

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

**Superfícies Invariantes no Espaço Homogêneo Sol
com Curvatura Constante.**

Por
Guilherme Luiz de Oliveira Neto

sob orientação do
Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do
Programa de Pós-Graduação em Matemática-
CCEN-UFPB, como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Matemática.

Julho - 2012
João Pessoa - Paraíba

Superfícies Invariantes no Espaço Homogêneo *Sol* com Curvatura Constante.

por

Guilherme Luiz de Oliveira Neto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

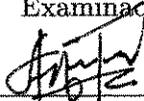
Aprovada por:



Prof. Dr. **Pedro Antonio Hinojosa Vera**
Orientador



Prof. Dr. **Jobson de Queiroz Oliveira**
Examinador



Prof. Dr. **Jorge Antonio Hinojosa Vera**
Examinador

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Julho - 2012

O48s Oliveira Neto, Guilherme Luiz de.

Superfícies invariantes no espaço homogêneo S^3 com curvatura constante / Guilherme Luiz de Oliveira Neto.-- João Pessoa, 2012.

68f.

Orientador: Pedro Antonio Hinojosa Vera

Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Grupos de Lie. 3. Espaço S^3 .
4. Superfícies Invariantes. 5. Superfícies Mínimas. 6. Curvatura Média. 7. Curvatura Gaussiana. 8. Superfícies de Weingarten Linear.

UFPB/BC

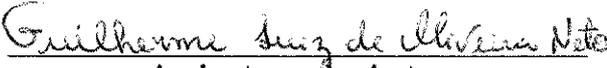
CDU: 51(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

Data: **Julho - 2012**

Autor: **Guilherme Luiz de Oliveira Neto**
Titulo: **Superfícies Invariantes no Espaço
Homogêneo *Sol* com Curvatura
Constante.**
Depto.: **Matemática**
Grau: **M.Sc.** Convocação: **Julho** Ano: **2012**

Permissão está juntamente concedida pela Universidade Federal da Paraíba à circular e ser copiado para propósitos não comerciais, em sua descrição, o título acima sob a requisição de indivíduos ou instituições.


Assinatura do Autor

Dedico este trabalho a Deus, à minha família e a Nívea Gomes, meu porto seguro e a principal responsável por esta conquista.

Agradecimentos

Por detrás das nossas realizações pessoais, além de um considerável esforço próprio, esconde-se normalmente um número muito grande de contribuições, apoios, sugestões, comentários ou críticas vindos de muitas pessoas. A sua importância assume, no caso presente, uma valia tão preciosa que, sem elas, com toda a certeza, teria sido muito difícil chegar a qualquer resultado digno de menção. Mencionar aqui o nome dessas pessoas constitui um preito de justiça e de homenagem sentida por minha parte:

A Deus, pelas oportunidades que me foram dadas na vida, por me amparar nos momentos difíceis, me dar força interior para superar as dificuldades, mostrar os caminhos nas horas incertas e me suprir em todas as minhas necessidades.

À minha família, a qual amo muito, pelo carinho, paciência e incentivo. Em especial aos meus pais, Luiz Reginaldo de Oliveira e Marili Farias de Oliveira, sem os quais não estaria aqui, e por terem me fornecido condições para me tornar o profissional e Homem que sou.

Aos meus irmãos, Germana Luiza Farias Oliveira de Meira e Luiz Gustavo Farias de Oliveira, pelo apoio e compreensão nos períodos de menos atenção.

À minha amada noiva, Nívea Gomes Nascimento, não apenas por ser o amor da minha vida, mas também pelas várias doses de apoio moral que me tem dado para conclusão deste trabalho. Pelo seu incentivo e exemplo de companheirismo. Por sonhar e lutar junto comigo.

Ao meu orientador Prof. Dr. Pedro A. Hinojosa Vera, por ter me dado essa oportunidade de aprender com seus sábios conselhos e advertência sempre fornecidas no momento certo. Por sua orientação séria e meticulosa, pelas críticas construtivas, e a sua disponibilidade de todos os momentos.

Agradeço aos professores Jobson de Queiroz Oliveira e Jorge Antonio Hinojosa Vera, por ter aceitado participar da banca e pelas palavras de incentivo.

E também a todos os professores e funcionários do Programa de pós-graduação em Matemática da UFPB pelos ensinamentos que me fizeram ser melhor ao nível pessoal e profissional, e a que tive o prazer de conviver durante esse tempo. Sou profundamente grato aos professores Dr. Antonio de Andrade e Silva, Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro, Dr. Daniel Marinho Pellegrino, Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes e Dr. Lizandro Sanchez Challapa pela ajuda, paciência e companheirismo.

Quero agradecer também pelas grandes amizades que pude construir durante essa conquista, amigos que fizeram parte desses momentos sempre me ajudando e incentivando, em particular, ao Ailton R. de Assis, Bruna D. Sandes, Dayvid Geverson L. Marques, Diego F. de Souza, Elisânia S. de Oliveira, Francisco V. de Oliveira, Gabriela W. S. das Neves, Gilson M. de Carvalho, Josenildo B. Santos, Pammella Q. de Souza, Paulo do N. Silva, Pedro A. Eugênio, Reginaldo A. C. Junior, Rosinângela C. da Silva, Yane Lislely R. Araújo, entre outros que fizeram parte desta caminhada.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI, em particular ao Reitor Francisco das Chagas Santana e ao Diretor do Departamento de Recursos Humanos Antônio João Rodrigues, pela liberação concedida para realização desta pós-graduação. Em especial, ao Diretor Geral, Prof. Dr. Darley Fiácrio de Arruda Santiago, do Campus de Floriano, por ter aceitado o afastamento durante esses dois anos.

Aos colegas de trabalho do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Floriano: Prof. Esp. André Luiz Ferreira Melo, Prof. Esp. Gildon César de Oliveira, Prof. Esp. Marcelo Teixeira Carneiro e Ms. Odimógenes Soares Lopes pela colaboração na minha ausência.

Aos meus antigos professores da Universidade Federal de Campina Grande, em especial ao grande professor e amigo Dr. Daniel Cordeiro de Moraes Filho pela ajuda e palavras de incentivo dadas desde a graduação ao mestrado.

Enfim, agradeço a todos que de maneira direta ou indireta contribuíram para que este trabalho se concretizasse.

Índice

Agradecimentos	v
Resumo	viii
Abstract	ix
Introdução	x
1 Preliminares	1
1.1 Grupos de Lie	1
2 O Espaço Homogêneo <i>Sol</i>	16
2.1 Geometria do Espaço <i>Sol</i>	17
2.2 Superfícies Invariantes no Espaço <i>Sol</i>	22
3 Superfícies Invariantes no Espaço <i>Sol</i> com Curvatura Constante	29
3.1 Superfícies com Curvatura Média Constante	30
3.2 Superfícies com Curvatura Gaussiana Constante	33
4 Superfícies de Weingarten Linear	51
Referências Bibliográficas	56

Resumo

O presente trabalho aborda um estudo das superfícies com curvatura média constante e das superfícies com curvatura Gaussiana constante no espaço *Sol* que são invariantes sob a ação de dois grupos a 1-parâmetro de isometrias do espaço ambiente. Além disso, classificamos as superfícies que satisfazem uma relação do tipo $k_1 = mk_2$, onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais da superfície e $m \in \mathbb{R}$.

Palavras-Chave:

Grupos de Lie, Espaço *Sol*, Superfícies Invariantes, Superfícies Mínimas, Curvatura Média, Curvatura Gaussiana, Superfícies de Weingarten Linear.

Abstract

In this paper we studied surfaces with constant mean curvature and surfaces with constant Gaussian curvature in the *Sol* space which are invariant under the action of two one-parameter subgroups of isometries of the ambient space. Furthermore, we classify the surfaces that satisfy a relationship of type $k_1 = mk_2$, where k_1 and k_2 are the principal curvatures of the surface and $m \in \mathbb{R}$.

Keywords:

Lie Groups, *Sol* Space, Invariant Surface, Minimal Surface, Mean Curvature, Gaussian Curvature, Linear Weingarten Surface.

Introdução

A geometria diferencial tem estudado constantemente superfícies em espaços homogêneos. Neste trabalho, serão estudadas superfícies no espaço homogêneo Sol de dimensão três. O espaço Sol é uma 3-variedade homogênea simplesmente conexa, cujo grupo de isometrias tem dimensão 3 e é um dos oitos modelos de 3-geometrias de Thurston [19].

Este trabalho baseia-se no artigo “*Invariant surfaces in the homogeneous space Sol with constant curvature*” de Rafael López e Marian I. Munteanu (veja [12]) e está dividido em quatro capítulos.

No capítulo 1, apresentamos alguns resultados clássicos da teoria de grupos de Lie e suas relações com as álgebras de Lie que serão utilizados ao longo deste trabalho. Finalizamos, este capítulo com alguns conceitos e resultados de Geometria Riemanniana.

No capítulo 2, estudamos o espaço Sol , o nosso espaço ambiente, e sua geometria. Determinamos neste espaço, os campos invariantes à esquerda, os colchetes de Lie dos campos invariantes à esquerda, os campos de Killing e a conexão Riemanniana ∇ . Além disso, calculamos as curvaturas média e Gaussiana (intrínseca e extrínseca) de uma superfície invariante imersa neste espaço.

No capítulo 3, estudamos as superfícies invariantes no Sol que satisfazem certas condições sobre suas curvaturas, por exemplo, curvatura média H e curvatura Gaussiana (K_{int} e K_{ext}) constantes. Classificamos todas as superfícies invariantes no Sol com curvatura média constante H , incluindo superfícies mínimas (algumas figuras de superfícies com $H \neq 0$ estão em [7]) e todas com curvatura Gaussiana, intrínseca e

extrínseca (K_{int} e K_{ext}), constante. O estudo de superfícies com curvatura constante, especialmente com curvatura média constante, em 3-espaços homogêneos e invariantes sob a ação de um grupo a um parâmetro de isometrias do espaço ambiente tem sido recentemente de grande interesse para muitos geômetras. Vários resultados foram obtidos no grupo de Heisenberg (veja [1], [8], [9], [14], [20]) e no espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (veja [13], [15], [16]).

Finalmente, no capítulo 4, estudamos e classificamos as superfícies invariantes de Weingarten Linear no Sol , que satisfaz uma relação do tipo $k_1 = mk_2$, onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais da superfície e $m \in \mathbb{R}$.

Capítulo 1

Preliminares

As álgebras de Lie são objetos algébricos por excelência, enquanto que os grupos de Lie têm uma natureza geométrica e constituem um assunto particularmente rico e de grande interesse na Matemática contemporânea.

Inicialmente, apresentamos alguns conceitos e resultados básicos da teoria de grupos de Lie e sua relação com as álgebras de Lie, a fim de dar ao leitor as ferramentas básicas para uma melhor compreensão do texto. A teoria clássica de grupos de Lie é exposta com maiores detalhes nas referências [3], [11] e [18].

Finalizamos este capítulo com alguns conceitos e resultados básicos da Geometria Riemanniana que serão necessários para o estudo que será feito nos capítulos subsequentes (veja [6]).

A partir de agora, as variedades diferenciáveis consideradas serão de Hausdorff com base enumerável.

1.1 Grupos de Lie

Definição 1.1. *Um grupo de Lie G é uma variedade diferenciável dotada de uma estrutura de grupo, definida por uma operação $*$, de modo que a aplicação*

$$\begin{aligned}\mu : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto \mu(x, y) = x * y^{-1}\end{aligned}$$

é diferenciável, onde y^{-1} denota o elemento inverso de y .

Decorre imediatamente da definição que, num grupo de Lie G , para cada $x \in G$ as aplicações

$$\begin{array}{ccc} L_x : G & \longrightarrow & G \\ y & \longmapsto & x * y \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} R_x : G & \longrightarrow & G \\ y & \longmapsto & y * x \end{array}$$

são difeomorfismos de G . Estas aplicações são chamadas, respectivamente, **translação à esquerda** por x e **translação à direita** por x . Indicaremos por e o elemento identidade de G .

Vejamos alguns exemplos de grupos de Lie.

Exemplo 1.2. O conjunto \mathbb{R} dos números reais com a operação soma e a estrutura diferenciável usual.

Exemplo 1.3. Seja $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, onde \mathbb{C} é o conjunto dos números complexos. Consideremos em S^1 a estrutura de grupo multiplicativo: se $\alpha, \beta \in S^1$, então $\alpha \cdot \beta$ é o produto dos números complexos α e β . Como as aplicações

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & x \cdot y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} - \{0\} \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

são diferenciáveis e suas restrições a S^1 têm imagens em S^1 , S^1 é um grupo de Lie.

Exemplo 1.4. O produto de dois grupos de Lie G e H é um grupo de Lie $G \times H$, com a estrutura de variedade produto e produto direto de grupos:

$$(g_1, h_1) \odot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \cdot h_2),$$

quaisquer que sejam g_1, g_2 em G e h_1, h_2 em H . Dessa forma, a partir dos exemplos (1.2) e (1.3) concluímos que o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ e o toro n -dimensional $T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ são grupos de Lie.

Exemplo 1.5. A variedade $GL(n, \mathbb{R})$ das matrizes reais $n \times n$ invertíveis, munido com a operação usual de multiplicação de matrizes e com a estrutura diferenciável usual do \mathbb{R}^{n^2} é um grupo de Lie. De fato, note que as funções abaixo são diferenciáveis

$$\begin{aligned} f &: GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \text{ dada por } f(A, B) = AB \text{ e} \\ g &: GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \text{ dada por } g(A) = A^{-1}. \end{aligned}$$

A diferenciabilidade de f decorre da diferenciabilidade da multiplicação em \mathbb{R} , já a diferenciabilidade de g decorre da regra de Cramer para a inversa de uma matriz. De forma análoga pode-se mostrar que $GL(n, \mathbb{C})$ admite a estrutura de grupo de Lie. Os grupos $GL(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$ são chamados **grupos lineares**.

Os grupos lineares contém os seguintes subgrupos:

$$\begin{aligned} U(n) &= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : AA^* = I\} \quad (\text{grupo unitário}) \\ SL(n, \mathbb{C}) &= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : \det A = 1\} \quad (\text{grupo linear especial}) \\ O(n, \mathbb{C}) &= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : AA^t = I\} \quad (\text{grupo ortogonal complexo}) \\ SU(n) &= \{B \in U(n) : \det B = 1\} \quad (\text{grupo unitário especial}) \\ SL(n, \mathbb{R}) &= \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\} \quad (\text{grupo linear especial real}) \\ O(n) &= \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : AA^t = I\} \quad (\text{grupo ortogonal real}) \\ SO(n) &= \{B \in O(n) : \det B = 1\} \quad (\text{grupo ortogonal especial}), \end{aligned}$$

onde A^* e A^t indicam, respectivamente, a matriz adjunta e a matriz transposta de A . Vamos mostrar que $O(n)$ é um grupo de Lie. Para isso vamos mostrar primeiro que $O(n)$ é uma subvariedade de $GL(n, \mathbb{R})$.

