

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de soluções para equações elípticas
semilineares envolvendo não linearidades do
tipo côncavo-convexas

Rosinângela Cavalcanti da Silva

Julho de 2012

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência de soluções para equações elípticas semilineares envolvendo não linearidades do tipo côncavo-convexas

por

Rosinângela Cavalcanti da Silva

sob orientação de

Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do
Programa de Pós-Graduação em Matemática
- CCEN - UFPB, como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Matemática.

Julho de 2012
João Pessoa-PB

S586e Silva, Rosinângela Cavalcanti da.

Existência de soluções para equações elípticas semilineares envolvendo não linearidades do tipo côncavo-convexas / Rosinângela Cavalcanti da Silva.- João Pessoa, 2012. 88f.

Orientadora: Elisandra de Fátima Gloss de Moraes
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Equações semilineares. 3. Não linearidades côncavo-convexas. 4. Multiplicadores de Lagrange. 5. Variedade de Nehari. 6. Sub e supersolução.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Existência de soluções para equações elípticas semilineares envolvendo não linearidades do tipo côncavo-convexas

por

Rosinângela Cavalcanti da Silva

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovado pela Banca:

Prof^a. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes(Orientadora)

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros

Prof^a. Dra. Janete Soares de Gamboa

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza(Suplente)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática
Julho de 2012

Aos meus pais e minhas irmãs.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado Sabedoria para conquistar meu sonho. Agradeço aos meus pais por terem acreditado em mim, por todo apoio, carinho e pelas palavras de força. Agradeço a minhas irmãs Ednângela e Marinângela por terem me aguentado horas ao telefone para matar a saudade e por estarem ao meu lado sempre. Ao meu cunhado Diogo por tudo que fez por mim. Agradeço ao meu namorado Rubens pelo seu carinho e dedicação, por ter me dado força e conselhos que nunca vou esquecer. Agradeço a minha amiga Pammella por tantas noites de estudos juntas, por secar minhas lágrimas quando a saudade e a angústia chegavam e por tantos risos. Agradeço a família Queiroz em nome de Dona Fátima, por ter me acolhido como filha. Agradeço aos meus colegas, a todos os meus professores e a minha orientadora e amiga Elisandra pela sua paciência, dedicação e pela força que me deu durante todo esse tempo de estudos.

Resumo

O objetivo da nossa dissertação é provar a existência de soluções para uma classe de equações elípticas semilineares em um domínio limitado, envolvendo não linearidades do tipo côncavo-convexas. Mostraremos alguns casos diferentes e métodos diversificados para encontrar tais soluções, usando o Teorema do Passo da Montanha, o Princípio Variacional de Ekeland, Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, a Variedade de Nehari e sub e supersolução.

Palavras-chave: Equações semilineares, não linearidades côncavo-convexas, Multiplicadores de Lagrange, Variedade de Nehari, sub e supersolução.

Abstract

The goal of our work is to prove the existence of solutions to a class of semilinear elliptic equations in a bounded domain, involving concave-convex type nonlinearities. We use a variety of methods to find these solutions, such as Mountain Pass Theorem, Ekeland's Variational Principle, Lagrange Multipliers Theorem, Nehari Manifold and sub and supersolution method.

Keywords: Semilinear Equations, non-linearities of the concave-convex type, Lagrange Multipliers Theorem, Nehari Manifold, sub and supersolution.

Sumário

Introdução	1
Notações	3
1 Existência de solução para equações elípticas semilineares via Passo da Montanha	5
1.1 Introdução	5
1.2 O caso geral	5
1.3 O caso particular na Variedade de Nehari	11
2 Uma equação elíptica semilinear envolvendo uma função peso com mudança de sinal	15
2.1 Introdução	15
2.2 O funcional associado e a Variedade de Nehari	15
2.3 Estimativas para o ínfimo de J_λ em $\mathcal{M}_\lambda$	25
2.4 Existência de sequências minimizantes para J_λ	28
2.5 Existência de soluções	36
2.6 Resultado de não existência	40
3 Existência de soluções para equações elípticas semilineares com caso supercrítico	42
3.1 Introdução	42
3.2 Formulação Variacional	43
3.3 Existência da primeira solução para $\lambda \in (0, \lambda_0)$	45
3.4 Existência da segunda solução para $\lambda \in (0, \lambda_0)$	47
3.5 Regularidade	52
3.6 Existência da primeira solução para $\lambda \in (0, \Lambda)$	54
3.7 Existência da segunda solução para $\lambda \in (0, \Lambda)$	60
A Resultados de Regularidade	63

B Resultados básicos	74
Referências Bibliográficas	78

Introdução

Neste trabalho iremos mostrar a existência de soluções não triviais para algumas equações elípticas semilineares em um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, onde $N \geq 3$. Esta dissertação está dividida em três capítulos e dois anexos organizados da seguinte forma.

No Capítulo 1, buscamos solução não trivial para uma equação elíptica usando o Teorema do Passo da Montanha. Dividimos este capítulo em duas seções. Na primeira seção estudamos o caso geral

$$\begin{cases} -\Delta u &= g(x, u) & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

no qual $g(x, u)$ é uma função contínua, subcrítica que satisfaz a conhecida condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Na seção seguinte, estudamos o caso particular $g(x, u) = |u|^{p-1}u$, para $1 < p < 2^* - 1$, provando que o nível do Passo da Montanha do funcional associado coincide com o ínfimo deste funcional na variedade de Nehari. Neste capítulo usamos como referência os livros de Rabinowitz [11] e de Davi G. Costa [3].

Nos capítulos seguintes estudamos equações envolvendo não linearidades do tipo côncavo-convexas. Muitos estudos tem sido realizados sobre problemas deste tipo. Citamos o famoso artigo de Ambrosetti, Brezis e Cerami [1], no qual estudaram o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u^q + u^p & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (0.1)$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave e $0 < q < 1 < p$. Usando o método de sub e supersolução os autores mostraram que existe $\Lambda > 0$ tal que para $\lambda \in (0, \Lambda]$ o problema (0.1) possui uma solução não trivial e não há solução para $\lambda > \Lambda$. No caso em que $1 < p < (N + 2)/(N - 2)$, usando métodos variacionais provaram a existência de uma segunda solução se $0 < \lambda < \Lambda$.

No Capítulo 2, investigamos uma equação elíptica envolvendo uma função contínua que muda de sinal, do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda f(x)u^q + u^p & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

considerando $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$, tendo como referência o artigo de Tsung-Fang Wu [14]. Mostramos aqui, que se $f(x)$ é qualquer função contínua que muda de sinal em $\bar{\Omega}$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que o problema admite duas soluções positivas se $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Mostraremos isto por meio de minimização do funcional associado na variedade de Nehari, usando o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange e o Princípio Variacional de Ekeland.

No Capítulo 3, mostramos que existem soluções para a equação do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u^q + h(x)u^p & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $0 < q < 1 < p < 2^* - 1 + \tau$ e $h(x)$ é uma função Hölder contínua, satisfazendo condições especiais. Neste caso, o problema traz uma função com crescimento supercrítico. Então os argumentos variacionais gerais não podem ser utilizados diretamente. Usamos um Teorema que nos garante a imersão compacta de $H_0^1(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ em um domínio cilindricamente simétrico com p maior que o expoente crítico de Sobolev, resultado este provado por Wenzhi Wang [16]. Dessa forma, por meio de argumentos variacionais mostramos que existe $\Lambda \in (0, \infty)$ tal que, para $0 < \lambda < \Lambda$, o problema possui ao menos duas soluções positivas, sendo uma minimizante local do funcional associado e a outra obtida por meio do Teorema do Passo da Montanha; para $\lambda = \Lambda$ o problema tem ao menos uma solução e se $\lambda > \Lambda$ o problema em questão não possui solução. Usamos como base para o estudo neste capítulo, o artigo de J. Gao, Y. Zhang e Peihao Zhao [8].

No Apêndice A mostramos que o funcional associado aos problemas estudados é de classe C^1 . Trazemos ainda, alguns resultados importantes de regularidade relacionados aos problemas estudados nos capítulos anteriores. No Apêndice B, apresentamos os principais teoremas utilizados no decorrer da nossa dissertação, juntamente com a referência dos mesmos.

