathcal{L}(E; F) : \|u\| = \|u(x_0)\|\}.$$

Note que se $E \neq \{0\}$, então $\mathcal{NA}^{x_0}(E; F) \neq \emptyset$, pois o operador nulo atinge sua norma em qualquer ponto da esfera S_E .

O objetivo principal deste capítulo é desenvolver um estudo sobre a existência de alguma estrutura linear no conjunto $\mathcal{NA}^{x_0}(E; F)$, bem como no seu complementar $\mathcal{L}(E; F) \setminus \mathcal{NA}^{x_0}(E; F)$. É natural questionar se o próprio conjunto $\mathcal{NA}^{x_0}(E; F)$ é espaço vetorial, e isto, em geral, não é verdade.

Exemplo 1.4.2 *Sejam $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $u(x) = (0, 2x_2)$ para todo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, e $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $v(x) = (x_1, -2x_2)$ para todo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. A norma de u é dada por*

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| \\ &= \sup_{x_1^2+x_2^2=1} \|(0, 2x_2)\| \\ &= \|(0, 2 \cdot 1)\| \\ &= \|u(e_2)\|. \end{aligned}$$

Logo, $\|u\| = \|u(e_2)\|$ e, por isso, $u \in \mathcal{NA}^{e_2}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. A norma de v é

$$\begin{aligned}
\|v\| &= \sup_{\|x\|=1} \|v(x)\| \\
&= \sup_{x_1^2+x_2^2=1} \|(x_1, -2x_2)\| \\
&= \sup_{x_1^2+x_2^2=1} \sqrt{x_1^2 + (-2x_2)^2}.
\end{aligned}$$

Ora, a função dada por $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$ é contínua sobre o conjunto compacto $D = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$, logo assume valor máximo. Para encontrarmos o máximo de f , vamos utilizar o Método dos Multiplicadores de Lagrange. Para isto, sejam (x_0, y_0) o máximo de f e $g(x, y) = x^2 + y^2$. Então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Daí,

$$\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 4y_0^2}}, \frac{4y_0}{\sqrt{x_0^2 + 4y_0^2}} \right) = \lambda (2x_0, 2y_0).$$

Como $x_0^2 + y_0^2 = 1$, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 4y_0^2}} = 2\lambda x_0 \\ \frac{4y_0}{\sqrt{x_0^2 + 4y_0^2}} = 2\lambda y_0 \\ x_0^2 + y_0^2 = 1 \end{cases}$$

cujas soluções são os pontos $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$. Substituindo os pontos em f , vemos que $(0, 1)$ é ponto de máximo. Logo

$$\begin{aligned}
\|v\| &= \sup_{x_1^2+x_2^2=1} \sqrt{x_1^2 + (-2x_2)^2} \\
&= \sqrt{0^2 + (-2 \cdot 1)^2} \\
&= \|(0, -2 \cdot 1)\| \\
&= \|v(e_2)\|
\end{aligned}$$

ou seja, $\|v\| = \|v(e_2)\|$ e, conseqüentemente, $v \in \mathcal{N}\mathcal{A}^{e_2}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. Então, ambos, u e v pertencem a $\mathcal{N}\mathcal{A}^{e_2}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, mas, para $(u + v)(x) = (x_1, 0)$ temos

$$\begin{aligned}
\|u + v\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(u + v)(x)\| \\
&= \sup_{x_1^2+x_2^2=1} \|(x_1, 0)\| \\
&= \|(1, 0)\| \\
&= \|(u + v)(e_1)\|
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\|u + v\| = \|(u + v)(e_1)\| = 1 \neq 0 = \|(u + v)(e_2)\|,$$

isto é,

$$\|u + v\| \neq \|(u + v)(e_2)\|.$$

Logo, o vetor soma $u + v$ não pertence a $\mathcal{NA}^{e_2}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ e, portanto, $\mathcal{NA}^{e_2}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ não é espaço vetorial.

Observação 1.4.3 No exemplo acima, o ponto $(0, -1)$ também é ponto de máximo da função f e, assim,

$$\begin{aligned} \|v\| &= \sup_{x_1^2 + x_2^2 = 1} \sqrt{x_1^2 + (-2x_2)^2} \\ &= \sqrt{0^2 + [-2 \cdot (-1)]^2} \\ &= \|(0, -2 \cdot (-1))\| \\ &= \|v(-e_2)\| \end{aligned}$$

ou seja, $v \in \mathcal{NA}^{e_2}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) \cap \mathcal{NA}^{-e_2}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. Isto quer dizer que um operador pode, eventualmente, atingir sua norma em mais de um ponto e, por isso, a interseção dos conjuntos $\mathcal{NA}^{x_0}(E; F) \cap \mathcal{NA}^{y_0}(E; F)$ não é, em geral, o conjunto $\{0\}$.

O subconjunto $\mathcal{NA}^{x_0}(E; F)$ de $\mathcal{L}(E; F)$ é, aparentemente, bastante restrito, pois seus elementos devem atingir a norma em um mesmo vetor x_0 . Não obstante, mostraremos que se $F = l_q$, então $\mathcal{NA}^{x_0}(E; F)$ é lineável em $\mathcal{L}(E; F)$. Mais geralmente, provaremos que se F possui uma cópia isométrica de l_q , isto é, se existe uma aplicação linear $f : l_q \rightarrow F$ tal que $\|f(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in l_q$, então $\mathcal{NA}^{x_0}(E; F)$ é lineável em $\mathcal{L}(E; F)$. Como um caso particular, obtemos a lineabilidade de $\mathcal{NA}^{x_0}(l_p; l_q)$ em $\mathcal{L}(l_p; l_q)$. O teorema a seguir trata do caso em que $F = l_q$. Para sua demonstração, faz-se necessário o seguinte resultado, que é uma consequência direta do Teorema de Hahn–Banach.

Lema 1.4.4 *Seja E um espaço de Banach. Para qualquer $x_0 \in S_E$, existe um funcional linear $f_0 \neq 0$ que atinge sua norma em x_0 . Mais precisamente, dado $x_0 \in S_E$, existe $f_0 \in E^* \setminus \{0\}$ tal que $\|f_0\| = |f_0(x_0)|$.*

Demonstração. Com efeito, pelo Teorema de Hahn–Banach (corolário), existe $f_0 \in E^*$ tal que $\|f_0\| = \|x_0\|$ e $f_0(x_0) = \|x_0\|^2$. Como $\|x_0\| = 1$, temos

$$\|f_0\| = \|x_0\| = \|x_0\|^2 = f_0(x_0) = |f_0(x_0)|,$$

isto é,

$$\|f_0\| = |f_0(x_0)|,$$

como queríamos. ■

Teorema 1.4.5 *Se E é um espaço de Banach, então $\mathcal{NA}^{x_0}(E; l_q)$ é lineável em $\mathcal{L}(E; l_q)$ para cada $1 \leq q < \infty$ e todo $x_0 \in S_E$.*

Demonstração. Começamos verificando que o conjunto $\mathcal{NA}^{x_0}(E; l_q) \setminus \{0\}$ é não vazio. Pelo Lema 1.4.4, existe $f_0 \in E^* \setminus \{0\}$ tal que $\|f_0\| = |f_0(x_0)|$. Assim, a expressão $u(x) = (f_0(x), 0, 0, \dots)$ define um operador linear $u : E \rightarrow l_q$ tal que

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|(f_0(x), 0, 0, \dots)\|_q \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} (|f_0(x)|^q + |0|^q + |0|^q + \dots)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} |f_0(x)| \\ &= \|f_0\|_{E^*} = |f_0(x_0)| \\ &= (|f_0(x_0)|^q + |0|^q + |0|^q + \dots)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|u(x_0)\|_q \end{aligned}$$

isto é,

$$\|u(x_0)\|_q = \|u\|,$$

e, portanto, $u \in \mathcal{NA}^{x_0}(E; l_q)$. Logo, $\mathcal{NA}^{x_0}(E; l_q) \setminus \{0\} \neq \emptyset$. A construção a seguir é válida para qualquer $u \in \mathcal{NA}^{x_0}(E; l_q)$.

Agora escrevamos o conjunto \mathbb{N} dos inteiros positivos como

$$\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j,$$

onde cada

$$A_j = \{a_1^{(j)} < a_2^{(j)} < \dots < a_i^{(j)} < \dots\}$$

é infinito e $A_k \cap A_l = \emptyset$ se $k \neq l$. Isto é possível pois basta tomarmos A_1 como o conjunto dos números primos união com $\{1\}$ e, para cada $j > 1$, A_j como o conjunto de todos os possíveis produtos de j números primos, e a afirmativa segue imediatamente do Teorema Fundamental da Aritmética. Também, para cada j , consideremos o subconjunto $l_q^{(j)} \subset l_q$, dado por

$$l_q^{(j)} = \{x = (x_1, \dots, x_k, \dots) \in l_q : x_k = 0, \text{ se } k \notin A_j\},$$

e o operador $u_j : E \rightarrow l_q^{(j)}$, definido pelas igualdades

$$u_j(x)_{a_i^{(k)}} = \begin{cases} u(x)_i, & \text{se } k = j \\ 0, & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

que, precisamente, afirmam que o $a_i^{(j)}$ -ésimo termo da sequência $u_j(x)$ é igual ao i -ésimo termo da sequência $u(x)$ para todo i , e os demais termos de $u_j(x)$ são todos nulos (para um melhor entendimento, veja Observação 1.4.6). Note que

$$\mathbb{N} = \bigcup_{i,j} \{a_i^{(j)}\}$$

é uma união de conjuntos disjuntos dois a dois, o que garante que cada termo da sequência $u_j(x)$ está bem determinado. Além disso, se $k \neq j$, então $a_i^{(k)} \notin A_j$ e como, neste caso, $u_j(x)_{a_i^{(k)}} = 0$, segue-se que $u_j(x) \in l_q^{(j)}$ para todo $x \in E$. Portanto, u_j está bem definido para cada j . Observemos também que, para cada j , u_j atinge a norma em

x_0 . Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|u_j(x)\| &= \left(\sum_{i,k} |u_j(x)_{\alpha_i^{(k)}}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{\substack{i,j \\ j=k}} |u_j(x)_{\alpha_i^{(k)}}|^q + \sum_{\substack{i,j \\ j \neq k}} |u_j(x)_{\alpha_i^{(k)}}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_i |u(x)_i|^q + 0 \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|u(x)\|,
\end{aligned}$$

isto é, $\|u_j(x)\| = \|u(x)\|$ para todo $x \in E$. Logo

$$\|u_j\| = \|u\| = \|u(x_0)\| = \|u_j(x_0)\|.$$

Ainda para cada j fixado, consideremos $v_j : E \rightarrow l_q$ definido por

$$v_j = i_j \circ u_j,$$

onde $i_j : l_q^{(j)} \rightarrow l_q$ é a inclusão canônica. Desse modo, para todo $x \in E$, tem-se

$$\|v_j(x)\| = \|i_j(u_j(x))\| = \|u_j(x)\|$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\|v_j\| = \|u_j\| = \|u_j(x_0)\| = \|(i_j \circ u_j)(x_0)\| = \|v_j(x_0)\|,$$

isto é, v_j atinge sua norma em x_0 para cada j . Agora provemos que, dados escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, o vetor $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ atinge sua norma em x_0 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Com este fim, provemos que

$$\sum_k |\alpha_1 v_1(x)_k + \dots + \alpha_n v_n(x)_k|^q = \sum_k |\alpha_1 v_1(x)_k|^q + \dots + \sum_k |\alpha_n v_n(x)_k|^q$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, isto é, que

$$\|\alpha_1 v_1(x) + \dots + \alpha_n v_n(x)\|^q = \|\alpha_1 v_1(x)\|^q + \dots + \|\alpha_n v_n(x)\|^q. \quad (1.1)$$