De fato, considere a função

$$\begin{aligned} f : M(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow s(n, \mathbb{R}) := \{A \in M(n, \mathbb{R}) : A = A^t\} \\ A &\longmapsto AA^t \end{aligned}$$

Esta aplicação está bem definida pois, dado $A \in M(n, \mathbb{R})$, temos

$$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t,$$

ou seja, $AA^t \in s(n, \mathbb{R})$. Além disso, f é diferenciável e

$$f^{-1}(I) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : AA^t = I\} = O(n).$$

Assim, para ver que $O(n)$ é uma subvariedade de $GL(n, \mathbb{R})$ basta mostrar que I é valor regular de f . Se $X, Y \in M(n, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$, temos que

$$\begin{aligned} df_X(Y) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(X + rY) - f(X)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(X + rY)(X + rY)^t - XX^t}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{rXY^t + rYX^t + r^2YY^t}{r} \\ &= XY^t + YX^t. \end{aligned}$$

Se $X \in f^{-1}(I)$ e $S \in s(n, \mathbb{R})$, então tomando $Y = \frac{SX}{2} \in M(n, \mathbb{R})$, temos que

$$df_X(Y) = X \left(\frac{SX}{2} \right)^t + \left(\frac{SX}{2} \right) X^t = \frac{XX^t S^t}{2} + \frac{SXX^t}{2} = \frac{S^t}{2} + \frac{S}{2} = S,$$

ou seja, df_X é sobrejetora para todo $X \in f^{-1}(I)$. Logo, I é valor regular de f . Portanto, $O(n)$ é uma subvariedade de $GL(n, \mathbb{R})$. Agora tomemos as aplicações

$$\begin{aligned} \varphi : O(n) \times O(n) &\longrightarrow O(n) \\ (A, B) &\longmapsto AB \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi : O(n) &\longrightarrow O(n) \\ A &\longmapsto A^{-1}. \end{aligned}$$

Como essas aplicações são também diferenciáveis concluímos que $O(n)$ é um grupo de Lie.

Definiremos agora campos invariantes à esquerda de um grupo de Lie G . Mais adiante mostraremos que o conjunto desses campos invariantes é uma álgebra de Lie associada ao grupo de Lie G .

Definição 1.6. Dizemos que um campo X de vetores tangentes a um grupo de Lie G é invariante à esquerda quando $X_{xy} = dL_x(X_y)$, quaisquer que sejam $x, y \in G$.

Analogamente, X é invariante à direita quando $dR_x(X_y) = X_{yx}$, quaisquer que sejam $x, y \in G$.

O conjunto dos campos invariantes à esquerda de um grupo de Lie G será denotado por LG . Um campo X invariante à esquerda (respectivamente à direita) fica completamente determinado quando se conhece X_e , ou seja, o valor do campo na identidade e , pois $X_x = dL_x(X_e)$. Note também que LG é um espaço vetorial, pois dados $X, Y \in LG$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} (X + \alpha Y)_{xy} &= X_{xy} + \alpha Y_{xy} \\ &= dL_x(X_y) + \alpha dL_x(Y_y) \\ &= dL_x(X_y + \alpha Y_y) \\ &= dL_x(X + \alpha Y)_y. \end{aligned}$$

Donde $X + \alpha Y \in LG$.

Proposição 1.7. *A aplicação*

$$\begin{aligned} \alpha : LG &\longrightarrow T_e G \\ X &\longmapsto \alpha(X) = X_e, \end{aligned}$$

onde $T_x G$ indica o espaço tangente a G no ponto x , é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Demonstração: É claro que α é linear. De fato, dados $X, Y \in LG$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\alpha(X + \lambda Y) = (X + \lambda Y)_e = X_e + \lambda Y_e = \alpha(X) + \lambda \alpha(Y).$$

Agora, mostremos que α é sobrejetora. Dado $Z \in T_e G$, defina um campo X em G por $X_x = dL_x(Z)$. Temos,

$$X_{xy} = dL_{xy}(Z) = dL_x \circ dL_y(Z) = dL_x(X_y).$$

Portanto, $X \in LG$. Além disso,

$$\alpha(X) = X_e = dL_e(Z) = I(Z) = Z.$$

Finalmente, α é injetora, pois se

$$\alpha(X) = \alpha(Y),$$

temos que

$$X_e = Y_e.$$

E, dado $x \in G$, temos

$$X_x = dL_x(X_e) = dL_x(Y_e) = Y_x.$$

Logo, $X = Y$. ■

Proposição 1.8. *Se X é um campo invariante à esquerda em G , então X é diferenciável.*

Demonstração: Para mostrar que X é diferenciável em $x \in G$, basta fazer a demonstração para x em uma vizinhança coordenada de e , pois $L_{x^{-1}}$ é um difeomorfismo de classe C^∞ . Seja $\theta : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma vizinhança coordenada de e , com $\theta = (x^1, \dots, x^n)$, $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in U$. Como as operações em G são contínuas podemos tomar $V \subset U$ vizinhança de $e \in G$ tal que $L_x(V) \subset U$. Então, temos que

$$X_x(x^i) = (dL_x \cdot X_e)(x^i) = X_e \cdot (x^i \circ L_x).$$

Agora, escrevendo

$$X_e = \sum_j c_j \frac{\partial}{\partial x^j} (e),$$

onde c_j são constantes, temos

$$X_x(x^i) = \sum_j c_j \frac{\partial (x^i \circ L_x)}{\partial x^j} (e).$$

Seja agora $f^i : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f^i(x, y) = x^i(x, y)$, ou seja, $f^i(x, y)$ é a i -ésima coordenada do produto $xy = L_x(y)$. Então

$$X_x(x^i) = \sum_j c_j \frac{\partial (x^i \circ L_x)}{\partial x^j} (e) = \sum_j c_j \frac{\partial x^i(x, e)}{\partial x^j} = \sum_j c_j \frac{\partial f^i(x, e)}{\partial x^j}.$$

Como as f^i são funções diferenciáveis de x , $X(x^i)$ é uma função diferenciável de x . Portanto, X é diferenciável em $x \in V$. ■

Definição 1.9. Uma álgebra de Lie sobre \mathbb{R} é um espaço vetorial real \mathfrak{g} , munido de uma operação bilinear $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, denominada colchete de Lie, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticomutatividade)
2. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidade de Jacobi)

para todo X, Y e Z pertencentes a \mathfrak{g} .

Vejamos alguns exemplos de álgebras de Lie.

Exemplo 1.10. O espaço vetorial $M(n, \mathbb{R})$ das matrizes quadradas reais com o colchete definido por

$$[A, B] = AB - BA,$$

onde AB indica o produto usual de matrizes.

Exemplo 1.11. \mathbb{R}^3 com o colchete dado por

$$[x, y] = x \wedge y,$$

onde \wedge indica o produto vetorial usual de \mathbb{R}^3 .

Exemplo 1.12. Seja M uma variedade diferenciável. Denotemos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos C^∞ tangentes a M . $\mathfrak{X}(M)$ é um espaço vetorial com as operações de soma de campos e multiplicação de um número real por um campo, a saber

$$(X + Y)_x := X_x + Y_x \quad e \quad (\lambda X)_x := \lambda X_x.$$

Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ e $x \in M$, definimos o colchete $[X, Y]$ como o campo em $\mathfrak{X}(M)$ tal que

$$[X, Y]_x(f) = X_x(Yf) - Y_x(Xf),$$

onde Xf é a aplicação dada por:

$$\begin{aligned} Xf : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (Xf)(x) = df(x)X_x. \end{aligned}$$

Além disso, se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$, então $fX \in \mathfrak{X}(M)$. Com esta operação $\mathfrak{X}(M)$ é uma álgebra de Lie. Mais detalhes encontram-se em [2].

Definição 1.13. *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $\varphi : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^∞ . Dizemos que os campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ são φ -relacionados, se $d\varphi \circ X = Y \circ \varphi$, ou seja, se o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\varphi} & N \\
 \downarrow X & \circlearrowleft & \downarrow Y \\
 TM & \xrightarrow{d\varphi} & TN.
 \end{array}$$

Proposição 1.14. *Seja $\varphi : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^∞ , onde M, N são variedades diferenciáveis. Se $X, X_1 \in \mathfrak{X}(M)$ são φ -relacionados, respectivamente, com $Y, Y_1 \in \mathfrak{X}(N)$, então $[X, X_1]$ é φ -relacionado com $[Y, Y_1]$.*

Demonstração: Mostremos que para cada $p \in M$ e para cada $f \in C^\infty(M)$ vale a igualdade

$$d\varphi[X, X_1]_p(f) = [Y, Y_1]_{\varphi(p)}(f).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 d\varphi[X, X_1]_p(f) &= [X, X_1]_p(f \circ \varphi) \\
 &= X_p(X_1(f \circ \varphi)) - (X_1)_p(X(f \circ \varphi)) \\
 &= X_p(d\varphi \circ X_1)(f) - (X_1)_p(d\varphi \circ X)(f) \\
 &= X_p(Y_1 \circ \varphi)(f) - (X_1)_p(Y \circ \varphi)(f) \\
 &= X_p(Y_1(f) \circ \varphi) - (X_1)_p(Y(f) \circ \varphi) \\
 &= d\varphi(X_p)(Y_1(f)) - d\varphi(X_1)_p(Y(f)) \\
 &= Y_{\varphi(p)}(Y_1(f)) - (Y_1)_{\varphi(p)}(Y(f)) \\
 &= [Y, Y_1]_{\varphi(p)}(f).
 \end{aligned}$$

■

Corolário 1.15. *Se $X, Y \in LG$, então $[X, Y] \in LG$.*

Demonstração: Devemos mostrar que $dL_x[X, Y]_y = [X, Y]_{xy}$. Se $X \in LG$ e $x \in G$, então X é φ -relacionado consigo mesmo. De fato,

$$\begin{aligned} (dL_x \circ X)(y) &= dL_x(X(y)) = dL_x(X_y) = X_{xy} \\ (X \circ L_x)(y) &= X(L_x(y)) = X(xy) = X_{xy} \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$dL_x \circ X = X \circ L_x.$$

De modo análogo, temos que

$$dL_x \circ Y = Y \circ L_x$$

e portanto, pela Proposição (1.14), temos que $[X, Y]$ é L_x -relacionando consigo mesmo, ou seja,

$$dL_x \circ [X, Y](y) = [X, Y] \circ L_x(y).$$

Isto implica que

$$dL_x[X, Y]_y = [X, Y](xy) = [X, Y]_{xy}.$$

Portanto, $[X, Y] \in LG$. ■

Exemplo 1.16. *Seja G um grupo de Lie e LG o espaço dos campos invariantes à esquerda. LG é um espaço vetorial e pelo Corolário (1.15) é fechado em relação a operação colchete de campos definida no exemplo (1.12). Assim, LG é uma álgebra de Lie.*

Já vimos na Proposição (1.7) que LG e T_eG são isomorfos como espaços vetoriais. Assim, podemos introduzir em T_eG uma estrutura de álgebra de Lie passando o colchete de campos em LG para T_eG .

Definição 1.17. *Seja G um grupo de Lie. Definimos a álgebra de Lie de G como sendo o espaço vetorial tangente a G no ponto e , T_eG , onde e é o elemento identidade de G .*

Assim, para $\widehat{V}, \widehat{W} \in T_e G$, definimos $[\widehat{V}, \widehat{W}] := [V, W]_e$, onde $V, W \in LG$ são tais que

$$V_x = dL_x \widehat{V} \quad \text{e} \quad W_x = dL_x \widehat{W}.$$

Denotaremos por \widehat{G} a álgebra de Lie do grupo de Lie G .

Definição 1.18. *Uma métrica Riemanniana num grupo de Lie G é invariante à esquerda se as translações à esquerda são isometrias, ou seja,*

$$\langle u, v \rangle_y = \langle d(L_x)_y u, d(L_x)_y v \rangle_{L_x(y)}, \quad \forall x, y \in G, \quad \forall u, v \in T_y G.$$

Analogamente define-se métrica invariante à direita.

Uma métrica que é invariante à esquerda e à direita diz-se bi-invariante.

Para introduzir uma métrica invariante à esquerda em G podemos, por exemplo, tomar um produto interno qualquer em $T_e G := \widehat{G}$ e definir

$$\langle u, v \rangle_x = \langle d(L_{x^{-1}})_y u, d(L_{x^{-1}})_y v \rangle_{L_x(y)}, \quad \forall x \in G, \quad \forall u, v \in T_x G.$$

Isto define, de fato, uma métrica Riemanniana em G , pois L_x depende diferenciacionalmente de x , e, é claro que, tal métrica será invariante à esquerda.

Uma métrica homogênea em uma variedade M é uma métrica Riemanniana tal que dados dois pontos $x, y \in M$ existe uma isometria de M que leva x em y . Com tal métrica, M é dita homogênea.

Um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda é uma variedade homogênea, no sentido que: dados $x, y \in G$ existe uma isometria de G que leva x em y , a saber

$$\begin{aligned} L_{yx^{-1}} : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto L_{yx^{-1}}(x) = yx^{-1}x = y \end{aligned}.$$

Assim G é também completo como variedade Riemanniana, pois qualquer variedade homogênea é completa.

Seja G um grupo de Lie com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ invariante à esquerda. Lembremos que a conexão Riemanniana associada ∇ é determinada pela condição de simetria

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \tag{1.1}$$

e pela identidade (compatibilidade com a métrica)

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad (1.2)$$

quaisquer que sejam os campos X, Y, Z . A partir de (1.1) e (1.2), permutando X, Y, Z obtém-se a fórmula:

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle + X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle$$

conhecida como fórmula de Koszul. Agora, se $X, Y \in LG$ então $\langle X, Y \rangle$ é constante, pois

$$\langle X_x, Y_x \rangle = \langle (dL_x)_e, (dL_x)_e Y_e \rangle = \langle X_e, Y_e \rangle. \quad (1.3)$$

Consequentemente, no caso de um grupo de Lie, a fórmula de Koszul reduz-se a

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle. \quad (1.4)$$

Assim, se $x \in G$ é um ponto qualquer de G , então pelo Corolário (1.15), temos que

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle(x) &= \langle [X, Y], Z \rangle(x) - \langle [Y, Z], X \rangle(x) + \langle [Z, X], Y \rangle(x) \\ &= \langle [X, Y]_e, Z_e \rangle - \langle [Y, Z]_e, X_e \rangle + \langle [Z, X]_e, Y_e \rangle \\ &= 2\langle (\nabla_X Y)_e, Z_e \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle d(L_x)_e(\nabla_X Y)_e, Z_x \rangle &= \langle d(L_x)_e(\nabla_X Y)_e, d(L_x)_e Z_x \rangle \\ &= \langle (\nabla_X Y)_e, Z_e \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle (\nabla_X Y)_x, Z_x \rangle = \langle d(L_x)_e(\nabla_X Y)_e, Z_x \rangle, \quad \forall Z \in LG,$$

ou seja, se $X, Y \in LG$, então $\nabla_X Y \in LG$. Assim, cada elemento $X \in LG$ define uma transformação linear antissimétrica

$$\begin{array}{ccc} \nabla_X Y : & LG & \longrightarrow & LG \\ & Y & \longmapsto & \nabla_X Y \end{array}.$$

A antissimetria é consequência direta da simetria da conexão e do fato de $\langle X, Y \rangle$ ser constante. Com efeito, se $\langle Y, Z \rangle$ é constante, então para cada X de LG temos $X\langle Y, Z \rangle = 0$ e logo $\langle \nabla_X Y, Z \rangle = -\langle Y, \nabla_X Z \rangle$.

