

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Controle Hierárquico para a Equação do Calor via Estratégia Stackelberg-Nash

Islanita Cecília Alcantara de Albuquerque

2011

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Controle Hierárquico para a Equação do Calor via Estratégia Stackelberg-Nash

por

Islanita Cecília Alcantara de Albuquerque

sob orientação do

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna

Setembro de 2011

João Pessoa-PB

A345c Albuquerque, Islanita Cecília Alcantara de.

Controle hierárquico para a equação do calor via estratégia Stackelberg-Nash/ Islanita Cecília Alcantara de Albuquerque.- João Pessoa, 2011.

63 f.

Orientador: Fágner Dias Araruna.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Controle Hierárquico. 3. Líder
4. Seguidores. 5. Estratégia de Stackelberg-Nash. 6. Sistema de Otimalidade. 7. Controlabilidade Aproximada

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Controle Hierárquico da Equação do Calor via Estratégia
Stackelberg-Nash

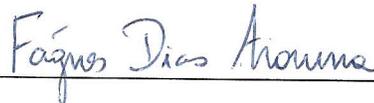
por

Islanita Cecília Alcantara de Albuquerque

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da
Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração :Análise

Aprovada por:



Prof. Dr. Fagner Dias Araruna - UFPB (Orientador)



Prof. Dr. Luís Adauto da Justa Medeiros - UFRJ



Prof. Dr. Aldo Trajano Louredo - UEPB

À minha querida mãezinha
que renunciou a sua vida
para que eu pudesse chegar
até aqui.

Agradecimentos

Ao querido Deus por ter colocado em minha vida três anjinhos encarnados, dispostos a sempre cuidar de mim sem nada pedir em troca: Nadjane, Severino Carlos e Ignaldo, e aos mesmos por terem aceitado essa missão.

Ao Professor Doutor Fágner Dias Araruna pela dedicação em orientar-me, com repleta paciência, proporcionando-me momentos felizes em estudar o tema desta dissertação, além de direcionar meus primeiros passos na vida acadêmica, mostrando-me um lindo mundo na matemática.

Ao Professor Doutor Milton Lacerda pela colaboração frequente neste trabalho, desde da disciplina Análise no \mathbb{R}^n , no início do mestrado, com o repasse dos conceitos básicos.

Aos Professores Luiz Adauto da Justa Medeiros, Aldo Trajano Louredo, Miguel Loayza e Flank David Morais Bezerra pela participação na banca examinadora.

Ao Professor Fernando por sempre desfilar com a camisa do Sport Clube do Recife pelos corredores da Universidade.

Aos queridos amigos de Recife que gentilmente perdoaram minha ausência durante estes dois anos com muitas palavras de incentivo e alegria ao me ver.

Aos Professores da Universidade Federal Rural de Pernambuco que acreditaram em mim, deram-me a formação básica e muito incentivo para esta conquista, em especial: Maria Eulália, Márcia Pragana, Maité, Adriano Regis e Silvana Bocanegra.

Com a frase "Meus discípulos serão conhecidos por muito se amarem" (Jesus Cristo) agradeço aos queridos irmãos da ASSESESK pelo apoio espiritual, a atenção e muitos sorrisos destinados a mim.

À minha querida vózinha pelo apoio, mesmo sem entender muito bem a conquista que estaria sendo realizada.

Aos companheiros do mestrado que tornaram-se amigos, sem os quais seria muito mais difícil suportar a saudade de casa. A Priscilla pelo apoio em Análise Funcional e pelos deliciosos almoços de domingo, Ivaldo por sempre estudar comigo, a Marco pelos

momentos de diversão e apoio, a Claudemir (Pescoçinho) pelos momentos de distração nas disciplinas, assim como pelos momentos de desenvolvimento deste trabalho, a David (Boy) pelas especulações e por sempre acreditar que eu seria capaz, Taty por sempre me receber em sua casa, Rodrigo pelas teorias inventadas que me fizeram dar boas gargalhadas, Eberson pela paciência e longas conversas.

Às minhas vizinhas, que me recebiam com muita alegria.

Aos meus amigos Flávia, João e Cássia que se fizeram presentes mesmo que em pensamentos, principalmente pelas brigas quando não mandava notícias.

Enfim, agradeço a todos que passaram pela minha vida durante estes dois anos.

Resumo

Temos como principal tema neste trabalho o Controle Hierárquico, que consiste em um sistema de líder e seguidores. Estudamos em especial a controlabilidade aproximada da equação do Calor sob a estratégia de Stackelberg-Nash, estratégia esta direcionada em controlar todo sistema a partir de escolhas de controles locais com o mínimo de custos possíveis.

Palavras-Chaves: Controle Hierárquico, Líder, Seguidores, Estratégia de Stackelberg-Nash, Sistema de Otimalidade, Controlabilidade Aproximada.

Abstract

We have as main issue in this work the Hierarchical Control, which consists in a leader-followers system. We studied in special the heat equation approximate controllability under Stackelberg-Nash's strategy, which is directed in controlling every system from local controls choices with the minimum possible costs.

Key words: Approximate Controllability, Leader, Followers, Stackelberg-Nash's strategy, Optimality System, Approximate Controllability.

Notações e Simbologia

(\cdot, \cdot) denota o produto interno em $L^2(\Omega)$.

$|\cdot|$ representa a norma em $L^2(\Omega)$.

$((\cdot, \cdot))$ denota o produto interno em $H_0^1(\Omega)$.

$\|\cdot\|$ representa a norma em $H_0^1(\Omega)$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa diferentes pares de dualidade

$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ denota o operador Laplaciano.

$' = \frac{d}{dt}$

\hookrightarrow denota imersão contínua.

$\mathcal{L}(X, Y)$ designa o espaço dos operadores lineares e contínuos de X em Y .

C é uma constante positiva e arbitrária.

\rightarrow denota convergência forte.

\rightharpoonup representa convergência fraca.

$\overset{*}{\rightharpoonup}$ denota convergência fraca-estrela.

q.s. - significa quase sempre.

Sumário

Introdução	1
1 Resultados preliminares	6
1.1 Espaços funcionais	6
1.2 Espaços de Sobolev	9
1.3 Principais resultados	11
2 Existência e unicidade de solução	17
2.1 Solução fraca para a equação do calor	18
3 Equilíbrio de Nash	25
3.1 Existência e unicidade do equilíbrio de Nash	25
3.2 Otimalidade dos seguidores	30
4 Controlabilidade aproximada e otimalidade do líder	35
4.1 Controlabilidade aproximada	36
4.2 Otimalidade para o líder	39

Introdução

Desde o início dos tempos, a humanidade se organiza de maneira a desempenhar tarefas que tanto contribuem para suas respectivas evoluções. O ato de controlar, fiscalizar, orientar, dirigir qualquer projeto, ter sob o seu domínio, agir com a finalidade de garantir que o sistema se comporte como desejado é uma tendência natural do ser humano diante de suas vidas ou diante do papel que ele desempenha enquanto ser social. Porém, quando tomamos proporções maiores, faz-se necessária uma organização maior, então de maneira ainda natural, buscam-se categorias de acordo com os perfis e necessidades estabelecidas pela situação na qual se vive. A estas organizações, categorias, ordenação ou subordinação de poderes chamamos de hierarquia.

Obviamente que os seres humanos não são os únicos exemplos de busca de uma hierarquia de controles, podemos observar que na natureza este tipo de busca também acontece, como exemplo, podemos citar o equilíbrio da cadeia alimentar que obedece a um sistema de hierarquia de maneira muito natural.

Diante deste cenário, várias teorias foram desenvolvidas, uma delas foi introduzida por Von Stackelberg em 1934 para problemas decorrentes em Economia, e vem sendo bastante utilizado em problemas de sistemas distribuídos, que envolvem equações diferenciais parciais. Tal teoria consiste na existência de dois controles: um global que é chamado de líder e o(s) outro(s) local(ais), chamado de seguidor(es).

Um sistema de líder e seguidores desenvolve um papel de muita importância para o mundo prático, assim como na Economia, no Meio Ambiente e nas Engenharias.

A estratégia de Stackelberg, assim conhecida, é definida do seguinte modo: deseje-se controlar um sistema, então o líder faz uma escolha prévia, à sua maneira, com o

objetivo de chegar o mais próximo possível de um estado desejado que se considera para tal situação, dessa forma os seguidores montam suas respectivas e independentes estratégias para "executar" esta "ordem". De um ponto de vista prático, essa forma de execução de tarefas pode ter um custo muito alto, impedindo até mesmo que o processo seja realizado, dessa forma, exigimos apenas que os mesmos trabalhem muito perto de suas localizações com o mínimo de custo. Podemos pensar como setores, cada seguidor trabalha para que seu setor, ao final de um tempo $T > 0$, pré definido pelo líder, esteja o mais próximo possível do estado que se deseja.

Esta maneira de pensar é muito inteligente, pensando em grandes sistemas de produção que estão mais ou menos nas mesmas condições de líderes e seguidores acima citadas, no momento da escolha que governará todo o sistema, o líder determina a execução de determinado seguidor sem levar em consideração (no caso humano, por exemplo) que as condições físicas, psíquicas, sociais influenciam diretamente nos resultados. A estratégia desenvolvida por Stackelberg não abre brechas para que (em casos humanos) tais condições sejam motivações de conflitos e frustrações de ambas as partes. Além da teoria apresentada, ainda se faz necessária uma minimização desses custos, que serão representados por funcionais. É onde entra o Equilíbrio de Nash, que busca a minimização dos custos entre os seguidores. Assim, os seguidores, assumindo que o líder tenha feito uma escolha à sua maneira, procuram por um equilíbrio de Nash para os seus funcionais custo, e então o líder faz uma escolha final para controlar todo o sistema. Esta é a estratégia de Stackelberg-Nash.

John Nash muito contribuiu para os problemas de Economia e teoria dos jogos (o que justifica a linguagem utilizada de líder e seguidores), onde ganhou muito reconhecimento pela eficácia de suas idéias apesar de ser uma pessoa introspectiva e de saúde frágil (sua história de vida deu origem ao filme Uma Mente Brilhante).

Assumimos que podemos atuar em um sistema parabólico de evolução, caracterizado por problemas de difusão, por uma hierarquia de controle, seguindo as idéias de Diaz-Lions [4]. Denotamos um controle global v , que chamamos de líder, e w_1, w_2 os controles locais que damos o nome de seguidores.

Em termos técnicos, consideramos um domínio Ω aberto e limitado de \mathbb{R} . Para $T > 0$, denotamos um cilindro Q , como sendo $Q = \Omega \times (0, T)$ com fronteira regular e fronteira lateral definida por $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$.

O líder v é distribuído ao longo de \mathcal{O} , um subconjunto não vazio do domínio Ω , e os seguidores w_1, w_2 são distribuídos ao longo de \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 , que por sua vez são subconjuntos disjuntos não vazios de \mathcal{O} , o que justifica a não dependência entre si comentada na introdução.

É comum considerar em alguns problemas que os subconjuntos, nos quais os seguidores são distribuídos, são disjuntos por uma questão de simplicidade, embora isto não seja necessário para um problema matemático. Também, por uma questão de simplicidade, vamos considerar o sistema com apenas dois seguidores, porém a mesma técnica é abordada em sistemas com mais de dois seguidores, como é feito em [4], [10], [9] e [14].

A nossa motivação será um exemplo de meio ambiente. Vamos considerar um lago representado pelo domínio Ω de \mathbb{R}^3 . Este lago possui estados que serão representados por uma função numérica \mathbf{y} que depende de $x \in \Omega$ e $t \in (0, T)$. Nosso objetivo é fazer com que o lago seja o mais limpo possível, este será o estado ideal \mathbf{y}^T determinado pelo líder como escolha prévia. Obviamente que no estado inicial, quando $t = 0$, o lago possui agentes locais, plantas locais, concentrações químicas, organismos vivos dentre outros fatores naturais que não necessariamente contribuem para o estado desejado e, como consequência, os seguidores trabalharão para que as condições já existentes se adequem a chegar no objetivo até um tempo T , designado pelo líder.

A função \mathbf{y} corresponde, portanto, às várias concentrações químicas do lago ou organismos vivos, que são dados por um conjunto de equações. As plantas locais ou agentes locais serão chamados de P_1 e P_2 que, por sua vez, com algumas restrições, podem decidir, a seu modo, a sua estratégia w_i . Existe também um gerente geral, que faz uma escolha a sua política, denotado por v .

Desse modo, a equação de estado é dada por

$$\mathbf{y}_t - \Delta \mathbf{y} = \text{fontes} + \text{esgotos} + \text{controle global } v + \text{controles locais } \mathbf{w} = \{w_1, w_2\}, \quad (1)$$

onde o estado inicial é dado por

$$y(x, 0) = y_0, \quad (2)$$

e as condições de fronteira são escolhidas apropriadamente.