Notação

No decorrer desta dissertação usaremos as seguintes notações:

$\mathbb{R}^+$ conjunto dos números reais não negativos

$B_{r_0}(x)$ bola aberta de centro x e raio r_0 em $\mathbb{R}^N$

$\rightharpoonup, \rightarrow$ convergência fraca e forte, respectivamente

$|\Omega|$ medida de Lebesgue de um conjunto Ω

$q.t.p.$ em quase toda parte

$\frac{\partial u}{\partial x_i}$ derivada parcial de u em relação a x_i

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ gradiente de u

$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ laplaciano de u

$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \nu$ derivada normal exterior

$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável; } \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty \right\}, 1 \leq p < \infty$

$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ norma no espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$

$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável; } |u(x)| \leq C \text{ q.t.p. sobre } \Omega \text{ para algum } C > 0 \}$

$C^k(\Omega)$ funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω , $k \in \mathbb{N}$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \left| \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, \dots, N \end{array} \right. \right\}$$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{complementamento de } C_c^1(\Omega) \text{ em } W^{1,p}(\Omega)$$

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$$

$$H^{-1}(\Omega) \text{ é o espaço dual de } H_0^1(\Omega)$$

$$p^* = \frac{Np}{N-p} \quad \text{para } 1 \leq p < N \quad \text{expoente crítico de Sobolev}$$

$$f = o(g) \quad \text{quando } x \rightarrow x_0 \text{ se } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|/|g(x)| = 0$$

Capítulo 1

Existência de solução para equações elípticas semilineares via Passo da Montanha

1.1 Introdução

Neste capítulo provaremos existência de solução não trivial para equações semilineares do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x, u), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $N \geq 3$, Δu é o Laplaciano de u , $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função variável e $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo algumas hipóteses adicionais que serão descritas a seguir. A existência de soluções para este problema será garantida pelo Teorema do Passo da Montanha.

Mostraremos primeiramente a existência de soluções não triviais para um caso mais geral e em seguida, considerando o caso particular $g(x, t) = |t|^{s-1}t$, mostraremos que o ínfimo do funcional associado ao problema (1.1) sobre a Variedade de Nehari coincide com o nível do Passo da Montanha deste funcional.

1.2 O caso geral

Nesta seção, baseados no livro de Rabinowitz [11], estudaremos o problema (1.1) no caso em que $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função satisfazendo:

$$(g_1) \quad g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R});$$

(g_2) existem constantes $a_1, a_2 > 0$ e $0 \leq p < 2^* - 1$ tais que

$$|g(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^p, \quad \forall \quad x \in \bar{\Omega} \quad \text{e} \quad \xi \in \mathbb{R};$$

(g_3) $g(x, \xi) = o(|\xi|)$ se $\xi \rightarrow 0$, uniformemente em $x \in \bar{\Omega}$;

(g_4) existem constantes $\mu > 2$ e $r \geq 0$ tais que para $|\xi| \geq r$,

$$0 < \mu G(x, \xi) \leq \xi g(x, \xi)$$

$$\text{onde } G(x, \xi) = \int_0^\xi g(x, t) dt.$$

Exemplo 1.1 *Um exemplo de uma função que satisfaz estas condições é $g(x, u) = |u|^{p-1}u$ a qual iremos estudar na próxima seção.*

Observação 1.2 *A hipótese (g_3) implica que $g(x, 0) = 0$ e consequentemente, o problema (1.1) admite $u \equiv 0$ como solução. A condição (g_4) é conhecida como Condição de Ambrosetti-Rabinowitz e nos garante que*

$$0 \leq \frac{\mu}{\xi} \leq \frac{g(x, \xi)}{G(x, \xi)}.$$

Integrando a expressão acima obtemos

$$0 \leq \int_{r_0}^\xi \frac{\mu}{t} dt \leq \int_{r_0}^\xi \frac{g(x, t)}{G(x, t)} dt.$$

Temos

$$\int_{r_0}^\xi \frac{\mu}{t} dt = \mu (\ln |\xi| - \ln |r_0|) = \ln \frac{|\xi|^\mu}{|r_0|^\mu}$$

e

$$\int_{r_0}^\xi \frac{g(x, t)}{G(x, t)} dt = \int_{r_0}^\xi (\ln G(x, t))' dt = \ln G(x, \xi) - \ln G(x, r_0) = \ln \frac{G(x, \xi)}{G(x, r_0)}.$$

Assim

$$0 \leq \ln \frac{|\xi|^\mu}{|r_0|^\mu} \leq \ln \frac{G(x, \xi)}{G(x, r_0)}$$

o que implica que

$$\frac{|\xi|^\mu}{|r_0|^\mu} \leq \frac{G(x, \xi)}{G(x, r_0)}.$$

Com isso vemos que $G(x, \xi) \geq c_1 |\xi|^\mu$ onde $c_1 = G(x, r_0)/|r_0|^\mu$. Por outro lado, tomando $c_2 = \sup_{(x, \xi) \in \Omega \times (-r, r)} |G(x, \xi)|$ temos que $G(x, \xi) \geq -c_2$. Logo

$$G(x, \xi) \geq c_1 |\xi|^\mu - c_2, \quad \forall \quad x \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Nosso objetivo, nesta seção, é provar a existência de solução fraca não trivial para (1.1), ou seja, mostraremos que existe $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$ em Ω , tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} g(x, u) v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

O funcional associado ao problema (1.1) é $I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - G(x, u) \right) dx.$$

Pela Proposição A.3 sabemos que se (i) e (ii) são satisfeitas então $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$I'(u)v = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v - g(x, u)v) dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, encontrar solução fraca para o problema (1.1) é equivalente a encontrar ponto crítico para o funcional I . Usaremos o Teorema do Passo da Montanha para encontrar tal ponto crítico, devemos então verificar as suas hipóteses.

Uma vez que Ω é limitado podemos tomar como norma em $H_0^1(\Omega)$

$$\|u\|^2 \equiv \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Na proposição que segue, mostraremos que o funcional I possui a Geometria do Passo da Montanha.

Proposição 1.3 *Se g satisfaz (i) - (iv), então I satisfaz as condições:*

(I) $I(0) = 0$ e existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$;

(II) existe $e \in H_0^1(\Omega) \setminus \bar{B}_\rho$ tal que $I(e) \leq 0$.

Demonstração: Vamos verificar a condição (I). Como $G(x, 0) = 0$, temos que $I(0) = 0$. Defina

$$J(u) \equiv \int_{\Omega} G(x, u) dx.$$

Pela hipótese (iii) temos $g(x, \xi) = o(|\xi|)$, se $\xi \rightarrow 0$ uniformemente em $x \in \bar{\Omega}$. Assim dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |\xi| < \delta$ implica que $|g(x, \xi)| < \varepsilon|\xi|$. Daí,

$$|G(x, \xi)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon |\xi|^2, \quad \text{se } |\xi| < \delta.$$

Por (ii) existe uma constante $A = A(\delta) > 0$ tal que $|\xi| \geq \delta$ implica que

$$|G(x, \xi)| \leq |\xi g(x, \xi)| \leq |\xi|(a_1 + a_2|\xi|^p) = a_1|\xi| + a_2|\xi|^{p+1} = A|\xi|^{p+1}$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$. Combinando essas duas estimativas, para todo $\xi \in \mathbb{R}$ e $x \in \bar{\Omega}$ temos

$$|G(x, \xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\xi|^2 + A |\xi|^{s+1}.$$

Consequentemente, usando a imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{s+1}(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} |J(u)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + A \|u\|_{L^{s+1}(\Omega)}^{s+1} \\ &\leq c \left(\frac{\varepsilon}{2} \|u\|^2 + A \|u\|^{s+1} \right) \\ &= c \|u\|^2 \left(\frac{\varepsilon}{2} + A \|u\|^{s-1} \right). \end{aligned}$$

Escolhendo $\|u\| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2A}\right)^{\frac{1}{s-1}}$ obtemos

$$|J(u)| \leq \varepsilon c \|u\|^2.$$

Logo $J(u) = o(\|u\|^2)$ quando $u \rightarrow 0$. Assim, existe $\rho > 0$ tal que

$$\frac{|J(u)|}{\|u\|^2} < \frac{1}{4} \quad \text{se } \|u\| \leq \rho.$$

Como $I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - J(u)$ temos que se $\|u\| \leq \rho$ então

$$I(u) > \frac{1}{4} \|u\|^2.$$

Tomando $\alpha = \frac{1}{4}\rho^2$ temos que $I(u) \geq \alpha$, se $\|u\| = \rho$, ou seja, $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$. Logo a primeira condição é satisfeita.