No que segue, M denotará uma variedade Riemanniana e “suave” indicará a classe de diferenciabilidade C^∞ .

Definição 1.19. *Seja V um campo suave em M . Dizemos que V é um campo de Killing em M se V satisfaz*

$$\langle \nabla_X V, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y V \rangle = 0,$$

para todo X, Y campos de vetores suaves em M .

Desejamos relacionar os campos de Killing com o grupo das isometrias da variedade. Um resultado que necessitamos nesta direção, cuja prova pode ser encontrada em [4], p. 63, é o que segue:

Teorema 1.20. *Seja X um campo suave em um aberto W de M e seja $p \in W$. Então existem um aberto $U \subset W$, $p \in U$, um número $\varepsilon > 0$ e uma aplicação suave $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow W$ tais que a curva $t \mapsto \varphi(t, q)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, é a única trajetória de X que no instante $t = 0$ passa pelo ponto q , para cada $q \in U$, isto é, $\varphi(0, q) = q$ e*

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, q) = X(\varphi(t, q))$$

para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

A aplicação $\varphi_t : U \rightarrow W$ dado por $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ é chamada o fluxo de X em W .

Observamos no teorema anterior que, fixado t , com $|t| < \varepsilon$, $\varphi_t : U \rightarrow \varphi_t(U) \subset M$ dado por $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ define um difeomorfismo de U em $\varphi_t(U)$ e $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ vale onde ambos os lados estão definidos. Tendo isto em vista, observamos que um campo X gera um grupo $\tilde{\mathcal{G}} = \{\varphi_t\}$ chamado de subgrupo (local) a um parâmetro de difeomorfismos locais.

O conjunto das isometrias da variedade Riemanniana M forma um subgrupo do grupo dos difeomorfismos de M . Assim, se um campo X em M gera uma família a um parâmetro constituída de isometrias, dizemos que ela gera um subgrupo a um parâmetro de isometrias.

Proposição 1.21. *Seja X um campo de vetores suave de M . Então X é um campo de Killing, se e somente se, X gera um subgrupo (local) a um parâmetro de isometrias locais de M .*

Demonstração: Ver [10], pág. 48. ■

Considerando $\mathbb{G} = \{\phi_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ um subgrupo (local) a um parâmetro de isometrias de M , segue do exposto acima que, para todo $r \in \mathbb{R}$, $\phi_r : M \rightarrow M$ é uma isometria e que

$$X(p) = \left. \frac{d}{dr} \phi_r(p) \right|_{r=0}$$

é um campo de Killing em M .

Em um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda, todo campo invariante à direita Y é de Killing. De fato, os difeomorfismos locais são da forma

$$\Phi_t : x \rightarrow (\exp(tY)).x,$$

e portanto são isometrias globais.

Para compreender um pouco a geometria do espaço *Sol* faz-se necessário definirmos folheações. Intuitivamente uma folheação de dimensão n sobre uma variedade M de dimensão m é uma decomposição de M em subvariedades conexas de dimensão n . Antes de darmos a definição formal, consideremos inicialmente um exemplo, que apesar de simples, nos dará uma visão geométrica deste conceito.

Observe que, para cada $c \in \mathbb{R}^{m-n}$ fixado, o plano

$$\mathbb{R}^n \times \{c\} \tag{1.5}$$

pode ser visto como uma “folha” em \mathbb{R}^m , (Figura 1.1). Variando $c \in \mathbb{R}^{m-n}$ podemos decompor \mathbb{R}^m como

$$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}.$$

Portanto tais folhas definem uma folheação de dimensão n em \mathbb{R}^m . Note que um difeomorfismo local $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ que preserva as folhas (1.5) satisfaz, para cada $c \in \mathbb{R}^{m-n}$, a propriedade

$$f(U \cap (\mathbb{R}^n \times \{c\})) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{\bar{c}\}),$$

sendo $\bar{c} \in \mathbb{R}^{m-n}$, (Figura 1.2). Portanto este difeomorfismo deve ter a forma

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \quad (1.6)$$

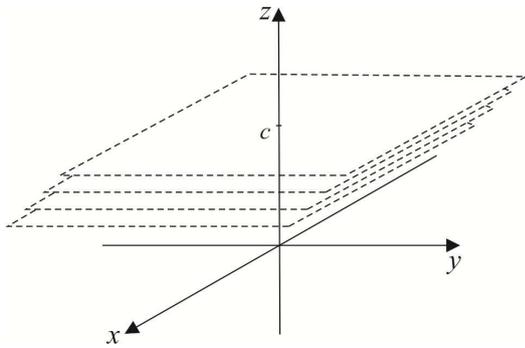


Figura 1.1: Folheações em \mathbb{R}^3 .

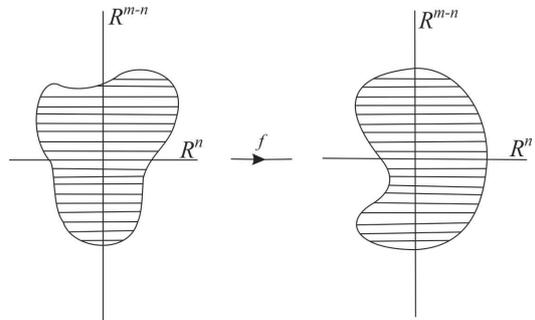


Figura 1.2: Difeomorfismo f .

Definição 1.22. Uma folheação de classe C^r e dimensão n de uma variedade M de dimensão m é um atlas máximo \mathcal{F} , de classe C^r , que satisfaz as duas propriedades abaixo:

1. Se $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$, então

$$\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n},$$

sendo $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n}$ discos abertos;

2. Se $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$, com $U \cap V \neq \emptyset$, então a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1}$ satisfaz (1.6), ou seja, podemos escrever

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(y)).$$

Dizemos que M é folheada por \mathcal{F} , ou que \mathcal{F} é uma estrutura folheada de dimensão n e classe C^r sobre M . Indicaremos uma folheação de dimensão n e classe C^r de uma variedade M de dimensão m por \mathcal{F} , sempre que não houver risco de confusão.

Capítulo 2

O Espaço Homogêneo Sol

Neste capítulo estudamos o espaço Sol e sua geometria. O Sol é uma variedade Riemanniana tridimensional homogênea simplesmente conexa, cujo grupo de isometrias tem dimensão 3 e é um dos oito modelos de geometria de Thurston (veja [19]). Como variedade Riemanniana, o espaço Sol pode ser representado por \mathbb{R}^3 munido com a métrica

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = ds^2 = e^{2z} dx^2 + e^{-2z} dy^2 + dz^2,$$

onde (x, y, z) são as coordenadas canônicas do \mathbb{R}^3 e, com a operação de grupo dada por

$$(x, y, z) * (x', y', z') = (x + e^{-z} x', y + e^z y', z + z'),$$

este espaço é um grupo de Lie e a métrica ds^2 acima é invariante à esquerda.

Na primeira seção estudamos um pouco da geometria do espaço Sol , obtemos os campos invariantes à esquerda, os colchetes de Lie dos campos invariantes à esquerda, os campos de Killing, as isometrias e suas folheações correspondentes e a conexão Riemanniana ∇ . Enquanto que na segunda seção, definimos superfícies invariantes no Sol e posteriormente calculamos as curvaturas média e Gaussiana (intrínseca e extrínseca) de uma superfície invariante no Sol .

2.1 Geometria do Espaço Sol

Nesta seção expomos algumas noções iniciais da geometria do espaço Sol. Faremos uso dos conceitos e resultados apresentados no capítulo anterior. O espaço Sol é um grupo de Lie simplesmente conexo que pode ser representado pelas matrizes triangulares superiores em $M(3, \mathbb{R})$, da forma

$$\begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & x \\ 0 & e^z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Em termos das coordenadas (x, y, z) , o produto no grupo de Lie Sol é obtido por restrição do produto usual de matrizes em $M(3, \mathbb{R})$. Assim, dadas as matrizes A e B representadas em coordenadas por

$$A \mapsto (x, y, z) \quad e \quad B \mapsto (x', y', z'),$$

o produto de matrizes $(A, B) \mapsto AB$ é representado nestas coordenadas por

$$(x, y, z) * (x', y', z') = (x + e^{-z}x', y + e^z y', z + z'). \quad (2.1)$$

Vamos determinar, agora, os campos invariantes à esquerda e posteriormente obter os colchetes de Lie destes campos. Além disso, calcularemos os campos invariantes à direita.

Na álgebra de Lie \mathfrak{sol}_3 , do grupo de Lie Sol, destacamos os vetores tangentes

$$\partial_x|_e := e_1, \quad \partial_y|_e := e_2 \quad e \quad \partial_z|_e := e_3,$$

onde

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad e_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

É fácil ver que:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = -e_2.$$

Denotemos por E_1, E_2 e E_3 os campos invariantes à esquerda gerados pelos vetores e_1, e_2 e e_3 , respectivamente. O subgrupo a um parâmetro gerado por e_1 é a curva passando pela identidade com velocidade e_1 .

Em coordenadas exponenciais, esta curva corresponde à curva $t \mapsto (t, 0, 0)$. Logo, a curva integral do campo E_1 passando pelo ponto $A \in \text{Sol}$ com coordenadas (x, y, z) é dada por

$$\begin{aligned} L_A(\exp(te_1)) &= A(\exp(te_1)) \\ &= (x, y, z) * (t, 0, 0) \\ &= (x + e^{-z}t, y, z). \end{aligned}$$

Derivando em $t = 0$ a curva $(x + e^{-z}t, y, z)$, temos o campo E_1 em $A = (x, y, z)$:

$$\begin{aligned} E_1|_{(x,y,z)} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (x + e^{-z}t, y, z) \\ &= (e^{-z}, 0, 0) \\ &= e^{-z}(1, 0, 0) \\ &= e^{-z}\partial_x. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos os campos invariantes à esquerda E_2 e E_3 gerados, respectivamente, por e_2 e e_3

$$E_2|_{(x,y,z)} = e^z\partial_y \quad \text{e} \quad E_3|_{(x,y,z)} = \partial_z.$$

Assim, os campos invariantes à esquerda gerados por $e_1 = \partial_x$, $e_2 = \partial_y$ e $e_3 = \partial_z$ na álgebra de Lie \mathfrak{sol}_3 são, respectivamente,

$$\begin{cases} E_1 = e^{-z}\partial_x \\ E_2 = e^z\partial_y \\ E_3 = \partial_z. \end{cases} \quad (2.2)$$

Calculando os colchetes de Lie destes campos, temos

$$\begin{aligned} [E_1, E_2]_{(x,y,z)} &= dL_{(x,y,z)}[E_1, E_2]_e \\ &= dL_{(x,y,z)}[e_1, e_2] \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [E_1, E_3]_{(x,y,z)} &= dL_{(x,y,z)}[E_1, E_3]_e \\
 &= dL_{(x,y,z)}[e_1, e_3] \\
 &= dL_{(x,y,z)}e_1 \\
 &= E_1
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 [E_2, E_3]_{(x,y,z)} &= dL_{(x,y,z)}[E_2, E_3]_e \\
 &= dL_{(x,y,z)}[e_2, e_3] \\
 &= dL_{(x,y,z)}(-e_2) \\
 &= -E_2.
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$[E_1, E_2] = 0 \quad , \quad [E_1, E_3] = E_1 \quad \text{e} \quad [E_2, E_3] = -E_2. \quad (2.3)$$

Calculemos, agora, os campos invariantes à direita gerados pelos vetores e_1 , e_2 e e_3 . Denotemos por F_1 , F_2 e F_3 os campos invariantes à direita gerados, respectivamente, por e_1 , e_2 e e_3 .

O subgrupo a um parâmetro gerado por e_1 é a curva passando pela identidade com velocidade e_1 , donde em coordenadas exponenciais esta curva corresponde à curva $t \mapsto (t, 0, 0)$. Logo, a curva integral do campo F_1 passando pelo ponto $A \in \text{Sol}$ com coordenadas (x, y, z) é dada por

$$\begin{aligned}
 R_A(\exp(te_1)) &= (t, 0, 0) * (x, y, z) \\
 &= (t + x, y, z).
 \end{aligned}$$

Derivando em $t = 0$ a curva $(t + x, y, z)$, obtemos o campo F_1 em $A = (x, y, z)$:

$$\begin{aligned}
 F_1|_{(x,y,z)} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (t + x, y, z) \\
 &= (1, 0, 0) \\
 &= \partial_x.
 \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos os campos invariantes à direita F_2 e F_3 gerados, respectivamente, por e_2 e e_3

$$F_2|_{(x,y,z)} = \partial_y \quad \text{e} \quad F_3|_{(x,y,z)} = -x\partial_x + y\partial_y + \partial_z.$$

Assim, os campos invariantes à direita gerados por $e_1 = \partial_x$, $e_2 = \partial_y$ e $e_3 = \partial_z$ na álgebra de Lie \mathfrak{sol}_3 são, respectivamente,

$$\begin{cases} F_1 = \partial_x \\ F_2 = \partial_y \\ F_3 = -x\partial_x + y\partial_y + \partial_z. \end{cases} \quad (2.4)$$

A seguir, definimos uma métrica invariante à esquerda no Sol e em seguida determinamos os campos de Killing, as isometrias e suas folheações correspondentes e, além disso, a conexão Riemanniana ∇ .