Ora, se

$$v_1(x)_k = \cdots = v_n(x)_k = 0$$

para todo k , nada há que fazer. Assim, sem perda de generalidade, fixemos k tal que $v_1(x)_k \neq 0$. Segue da definição de v_1 que

$$\begin{aligned} v_1(x)_k \neq 0 &\Rightarrow k \in A_1 \\ &\Rightarrow k \notin A_i, \text{ para todo } i = 2, \dots, n \\ &\Rightarrow v_i(x)_k = 0, \text{ para todo } i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Desse modo, temos

$$\begin{aligned} |\alpha_1 v_1(x)_k + \cdots + \alpha_n v_n(x)_k|^q &= |\alpha_1 v_1(x)_k + 0 + \cdots + 0|^q \\ &= |\alpha_1 v_1(x)_k|^q + 0 + \cdots + 0 \\ &= |\alpha_1 v_1(x)_k|^q + \cdots + |\alpha_n v_n(x)_k|^q. \end{aligned}$$

Obviamente, o mesmo vale para $v_i \neq 0, i = 2, \dots, n$. Daí,

$$\begin{aligned} &\sum_k |\alpha_1 v_1(x)_k + \cdots + \alpha_n v_n(x)_k|^q \\ &= \sum_k (|\alpha_1 v_1(x)_k|^q + \cdots + |\alpha_n v_n(x)_k|^q) \\ &= \sum_k |\alpha_1 v_1(x)_k|^q + \cdots + \sum_k |\alpha_n v_n(x)_k|^q \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, como queríamos. Finalmente, de posse dessa igualdade, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\|\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n\|^q &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|\alpha_1 v_1(x) + \dots + \alpha_n v_n(x)\|^q \\
&= \sup_{\|x\| \leq 1} \left(\sum_k |\alpha_1 v_1(x)_k + \dots + \alpha_n v_n(x)_k|^q \right) \\
&= \sup_{\|x\| \leq 1} \left(\sum_k |\alpha_1 v_1(x)_k|^q + \dots + \sum_k |\alpha_n v_n(x)_k|^q \right) \\
&= \sup_{\|x\| \leq 1} \left(|\alpha_1|^q \sum_k |v_1(x)_k|^q + \dots + |\alpha_n|^q \sum_k |v_n(x)_k|^q \right) \\
&= |\alpha_1|^q \sum_k |v_1(x_0)_k|^q + \dots + |\alpha_n|^q \sum_k |v_n(x_0)_k|^q \\
&= \sum_k |\alpha_1 v_1(x_0)_k|^q + \dots + \sum_k |\alpha_n v_n(x_0)_k|^q \\
&= \sum_k |\alpha_1 v_1(x_0)_k + \dots + \alpha_n v_n(x_0)_k|^q \\
&= \|\alpha_1 v_1(x_0) + \dots + \alpha_n v_n(x_0)\|^q,
\end{aligned}$$

onde a quinta igualdade decorre do fato de todos os n v_j atingirem a norma no mesmo vetor unitário x_0 . Logo,

$$\|\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n\| = \|(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)(x_0)\|$$

ou seja, $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ atinge sua norma em x_0 e, conseqüentemente,

$$V = [v_j; j \in \mathbb{N}]$$

é um subespaço vetorial de $\mathcal{N}\mathcal{A}^{x_0}(E; l_q)$. Resta mostrar que V tem dimensão infinita e, para isto, basta provar que quaisquer n vetores não-nulos

$$v_1, \dots, v_k, \dots, v_n \in V$$

são linearmente independentes. Como v_k é não nulo, existe $x \in E$ tal que $v_k(x) \neq 0$. Mais precisamente, existe pelo menos um índice $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$v_k(x)_{\alpha_i^{(k)}} \neq 0.$$

Ora, segue da definição de v_j que, para $j \neq k$, $v_j(x)_{a_i^{(k)}} = 0$. Desse modo, dados escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ temos

$$\begin{aligned} & \alpha_1 v_1(x) + \dots + \alpha_k v_k(x) + \dots + \alpha_n v_n(x) = 0 \\ \Rightarrow & \alpha_1 v_1(x)_{a_i^{(k)}} + \dots + \alpha_k v_k(x)_{a_i^{(k)}} + \dots + \alpha_n v_n(x)_{a_i^{(k)}} = 0 \\ \Rightarrow & \alpha_1 \cdot 0 + \dots + \alpha_k v_k(x)_{a_i^{(k)}} + \dots + \alpha_n \cdot 0 = 0 \\ & \stackrel{v_k(x)_{a_i^{(k)}} \neq 0}{\Rightarrow} \alpha_k = 0. \end{aligned}$$

Como k é arbitrário, obtemos

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Logo, os vetores $v_1, \dots, v_k, \dots, v_n \in V$ são linearmente independentes e, conseqüentemente, $V = [v_j; j \in \mathbb{N}]$ tem dimensão infinita. Portanto, $\mathcal{N}\mathcal{A}^{x_0}(E; l_q)$ é lineável em $\mathcal{L}(E; l_q)$ para cada $1 \leq q < \infty$. ■

Observação 1.4.6 *O fato de l_q ser um espaço de dimensão infinita se tornou fundamental para investigarmos a lineabilidade de $\mathcal{N}\mathcal{A}^{x_0}(E; l_q)$ em $\mathcal{L}(E; l_q)$. Isso ficou evidenciado quando definimos os operadores $u_j : E \rightarrow l_q^{(j)}$, os quais não se sobrepõem no seguinte sentido: considere os conjuntos*

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 2, 3, 5, 7, \dots\} \\ A_2 &= \{2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 3 \cdot 5, \dots\} \\ A_3 &= \{2 \cdot 2 \cdot 2, 2 \cdot 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 3, 2 \cdot 2 \cdot 5, 3 \cdot 3 \cdot 3, \dots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

como descrito na demonstração acima. Então

$$\begin{array}{rcccccccc} & 1 & 2 & 3 & 2 \cdot 2 & 5 & 2 \cdot 3 & 7 & 2 \cdot 2 \cdot 2 & 3 \cdot 3 & & \\ u_1(x) & = & (u(x)_1, & u(x)_2, & u(x)_3, & 0, & u(x)_4, & 0, & u(x)_5, & 0, & 0, & \dots) \\ u_2(x) & = & (0, & 0, & 0, & u(x)_1, & 0, & u(x)_2, & 0, & 0, & u(x)_3, & \dots) \\ u_3(x) & = & (0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & u(x)_1, & 0, & \dots) \\ & & \vdots & & & & & & & & & \end{array}$$

ou seja, considerando os i -ésimos termos das seqüências acima como colunas de uma matriz, observamos que em todas elas há um único termo possivelmente não-nulo, que

é um termo da sequência $u(x)$. Note que se o contradomínio dos operadores u_j tivesse dimensão finita, tal arranjo não seria possível. Daí a importância de se tomar um espaço de Banach de dimensão infinita F em lugar do corpo \mathbb{K} de escalares.

Ficou clara, quando usamos o Teorema de Hahn–Banach na demonstração acima, a existência de operadores não nulos definidos num espaço de Banach, a valores em l_q , que atingem a sua norma. Entretanto, é bastante natural indagar sobre a existência de operadores, definidos como esses, que não atingem a sua norma. A resposta a tal pergunta é positiva e ficará esclarecida no exemplo abaixo.

Exemplo 1.4.7 O operador $u \in \mathcal{L}(l_p; l_q)$, $1 \leq p \leq q < \infty$, definido por

$$u(x) = \left(\frac{nx_n}{n+1} \right)_{n=1}^{\infty}$$

para todo $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_p$, não atinge sua norma. Para ver isso, primeiramente observe que u está bem definido, pois

$$x \in l_p \Rightarrow x \in l_q$$

sempre que $p \leq q$ (esse fato está provado na Seção 2 do Capítulo 3). Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{ix_i}{i+1} \right|^q &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^q < \infty \\ \Rightarrow u(x) &\in l_q \end{aligned}$$

como queríamos. Agora provemos que, de fato, u não atinge sua norma em ponto algum de l_p . Ora,

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{\|x\|_p=1} \|u(x)\|_q \\ &= \sup_{\|(x_1, x_2, \dots)\|_p=1} \left\| \left(\frac{x_1}{2}, \frac{2x_2}{3}, \frac{3x_3}{4}, \dots \right) \right\|_q \\ &= \sup_{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p=1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{ix_i}{i+1} \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Suponhamos que exista $x_0 = (x_{0_1}, \dots, x_{0_i}, \dots, x_{0_j}, \dots) \in l_p$, $\|x_0\| = 1$, tal que

$$\|u\| = \|u(x_0)\|.$$

Escolhamos índices $i < j$ tais que $|x_{0_j}| < |x_{0_i}|$. Isso é possível pois o termo geral de uma série convergente tende a zero. Daí,

$$\begin{aligned}
0 &< \left(\left| \frac{j}{j+1} \right|^q - \left| \frac{i}{i+1} \right|^q \right) (|x_{0_i}|^q - |x_{0_j}|^q) \Rightarrow \\
0 &< \left| \frac{jx_{0_i}}{j+1} \right|^q - \left| \frac{jx_{0_j}}{j+1} \right|^q - \left| \frac{ix_{0_i}}{i+1} \right|^q + \left| \frac{ix_{0_j}}{i+1} \right|^q \Rightarrow \\
&\left| \frac{ix_{0_i}}{i+1} \right|^q + \left| \frac{jx_{0_j}}{j+1} \right|^q < \left| \frac{ix_{0_j}}{i+1} \right|^q + \left| \frac{jx_{0_i}}{j+1} \right|^q. \tag{1.2}
\end{aligned}$$

Agora seja

$$y_0 = (x_{0_1}, \dots, x_{0_j}, \dots, x_{0_i}, \dots)$$

a sequência que difere de x_0 apenas pela permuta do i -ésimo com o j -ésimo termo. Note que $y_0 \in l_p$ e $\|y_0\| = 1$, entretanto, segue da desigualdade (1.2) que

$$\|u(x_0)\| < \|u(y_0)\|,$$

um absurdo, uma vez que $\|u(x_0)\| = \|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

O caso em que F possui uma cópia isométrica de l_q é uma consequência do Teorema 1.4.5 que será exibida no corolário seguinte.