Notemos que cada planta P_i ($i = 1, 2$) possui o objetivo de manter o lago o mais limpo possível, porém as mesmas de maneira particular, cuidarão para chegar ao estado ideal muito perto de suas respectivas localizações, assim é plausível considerarmos uma função dada em $\bar{\Omega}$ de modo que

$$\begin{cases} \rho_i(x) \geq 0, \\ \rho_i = 1, \text{ próximo ao local de } P_i, i = 1, 2. \end{cases} \quad (3)$$

Então P_i tentará escolher w_i , de modo que no tempo $T > 0$, $y(x, T)$ esteja o mais próximo de $\rho_i y^T$ alcançando um custo mínimo.

Nesta dissertação estamos interessados em estudar, sob um ponto de vista matemático, o comportamento de equações que descrevem algumas das situações citadas, sendo todo esse estudo baseado em Diaz-Lions [4].

Passemos agora a descrever o conteúdo desta dissertação. No Capítulo 1 colocamos alguns resultados que precisamos ao longo de todo o trabalho.

No Capítulo 2 fazemos a formulação do nosso problema direcionando para as equações que devem ser estudadas com mais atenção, definimos os funcionais custo e os espaços nos quais os controles se encontram. Mostramos a existência e unicidade de solução para equação (1) com condições iniciais e de fronteira definidas.

Mostramos, no Capítulo 3, a existência e unicidade do Equilíbrio de Nash para os seguidores (assumindo que o líder é fixo), fazemos a caracterização do seu estado adjunto e concluimos que chegamos a otimalidade para os seguidores, que se $\mathbf{w} = \{w_1, w_2\}$ satisfaz a condição do Equilíbrio de Nash.

No Capítulo 4 mostramos que o controle atua em todo o domínio por meio da controlabilidade aproximada, isto é, $y(x, T, w_1, w_2)$ descreve um subconjunto denso no

espaço no qual os dados (inicial e final) pertencem, utilizando argumento de análise funcional e resultados de continuação única. Por fim, analisamos a otimalidade para o líder, que nada mais é do que uma garantia que o sistema está sendo governado pelo "melhor líder". Para isto definimos um funcional em sua função que possibilita com ajuda de alguns resultados de teoria de dualidade a chegada da sua otimalidade.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Faremos neste capítulo algumas definições de conceitos básicos, resultados sobre teoria das distribuições e análise funcional que serão de fundamental importância para a continuidade deste trabalho.

1.1 Espaços funcionais

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e uma função contínua $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definimos por suporte de f , e denotamos por $\text{supp}(f)$, o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$. Assim, $\text{supp}(f)$ é um subconjunto fechado de Ω .

Uma n -upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é denominada um multi-índice e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Representa-se por D^α o operador derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, \dots, 0)$, define-se $D^0 u = u$, para toda função u .

Por $C_0^\infty(\Omega)$ denota-se o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis definidas e com suporte compacto em Ω .

Citemos um exemplo clássico de uma função de $C_0^\infty(\Omega)$.

Exemplo 1.1 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto tal que $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_{\mathbb{R}^n} < 1\} \subset \Omega$.

Consideremos $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}, & \text{se } \|x\|_{\mathbb{R}^n} < 1, \\ 0, & \text{se } \|x\|_{\mathbb{R}^n} \geq 1, \end{cases}$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $\|x\|_{\mathbb{R}^n} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma euclidiana de x . Temos que $f \in C^\infty(\Omega)$ e $\text{supp}(f) = \overline{B_1(0)}$ é compacto, isto é, $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.2 Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^n . Uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando as seguintes condições forem satisfeitas :

- (i) Existe um compacto K de Ω tal que $\text{supp}(\varphi) \subset K$ e $\text{supp}(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K , para todo multi-índice α .

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido da noção de convergência acima definida será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de Espaço das Funções Testes sobre Ω .

Observação 1.3 É possível munir $C_0^\infty(\Omega)$ com uma topologia de forma que a noção de convergência nessa topologia coincida com a dada pela definição acima.

Uma distribuição (escalar) sobre Ω é todo funcional contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Mais precisamente, uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$,
- (ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(T(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ em \mathbb{R} .

Denotaremos o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi \rangle$. $\mathcal{D}'(\Omega)$ é o conjunto de todas as distribuições sobre Ω , que por sua vez é um espaço vetorial com as operações usuais.

Os exemplos a seguir desempenham um papel fundamental na teoria de distribuições escalares.

Exemplo 1.4 Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. O funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx.$$

é uma distribuição sobre Ω univocamente determinada por u (ver [16]). Por esta razão, identifica-se u à distribuição T_u por ela definida e, desta maneira, $L^1_{loc}(\Omega)$ será identificado a uma parte própria de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo 1.5 Consideremos $0 \in \Omega$ e o funcional $\delta_0 : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

δ_0 é uma distribuição sobre Ω . Além disso, mostra-se que δ_0 não é definido por uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, não existe $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \int f \varphi$.

Definição 1.6 Diz-se que uma sequência $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sequência numérica $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ convergir para $\langle T, \varphi \rangle$ em \mathbb{R} , para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.7 Sejam T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada $D^\alpha T$ (no sentido das distribuições) de ordem $|\alpha|$ de T é o funcional definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Observação 1.1.0.1 Como consequência da definição acima temos que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens.

Observação 1.1.0.2 $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω , logo $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De fato, pois $D^\alpha T$ é linear. Para a continuidade, consideremos $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Daí, $|\langle D^\alpha T, \varphi_n \rangle - \langle D^\alpha T, \varphi \rangle| \leq |\langle T, D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi \rangle| \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Observação 1.1.0.3 A aplicação $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $T \mapsto D^\alpha T$ é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

1.2 Espaços de Sobolev

Falemos agora um pouco sobre os Espaços de Sobolev e algumas de suas propriedades básicas. Esses espaços são definidos sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e são subespaços de vários espaços $L^p(\Omega)$.

Dado um número inteiro $m > 0$, por $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, representa-se o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω , isto é, o espaço vetorial das (classes de) funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$.

Munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|, \text{ quando } p = \infty,$$

os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços de Banach (vide [17]).

Dado um espaço de Banach X , denotaremos por $C([0, T]; X)$ o espaço de Banach das funções u , definidas em $[0, T]$, com valores em X que são contínuas em $[0, T]$, cuja norma é definida por

$$\|u\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X.$$

Dado um espaço de Banach X , denotaremos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções u , definidas em $]0, T[$ com valores em X , que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue em $]0, T[$, com a norma

$$\|u(t)\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representa-se o espaço de Banach das classes de funções u , definidas em $]0, T[$ com valores em X , que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $(0, T)$, com a norma

$$\|u(t)\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in (0, T)} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

Observação 1.2.0.4 Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0, T; X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Se X é separável, então podemos identificar

$$[L^p(0, T; X)]' \approx L^q(0, T; X'),$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Quando $p = 1$, identificamos

$$[L^1(0, T; X)]' \approx L^\infty(0, T; X').$$

Essas identificações encontram-se detalhadamente em [15].

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em X é denominado de Espaços das Distribuições Vetoriais sobre $(0, T)$ com valores em X e denominado de $\mathcal{D}'(0, T; X)$.

Definição 1.8 Dada $S \in \mathcal{D}'(0, T; X)$, define-se a derivada de ordem n como sendo a distribuição vetorial sobre $]0, T[$ com valores em X dada por

$$\left\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Exemplo 1.9 Dados $u \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$ a aplicação $T_u : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$, definida por

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(t) \varphi(t) dt,$$

integral de Bochner em X , é linear e contínua no sentido da convergência de $\mathcal{D}(0, T)$, logo uma distribuição vetorial. A aplicação $u \rightarrow T_u$ é injetiva, de maneira que podemos identificar u com T_u e, neste sentido, temos $L^p(0, T; X) \subset \mathcal{D}'(0, T; X)$.

Para $1 \leq p \leq \infty$, consideremos o espaço

$$W^{m, p}(0, T; X) = \{u \in L^p(0, T; X); u^{(j)} \in L^p(0, T; X), j = 1, \dots, m\},$$

onde $u^{(j)}$ representa a j -ésima derivada de u no sentido das distribuições vetoriais. Com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\sum_{j=0}^m \|u^{(j)}(t)\|_{L^p(0,T;X)} \right), & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{t \in (0,T)} \left(\sum_{j=0}^m \|u^{(j)}(t)\|_X \right), & p = \infty, \end{cases}$$

$W^{m,p}(0,T;X)$ é um espaço de Banach.

O espaço

$$W_0^{m,p}(0,T;X) = \{u \in W^{m,p}(0,T;X); u(0) = u(T) = 0\}$$

representa o fecho de $\mathcal{D}(0,T;X)$ com a norma de $W^{m,p}(0,T;X)$.

Observação 1.10 Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,p}(0,T;X)$ será chamado por $H^m(0,T;X)$, que munido do produto interno

$$(u, v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^m (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(0,T;X)}$$

é um espaço de Hilbert. Chama-se por $H_0^m(0,T;X)$ o fecho, em $H^m(0,T;X)$ de $\mathcal{D}(0,T;X)$ e por $H^{-m}(0,T;X)$ o dual topológico de $H_0^m(0,T;X)$.

1.3 Principais resultados

Lema 1.11 (Gronwall) Sejam $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas não negativas e seja $\alpha \geq 0$.

Se

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s) \psi(s) ds$$

então

$$\varphi(t) \leq \alpha \exp\left(\int_a^t \psi(s) ds\right), \forall t \in [a, b].$$

Demonstração: Ver [6]. ■

Lema 1.12 (Desigualdade de Young) Sejam $p > 1, q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \forall a \geq 0, \forall b \geq 0.$$

Demonstração: Ver [2]. ■

Lema 1.13 (*Desigualdade de Hölder*) Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então $f, g \in L^1(\Omega)$ e

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Veja [2]. ■

Lema 1.14 (*Desigualdade de Poincaré*) Suponhamos que Ω é um aberto e limitado. Então, existe uma constante C (dependendo de Ω e de p) tal que:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad (1 \leq p < \infty).$$

Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_{L^p}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Demonstração: Ver [2]. ■

Lema 1.15 (*Imersão de Sobolev*) Seja Ω um aberto limitado do \mathbb{R}^n com fronteira Γ regular.

i) Se $n > 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in \left[1, \frac{2n}{n-2m}\right]$.

ii) Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty[$.

iii) Se $n = 1$ e $m \geq 1$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Ver [2]. ■

Teorema 1.16 (*Banach-Alaouglu-Bourbaki*): Seja E é um espaço de Banach e E' o seu dual topológico. O conjunto $B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ é compacto na topologia fraca $*$ $\sigma(E', E)$.

Demonstração: Ver [2]. ■

Lema 1.17 (Du Bois Raymond) Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in D(\Omega)$$

se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .

Demonstração: Ver [16]. ■

Teorema 1.18 Sejam X e Y espaços de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$ e $u \in L^p(0, T; X)$, $u' \in L^p(0, T; Y)$, $1 \leq p \leq \infty$, então $u \in C^0([0, T]; Y)$.

Demonstração: Ver [2]. ■

Teorema 1.19 Seja $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Sejam $u \in L^q(0, T; X') = E'$ e $v \in L^p(0, T; X) = E$, então $\langle u, v \rangle_{E', E} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_{X', X} dt$.

Demonstração: Ver [2]. ■

Teorema 1.20 (Gauss-Green) Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então $\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\Gamma} u v^i d\Gamma$; ($i = 1, \dots, n$).

Demonstração: Ver [2]. ■

Teorema 1.21 (Fórmulas de Green)

a) Se $\gamma \in H^2(\Omega)$, então $\int_{\Omega} \nabla \gamma \nabla u dx = - \int_{\Omega} \Delta \gamma u dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} u d\Gamma$, $\forall u \in H^1(\Omega)$.

b) Se $u, \gamma \in H^2(\Omega)$, então $\int_{\Omega} (\Delta \gamma u - \gamma \Delta u) dx = \int_{\partial \Omega} (\frac{\partial \gamma}{\partial \nu} u - \frac{\partial u}{\partial \nu} \gamma) d\Gamma$, $\forall u \in H^1(\Omega)$.

Demonstração: Ver [2]. ■

Teorema 1.22 (Representação de Riesz) Sejam $1 < p < \infty$ e $\varphi \in (L^p)'$. Então, existe um único $u \in L^q$, onde $p^{-1} + q^{-1} = 1$, tal que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f, \quad \forall f \in L^p.$$

Além disso, se verifica

$$\|u\|_{L^q} = \|u\|_{(L^p)'}$$

Demonstração: Ver [2]. ■

Teorema 1.23 (Regularidade) *Seja Ω um aberto limitado do \mathbb{R}^n com fronteira regular Γ de classe C^2 . Sejam também $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} u \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então, $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$, onde C é uma constante que só depende de Ω .

Demonstração: Ver [2]. ■

Definição 1.24 *Uma forma bilinear $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ é coerciva se existe $\alpha > 0$ tal que*

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2, \quad \forall u \in H$$

Teorema 1.25 (Lax-Milgran) *Seja $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então, para todo $f \in H'$ (espaço dual de H) existe $u \in H$ único tal que*

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica, então u se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \text{ e } \frac{1}{2}a(u, u) - \langle f, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle \right\}$$

Demonstração: Ver [2]. ■

Teorema 1.26 (Fenchel-Rockafellar) *Sejam X e Y espaços de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ funções semicontínuas inferiormente e convexas. Seja*

$$v = \inf_{x \in X} [f(x) + g(Ax)] \text{ e } v^* = \inf_{q \in Y^*} [f^*(-A^*q + g^*(q))],$$

onde f^ é a conjugada de f e é dada por $f^*(p) = \sup_{x \in X} [\langle p, x \rangle - f(x)]$. Se $0 \in \text{int}[A(D(f)) - D(g)]$, então:*

i) $v + v^* = 0$,

ii) Existe $q' \in Y^*$ tal que $f^*(-A^*q') + g^*(q') = v^*$.