A métrica invariante à esquerda, denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, define-se tomando os campos E_1, E_2, E_3 como ortonormais, isto é,

$$\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (2.5)$$

De (2.4) temos:

$$\begin{cases} \partial_x = e^z E_1 \\ \partial_y = e^{-z} E_2 \\ \partial_z = E_3. \end{cases} \quad (2.6)$$

Assim, as componentes da métrica em termos de coordenadas exponenciais são:

$$\begin{aligned} \langle \partial_x, \partial_x \rangle &= e^{2z} & \langle \partial_x, \partial_y \rangle &= 0 \\ \langle \partial_y, \partial_y \rangle &= e^{-2z} & \langle \partial_x, \partial_z \rangle &= 0 \\ \langle \partial_z, \partial_z \rangle &= 1 & \langle \partial_y, \partial_z \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Ou seja, a métrica invariante à esquerda que fixamos no espaço Sol é dada por

$$ds^2 = e^{2z} dx^2 + e^{-2z} dy^2 + dz^2. \quad (2.7)$$

As translações à esquerda são isometrias, uma vez que a métrica é invariante à esquerda. Além disso, em um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda, todo campo invariante à direita é de Killing. Logo, uma base para o grupo de isometrias do espaço Sol é dada pelos campos de Killing abaixo:

$$\begin{cases} F_1 = \partial_x \\ F_2 = \partial_y \\ F_3 = -x\partial_x + y\partial_y + \partial_z. \end{cases} \quad (2.8)$$

Os subgrupos a um parâmetro de isometrias gerado pelos três campos de Killing dados em (2.8) são, respectivamente,

$$\begin{cases} T_{1,t}(x, y, z) = (x + t, y, z) \\ T_{2,t}(x, y, z) = (x, y + t, z) \\ T_{3,t}(x, y, z) = (e^{-t}x, e^t y, z + t), \end{cases} \quad (2.9)$$

onde $t \in \mathbb{R}$, é um parâmetro real.

O ponto chave na compreensão da geometria do espaço Sol é considerar as três seguintes folheações:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1 : \{P_t = \{(t, y, z); y, z \in \mathbb{R}\}\}_{t \in \mathbb{R}}; \\ \mathcal{F}_2 : \{Q_t = \{(x, t, z); x, z \in \mathbb{R}\}\}_{t \in \mathbb{R}}; \\ \mathcal{F}_3 : \{R_t = \{(x, y, t); x, y \in \mathbb{R}\}\}_{t \in \mathbb{R}}. \end{cases} \quad (2.10)$$

As duas primeiras folheações \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são determinadas pelos grupos de isometrias $\{T_{1,t}\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\{T_{2,t}\}_{t \in \mathbb{R}}$, respectivamente, elas descrevem as únicas superfícies totalmente geodésicas do espaço Sol, sendo cada folha isométrica a um plano hiperbólico e, a terceira folheação \mathcal{F}_3 é realizada por superfícies mínimas e todas elas são isométricas ao plano Euclidiano.

A partir de (2.3) e utilizando (1.4), deduzimos que a conexão Riemanniana ∇ do espaço Sol satisfaz:

$$\begin{array}{lll} \nabla_{E_1} E_1 = -E_3 & \nabla_{E_1} E_2 = 0 & \nabla_{E_1} E_3 = E_1 \\ \nabla_{E_2} E_1 = 0 & \nabla_{E_2} E_2 = E_3 & \nabla_{E_2} E_3 = -E_2 \\ \nabla_{E_3} E_1 = 0 & \nabla_{E_3} E_2 = 0 & \nabla_{E_3} E_3 = 0, \end{array}$$

De fato, substituindo os campos E_1 , E_2 e E_3 na equação (1.4) e de (2.3), (2.5), obtemos

$$2\langle \nabla_{E_1} E_1, E_3 \rangle = \langle [E_1, E_1], E_3 \rangle - \langle [E_1, E_3], E_1 \rangle + \langle [E_3, E_1], E_1 \rangle = -2\langle E_1, E_1 \rangle,$$

o que implica que $\nabla_{E_1} E_1 = -E_3$,

$$2\langle \nabla_{E_2} E_1, E_3 \rangle = \langle [E_2, E_1], E_3 \rangle - \langle [E_1, E_3], E_2 \rangle + \langle [E_3, E_2], E_1 \rangle = 0,$$

daí, temos que $\nabla_{E_2} E_1 = 0$,

$$2\langle \nabla_{E_3} E_1, E_3 \rangle = \langle [E_3, E_1], E_3 \rangle - \langle [E_1, E_3], E_3 \rangle + \langle [E_3, E_3], E_1 \rangle = 0$$

assim, $\nabla_{E_3} E_1 = 0$. Analogamente, encontramos

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} E_2 &= 0 & \nabla_{E_1} E_3 &= E_1 \\ \nabla_{E_2} E_2 &= E_3 & \nabla_{E_2} E_3 &= -E_2 \\ \nabla_{E_3} E_2 &= 0 & \nabla_{E_3} E_3 &= 0. \end{aligned}$$

2.2 Superfícies Invariantes no Espaço Sol

Nesta seção calculamos as curvaturas média e Gaussiana (intrínseca e extrínseca) de uma superfície invariante no espaço Sol.

Definição 2.1. *Uma superfície S no Sol é dita uma superfície invariante se for invariante sob um dos grupos a um parâmetro de isometrias $\{T_{i,t}; t \in \mathbb{R}\}$, com $i = 1, 2$.*

A ação de uma isometria do espaço ambiente transforma uma superfície invariante sob o grupo $\{T_{2,t}\}_{t \in \mathbb{R}}$ em uma superfície invariante sob o grupo $\{T_{1,t}\}_{t \in \mathbb{R}}$, donde podemos fazer isto tomando a isometria do espaço Sol dada por $\phi(x, y, z) = (y, x, -z)$. A partir agora consideraremos, neste trabalho, superfícies invariantes sob a ação do primeiro grupo de isometrias, ou seja, $\{T_{1,t}\}_{t \in \mathbb{R}}$. E, portanto tais superfícies serão chamadas de superfícies T_1 -invariantes ou simplesmente superfícies invariantes.

Uma superfície T_1 -invariante S é determinada pela curva interseção α da superfície S com qualquer uma das folhas da folheação correspondente ao grupo de isometrias. Esta curva é dita uma curva geratriz da superfície. Por nossa escolha de grupo de isometrias, iremos considerar α a curva interseção de S com o plano $\{x = 0\}$, ou seja, $\alpha = S \cap P_0$. Assim, impor condições sobre a curvatura de S é equivalente a colocar condições sobre a sua curva geratriz.

Tomemos uma parametrização da curva α dada por $\alpha(s) = (0, y(s), z(s))$, $s \in I$, onde s é o parâmetro comprimento de arco. Temos $\alpha'(s) = (0, y'(s), z'(s))$, logo

$$e^{2z(s)} \cdot 0^2 + e^{-2z(s)} \cdot (y'(s))^2 + 1 \cdot (z'(s))^2 = 1,$$

isto é,

$$(e^{-z(s)}y'(s))^2 + (z'(s))^2 = 1.$$

Tomando

$$e^{-z(s)}y'(s) = \cos \theta(s) \quad \text{e} \quad z'(s) = \text{sen} \theta(s),$$

obtemos

$$y'(s) = e^{z(s)} \cos \theta(s), \quad z'(s) = \text{sen} \theta(s),$$

onde $\theta = \theta(s)$ é uma função suave.

Parametrizamos a superfície S por

$$X(s, t) = (t, y(s), z(s)), \quad s \in I \subset \mathbb{R} \quad \text{e} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Temos, omitindo a variável s e denotando por $'$ a derivada com relação a s ,

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 := X_s &= (0, y', z') \\ &= y' \partial_y + z' \partial_z \\ &= \cos \theta e^z \partial_y + \text{sen} \theta \partial_z \\ &= \cos \theta E_2 + \text{sen} \theta E_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_2 := X_t &= (1, 0, 0) \\ &= \partial_x \\ &= e^z E_1. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
 \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2 &= X_s \wedge X_t \\
 &= (\cos \theta E_2 + \operatorname{sen} \theta E_3) \wedge (e^z E_1) \\
 &= e^z (-\cos \theta E_3 + \operatorname{sen} \theta E_2) \\
 &= e^z (\operatorname{sen} \theta E_2 - \cos \theta E_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2\| &= |e^z| \|(\operatorname{sen} \theta E_2 - \cos \theta E_3)\| \\
 &= e^z.
 \end{aligned}$$

Daí, temos o campo normal unitário

$$N = -\operatorname{sen} \theta E_2 + \cos \theta E_3.$$

Esta será a orientação escolhida ao longo deste trabalho.

Sejam H e K_{ext} , respectivamente, a curvatura média e a curvatura Gaussiana extrínseca de S . Sabemos que, usando a notação clássica, a curvatura média e a curvatura Gaussiana extrínseca são dadas, respectivamente, por

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2} \quad \text{e} \quad K_{\text{ext}} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (2.11)$$

onde

$$\begin{aligned}
 E &= \langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle, & F &= \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle, & G &= \langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle. \\
 e &= \langle N, \nabla_{\bar{e}_1} \bar{e}_1 \rangle, & f &= \langle N, \nabla_{\bar{e}_1} \bar{e}_2 \rangle, & g &= \langle N, \nabla_{\bar{e}_2} \bar{e}_2 \rangle.
 \end{aligned}$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$\begin{aligned}
 E &= \langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle \\
 &= \langle \cos \theta E_2 + \operatorname{sen} \theta E_3, \cos \theta E_2 + \operatorname{sen} \theta E_3 \rangle \\
 &= \cos^2 \theta \langle E_2, E_2 \rangle + 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \langle E_2, E_3 \rangle + \operatorname{sen}^2 \theta \langle E_3, E_3 \rangle \\
 &= 1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F &= \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle \\
 &= \langle \cos \theta E_2 + \operatorname{sen} \theta E_3, e^z E_1 \rangle \\
 &= e^z \cos \theta \langle E_2, E_1 \rangle + e^z \operatorname{sen} \theta \langle E_3, E_1 \rangle \\
 &= 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G &= \langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle \\
 &= \langle e^z E_3, e^z E_3 \rangle \\
 &= e^{2z} \langle E_3, E_3 \rangle \\
 &= e^{2z}.
 \end{aligned}$$

Ou seja, $E = 1$, $F = 0$ e $G = e^{2z}$ e portanto, $EG - F^2 = e^{2z}$.

Para encontrarmos os coeficientes da segunda forma fundamental, determinamos primeiro $\nabla_{\bar{e}_1} \bar{e}_1$, $\nabla_{\bar{e}_1} \bar{e}_2$ e $\nabla_{\bar{e}_2} \bar{e}_2$. Daí, substituindo os valores de \bar{e}_1 e \bar{e}_2 , segue que

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\bar{e}_1} \bar{e}_1 &= \nabla_{\bar{e}_1} (\cos \theta E_2 + \operatorname{sen} \theta E_3) \\
 &= \cos \theta \nabla_{\bar{e}_1} E_2 + \bar{e}_1 (\cos \theta) E_2 + \operatorname{sen} \theta \nabla_{\bar{e}_1} E_3 + \bar{e}_1 (\operatorname{sen} \theta) E_3 \\
 &= \cos \theta \nabla_{(\cos \theta E_2 + \operatorname{sen} \theta E_3)} E_2 - \theta' \operatorname{sen} \theta E_2 + \operatorname{sen} \theta \nabla_{(\cos \theta E_2 + \operatorname{sen} \theta E_3)} E_3 + \theta' \cos \theta E_3 \\
 &= \cos^2 \theta \nabla_{E_2} E_3 + \cos \theta \operatorname{sen} \theta \nabla_{E_3} E_2 - \theta' \operatorname{sen} \theta E_2 \\
 &\quad + \operatorname{sen} \theta \cos \theta \nabla_{E_2} E_2 + \operatorname{sen}^2 \theta \nabla_{E_3} E_3 + \theta' \cos \theta E_3 \\
 &= \cos^2 \theta E_3 - \theta' \operatorname{sen} \theta E_2 - \operatorname{sen} \theta \cos \theta E_2 + \theta' \cos \theta E_3 \\
 &= (\theta' + \cos \theta) (-\operatorname{sen} \theta E_2 + \cos \theta E_3);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\bar{e}_1} \bar{e}_2 &= \nabla_{(\cos \theta E_2 + \operatorname{sen} \theta E_3)} (e^z E_1) \\
 &= \cos \theta \nabla_{E_2} (e^z E_1) + \operatorname{sen} \theta \nabla_{E_3} (e^z E_1) \\
 &= \cos \theta [e^z \nabla_{E_2} E_1 + E_2 (e^z) E_1] + \operatorname{sen} \theta [e^z \nabla_{E_3} E_1 + E_3 (e^z) E_1] \\
 &= e^z \operatorname{sen} \theta E_1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\bar{e}_2} \bar{e}_2 &= \nabla_{(e^z E_1)}(e^z E_1) \\
 &= e^z \nabla_{E_1}(e^z E_1) \\
 &= e^z [e^z \nabla_{E_1} E_1 + E_1(e^z) E_1] \\
 &= -e^{2z} E_3.
 \end{aligned}$$

Logo, os coeficientes da segunda forma fundamental são:

$$\begin{aligned}
 e &= \langle N, \nabla_{\bar{e}_1} \bar{e}_1 \rangle \\
 &= \langle -\operatorname{sen}\theta E_2 + \cos\theta E_3, (\theta' + \cos\theta)(-\operatorname{sen}\theta E_2 + \cos\theta E_3) \rangle \\
 &= (\theta' + \cos\theta) \langle -\operatorname{sen}\theta E_2 + \cos\theta E_3, -\operatorname{sen}\theta E_2 + \cos\theta E_3 \rangle \\
 &= \theta' + \cos\theta;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f &= \langle N, \nabla_{\bar{e}_1} \bar{e}_2 \rangle \\
 &= \langle -\operatorname{sen}\theta E_2 + \cos\theta E_3, e^z \operatorname{sen}\theta E_1 \rangle \\
 &= 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g &= \langle N, \nabla_{\bar{e}_2} \bar{e}_2 \rangle \\
 &= \langle -\operatorname{sen}\theta E_2 + \cos\theta E_3, -e^{2z} E_3 \rangle \\
 &= e^{2z} \operatorname{sen}\theta \langle E_2, E_3 \rangle - e^{2z} \cos\theta \langle E_3, E_3 \rangle \\
 &= -e^{2z} \cos\theta.
 \end{aligned}$$

Portanto, substituindo os coeficientes das primeira e segunda formas fundamentais em (2.11), obtemos, respectivamente, a curvatura média e a curvatura Gaussiana extrínseca, isto é,

$$H = \frac{1}{2}\theta' \tag{2.12}$$

$$K_{\text{ext}} = -\cos\theta(\theta' + \cos\theta). \tag{2.13}$$

Usando as relações

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad e \quad K_{\text{ext}} = k_1 k_2, \tag{2.14}$$

obtemos as curvaturas principais

$$k_1 = \theta' + \cos \theta \quad e \quad k_2 = -\cos \theta. \quad (2.15)$$

Finalmente, a curvatura Gaussiana intrínseca K_{int} é dada por

$$K_{\text{int}} = K_{\text{ext}} + K(\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2), \quad (2.16)$$

onde $K(\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2)$ é a curvatura seccional de cada plano tangente dada por

$$K(\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2) = \frac{1}{EG - F^2} \langle \nabla_{\bar{e}_1} \nabla_{\bar{e}_2} \bar{e}_2 - \nabla_{\bar{e}_2} \nabla_{\bar{e}_1} \bar{e}_2 - \nabla_{[\bar{e}_1, \bar{e}_2]} \bar{e}_2, \bar{e}_1 \rangle. \quad (2.17)$$