Corolário 1.4.8 *Sejam E e Y espaços de Banach e $1 \leq q < \infty$, com Y contendo uma cópia isométrica de l_q . Então $\mathcal{NA}^{x_0}(E; Y)$ é lineável em $\mathcal{L}(E; Y)$.*

Demonstração. Considere uma imersão isométrica (linear) $f : l_q \rightarrow Y$. O operador $T : \mathcal{L}(E; l_q) \rightarrow \mathcal{L}(E; Y)$, dado por

$$Tu = f \circ u$$

para todo $u \in \mathcal{L}(E; l_q)$, é também uma imersão isométrica. Com efeito, dados $u, v \in \mathcal{L}(E; l_q)$ e α escalar, temos

$$\begin{aligned}
(T(u + \alpha v))(x) &= (f \circ (u + \alpha v))(x) \\
&= f((u + \alpha v)(x)) \\
&= f(u(x)) + \alpha f(v(x)) \\
&= (f \circ u)(x) + \alpha (f \circ v)(x) \\
&= (Tu)(x) + \alpha (Tv)(x)
\end{aligned}$$

para todo $x \in E$, ou seja

$$T(u + \alpha v) = Tu + \alpha Tv$$

e vale

$$\|Tu\| = \|f \circ u\| = \|u\|.$$

Portanto, T assim definido é uma imersão isométrica. Além disso,

$$\begin{aligned} \|Tu\| &= \|u\| = \|u(x_0)\| = \|f(u(x_0))\| \\ &= \|(f \circ u)(x_0)\| = \|(Tu)(x_0)\|, \forall u \in \mathcal{L}(E; l_q), \end{aligned}$$

isto é, $Tu \in \mathcal{N}\mathcal{A}^{x_0}(E; l_q)$ para todos $u \in \mathcal{L}(E; l_q)$. Ora, pelo Teorema 1.4.5 existe um subconjunto $V \subset \mathcal{N}\mathcal{A}^{x_0}(E; l_q)$ tal que V é subespaço de dimensão infinita de $\mathcal{L}(E; l_q)$ e, pelo que acabamos de ver, vale a inclusão

$$W = T(V) = \{f \circ u : u \in V\} \subset \mathcal{N}\mathcal{A}^{x_0}(E; l_q).$$

Assim, W é um subespaço de $\mathcal{L}(E; l_q)$, por ser a imagem de um subespaço por um operador linear, tem dimensão infinita, pois é isométrico a V , e está contido em $\mathcal{N}\mathcal{A}^{x_0}(E; l_q)$. Portanto $\mathcal{N}\mathcal{A}^{x_0}(E; Y)$ é lineável em $\mathcal{L}(E; Y)$. ■

Em suma, vimos que, dados espaços de Banach E e F , uma condição suficiente para que $\mathcal{N}\mathcal{A}^{x_0}(E; F)$ seja lineável em $\mathcal{L}(E; F)$ é que F possua uma cópia isométrica de l_q , com $1 \leq q < \infty$.

Agora vejamos o que podemos afirmar sobre a estrutura linear do conjunto complementar

$$\mathcal{L}(E; F) \setminus \mathcal{N}\mathcal{A}^{x_0}(E; F).$$

Em geral pode parecer que esse conjunto é muito "grande", por isso será conveniente considerarmos o subconjunto

$$\mathcal{L}(E; F) \setminus \mathcal{N}\mathcal{A}(E; F) \subset \mathcal{L}(E; F) \setminus \mathcal{N}\mathcal{A}^{x_0}(E; F),$$

onde $\mathcal{N}\mathcal{A}(E; F)$ é o conjunto de todos os operadores que atingem sua norma. O teorema a seguir mostra um resultado nessa direção.

Teorema 1.4.9 *Sejam E e F espaços de Banach e $1 \leq q < \infty$, com F contendo uma cópia isométrica de l_q . Se $\mathcal{L}(E; l_q) \neq \mathcal{NA}(E; l_q)$, então $\mathcal{L}(E; F) \setminus \mathcal{NA}(E; F)$ é lineável em $\mathcal{L}(E; F)$.*

Demonstração. *Provemos inicialmente que o teorema é válido para $F = l_q$. Para isso, seja $w \in \mathcal{L}(E; l_q) \setminus \mathcal{NA}(E; l_q)$, isto é, seja $w : E \rightarrow l_q$ um operador que não atinge sua norma. Escrevamos novamente*

$$\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j,$$

e

$$l_q^{(j)} = \{x \in l_q : x_k = 0, \text{ se } k \notin A_j\},$$

como na demonstração do Teorema 1.4.5. Agora, para cada $j \in \mathbb{N}$, consideremos $w_j : E \rightarrow l_q^{(j)}$, definido pelas igualdades

$$w_j(x)_{\alpha_i^{(k)}} = \begin{cases} w(x)_i, & \text{se } k = j \\ 0, & \text{se } k \neq j. \end{cases}$$

Note que o que diferencia estes operadores dos operadores definidos na demonstração do Teorema 1.4.5 é o fato de w não atingir sua norma. Assim, já vimos que w está bem definido e que $\|w_j(x)\| = \|w(x)\|$ para todos $j \in \mathbb{N}$ e $x \in E$, de onde concluímos que

$$\|w_j\| = \|w\|$$

e, por isso, w_j não atinge sua norma, para qualquer que seja $j \in \mathbb{N}$. Desse modo, $v_j : E \rightarrow l_q$ dado por

$$v_j = i_j \circ w_j$$

onde $i_j : l_q^{(j)} \rightarrow l_q$ é a inclusão canônica, também não atinge sua norma. Já vimos também que

$$\sum_k |\alpha_1 v_1(x)_k + \cdots + \alpha_n v_n(x)_k|^q = \sum_k |\alpha_1 v_1(x)_k|^q + \cdots + \sum_k |\alpha_n v_n(x)_k|^q$$

para todos $n \in \mathbb{N}$ e escalares α_i 's. Assim,

$$\begin{aligned}
\|\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n\|^q &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|\alpha_1 v_1(x) + \cdots + \alpha_n v_n(x)\|^q \\
&= \sup_{\|x\| \leq 1} \left(\sum_k |\alpha_1 v_1(x)_k + \cdots + \alpha_n v_n(x)_k|^q \right) \\
&= \sup_{\|x\| \leq 1} \left(\sum_k |\alpha_1 v_1(x)_k|^q + \cdots + \sum_k |\alpha_n v_n(x)_k|^q \right) \\
&= \sup_{\|x\| \leq 1} \left(|\alpha_1|^q \sum_k |v_1(x)_k|^q + \cdots + |\alpha_n|^q \sum_k |v_n(x)_k|^q \right) \\
&\leq \sup_{\|x\| \leq 1} |\alpha_1|^q \sum_k |v_1(x)_k|^q + \cdots + \sup_{\|x\| \leq 1} |\alpha_n|^q \sum_k |v_n(x)_k|^q \\
&= |\alpha_1|^q \|v_1\|^q + \cdots + |\alpha_n|^q \|v_n\|^q,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\|\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n\|^q \leq |\alpha_1|^q \|v_1\|^q + \cdots + |\alpha_n|^q \|v_n\|^q.$$

Por outro lado, para todo $m \in \mathbb{N}$, tomando $\varepsilon = \frac{1}{m}$, segue da definição de supremo e das igualdades $\|v_j\| = \|w\|$ para todo j que podemos achar $x_m \in E$, $\|x_m\| \leq 1$, tal que

$$\|v_j(x_m)\| \geq \|v_j\| - \varepsilon, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Daí, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale

$$\begin{aligned}
\|(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n)(x_m)\|^q &= \|\alpha_1 v_1(x_m) + \cdots + \alpha_n v_n(x_m)\|^q \\
&= \sum_k |\alpha_1 v_1(x_m)_k + \cdots + \alpha_n v_n(x_m)_k|^q \\
&= \sum_k |\alpha_1 v_1(x_m)_k|^q + \cdots + \sum_k |\alpha_n v_n(x_m)_k|^q \\
&= |\alpha_1|^q \|v_1(x_m)\|^q + \cdots + |\alpha_n|^q \|v_n(x_m)\|^q \\
&\geq |\alpha_1|^q (\|v_1\| - \varepsilon)^q + \cdots + |\alpha_n|^q (\|v_n\| - \varepsilon)^q
\end{aligned}$$

e, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\|\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n\|^q \geq |\alpha_1|^q \|v_1\|^q + \cdots + |\alpha_n|^q \|v_n\|^q.$$

Logo,

$$\|\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n\|^q = |\alpha_1|^q \|v_1\|^q + \cdots + |\alpha_n|^q \|v_n\|^q.$$

Ora, como os v_j não atingem a norma, vale

$$\|v_1(x)\| < \|v_1\|, \dots, \|v_n(x)\| < \|v_n\|$$

para todo $x \in S_E$, e, tendo (1.1) em vista, obtemos

$$\begin{aligned} \|(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)(x)\|^q &= |\alpha_1|^q \|v_1(x)\|^q + \dots + |\alpha_n|^q \|v_n(x)\|^q \\ &< |\alpha_1|^q \|v_1\|^q + \dots + |\alpha_n|^q \|v_n\|^q \\ &= \|\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n\|^q \end{aligned}$$

isto é,

$$\|(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)(x)\|^q < \|\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n\|^q$$

para todo $x \in S_E$. Logo, $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ não atinge a norma em ponto algum de S_E e, assim,

$$V = [v_j; j \in \mathbb{N}] \subset \mathcal{L}(E; F) \setminus \mathcal{NA}(E; F) \cup \{0\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E; l_q)$, o qual tem dimensão infinita por um argumento análogo ao da demonstração do Teorema 1.4.5. Portanto, $\mathcal{L}(E; l_q) \setminus \mathcal{NA}(E; l_q)$ é lineável em $\mathcal{L}(E; l_q)$. Agora vejamos o caso geral, isto é, o caso em que F possui uma cópia isométrica de l_q , $1 \leq q < \infty$. Com esta finalidade, consideremos o conjunto

$$\mathcal{L}(E; l_q) \setminus \mathcal{NA}(E; l_q),$$

e uma imersão isométrica $f : l_q \rightarrow F$. Pelo que acabamos de provar acima, existe um subespaço vetorial de dimensão infinita $V \subset \mathcal{L}(E; l_q) \setminus \mathcal{NA}(E; l_q) \cup \{0\}$. Assim, consideremos o seguinte subespaço

$$W = T(V) = \{f \circ u : u \in V\} \subset \mathcal{L}(E; F),$$

onde T está definido como no Corolário 1.4.8. Já vimos que T é uma imersão isométrica. Ora, de $\|Tu\| = \|f \circ u\| = \|u\|$, segue-se que Tu não atinge sua norma, de onde obtemos a inclusão

$$W \subset \mathcal{L}(E; F) \setminus \mathcal{NA}(E; F) \cup \{0\}.$$

Como V tem dimensão infinita e é isométrico W , segue que W é um subespaço de dimensão infinita, e isto prova nossa asserção. ■

Corolário 1.4.10 Se $1 \leq p \leq q < \infty$, então $\mathcal{L}(l_p; l_q) \setminus \mathcal{NA}(l_p; l_q)$ é lineável em $\mathcal{L}(l_p; l_q)$.

Demonstração. Pelo Teorema 1.4.9, basta mostrar que $\mathcal{L}(l_p; l_q) \neq \mathcal{NA}(l_p; l_q)$, e isso já foi visto no Exemplo 1.4.7. ■

Observação 1.4.11 *É bem conhecido o fato de que, se um operador definido sobre um espaço de Banach reflexivo é compacto, então ele atinge sua norma (ver, por exemplo, Proposição 3.2.2 de [29]). Além disso, existe um famoso teorema, o Teorema de Pitt (veja [26]), que afirma que, se $1 \leq q < p$, então qualquer operador linear contínuo $u : l_p \rightarrow l_q$ é compacto. Assim, visto que l_p é reflexivo para $1 < p < \infty$, $u : l_p \rightarrow l_q$ atinge sua norma sempre que tivermos $1 \leq q < p < \infty$, ou seja,*

$$\mathcal{L}(l_p; l_q) = \mathcal{NA}(l_p; l_q)$$

para $1 \leq q < p < \infty$. Logo, a hipótese $1 \leq p \leq q < \infty$ do Corolário 1.4.10 é necessária.

Agora, munidos dos resultados já vistos acima, exploraremos uma abordagem mais geral do assunto. Com esta finalidade, considere E um espaço de Banach de dimensão infinita, \aleph_0 a cardinalidade do conjunto \mathbb{N} dos números naturais e c a cardinalidade do conjunto dos números reais \mathbb{R} . Desse modo, vemos que o Teorema 1.4.5 afirma (em seu corolário) que $\mathcal{NA}^{x_0}(E; Y)$ é \aleph_0 -lineável, pois o subespaço $V = [v_j; j \in \mathbb{N}] \subset \mathcal{NA}^{x_0}(E; Y)$, definido em sua demonstração, tem como base o conjunto $\{v_j; j \in \mathbb{N}\}$, cuja a cardinalidade é \aleph_0 . O teorema seguinte melhora substancialmente esse resultado.