Teorema 1.27 *Seja F uma função Gateaux-diferenciável tal que $F : A \subset V \rightarrow \mathbb{R}$, onde A é convexo. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

i) F é convexo sobre A ;

ii) $F(v) \geq F(u) - \langle F'(u), v - u \rangle, \forall u, v \in A$;

Analogamente, são equivalentes as seguintes afirmações:

iii) F é estritamente convexo sobre A ;

iv) $F(v) > F(u) - \langle F'(u), v - u \rangle, \forall u, v \in A$.

Demonstração: Ver [5]. ■

Teorema 1.28 *Admitamos que o funcional é convexo e Gateaux-diferenciável com derivada contínua F' . Então, se $u \in X$ as três seguintes condições são equivalentes:*

i) u é solução de $\inf_{u \in X} F(u)$

ii) $\langle F'(u), v - u \rangle \geq 0, \forall v \in X$

iii) $\langle F'(v), v - u \rangle \geq 0, \forall v \in X$.

Demonstração: Ver [5]. ■

Teorema 1.29 *Seja E um espaço reflexivo e $\varphi : E \rightarrow (-\infty, +\infty)$ é convexa, coerciva e semicontínua inferiormente, então φ possui um ponto de mínimo global. Se φ é estritamente convexa, então este ponto é único.*

Demonstração: Ver [5]. ■

Teorema 1.30 *Admitamos que $a \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$ e $b \in (L^\infty(\Omega \times (0, T)))^n$. Seja $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ tal que φ é a solução do sistema*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\varphi_t - \Delta\varphi + a\varphi - \operatorname{div}(b\varphi) = 0 \text{ em } Q, \\ \varphi = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^0 \text{ em } \Omega, \end{array} \right.$$

que satisfaça $\varphi = 0$ em $w \times (0, T)$. Então, necessariamente, $\varphi^0 \equiv 0$.

Demonstração: Ver [8].

■

Capítulo 2

Existência e unicidade de solução

Neste capítulo apresentamos a formulação do problema que será utilizada ao longo deste trabalho e encontramos a existência e unicidade de solução (fraca) para um sistema associado à equação do calor. A fim de não sermos repetitivos, consideremos sempre $i = 1, 2$.

Consideramos a equação do calor

$$y' - \Delta y = v\chi + w_1\chi_1 + w_2\chi_2 \quad \text{em } Q, \quad (2.1)$$

onde χ é a função característica de $\mathcal{O} \subset \Omega$, χ_i é a função característica de $\mathcal{O}_i \subset \Omega$, $v = (x, t)$ é o controle globalmente distribuído em \mathcal{O} , $w_i = (x, t)$ é o controle localmente distribuído em \mathcal{O}_i .

O estado inicial é dado por

$$y(\cdot, 0) = y^0(x) \quad \text{em } \Omega \quad (2.2)$$

e condição de fronteira é

$$y = 0 \quad \text{sobre } \Sigma. \quad (2.3)$$

Como já foi mencionado, os respectivos controles locais atuam próximos de suas localizações, fazendo-se necessária a introdução de funções $\rho_i \in L^\infty(\Omega)$, distribuída em $\mathcal{O}_i \subset \Omega$, como foi definida em (3).

Definamos o funcional custo J_i por

$$J_i(v, w_1, w_2) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} w_i^2 dx dt + \frac{\alpha_i}{2} \|\rho_i(y(\cdot, T; v, \mathbf{w}) - y^T)\|^2, \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{w} = \{w_1, w_2\}$, $\|\cdot\|$ representa a norma em $L^2(\Omega)$, α_i é uma constante positiva dada, $\|\rho_i(y(\cdot, T; v, \mathbf{w}) - y^T)\|$ é a medida da "distância localizada" entre o estado em que o lago se encontra no tempo T e o estado ideal y^T . Nosso objetivo é fazer com que essa medida seja bem pequena, pois isto indica que o sistema encontra-se muito próximo do desejado, através da controlabilidade aproximada.

Os controles locais w_1, w_2 , assumindo que o líder $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ tenha feito a sua escolha, tentarão encontrar um equilíbrio de Nash para seus funcionais J_1, J_2 de maneira a minimizar os seus custos, ou seja, eles procurarão encontrar $w_1 = w_1(v)$, $w_2 = w_2(v)$, de modo que

$$\begin{cases} J_1(v, w_1, w_2) \leq J_1(v, \hat{w}_1, w_2), \quad \forall \hat{w}_1 \in L^2(\mathcal{O}_1, (0, T)), \\ J_2(v, w_1, w_2) \leq J_2(v, w_1, \hat{w}_2), \quad \forall \hat{w}_2 \in L^2(\mathcal{O}_2, (0, T)). \end{cases} \quad (2.5)$$

Antes de estudarmos o problema de controle para o sistema (2.1) – (2.3), analisaremos, na próxima seção, a existência e unicidade para tal sistema.

2.1 Solução fraca para a equação do calor

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que o sistema (2.1) – (2.3) possui solução $y(\cdot, t; v, \mathbf{w})$, e esta é única.

Para simplificarmos a notação, façamos $f = v\chi + w_1(v)\chi_1 + w_2(v)\chi_2$, considerando o problema:

$$\begin{cases} y' - \Delta y = f & \text{em } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.6)$$

Deste modo, enunciemos o resultado que garante a existência e unicidade de solução fraca para o problema (2.6).

Teorema 2.1 *Dados $y^0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(Q)$ existe uma única y tal que*

1. $y \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$;
2. $\frac{d}{dt}(y(t), v) + ((y(t), v)) = (f, v)$, para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$;
3. $y(0) = y^0$.

Demonstração:

Existência. Vamos utilizar o método de Faedo-Galerkin. Este método consiste em três etapas:

- 1) Construção de soluções aproximadas em um espaço de dimensão finita;
- 2) Obtenção de estimativas a priori para as soluções aproximadas;
- 3) Passagem ao limite das soluções aproximadas.

Soluções aproximadas.

Sendo $H_0^1(\Omega)$ separável, existe uma base Hilbertiana $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de vetores de $H_0^1(\Omega)$. Seja $V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$ o conjunto gerado pelos m primeiros vetores dessa base. Queremos encontrar uma "solução aproximada" da forma

$$y_m(\cdot, t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j(x),$$

tal que os g_{jm} 's satisfaçam o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} (y'_m(t), v) + ((y^m(t), v)) = (f(t), v), \quad \forall v \in V_m, \\ y_m(0) = y_m^0 \rightarrow y^0 \text{ em } L^2(\Omega). \end{cases} \quad (2.7)$$

Notemos que a convergência (2.7)₂ faz sentido pela densidade de V_m em $L^2(\Omega)$. Para simplificar os cálculos, vamos considerar a base $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ortogonal em $H_0^1(\Omega)$ e ortonormal em $L^2(\Omega)$. Assim sendo, o sistema (2.7) reduz-se a

$$g'_{jm}(t) + \|w_j\| g_{jm}(t) = f_{jm}, \quad j = 1, \dots, m,$$

cujas soluções $g_j(t)$ obtemos explicitamente para $0 \leq t \leq T$.

De fato, seja

$$y' + xy = x_1 \quad (2.8)$$

onde $y = y(t)$, $x = x(t)$ e $x_1 = x_1(t)$. Analisemos os seguintes casos:

1) Para $x_1 = 0$, temos $y' + xy = 0$, donde $\frac{y'}{y} = -x$. Portanto

$$y = ce^{-\int_0^T x dt}.$$

2) Para $x_1 \neq 0$, temos $y' + xy = x_1$. Sabendo que $u = e^{-\int_0^T x dt}$ é solução particular (Caso 1), façamos a mudança de variável

$$y = uz, \tag{2.9}$$

onde z é escolhido de modo que y seja solução do Caso 2. Notemos que $y' = u'z + uz'$, sendo $u' + xu = 0$.

Substituindo (2.9) em (2.8), obtemos

$$u'z + uz' + xuz = x_1,$$

o que implica em

$$(u' + xu)z + uz' = x_1.$$

Portanto $uz' = x_1$ e $z = \int_0^T \frac{x_1}{u} dt + c$. Sendo $z = \frac{y}{u}$, segue que

$$y = u \left(\int_0^T \frac{x_1}{u} dt + c \right).$$

Estimativas.

Considerando $v = y_m(t) \in V_m$ em (2.7)₁ e integrando de 0 a t obtemos

$$\frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} |y_m(s)|^2 ds + \int_0^t \|y_m(s)\|^2 ds = \int_0^t (f(s), y_m(s)) ds,$$

o que nos dá

$$\frac{1}{2} |y_m(t)|^2 + \int_0^t \|y_m(s)\|^2 ds = \int_0^t (f(s), y_m(s)) ds + \frac{1}{2} |y_m^0|^2. \tag{2.10}$$

Por outro lado, notemos que utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwartz e Young, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t |(f(s), y_m(s))| ds &\leq \int_0^t |f(s)| \|y_m(s)\| ds \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^t |f(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t |y_m(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

Aplicando a última desigualdade em (2.10) segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |y_m(t)|^2 + \int_0^t \|y_m(s)\|^2 ds & \quad (2.11) \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^t |f(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t |y_m(s)|^2 ds + \frac{1}{2} |y_m^0|^2. \end{aligned}$$

Assim, como $y_m^0 \rightarrow y^0$ em $H_0^1(\Omega)$ e $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ obtemos de (2.11) que

$$\frac{1}{2} |y_m(t)|^2 + \int_0^t \|y_m(s)\|^2 ds \leq K + \frac{1}{2} \int_0^t |y_m(s)|^2 ds, \quad (2.12)$$

onde $K > 0$, independe de m . Aplicando o Lema de Gronwall em (2.12) temos

$$\frac{1}{2} |y_m(t)|^2 + \int_0^t \|y_m(s)\|^2 ds \leq C, \quad (2.13)$$

onde $C > 0$ independe de m . A estimativa pôde ser realizada pois a solução $y_m(t)$ existe em $[0, T]$, para $T > 0$.

Passagem ao Limite.

Segue de (2.13) que

$$(y_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (2.14)$$

e

$$(y_m) \text{ é limitada em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (2.15)$$

De (2.14), (2.15) e o Teorema de Banach-Alaouglu-Bourbaki, podemos deduzir que existe uma subsequência de (y_m) , ainda denotada do mesmo modo, tal que

$$y_m \overset{*}{\rightharpoonup} y \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (2.16)$$

e

$$y_m \rightharpoonup y \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (2.17)$$

Multipliquemos (2.7)₁ por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e integremos em $(0, T)$. Assim

$$\int_0^T \frac{d}{dt} (y_m(t), v) \theta(t) dt + \int_0^T ((y_m(t), v)) \theta(t) dt = \int_0^T (f(t), v) \theta(t) dt.$$

Integrando por partes, segue que

$$(y_m(t), v) \theta(t) \Big|_0^T - \int_0^T (y_m(t), v) \theta'(t) dt + \int_0^T ((y_m(t), v)) \theta(t) dt = \int_0^T (f(t), v) \theta(t) dt,$$

o que implica

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (y_m(t), v) \theta'(t) dt + \int_0^T ((y_m(t), v)) \theta(t) dt \\ & = \int_0^T (f(t), v) \theta(t) dt, \quad \forall v \in V_m. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Fazendo em (2.18) $m \rightarrow \infty$ e usando as convergências (2.16), (2.17) deduzimos que

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (y(t), v) \theta'(t) dt + \int_0^T ((y(t), v)) \theta(t) dt \\ & = \int_0^T (f(t), v) \theta(t) dt, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (2.19)$$

uma vez que V_m é denso em $H_0^1(\Omega)$. De (2.19) temos

$$- \langle (y(t), v), \theta'(t) \rangle_{\mathcal{D}'(0,T), \mathcal{D}(0,T)} + \langle ((y(t), v)), \theta(t) \rangle_{\mathcal{D}'(0,T), \mathcal{D}(0,T)} = \langle (f(t), v), \theta(t) \rangle_{\mathcal{D}'(0,T), \mathcal{D}(0,T)},$$

o que implica

$$\left\langle \frac{d}{dt} (y(t), v) + ((y(t), v)) - (f(t), v), \theta \right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T), \mathcal{D}(0,T)} = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} (y(t), v) + ((y(t), v)) = (f(t), v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (2.20)$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$.

Condições Iniciais.

Para as condições iniciais devemos encontrar o espaço ao qual y' pertence, para que possamos garantir que y está realmente definida em $t = 0$ (ver Teorema 1.18). De fato, mostraremos que $y' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Segue por (2.20) que, tomando em particular $v \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle y'(t), v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} - \langle \Delta y, v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle f(t), v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$, isto é,

$$\langle y'(t) - \Delta y - f(t), v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$.