Donde,

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{e}_1} \nabla_{\bar{e}_2} \bar{e}_2 &= \nabla_{(\cos \theta E_2 + \text{sen} \theta E_3)} (-e^{2z} E_3) \\ &= \cos \theta \nabla_{E_2} (-e^{2z} E_3) + \text{sen} \theta \nabla_{E_3} (-e^{2z} E_3) \\ &= \cos \theta [-e^{2z} \nabla_{E_2} E_3 + E_2 (-e^{2z}) E_3] + \text{sen} \theta [-e^{2z} \nabla_{E_3} E_3 + E_3 (-e^{2z}) E_3] \\ &= e^{2z} (\cos \theta E_2 - 2 \text{sen} \theta E_3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{e}_2} \nabla_{\bar{e}_1} \bar{e}_2 &= \nabla_{(e^z E_1)} (e^z \text{sen} \theta E_1) \\ &= e^z \text{sen} \theta \nabla_{(e^z E_1)} E_1 \\ &= -e^{2z} \text{sen} \theta E_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{[\bar{e}_1, \bar{e}_2]} \bar{e}_2 &= \nabla_{(\nabla_{\bar{e}_1} \bar{e}_2 - \nabla_{\bar{e}_2} \bar{e}_1)} (\bar{e}_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daí, segue de (2.17) que

$$K(\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2) = \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta. \quad (2.18)$$

Consequentemente, substituindo (2.13) e (2.18) em (2.16), obtemos

$$K_{\text{int}} = -\theta' \cos \theta - \text{sen}^2 \theta. \quad (2.19)$$

Notemos, pelas equações (2.12), (2.13) e (2.19) que qualquer condição nas curvaturas de uma superfície invariante S no Sol escreve-se como uma equação diferencial ordinária $\varepsilon(s, \theta, \theta') = 0$ em função de θ . Então, para obter a superfície S , precisamos obter a curva geratriz α e para isso é necessário resolver a equação $\varepsilon = 0$ junto com o sistema

$$y'(s) = e^{z(s)} \cos \theta(s). \quad (2.20)$$

$$z'(s) = \operatorname{sen} \theta(s). \quad (2.21)$$

Se $\alpha(y) = (0, y, z(y))$, então $\alpha'(s) = (0, y'(s), z'(y)y'(s))$. E como α é parametrizada pelo comprimento de arco temos

$$e^{-2z}[y'(s)]^2 + [z'(s)]^2[y'(s)]^2 = 1,$$

isto é,

$$e^{-2z}e^{2z} \cos^2 \theta + z'^2 e^{2z} \cos^2 \theta = \cos^2 \theta (1 + z'^2 e^{2z}) = 1.$$

Logo,

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2 e^{2z}}}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{z' e^z}{\sqrt{1 + z'^2 e^{2z}}} \quad \text{e} \quad \theta'(s) = e^{2z} \frac{z'' + z'^2}{(1 + z'^2 e^{2z})^{3/2}}. \quad (2.22)$$

Dependendo de cada caso, usaremos indistintamente (2.20), (2.21) e (2.22).

Observação 2.2. Neste trabalho, omitiremos as constantes de integração da função $y(s)$, pois representam uma isometria da superfície por uma translação $T_{2,t}$. Da mesma forma, omitiremos as constantes aditivas da função z , pois neste caso, a isometria $\phi(x, y, z) = (e^\lambda x, e^{-\lambda} y, z - \lambda)$ converte a curva geratriz $s \mapsto (0, y(s), z(s) + \lambda)$ em $s \mapsto (0, e^{-\lambda} y(s), z(s))$.

Capítulo 3

Superfícies Invariantes no Espaço *Sol* com Curvatura Constante

Neste capítulo estudamos superfícies com curvatura média constante e superfícies com curvatura Gaussiana constante, que são invariantes sob a ação do grupo a um parâmetro de isometrias $\{T_{1,t}\}_{t \in \mathbb{R}}$ do espaço ambiente. O estudo de superfícies com curvatura constante, especialmente com curvatura média constante, em 3-espacos homogêneos e invariantes sob a ação de um grupo a um parâmetro de isometrias do espaço ambiente tem sido recentemente de grande interesse para muitos geômetras. Vários resultados foram obtidos no grupo de Heisenberg (veja [1], [8], [9], [14], [20]) e no espaço produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (veja [13], [15], [16]).

Este capítulo foi dividido em duas seções de acordo com o tipo de curvatura que será considerada. Na seção 3.1 estudamos as superfícies com curvatura média constante através de dois resultados. No primeiro classificamos, no *Sol*, as superfícies mínimas que são T_1 -invariantes e no segundo caracterizamos as superfícies com curvatura média constante não nula T_1 -invariantes. Logo depois, na seção 3.2, estudamos as superfícies com curvatura Gaussiana constante através de dois resultados. No primeiro e segundo, respectivamente, classificamos e caracterizamos todas as superfícies com curvatura Gaussiana intrínseca e extrínseca constante que são T_1 -invariantes no *Sol*.

3.1 Superfícies com Curvatura Média Constante

Nesta seção classificamos as superfícies mínimas e caracterizamos as superfícies com curvatura média constante não nula, respectivamente, que são invariantes no Sol sob a ação do grupo $\{T_{1,t}\}_{t \in \mathbb{R}}$ através de dois teoremas.

Teorema 3.1. *As únicas superfícies mínimas T_1 -invariantes no Sol são:*

1. *uma folha da folheação \mathcal{F}_2 ou;*
2. *uma folha da folheação \mathcal{F}_3 ou,*
3. *a superfície gerada pelo gráfico, no plano YZ , da função $z(y) = \log(y)$.*

Demonstração: Seja S uma superfície T_1 -invariante no Sol. Se S é mínima, então $H = 0$. Como $H = \frac{1}{2}\theta'$, então $\theta' = 0$, isto é,

$$\theta(s) = \theta_0 \text{ para alguma constante } \theta_0 \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Assim, substituindo (3.1) em (2.20) e (2.21), respectivamente, obtemos

$$y'(s) = e^{z(s)} \cos \theta_0. \quad (3.2)$$

$$z'(s) = \text{sen} \theta_0. \quad (3.3)$$

Distinguimos os seguintes casos:

Caso 1: $\text{sen} \theta_0 = 0$.

De (3.3) temos que $z'(s) = 0$, isto é, $z(s) = \lambda$, onde λ é uma constante. Além disso, de (3.2) temos $y'(s) = \pm e^\lambda$, ou seja, $y(s) = \pm e^\lambda s$ e portanto, a curva geratriz α de S é dada por

$$\alpha(s) = (0, \pm e^\lambda s, \lambda), \quad s \in \mathbb{R},$$

que é uma reta paralela ao eixo OY e conseqüentemente a superfície S é uma folha de \mathcal{F}_3 .

Caso 2: $\cos \theta_0 = 0$.

De (3.3), temos que $z'(s) = \pm 1$, isto é, $z(s) = \pm s$. Por outro lado, de (3.2), temos que $y(s) = \lambda$, onde λ é uma constante. Portanto, a curva geratriz α de S é dada por

$$\alpha(s) = (0, \lambda, \pm s), \quad s \in \mathbb{R},$$

que é uma reta paralela ao eixo OZ . Logo, a superfície S é uma folha de \mathcal{F}_2 .

Caso 3: $\sin \theta_0 \neq 0$ e $\cos \theta_0 \neq 0$.

De (3.3) temos que $z(s) = (\sin \theta_0)s$. Além disso, de (3.2) temos $y'(s) = e^{(\sin \theta_0)s} \cos \theta_0$ e portanto,

$$y(s) = (\cotg \theta_0) e^{(\sin \theta_0)s}.$$

Logo, a curva geratriz α de S é dada por

$$\alpha(s) = (0, (\cotg \theta_0) e^{(\sin \theta_0)s}, (\sin \theta_0)s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Note que, podemos escrever $y(s) = (\cotg \theta_0) e^{z(s)}$. Donde, $z(y) = \log((\tg \theta_0)y)$. Isto significa que a curva geratriz α de S é o gráfico, no plano YZ , da função $z(y) = \log((\tg \theta_0)y)$, ou seja, a superfície S é gerada pelo gráfico, no plano YZ , da função $z(y) = \log(y)$ a menos de uma translação. ■

Teorema 3.2. *Seja S uma superfície T_1 -invariante no Sol com curvatura média constante $H \neq 0$. Sendo $\alpha(s) = (0, y(s), z(s))$ a curva geratriz de S . Então:*

1. *A coordenada z é limitada e periódica.*
2. *A curva α tem auto-interseções.*
3. *A curva α é invariante por um grupo discreto de translações na direção de OY .*
4. *O vetor velocidade de α gira em torno da origem de tal modo que ele toma todos os valores no círculo unitário.*

Demonstração: Como $H = \frac{1}{2}\theta'$, então $\theta' = 2H$, isto é, $\theta(s) = 2Hs$. Donde, segue de (2.21) que $z'(s) = \text{sen}(2Hs)$, ou seja,

$$z(s) = -\frac{1}{2H} \cos(2Hs).$$

Assim, concluímos que a função z é limitada e periódica de período $T = \frac{\pi}{H}$. Além disso, a função z' se anula no conjunto $A = \{\frac{n\pi}{2H} : n \in \mathbb{Z}\}$. Por outro lado, de (2.20) temos que

$$y'(s) = e^{-\frac{1}{2H} \cos(2Hs)} \cos(2Hs).$$

Então, a função y' se anula no conjunto $B = A + \frac{\pi}{4H}$. Donde a curva α não é gráfico sobre o eixo OY já que o vetor velocidade de α é paralelo ao eixo OZ nos pontos de B . Além disso, notamos que com a nossa escolha da constante de integração a função z é 0 nos pontos de B .

Note que, se $\{y(s), z(s), \theta(s)\}$ satisfaz o sistema (2.20), (2.21) e $\theta' = 2H$ com condições iniciais $\{y_0, z_0, \theta_0\}$, então $\{y(s+T) - y(T) + y_0, z(s), \theta(s)\}$ também satisfaz a este sistema e com a mesma condição inicial. De fato, fazendo $w(s) = y(s+T) - y(T) + y_0$, temos que

$$w'(s) = y'(s+T) = e^{z(s+T)} \cos(2H(s+T)) = e^{z(s)} \cos(2Hs+2\pi) = e^{z(s)} \cos(2Hs) = y'(s).$$

Além disso,

$$w(0) = y(0+T) - y(T) + y_0 = y_0.$$

Logo, as soluções acima coincidem. Assim, $y(s+T) = y(s) + y(T) - y_0$. Portanto,

$$\alpha(s+T) = (0, y(s+T), z(s+T)) = (0, y(s) + y(T) - y_0, z(s)) = L_{(0, y(T) - y_0, 0)} \alpha(s),$$

isto é, a curva geratriz α é invariante pelo grupo de translações gerado pelo vetor $(0, y(T) - y_0, 0)$. Esse grupo, segundo nossa notação, é $\{T_{2, n(y(T) - y_0)} : n \in \mathbb{Z}\}$.

Por fim, o vetor velocidade

$$\alpha'(s) = (0, y', z') = X_s = \cos\theta(s)E_2 + \text{sen}\theta(s)E_3$$

é unitário e está no plano gerado pelos vetores E_2 e E_3 . Como a função $\theta(s)$ assume valores em toda a reta, então o vetor velocidade de α gira em torno da origem e toma todos os valores no círculo unitário $\mathbb{S}^1 \subset \text{span}\{E_2, E_3\}$. ■

3.2 Superfícies com Curvatura Gaussiana Constante

Nesta seção estudamos as superfícies T_1 -invariantes no Sol com curvatura Gaussiana (K_{int} e K_{ext}) constante.

Teorema 3.3. *Seja S uma superfície T_1 -invariante no Sol com curvatura Gaussiana intrínseca constante, $K_{\text{int}} = c$. Então, módulo constantes de integração, temos a seguinte classificação, de acordo com a constante c .*

1. Se $c = 0$, a superfície é uma folha de \mathcal{F}_3 ou a curva geratriz α de S é

$$\alpha(s) = \left(0, \frac{1}{2} \left[s\sqrt{s^2 - 1} - \log \left(s + \sqrt{s^2 - 1} \right) \right], \log(|s|) \right), \quad s^2 \geq 1.$$

2. Se $c = -1$, a superfície é uma folha de \mathcal{F}_2 ou a curva geratriz α de S é o gráfico de $z(y) = \log(\cosh(y))$.
3. Se $c \in (-1, 0)$, então α é um gráfico do tipo $z(y) = \log(y)$, ou $z(y)$ está definida em todo \mathbb{R} com um único mínimo, ou $z(y)$ é uma função monótona definida em algum intervalo do tipo $(a, +\infty)$.
4. Se $c > 0$ ou $c < -1$, $z(y)$ é uma função limitada definida num intervalo limitado (a, b) com um único máximo ou mínimo e é vertical nos extremos de (a, b) .

Demonstração: Como $K_{\text{int}} = -\theta' \cos \theta - \text{sen}^2 \theta$, temos que

$$\theta' \cos \theta + \text{sen}^2 \theta = -c$$

ou equivalentemente

$$(\text{sen} \theta)' + \text{sen}^2 \theta + c = 0. \quad (3.4)$$

Fazendo $p = \text{sen} \theta$, temos de (3.4) que

$$p' + p^2 + c = 0. \quad (3.5)$$

Se $p^2 + c \neq 0$, então a equação (3.5) pode ser reescrita como

$$\frac{p'}{p^2 + c} = -1, \quad (3.6)$$

e neste caso pode ser integrada. Se $p^2 + c = 0$, ou seja, se $\sin^2\theta + c = 0$, então $c \in [-1, 0]$.

Assim, distinguimos os seguintes casos:

Caso 1: $c = 0$.

Se $p^2 + c = 0$, isto é, se $\sin^2\theta = 0$, então $\sin\theta \equiv 0$ e logo, de (2.21), $z'(s) = 0$, donde $z(s) = \lambda = cte$. Ou seja, z é uma função constante. Por outro lado, de (2.20) temos que $y'(s) = e^\lambda$, ou seja, por integração obtém-se $y(s) = e^\lambda s$. Assim, a curva geratriz α de S é dada por

$$\alpha(s) = (0, e^\lambda s, \lambda), \quad s \in \mathbb{R},$$

que é uma reta paralela ao eixo OY e conseqüentemente S é uma folha de \mathcal{F}_3 .