Verificaremos agora a condição (II). Por (iv) e por (1.2) temos que

$$J(u) \geq c_1 \int_{\Omega} |u|^\mu dx - c_2 |\Omega| \tag{1.3}$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, onde $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue de Ω . Escolhendo qualquer $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ por (1.3), uma vez que $\mu > 2$ temos

$$\begin{aligned} I(tu) &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla(tu)|^2 - G(x, tu) \right) dx \\ &\leq \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - c_1 \int_{\Omega} |tu|^\mu dx + c_2 |\Omega| \\ &= \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - c_1 t^\mu \int_{\Omega} |u|^\mu dx + c_2 |\Omega| \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

quando $t \rightarrow \infty$. Logo, existe $t > 0$ suficientemente grande tal que $e = tu$ satisfaz $\|e\| > \rho$ e $I(e) \leq 0$, ou seja, a segunda condição é satisfeita. ■

Para utilizarmos o Teorema do Passo da Montanha B.3, precisamos verificar que o funcional I satisfaz a condição Palais-Smale (PS). Uma sequência é dita (PS) se $I(u_m)$ é limitado e $I'(u_m) \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$. Dizemos que um funcional satisfaz a condição Palais-Smale se toda sequência (PS) possui subsequência convergente. O próximo resultado garante que esta condição é válida para sequências limitadas.

Proposição 1.4 *Seja g satisfazendo (i) e (ii) e I definido como anteriormente. Se $\{u_m\}$ é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$ tal que $I'(u_m) \rightarrow 0$ se $m \rightarrow \infty$, então $\{u_m\}$ é pré-compacta em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Seja $D : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ denotando a aplicação dualidade entre $H_0^1(\Omega)$ e seu dual, a qual sabemos que é uma isometria linear devido ao Teorema de Representação de Riesz. Então para $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$Du(\varphi) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = \langle u, \varphi \rangle.$$

Como $I'(u)\varphi = \langle u, \varphi \rangle - J'(u)\varphi$, temos $Du = I'(u) + J'(u)$. Ainda, pela Proposição A.3 temos que J' é compacto. Sendo $\{u_m\}$ limitada, então $J'(u_m)$ possui subsequência convergente. Pela continuidade de D^{-1} temos

$$u_{m_k} = D^{-1}I'(u_{m_k}) + D^{-1}J'(u_{m_k}) \rightarrow \lim D^{-1}J'(u_{m_k}).$$

Logo $\{u_m\}$ possui subsequência convergente. ■

Proposição 1.5 *I satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração: Devemos mostrar que toda sequência (PS) possui subsequência convergente. Seja $\{u_m\}$ uma sequência (PS). Pela Proposição 1.4, basta mostrar que $\{u_m\}$ é limitada.

Como $I(u_m)$ é limitada, existe $M > 0$ tal que $|I(u_m)| < M$. Além disso, como $I'(u_m) \rightarrow 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|I'(u_m)\| < \mu, \quad \forall \quad m > m_0.$$

Assim,

$$I(u_m) - \frac{1}{\mu}I'(u_m)u_m \leq M + \|u_m\|, \quad \forall \quad m > m_0. \quad (1.4)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} I(u_m) - \frac{1}{\mu}I'(u_m)u_m &= \frac{1}{2}\|u_m\|^2 - \int_{\Omega} G(x, u_m)dx - \frac{1}{\mu} \left(\|u_m\|^2 - \int_{\Omega} g(x, u_m)u_m dx \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_m\|^2 + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu}g(x, u_m)u_m - G(x, u_m) \right) dx. \end{aligned}$$

Tomando $T_m = \frac{1}{\mu}g(\cdot, u_m)u_m - G(\cdot, u_m)$ na equação anterior temos

$$I(u_m) - \frac{1}{\mu}I'(u_m)u_m = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_m\|^2 + \int_{\{x \in \Omega; |u_m(x)| \geq r\}} T_m(x) dx + \int_{\{x \in \Omega; |u_m(x)| < r\}} T_m(x) dx.$$

Segue da condição (iv) que

$$\int_{\{x \in \Omega; |u_m(x)| \geq r\}} T_m(x) dx \geq 0.$$

Além disso, como g e G são contínuas e limitadas em $\bar{\Omega} \times [-r, r]$, então T_m é contínua e existe $c > 0$ independente de m tal que

$$|T_m(x)| \leq c \quad \forall \quad x \in \{y \in \bar{\Omega}; |u_m(y)| < r\}.$$

Daí

$$\int_{\{x \in \Omega; |u_m(x)| < r\}} T_m(x) dx \geq -c|\Omega|, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Segue então que

$$I(u_m) - \frac{1}{\mu}I'(u_m)u_m \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_m\|^2 - c|\Omega|. \quad (1.5)$$

Assim, por (1.4) e (1.5) temos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_m\|^2 - c|\Omega| \leq I(u_m) - \frac{1}{\mu}I'(u_m)u_m \leq M + \frac{1}{\mu}\varepsilon \|u_m\|$$

para todo $m > m_0$. Isto implica que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_m\|^2 - \frac{\varepsilon}{\mu} \|u_m\| \leq M + c|\Omega|, \quad \forall m > m_0.$$

Como $\mu > 2$ concluímos que $\{u_m\}$ é limitada. Assim, pela Proposição 1.4 temos que $\{u_m\}$ possui subsequência convergente. Portanto, I satisfaz a condição (PS). ■

Pelos resultados anteriores, temos que o funcional I associado ao problema (1.1) tem a geometria do Passo da Montanha e satisfaz a condição (PS). Podemos então usar o Teorema do Passo da Montanha para mostrar que este problema possui solução não trivial.

Teorema 1.6 *Se g satisfaz (i) - (iv), o problema (1.1) possui uma solução não trivial.*

Demonstração: Encontrar solução fraca para a equação (1.1) é equivalente a obter um ponto crítico para o funcional I , dado por

$$I(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - G(x, u) \right) dx.$$

Pelas Proposições 1.3, 1.4, 1.5, sabemos que são satisfeitas as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, que nos garante que I possui um valor crítico $c_{PM} \geq \alpha$ caracterizado por

$$c_{PM} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in \gamma([0,1])} I(u)$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H_0^1(\Omega)); \gamma(0) = 0 \text{ e } I(\gamma(1)) < 0\}$. Portanto, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ ponto crítico de I tal que $I(u) = c_{PM}$. Como $c_{PM} > 0$ temos que $u \neq 0$ e por sua vez, u é solução não trivial para a equação (1.1). ■

1.3 O caso particular na Variedade de Nehari

Consideramos a seguir, um caso particular do problema (1.1) da seção anterior, em que $g(x, u) = |u|^{p-1}u$

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.6)$$

onde $1 < p < 2^* - 1$ e Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$. Associado à equação (1.6), considere o funcional $K : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$K(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx.$$

Sabemos pela Proposição A.3 que $K \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$\langle K'(u), v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v - \int_{\Omega} |u|^{p-1} u v dx.$$

Provamos na seção anterior que a equação (1.6) possui solução não trivial, a qual é obtida como ponto crítico de K , no nível do Passo da Montanha. Neste caso particular, usando Princípio do Máximo, vemos que existe solução positiva para o problema (1.6).

Os resultados a seguir tem como referência o livro de Davi Costa [3]. Definimos a variedade de Nehari associada a K ,

$$\mathcal{N} = \{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}; \langle K'(u), u \rangle = 0\}.$$

Observe que, se $u \in \mathcal{N}$ então

$$\|u\|^2 = \|u\|_{p+1}^{p+1}. \quad (1.7)$$

Por meio dos resultados que seguem, mostraremos que o conjunto $\mathcal{N}$ é de fato uma variedade fechada e não vazia. Provaremos ainda que o nível do Passo da Montanha do funcional K coincide com o ínfimo de K sobre a variedade $\mathcal{N}$.

Proposição 1.7 *A variedade de Nehari $\mathcal{N}$ é não vazia e $\mathcal{N}$ é uma C^1 - subvariedade de $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: De fato, seja $\phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(u) = \langle K'(u), u \rangle = \|u\|^2 - \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx.$$

Sabemos pela Proposição A.3 que $\phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$\phi'(u)v = 2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - (p+1) \int_{\Omega} |u|^p v dx.$$

Seja $0 \neq v \in H_0^1(\Omega)$ e considere a função $0 < t \mapsto \phi(tv)$. Então, usando a imersão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega)$, como $p+1 > 2$ temos

$$\begin{aligned} \phi(tv) = \langle K'(tv), tv \rangle &= \int_{\Omega} |\nabla(tv)|^2 dx - \int_{\Omega} |tv|^{p+1} dx \\ &= t^2 \|v\|^2 - t^{p+1} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\ &\geq t^2 \|v\|^2 - t^{p+1} c^{p+1} \|v\|^{p+1} \\ &> 0 \quad \text{se } t > 0 \text{ é pequeno.} \end{aligned}$$

Além disso,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(tv) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t^2 \|v\|^2 - t^{p+1} \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}) = -\infty.$$

Então, existe um $\bar{t} > 0$ tal que $\phi(\bar{t}v) = 0$, ou seja, $\bar{t}v \in \mathcal{N}$. Dessa forma, concluímos que $\mathcal{N} \neq \emptyset$.