Portanto

$$y' - \Delta y = f \quad \text{em } \mathcal{D}'(Q). \quad (2.21)$$

Como $-\Delta \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ e $y \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, temos que $-\Delta y \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Assim

$$y' = f + \Delta y \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) + L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (2.22)$$

Dessa forma, por (2.15), (2.22) e o Teorema 1.18, deduzimos que $y \in C^0([0, T]; H^{-1}(\Omega))$ e, portanto, faz sentido calcular y no ponto $t = 0$.

Notemos que de (2.17) temos

$$\langle y_m, w \rangle \rightarrow \langle y, w \rangle, \quad \forall w \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (2.23)$$

ou seja,

$$\int_0^T (y_m(t), w(t)) dt \rightarrow \int_0^T (y(t), w(t)) dt. \quad (2.24)$$

Em particular, a última convergência é válida para $w = v\theta$, onde $\theta \in C^1([0, T])$ e $v \in H_0^1(\Omega)$. Desta forma, podemos reescrever (2.24) da seguinte maneira:

$$\int_0^T (y_m(t), v)\theta(t) dt \rightarrow \int_0^T (y(t), v)\theta(t) dt, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \text{e } \theta \in C^1([0, T]).$$

com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Logo

$$\int_0^T \frac{d}{dt} (y_m(t), v)\theta(t) dt \rightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} (y(t), v)\theta(t) dt,$$

o que integrando por partes nos dá

$$-\int_0^T (y_m(t), v)\theta'(t) dt + (y_m(t), v)\theta(t)|_0^T \rightarrow -\int_0^T (y(t), v)\theta'(t) dt + (y(t), v)\theta(t)|_0^T,$$

ou seja,

$$-(y_m^0, v) - \int_0^T (y_m(t), v)\theta'(t) dt \rightarrow -(y(0), v) - \int_0^T (y(t), v)\theta'(t) dt. \quad (2.25)$$

Notemos que de (2.17) vale a seguinte convergência:

$$\int_0^T (y_m(t), v) \theta'(t) dt \rightarrow \int_0^T (y(t), v) \theta'(t) dt \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall \theta \in C^1([0, T]).$$

E mais, segue de (2.25) que

$$(y_m^0, v) \rightarrow (y(0), v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.26)$$

Por outro lado, temos que $y_m^0 \rightarrow y^0$ em $L^2(\Omega)$, o que implica

$$(y_m^0, v) \rightarrow (y^0, v), \quad \forall v \in L^2(\Omega) \quad (2.27)$$

(o que faz sentido, pois $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$).

De (2.26), (2.27) e a unicidade do limite, podemos concluir que

$$(y(0), v) = (y^0, v), \quad \forall v \in L^2(\Omega),$$

o que implica $y(0) = y^0$.

Unicidade.

Consideremos y e \hat{y} soluções do problema (2.1) – (2.3). Seja $w = y - \hat{y}$, então temos que $w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ e $w' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ e satisfaz o seguinte sistema:

$$\begin{cases} w' - \Delta w = 0 & \text{em } Q, \\ w(t) = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ w(0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.28)$$

Mostraremos que $w = 0$. De fato, notemos que

$$\langle w' - \Delta w, w \rangle_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)); L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} = 0,$$

o que implica

$$\int_0^t (w_t(s), w(s)) ds + \int_0^t ((w(s), w(s))) ds = 0.$$

Logo

$$\frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} |w(s)|^2 ds + \int_0^t \|w(s)\|^2 ds = 0,$$

ou seja,

$$|w(t)|^2 + \int_0^t \|w(s)\|^2 ds = 0.$$

Logo, $w = 0$ e $y = \hat{y}$. ■

Capítulo 3

Equilíbrio de Nash

Este capítulo é destinado ao estudo do equilíbrio de Nash que busca a minimização dos custos entre os seguidores. Tal estudo nos permite, a partir da existência e unicidade de seguidores que oferecem custo mínimo para um determinado subconjunto, que o controle global possa atuar (por meio da controlabilidade aproximada) em todo o domínio também com custo mínimo, como poderá ser visto no Teorema 4.2.

3.1 Existência e unicidade do equilíbrio de Nash

O objetivo desta seção é fixar condições para existência e unicidade do equilíbrio de Nash.

Vamos definir os espaços de Hilbert

$$\mathcal{H}_i = L^2(\mathcal{O}_i \times (0, T)) \quad (i = 1, 2), \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2, \quad (3.1)$$

e os operadores

$$L_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i; L^2(\Omega)), \quad L_i w_i = y_i(T) \quad (i = 1, 2), \quad (3.2)$$

onde y_i ($i = 1, 2$) é a solução do seguinte sistema:

$$\left| \begin{array}{l} y'_i - \Delta y_i = w_i \chi_i \quad \text{em } Q, \\ y_i = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ y_i(0) = 0 \quad \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Fixamos $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ e consideramos z a solução do sistema

$$\begin{cases} z' - \Delta z = v\chi & \text{em } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.4)$$

De (3.3) e (3.4) temos que $y_1 + y_2 + z$ é solução de (2.1)-(2.3) (com dado inicial $y_0 = 0$, isto é possível, já que o sistema trabalhado é linear). Assim, podemos escrever

$$y = y_1 + y_2 + z$$

e

$$y(T; v, w) = L_1 w_1 + L_2 w_2 + z^T. \quad (3.5)$$

Esta notação nos permite escrever os funcionais J_i , definidos em (2.4), sob a forma

$$J_i(v, w_1, w_2) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} w_i^2 dx dt + \frac{\alpha_i}{2} \|\rho_i(L_1 w_1 + L_2 w_2 + z^T - y^T)\|^2.$$

Escrevendo $y^T - z^T = \eta^T$ a equação acima torna-se

$$J_i(v, w_1, w_2) = \frac{1}{2} \|w_i\|_{\mathcal{H}_i}^2 + \frac{\alpha_i}{2} \|\rho_i(L_1 w_1 + L_2 w_2 - \eta^T)\|^2.$$

Se $\mathbf{w} = \{w_1, w_2\} \in \mathcal{H}$ é um equilíbrio de Nash para os funcionais J_i , então a equação de Euler-Lagrange é satisfeita, isto é,

$$(w_i, \widehat{w}_i)_{\mathcal{H}_i} + \alpha_i (\rho_i(L_1 w_1 + L_2 w_2 - \eta^T), \rho_i L_i \widehat{w}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \forall \widehat{w}_i \in \mathcal{H}_i, \quad (3.6)$$

que é equivalente a

$$(w_i, \widehat{w}_i)_{\mathcal{H}_i} + \alpha_i (\rho_i^2(y(\cdot, T; v, \mathbf{w}) - y^T), \widehat{y}_i(T)) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \forall \widehat{w}_i \in \mathcal{H}_i. \quad (3.7)$$

De fato, sendo o equilíbrio de Nash um ponto de mínimo do funcional J_i , segue que a derivada de Gateaux neste ponto é zero. Calculemos esta derivada.

Notemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \int_0^T \int_{O_i} [(w_i + \varepsilon \widehat{w}_i)^2 - w_i^2] dx dt \right] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \int_0^T \int_{O_i} (w_i^2 + 2w_i \varepsilon \widehat{w}_i + \varepsilon^2 \widehat{w}_i^2 - w_i^2) dx dt \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \int_0^T \int_{O_i} \varepsilon (2w_i \widehat{w}_i + \varepsilon \widehat{w}_i^2) dx dt \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \int_0^T \int_{O_i} (2w_i \widehat{w}_i + \varepsilon \widehat{w}_i^2) dx dt \right] \\
&= \int_0^T \int_{O_i} w_i \widehat{w}_i dx dt
\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\alpha_i}{2} \int_{\Omega} \rho_i^2 \{ [y(T) + \varepsilon \widehat{y}_i(T)] - y^T \}^2 dx - \frac{\alpha_i}{2} \int_{\Omega} \rho_i^2 [y(T) - y^T]^2 dx \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\alpha_i}{2} \int_{\Omega} \rho_i^2 \left\{ [y(T) - y^T]^2 + 2\varepsilon [y(T) - y^T] \widehat{y}_i(T) + \varepsilon^2 \widehat{y}_i^2(T) - [y(T) - y^T]^2 \right\} dx \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\alpha_i}{2} \int_{\Omega} \rho_i^2 \varepsilon \left\{ 2 [y(T) - y^T] \widehat{y}_i(T) + \varepsilon \widehat{y}_i^2(T) \right\} dx \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha_i}{2} \int_{\Omega} \rho_i^2 \left\{ 2 [y(T) - y^T] \widehat{y}_i(T) + \varepsilon \widehat{y}_i^2(T) \right\} dx \\
&= \alpha_i \int_{\Omega} \rho_i^2 [y(T) - y^T] \widehat{y}_i(T) dx,
\end{aligned}$$

onde \widehat{y}_i é solução de (3.3). Dessa forma pelo que foi dito anteriormente, temos (3.15).

Voltando a (3.6), temos que esta igualdade implica em

$$w_i + \alpha_i \rho_i^2 L_i^* (L_1 w_1 + L_2 w_2 - \eta^T) = 0,$$

onde $L_i^* \in \mathcal{L}(L^2(\Omega); \mathcal{H}_i)$ é o operador adjunto de L_i . Logo

$$w_i + \alpha_i L_i^* [\rho_i^2 (L_1 w_1 + L_2 w_2)] = \alpha_i L_i^* (\rho_i^2 \eta^T). \quad (3.8)$$

Assim,

$$L \in \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H}), \quad (Lw)_i = w_i + \alpha_i L_i^* \left[\rho_i^2 \left(\sum_{i=1}^2 L_i w_i \right) \right], \quad (i = 1, 2) \quad (3.9)$$

e ainda

$$L(w_1, w_2) = (\alpha_1 L_1^* (\rho_1^2 \eta^T), \alpha_2 L_2^* (\rho_2^2 \eta^T)). \quad (3.10)$$

Portanto, o equilíbrio de Nash é obtido por meio do seguinte resultado:

Proposição 3.1 *Admitimos $\alpha = \alpha_i$, para todo i , e que $\alpha \|\rho_i - \rho_j\|_{L^\infty(\Omega)} \|\rho_i\|_{L^\infty(\Omega)}$ é pequeno o suficiente, para qualquer $i, j = 1, 2$. Então, o operador L definido em (3.9) é invertível. Em particular, existe um único equilíbrio de Nash de (2.4).*

Demonstração: *Para provarmos o resultado utilizaremos o Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.25). Notemos que*

$$\begin{aligned} & (L(w_1, w_2), (w_1, w_2)) \\ &= ((w_1 + \alpha_1 L_1^* \rho_1^2 (L_1 w_1 + L_2 w_2), w_2 + \alpha_2 L_2^* \rho_2^2 (L_1 w_1 + L_2 w_2)), (w_1, w_2)) \quad (3.11) \\ &= \|w_1\|^2 + (\alpha_1 L_1^* \rho_1^2 (L_1 w_1 + L_2 w_2), w_1) + \|w_2\|^2 + (\alpha_2 L_2^* \rho_2^2 (L_1 w_1 + L_2 w_2), w_2). \end{aligned}$$

Analisemos o segundo termo da última igualdade. Vejamos que

$$\begin{aligned} (\alpha_1 L_1^* \rho_1^2 (L_1 w_1 + L_2 w_2), w_1) &= (\alpha_1 \rho_1^2 (L_1 w_1 + L_2 w_2), L_1 w_1) \\ &= (\alpha_1 \rho_1^2 L_1 w_1, L_1 w_1) + (\alpha_1 \rho_1^2 L_2 w_2, L_1 w_1) \quad (3.12) \\ &= \alpha_1 \|\rho_1 L_1 w_1\|^2 + \alpha_1 (\rho_1 L_1 w_1, \rho_1 L_2 w_2). \end{aligned}$$

De maneira inteiramente análoga, obtemos a seguinte identidade para o quarto termo de (3.11):

$$(\alpha_2 L_2^* \rho_2^2 (L_1 w_1 + L_2 w_2), w_2) = \alpha_2 \|\rho_2 L_2 w_2\|^2 + \alpha_2 (\rho_2 L_1 w_1, \rho_2 L_2 w_2). \quad (3.13)$$

Substituindo (3.12) e (3.13) em (3.11) segue que

$$\begin{aligned} (L(w_1, w_2), (w_1, w_2)) &= \|w_1\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|w_2\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \alpha (\|\rho_1 L_1 w_1\|^2 + \|\rho_2 L_2 w_2\|^2) \quad (3.14) \\ &\quad + \alpha (\rho_1 L_1 w_1, \rho_1 L_2 w_2) + \alpha (\rho_2 L_1 w_1, \rho_2 L_2 w_2). \end{aligned}$$

Observemos que

$$\|\rho_1 L_1 w_1 + \rho_2 L_2 w_2\|^2 = \|\rho_1 L_1 w_1\|^2 + 2(\rho_1 L_1 w_1, \rho_2 L_2 w_2) + \|\rho_2 L_2 w_2\|^2. \quad (3.15)$$