Teorema 1.4.12 *Sejam E e F espaços de Banach, com F contendo uma cópia isométrica de l_q para algum $1 \leq q < \infty$. Então $\mathcal{NA}^{x_0}(E; F)$ é c -lineável.*

Demonstração. Tendo em vista a demonstração do Corolário 1.4.8, basta fazer o caso $F = l_q$. Para isso, seja $u \in \mathcal{NA}^{x_0}(E; l_q)$ não nulo e considere a sequência $(v_j)_{j=1}^{\infty}$ definida, a partir de u , como na demonstração do Teorema 1.4.5. Já vimos que

$$\|v_j\| = \|u\|$$

para todo inteiro positivo j . Assim, para cada

$$a = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1$$

temos,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \|a_j v_j\| &= \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \|v_j\| \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \|u\| \\ &= \|u\| \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty,\end{aligned}$$

isto é, $\sum_{j=1}^{\infty} \|a_j v_j\| < \infty$. Desse modo, o operador $T : l_1 \rightarrow \mathcal{L}(E; l_q)$, dado por

$$T(a) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j v_j$$

para todo $a = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1$, está bem definido, pois

$$\begin{aligned}\|T(a)\| &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j v_j \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|a_j v_j\| < \infty.\end{aligned}$$

Daí, dados $a, b \in l_1$ e escalares α e β , temos

$$\begin{aligned}T(\alpha a + \beta b) &= \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha a_j + \beta b_j) v_j \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{\infty} a_j v_j + \beta \sum_{j=1}^{\infty} b_j v_j \\ &= \alpha T(a) + \beta T(b),\end{aligned}$$

ou seja, T é linear. Agora, seja $a \in l_1$ tal que $T(a) = 0$, isto é,

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots = 0.$$

Para facilitar o entendimento, vamos dispor os vetores $a_i v_i$ como na Observação 1.4.6:

1	2	3	$2 \cdot 2$	5	$2 \cdot 3$	7	$2 \cdot 2 \cdot 2$	\dots
$(a_1 u(x))_1,$	$a_1 u(x)_2,$	$a_1 u(x)_3,$	0,	$a_1 u(x)_4,$	0,	$a_1 u(x)_5,$	0,	\dots
(0,	0,	0,	$a_2 u(x)_1,$	0,	$a_2 u(x)_2,$	0,	0,	\dots
(0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	$a_3 u(x)_1,$	\dots

Agora, somando e igualando ao vetor nulo

$$\begin{aligned} & a_1v_1(x) + a_2v_2(x) + \dots \\ &= (a_1u(x)_1, a_1u(x)_2, a_1u(x)_3, a_2u(x)_1, a_1u(x)_4, a_2u(x)_2, a_1u(x)_5, a_3u(x)_1, \dots) \\ &= (0, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

vemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1u(x)_1 = a_1u(x)_2 = \dots = a_1u(x)_k = \dots = 0 \\ a_2u(x)_1 = a_2u(x)_2 = \dots = a_2u(x)_k = \dots = 0 \\ a_3u(x)_1 = a_3u(x)_2 = \dots = a_3u(x)_k = \dots = 0 \\ \dots \end{array} \right.$$

Como u é não nulo, existe k tal $u(x)_k \neq 0$ e, assim, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1u(x)_k = 0 \\ a_2u(x)_k = 0 \\ a_3u(x)_k = 0 \\ \dots \end{array} \right.$$

com $u(x)_k \neq 0$, de onde obtemos

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 0.$$

Logo,

$$\ker T = \{0\}$$

e, portanto, T é injetivo. Resta mostrar que $T(a) \in \mathcal{N}\mathcal{A}^{x_0}(E; l_q)$, isto é, mostrar que $T(a)$ atinge sua norma em x_0 . Ora, acabamos de ver que

$$\begin{aligned} & a_1v_1(x) + a_2v_2(x) + \dots \\ &= (a_1u(x)_1, a_1u(x)_2, a_1u(x)_3, a_2u(x)_1, a_1u(x)_4, a_2u(x)_2, a_1u(x)_5, a_3u(x)_1, \dots). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j v_j(x) \right\| \\
&= \|(a_1 u(x)_1, a_1 u(x)_2, a_1 u(x)_3, a_2 u(x)_1, a_1 u(x)_4, a_2 u(x)_2, a_1 u(x)_5, a_3 u(x)_1, \dots)\| \\
&= \left(\begin{array}{c} |a_1 u(x)_1|^q + |a_1 u(x)_2|^q + |a_1 u(x)_3|^q \\ + |a_2 u(x)_1|^q + |a_1 u(x)_4|^q + |a_2 u(x)_2|^q + |a_1 u(x)_5|^q + \dots \end{array} \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Rearranjando os termos de forma conveniente, e tendo em vista que $l_1 \subset l_q$ para todo $q \geq 1$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j v_j(x) \right\| \\
&= (|a_1 u(x)_1|^q + |a_2 u(x)_1|^q + |a_3 u(x)_1|^q + \dots + |a_1 u(x)_2|^q + |a_2 u(x)_2|^q + |a_3 u(x)_2|^q + \dots)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j u(x)_1|^q + \sum_{j=1}^{\infty} |a_j u(x)_2|^q + \dots \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^q |u(x)_1|^q + \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^q |u(x)_2|^q + \dots \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\left| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} u(x)_1 \right|^q + \left| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} u(x)_2 \right|^q + \dots \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\|a\|_q^q |u(x)_1|^q + \|a\|_q^q |u(x)_2|^q + \dots \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left\| \|a\|_q u(x) \right\| = \|a\|_q \|u(x)\|,
\end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\|T(a)(x)\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j v_j(x) \right\| = \|a\|_q \|u(x)\|,$$

e conseqüentemente

$$\|T(a)\| = \|a\|_q \|u\|.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|T(a)\| &= \|a\|_q \|u\| \\ &= \|a\|_q \|u(x_0)\| \\ &= \|T(a)(x_0)\|,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|T(a)\| = \|T(a)(x_0)\|,$$

e isso nos fornece $T(a) \in \mathcal{N}\mathcal{A}^{x_0}(E; l_q)$ como queríamos. Assim, como l_1 tem dimensão c , segue da injetividade de T que o subespaço

$$T(l_1) \subset \mathcal{N}\mathcal{A}^{x_0}(E; l_q)$$

tem dimensão c . Portanto, $\mathcal{N}\mathcal{A}^{x_0}(E; l_q)$ é c -lineável. ■

Teorema 1.4.13 *Sejam E e F espaços de Banach com F contendo uma cópia isométrica de l_q , $1 \leq q < \infty$. Se $\mathcal{L}(E; l_q) \neq \mathcal{N}\mathcal{A}(E; l_q)$, então $\mathcal{L}(E; F) \setminus \mathcal{N}\mathcal{A}(E; F)$ é c -lineável.*

Demonstração. Seja $w \in \mathcal{L}(E; l_q) \setminus \mathcal{N}\mathcal{A}(E; l_q)$ e considere a sequência de vetores $(v_j)_{j=1}^{\infty}$ onde cada v_j está definido a partir de w assim como na demonstração do Teorema 1.4.9. Já vimos que, para todo j , v_j não atinge sua norma. Mais precisamente, mostramos que

$$\|v_j\| = \|w\|$$

para todo j . Assim, para todo $a = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \|a_j v_j\| &= \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \|v_j\| \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \|w\| \\ &= \|w\| \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty.\end{aligned}$$

Desse modo, fica bem definido o operador $T : l_1 \rightarrow \mathcal{L}(E; l_q)$, dado por

$$T(a) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j v_j$$

para todo $a = (a_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1$. Já vimos que T é linear e injetivo, pois, ao demonstrar isso no Teorema 1.4.12, não usamos o fato de v_j atingir a norma. Resta então mostrar que $T(a) \in \mathcal{L}(E; F) \setminus \mathcal{NA}(E; F)$. Com efeito, já provamos no Teorema 1.4.12 que

$$\|T(a)\| = \|a\|_q \|w\| = \left\| \|a\|_q w \right\|.$$

Como w não atinge sua norma, $\|a\|_q w \in \mathcal{L}(E; F) \setminus \mathcal{NA}(E; F)$ e, assim, $T(a) \in \mathcal{L}(E; F) \setminus \mathcal{NA}(E; F)$. Daí, o subespaço

$$T(l_1) \subset \mathcal{L}(E; F) \setminus \mathcal{NA}(E; F)$$

tem dimensão c , portanto $\mathcal{L}(E; F) \setminus \mathcal{NA}(E; F)$ é c -lineável. ■

Capítulo 2

Lineabilidade e espaçabilidade em espaços de seqüências

Neste capítulo discorreremos sobre a lineabilidade no contexto dos espaços de seqüências. Trabalhamos com classes gerais de espaços de seqüências e mostramos resultados que relacionam a lineabilidade com a invariância (invariância no sentido que será definido mais adiante) de tais espaços.

2.1 O conjunto $l_p - \cup_{0 < q < p} l_q$

Nesta seção daremos especial atenção ao fato de que existem seqüências que pertencem a l_p , $0 < p < \infty$, mas não pertencendo a l_q para qualquer que seja $0 < q < p$. Com este fim, enunciaremos dois resultados clássicos da Análise Funcional:

Teorema 2.1.1 (*Desigualdade de Hölder*) *Sejam $q, q' > 1$ tais que $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Então para todos $a_i, b_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$, tem-se*

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Teorema 2.1.2 (*Banach–Steinhaus*) *Sejam E um espaço de Banach e F um espaço normado. Se a seqüência de operadores $(T_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(E, F)$ é tal que*

$$\sup_n \|T_n(x)\| < \infty$$

para todo $x \in E$, então $\sup_n \|T_n\| < \infty$. Além disso, se existe o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$ para todo $x \in E$, o operador T , definido por

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$$

é contínuo, isto é, $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Agora, munidos desses dois teoremas, podemos provar o resultado referido acima, cuja demonstração nos foi informada por M. C. Matos.

Teorema 2.1.3 Para todo $p > 0$, tem-se $l_p = \bigcup_{0 < q < p} l_q \neq \emptyset$.