Vejamos agora que ϕ não possui ponto crítico em $\mathcal{N}$. Para $u \in \mathcal{N}$, por (1.7) temos

$$\begin{aligned} \phi'(u)u &= 2\|u\|^2 - (p+1) \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \\ &= 2\|u\|^2 - (p+1)\|u\|^2 \\ &= (1-p)\|u\|^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Logo $\phi'(u) \neq 0$, para todo $u \in \mathcal{N}$. Seja $M = H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$. Dessa forma, 0 é o único ponto crítico em $\phi^{-1}(0)$ e $0 \notin M$. Logo $0 \in \mathbb{R}$ é valor regular de $\phi|_M$. Pelo Teorema da Submersão, segue que $\phi^{-1}|_M(0)$ é uma subvariedade de M . Portanto, $\mathcal{N}$ é uma C^1 - subvariedade de $H_0^1(\Omega)$. ■

Observação 1.8 *Note que $\bar{t}$ é único tal que $\bar{t}v \in \mathcal{N}$, pois se $v \in H_0^1(\Omega)$ e $tv \in \mathcal{N}$ então*

por (1.7) temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} |\nabla(tv)|^2 dx - \int_{\Omega} |tv|^{p+1} dx \\
&= t^2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - t^{p+1} \int_{\Omega} |v|^{p+1} dx \\
&= t^2 \int_{\Omega} |v|^{p+1} dx - t^{p+1} \int_{\Omega} |v|^{p+1} dx \\
&= t^2(1 - t^{p-1}) \int_{\Omega} |v|^{p+1} dx.
\end{aligned}$$

Como $t > 0$ e $v \neq 0$, devemos ter $t = 1$ e por sua vez t é único tal que $tv \in \mathcal{N}$.

Proposição 1.9 *A variedade de Nehari associada a $K(u)$,*

$$\mathcal{N} = \{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}; \langle K'(u), u \rangle = 0\}$$

é fechada em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Seja $u_n \in \mathcal{N}$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$. Então pelas imersões de Sobolev temos que $u_n \rightarrow u$ em $L^{p+1}(\Omega)$, pois $1 < p+1 < 2^*$. Assim

$$0 = \langle K'(u_n), u_n \rangle = \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx \rightarrow \|u\|^2 - \|u\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1} = \langle K'(u), u \rangle,$$

o que implica $\langle K'(u), u \rangle = 0$. Dessa forma, basta mostrar que $u \neq 0$. Como $u_n \in \mathcal{N}$, pela imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega)$ temos

$$\|u_n\|^2 = \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx \leq c \|u_n\|^{p+1}.$$

Assim segue que

$$\|u_n\| \geq \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{p-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, $u \neq 0$ e $u \in \mathcal{N}$, o que mostra que $\mathcal{N}$ é fechada em H_0^1 . ■

Note que, se $u \in \mathcal{N}$ então

$$K(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \|u\|^2 \geq 0.$$

Logo, $K|_{\mathcal{N}}$ é limitado inferiormente.

Agora estamos prontos para mostrar o principal resultado desta seção, a igualdade entre o ínfimo do funcional K na variedade de Nehari e o nível do Passo da Montanha deste funcional.

Proposição 1.10 *Seja $\beta = \inf\{K(u) : u \in \mathcal{N}\}$. Então $\beta > 0$ e $\beta = c_{PM}$ onde c_{PM} é o nível do Passo da Montanha de K .*

Demonstração: Denotando $\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], H_0^1(\Omega)) : \gamma(0) = 0, K(\gamma(1)) < 0\}$, pelo Teorema 1.6 sabemos que o problema (1.6) possui uma solução $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que $K(u) = c_{PM}$, onde

$$c_{PM} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{0 \leq t \leq 1} K(\gamma(t)) > 0.$$

Mostraremos, primeiramente, que c_{PM} é maior ou igual a β . Como vimos na Proposição 1.3, existe $\delta > 0$ tal que $\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq \frac{1}{2}\|v\|^2$ e $K(v) \geq \frac{1}{4}\|v\|^2$ para todo $v \in \bar{B}(0, \delta)$. Então, dado $\gamma \in \Gamma$ temos $\gamma(0) = 0$ e $K(\gamma(1)) < 0$, donde $\gamma(1) \notin \bar{B}(0, \delta)$. Como γ é contínua, existe $t \in (0, 1)$ tal que $\gamma(t) \in \partial B(0, \delta)$, ou seja, $\|\gamma(t)\| = \delta$. Seja $t_0 = \max\{t \in (0, 1) : \|\gamma(t)\| = \delta\}$. Daí

$$\phi(\gamma(t_0)) = \|\gamma(t_0)\|^2 - \|\gamma(t_0)\|_{L^{p+1}}^{p+1} \geq \frac{1}{2}\|\gamma(t_0)\|^2 = \frac{1}{2}\delta^2 > 0.$$

Como

$$0 > K(\gamma(1)) = \frac{1}{2}\|\gamma(1)\|^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |\gamma(1)|^{p+1}$$

temos

$$\|\gamma(1)\|^2 < \frac{2}{p+1} \int_{\Omega} |\gamma(1)|^{p+1}.$$

Assim

$$\phi(\gamma(1)) = \|\gamma(1)\|^2 - \int_{\Omega} |\gamma(1)|^{p+1} < \left(\frac{2}{p+1} - 1\right) \int_{\Omega} |\gamma(1)|^{p+1} < 0.$$

Dessa forma, existe $\bar{t} \in (t_0, 1)$ tal que $\gamma(\bar{t})$ não pertence a $\bar{B}(0, \delta)$ e $\phi(\gamma(\bar{t})) = 0$. Logo $\gamma(\bar{t}) \in N$. Isto implica que

$$\max_{t \in [0, 1]} K(\gamma(t)) \geq K(\gamma(\bar{t})) \geq \beta.$$

Portanto, $c_{PM} \geq \beta$. Mostraremos agora que β é maior ou igual a c_{PM} . De fato, dado $u \in \mathcal{N}$ por (1.7) temos que

$$K(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{p+1}}{p+1}\right) \|u\|^2$$

e $\max_{t>0} K(tu) = K(u)$, pois ocorre em $t = 1$. Além disso, como $p+1 > 2$ segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K(tu) = -\infty.$$

Fixando $t_0 > 1$ tal que $K(t_0 u) \leq 0$, defina $\gamma(t) = t(t_0 u)$ para $t \in [0, 1]$. Assim, temos $\gamma \in \Gamma$ e

$$c_{PM} \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} K(\gamma(t)) = \sup_{0 \leq t \leq 1} K(t(t_0 u)) = K(u).$$

Isto implica que $K(u) \geq c_{PM}$, para todo $u \in \mathcal{N}$, e por sua vez $\beta \geq c_{PM}$. Logo, $\beta = c_{PM} > 0$. ■

Capítulo 2

Uma equação elíptica semilinear envolvendo uma função peso com mudança de sinal

2.1 Introdução

Neste capítulo iremos estudar uma classe de equações elípticas semilineares do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u + \lambda f(x)|u|^{q-1}u, & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$, $\lambda > 0$ e $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua com mudança de sinal em $\bar{\Omega}$. Este capítulo foi baseado no artigo de Tsung-Fang Wu [14], onde usando o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange B.2 mostraremos que para λ pequeno, o problema (2.1) possui ao menos duas soluções positivas.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte.

Teorema 2.1 *Existe $\Lambda_0 > 0$ tal que para $\lambda \in (0, \Lambda_0)$, a equação (2.1) tem pelo menos duas soluções positivas.*

2.2 O funcional associado e a Variedade de Nehari

O funcional associado a equação (2.1) é $J_\lambda : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} f(x)|u|^{q+1} dx.$$

Uma solução (fraca) para a equação (2.1) é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaz

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} |u|^{p-1} u v dx + \lambda \int_{\Omega} f(x)|u|^{q-1} u v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

O resultado a seguir mostra a regularidade do funcional J_λ para todo $\lambda > 0$.