Substituindo (3.15) em (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} (L(w_1, w_2), (w_1, w_2)) &= \|w_1\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|w_2\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \alpha \|\rho_1 L_1 w_1 + \rho_2 L_2 w_2\|^2 \\ &\quad - 2\alpha (\rho_1 L_1 w_1, \rho_2 L_2 w_2) + \alpha (\rho_1 L_1 w_1, \rho_1 L_2 w_2) \\ &\quad + \alpha (\rho_2 L_1 w_1, \rho_2 L_2 w_2). \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} & -2\alpha(\rho_1 L_1 w_1, \rho_2 L_2 w_2) + \alpha(\rho_1 L_1 w_1, \rho_1 L_2 w_2) + \alpha(\rho_2 L_1 w_1, \rho_2 L_2 w_2) \\ & = \alpha(\rho_1 L_1 w_1, (\rho_1 - \rho_2) L_2 w_2) + \alpha(\rho_2 L_2 w_2, (\rho_2 - \rho_1) L_1 w_1). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} (L(w_1, w_2), (w_1, w_2)) & = \|w_1\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|w_2\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \alpha \|\rho_1 L_1 w_1 + \rho_2 L_2 w_2\|^2 \\ & + \alpha((\rho_1 - \rho_2) L_2 w_2, \rho_1 L_1 w_1) + \alpha((\rho_2 - \rho_1) L_1 w_1, \rho_2 L_2 w_2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young obtemos

$$\begin{aligned} \alpha |((\rho_2 - \rho_1) L_1 w_1, \rho_2 L_2 w_2)| & \leq \alpha \|\rho_2 - \rho_1\|_\infty \|\rho_2\|_\infty \|L_1 w_1\|_{\mathcal{H}_1} \|L_2 w_2\|_{\mathcal{H}_2} \\ & \leq \alpha \|\rho_2 - \rho_1\|_\infty \|\rho_2\|_\infty \|L_1\| \|w_1\|_{\mathcal{H}_1} \|L_2\| \|w_2\|_{\mathcal{H}_2} \\ & \leq C \|\rho_2 - \rho_1\|_\infty \|\rho_2\|_\infty (\|w_1\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|w_2\|_{\mathcal{H}_2}^2), \end{aligned}$$

onde $C = \frac{\alpha \|L_1\| \|L_2\|}{2}$.

Dessa forma

$$\alpha((\rho_2 - \rho_1) L_1 w_1, \rho_2 L_2 w_2) \geq -C \|\rho_2 - \rho_1\|_\infty \|\rho_2\|_\infty \|(w_1, w_2)\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.17)$$

Procedendo de maneira análoga, temos

$$\alpha((\rho_1 - \rho_2) L_2 w_2, \rho_1 L_1 w_1) \geq -C \|\rho_1 - \rho_2\|_\infty \|\rho_1\|_\infty \|(w_1, w_2)\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.18)$$

Combinando (3.16), (3.17) e (3.18), segue que

$$\begin{aligned} (L(w_1, w_2), (w_1, w_2)) & \geq \|w_1\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|w_2\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \alpha((\rho_1 - \rho_2) L_2 w_2, \rho_1 L_1 w_1) \\ & + \alpha((\rho_2 - \rho_1) L_1 w_1, \rho_2 L_2 w_2) \\ & \geq \|(w_1, w_2)\|_{\mathcal{H}}^2 - C \|\rho_2 - \rho_1\|_\infty \|\rho_2\|_\infty \|(w_1, w_2)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ & - C \|\rho_1 - \rho_2\|_\infty \|\rho_1\|_\infty \|(w_1, w_2)\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Daí

$$(L(w_1, w_2), (w_1, w_2)) \geq \gamma \|(w_1, w_2)\|_{\mathcal{H}}^2,$$

onde $\gamma = 1 - C \|\rho_2 - \rho_1\|_\infty \|\rho_2\|_\infty - C \|\rho_1 - \rho_2\|_\infty \|\rho_1\|_\infty > 0$, uma vez que $\|\rho_1 - \rho_2\|_\infty \|\rho_1\|_\infty$ e $\|\rho_2 - \rho_1\|_\infty \|\rho_2\|_\infty$ são pequenos o suficiente. Dessa maneira temos que L é coercivo. Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgram, temos que dada $f \in \mathcal{H}$ existe uma única $\mathbf{w} \in \mathcal{H}$ tal que $L\mathbf{w} = f$. Em particular, tomando $f = (\alpha_1 L_1^* (\rho_1^2 \eta^T), \alpha_2 L_2^* (\rho_2^2 \eta^T))$ tal que

$$(Lw)_i = \alpha_i L_i^* (\rho_i^2 \eta^T),$$

então

$$w_i + \alpha_i L_i^* [\rho_i^2 (L_1 w_1 + L_2 w_2)] = \alpha_i L_i^* (\rho_i^2 \eta^T),$$

que é exatamente o que desejávamos. ■

Observação 3.2 Para o caso de apenas um seguidor a situação é bem mais simples, pois

$$\begin{aligned} (Lw, w)_1 &= (w_1 + \alpha_1 L_1^* (\rho_1^2 L_1 w_1), w_1) \\ &= (w_1, w_1)_{\mathcal{H}_1} + (\alpha_1 \rho_1^2 L_1 w_1, L_1 w_1) \\ &= (w_1, w_1)_{\mathcal{H}_1} + \alpha_1 (\rho_1^2 L_1 w_1, L_1 w_1) \end{aligned}$$

Logo, para $\alpha = \alpha_i$

$$(Lw, w)_1 = \|w_1\|^2 + \alpha \|\rho_1 L_1 w_1\|^2 \geq \|w_1\|^2,$$

o que implica na coercividade de L .

3.2 Otimalidade dos seguidores

Mostramos na seção anterior que existe um único equilíbrio de Nash $\mathbf{w} \in \mathcal{H}$ no sentido que a condição de mínimo para os funcionais J_i em (2.5) é satisfeita. Mostramos também que (2.5) implica em (3.7). A recíproca é verdadeira se o funcional é estritamente convexo, conforme o Teorema 1.27.

Afirmção: J_i é estritamente convexo.

De fato, seja $\lambda \in (0, 1)$, $w_i \neq \tilde{w}_i$ e $y \neq \tilde{y}$. Reescrevemos o funcional J_i da seguinte maneira:

$$J_i = \widehat{J}_i(w_i) + \widetilde{J}_i(y),$$

onde $\widehat{J}_i(w_i) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} w_i^2 dxdt$ e $\widetilde{J}_i(y) = \frac{\alpha_i}{2} \|\rho_i(y(\cdot, T; v, \mathbf{w}) - y^T)\|^2$. A partir disso devemos mostrar que

$$\widehat{J}_i(\lambda w_i + (1 - \lambda) \tilde{w}_i) < \lambda \widehat{J}_i(w_i) + (1 - \lambda) \widehat{J}_i(\tilde{w}_i)$$

e

$$\widetilde{J}_i(\lambda y + (1 - \lambda) \tilde{y}) < \lambda \widetilde{J}_i(y) + (1 - \lambda) \widetilde{J}_i(\tilde{y}).$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \widehat{J}_i(\lambda w_i + (1 - \lambda) \tilde{w}_i) &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{O_i} [\lambda w_i + (1 - \lambda) \tilde{w}_i]^2 dxdt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{O_i} [\lambda^2 w_i^2 + 2\lambda(1 - \lambda) w_i \tilde{w}_i + (1 - \lambda)^2 \tilde{w}_i^2] dxdt \\ &< \frac{1}{2} \int_0^T \int_{O_i} [\lambda^2 w_i^2 + \lambda(1 - \lambda)(w_i^2 + \tilde{w}_i^2) + (1 - \lambda)^2 \tilde{w}_i^2] dxdt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{O_i} [\lambda^2 w_i^2 + \lambda(1 - \lambda) w_i^2 + \lambda(1 - \lambda) \tilde{w}_i^2 + (1 - \lambda)^2 \tilde{w}_i^2] dxdt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{O_i} [\lambda(\lambda + 1 - \lambda) w_i^2 + (1 - \lambda)(\lambda + 1 - \lambda) \tilde{w}_i^2] dxdt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{O_i} [\lambda w_i^2 + (1 - \lambda) \tilde{w}_i^2] dxdt \\ &= \lambda \frac{1}{2} \int_0^T \int_{O_i} w_i^2 dxdt + (1 - \lambda) \frac{1}{2} \int_0^T \int_{O_i} \tilde{w}_i^2 dxdt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\widehat{J}_i(\lambda w_i + (1 - \lambda) \tilde{w}_i) < \lambda \widehat{J}_i(w_i) + (1 - \lambda) \widehat{J}_i(\tilde{w}_i).$$

De maneira inteiramente análoga calculamos $\widetilde{J}_i(y)$. Escrevamos $y^T = \lambda y^T +$

$(1 - \lambda) y^T$, assim

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_i(\lambda y + (1 - \lambda) \tilde{y}) &= \frac{\alpha_i}{2} \int_{\Omega} \rho_i^2 [(\lambda y + (1 - \lambda) \tilde{y}) - (\lambda y^T + (1 - \lambda) y^T)]^2 dx \\
&= \frac{\alpha_i}{2} \int_{\Omega} \rho_i^2 [\lambda (y - y^T) + (1 - \lambda) (\tilde{y} - y^T)]^2 dx \\
&= \frac{\alpha_i}{2} \int_{\Omega} \rho_i^2 \{ \lambda^2 (y - y^T)^2 + 2\lambda (y - y^T) (1 - \lambda) (\tilde{y} - y^T) \\
&\quad + (1 - \lambda)^2 (\tilde{y} - y^T)^2 \} dx \\
&< \frac{\alpha_i}{2} \int_{\Omega} \rho_i^2 \{ \lambda^2 (y - y^T)^2 + 2\lambda (1 - \lambda) \left[\frac{1}{2} (y - y^T)^2 + \frac{1}{2} (\tilde{y} - y^T)^2 \right] \\
&\quad + (1 - \lambda)^2 (\tilde{y} - y^T)^2 \} dx \\
&= \frac{\alpha_i}{2} \int_{\Omega} \rho_i^2 [\lambda^2 (y - y^T)^2 + \lambda (1 - \lambda) (y - y^T)^2 + \lambda (1 - \lambda) (\tilde{y} - y^T)^2 \\
&\quad + (1 - \lambda)^2 (\tilde{y} - y^T)^2] dx \\
&= \lambda \frac{\alpha_i}{2} \int_{\Omega} \rho_i^2 (y - y^T)^2 dx + (1 - \lambda) \frac{\alpha_i}{2} \int_{\Omega} \rho_i^2 (\tilde{y} - y^T)^2 dx \\
&= \lambda \tilde{J}_i(y) + (1 - \lambda) \tilde{J}_i(\tilde{y}),
\end{aligned}$$

Podemos, assim, concluir que J_i é um funcional estritamente convexo.

A fim de estudarmos o sistema adjunto de (2.1) – (2.3), retornamos ao sistema (3.3).

Multiplicamos, formalmente, (3.3)₁ por p_i e integremos por partes:

$$\int_0^T \int_{\Omega} \hat{y}'_i p_i dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta \hat{y}_i p_i dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \hat{w}_i p_i \chi_i dx dt. \quad (3.19)$$

Analisemos (3.19) termo a termo.

1º termo

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Omega} \hat{y}'_i p_i dx dt &= \int_{\Omega} \int_0^T \frac{d}{dt} (\hat{y}_i p_i) dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \hat{y}_i p'_i dx dt \\
&= \int_{\Omega} [\hat{y}_i(T) p_i(T) - \hat{y}_i(0) p_i(0)] dx - \int_0^T \int_{\Omega} \hat{y}_i p'_i dx dt,
\end{aligned}$$

o que implica

$$\int_0^T \int_{\Omega} \hat{y}'_i p_i dx dt = \int_{\Omega} \hat{y}_i(T) p_i(T) dx - \int_0^T \int_{\Omega} \hat{y}_i p'_i dx dt, \quad (3.20)$$

uma vez que $\widehat{y}_i(0) = 0$.

2º termo

$$-\int_0^T \int_{\Omega} \Delta \widehat{y}_i p_i dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \widehat{y}_i \nabla p_i dx dt - \int_{\Sigma} \frac{\partial \widehat{y}_i}{\partial \nu} p_i d\Gamma dt.$$

Observemos que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \nabla \widehat{y}_i \nabla p_i dx dt = -\int_0^T \int_{\Omega} \widehat{y}_i \Delta p_i dx dt + \int_{\Sigma} \frac{\partial p_i}{\partial \nu} \widehat{y}_i d\Gamma dt.$$

Como $\widehat{y}_i = 0$ sobre Σ , então

$$-\int_0^T \int_{\Omega} \Delta \widehat{y}_i p_i dx dt = -\int_0^T \int_{\Omega} \widehat{y}_i \Delta p_i dx dt - \int_{\Sigma} \frac{\partial \widehat{y}_i}{\partial \nu} p_i d\Gamma dt. \quad (3.21)$$

Substituindo (3.20) e (3.21) em (3.19) teremos

$$\int_{\Omega} \widehat{y}_i(T) p_i(T) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \widehat{y}_i (-p'_i - \Delta p_i) dx dt - \int_{\Sigma} \frac{\partial \widehat{y}_i}{\partial \nu} p_i d\Gamma dt = \int_0^T \int_{\Omega} \widehat{w}_i p_i \chi_i dx dt. \quad (3.22)$$

Consideremos p_i a solução do seguinte sistema adjunto:

$$\begin{cases} -p'_i - \Delta p_i = 0 & \text{em } Q, \\ p_i = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ p_i(\cdot, T) = \rho_i^2(\cdot) (y(\cdot, T; v, \mathbf{w}) - y^T) & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.23)$$

Notemos que o sistema (3.23) é do tipo (2.6), bastando fazer a mudança de variável $t \mapsto T - t$. Assim, como $\rho_i^2(\cdot) (y(\cdot, T; v, \mathbf{w}) - y^T) \in L^2(\Omega)$, segue pelo Teorema 2.1 que o sistema (3.23) tem única solução na classe $p_i \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$.