Demonstração. Consideremos a sequência $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty}$. Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^s < \infty$ para todo $s > 2$. Logo, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty} \notin l_2$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty} \in l_s$ para todo $s > 2$. Tomando $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in l_q$, $0 < q < 2$, e tendo em vista a desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^r \left| y_n \frac{1}{\sqrt{n}} \right| &\leq \left(\sum_{n=1}^r |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^r \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leq \|(y_n)_{n=1}^{\infty}\|_q \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)_{n=1}^{\infty} \right\|_{q'} < \infty, \end{aligned}$$

para todo $r \in \mathbb{N}$. Daí, fazendo $r \rightarrow \infty$, obtemos $\sum_{n=1}^{\infty} \left| y_n \frac{1}{\sqrt{n}} \right| < \infty$. Assim, supondo por

absurdo que $l_2 = \bigcup_{0 < q < 2} l_q$, temos $\sum_{n=1}^{\infty} \left| y_n \frac{1}{\sqrt{n}} \right| < \infty$ para todo $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2$. Agora, para cada inteiro positivo k , consideremos o operador linear e contínuo

$$T_k : l_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

dado por

$$T_k((y_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} y_n.$$

Ora,

$$\begin{aligned} \sup_{k \in \mathbb{N}} |T_k((y_n)_{n=1}^\infty)| &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} y_n \right| \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^k \left| \frac{1}{\sqrt{n}} y_n \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^\infty \left| \frac{1}{\sqrt{n}} y_n \right| < \infty \end{aligned}$$

isto é, $\sup_{k \in \mathbb{N}} |T_k((y_n)_{n=1}^\infty)| < \infty$ para todo $(y_n)_{n=1}^\infty \in l_2$. Assim, pelo teorema de Banach–Steinhaus, concluímos que

$$T((y_n)_{n=1}^\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k((y_n)_{n=1}^\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} y_n = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}} y_n,$$

define um operador linear contínuo de l_2 em \mathbb{R} . Logo, usando a dualidade $(l_2)^* = l_2$, segue que $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^\infty \in l_2$, uma contradição. Daí, existe $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l_2 - \bigcup_{0 < q < 2} l_q$. Com este x , definamos a sequência $\left(|x_n|^{\frac{2}{p}}\right)_{n=1}^\infty$ e provemos que ela pertence $l_p - \bigcup_{0 < q < p} l_q$. Como $(x_n)_{n=1}^\infty \in l_2$, vale

$$\sum_{n=1}^\infty \left| |x_n|^{\frac{2}{p}} \right|^p = \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty,$$

ou seja, $\left(|x_n|^{\frac{2}{p}}\right)_{n=1}^\infty \in l_p$. Por outro lado, como $(x_n)_{n=1}^\infty \notin \bigcup_{0 < r < 2} l_r$, temos

$$\sum_{n=1}^\infty \left| |x_n|^{\frac{2}{p}} \right|^q = \sum_{n=1}^\infty |x_n|^{\frac{2q}{p}} = \infty,$$

pois $0 < \frac{2}{p}q < 2$, conseqüentemente $\left(|x_n|^{\frac{2}{p}}\right)_{n=1}^\infty \notin \bigcup_{0 < q < p} l_q$. Portanto,

$$\left(|x_n|^{\frac{2}{p}}\right)_{n=1}^\infty \in l_p - \bigcup_{0 < q < p} l_q$$

e isso conclui a demonstração. ■

Na Seção três do Apêndice incluímos uma demonstração construtiva do Teorema 2.1.3 que estabelece um algoritmo capaz de nos fornecer uma infinidade de exemplos concretos de sequências que pertencem a l_p , mas não a l_q , para $0 < q < p$.

2.2 Espaços de seqüências

Nesta seção exploramos classes mais gerais de espaços de seqüências de escalares ou vetores e provamos que alguns deles possuem subconjuntos importantes cujos complementos são espaçáveis. Os resultados anteriores foram desenvolvidos em espaços de Banach, mas, na presente seção, além de espaços de Banach, utilizaremos espaços de seqüências que não são necessariamente espaços de Banach, e sim quasi-Banach. Na Seção 2 do Apêndice fazemos uma breve explanação de tais espaços.

Definição 2.2.1 *Seja $X \neq \{0\}$ um espaço de Banach.*

(a) *Dado $x \in X^{\mathbb{N}}$, denotamos por x^0 a versão “zerolivre” de x , ou seja: se x tem apenas um número finito de coordenadas não-nulas, então $x^0 = 0$; caso contrário, $x^0 = (x_k)_{k=1}^{\infty}$, onde x_k é a k -ésima coordenada não-nula de x .*

(b) *Entendemos por um espaço invariante de seqüências sobre X , um espaço de Banach ou quasi-Banach E , de dimensão infinita, de seqüências a valores em X satisfazendo as condições seguintes:*

(b1) *Para $x \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $x^0 \neq 0$, $x \in E$ se e somente se $x^0 \in E$, e neste caso*

$$\|x\|_E \leq C \|x^0\|_E$$

para alguma constante C que depende somente de E .

(b2) *$\|x_k\|_X \leq \|x\|_E$ para todo $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in E$ e todo $k \in \mathbb{N}$.*

Um espaço invariante de seqüências é um espaço invariante de seqüências sobre algum espaço de Banach X .

Muitos dos espaços de seqüências clássicos que conhecemos são espaços invariantes de seqüências:

Exemplo 2.2.2 *Os espaços l_p , para $0 < p \leq \infty$, com suas respectivas normas (p -normas, se $0 < p < 1$) usuais, são espaços invariantes de seqüências sobre \mathbb{K} . De fato, dado $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tal que $x^0 \neq 0$, temos $x \in l_p$, $0 < p < \infty$, se, e somente se,*

$$\|x^0\|_p^p = \|x\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty,$$

e portanto $x^0 \in l_p$ e, além disso, para $C \geq 1$, a desigualdade $\|x\|_p \leq C \|x^0\|_p$ é trivial. Por fim, é claro que

$$|x_k| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p$$

isto é, $|x_k| \leq \|x\|_p$ para todo $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p$ e todo $k \in \mathbb{N}$. De modo similar, se $p = \infty$ e $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ é tal que $x^0 \neq 0$, temos $x \in l_{\infty}$ se, e somente se,

$$\|x^0\|_{\infty} = \sup_i |x_i| = \|x\|_{\infty} < \infty,$$

de onde obtemos $x^0 \in l_{\infty}$, e $\|x\|_{\infty} \leq C \|x^0\|_{\infty}$ para $C \geq 1$ é óbvio. Além disso,

$$|x_k| \leq \sup_i |x_i| = \|x\|_{\infty}.$$

Portanto, os espaços $l_p, 0 < p \leq \infty$, com suas respectivas normas (p -normas, se $0 < p < 1$) usuais, são espaços invariantes de seqüências sobre \mathbb{K} . Mais geralmente, dado um espaço de Banach X , para $0 < p \leq \infty$, o espaço $l_p(X)$ (espaço de seqüências a valores em X absolutamente p -somáveis) é um espaço invariante de seqüências sobre X . De modo semelhante prova-se que os espaços $l_p^u(X)$ (espaços de seqüências a valores em X incondicionalmente p -somáveis) e $l_p^w(X)$ (espaços de seqüências a valores em X fracamente p -somáveis) são espaços invariantes de seqüências sobre X com suas respectivas normas usuais (p -normas, se $0 < p < 1$).

A seguir provamos o principal resultado deste capítulo.

2.3 Resultados

É bem conhecido que um espaço normado X é completo se, e somente se, toda série absolutamente convergente em X é convergente em X . Para espaços p -Banach existe um resultado análogo. Vejamos isso com precisão:

Proposição 2.3.1 *Seja X um espaço vetorial. Então podemos afirmar:*

1. Se X é um espaço normado, então X é espaço de Banach se, e somente se, toda série em X absolutamente convergente é convergente em X .
2. Dado $0 < p \leq 1$, um espaço p -normado X é um espaço p -Banach se, e somente se, toda série em X absolutamente p -somável é convergente em X .

Demonstração. Demonstraremos apenas (2), visto ser análoga a demonstração de (1). Começamos supondo que X é um espaço p -Banach. Assim, dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ em X , absolutamente p -somável, isto é, satisfazendo $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty$, precisamos mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, ou seja, mostrar que existe limite para a sequência $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$ das somas parciais. Com efeito, sendo $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=k+1}^n \|x_i\|^p < \varepsilon$$

para todos $n > k > n_0$. Logo, tendo em vista a desigualdade p -triangular da p -norma (ver Seção 2 do Apêndice), obtemos

$$\begin{aligned} \|s_n - s_k\|^p &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^k x_i \right\|^p \\ &= \left\| \sum_{i=k+1}^n x_i \right\|^p \leq \sum_{i=k+1}^n \|x_i\|^p < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy segundo a métrica induzida pela p -norma, isto é, segundo a função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \|x - y\|^p$. Como, por hipótese, X é p -Banach, segue que $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, ou seja, existe $s \in X$ tal que

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

como queríamos.

Reciprocamente, supondo que toda série em X , absolutamente p -somável, é convergente, provemos que X é um espaço p -Banach. Com este fim, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em X com respeito à métrica induzida pela p -norma. Logo, existe n_1 tal que $\|x_l - x_{n_1}\|^p < 2^{-1}$ para todo $l \geq n_1$. Analogamente, podemos tomar $n_2 > n_1$ tal que $\|x_l - x_{n_2}\|^p < 2^{-2}$ para todo $l \geq n_2$. Continuando o processo obtemos índices $n_1 < n_2 < \dots$ tais que

$$\|x_{n_l} - x_{n_k}\|^p < 2^{-k}$$

para todo $l \geq k$. Daí, pondo $x_{n_0} = 0$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, $y_k = x_{n_k} - x_{n_{k-1}}$ obtemos uma sequência $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que $x_{n_k} = \sum_{i=1}^{n_k} y_i$ e

$$\|y_k\|^p = \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\|^p < 2^{-(k-1)}$$

para todo $k \geq 2$. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\|^p &= \|y_1\|^p + \sum_{k=2}^{\infty} \|y_k\|^p \\ &< \|x_{n_1} - x_{n_0}\|^p + \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-(k-1)} \\ &= \|x_{n_1}\|^p + 1 < \infty, \end{aligned}$$

isto é, a série $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ é absolutamente p -somável que, por hipótese, converge para um certo $x \in X$. Logo, a subsequência (x_{n_k}) converge também para o mesmo limite, visto ser

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = x.$$

Além disso, sendo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy, tem-se

$$\lim_{n, k \rightarrow \infty} \|x_n - x_{n_k}\|^p = 0$$

e, usando a convergência de (x_{n_k}) , obtemos

$$\left\| \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - x \right\|^p = 0.$$

Desse modo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

ou seja, a sequência de Cauchy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é convergente e, portanto, o espaço p -normado X é completo, isto é, X é um espaço p -Banach. ■

Munidos dos conceitos exibidos na seção anterior e da Proposição 2.3.1, podemos agora enunciar um teorema sobre espaçabilidade em espaços invariantes:

Teorema 2.3.2 *Seja E um espaço invariante de seqüências sobre um espaço de Banach, ou quasi-Banach, X . Então*

(a) *Para todo $\Gamma \subseteq (0, \infty]$, o conjunto $E - \cup_{q \in \Gamma} l_q(X)$ é vazio ou espaçável.*

(b) *O conjunto $E - c_0(X)$ é vazio ou espaçável.*

Demonstração. Em (a), consideremos $A = \cup_{q \in \Gamma} l_q(X)$ e, em (b), $A = c_0(X)$. Suponhamos que $E - A$ seja não-vazio. Precisamos provar que $E - A$ é espaçável. Com este fim, seja $x \in E - A$. Note que x tem um número infinito de coordenadas não-nulas pois, caso contrário, teríamos $\|x\|_q < \infty$ para todo $q \in \Gamma$, e assim teríamos $x \in A$, uma contradição. Assim $x^0 \neq 0$ e, como E é um espaço invariante de seqüências, $x^0 \in E$. Além disso, como para todo $q \in \Gamma$, $\|x^0\|_q = \|x\|_q = \infty$, temos $x^0 \notin A$. Então, escrevendo $x^0 = (x_j)_{j=1}^\infty$, temos $x^0 \in E - A$ e $x_j \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Agora escrevamos $\mathbb{N} = \cup_{i=1}^\infty \mathbb{N}_i$, onde cada $\mathbb{N}_i = \{i_1 < i_2 < \dots\}$ é infinito e $\mathbb{N}_i \cap \mathbb{N}_l = \emptyset$, se $i \neq l$, e definamos, para cada $i \in \mathbb{N}$, a seqüência

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_{i_j} \in X^{\mathbb{N}}.$$