Lema 2.2 *O funcional J_λ pertence a $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.*

Demonstração: Seja $g_\lambda : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g_\lambda(x, t) = |t|^{p-1}t + \lambda f(x)|t|^{q-1}t$ para cada λ fixado. Como $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ e $p, q > 0$ temos $g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Denotando $G_\lambda(x, t) = \int_0^t g_\lambda(x, r)dr$, temos

$$G_\lambda(x, t) = \int_0^t (|r|^{p-1}r + \lambda f(x)|r|^{q-1}r) dr = \frac{1}{p+1}|t|^{p+1} + \frac{\lambda}{q+1}f(x)|t|^{q+1}.$$

Além disso, como f é limitada em $\bar{\Omega}$ temos

$$|g_\lambda(x, t)| = |t|^p + |\lambda||f(x)||t|^q \leq |t|^p + c_1|t|^q, \quad \forall (x, t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Daí

$$|g_\lambda(x, t)| \leq \begin{cases} |t|^p + c_1, & \text{se } |t| \leq 1 \\ (1 + c_1)|t|^p, & \text{se } |t| > 1 \end{cases}$$

o que implica $|g_\lambda(x, t)| \leq c_1 + c_2|t|^p$ para todo $(x, t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, com $1 < p < 2^* - 1$. Uma vez que

$$J_\lambda(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - G_\lambda(x, u) \right) dx,$$

segue da Proposição A.3 que J_λ é de classe C^1 e

$$\begin{aligned} \langle J'_\lambda(u), v \rangle &= \int_{\Omega} [\nabla u \nabla v - g_\lambda(x, u)v] dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} |u|^{p-1}uv dx - \lambda \int_{\Omega} f(x)|u|^{q-1}uv dx. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Isto conclui a prova do lema. ■

Observe que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (2.1) se, e somente se, u é ponto crítico de J_λ . Não podemos usar aqui os resultados obtidos no Capítulo 1, porque $g_\lambda(\cdot, t)$ não satisfaz a condição (g_3) e consequentemente vemos que J_λ não possui a geometria do Passo da Montanha. Para resolver o problema (2.1) usaremos outras técnicas que envolvem a variedade de Nehari e o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange B.2.

A variedade de Nehari associada ao funcional J_λ é dada por

$$\mathcal{M}_\lambda = \{H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : \langle J'_\lambda(u), u \rangle = 0\}.$$

Assim, se $u \in \mathcal{M}_\lambda$, segue de (2.2) que

$$\|u\|^2 - \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx - \lambda \int_{\Omega} f(x)|u|^{q+1} dx = 0. \tag{2.3}$$

A fim de mostrarmos que o conjunto $\mathcal{M}_\lambda$ é de fato uma variedade fechada e não vazia, começamos definindo $\psi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi_\lambda(u) = \langle J'_\lambda(u), u \rangle = ||u||^2 - \int_\Omega |u|^{p+1} dx - \lambda \int_\Omega f(x) |u|^{q+1} dx.$$

De forma análoga ao Lema 2.2, mostramos pela Proposição A.3 que $\psi_\lambda \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$\langle \psi'_\lambda(u), v \rangle = 2 \int_\Omega \nabla u \nabla v - (p+1) \int_\Omega |u|^{p-1} uv - (q+1) \lambda \int_\Omega f(x) |u|^{q-1} uv dx.$$

Para uma melhor compreensão do comportamento de ψ'_λ na variedade de Nehari, dividimos $\mathcal{M}_\lambda$ em três partes:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\lambda^0 &= \{u \in \mathcal{M}_\lambda : \langle \psi'_\lambda(u), u \rangle = 0\} \\ \mathcal{M}_\lambda^+ &= \{u \in \mathcal{M}_\lambda : \langle \psi'_\lambda(u), u \rangle > 0\} \\ \mathcal{M}_\lambda^- &= \{u \in \mathcal{M}_\lambda : \langle \psi'_\lambda(u), u \rangle < 0\}. \end{aligned}$$

Para a demonstração do Teorema 2.1 utilizaremos alguns lemas. Este primeiro garante que o conjunto $\mathcal{M}_\lambda^0$ é vazio para λ pequeno e assim, qualquer $u \in \mathcal{M}_\lambda$ é ponto regular de ψ . Uma vez que $\mathcal{M} = \psi|_{H_0^1 \setminus \{0\}}^{-1}(0)$ temos que $\mathcal{M}_\lambda$ é de fato uma variedade.

Lema 2.3 *Existe $\Lambda_1 > 0$ tal que para cada $\lambda \in (0, \Lambda_1)$ temos $\mathcal{M}_\lambda^0 = \emptyset$.*

Demonstração: Suponhamos por contradição que $\mathcal{M}_\lambda^0 \neq \emptyset$ para todo $\lambda > 0$ e seja $u \in \mathcal{M}_\lambda^0$. Como $u \in \mathcal{M}_\lambda$, temos

$$\int_\Omega |u|^{p+1} dx = ||u||^2 - \lambda \int_\Omega f(x) |u|^{q+1} dx. \quad (2.4)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \langle \psi'(u), u \rangle &= 2||u||^2 - (p+1) \int_\Omega |u|^{p+1} dx - (q+1) \lambda \int_\Omega f(x) |u|^{q+1} dx \\ &= 2||u||^2 - (p+1) \left(||u||^2 - \lambda \int_\Omega f(x) |u|^{q+1} dx \right) - (q+1) \lambda \int_\Omega f(x) |u|^{q+1} dx \\ &= (1-p)||u||^2 + (p-q) \lambda \int_\Omega f(x) |u|^{q+1} dx. \end{aligned}$$

Já que $\langle \psi'(u), u \rangle = 0$ segue que

$$\left(\frac{p-1}{p-q} \right) ||u||^2 = \lambda \int_\Omega f(x) |u|^{q+1} dx.$$

Considere $\sigma = (p+1)/(p-q)$. Uma vez que $1/\sigma + (q+1)/(p+1) = 1$, pela desigualdade de Hölder, Teorema B.1, temos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{p-1}{p-q} \right) ||u||^2 &= \lambda \int_\Omega f(x) |u|^{q+1} dx \leq \lambda \left(\int_\Omega |f(x)|^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\int_\Omega (|u|^{q+1})^{\frac{p+1}{q+1}} dx \right)^{\frac{q+1}{p+1}} \\ &= \lambda ||f||_{L^\sigma} \left[\left(\int_\Omega |u|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p+1}} \right]^{q+1} \\ &= \lambda ||f||_{L^\sigma} ||u||_{L^{p+1}}^{q+1}. \end{aligned}$$

Desde que $p + 1 \in [1, 2^*)$, considere A a melhor constante da imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega)$. Então

$$\left(\frac{p-1}{p-q}\right) \|u\|^2 \leq \lambda \|f\|_{L^\sigma} \|u\|_{L^{p+1}}^{q+1} \leq \lambda \|f\|_{L^\sigma} A^{q+1} \|u\|^{q+1}$$

o que implica que

$$\|u\| \leq \left[\lambda \left(\frac{p-q}{p-1}\right) \|f\|_{L^\sigma} A^{q+1} \right]^{\frac{1}{1-q}}. \quad (2.5)$$

Seja $I_\lambda : \mathcal{M}_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$I_\lambda(u) = C(p, q) \left(\frac{\|u\|^{2p}}{\int_\Omega |u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}} - \lambda \int_\Omega f(x) |u|^{q+1} dx,$$

onde $C(p, q) = \left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{p-1}{1-q}\right)$. Note que, $I_\lambda(u) = 0$ para todo $u \in \mathcal{M}_\lambda^0$. De fato, usando o fato de $u \in \mathcal{M}_\lambda^0$ e (2.4) temos

$$\begin{aligned} 0 &= 2\|u\|^2 - (p+1) \int_\Omega |u|^{p+1} dx - (q+1) \left(\|u\|^2 - \int_\Omega |u|^{p+1} dx \right) \\ &= (1-q) \|u\|^2 - (p-q) \int_\Omega |u|^{p+1} dx \end{aligned}$$

o que implica que

$$\|u\|^2 = \frac{p-q}{1-q} \int_\Omega |u|^{p+1} dx.$$

Assim

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= C(p, q) \left(\frac{\|u\|^{2p}}{\int_\Omega |u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}} - \lambda \int_\Omega f(x) |u|^{q+1} dx \\ &= \left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{p-1}{1-q}\right) \left(\frac{\left(\frac{p-q}{1-q}\right)^p \left(\int_\Omega |u|^{p+1} dx\right)^p}{\int_\Omega |u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}} - \frac{p-1}{1-q} \int_\Omega |u|^{p+1} dx \\ &= \left(\frac{1-q}{p-q}\right)^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{p-1}{1-q}\right) \left(\frac{p-q}{1-q}\right)^{\frac{p}{p-1}} \left(\int_\Omega |u|^{p+1} dx\right)^{\frac{p-1}{p-1}} - \left(\frac{p-1}{1-q}\right) \int_\Omega |u|^{p+1} dx \\ &= \left(\frac{p-1}{1-q}\right) \int_\Omega |u|^{p+1} dx - \left(\frac{p-1}{1-q}\right) \int_\Omega |u|^{p+1} dx \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder, sendo $\sigma = \frac{p+1}{p-q}$, para $u \in \mathcal{M}_\lambda^0$ temos

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= C(p, q) \left(\frac{\|u\|^{2p}}{\int_\Omega |u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}} - \lambda \int_\Omega f(x) |u|^{q+1} dx \\ &\geq C(p, q) \left(\frac{\|u\|^{2p}}{\int_\Omega |u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}} - \lambda \|f\|_{L^\sigma} \|u\|_{L^{p+1}}^{q+1}. \end{aligned}$$