Dessa forma, segue de (3.22) que

$$\int_{\Omega} \widehat{y}_i(T) p_i(T) dx = \int_0^T \int_{\Omega} \widehat{w}_i \chi_i dx dt$$

ou ainda

$$\int_{\Omega} \rho_i^2(\cdot) (y(\cdot, T; v, w) - y^T) \widehat{y}_i dx = \int_0^T \int_{\Omega} \widehat{w}_i p_i \chi_i dx dt. \quad (3.24)$$

Comparando (3.7) e (3.24) obtemos

$$-\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} w_i \widehat{w}_i dx dt = \alpha_i \int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} \widehat{w}_i p_i dx dt, \quad (3.25)$$

o que implica

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} (\alpha_i p_i + w_i) \widehat{w}_i dx dt = 0, \quad \forall \widehat{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i \times (0, T))$$

e, portanto,

$$w_i = -\alpha_i p_i \text{ em } \mathcal{O}_i \times (0, T). \quad (3.26)$$

Substituindo (3.26) em (2.1) obtemos

$$y' - \Delta y + \alpha_1 p_1 \chi_1 + \alpha_2 p_2 \chi_2 = v \chi.$$

Resumindo, se $\mathbf{w} = \{w_1, w_2\}$ é um equilíbrio de Nash, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} y' - \Delta y + \alpha_1 p_1 \chi_1 + \alpha_2 p_2 \chi_2 = v \chi \text{ em } Q, \\ y = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ y(0) = 0 \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \quad (3.27)$$

onde p_i ($i = 1, 2$) é solução do seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} -p'_i - \Delta p_i = 0 \text{ em } Q, \\ p_i = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ p_i(\cdot, T) = \rho_i^2(\cdot) (y(\cdot, T; v, w) - y^T) \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Capítulo 4

Controlabilidade aproximada e otimalidade do líder

Neste capítulo estudaremos a controlabilidade aproximada para o problema (2.1) – (2.3), uma vez que já temos a existência e unicidade do equilíbrio de Nash $\mathbf{w} = \{w_1, w_2\}$.

Definição 4.1 *O sistema (2.1) – (2.3) é **aproximadamente controlável** no tempo $T > 0$ se, para todo $\varepsilon > 0$ e para todo $y^T \in L^2(\Omega)$, existe $v \in L^2(\Omega)$, tal que a solução $y = y(\cdot, t, v)$ do sistema (2.1) – (2.3), satisfaz*

$$|y(\cdot, T; v) - y^T| < \varepsilon. \quad (4.1)$$

Em outras palavras, pela definição anterior, garantir que todo o sistema esteja sendo controlado é equivalente a mostrar que o conjunto descrito por $y(\cdot, T; v)$ é denso em $L^2(\Omega)$, quando $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$. Faremos isso na próxima seção por meio de argumentos de análise funcional e resultados de continuação única.

Ainda neste capítulo (Seção 4.2), estudaremos a otimalidade do líder, isto é, mostraremos que o sistema possui o "melhor líder", no sentido daquele que oferece o menor custo.

4.1 Controlabilidade aproximada

A controlabilidade aproximada para o sistema (2.1) – (2.3) é garantida pelo seguinte resultado:

Teorema 4.2 *Admitamos que o conjunto de inequações (2.5) admite uma única solução (um equilíbrio de Nash \mathbf{w}). Então, quando $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$, as funções $y = y(\cdot, T; v, \mathbf{w})$, onde y é solução de (2.1) – (2.3), descrevem um subconjunto denso de $L^2(\Omega)$.*

O Teorema 4.2 nos diz que existe controlabilidade aproximada do sistema quando uma estratégia do tipo de Stackelberg-Nash é seguida.

A fim de simplificar os cálculos, admitiremos, sem perda de generalidade, que $y^T \equiv 0$ em (3.28). Isto é possível uma vez que o sistema considerado é linear. De fato, decompondo as soluções y e p_i de (3.27) e (3.28) em $y = Z + V$ e $p_i = h_i + q_i$, onde Z resolve

$$\left\{ \begin{array}{l} Z' - \Delta Z + \alpha_1 h_1 \chi_1 + \alpha_2 h_2 \chi_2 = 0 \text{ em } Q, \\ Z = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ Z(\cdot, 0) = 0 \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.2)$$

em que h_i é solução de

$$\left\{ \begin{array}{l} -h'_i - \Delta h_i = 0 \text{ em } Q, \\ h_i = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ h_i(\cdot, T) = \rho_i^2 (Z(\cdot, T; v, w) - y^T) \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

e V resolve

$$\left\{ \begin{array}{l} V' - \Delta V + \alpha_1 q_1 \chi_1 + \alpha_2 q_2 \chi_2 = v \chi \text{ em } Q, \\ V = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ V(\cdot, 0) = 0 \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.4)$$

onde q_i é solução de

$$\left\{ \begin{array}{l} -q'_i - \Delta q_i = 0 \text{ em } Q, \\ q_i = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ q_i(\cdot, T) = \rho_i^2 V(\cdot, T; v, w) \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Notemos que a soma dos sistemas (4.2) e (4.4) resulta em (3.27), assim como a soma de (4.3) e (4.5) resulta em (3.28). Portanto, segue que controlar (3.27) é equivalente a controlar o sistema (4.4), uma vez que $y = V + Z$, e o controle não atua no sistema (4.2).

Com esta consideração, voltemos ao Teorema 4.2.

Demonstração: [Prova do Teorema 4.2] Para provar a densidade, suponhamos f dada em $L^2(\Omega)$ tal que

$$(y(\cdot, T; v), f) = 0. \quad (4.6)$$

Nosso objetivo é mostrar que $f = 0$, este argumento implica na densidade de $y(\cdot, T; v, w)$ em $L^2(\Omega)$ para todo $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$. Isto é uma consequência do Teorema de Hahn-Banach (ver [2]).

Vamos introduzir a solução φ do sistema adjunto

$$\begin{cases} -\varphi' - \Delta\varphi = 0 & \text{em } Q, \\ \varphi = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(T) = f + \psi_1(T)\rho_1^2 + \psi_2(T)\rho_2^2 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.7)$$

onde ψ_i ($i = 1, 2$) é solução de

$$\begin{cases} \psi_i' - \Delta\psi_i = -\alpha_i\varphi\chi_i & \text{em } Q, \\ \psi_i = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \psi_i(0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.8)$$

Multipliquemos a primeira equação de (4.7) por y e integremos em Q . Assim

$$-\int_0^T \int_{\Omega} \varphi' y dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta\varphi y dx dt = 0. \quad (4.9)$$

De maneira inteiramente análoga ao que foi feito aos cálculos da equação (3.19), (4.9) torna-se

$$-\int_{\Omega} \varphi(T) y(T) dx + \int_{\Omega} \varphi(0) y(0) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \varphi y' dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \varphi \Delta y dx dt.$$

Como $y(0) = 0$, obtemos

$$-\int_{\Omega} \varphi(T) y(T) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \varphi y' dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \varphi \Delta y dx dt = 0.$$

Usando (4.7)₃ na última igualdade segue que

$$-\int_{\Omega} (f + \psi_1(T) \rho_1^2 + \psi_2(T) \rho_2^2) y(T) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \varphi (y' - \Delta y) dxdt = 0. \quad (4.10)$$

Por outro lado, multiplicando (4.8)₁ por p_i e integrando por partes em Q obtemos

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (\psi_i p_i) dxdt - \int_0^T \int_{\Omega} \psi_i p_i' dxdt - \int_0^T \int_{\Omega} \psi_i \Delta p_i dxdt = - \int_0^T \int_{\Omega} \alpha_i \varphi p_i \chi_i dxdt.$$

Daí

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \psi_i(T) p_i(T) dx - \int_{\Omega} \psi_i(0) p_i(0) dx - \int_0^T \int_{\Omega} \psi_i p_i' dxdt - \int_0^T \int_{\Omega} \psi_i \Delta p_i dxdt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} \alpha_i \varphi p_i \chi_i dxdt. \end{aligned}$$

Como $p_i(0) = 0$, temos

$$\int_{\Omega} \psi_i(T) p_i(T) dx - \int_0^T \int_{\Omega} \psi_i p_i' dxdt - \int_0^T \int_{\Omega} \psi_i \Delta p_i dxdt = - \int_0^T \int_{\Omega} \alpha_i \varphi p_i \chi_i dxdt,$$

e, portanto,

$$\int_{\Omega} \psi_i(T) p_i(T) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \psi_i (-p_i - \Delta p_i) dxdt = - \int_0^T \int_{\Omega} \alpha_i \varphi p_i \chi_i dxdt. \quad (4.11)$$

Somando (4.10) e (4.11) termo a termo, obtemos a igualdade

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} (f + \psi_1(T) \rho_1^2 + \psi_2(T) \rho_2^2) y(T) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \varphi (y' - \Delta y) dxdt \\ & + \int_{\Omega} (\psi_1(T) p_1(T) + \psi_2(T) p_2(T)) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \psi_i (-p_i - \Delta p_i) dxdt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} \alpha_i \varphi p_i \chi_i dxdt, \end{aligned} \quad (4.12)$$

à qual é equivalente a

$$-\int_{\Omega} f y(T) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \varphi v \chi dxdt = 0, \quad \forall v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T)).$$

Portanto, se (4.6) ocorre, então

$$\int_0^T \int_{\Omega} \varphi v \chi dxdt = 0, \quad \forall v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T)),$$

o que implica

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} \varphi v dx dt = 0, \quad \forall v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$$

e

$$\varphi = 0 \quad \text{em } \mathcal{O} \times (0, T). \quad (4.13)$$

Combinando (4.13) e o resultado de continuação única para a equação do calor, (Teorema 1.30) segue que

$$\varphi = 0 \quad \text{em } Q. \quad (4.14)$$

Substituindo (4.14) em (4.8), concluímos da unicidade de soluções que

$$\psi_i = 0 \quad \text{em } Q.$$

Dessa forma, de (4.7)₃ e (4.14), deduzimos que $f = 0$ e chegamos ao resultado desejado.

■

Já mencionamos neste trabalho que um dos nossos maiores interesses é a minimização de custos. Por isso indagamos se o líder, que até então trabalhamos, oferece exatamente o que buscamos. Dedicaremos a próxima seção a obtenção da otimalidade do líder, ou seja, garantia de que existe um líder v que oferece custo mínimo.

4.2 Otimalidade para o líder

Definamos o funcional

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} v^2 dx dt$$

e, então, consideremos o seguinte problema de minimização

$$\begin{cases} \inf J(v) \\ \text{sujeito a } y(T, v) \in y^T + \varepsilon B, \end{cases} \quad (4.15)$$

onde $\varepsilon > 0$ é um número real dado, $B \equiv B(0, 1)$ é a bola unitária de $L^2(\Omega)$ e $y(v)$ é a única solução do sistema (3.27).

Vamos transformar o problema (4.15) em um problema adjunto e, por meio deste, mostraremos a solução de (4.15) como função de um sistema de otimalidade.

Introduzamos agora dois funcionais $F_i : L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) de modo que

$$F_1(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} v^2 dx dt \quad (4.16)$$

e

$$F_2(f) = \begin{cases} 0, & \text{se } f \in y^T + \varepsilon B \\ +\infty, & \text{se } f \notin y^T + \varepsilon B. \end{cases} \quad (4.17)$$

Com estas notações, o problema (4.15) torna-se equivalente a

$$\inf_{v \in L^2(\Omega)} \{F_1(v) + F_2(M(v))\}, \quad (4.18)$$

onde

$$M : L^2(\mathcal{O} \times (0, T)) \rightarrow L^2(\Omega), \quad M(v) = y(\cdot, T, v)$$

é um operador linear contínuo. É importante observar que faz sentido o cálculo de y em $t = T$ devido a regularidade obtida no Teorema 2.1.

Aplicaremos agora a teoria de dualidade no sentido de Fenchel-Rockafellar. Segue do Teorema 1.26 que

$$\inf_{v \in L^2(\Omega)} (F_1(v) + F_2(Mv)) = - \inf_{f \in L^2(\Omega)} (F_1^*(M^*f) + F_2^*(-f)), \quad (4.19)$$

onde $M^* : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ é o operador adjunto de M e $F_i^*(\varphi) = \sup_{\hat{\varphi}} \{(\varphi, \hat{\varphi}) - F_i(\hat{\varphi})\}$ representa a função conjugada de F_i . Desta maneira, representamos o problema (4.15) por um problema dual equivalente.