Observe que, para todo $i \in \mathbb{N}$, os únicos termos não-nulos de y_i são os termos da seqüência $(x_j)_{j=1}^\infty$, isto é, $y_i^0 = x^0$. Logo, $y_i^0 \neq 0$ e $y_i^0 \in E$ e, como E é um espaço invariante de seqüências, obtemos $y_i \in E$. Vamos mostrar que, para qualquer que seja $i \in \mathbb{N}$, $y_i \notin A$: em (a) isto é verdade, pois

$$\|y_i\|_q = \|y_i^0\|_q = \|x^0\|_q = \|x\|_q = \infty$$

para todo $q \in \Gamma$, e portanto $y_i \notin A$. Em (b), o fato de $x^0 = (x_j)_{j=1}^\infty$ não pertencer a $A = c_0(X)$, já visto acima, nos diz que $\|x_j\|_X \not\rightarrow 0$ e, como $(x_j)_{j=1}^\infty$ é uma subsequência de $y_i = \sum_{j=1}^\infty x_j e_{i_j}$, segue-se que $\|y_i\|_X \not\rightarrow 0$, isto é, $y_i \notin A$ como queríamos. Agora seja C a constante da Definição 2.2.1 (b1) e consideremos $r = 1$, se E é um espaço de Banach, e $r = s$, se E é um espaço s -Banach, $0 < s < 1$. Desse modo, dada uma

seqüência de escalares $a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in l_r$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i y_i\|_E^r &= \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^r \|y_i\|_E^r \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^r (C \|y_i^0\|_E)^r \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^r (C \|x^0\|_E)^r \\
&= C^r \|x^0\|_E^r \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^r \\
&= C^r \|x^0\|_E^r \|a\|_r^r < \infty.
\end{aligned}$$

Assim, se E é espaço de Banach então $r = 1$, e obtemos $\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i y_i\|_E < \infty$; se E for espaço s -Banach, então $r = s$, $0 < s < 1$, de onde vem $\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i y_i\|_E^s < \infty$. Em qualquer caso segue da Proposição 2.3.1 que a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ converge em E ; conseqüentemente fica bem definido o operador

$$T : l_r \rightarrow E$$

dado por

$$T((a_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i.$$

Procedendo como na demonstração do Teorema 1.4.12, vemos que T é linear e injetivo e, conseqüentemente, $T(l_r) \subset E$ tem dimensão infinita. Basta então mostrar que o fecho $\overline{T(l_r)}$, que é um subespaço fechado de dimensão infinita, está contido em $(E - A) \cup \{0\}$, e isto concluirá a demonstração. Com esta finalidade, consideremos $z = (z_i)_{i=1}^{\infty} \in \overline{T(l_r)} - \{0\}$ e mostremos que $z \notin A$. Ora, sendo $\overline{T(l_r)}$ fechado, existem seqüências $(a_i^{(k)})_{i=1}^{\infty} \in l_r$, $k \in \mathbb{N}$, tais que $z = \lim_{k \rightarrow \infty} T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$ em E . Por outro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} y_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_{i_j} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i^{(k)} x_j e_{i_j}.$$

Fixemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \neq 0$. Como $\mathbb{N} = \cup_{i=1}^{\infty} \mathbb{N}_i$ é uma união disjunta, existem únicos $m, t \in \mathbb{N}$ tais que $e_n = e_{m_t}$. Desse modo, para cada $k \in \mathbb{N}$, a n -ésima

coordenada de $T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i^{(k)} x_j e_{ij}$ é o elemento $a_m^{(k)} x_t$. Como, pela Definição 2.2.1 (b2), $\|x_t\|_X \leq \|x\|_E$ para todo $t \in \mathbb{N}$, segue que a convergência em E implica convergência em cada uma das coordenadas, o que nos permite obter a n -ésima coordenada de z tomando o limite

$$z_n = \lim_{k \rightarrow \infty} a_m^{(k)} x_t = x_t \lim_{k \rightarrow \infty} a_m^{(k)}.$$

Como $z_n \neq 0$, segue que $x_t \neq 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} |a_m^{(k)}| &= \frac{\|x_t\| \lim_{k \rightarrow \infty} |a_m^{(k)}|}{\|x_t\|} \\ &= \frac{\|x_t \lim_{k \rightarrow \infty} a_m^{(k)}\|}{\|x_t\|} \\ &= \frac{\|z_n\|_X}{\|x_t\|_X} \neq 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_m^{(k)}| = \frac{\|z_n\|_X}{\|x_t\|_X} \neq 0.$$

Ora, acabamos de ver que, para $j, k \in \mathbb{N}$, a m_j -ésima coordenada de $T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$ é o vetor $a_m^{(k)} x_j$. Então, pondo

$$\alpha_m = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_m^{(k)}| = \frac{\|z_n\|_X}{\|x_t\|_X},$$

temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_m^{(k)} x_j\|_X = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_m^{(k)}| \|x_j\|_X = \alpha_m \|x_j\|_X,$$

isto é,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_m^{(k)} x_j\|_X = \alpha_m \|x_j\|_X.$$

Por outro lado, sendo $a_m^{(k)} x_j$ a m_j -ésima coordenada de $T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$ e $z = \lim_{k \rightarrow \infty} T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$, a convergência de cada coordenada nos dá

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_m^{(k)} x_j\|_X = \|z_{m_j}\|_X.$$

Assim,

$$\|z_{m_j}\|_X = \alpha_m \|x_j\|_X$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. Observemos que m , que depende de n , está fixo e, dessa forma, os números naturais $(m_j)_{j=1}^{\infty}$ são dois a dois distintos, pois $\mathbb{N}_m = \{m_1 < m_2 < \dots\}$. Consideremos então os casos (a) e (b) separadamente:

(a) De $x^0 \notin A = \cup_{q \in \Gamma} l_q(X)$, temos $\|x^0\|_q = \infty$ para todo $q \in \Gamma$. Como consequência, para $q \neq \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \|z\|_q^q &= \sum_{i=1}^{\infty} \|z_i\|_X^q \geq \sum_{j=1}^{\infty} \|z_{m_j}\|_X^q \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_m \|x_j\|_X)^q = \alpha_m^q \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_X^q \\ &= \alpha_m^q \|x\|_q^q = \alpha_m^q \|x^0\|_q^q = \infty, \end{aligned}$$

isto é, $\|z\|_q^q = \infty$. No caso em que $q = \infty$, como $\alpha_m \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} \|z\|_{\infty} &= \sup_i \|z_i\|_X \geq \sup_j \|z_{m_j}\|_X \\ &= \sup_j (\alpha_m \|x_j\|_X) = \alpha_m \sup_j \|x_j\|_X \\ &= \alpha_m \|x\|_{\infty} = \alpha_m \|x^0\|_{\infty} = \infty, \end{aligned}$$

ou seja, $\|z\|_{\infty} = \infty$. Logo, $z \notin \cup_{q \in \Gamma} l_q(X) = A$.

(b) De $x^0 \notin A = c_0(X)$, temos $\|x_j\|_X \not\rightarrow 0$. Por outro lado, de $\alpha_m \|x_j\|_X = \|z_{m_j}\|_X$ para todo $j \in \mathbb{N}$, e $\alpha_m \neq 0$, segue-se que $z_{m_j} \not\rightarrow 0$ e, conseqüentemente, $z_i \not\rightarrow 0$. Daí $z \notin c_0(X) = A$.

Como, em ambos os casos (a) e (b), $z \notin A$, obtemos $\overline{T(\overline{l_r})} - \{0\} \subset E - A$ como queríamos. ■

Adiante listamos algumas conseqüências.

Doravante, quando escrevermos $F \subset E$, entenderemos que E contém F como um subespaço vetorial e que $F \neq E$. Não estamos pedindo que E contenha uma cópia isomorfa de F , nem que a inclusão $F \hookrightarrow E$ seja contínua.

Corolário 2.3.3 *Seja E um espaço invariante de seqüências sobre \mathbb{K} .*

(a) *Se $0 < p \leq \infty$ e $l_p \subset E$, então $E - l_p$ é espaçável.*

(b) Se $c_0 \subset E$, então $E - c_0$ é espaçável.

Demonstração. Como $E - l_p$ e $E - c_0$ são ambos não-vazios, o resultado segue imediatamente do Teorema 2.3.2. ■

Corolário 2.3.4 O conjunto $l_p - \cup_{0 < q < p} l_q$ é espaçável para todo $p > 0$.

Demonstração. Já vimos que l_p é um espaço invariante de seqüências sobre \mathbb{K} . Assim, pelo Teorema 2.3.2 (a), basta mostrar que

$$l_p - \bigcup_{0 < q < p} l_q \neq \emptyset,$$

o que já foi mostrado no Teorema 2.1.3. Portanto $l_p - \bigcup_{0 < q < p} l_q$ é espaçável. ■

Embora os resultados acima digam respeito a espaçabilidade de complementos de subespaços vetoriais, as mesmas técnicas permitem obter a espaçabilidade de conjuntos que não estão relacionados a subespaço vetorial algum. Reescrevendo a prova do Teorema 2.3.2 obtemos:

Proposição 2.3.5 Seja E um espaço invariante de seqüências sobre um espaço de Banach X . Seja $A \subseteq E$ tal que:

- (i) Dado $x \in E, x \in A$ se, e somente se, $x^0 \in A$.
- (ii) Se $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in A$ e $y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in E$ é tal que $(\|y_j\|_X)_{j=1}^{\infty}$ é um múltiplo de uma subsequência de $(\|x_j\|_X)_{j=1}^{\infty}$, então $y \in A$.
- (iii) Existe $x \in E - A$ com $x^0 \neq 0$.

Então $E - A$ é espaçável.

Demonstração. Por (iii), existe $x \in E - A$ com $x^0 \neq 0$ e, por (i), $x^0 \notin A$. Mas, sendo E é um espaço invariante de seqüências, $x^0 \in E$, e por conseguinte $x^0 \in E - A$. Escrevendo $x^0 = (x_j)_{j=1}^{\infty}$, definamos a seqüência

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_{i_j}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, como na demonstração do Teorema 2.3.2. Já vimos que $y_i^0 = x^0$ e que $x^0 \in E - A$, logo, por (i), $y_i \in E - A$. Nessas condições vimos também que o operador

$$T : l_r \rightarrow E,$$

$0 < r \leq 1$, dado por

$$T((a_i)_{i=1}^\infty) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$$

está bem definido, é linear e injetivo, e que, dado $z = (z_n)_{n=1}^\infty \in \overline{T(l_r)} - \{0\}$, existe $\alpha_m \neq 0$, tal que

$$\|z_{m_j}\|_X \frac{1}{\alpha_m} = \|x_j\|_X$$

para todo j . Como $x \in E - A$ e $z \in E$, trocando o y de (ii) por este x , e o x de (ii) por z , a contrapositiva da condição (ii) nos dá $z \notin A$. Portanto $\overline{T(l_r)} \subset (E - A) \cup \{0\}$, como queríamos. ■

Capítulo 3

Apêndice

No presente apêndice apresentamos uma breve explanação sobre assuntos que foram utilizados livremente nesta dissertação, objetivando torná-la o mais auto-suficiente possível.

3.1 Aplicações multilineares e polinômios entre espaços de Banach

Esta seção é um breve resumo de alguns conceitos que utilizamos na Seção 1 do Capítulo 1, mas que se distanciam um pouco dos objetivos desta dissertação.

Os resultados da presente seção foram extraídos de [11].

Definição 3.1.1 *Dado $m \in \mathbb{N}$, sejam X_1, \dots, X_m, Y espaços vetoriais sobre um corpo \mathbb{K} . Uma aplicação $A : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y$ é m -linear se for linear em cada uma de suas variáveis, isto é, se para cada $x_i \in X_i, i = 1, \dots, m$, o operador*

$$A_{(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_m)} : X_i \longrightarrow Y$$

dado por

$$A_{(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_m)}(z) = A(x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_m),$$

é linear.

Quando $m > 1$, A é também chamada de aplicação multilinear.

O conjunto de todas as aplicações multilineares $A : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$ é denotado por $L(X_1, \dots, X_m; Y)$. O conjunto $L(X_1, \dots, X_m; Y)$, munido com as operações usuais de funções, é um espaço vetorial.