Como pela imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega)$, Proposição A.2, tem-se $\|u\|_{L^{p+1}} \leq A\|u\|$, então

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{p+1}}^{(q+1)(p-1)} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx &= \|u\|_{L^{p+1}}^{(q+1)(p-1)} \|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\ &\leq (A^{(q+1)(p-1)} \|u\|^{(q+1)(p-1)}) (A^{p+1} \|u\|^{p+1}) \\ &= A^{q(p-1)+2p} \|u\|^{q(p-1)+2p}. \end{aligned}$$

Assim, por (2.5)

$$\begin{aligned} I_{\lambda}(u) &\geq \|u\|_{L^{p+1}}^{q+1} \left(C(p, q) \left(\frac{\|u\|^{2p}}{A^{q(p-1)+2p} \|u\|^{q(p-1)+2p}} \right)^{\frac{1}{p-1}} - \lambda \|f\|_{L^{\sigma}} \right) \\ &= \|u\|_{L^{p+1}}^{q+1} \left(C(p, q) \left(\frac{1}{A^{q(p-1)+2p}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{1}{\|u\|^q} - \lambda \|f\|_{L^{\sigma}} \right) \\ &\geq \|u\|_{L^{p+1}}^{q+1} \left\{ C(p, q) \left(\frac{1}{A^{q(p-1)+2p}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \left[\lambda \left(\frac{p-q}{p-1} \right) \|f\|_{L^{\sigma}} A^{q+1} \right]^{\frac{-q}{1-q}} - \lambda \|f\|_{L^{\sigma}} \right\} \\ &= \|u\|_{L^{p+1}}^{q+1} \left\{ C(p, q) \left(\frac{1}{A^{q(p-1)+2p}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \lambda^{\frac{-q}{1-q}} \left[\left(\frac{p-q}{p-1} \right) \|f\|_{L^{\sigma}} A^{q+1} \right]^{\frac{-q}{1-q}} - \lambda \|f\|_{L^{\sigma}} \right\}. \end{aligned}$$

Isto implica que para λ suficientemente pequeno temos $I_{\lambda}(u) > 0$ para todo $u \in \mathcal{M}_{\lambda}^0$, o que contradiz (2.6). Assim, podemos concluir que existe $\Lambda_1 > 0$ tal que para $\lambda \in (0, \Lambda_1)$ temos $\mathcal{M}_{\lambda}^0 = \emptyset$. ■

Pelo Lema 2.3 temos $\mathcal{M}_{\lambda}^0 = \emptyset$ para $\lambda \in (0, \Lambda_1)$, consequentemente podemos escrever $\mathcal{M}_{\lambda} = \mathcal{M}_{\lambda}^+ \cup \mathcal{M}_{\lambda}^-$.

Vamos agora definir uma função côncava, analisar seu comportamento e identificar seu ponto de máximo, informações que usaremos na demonstração do lema posterior.

Lema 2.4 Para cada $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ definimos $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$s(t) = t^{1-q} \|u\|^2 - t^{p-q} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \quad \text{para } t \geq 0.$$

Então s tem um único ponto crítico que é $t_{\max} = \left(\frac{(1-q)\|u\|^2}{(p-q) \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}}$ um ponto de máximo global. Além disso,

$$s(t_{\max}) \geq \|u\|^{q+1} \left(\frac{1-q}{p-q} \right)^{\frac{1-q}{p-1}} \left(\frac{p-1}{p-q} \right) \left(\frac{1}{A^{p+1}} \right)^{\frac{1-q}{p-1}}.$$

Demonstração: Note que $s(0) = 0$. Sendo $p-q > 1-q$ temos que $s(t) > 0$ para $t > 0$ pequeno e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{1-q} \|u\|^2 - t^{p-q} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx = -\infty.$$

Então, sendo s contínua atinge seu ponto de máximo em algum $t > 0$. Mostraremos agora que $s(t)$ atinge o máximo em $t_{\max}$. Se $t_0 > 0$ é ponto crítico de $s(t)$, então

$$0 = s'(t_0) = (1-q)t_0^{-q} \|u\|^2 - (p-q)t_0^{p-q-1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx$$

e já que $t_0^{-q} \neq 0$ obtemos

$$(1-q)||u||^2 - (p-q)t_0^{p-1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx = 0.$$

Assim

$$t_0 = \left[\frac{(1-q)||u||^2}{(p-q) \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx} \right]^{\frac{1}{p-1}} = t_{\max}$$

e $t_{\max}$ é o único ponto crítico de $s(t)$. Podemos concluir que s é crescente em $(0, t_{\max})$ e s é decrescente em $(t_{\max}, +\infty)$. Além disso,

$$\begin{aligned} s(t_{\max}) &= \left[\frac{(1-q)||u||^2}{(p-q) \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx} \right]^{\frac{1-q}{p-1}} ||u||^2 - \left[\frac{(1-q)||u||^2}{(p-q) \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx} \right]^{\frac{p-q}{p-1}} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \\ &= \left(\frac{(1-q)||u||^2}{(p-q) \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1-q}{p-1}} ||u||^{(1-q)+(q+1)} \\ &\quad - \left(\frac{(1-q)||u||^{\frac{(p+1)(1-q)+(q+1)(p-1)}{p-q}}}{(p-q)(\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx)^{1-\frac{p-1}{p-q}}} \right)^{\frac{p-q}{p-1}} \\ &= ||u||^{q+1} \left[\left(\frac{(1-q)||u||^{p+1}}{(p-q) \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1-q}{p-1}} - \left(\frac{(1-q)||u||^{\frac{(p+1)(1-q)}{p-q}}}{(p-q)(\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx)^{\frac{1-q}{p-q}}} \right)^{\frac{p-q}{p-1}} \right] \\ &= ||u||^{q+1} \left[\left(\frac{1-q}{p-q} \right)^{\frac{1-q}{p-1}} - \left(\frac{1-q}{p-q} \right)^{\frac{p-q}{p-1}} \right] \left(\frac{||u||^{p+1}}{\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1-q}{p-1}}. \end{aligned}$$

Pela imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega)$, Proposição A.2, temos

$$\begin{aligned} s(t_{\max}) &\geq ||u||^{q+1} \left[\left(\frac{1-q}{p-q} \right)^{\frac{1-q}{p-1}} - \left(\frac{1-q}{p-q} \right)^{\frac{p-q}{p-1}} \right] \left(\frac{||u||^{p+1}}{A^{p+1} ||u||^{p+1}} \right)^{\frac{1-q}{p-1}} \\ &= ||u||^{q+1} \left[\left(\frac{1-q}{p-q} \right)^{\frac{1-q}{p-1}} - \left(\frac{1-q}{p-q} \right)^{\frac{1-q}{p-1}} \left(\frac{1-q}{p-q} \right) \right] \left(\frac{1}{A^{p+1}} \right)^{\frac{1-q}{p-1}} \\ &= ||u||^{q+1} \left(\frac{1-q}{p-q} \right)^{\frac{1-q}{p-1}} \left(\frac{p-1}{p-q} \right) \left(\frac{1}{A^{p+1}} \right)^{\frac{1-q}{p-1}} \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Este próximo resultado garante que $\mathcal{M}_{\lambda}^{-}$ e $\mathcal{M}_{\lambda}^{+}$ são conjuntos não vazios se $\lambda > 0$ é pequeno e também nos fornece uma caracterização para $\mathcal{M}_{\lambda}^{-}$.

Lema 2.5 *Seja $\sigma = \frac{p+1}{p-q}$ e $\Lambda_2 = \left(\frac{p-1}{p-q} \right) \left(\frac{1-q}{p-q} \right)^{\frac{1-q}{p-1}} A^{\frac{2(q-p)}{p-1}} ||f||_{L^{\sigma}}^{-1}$. Então para cada $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ e $\lambda \in (0, \Lambda_2)$, temos*

(i) *existe um único $t^- = t^-(u) > t_{\max}$ tal que $t^-u \in \mathcal{M}_{\lambda}^{-}$ e $J_{\lambda}(t^-u) = \max_{t \geq t_{\max}} J_{\lambda}(tu)$;*

(ii) *$t^- : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional contínuo;*

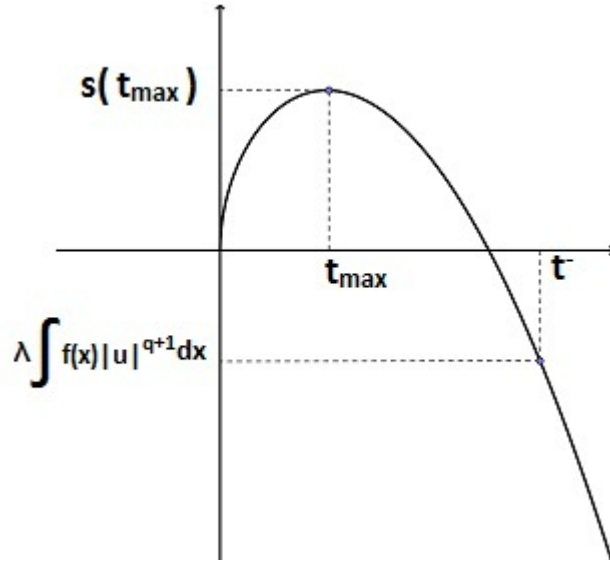
(iii) $\mathcal{M}_\lambda^- = \{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} : t^-(u/||u||) = ||u||\};$

(iv) se $\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx > 0$ então existe um único $0 < t^+ = t^+(u) < t_{\max}$ tal que $t^+u \in \mathcal{M}_\lambda^+$ e $J_\lambda(t^+u) = \min_{0 \leq t \leq t^-} J_\lambda(tu)$.