De maneira inteiramente análoga ao que fizemos na seção anterior, multiplicando (4.7)₁ por y e (4.8)₁ por p_i , integrando por partes e fazendo as devidas substituições, obtemos

$$\int_0^T \int_{\Omega} \varphi v \chi dx dt = \int_{\Omega} f y(T) dx, \quad \forall v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T)),$$

onde φ é solução de (4.7). Daí

$$(M(v), f) = \int_Q \varphi v \chi dx dt, \quad \forall v \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T)),$$

ou seja,

$$(v, M^*f) = \int_Q \varphi v \chi dx dt,$$

o que implica

$$M^* f = \varphi \chi. \quad (4.20)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} F_1^*(f) &= \sup_{v \in L^2(\Omega)} \{(f, v) - F_1(v)\} \\ &= \sup_{v \in L^2(\Omega)} \left\{ \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} v^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} v^2 dx dt \right\} \\ &= \sup_{v \in L^2(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} v^2 dx dt \right\}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$F_1^*(v) = F_1(v). \quad (4.21)$$

Por outro lado, para toda $f \in L^2(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} F_2^*(f) &= \sup_{\widehat{\varphi} \in L^2(\Omega)} \{(f, \widehat{\varphi}) - F_2(\widehat{\varphi})\} \\ &= \sup_{\widehat{\varphi} \in y^T + \varepsilon B} \{(f, \widehat{\varphi})\}. \end{aligned}$$

Escrevendo $\widehat{\varphi} = y^T + \varepsilon g$, com $g \in B$, temos

$$\begin{aligned} F_2^*(f) &= \sup_{g \in B} \{(f, y^T + \varepsilon g)\} \\ &= (f, y^T) + \varepsilon \sup_{g \in B} \{(f, g)\}, \end{aligned}$$

isto é,

$$F_2^*(f) = (f, y^T) + \varepsilon |f|, \quad (4.22)$$

pois $F_2(\widehat{\varphi}) = 0 \forall \widehat{\varphi} \in y^T + \varepsilon B$.

De (4.20), (4.21) e (4.22) podemos escrever (4.19) como sendo

$$\inf_{v \in L^2(\Omega)} (F_1(v) + F_2(Mv)) = - \inf_{f \in L^2(\Omega)} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} \varphi^2 dx dt + \varepsilon |f| - (f, y^T) \right), \quad (4.23)$$

pois $F_1^*(M^* f) = F_1(M^* f) = \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} (M^* f)^2 dx dt = \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} \varphi^2 dx dt$.

Considerando o funcional $F : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$F(f) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} (M^* f)^2 dx dt + \varepsilon |f| - (f, y^T),$$

temos que (4.23) é equivalente a

$$\inf_{v \in L^2(\Omega)} (F_1(v) + F_2(Mv)) = - \inf_{f \in L^2(\Omega)} (F(f)). \quad (4.24)$$

Portanto, para mostrar que o problema (4.15) tem única solução, é suficiente provar que $F(f)$ é semicontínuo inferiormente, estritamente convexo e coercivo. (Teorema 1.29).

i) $F(f)$ é semicontínuo inferiormente

Consideremos uma sequência $\{f_n\}$ em $L^2(\Omega)$ tal que

$$f_n \rightarrow f \text{ em } L^2(\Omega), \quad (4.25)$$

onde $f \in L^2(\Omega)$ é tal que φ é solução de (4.7). Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja φ_n a solução de

$$\begin{cases} -\varphi'_n - \Delta\varphi_n = 0 & \text{em } Q, \\ \varphi_n = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi_n(\cdot, T) = f_n + \psi_1(T)\rho_1^2 + \psi_2(T)\rho_2^2 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.26)$$

onde ψ resolve (4.8) é fixado. Assim $\phi_n = f_n - f$ é solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\phi'_n - \Delta\phi_n = 0 & \text{em } Q, \\ \phi_n = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \phi_n(\cdot, T) = f_n - f & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.27)$$

Portanto, multiplicando (4.27)₁ por ϕ_n e integrando em Q , obtemos a seguinte desigualdade

$$\int_Q |\phi_n|^2 dxdt \leq C \left(|f_n - f|_{L^2(\Omega)} \right). \quad (4.28)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ em (4.28), desde que (4.25) seja válida e subtraindo (4.26)₃ de (4.7)₃ obtemos

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ em } L^2(Q),$$

o que prova a continuidade do funcional $F(f)$ e, conseqüentemente, a sua semicontinuidade inferior.

ii) $F(f)$ é estritamente convexo

Seja $\lambda \in]0, 1[$ e $\rho_0, q_0 \in L^2(\Omega)$. Devemos mostrar que $F(\lambda\rho_0 + (1 - \lambda)q_0) < \lambda F(\rho_0) + (1 - \lambda)F(q_0)$.

De fato, vejamos que

$$F(\lambda\rho_0 + (1 - \lambda)q_0) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (M^*(\lambda\rho_0 + (1 - \lambda)q_0))^2 dxdt \quad (4.29)$$

$$+ \varepsilon \|\lambda\rho_0 + (1 - \lambda)q_0\| - (\lambda\rho_0 + (1 - \lambda)q_0, y^T).$$

Analisemos cada termo do lado direito de (4.29). Notemos primeiramente que

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} (M^*(\lambda\rho_0 + (1 - \lambda)q_0))^2 dxdt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} [(\lambda(M^*\rho_0))^2 + 2\lambda(1 - \lambda)(M^*\rho_0)(M^*q_0) + ((1 - \lambda)M^*q_0)^2] dxdt \\ &< \int_0^T \int_{\Omega} [\lambda^2(M^*\rho_0)^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \left(\frac{1}{2}(M^*\rho_0)^2 + \frac{1}{2}(M^*q_0)^2 \right) \\ &+ (1 - \lambda)^2(M^*q_0)^2] dxdt \quad (4.30) \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} [\lambda(M^*\rho_0)^2 + (1 - \lambda)(M^*q_0)^2] dxdt. \end{aligned}$$

Temos ainda

$$\begin{aligned} |\lambda\rho_0 + (1 - \lambda)q_0| &\leq |\lambda\rho_0| + |(1 - \lambda)q_0| \quad (4.31) \\ &= \lambda|\rho_0| + (1 - \lambda)|q_0|, \end{aligned}$$

e, por fim,

$$-(\lambda\rho_0 + (1 - \lambda)q_0, y^T) = -\lambda(\rho_0, y^T) - (1 - \lambda)(q_0, y^T). \quad (4.32)$$

Combinando (4.29) – (4.32) chegamos ao resultado desejado.

iii) $F(f)$ é coercivo

Queremos mostrar que vale a seguinte desigualdade de coercividade

$$\liminf_{|\varphi^0| \rightarrow \infty} \frac{F(\varphi^0)}{|\varphi^0|} \geq \varepsilon, \quad (4.33)$$

em que $\varepsilon > 0$.

Para provar (4.33), usaremos os argumentos como em Fabre-Puel-Zuazua [7] e Zuazua [19].

Seja $\{\varphi_j^0\}$ uma sequência em $L^2(\Omega)$ tal que

$$|\varphi_j^0| \rightarrow \infty, \text{ quando } j \rightarrow \infty. \quad (4.34)$$

Para cada j , vamos denotar por φ_j a solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\varphi_j' - \Delta\varphi_j = 0 & \text{em } Q, \\ \varphi_j = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi_j(\cdot, T) = \varphi_j^0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.35)$$

Tomando

$$\bar{\varphi}_j^0 = \frac{\varphi_j^0}{|\varphi_j^0|} \quad \text{e} \quad \bar{\varphi}_j = \frac{\varphi_j}{|\varphi_j|}, \quad (4.36)$$

temos, por linearidade, que $\bar{\varphi}_j$ é solução de (4.35) com o dado inicial $\bar{\varphi}_j^0$.

De (4.36) temos que

$$\frac{F(\varphi_j^0)}{|\varphi_j^0|} = \frac{|\varphi_j^0|}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (M^* \bar{\varphi}_j^0)^2 dxdt + \varepsilon - (\bar{\varphi}_j^0, y^T). \quad (4.37)$$

Para provar (4.33), vamos distinguir em dois casos a seguir.

Caso 1: Consideremos

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\bar{\varphi}_j|^2 dxdt > 0.$$

Devido a (4.34), o primeiro termo em (4.37) tende para infinito, quando $j \rightarrow \infty$, enquanto os outros dois permanecem limitados. Deduzimos então que

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{F(\varphi_j^0)}{|\varphi_j^0|} = \infty.$$

Caso 2: Consideremos agora

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\bar{\varphi}_j|^2 dxdt = 0. \quad (4.38)$$

De (4.38), obtemos uma subsequência $(\bar{\varphi}_j)_{j \in \mathbb{N}}$, ainda denotada da mesma forma, tal que

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\bar{\varphi}_j|^2 dxdt \rightarrow 0, \text{ quando } j \rightarrow \infty. \quad (4.39)$$

De (4.36), podemos extrair uma subsequência tal que

$$\bar{\varphi}_j^0 \rightharpoonup \bar{\varphi}^0 \text{ em } L^2(\Omega). \quad (4.40)$$

Chamemos de $\bar{\varphi}$ a solução de (4.35) com dado inicial $\bar{\varphi}^0$.

Afirmação: A seguinte convergência vale:

$$\bar{\varphi}_j \rightharpoonup \bar{\varphi} \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.41)$$

De fato, para $\theta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, consideremos o sistema

$$\begin{cases} y' - \Delta y = \theta & \text{em } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.42)$$

Multiplicando a primeira equação em (4.35) (com $\bar{\varphi}_j$ no lugar de φ_j) por y , solução de (4.42), e integrando em Q , temos

$$- \int_Q \bar{\varphi}'_j y dx dt - \int_Q \Delta \bar{\varphi}_j y dx dt = 0.$$

Daí, usando integração por partes e o Teorema de Green, segue que

$$\int_Q \theta \bar{\varphi}_j dx dt = \int_{\Omega} y(T) \bar{\varphi}_j^0 dx. \quad (4.43)$$

A convergência (4.40) implica

$$\int_{\Omega} y(T) \bar{\varphi}_j^0 dx \rightarrow \int_{\Omega} y(T) \bar{\varphi}^0 dx. \quad (4.44)$$

Por outro lado, multiplicando a equação em (4.35) (com $\bar{\varphi}$ no lugar de φ_j) por y e integrando em Q , obtemos

$$\int_Q \theta \bar{\varphi} dx dt = \int_{\Omega} y(T) \bar{\varphi}^0 dx. \quad (4.45)$$

Combinando (4.43) – (4.45) deduzimos que

$$\int_Q \theta \bar{\varphi}_j dx dt \rightarrow \int_Q \theta \bar{\varphi} dx dt,$$

para todo $\theta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e, portanto, segue a afirmação.

De (4.39) e (4.41) deduzimos que

$$\bar{\varphi} \equiv 0 \text{ em } \mathcal{O} \times (0, T).$$

Temos, portanto pelo Teorema 1.30 segue que $\bar{\varphi}^0 \equiv 0$. Daí, de (4.40) vale

$$\bar{\varphi}_j^0 \rightharpoonup 0 \text{ em } L^2(\Omega). \quad (4.46)$$

Deduzimos assim que

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{F(\varphi_j^0)}{|\varphi_j^0|} \geq \varepsilon,$$

o que garante a coercividade.

Após a demonstração da semicontinuidade inferior, convexidade estrita e coercividade de F ., temos que (4.15) tem única solução. Vamos, agora, por meio do Teorema 1.28, obter uma caracterização para este problema. Seja f a única solução do problema dual (4.23). Logo

$$\langle F'(f), \hat{f} - f \rangle \geq 0, \quad \forall \hat{f} \in L^2(\Omega), \quad (4.47)$$

onde F' representa a derivada de Gateaux da função F .

Calculemos $F'(f)$.