Agora, se $p^2 + c \neq 0$, isto é, se $p^2 \neq 0$, segue de (3.6) que

$$\frac{p'}{p^2} = -1, \quad \text{com } p^2 \neq 0. \quad (3.7)$$

Logo, integrando (3.7) obtemos $p = \frac{1}{s}$, ou seja, $\sin\theta = \frac{1}{s}$ (logo $|s| \geq 1$) e por integração de (2.21), obtemos

$$z(s) = \log(|s|).$$

Além disso, é fácil ver que

$$\cos\theta = \pm \frac{\sqrt{s^2 - 1}}{|s|}.$$

Assim, segue de (2.20) que

$$y'(s) = \pm \frac{\sqrt{s^2 - 1}}{|s|} e^{\log(|s|)},$$

isto é,

$$y'(s) = \pm \sqrt{s^2 - 1}.$$

Desta forma, $y(s)$ é dado por

$$y(s) = \pm \int \sqrt{s^2 - 1} ds.$$

Definindo $s = \sec \beta$, temos $ds = \sec \beta \operatorname{tg} \beta d\beta$ e $\sqrt{s^2 - 1} = \operatorname{tg} \beta$. Realizando estas mudanças de variáveis nas parcelas da integral acima, temos

$$\begin{aligned} y(s) &= \pm \int \operatorname{tg}^2 \beta \sec \beta d\beta \\ &= \pm \left(\int \sec^3 \beta d\beta - \int \sec \beta d\beta \right). \\ &= \pm \frac{1}{2} (\sec \beta \operatorname{tg} \beta - \log (\sec \beta + \operatorname{tg} \beta)). \end{aligned}$$

Donde, obtemos

$$y(s) = \pm \frac{1}{2} \left(s\sqrt{s^2 - 1} - \log \left(s + \sqrt{s^2 - 1} \right) \right).$$

Portanto, a curva geratriz α de S é dada por

$$\alpha(s) = \left(0, \pm \frac{1}{2} \left[s\sqrt{s^2 - 1} - \log \left(s + \sqrt{s^2 - 1} \right) \right], \log(|s|) \right), \quad s^2 \geq 1.$$

Caso 2: $c = -1$.

Se $p^2 + c = 0$, ou seja, se $\operatorname{sen}^2 \theta - 1 = 0$, então $\cos \theta \equiv 0$ e logo, de (2.21), $z'(s) = \pm 1$, donde $z(s) = \pm s$. Assim, de (2.20) temos que $y'(s) = 0$, ou seja, $y(s) = \lambda$, onde λ é uma constante. Logo, a curva geratriz α de S é dada por

$$\alpha(s) = (0, \lambda, \pm s), \quad s \in \mathbb{R},$$

que é uma reta paralela ao eixo OZ e conseqüentemente S é uma folha de \mathcal{F}_2 .

Caso contrário, se $p^2 - 1 \neq 0$, segue de (3.6) que

$$\frac{p'}{p^2 - 1} = -1, \quad \text{com } p^2 < 1. \quad (3.8)$$

Logo, integrando (3.8), obtemos $\operatorname{arctgh}(p) = s$, ou seja, $\operatorname{sen} \theta = \operatorname{tgh}(s)$. Assim, por integração de (2.21), obtém-se

$$z(s) = \log(\cosh(s)).$$

Além disso, temos que $\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2(s)} = \pm \operatorname{sech}(s)$. Deste modo, de (2.20) temos que

$$\begin{aligned} y'(s) &= \pm e^{\log(\cosh(s))} \operatorname{sech}(s) \\ &= \pm 1, \end{aligned}$$

ou seja, por integração obtemos

$$y(s) = \pm s.$$

Usando o fato que a função $\cosh(x)$ é par, concluímos que a curva geratriz α de S é o gráfico da função $z(y) = \log(\cosh(y))$.

Caso 3: $c \in (-1, 0)$.

Então, existe um θ_0 tal que $\text{sen}^2\theta_0 + c = 0$, ou seja, $\text{sen}\theta_0 = \pm\sqrt{-c}$. Mas se $p^2 + c = 0$, isto é, se $c + \text{sen}^2\theta = 0$ para todo s em algum intervalo aberto I , então tem-se que $\theta(s) = \theta_0$, onde θ_0 é uma constante. Logo, segue de (2.21) que

$$z'(s) = \text{sen}\theta_0,$$

isto é, por integração obtemos

$$z(s) = (\text{sen}\theta_0)s.$$

Por outro lado, de (2.20) temos que

$$y'(s) = e^{(\text{sen}\theta_0)s} \cos\theta_0$$

e por integração, obtemos

$$y(s) = (\text{cotg}\theta_0)e^{(\text{sen}\theta_0)s},$$

a menos de constantes. Assim, de $y(s)$ e $z(s)$, temos que $y(s) = (\text{cotg}\theta_0)e^{z(s)}$, isto é, $z(y) = \log((\text{tg}\theta_0)y)$. Isto significa que a curva geratriz α de S é o gráfico de $z(y) = \log((\text{tg}\theta_0)y)$, ou seja, a superfície S é gerada pelo gráfico da função $z(y) = \log(y)$ a menos de uma translação. Finalmente, suponhamos que $\text{sen}^2\theta + c \neq 0$ em algum ponto s_0 . Sem perda de generalidade supomos $s_0 = 0$ e, que $\text{sen}^2\theta + c$ preserve o sinal em I . Assim, a primeira integração de (3.6) depende do sinal de $\text{sen}^2\theta + c$ no intervalo I .

Analisemos os seguintes casos:

a) $\sin^2\theta + c < 0$.

Então, podemos reescrever a equação (3.6) como

$$\frac{p'}{p^2 - (\sqrt{-c})^2} = -1, \quad \text{com } p^2 < (\sqrt{-c})^2. \quad (3.9)$$

Integrando (3.9) obtemos

$$-\frac{\operatorname{arctgh}\left(\frac{p}{\sqrt{-c}}\right)}{\sqrt{-c}} = -(s + \lambda),$$

onde λ é uma constante. Daí,

$$p = \sqrt{-c} \operatorname{tgh}(\sqrt{-c}(s + \lambda)),$$

ou seja,

$$\sin\theta = \sqrt{-c} \operatorname{tgh}(\sqrt{-c}(s + \lambda)). \quad (3.10)$$

Sem perda de generalidade, podemos supor $\lambda = 0$ e, neste caso temos que $\sin\theta$ se anula no ponto $s = 0$. Agora, integrando (2.21), obtemos

$$z(s) = \log(\cosh(\sqrt{-c}s)), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Além disso, como $z''(s) > 0$ para todo s . Então $z = z(s)$ é uma função convexa e, portanto admite um único mínimo em $s = 0$. Finalmente, de (2.20) temos que

$$|y'(s)| = \cosh(\sqrt{-c}s) \sqrt{1 + c \operatorname{tgh}^2(\sqrt{-c}s)} \geq \sqrt{1 + c},$$

isto significa que a imagem de y é todo \mathbb{R} . Assim, $z = z(y)$ com $y \in \mathbb{R}$. A partir de $z = z(y)$, temos que $z'(y) = \frac{z'(s)}{y'(s)}$. Como $z'(0) = 0$, então $y = 0$ e a partir de (2.22), concluímos que, $z''(0) = -c > 0$. Logo, $z = z(y)$ tem um único mínimo em $y = 0$.

b) $\sin^2\theta + c > 0$.

Então, podemos reescrever a equação (3.6) como

$$\frac{p'}{p^2 - (\sqrt{-c})^2} = -1, \quad \text{com } p^2 > (\sqrt{-c})^2. \quad (3.11)$$

Assim, integrando (3.11) obtemos

$$-\frac{\operatorname{arccotgh}\left(\frac{p}{\sqrt{-c}}\right)}{\sqrt{-c}} = -(s + \lambda),$$

onde λ é uma constante. Daí,

$$p = \sqrt{-c} \operatorname{cotgh}(\sqrt{-c}(s + \lambda)),$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{-c} \operatorname{cotgh}(\sqrt{-c}(s + \lambda)). \quad (3.12)$$

Dado que $\operatorname{sen}^2\theta + c > 0$, então temos que as seguintes situações

$$0 < \sqrt{-c} < \operatorname{sen}\theta < 1 \quad \text{ou} \quad -1 < \operatorname{sen}\theta < -\sqrt{-c} < 0.$$

Na primeira situação, temos que s pertence a um intervalo da forma $(a, +\infty)$, enquanto que na segunda s pertence a $(-\infty, b)$ com $b < a$. Portanto, se considerarmos $\lambda = 0$, temos que

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{-c} \operatorname{cotgh}(\sqrt{-c}s),$$

com $s \in (a, +\infty)$ ou $s \in (-\infty, -a)$ e $a = \frac{1}{2\sqrt{-c}} \log \frac{1+\sqrt{-c}}{1-\sqrt{-c}}$. De fato, pela primeira situação temos que

$$\sqrt{-c} < \sqrt{-c} \operatorname{cotgh}(\sqrt{-c}s) < 1$$

donde obtemos

$$(i) \quad \operatorname{cotgh}(\sqrt{-c}s) > 1$$

$$(ii) \quad \operatorname{cotgh}(\sqrt{-c}s) < \frac{1}{\sqrt{-c}}$$

em que (i) é sempre satisfeita e de (ii) temos que

$$\begin{aligned} s &> \frac{1}{\sqrt{-c}} \operatorname{arccotgh}\left(\frac{1}{\sqrt{-c}}\right) \\ &> \frac{1}{2\sqrt{-c}} \log \frac{1 + \sqrt{-c}}{1 - \sqrt{-c}}, \end{aligned}$$

tomando $a = \frac{1}{2\sqrt{-c}} \log \frac{1+\sqrt{-c}}{1-\sqrt{-c}}$ chega-se ao resultado. De modo análogo, verifica-se a segunda situação. Além disso, integrando (2.21) obtemos

$$z(s) = \log (|\sinh(\sqrt{-cs})|)$$

que claramente é uma função monótona. Por outro lado, de (2.20) temos que

$$y'(s) = |\sinh(\sqrt{-cs})| \left(\pm \sqrt{1 + c \operatorname{cogh}^2(\sqrt{-cs})} \right)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} y(s) &= \int^s |\sinh(\sqrt{-cs})| \left(\pm \sqrt{1 + c \operatorname{cogh}^2(\sqrt{-cs})} \right) \\ &= \pm \int^s \sqrt{\sinh^2(\sqrt{-cs}) + \cosh^2(\sqrt{-cs})} ds. \end{aligned}$$

Caso 4: $c > 0$.

Neste caso, temos que $p^2 + c > 0$. Portanto, integrando (3.6) com a mudança de variável, $p = \sqrt{c} \operatorname{tg} \beta$ e a diferencial $dp = \sqrt{c} \sec^2 \beta d\beta$, obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arctg} \left(\frac{p}{\sqrt{c}} \right) = -(s + \lambda),$$

onde λ é uma constante. Sem perda de generalidade, consideremos $\lambda = 0$ donde

$$p = -\sqrt{c} \operatorname{tg}(\sqrt{cs}),$$

ou seja,

$$\operatorname{sen} \theta = -\sqrt{c} \operatorname{tg}(\sqrt{cs}). \quad (3.13)$$

Integrando (2.21), obtemos

$$z(s) = \log (|\cos(\sqrt{cs})|).$$

Observe em (3.13) que $s \in [-M, M] + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, $M = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{c}}$. De fato, como $\operatorname{sen} \theta \in [-1, 1]$, segue de (3.13) que

$$-1 \leq -\sqrt{c} \operatorname{tg}(\sqrt{cs}) \leq 1.$$

Logo,

$$k\pi - \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right) \leq s \leq \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ou seja, s pertence a um intervalo limitado da forma $[-M, M] + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, com $M = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$.

Por outro lado, z' se anula exatamente nos pontos $s = \frac{k\pi}{\sqrt{c}}$. Sem perda de generalidade, podemos restringir o domínio de z ao intervalo $\left(-\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$ e, neste caso, z' se anula apenas em $s = 0$. Além disso, $z''(s) = -c \sec^2(\sqrt{c}s) < 0$. Então, a função $z = z(s)$ tem um único máximo na origem.

Mostremos agora que y toma valores num intervalo limitado. De fato, os valores de $y'(s)$ são limitados, pois de (2.20) temos que

$$|y'(s)| = |\cos(\sqrt{c}s)| \sqrt{1 - c \operatorname{tg}^2(\sqrt{c}s)} \leq |\cos(\sqrt{c}s)| \leq 1.$$

Assim, sendo y uma função contínua, definida num intervalo limitado $(-M, M)$ e com y' contínua e limitada, y toma valores em algum intervalo limitado (a, b) . Desta forma, $z = z(y)$ é uma função limitada definida num intervalo limitado (a, b) .

A partir de $z = z(y)$, temos que $z'(y) = \frac{z'(s)}{y'(s)}$ (notemos que $y'(s) \neq 0$ para todo $s \in (-M, M)$). Como $z'(0) = 0$, então $y = 0$ e a partir de (2.22) concluímos que $z''(0) = -c < 0$. Logo, $z = z(y)$ tem um único máximo em $y = 0$. Finalmente, note que

- $|z'(\pm M)| = \left| -\sqrt{c} \operatorname{tg}\left(\pm\sqrt{c} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)\right)\right) \right| = |\pm 1| = 1$
- $|y'(\pm M)| = \left| \cos\left(\pm\sqrt{c} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)}{\sqrt{c}}\right) \right| \sqrt{1 - c \operatorname{tg}^2\left(\pm\sqrt{c} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)}{\sqrt{c}}\right)} = 0.$

Donde conclui-se que

$$\lim_{s \rightarrow \pm M} |z'(s)| = 1, \quad \lim_{s \rightarrow \pm M} |y'(s)| = 0,$$

e isto significa que a curva geratriz α é vertical nos pontos $y = a$ e $y = b$.

Caso 5: $c < -1$.

Este caso é semelhante ao caso $c > 0$ com $p^2 + c < 0$. Então, integrando (3.6), obtemos

$$-\frac{1}{\sqrt{-c}} \operatorname{arctgh} \left(\frac{p}{\sqrt{-c}} \right) = -(s + \lambda),$$

onde λ é uma constante. Sem perda de generalidade, consideremos $\lambda = 0$ donde

$$p = \sqrt{-c} \operatorname{tgh}(\sqrt{-cs}),$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{-c} \operatorname{tgh}(\sqrt{-cs}). \quad (3.14)$$

Logo, integrando (2.21) obtemos

$$z(s) = \log(\cosh(\sqrt{-cs})).$$

Mais uma vez observe em (3.14) que $s \in [-M, M]$, com $M = \frac{1}{2\sqrt{-c}} \log \frac{\sqrt{-c}+1}{\sqrt{-c}-1}$. De fato, como $-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1$, então

$$-1 \leq \sqrt{-c} \operatorname{tgh}(\sqrt{-cs}) \leq 1,$$

ou seja,

$$-\frac{\operatorname{arctgh} \left(\frac{1}{\sqrt{-c}} \right)}{\sqrt{-c}} \leq s \leq \frac{\operatorname{arctgh} \left(\frac{1}{\sqrt{-c}} \right)}{\sqrt{-c}}$$

equivalentemente

$$-\frac{1}{2\sqrt{-c}} \log \frac{\sqrt{-c}+1}{\sqrt{-c}-1} \leq s \leq \frac{1}{2\sqrt{-c}} \log \frac{\sqrt{-c}+1}{\sqrt{-c}-1},$$

tomando $M = \frac{1}{2\sqrt{-c}} \log \frac{\sqrt{-c}+1}{\sqrt{-c}-1}$, temos que $s \in [-M, M]$.