Demonstração: (i) A demonstração do primeiro item será dividida em dois casos:

Caso I: $\int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx \leq 0$.

Pela proposição anterior sabemos que s é decrescente para $t > t_{\max}$, que $s(t_{\max}) > 0$ e que $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = -\infty$. Então existe um único $t^- > t_{\max}$ tal que $s(t^-) = \lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx$ e por sua vez $s'(t^-) < 0$, como mostra a figura a seguir.



Agora, observe que para $t > 0$ temos

$$\begin{aligned} \langle J'_\lambda(tu), tu \rangle &= ||tu||^2 - \int_\Omega |tu|^{p+1}dx - \lambda \int_\Omega f(x)|tu|^{q+1}dx \\ &= t^2||u||^2 - t^{p+1} \int_\Omega |u|^{p+1}dx - t^{q+1}\lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx \\ &= t^{q+1} \left[t^{1-q}||u||^2 - t^{p-q} \int_\Omega |u|^{p+1}dx - \lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Assim, para $t = t^-$ temos

$$\begin{aligned} \langle J'_\lambda(t^-u), t^-u \rangle &= (t^-)^{q+1} \left[s(t^-) - \lambda \int_\Omega f(x)|u|^{q+1}dx \right] \\ &= (t^-)^{q+1} [s(t^-) - s(t^-)] = 0 \end{aligned}$$

o que implica que $t^-u \in \mathcal{M}_\lambda$ e consequentemente

$$\lambda \int_\Omega f(x)|t^-u|^{q+1}dx = ||t^-u||^2 - \int_\Omega |t^-u|^{p+1}dx.$$

Observe também que para $t > 0$

$$\begin{aligned}
& (1-q)||tu||^2 - (p-q) \int_{\Omega} |tu|^{p+1} dx \\
&= (1-q)t^2||u||^2 - (p-q)t^{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \\
&= t^{2+q} \left[(1-q)t^{-q}||u||^2 - (p-q)t^{p-q-1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \right]. \\
&= t^{2+q} [s'(t)].
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Assim para $t = t^-$

$$(1-q)||t^-u||^2 - (p-q) \int_{\Omega} |t^-u|^{p+1} dx = (t^-)^{2+q} s'(t^-) < 0.$$

E ainda, se $tu \in \mathcal{M}_{\lambda}$

$$\begin{aligned}
\langle \psi'_{\lambda}(tu), tu \rangle &= 2||tu||^2 - (p+1) \int_{\Omega} |tu|^{p+1} dx - (q+1)\lambda \int_{\Omega} f(x)|tu|^{q+1} dx \\
&= 2||tu||^2 - (p+1) \int_{\Omega} |tu|^{p+1} dx - (q+1) \left(||tu||^2 - p \int_{\Omega} |tu|^{p+1} dx \right) \\
&= (1-q)||tu||^2 - (p-q) \int_{\Omega} |tu|^{p+1} dx.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Dessa forma, para $t = t^-$ segue que

$$\langle \psi'_{\lambda}(t^-u), t^-u \rangle = (1-q)||t^-u||^2 - (p-q) \int_{\Omega} |t^-u|^{p+1} dx < 0,$$

ou seja, $t^-u \in \mathcal{M}_{\lambda}^-$. Mostraremos agora que t^-u é o ponto de máximo para J_{λ} , se $t > t_{\max}$.

Temos

$$J_{\lambda}(tu) = \frac{t^2}{2}||u||^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx - \frac{t^{q+1}}{q+1} \lambda \int_{\Omega} f(x)|u|^{q+1} dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} J_{\lambda}(tu) &= t||u||^2 - t^p \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx - t^q \lambda \int_{\Omega} f(x)|u|^{q+1} dx \\
&= t^q \left[t^{1-q}||u||^2 - t^{p-q} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx - \lambda \int_{\Omega} f(x)|u|^{q+1} dx \right] \\
&= t^q [s(t) - s(t^-)].
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Como $s(t) > 0$ em $(0, t_{\max})$, s é decrescente em $(t_{\max}, \infty)$, e estamos supondo $s(t^-) \leq 0$ segue que

$$\frac{d}{dt} J_{\lambda}(tu) \begin{cases} > 0, & \text{em } (0, t^-) \\ = 0, & \text{em } t^- \\ < 0, & \text{em } (t^-, \infty) \end{cases} \tag{2.11}$$

Consequentemente $J_\lambda(\cdot u)$ é crescente em $(0, t^-)$, $\frac{d}{dt}J(t^-u) = 0$ e $J_\lambda(\cdot u)$ é decrescente em (t^-, ∞) , logo t^- é o único ponto crítico de $J_\lambda(\cdot u)$, o qual é ponto de máximo. Portanto $J_\lambda(t^-u) = \max_{t>0} J_\lambda(tu)$.

Caso II: $\int_{\Omega} f(x)|u|^{q+1}dx > 0$.

Como $s(0) = 0$, pela desigualdade de Hölder, Teorema B.1, temos

$$s(0) = 0 < \lambda \int_{\Omega} f(x)|u|^{q+1}dx \leq \lambda \|f\|_{L^\sigma} \|u\|_{L^{p+1}}^{q+1} \leq \lambda \|f\|_{L^\sigma} A^{q+1} \|u\|^{q+1}.$$

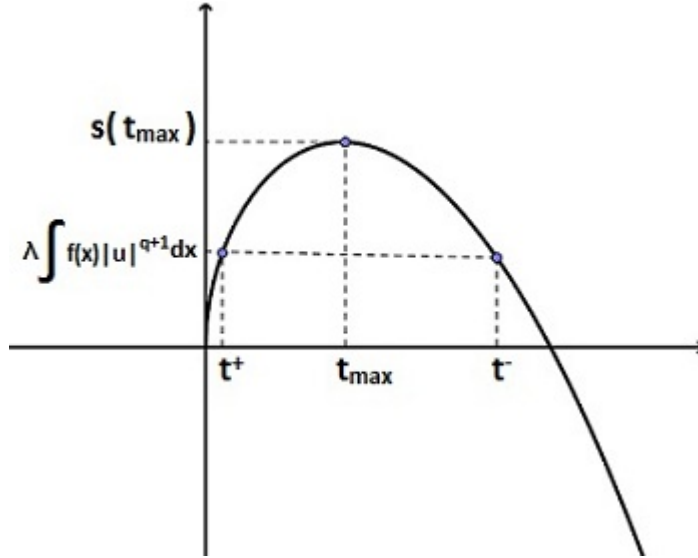
Assim para cada $u \in H_0^1$ e $\lambda \in (0, \Lambda_2)$, pelo Lema 2.4 temos

$$\begin{aligned} 0 < \lambda \int_{\Omega} f(x)|u|^{q+1}dx &< \left[\left(\frac{p-1}{p-q} \right) \left(\frac{1-q}{p-q} \right)^{\frac{1-q}{p-1}} A^{\frac{2(q-p)}{p-1}} \|f\|_{L^\sigma}^{-1} \right] \|f\|_{L^\sigma} A^{q+1} \|u\|^{q+1} \\ &= \left(\frac{p-1}{p-q} \right) \left(\frac{1-q}{p-q} \right)^{\frac{1-q}{p-1}} \left(\frac{1}{A^{p+1}} \right)^{\frac{1-q}{p-1}} \|u\|^{q+1} \leq s(t_{\max}). \end{aligned}$$

Logo, existem únicos t^+ e t^- onde $0 < t^+ < t_{\max} < t^-$, tais que

$$s(t^+) = \lambda \int_{\Omega} f(x)|u|^{q+1}dx = s(t^-)$$

e tem-se $s'(t^-) < 0$ e $s'(t^+) > 0$. Veja a figura abaixo.