Se X_1, \dots, X_m são espaços normados sobre \mathbb{K} , o conjunto $X_1 \times \cdots \times X_m$ também o será se considerarmos uma das normas definidas por

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq m} \|x_j\|_{X_j}$$

e

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^m \|x_j\|_{X_j}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$, e $1 \leq p < \infty$. Assim, como $X_1 \times \cdots \times X_m$ é também espaço vetorial normado, podemos falar da continuidade de uma aplicação $A : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$. O subconjunto das aplicações multilineares contínuas é denotado por $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$. Se $X_1 = \cdots = X_m = X$, simplifica-se a notação escrevendo $\mathcal{L}(^m X; Y)$. É comum também omitir-se o contradomínio quando $Y = \mathbb{K}$ e escrever apenas $L(X_1, \dots, X_m)$, $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$, $L(^m X)$ e $\mathcal{L}(^m X)$.

Vejamos algumas equivalências sobre a continuidade de uma aplicação multilinear:

Teorema 3.1.2 *Sejam $m \in \mathbb{N}$, X_1, \dots, X_m, Y espaços normados sobre \mathbb{K} e $A : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y$ uma aplicação multilinear. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) A é contínua;
- (ii) A é contínua na origem;
- (iii) $\|A(x_1, \dots, x_m)\| \leq C \|x_1\| \cdots \|x_m\|$ para alguma constante $C > 0$ e para todo $(x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \cdots \times X_m$;
- (iv) A é uniformemente contínua sobre todo subconjunto limitado de $X_1 \times \cdots \times X_m$;
- (v) A é limitada sobre as bolas de $X_1 \times \cdots \times X_m$ que têm raio finito;
- (vi) A é limitada em alguma bola de $X_1 \times \cdots \times X_m$.

Prova-se também, com exceção da aplicação nula, que nenhuma aplicação multilinear é uniformemente contínua, e que a continuidade em cada variável não implica continuidade. Entretanto, temos o seguinte resultado para espaços de Banach:

Teorema 3.1.3 *Se X_1, \dots, X_m são espaços de Banach e Y um espaço normado, as aplicações $A \in L(X_1 \times \dots \times X_m; Y)$ são contínuas se, e somente se, são contínuas em cada uma de suas variáveis.*

Corolário 3.1.4 *Se X_1, \dots, X_m são espaços normados de dimensão finita e Y um espaço normado, então toda $A \in L(X_1, \dots, X_m; Y)$ é contínua.*

Como no caso linear, define-se também a norma de uma aplicação multilinear:

Proposição 3.1.5 *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e X_1, \dots, X_m, Y espaços normados sobre \mathbb{K} . Então a função $\|\cdot\| : \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\|A\| = \sup\{\|A(x)\|; x \in X_1 \times \dots \times X_m, \|x\|_\infty \leq 1\} \quad (3.1)$$

é uma norma em $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$.

Segue imediatamente de (3.1) que $\|A\|$ é o ínfimo das constantes C tais que

$$\sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|A(x)\| \leq C.$$

Existem também versões multilineares do Teorema do Gráfico Fechado, da Limitação Uniforme e de Banach–Steinhaus:

Teorema 3.1.6 (Gráfico Fechado) *Se X_1, \dots, X_m, Y são espaços de Banach e $A \in L(X_1 \times \dots \times X_m; Y)$ é uma aplicação m -linear de gráfico fechado, então $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$.*

Teorema 3.1.7 (Limitação Uniforme) *Sejam X_1, \dots, X_m espaços de Banach, Y um espaço normado e $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma} \subset \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ uma família. Se*

$$\sup_{\lambda \in \Gamma} \|A_\lambda(x)\| < \infty$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m$, então

$$\sup_{\lambda \in \Gamma} \|A_\lambda\| < \infty.$$

Teorema 3.1.8 (Banach–Steinhaus) *Sejam X_1, \dots, X_m espaços de Banach, Y um espaço normado e $(A_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ uma seqüência tal que, para cada $x_j \in X_j$, a seqüência $(A_n(x_1, \dots, x_m))_{n=1}^\infty$ é convergente. Se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x_1, \dots, x_m) = A(x_1, \dots, x_m)$$

então $A \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$.

Um conceito importante no estudo das aplicações multilineares é o conceito de polinômios:

Definição 3.1.9 *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre \mathbb{K} e $n \in \mathbb{N}$. Chamamos uma aplicação $P : X \rightarrow Y$ de polinômio homogêneo de grau n (ou polinômio n -homogêneo) se existe $A \in L({}^n X; Y)$ tal que $P(x) = Ax^n$ para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que P é um polinômio n -homogêneo associado a A . Se uma aplicação $Q : X \rightarrow Y$ puder ser escrita como soma $Q = P_0 + P_1 + \dots + P_n$, onde cada P_k , $k = 1, \dots, n$, é um polinômio k -homogêneo, diz-se que Q é um polinômio.*

3.2 Os espaços l_p com $p > 0$

Na presente seção expomos, de forma objetiva, os resultados sobre espaços l_p utilizados em todo trabalho. Também damos ênfase aos espaços l_p com $0 < p < 1$ e, nesse contexto, incluímos as definições de espaço p -Banach e espaço quasi-Banach.

Para o estudo dos espaços l_p com $p \geq 1$, faz-se necessário enunciarmos o seguinte teorema clássico:

Teorema 3.2.1 (Desigualdade de Minkowski) *Se $p \in [1, \infty)$, então para todos $x_i, y_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$, vale a desigualdade*

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 3.2.2 *Dado $p \in [1, \infty)$, o espaço $l_p = l_p(\mathbb{N})$ denota o espaço vetorial de todas as seqüências de escalares $x = (x_i)_{i=1}^\infty$ satisfazendo $\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p < \infty$, munido com a norma*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para mostrarmos que, de fato, l_p é um espaço vetorial normado, precisamos mostrar que se $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}, y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in l_p$, então $x + y \in l_p$ e vale a desigualdade triangular $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Com efeito, para todo $n \in \mathbb{N}$, a desigualdade de Minkowski nos dá

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|x\|_p + \|y\|_p < \infty. \end{aligned}$$

Logo, a sequência $\left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)_{n=1}^{\infty}$ é crescente e limitada, portanto converge. Assim, fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos $\|x + y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ e $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, isto é, $x + y \in l_p$ e vale a desigualdade triangular.

Definição 3.2.3 O espaço $l_{\infty} = l_{\infty}(\mathbb{N})$ é formado por todas as seqüências de escalares $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ que são limitadas, munido com a norma

$$\|x\|_{\infty} = \sup \{ |x_i| ; i \in \mathbb{N} \}.$$

Chamamos de $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ o subespaço de l_{∞} formado por todas as seqüências $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ tais que $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i) = 0$.

A demonstração de que l_p (para $p > 1$) é um espaço de Banach pode ser encontrada em textos de Análise Funcional.

Os espaços l_p podem ser também definidos para $0 < p < 1$. Para isso necessitamos de mais algumas definições.

Definição 3.2.4 Uma quasinorma num espaço vetorial X é uma aplicação $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

- (i) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$, e $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$.
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, para todo $x \in X$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$.
- (iii) $\|x + y\| \leq K (\|x\| + \|y\|)$ para todos $x, y \in X$ e alguma constante $K \geq 1$.

Uma quasinorma difere de uma norma apenas no que diz respeito a desigualdade triangular da norma, que aqui recebe o nome de desigualdade quasi-triangular e exige-se uma condição adicional: a existência de uma constante $K \geq 1$.

Ao par $(X, \|\cdot\|)$, isto é, ao espaço vetorial X munido da quasinorma $\|\cdot\|$, dá-se o nome de espaço vetorial quasinormado. Mais adiante veremos que toda quasinorma é equivalente a uma p -norma, a qual induz uma métrica. Daí, se X é completo com respeito à topologia oriunda da quasinorma, diz-se que X é um espaço quasi-Banach.

Definição 3.2.5 *Seja $0 < p \leq 1$. Uma p -norma é uma quasinorma satisfazendo a desigualdade*

$$\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$$

para todos $x, y \in X$, a qual é chamada de desigualdade p -triangular.

Se X é completo com a métrica $d(x, y) = \|x - y\|^p$ induzida pela p -norma, chamamos X de espaço vetorial p -Banach.

Para ver que d é uma métrica, basta mostrar que d satisfaz a desigualdade triangular. De fato,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\|^p \\ &= \|x - z + z - y\|^p \\ &\leq \|x - z\|^p + \|z - y\|^p \\ &= d(x, z) + d(y, z), \end{aligned}$$

para todos $x, y, z \in X$.

Observação 3.2.6 *Note que uma p -norma é uma quasi-norma com a constante $K = 2^{\frac{1}{p}}$. De fato,*

$$\begin{aligned} \|x + y\|^p &\leq \|x\|^p + \|y\|^p \Rightarrow \\ \|x + y\| &\leq (\|x\|^p + \|y\|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq [(\|x\| + \|y\|)^p + (\|y\| + \|x\|)^p]^{\frac{1}{p}} \\ &= [2(\|x\| + \|y\|)^p]^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{\frac{1}{p}} (\|x\| + \|y\|), \end{aligned}$$

isto é,

$$\|x + y\| \leq 2^{\frac{1}{p}} (\|x\| + \|y\|).$$

Por outro lado, visto que existe uma bijeção $f : (0, 1] \rightarrow [1, \infty)$ dada por $f(p) = 2^{\frac{1-p}{p}}$, para toda constante $K \geq 1$ na desigualdade quasi-triangular, existe $0 < p \leq 1$ tal que $K = 2^{\frac{1-p}{p}}$, de sorte que se $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço quasinormado é possível definir, a partir de $\|\cdot\|$, uma p -norma $\|\cdot\|_*$ sobre X que é equivalente a quasinorma $\|\cdot\|$ por satisfazer as desigualdades

$$\|x\|_* \leq \|x\| \leq 2^{\frac{1}{p}} \|x\|_*$$

para todo $x \in X$. Omitimos a prova deste fato por não ser importante para nossos propósitos (para mais detalhes, vide página 92 de [28]). Logo, para toda quasinorma existe uma p -norma equivalente. Consequentemente todo espaço quasi-Banach é p -Banach para algum $0 < p \leq 1$, e vice-versa, isto é, todo espaço p -Banach é quasi-Banach para alguma constante $K \geq 1$.

Semelhantemente ao caso $p \geq 1$, definimos os espaços l_p para $0 < p \leq 1$.

Definição 3.2.7 Dado $p \in (0, 1]$, o espaço $l_p = l_p(\mathbb{N})$ denota o espaço vetorial de todas as seqüências de escalares $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ satisfazendo $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$, munido com a p -norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O mesmo argumento usado para demonstrar que l_p , para $1 \leq p < \infty$, é um espaço métrico completo nos dá a completude de l_p para $0 < p < 1$, desde que se tenha o cuidado de “trocar” a métrica proveniente da norma pela métrica induzida pela p -norma. Logo, os espaços $l_p, 0 < p < 1$, não são espaços de Banach, e sim espaços p -Banach.

É também um fato conhecido que $l_q \subseteq l_p$ para todos $0 < q < p \leq \infty$. Com efeito, se $p = \infty$, isto é óbvio. Se, porém, $p < \infty$, dado $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_q, 0 < q < \infty$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal $|x_i| < 1$ para todo $i \geq i_0$ e, sendo $0 < q < p$, temos

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} |x_i|^p < \sum_{i=i_0}^{\infty} |x_i|^q < \infty.$$

Portanto, $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$, isto é, $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_p$. Logo,

$$l_q \subseteq l_p$$

para todos $0 < q < p \leq \infty$.