Sem perda de generalizada, suporemos $s \in (-M, M)$. Notemos que z' se anula apenas em $s = 0$. Além disso, $z''(s) = -c \operatorname{sech}^2(\sqrt{-cs}) > 0$ para todo $s \in (-M, M)$, então a função $z = z(s)$ é uma função convexa e, portanto admite um único mínimo na origem. Por outro lado, temos que

$$|y'(s)| = \cosh(\sqrt{-cs}) \sqrt{1 + c \operatorname{tgh}^2(\sqrt{-cs})} \leq \cosh(\sqrt{-cs}) \leq 1.$$

Então, sendo y uma função contínua definida num intervalo limitado $(-M, M)$ e com y' contínua e limitada, y toma valores em algum intervalo limitado (a, b) . Assim, $z = z(y)$ é uma função limitada definida num intervalo limitado (a, b) .

A partir de $z = z(y)$, temos que $z'(y) = \frac{z'(s)}{y'(s)}$ (notemos que $y'(s) \neq 0$ para todo $s \in (-M, M)$). Como $z'(0) = 0$, então $y = 0$ e a partir de (2.22), concluimos que, $z''(0) = -c > 0$. Logo, $z = z(y)$ tem um único mínimo em $y = 0$. Finalmente, observamos que

$$\begin{aligned} \bullet \quad |z'(\pm M)| &= \left| \sqrt{-c} \operatorname{tgh} \left(\pm \sqrt{-c} \frac{\operatorname{arctgh} \left(\frac{1}{\sqrt{-c}} \right)}{\sqrt{-c}} \right) \right| = |\pm 1| = 1 \\ \bullet \quad |y'(\pm M)| &= \left| \cos \left(\pm \sqrt{-c} \frac{\operatorname{arctgh} \left(\frac{1}{\sqrt{-c}} \right)}{\sqrt{-c}} \right) \right| \sqrt{1 + c \operatorname{tgh}^2 \left(\pm \sqrt{-c} \frac{\operatorname{arctgh} \left(\frac{1}{\sqrt{-c}} \right)}{\sqrt{-c}} \right)} = 0. \end{aligned}$$

Donde conclui-se que

$$\lim_{s \rightarrow \pm M} |z'(s)| = 1, \quad \lim_{s \rightarrow \pm M} |y'(s)| = 0,$$

e portanto a curva geratriz α é vertical nos pontos $y = a$ e $y = b$. ■

Neste próximo teorema classificamos as superfícies T_1 -invariantes no Sol com curvatura Gaussiana extrínseca constante K_{ext} .

Teorema 3.4. *Seja S uma superfície T_1 -invariante no Sol com curvatura Gaussiana extrínseca constante, $K_{\text{ext}} = c$. Então, módulo constantes de integração, temos a seguinte classificação, de acordo com a constante c .*

1. Se $c = 0$, a superfície é uma folha de \mathcal{F}_2 ou a curva geratriz α de S é

$$\alpha(s) = (0, \operatorname{tgh}(s), -\log(\cosh(s))).$$

2. Se $c = -1$, a superfície é uma folha de \mathcal{F}_3 ou a curva geratriz α de S é

$$\alpha(s) = \left(0, -\frac{\sqrt{s^2 - 1}}{s} + \log \left(s + \sqrt{s^2 - 1} \right), -\log(|s|) \right), \text{ com } |s| > 0.$$

3. Se $c \in (-1, 0)$, então α é gráfico de uma função do tipo $z(y) = \log(y)$, ou $z(y)$ está definido num intervalo limitado $(-M, M) \subset \mathbb{R}$ e é assintóticas as retas verticais $y = \pm M$, ou $z(y)$ está definido num intervalo limitado (m, M) , sendo assintótico a reta vertical $y = m$.
4. Se $c > 0$ ou $c < -1$, então $z(y)$ está definida num intervalo limitado $I = (a, b)$ com um único máximo ou mínimo, é limitada e é vertical nos extremos de I .

Demonstração: Como $K_{\text{ext}} = -\cos\theta(\theta' + \cos\theta)$, temos

$$\cos\theta(\theta' + \cos\theta) = -c \quad (3.15)$$

que podemos escrever como

$$(\sin\theta)' + 1 - \sin^2\theta + c = 0. \quad (3.16)$$

De modo análogo ao Teorema 3.3, fazendo $p = \sin\theta$, podemos reescrever a equação (3.16) como

$$p' - p^2 + c + 1 = 0. \quad (3.17)$$

Se $p^2 - c - 1 \neq 0$, então a equação (3.17) pode ser reescrita como

$$\frac{p'}{p^2 - c - 1} = 1, \quad (3.18)$$

e pode ser integrada. Agora, se $p^2 - c - 1 = 0$, ou seja, se $\sin^2\theta - c - 1 = 0$, então $c \in [-1, 0]$ e neste caso o raciocínio é semelhante ao Teorema 3.3. Então, de (2.18) e (2.19), respectivamente, temos que $K(\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2) = -1 - 2c$ e $K_{\text{int}} = -(\sin\theta)' - 1 - c$. Mas, este problema foi estudado no Teorema 3.3 (ver os três primeiros casos quando $\sin\theta$ é constante) donde $K_{\text{int}} = -1 - c$. Mais precisamente, se $c = 0$ S é uma folha de \mathcal{F}_2 , se $c = -1$ S é uma folha de \mathcal{F}_3 e finalmente se $c \in (-1, 0)$ a superfície S é gerada pelo gráfico da função $z(y) = \log(y)$ a menos de uma translação.

Os outros casos são:

Caso 1: $c = 0$.

De (3.18) temos que

$$\frac{p'}{p^2 - 1} = 1, \quad \text{com } p^2 < 1. \quad (3.19)$$

Donde, integrando (3.19) obtemos

$$- \operatorname{arctgh}(p) = s + \lambda,$$

onde λ é uma constante, ou seja,

$$\operatorname{sen}\theta = - \operatorname{tgh}(s + \lambda).$$

Sem perda de generalidade, consideremos $\lambda = 0$. Assim, $\operatorname{sen}\theta = - \operatorname{tgh}(s)$ e por integração de (2.21), obtemos

$$z(s) = - \log(\cosh(s)).$$

Além disso, obtem-se

$$\cos\theta = \pm \sqrt{1 - (-\operatorname{tgh}(s))^2} = \pm \operatorname{sech}(s).$$

Assim, segue de (2.20) que

$$\begin{aligned} y'(s) &= e^{-\log(\cosh(s))} (\pm \operatorname{sech}(s)) \\ &= \pm \frac{1}{\cosh(s)} \operatorname{sech}(s) \\ &= \pm \operatorname{sech}^2(s), \end{aligned}$$

ou seja, $y(s) = \pm \int \operatorname{sech}^2(s) ds = \pm \operatorname{tgh}(s)$. Deste modo, a curva geratriz α de S é dada por

$$\alpha(s) = (0, \pm \operatorname{tgh}(s), - \log(\cosh(s))).$$

Caso 2: $c = -1$.

De (3.18) segue que

$$\frac{p'}{p^2} = 1, \quad \text{com } p^2 \neq 0. \quad (3.20)$$

Integrando (3.20) obtemos $p = -\frac{1}{s}$, ou seja, $\sin\theta = -\frac{1}{s}$ (com $|s| \geq 1$). Além disso, por integração de (2.21), obtem-se

$$z(s) = -\log(|s|).$$

Por outro lado, $\cos\theta = \frac{\sqrt{s^2 - 1}}{|s|}$. Donde, de (2.20) obtemos que

$$y'(s) = \frac{\sqrt{s^2 - 1}}{|s|} e^{-\log(|s|)},$$

isto é,

$$y'(s) = \frac{\sqrt{s^2 - 1}}{s^2}.$$

Daí,

$$y(s) = \int \frac{\sqrt{s^2 - 1}}{s^2} ds.$$

Definindo $s = \sec\beta$, temos $ds = \sec\beta \operatorname{tg}\beta d\beta$ e $\sqrt{s^2 - 1} = \operatorname{tg}\beta$. Realizando esta mudança de variáveis nas parcelas da integral acima, obtemos

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{\operatorname{tg}^2\beta}{\sec\beta} d\beta = \int \frac{\sec^2\beta - 1}{\sec\beta} d\beta & (3.21) \\ &= \int \sec\beta d\beta - \int \cos\beta d\beta \\ &= -\sin\beta + \log(\sec\beta + \operatorname{tg}\beta). \end{aligned}$$

Agora, fazendo as devidas mudanças de variáveis na equação (3.22), obtemos

$$y(s) = -\frac{\sqrt{s^2 - 1}}{s} + \log\left(s + \sqrt{s^2 - 1}\right).$$

Logo, a curva geratriz α de S é dada por

$$\alpha(s) = \left(0, -\frac{\sqrt{s^2 - 1}}{s} + \log\left(s + \sqrt{s^2 - 1}\right), -\log(|s|)\right).$$

Caso 3: $c \in (-1, 0)$.

Analisemos:

a) $\sin^2\theta - c - 1 < 0$. Neste caso podemos reescrever a equação (3.18), como

$$\frac{p'}{p^2 - (\sqrt{c+1})^2} = 1, \quad \text{com } p^2 < (\sqrt{c+1})^2. \quad (3.22)$$

Integrando (3.22), obtemos

$$-\frac{\operatorname{arctgh}\left(\frac{p}{\sqrt{c+1}}\right)}{\sqrt{c+1}} = s + \lambda,$$

onde λ é uma constante. Sem perda de generalidade, consideremos $\lambda = 0$. Então,

$$p = -\sqrt{c+1} \operatorname{tgh}(\sqrt{c+1}s),$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{c+1} \operatorname{tgh}(\sqrt{c+1}s).$$

Por integração de (2.21), obtém-se

$$z(s) = -\log(\cosh(\sqrt{c+1}s)).$$

Notemos que z está definida em todo \mathbb{R} . Por outro lado,

$$z''(s) = -(c+1) \operatorname{sech}^2(\sqrt{c+1}s) < 0.$$

Então, a função $z = z(s)$ admite um máximo em $s = 0$. Finalmente, de (2.20) temos que

$$|y(\infty)| = |y(0)| + \int_0^\infty |y'(t)| dt \leq |y(0)| + \int_0^\infty 2e^{-\sqrt{(c+1)t}} dt < \infty.$$

Isto mostra que a função $y(s)$ toma valores em algum intervalo limitado $(-M, M)$.

Então, a curva geratriz $z = z(y)$ está definida neste intervalo. Observemos que $|z(\pm\infty)| = \infty$ e $y(\pm\infty) = \pm M$ e, portanto o gráfico de α é assintótico as retas verticais $y = \pm M$.

b) $\operatorname{sen}^2\theta - c - 1 > 0$.

Já neste caso podemos reescrever a equação (3.18), como

$$\frac{p'}{p^2 - (\sqrt{c+1})^2} = 1, \quad \text{com } p^2 > (\sqrt{c+1})^2. \quad (3.23)$$

Donde, integrando (3.23) obtemos

$$-\frac{\operatorname{arccotgh}\left(\frac{p}{\sqrt{c+1}}\right)}{\sqrt{c+1}} = s + \lambda,$$

onde λ é uma constante. Daí,

$$p = -\sqrt{c+1} \operatorname{cotgh}(\sqrt{c+1}(s+\lambda)),$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{c+1} \operatorname{cotgh}(\sqrt{c+1}(s+\lambda)).$$

Dado que $\operatorname{sen}^2\theta - c - 1 > 0$, temos de modo análogo ao teorema 3.3, as seguintes situações

$$0 < \sqrt{c+1} < \operatorname{sen}\theta < 1 \quad \text{ou} \quad -1 < \operatorname{sen}\theta < -\sqrt{c+1} < 0.$$

Na primeira situação, temos que s pertence a um intervalo da forma $(-\infty, M)$, enquanto que na segunda s pertence a $(M, +\infty)$. Agora, integrando (2.21) obtém-se

$$z(s) = -\log(|\operatorname{senh}(-\sqrt{c+1}(s+\lambda))|).$$

Assim, a função $z = z(s)$ é monótona em s e está definida em algum intervalo do tipo $(-\infty, M)$ ou (M, ∞) , onde $1 = (c+1) \operatorname{cotgh}^2(\sqrt{c+1}M)$. Por outro lado, de (2.20) temos que

$$|y'(s)| = \frac{1}{\operatorname{senh}(\sqrt{c+1}(s+\lambda))} \sqrt{1 - (c+1) \operatorname{cotgh}^2(\sqrt{c+1}(s+\lambda))},$$

donde verifica-se que $y'(M)$ é limitado e

$$|y(-\infty)| < |y(0)| + \int_{-\infty}^0 |y'(s)| ds \leq |y(0)| + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\operatorname{senh}(-\sqrt{c+1}(s+\lambda))} < \infty.$$

Isto mostra que os valores de y pertencem a um intervalo do tipo (m, M) . É fácil ver que a reta vertical $y = m$ é uma assíntota de α .

Caso 4: $c > 0$.

Neste caso, temos $p^2 - c - 1 < 0$. Logo, podemos reescrever (3.18) assim

$$\frac{p'}{p^2 - (\sqrt{c+1})^2} = 1, \quad \text{com } p^2 < (\sqrt{c+1})^2. \quad (3.24)$$

Daí, integrando (3.24) obtemos

$$-\frac{\operatorname{arctgh}\left(\frac{p}{\sqrt{c+1}}\right)}{\sqrt{c+1}} = s + \lambda,$$

onde λ é uma constante. Sem perda de generalidade, consideremos $\lambda = 0$. Desse modo, temos que

$$\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{c+1} \operatorname{tgh}(\sqrt{c+1}s) \quad (3.25)$$

que por integração de (2.21), obtemos

$$z(s) = -\log[\cosh(\sqrt{c+1}s)].$$

Note que, a partir da expressão do $\operatorname{sen}\theta$ e do fato que $\sqrt{c+1} > 1$, concluímos que a variável s não toma valores arbitrários. Mais precisamente, θ está definido sempre que $(c+1) \operatorname{tgh}^2(\sqrt{c+1}s) \leq 1$, ou seja, θ está definida em algum intervalo limitado $I = (-M, M)$, onde $1 = (c+1) \operatorname{tgh}^2(\sqrt{c+1}M)$. Além disso, z' se anula apenas em $s = 0$ e $z''(s) = -(c+1) \operatorname{sech}^2(\sqrt{c+1}s) < 0$, então a função $z = z(s)$ tem um único máximo neste ponto. Por outro lado, temos de (2.20) que

$$|y'(s)| = \left| \pm \frac{1}{\cosh(\sqrt{c+1}s)} \right| \sqrt{1 - (c+1) \operatorname{tgh}^2(\sqrt{c+1}s)} \leq 1,$$

donde y' só se anula em $\pm M$. Então, sendo y uma função contínua, definida num intervalo limitado $(-M, M)$ e com y' contínua e limitada, y toma valores em algum intervalo limitado (a, b) . Daí, a função $z = z(y)$ está definida em algum intervalo limitado (a, b) .