Observemos que

$$\begin{aligned} F\left(f + \lambda(\hat{f} - f)\right) &= \frac{1}{2} \left(M^* \left(f + \lambda(\hat{f} - f) \right), M^* \left(f + \lambda(\hat{f} - f) \right) \right)_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} \\ &\quad + \varepsilon \left| f + \lambda(\hat{f} - f) \right| - \left(f + \lambda(\hat{f} - f), y^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(M^* f + \lambda M^* \hat{f} - \lambda M^* f, M^* f + \lambda M^* \hat{f} - \lambda M^* f \right)_{L^2(\mathcal{O} \times (0, T))} \\ &\quad + \varepsilon \left| f + \lambda(\hat{f} - f) \right| - \left(f + \lambda(\hat{f} - f), y^T \right). \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} F\left(f + \lambda(\widehat{f} - f)\right)\Big|_{\lambda=0} &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} 2\left(M^* \widehat{f} - M^* f\right) \left(M^* f + \lambda M^* \widehat{f} - \lambda M^* f\right)\Big|_{\lambda=0} \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{\left|f + \lambda(\widehat{f} - f)\right|} \left(\widehat{f} - f, f\right)\Big|_{\lambda=0} - \left(\widehat{f} - f, y^T\right) \\
&= \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} M^* f \left(M^* \widehat{f} - M^* f\right) dxdt \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{|f|} \left(\widehat{f}, f\right) - \varepsilon |f| - \left(\widehat{f} - f, y^T\right).
\end{aligned}$$

Como $M^* f = \varphi$, teremos

$$\frac{d}{d\lambda} F\left(f + \lambda(\widehat{f} - f)\right)\Big|_{\lambda=0} = \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} \varphi (\widehat{\varphi} - \varphi) dxdt + \frac{\varepsilon}{|f|} \left(\widehat{f}, f\right) - \varepsilon |f| - \left(\widehat{f} - f, y^T\right).$$

onde $\widehat{\varphi} = M^* \widehat{f}$. Notemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{O} \times (0, T)} \varphi (\widehat{\varphi} - \varphi) dxdt + \varepsilon |\widehat{f}| - \varepsilon |f| - \left(\widehat{f} - f, y^T\right) \\
&\geq \frac{d}{d\lambda} F\left(f + \lambda(\widehat{f} - f)\right)\Big|_{\lambda=0} = \left\langle F'(f), \widehat{f} - f \right\rangle, \quad \forall \widehat{f} \in L^2(\Omega).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathcal{O} \times (0, T)} \varphi (\widehat{\varphi} - \varphi) dxdt + \varepsilon |\widehat{f}| - \varepsilon |f| - \left(\widehat{f} - f, y^T\right) \geq 0, \quad \forall \widehat{f} \in L^2(\Omega). \quad (4.48)$$

Para cada $f \in L^2(\Omega)$ consideremos φ solução de (4.7). Desta maneira, consideramos y como sendo a única solução de

$$\left\{ \begin{array}{l} y' - \Delta y + \alpha_1 \psi_1 \chi_1 + \alpha_2 \psi_2 \chi_2 = \varphi \chi \quad \text{em } Q, \\ y = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ y(0) = 0 \quad \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.49)$$

onde ψ_i ($i = 1, 2$) é solução de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\psi'_i - \Delta \psi_i = 0 \quad \text{em } Q, \\ \psi_i = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ \psi_i(\cdot, T) = \rho_i^2(\cdot) y(\cdot, T; v, \mathbf{w}) \quad \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.50)$$

Multiplicando (4.49)₁ por $(\widehat{\varphi} - \varphi)$ e integrando em Q teremos

$$\begin{aligned}
& \int_Q y' (\widehat{\varphi} - \varphi) dxdt - \int_Q \Delta y (\widehat{\varphi} - \varphi) dxdt \\
& + \int_Q \alpha_1 \psi_1 \chi_1 (\widehat{\varphi} - \varphi) dxdt + \int_Q \alpha_2 \psi_2 \chi_2 (\widehat{\varphi} - \varphi) dxdt \\
& = \int_Q \varphi (\widehat{\varphi} - \varphi) \chi dx.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Como

$$\int_Q y' (\widehat{\varphi} - \varphi) dxdt = \int_{\Omega} y(T) (\widehat{\varphi}(T) - \varphi(T)) dx - \int_Q y (\widehat{\varphi} - \varphi)' dxdt$$

e

$$- \int_Q \Delta y (\widehat{\varphi} - \varphi) dxdt = - \int_Q y \Delta (\widehat{\varphi} - \varphi) dxdt + \int_{\Sigma} \frac{\partial y}{\partial \nu} (\widehat{\varphi} - \varphi) d\Gamma dt,$$

temos que (4.51) torna-se

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} y(T) (\widehat{\varphi}(T) - \varphi(T)) dx - \int_Q y (\widehat{\varphi} - \varphi)' dxdt - \int_Q y \Delta (\widehat{\varphi} - \varphi) dxdt \\
& + \int_{\Sigma} \frac{\partial y}{\partial \nu} (\widehat{\varphi} - \varphi) d\Gamma dt + \int_Q \alpha_1 \psi_1 \chi_1 (\widehat{\varphi} - \varphi) dxdt + \int_Q \alpha_2 \psi_2 \chi_2 (\widehat{\varphi} - \varphi) dxdt \\
& = \int_Q \varphi (\widehat{\varphi} - \varphi) \chi dx.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Multiplicando agora (4.50)₁ por $(\widehat{\xi}_i - \xi_i)$ e integrando em Q , obtemos

$$- \int_Q \psi_i' (\widehat{\xi}_i - \xi_i) dxdt - \int_Q \Delta \psi_i (\widehat{\xi}_i - \xi_i) dxdt = 0 \tag{4.53}$$

e, de maneira inteiramente análoga ao que foi feito para a equação (4.52), (4.53) torna-se

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \psi_i'(T) (\widehat{\xi}_i(T) - \xi_i(T)) dx + \int_{\Omega} \psi_i'(0) (\widehat{\xi}_i(0) - \xi_i(0)) dx \\
& + \int_Q \psi_i (\widehat{\xi}_i - \xi_i)' dxdt - \int_Q \psi_i \Delta (\widehat{\xi}_i - \xi_i) dxdt \\
& + \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi_i}{\partial \nu} (\widehat{\xi}_i - \xi_i) d\Gamma dt = 0.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Fazendo $\widehat{\varphi} - \varphi = \overline{\varphi}$, $\widehat{\xi}_i - \xi_i = \overline{\xi}_i$, temos que $\overline{\varphi}$ é solução de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\overline{\varphi}' - \Delta \overline{\varphi} = 0 \text{ em } Q, \\ \overline{\varphi} = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ \overline{\varphi}(\cdot, T) = \widehat{f}(\cdot) - f(\cdot) + \rho_1^2 \overline{\xi}_1(\cdot, T) + \rho_2^2 \overline{\xi}_2(\cdot, T) \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.55)$$

onde $\overline{\xi}_i$ é solução de

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\xi}_i' - \Delta \overline{\xi}_i = -\alpha_i \overline{\varphi} \chi_i \text{ em } Q, \\ \overline{\xi}_i = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ \overline{\xi}_i(0) = 0 \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.56)$$

Notemos que os sistemas (4.55) e (4.56) são equivalentes aos sistemas (4.7) e (4.8) e, portanto, possuem soluções únicas.

Observando os últimos dois sistemas, por (4.52) e (4.54) chegamos às seguintes equações:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} y(T) \overline{\varphi}(T) dx + \int_Q \alpha_1 \psi_1 \chi_1 \overline{\varphi} dx dt + \int_Q \alpha_2 \psi_2 \chi_2 \overline{\varphi} dx dt \\ &= \int_Q \varphi \overline{\varphi} \chi dx dt \end{aligned} \quad (4.57)$$

e

$$- \int_{\Omega} \psi_i'(T) \overline{\xi}_i(T) dx - \int_Q \alpha_i \psi_i \chi_i \overline{\varphi} dx dt = 0. \quad (4.58)$$

De (4.57) e (4.58), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} y(T) \overline{\varphi} dx - \int_{\Omega} \psi_1(T) \overline{\xi}_1(T) dx - \int_{\Omega} \psi_2(T) \overline{\xi}_2(T) dx \\ &= \int_Q \varphi \overline{\varphi} \chi dx dt. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Substituindo (4.50)₃ e (4.55)₃ em (4.59) temos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[y(T) \left(\widehat{f} - f + \rho_1^2 \overline{\xi}_1(T) + \rho_2^2 \overline{\xi}_2(T) \right) \right] dx \\ & - \int_{\Omega} \rho_1^2 y(T) \overline{\xi}_1(T) dx - \int_{\Omega} \rho_2^2 y(T) \overline{\xi}_2(T) dx \\ &= \int_Q \varphi \overline{\varphi} \chi dx dt, \end{aligned}$$

o que implica

$$\left(y(T), \widehat{f} - f \right) = \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} \varphi(\widehat{\varphi} - \varphi) \chi dx dt. \quad (4.60)$$

Substituindo (4.60) em (4.48) obtemos

$$\left(y(T), \widehat{f} - f \right) + \varepsilon \left| \widehat{f} \right| - \varepsilon |f| - \left(\widehat{f} - f, y^T \right) \geq 0, \quad \forall \widehat{f} \in L^2(\Omega),$$

ou seja,

$$\left(y(T) - y^T, \widehat{f} - f \right) + \varepsilon \left| \widehat{f} \right| - \varepsilon |f| \geq 0, \quad \forall \widehat{f} \in L^2(\Omega).$$

Dessa forma, temos provado o seguinte teorema:

Teorema 4.3 *A melhor função controle (líder) v para o sistema (2.1) – (2.3) com $\{w_1, w_2\} = \{-\alpha_1\psi_1, -\alpha_2\psi_2\}$, onde α_i é o mesmo de (2.4) e ψ_i é solução do sistema*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\psi'_i - \Delta\psi_i = 0 \quad \text{em } Q, \\ \psi = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ \psi_i(\cdot, T) = \rho_i^2 y(\cdot, T; v) \quad \text{em } \Omega, \end{array} \right.$$

é aquela que minimiza

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{O} \times (0, T)} v^2 dx dt$$

sujeito a condição $y(\cdot, T; v, \mathbf{w}(v)) \in y^T + \varepsilon B$, e é dada pela solução φ do sistema adjunto

$$\left\{ \begin{array}{l} -\varphi' - \Delta\varphi = 0 \quad \text{em } Q, \\ \varphi = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi(\cdot, T) = f + \rho_1^2 \xi_1(\cdot, T) + \rho_2^2 \xi_2(\cdot, T) \quad \text{em } \Omega, \end{array} \right.$$

onde ξ_i resolve

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi'_i - \Delta\xi_i = -\alpha_i \varphi \chi_i \quad \text{em } Q, \\ \xi_i = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ \xi_i(\cdot, 0) = 0 \quad \text{em } \Omega. \end{array} \right.$$

e f é unicamente determinada pela desigualdade variacional

$$\left(y(\cdot, T, f) - y^T, \widehat{f} - f \right) + \varepsilon \left| \widehat{f} \right| - \varepsilon |f| \geq 0, \quad \forall \widehat{f} \in L^2(\Omega).$$

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, R. A., Sobolev Space, Academic Press, London, (1975).
- [2] BREZIS, H., Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Dunod, Paris, (1999).
- [3] CODDINGTON, E. and LEVINSON, N., Theory of Ordinary Differential Equations, McGrall-Hill, New York, (1955).
- [4] DIAZ, J. and LIONS, J.-L., On the approximate controllability of Stackelberg-Nash strategies, Ocean Circulation and pollution Control, Math. and Numerical Investigations, Springer, (2005), 17-27.
- [5] EKELAND, I. and TEMAM, R., Convex Analysis and Variational Problems, SIAM, (1999).
- [6] EVANS, L. C., Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics vol. 19, American Mathematical Society, (1997).
- [7] FABRE, C., PUEL, J. P. and ZUAZUA, E., Controlabilité approchée de l'équation de la chaleur linéaire avec contrôles de norme L^∞ minimale. C.R. Acad. Sci. Paris, **316** (1993), 679-684.
- [8] FABRE, C., Uniqueness results for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems. ESAIM:COCV, **1** (1996), 267-302.
- [9] GUILLÉN-GONZÁLEZ, F., MARQUES-LOPES F. P., and ROJAS-MEDAR M. A., On the approximate controllability of stackelberg-Nash strategies for Stokes equations, a aparecer em Proc. Amer. Math. Soc.

- [10] LIMACO, J., CLARK, H.R., MEDEIROS, L.A., Remarks on hierarchic control, *J. Math. Anal. Appl.*, **359** (2009), 368–383.
- [11] LIONS, J.-L., *Contrôlabilité Exacte, Perturbation et Estabilization de Systèmes Distribuées*, Tome I, RMA 8, Masson, Paris, (1988).
- [12] LIONS, J.-L., *Problèmes aux Limites dans les Equations aux Dérivées Partielles*, Less Presses de L’Université de Montreal, Montreal, (1965).
- [13] LIONS, J.-L., *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites Non-Linéaires*, Dunod, Paris, (1969).
- [14] LIONS, J.-L., Some remarks on Stackelberg’s optimization, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **4** (4) (1994), 477-487.
- [15] LIONS, J.-L. et MAGENES, E., *Problèmes aux Limites Non Homogenes et Applications*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, vol. 1, (1968).
- [16] MEDEIROS, L. A. e MILLA MIRANDA, M., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, *Textos de Métodos Matemáticos*, vol. 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1989).
- [17] MEDEIROS, L. A. e RIVERA, P. H., *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*, *Textos de Métodos Matemáticos*, vol. 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1977).
- [18] VISIK, M. I., LADYZENSKAYA, O. A., Boundary value problems for partial differential equations and certain classes of perator equations, *Uspehi Mat. Nauk (NS)*, **11** (672) (1956), 41-97.
- [19] ZUAZUA, E., Finite dimensional null controllability for the semilinear heat equation. *J. Math. Pures et Appl.*, **76** (1997), 570-594.