3.3 Uma demonstração construtiva do Teorema 2.1.3

A demonstração dada para o Teorema 2.1.3 está embasada em um argumento não-construtivo, isto é, a prova que demos para existência de seqüências que pertençam a l_p , $0 < p < \infty$, mas que não pertencem a l_q , para qualquer que seja $0 < q < p$, não exibiu exemplo concreto de uma tal seqüência. Além disso, este argumento de existência depende do Princípio da Limitação Uniforme (Teorema de Banach-Steinhaus). Agora, porém, daremos uma prova construtiva deste resultado. De fato, é possível estabelecer um algoritmo que gera muitos exemplos concretos de seqüências que pertencem a l_p , $0 < p < \infty$, mas que não pertencem a l_q , para $0 < q < p$. A construção é elementar no sentido de que não usa nenhum resultado mais profundo (a construção a seguir foi extraída de [13]).

A construção.

Primeiro passo. Dada uma seqüência $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reais tal que $k_n > 1$ para todo n e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 1,$$

construiremos uma seqüência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reais tal que $a_n > 1$ para todo n , com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1,$$

de forma que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a_n}}$$

convirja. Ora, como a série $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{k_n}}$ é convergente para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um inteiro positivo N_n tal que

$$\sum_{j=N_n}^{\infty} \frac{1}{j^{k_n}} < \frac{1}{2^n}.$$

Escolhendo esses inteiros de modo que $N_n < N_{n+1}$ para todo n , definimos a seguinte sequência

$$a_n = \begin{cases} k_1, & \text{se } 1 \leq n \leq N_2 \\ k_j, & \text{se } N_j + 1 \leq n \leq N_{j+1}. \end{cases}$$

Observe que $a_n > 1$ para todo n e que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{j \rightarrow \infty} k_j = 1$. Provemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a_n}}$ é, de fato, convergente. Com efeito, dado $m \in \mathbb{N}$, escolhamos $r \in \mathbb{N}$ tal

que $m \leq N_r$. De $\sum_{j=N_n}^{\infty} \frac{1}{j^{k_n}} < \frac{1}{2^n}$ obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^{a_n}} &\leq \sum_{n=1}^{N_r} \frac{1}{n^{a_n}} = \sum_{n=1}^{N_2} \frac{1}{n^{a_n}} + \sum_{n=N_2+1}^{N_3} \frac{1}{n^{a_n}} + \cdots + \sum_{n=N_{r-1}+1}^{N_r} \frac{1}{n^{a_n}} \\ &= \sum_{n=1}^{N_2} \frac{1}{n^{k_1}} + \sum_{n=N_2+1}^{N_3} \frac{1}{n^{k_2}} + \cdots + \sum_{n=N_{r-1}+1}^{N_r} \frac{1}{n^{k_{r-1}}} \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{r-1}} \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \end{aligned}$$

para todo m , o que prova que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a_n}}$ é convergente.

Segundo passo. Dado $p > 0$, vamos construir uma sequência $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ pertencente a l_p , mas que não pertence a l_q para $q < p$. Com esta finalidade, definamos $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ pondo

$$x_n = \frac{1}{n^{\frac{a_n}{p}}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{a_n}{p}}} \right)^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a_n}} < +\infty,$$

concluimos que $x \in l_p$. Como $a_n > 1$ para todo n e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, vale $\frac{p}{a_n} < p$ para todo n e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{a_n} = p$. Assim, dado $0 < q < p$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q < \frac{p}{a_{k_0}} < p$.

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{k_0}} = \frac{1}{a_{k_0}},$$

tomando $t \in \left(\frac{1}{a_{k_0}}, 1\right)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{a_{k_0}} \leq \frac{a_n}{a_{k_0}} < t < 1$$

para todo $n > N$. Logo,

$$\frac{1}{n^{\frac{a_n}{a_{k_0}}}} > \frac{1}{n^t} > \frac{1}{n}$$

para todo $n > N$. Consequentemente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{a_n}{a_{k_0}}}} = +\infty$, de onde resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\frac{p}{a_{k_0}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{a_n}{p}}}\right)^{\frac{p}{a_{k_0}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{a_n}{a_{k_0}}}} = +\infty,$$

o que prova que $x \notin l_{\frac{p}{a_{k_0}}}$. Como $q < \frac{p}{a_{k_0}}$, ou seja, $l_q \subset l_{\frac{p}{a_{k_0}}}$, segue que $x \notin l_q$. Como, para todo $0 < q < p$, sempre podemos tomar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q < \frac{p}{a_{k_0}}$, concluimos que $x \notin l_q$ para todo $0 < q < p$, e isto conclui a construção.

Um exemplo concreto.

Vamos tomar $p = 2$ e $k_n = 1 + \frac{1}{n}$ para dar um exemplo concreto de uma sequência que pertence a l_2 , mas que não pertence a l_q para todo $0 < q < 2$. Determinemos os índices N_n . Para isto, lembre que a integral $\int_{j-1}^j \frac{1}{t^{1+\frac{1}{n}}} dt$ é área sob a hipérbole $\frac{1}{j^{1+\frac{1}{n}}}$ e que a área $[j - (j-1)] \frac{1}{j^{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{j^{1+\frac{1}{n}}}$ do retângulo sob a hipérbole é sempre menor que a área sob a hipérbole, isto é, lembre que vale a desigualdade $\frac{1}{j^{1+\frac{1}{n}}} \leq \int_{j-1}^j \frac{1}{t^{1+\frac{1}{n}}} dt$. Logo, podemos escrever

$$\sum_{j=N_n}^{\infty} \frac{1}{j^{1+\frac{1}{n}}} \leq \sum_{j=N_n}^{\infty} \int_{j-1}^j \frac{1}{t^{1+\frac{1}{n}}} dt = \int_{N_n-1}^{\infty} \frac{1}{t^{1+\frac{1}{n}}} dt.$$

Assim, basta encontrarmos N_n de forma que

$$\frac{n}{(N_n - 1)^{\frac{1}{n}}} = \int_{N_n-1}^{\infty} \frac{1}{t^{1+\frac{1}{n}}} dt < \frac{1}{2^n}.$$

Resolvendo a inequação em N_n obtemos

$$N_n > 2^{n^2} n^n + 1.$$

Logo, podemos fixar $N_n = 2^{n^2} n^n + 2$ para todo n e definir

$$a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{1} = 2, & \text{se } 1 \leq n \leq 66 \\ 1 + \frac{1}{j}, & \text{se } 2^{j^2} j^j + 3 \leq n \leq 2^{(j+1)^2} (j+1)^{j+1} + 2 \end{cases} .$$

Portanto, a sequência

$$\left(\frac{1}{n^{\frac{a_n}{2}}} \right)_{n=1}^{\infty}$$

é uma exemplo concreto de sequência que pertence a l_2 mas não pertence a l_q , para todo $0 < q < 2$. Na definição da sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, note que

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = \cdots = a_{66} = 2, \\ a_{67} &= a_{68} = \cdots = a_{13826} = \frac{3}{2}, \\ a_{13827} &= a_{13828} = \cdots = a_{16777218} = \frac{4}{3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

O fato de haver lugar para tantas repetições de cada a_n nos remete à antiga idéia dos hotéis de Hilbert. Abaixo listamos mais alguns dos números N_n para tornar claro a heurística do princípio dos hotéis de Hilbert ("empurrando" para o infinito de novo e de novo), que faz um papel importante na construção acima:

$$\begin{aligned} N_2 &= 66 \\ N_3 &= 13826 \\ N_4 &= 16777218 \\ N_5 &= 104857600002 \\ N_6 &= 3206175906594818 \\ N_7 &= 463613493490447548418 \\ N_8 &= 309485009821345068724781058 \\ N_9 &= 936725264399650852836666274480130 \\ N_{10} &= 12676506002282294014967032053760000000002. \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] M. D. Acosta, F. J. Aguirre e R. Payá, There is no bilinear Bishop-Phelps Theorem, *Isr. J. Math.* 93 (1996), 221-27.
- [2] M. D. Acosta, A. Aizpuru, R. M. Aron e F. J. García-Pacheco, Functionals that do not attain their norm, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* 14 (2007), 407–418.
- [3] F. Albiac e N. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Springer Verlag 2006.
- [4] R. Aron e P.D. Berner, A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings, *Bull. Soc. Math. France* 106 (1978), 3-29.
- [5] R. Aron, C. Finet e E. Werner, Some remarks on norm-attaining n -linear forms, *Function spaces (Edwardsville, IL, 1994)*, 19–28, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, 172, Dekker, New York, 1995.
- [6] R. Aron, D. García e M. Maestre, On norm attaining polynomials, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 39 (2003), 165-172.
- [7] R. Aron, F. J. García-Pacheco, D. Pérez-García e J. B. Seoane-Sepúlveda, On dense-lineability of sets of functions on \mathbb{R} , *Topology* 48 (2009), 149-156.
- [8] R. Aron, D. García, J. B. Seoane-Sepúlveda, Lineability and spaceability of sets of functions on \mathbb{R} . *Proc. Amer. Soc.*, **133** (2005), 795-803.
- [9] P. Bandyopadhyay e G. Godefroy, Linear structure in the set of norm-attaining functionals on a Banach space, preprint.

- [10] F. Bayart, Linearity of sets of strange functions, *Michigan Math. J.* 53 (2005), 291-303.
- [11] A.T. Bernardino, Ideais de aplicações multilineares e polinômios entre espaços de Banach, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, 2008.
- [12] E. Bishop e R.R. Phelps, A proof that every Banach space is subreflexive, *Bull. Amer. Math. Soc.* 67 (1961), 97-98.
- [13] G. Botelho e M. Dantas, Constructing sequences in l_p but not in l_q for $q < p$, preprint.
- [14] G. Botelho, D. Diniz, V. V. Fávaro e D. Pellegrino, Spaceability in Banach and quasi-Banach sequence spaces, *Linear Algebra Appl.* 434 (2011), 1255-1260.
- [15] G. Botelho, D. Diniz e D. Pellegrino, Lineability of the set of bounded linear non-absolutely summing operators, *J. Math. Anal. Appl.* 357 (2009), 171-175.
- [16] G. Botelho, D. Diniz, D. Pellegrino e E. Teixeira, A note on lineability, 2009, arXiv:0905.2677, 2009.
- [17] A. Defant e K. Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1993.
- [18] D. Diniz, Aplicações entre espaços de Banach que atingem a norma, *Jornadas de Iniciação Científica*, IMPA, 2005.
- [19] M. Fabian, P. Habala, P. Hajék, V. Montesinos-Santalucía, J. Pelant e V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, CBS Books in Mathematics, Springer Verlag INC, New York, 2001.
- [20] V.P. Fonf, V.I. Guraryi e M.I. Kadets, An infinite dimensional subspace of $C[0, 1]$ consisting of nowhere differentiable functions, *C. R. Acad. Bulgare Sci.* 52 (1999), 13-16.

- [21] W.T. Gowers, Symmetric block bases of sequences with large average growth, *Isr. J. Math.* 69 (1990), 129-151.
- [22] V. I. Gurariy, Linear spaces composed of everywhere non-differentiable functions, *C. R. Acad. Bulgare Sci.* 44 (1991), 13–16.
- [23] R.C. James, Reflexivity e the sup of linear functionals, *Isr. J. Math.*, **13** (1972), 289-300.
- [24] D. Kitson, R. Timoney, Operator ranges and spaceability, *J.Math. Anal. App* 378 (2011), 680-686.
- [25] J. Lindenstrauss, On operators which attain their norm, *Isr. J. Math*, 1 (1963), 139-148.
- [26] J. Lindenstrauss e L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I, Sequence Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [27] D. Pellegrino e E. Teixeira, Norm optimization problem for linear operators in classical Banach spaces, *Bull. Braz. Math. Soc.*, 40(3) (2009), 417-431.
- [28] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland Holland Math. Library, Amsterdam (1980).
- [29] J.C. Silva, Sobre operadores entre espaços de sequências que atingem a norma, *Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba*, 2009.