A partir de $z = z(y)$, temos que $z'(y) = \frac{z'(s)}{y'(s)}$. Como $z'(0) = 0$, então $y = 0$. De (2.22), temos que $z''(0) = -(c+1) < 0$ e, portanto $z = z(y)$ tem um único máximo em $y = 0$. Finalmente, notemos que $y'(\pm M) = 0$ e $z'(\pm M) = 1$, donde concluímos que a curva geratriz α é vertical nos pontos $y = a$ e $y = b$.

Caso 5: $c < -1$.

Finalmente, neste último caso temos $p^2 - c - 1 > 0$. Então, reescrevendo (3.18)

$$\frac{p'}{p^2 + (\sqrt{-c-1})^2} = 1. \quad (3.26)$$

Daí, integrando (3.26) obtemos

$$\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{p}{\sqrt{-c-1}}\right)}{\sqrt{-c-1}} = s + \lambda,$$

onde λ é uma constante. Sem perda de generalidade, consideremos $\lambda = 0$. Assim,

$$p = \sqrt{-c-1} \operatorname{tg}(\sqrt{-c-1}s),$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{-c-1} \operatorname{tg}(\sqrt{-c-1}s). \quad (3.27)$$

Por integração de (2.21), obtemos

$$z(s) = -\log(|\cos(\sqrt{-c-1}s)|).$$

Observe que $s \in [-M, M] + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, $M = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{-c-1}}\right)}{\sqrt{-c-1}}$. De fato, como $\operatorname{sen}\theta \in [-1, 1]$, segue de (3.27) que

$$-1 \leq \sqrt{-c-1} \operatorname{tg}(\sqrt{-c-1}s) \leq 1,$$

isto é,

$$k\pi - \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{-c-1}}\right)}{\sqrt{-c-1}} \leq s \leq \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{-c-1}}\right)}{\sqrt{-c-1}} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tomando $M = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{-c-1}}\right)}{\sqrt{-c-1}}$ chega-se ao resultado. Além disso, z' se anula nos pontos $s = \frac{k\pi}{\sqrt{-c-1}}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Sem perda de generalidade, podemos restringir o domínio de z ao intervalo limitado $(-M, M)$ e, neste caso z' se anula apenas em $s = 0$. Como $z''(s) > 0$, então a função $z = z(s)$ tem mínimo em $s = 0$. Por outro lado, de (2.20) temos que

$$|y'(s)| = \left| \pm \frac{1}{\cos(\sqrt{-c-1}s)} \right| \sqrt{1 - (-c-1) \operatorname{tg}^2(\sqrt{-c-1}s)} \leq 1.$$

Então, como y é uma função contínua definida num intervalo limitado $(-M, M)$ e com y' é contínua e limitada, então y toma valores em algum intervalo limitado (a, b) .

Daí, a função $z = z(y)$ está definida em algum intervalo limitado (a, b) com um único mínimo em $y = 0$. Finalmente, notemos que

$$\lim_{s \rightarrow \pm M} |z'(s)| = 1, \quad \lim_{s \rightarrow \pm M} |y'(s)| = 0,$$

donde concluimos que a curva geratriz α é vertical nos pontos $y = a$ e $y = b$. ■

Capítulo 4

Superfícies de Weingarten Linear

Neste capítulo, classificamos as superfícies de Weingarten Linear que são T_1 -invariantes no Sol .

Definição 4.1. *Uma superfície de Weingarten é uma superfície que satisfaz uma relação do tipo $W(k_1, k_2) = 0$, onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais da superfície e W é uma função suave.*

A equação $W(k_1, k_2) = 0$ nós dá uma relação do tipo $U(H, K_{\text{ext}}) = 0$. Dentre as possíveis escolhas de W e U o caso mais simples acontece quando elas são lineares nas variáveis k_1 e k_2 . Dizemos que S é uma superfície de Weingarten Linear se satisfazem uma das duas condições (não-equivalentes) abaixo:

$$ak_1 + bk_2 = c \tag{4.1}$$

$$aH + bK_{\text{ext}} = c, \tag{4.2}$$

onde a, b e c são constantes. Em particular, se $a = -b$ e $c = 0$ em (4.1) temos superfícies umbílicas, enquanto que se $a = b$ temos superfícies com curvatura média constante. Por outro lado se, em (4.2), $a = 0$ ou $b = 0$ então temos superfícies com curvatura Gaussiana extrínseca constante ou curvatura média constante, respectivamente. Assim, consideraremos a e b diferentes de zero.

Substituindo os valores de k_1 e k_2 dados em (2.15) na equação (4.1), podemos escrever esta equação em termos da função ângulo θ como

$$a\theta' + (a - b) \cos \theta = c. \quad (4.3)$$

Além disso, usando (2.12) e (2.13), a equação (4.2) pode ser reescrita como

$$(a - 2b \cos \theta)\theta' - 2b \cos^2 \theta = 2c. \quad (4.4)$$

Um estudo completo das soluções das equações (4.3) e (4.4), não é difícil, depende das constantes a , b e c . Neste capítulo a fim de simplificar ainda mais a demonstração do próximo teorema que diz respeito à classificação das superfícies de Weingarten Linear no Sol, vamos considerar a relação linear dada pela equação (4.1) com $c = 0$. Então, considerando $m = -\frac{b}{a}$ em (4.1), obtemos $k_1 = mk_2$ e, neste caso, temos o seguinte teorema de classificação:

Teorema 4.2. *Seja S uma superfície T_1 -invariante no Sol que satisfaz uma relação do tipo $k_1 = mk_2$. Então, S é uma folha de \mathcal{F}_2 ou temos a seguinte classificação de acordo com os valores do parâmetro m :*

1. *Se $m = 1$, então a superfície é umbílica.*
2. *Se $m = -1$, então a superfície é mínima.*
3. *Se $m > -1$ ou ($m < -2$), então a curva geratriz α é gráfico de uma função do tipo $z = z(y)$, com um único máximo $m > -1$ ou único mínimo ($m < -2$). Além disso, α é assintótica a duas retas verticais.*
4. *Se $m \in (-2, -1)$, então α é gráfico de $z = z(y)$ definida em todo \mathbb{R} com um único mínimo.*
5. *Se $m = -2$, então α é dada pelo gráfico da função $z(y) = \log(\cosh(y))$.*

Demonstração: Como $k_1 = \theta' + \cos \theta$ e $k_2 = -\cos \theta$, então

$$\theta' + (m + 1) \cos \theta = 0. \quad (4.5)$$

Note que, se $m = 1$, então $k_1 = k_2$ e portanto, a superfície é umbílica, e estas foram estudadas em ([17], Proposição 19). Por outro lado, se $m = -1$, então $k_1 = -k_2$, isto é, $H = 0$ e portanto, a superfície é mínima. Agora, se θ' se anula em algum ponto s_0 , então por (4.5), temos que $\cos\theta(s_0) = 0$. Donde, pela unicidade de soluções, $\theta(s) = \pm\frac{\pi}{2}$, isto é, θ é uma função constante. Logo, de (2.21) temos que $z'(s) = \pm 1$, isto é, $z(s) = \pm s$. Além disso, de (2.20) temos $y'(s) = 0$, ou seja, $y(s) = \lambda$, onde λ é uma constante. Assim, a curva geratriz α de S é dada por

$$\alpha(s) = (0, \lambda, \pm s), \quad s \in \mathbb{R},$$

que é um reta paralela ao eixo OZ , conseqüentemente a superfície S é uma folha de \mathcal{F}_2 , e pelo Teorema 3.3 é uma superfície mínima. Observe que, cada folha de \mathcal{F}_2 satisfaz a relação $k_1 = mk_2$ para qualquer m , já que $k_1 = k_2 = 0$ em S .

Caso contrário, se θ' nunca se anula, de (4.5), obtemos que

$$\theta(s) = -2 \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tgh} \left(\frac{m+1}{2} s \right) \right), \quad (4.6)$$

donde claramente $\theta(0) = 0$. Além disso, tomando o limite, obtemos

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \theta(s) = \mp \frac{\pi}{2}.$$

Como $y'(s) = e^z \cos\theta$, então $y' \neq 0$ e a curva geratriz α é gráfico de $z = z(y)$. Por outro lado, de (4.6), temos que

$$\operatorname{sen}\theta(s) = -\operatorname{tgh}((m+1)s) \quad e \quad \cos\theta(s) = \frac{1}{\cosh((m+1)s)}.$$

Como $z'(s) = \operatorname{sen}\theta(s)$, então

$$z(s) = -\frac{1}{m+1} \log(\cosh((m+1)s)) \quad (4.7)$$

e como $y'(s) = e^{z(s)} \cos\theta(s)$, então

$$\begin{aligned} y'(s) &= e^{-\frac{1}{m+1} \log(\cosh((m+1)s))} \frac{1}{\cosh((m+1)s)} \\ &= (\cosh((m+1)s))^{-\frac{m+2}{m+1}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Podemos distinguir os seguintes casos:

Caso 1. $\frac{m+2}{m+1} > 0$.

Neste caso, temos que $m > -1$ ou $m < -2$. Além disso,

$$y(\infty) - y(0) \leq \int_0^\infty |y'(s)| ds \leq \frac{1}{|m+1|} \int_0^\infty (e^{-t})^{\frac{m+2}{m+1}} dt < \infty.$$

O que mostra que a função y é limitada. Então, a função $z = z(y)$ está definida num intervalo limitado $I = (-M, M)$. Notemos que se $m > -1$, então $z(\pm\infty) = -\infty$ e se $m < -2$, então $z(\pm\infty) = \infty$. Portanto, a curva geratriz α é assintótica as retas verticais $y = \pm M$. Por outro lado,

$$z''(s) = -(m+1) \operatorname{sech}^2((m+1)s) = -(m+1) \frac{1}{\cosh^2((m+1)s)} = -(m+1) \cos^2 \theta$$

e, além disso, z' se anula apenas em $s = 0$. Como $\cos \theta \neq 0$, então a curva geratriz α ou a função $z = z(y)$ tem um único máximo absoluto se $m > -1$ ou um único mínimo absoluto se $m < -2$.

Caso 2. $m \in (-2, -1)$.

Notemos que z' se anula em $s = 0$ e, além disso,

$$z''(s) = -(m+1) \operatorname{sech}^2((m+1)s) > 0,$$

donde concluímos que $z = z(s)$ é uma função convexa e portanto, possui um único mínimo em $s = 0$. Por outro lado, sabemos que, $\cosh(x) \geq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, donde concluímos que

$$y'(s) = (\cosh((m+1)s))^{-\frac{m+2}{m+1}} \geq 1$$

e portanto, $y = y(s)$ assume valores em todo \mathbb{R} . Além disso, como, $y'(s) \neq 0$ para todo s , então a curva geratriz α é gráfico de uma função do tipo $z = z(y)$ definida para qualquer $y \in \mathbb{R}$.

Caso 3. $m = -2$.

Neste caso, de (4.7) temos que $z(s) = \log(\cosh(s))$. Além disso, de (4.8) temos que $y'(s) = 1$, isto é, $y(s) = s$. Assim, a curva geratriz α de S é dada pelo gráfico da função $z(y) = \log(\cosh(y))$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Caddeo, R., Piu, P., Ratto, A.: *Rotational surfaces in \mathbb{H}_3 with constant Gauss curvature*. Boll. U.M.I. Sez. (7) 10-B , 341-357 (1996).
- [2] Carmo, Manfredo P. do.: *Formas Diferenciáveis e Aplicações*. IMPA, Rio de Janeiro, 1971.
- [3] Carmo, Manfredo P. do.: *Notas de um Curso de Grupos de Lie*. IMPA, Rio de Janeiro, 1974.
- [4] Carmo, Manfredo P. do.: *Geometria Riemanniana*. IMPA, 1988.
- [5] Carmo, Manfredo P. do.: *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Textos Universitários. Rio de Janeiro. SBM, 2005.
- [6] Carmo, Manfredo P. do.: *Geometria Riemanniana*. Textos Universitários. Rio de Janeiro. SBM, 2008.
- [7] Daniel, B., Mira, P.: *Existence and uniqueness of constant mean curvature spheres in Sol_3* . Preprint, arXiv: 0812.3059v2.
- [8] Figueroa, C. B., Mercuri, F., Pedrosa, R. H. L.: *Invariant surfaces of the Heisenberg groups*. Ann. Mat. Pura Appl. 177, 173-194 (1999).
- [9] Inoguchi, J., *Flat translation invariant surfaces in the 3-dimensional Heisenberg group*. J. Geom. 82, 83-90 (2005).
- [10] Jost, Jürgen.: *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer, (1995).

- [11] Lima, E. L.: *Varietades Diferenciáveis*. IMPA, Rio de Janeiro, 1973.
- [12] López, R., Munteanu, M. I.: *Invariant surfaces in the homogeneous space Sol with constant curvature*. Nachrichten Math. (2011).
- [13] Montaldo, S., Onnis, I. I.: *Invariant surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* . Glasg. Math. J. 46, 311-321 (2004).
- [14] Montaldo, S., Onnis, I. I.: *Invariant surfaces in a three-manifold with constant Gaussian curvature*. J. Geom. Phys. 55, 440-449 (2005).
- [15] Onnis, I. I.: *Invariant surfaces with constant mean curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* . Ann. Mat. Pura Appl. 18, 667-682 (2008).
- [16] Sá Earp, R., Toubiana, E.: *Screw motion surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$* . Illinois J. Math. 49, 1323-1362 (2005).
- [17] Souam, R., Toubiana, E.: *Totally umbilic surfaces in homogeneous 3-manifold*. Comm. Math. Helv. 84, 673-704 (2009).
- [18] Spivak, M.: *A comprehensive introduction to Differential Geometry*. Boston: Publish or Perish, (2005).
- [19] Thurston, W.: *Three-dimensional geometry and topology*. Princeton Math. Ser. 35, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, (1997).
- [20] Tomter, P.: *Constant mean curvature surfaces in the Heisenberg group*. Illinois J. Math. 35, 47-55 (1991).