Por (2.7), temos

$$\langle J'_\lambda(tu), tu \rangle = (t)^{q+1} [s(t) - s(t^-)],$$

de modo que para $t = t^+$ ou $t = t^-$ tem-se $\langle J'_\lambda(tu), tu \rangle = 0$, ou seja, $t^+u, t^-u \in \mathcal{M}_\lambda$. Por (2.8) e (2.9) obtemos

$$\langle \psi'_\lambda(tu), tu \rangle = (t)^{2+q} (s'(t)). \quad (2.12)$$

Podemos concluir então que $\langle \psi'_\lambda(t^+u), t^+u \rangle > 0$ e $\langle \psi'_\lambda(t^-u), t^-u \rangle < 0$, e por sua vez, $t^+u \in \mathcal{M}_\lambda^+$ e $t^-u \in \mathcal{M}_\lambda^-$. Como s é crescente para $t \in (0, t_{\max})$ e decrescente para $t \in (t_{\max}, \infty)$, sabendo que vale (2.10) temos

$$\frac{d}{dt} J_\lambda(tu) = t^q [s(t) - s(t^-)] \begin{cases} < 0, & \text{em } (0, t^+) \cup (t^-, \infty) \\ = 0, & \text{em } t^+ \text{ e } t^- \\ > 0, & \text{em } (t^+, t^-). \end{cases} \quad (2.13)$$

Então

$$J_\lambda(t^-u) = \max_{t \geq t^+} J_\lambda(tu) \quad \text{e} \quad J_\lambda(t^+u) = \min_{0 \leq t \leq t^-} J_\lambda(tu).$$

Isto prova (i) e (iv).

(ii) Seja $t^- : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida em (i). Suponhamos que t^- não é uma função contínua. Então existem (u_n) , $u_0 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tais que u_n converge para u_0 em $H_0^1(\Omega)$ e $|t^-(u_n) - t^-(u_0)| \geq \rho > 0$. Como $u_n \rightarrow u_0$ temos que

$$\lambda \int_{\Omega} f(x) |u_n|^{q+1} dx \rightarrow \lambda \int_{\Omega} f(x) |u_0|^{q+1} dx,$$

donde $\lambda \int_{\Omega} f(x) |u_n|^{q+1} dx$ é uma sequência limitada. Pela Proposição 2.4 para cada $u_n \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ temos que

$$s_n(t^-(u_n)) = \lambda \int_{\Omega} f(x) |u_n|^{q+1} dx.$$

Daí existe $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned} c \geq |s_n(t^-(u_n))| &= \left| (t^-(u_n))^{(1-q)} \|u_n\|^2 - (t^-(u_n))^{p-q} \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx \right| \\ &\geq (t^-(u_n))^{p-q} \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx - (t^-(u_n))^{(1-q)} \|u_n\|^2 \\ &> (t^-(u_n))^{(p-q)} \frac{\|u_0\|_{L^{p+1}}^{p+1}}{2} - (t^-(u_n))^{(1-q)} \frac{3\|u_0\|^2}{2}. \end{aligned}$$

Assim

$$c_1(t^-(u_n))^{(p-q)} - c_2(t^-(u_n))^{(1-q)} \leq c$$

onde $c_1 = \frac{\|u_0\|_{L^{p+1}}^{p+1}}{2}$ e $c_2 = \frac{3\|u_0\|^2}{2}$. Logo $t^-(u_n)$ é limitada o que implica que existe $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tal que $t^-(u_n) \rightarrow \bar{t}$, a menos de subsequência. Sendo $t^-(u_n) > t_{\max}(u_n)$ para todo natural n e $t_{\max}(u_n) \rightarrow t_{\max}(u_0)$ segue que $\bar{t} \geq t_{\max}(u_0)$. Daí, pela definição de s_n vemos que $s_n(t^-(u_n)) \rightarrow s_0(\bar{t})$. Mas temos que

$$s_n(t^-(u_n)) = \int_{\Omega} f(x) |u_n|^{q+1} dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) |u_0|^{q+1} dx = s_0(t^-(u_0)).$$

Pela unicidade do limite temos que $s_0(t^-(u_0)) = s_0(\bar{t})$. Isto é uma contradição pois s_0 é injetiva em $[t_{\max}(u_0), \infty)$ e $t^-(u_0) \neq \bar{t}$. Portanto t^- é contínuo.

(iii) Seja $u \in \mathcal{M}_\lambda^-$ e $v = u/||u||$. Pelo item (i), existe um único $t^-(v) > 0$ tal que $t^-(v)v \in \mathcal{M}_\lambda^-$, isto é, $t^-(u/||u||)(1/||u||)u \in \mathcal{M}_\lambda^-$. Como já temos que $u \in \mathcal{M}_\lambda^-$, então

$$t^-\left(\frac{u}{||u||}\right) \frac{1}{||u||} = 1$$

isto implica que

$$\mathcal{M}_\lambda^- \subset \left\{ u \in H_0^1 \setminus \{0\} \mid \frac{1}{||u||} t^-\left(\frac{u}{||u||}\right) = 1 \right\}.$$

Reciprocamente, seja $u \in H_0^1 \setminus \{0\}$ tal que $t^-(u/||u||) = ||u||$. Então

$$u = t^-\left(\frac{u}{||u||}\right) \frac{u}{||u||} \in \mathcal{M}_\lambda^-.$$

Assim

$$\left\{ u \in H_0^1 \setminus \{0\} \mid \frac{1}{||u||} t^-\left(\frac{u}{||u||}\right) = 1 \right\} \subset \mathcal{M}_\lambda^-.$$

Logo

$$\mathcal{M}_\lambda^- = \left\{ u \in H_0^1 \setminus \{0\}(\Omega) \mid \frac{1}{||u||} t^-\left(\frac{u}{||u||}\right) = 1 \right\}$$

o que conclui a prova do lema. ■

2.3 Estimativas para o ínfimo de J_λ em $\mathcal{M}_\lambda$

Para encontrarmos um minimizante para o funcional J_λ precisamos primeiramente verificar que este é limitado inferiormente, o que faremos no próximo lema.

Lema 2.6 *O funcional J_λ é coercivo e limitado inferiormente na variedade $\mathcal{M}_\lambda$ para todo $\lambda \in \left(0, \frac{p-1}{p-q}\right)$.*

Demonstração: Se $u \in \mathcal{M}_\lambda$ então $\langle J'_\lambda(u), u \rangle = 0$, daí

$$\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx = ||u||^2 - \lambda \int_{\Omega} f(x) |u|^{q+1} dx.$$

Segue então que

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \frac{1}{2} ||u||^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} f(x) |u|^{q+1} dx \\ &= \frac{1}{2} ||u||^2 - \frac{1}{p+1} \left(||u||^2 - \lambda \int_{\Omega} f(x) |u|^{q+1} dx \right) - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} f(x) |u|^{q+1} dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) ||u||^2 - \lambda \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1} \right) \int_{\Omega} f(x) |u|^{q+1} dx \\ &= \left(\frac{p-1}{2(p-1)} \right) ||u||^2 - \lambda \left(\frac{p-q}{(p+1)(q+1)} \right) \int_{\Omega} f(x) |u|^{q+1} dx. \end{aligned}$$

Pela imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega)$ e pela desigualdade de Hölder, sendo $\sigma = \frac{p+1}{p-q}$ temos

$$J_\lambda(u) \geq \left(\frac{p-1}{2(p+1)} \right) \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{p-q}{(q+1)(p+1)} \|f\|_{L^\sigma} A^{q+1} \|u\|^{q+1} \right).$$

Pela desigualdade de Young, como $\frac{q+1}{2} + \frac{1-q}{2} = 1$, temos que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\sigma} A^{q+1} \|u\|^{q+1} &\leq \frac{1-q}{2} (\|f\|_{L^\sigma} A^{q+1})^{\frac{2}{1-q}} + \frac{q+1}{2} (\|u\|^{q+1})^{\frac{2}{q+1}} \\ &= \frac{1-q}{2} (\|f\|_{L^\sigma} A^{q+1})^{\frac{2}{1-q}} + \frac{q+1}{2} \|u\|^2. \end{aligned}$$

Assim, se $u \in \mathcal{M}_\lambda$ temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \left[\frac{p-1}{2(p+1)} - \lambda \left(\frac{p-q}{2(p+1)} \right) \right] \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{(p-q)(1-q)}{2(q+1)(p+1)} \right) (\|f\|_{L^\sigma} A^{q+1})^{\frac{2}{1-q}} \\ &\geq \frac{1}{2(p+1)} [(p-1) - \lambda(p-q)] \|u\|^2 - \lambda \left(\frac{(p-q)(1-q)}{2(q+1)(p+1)} \right) (\|f\|_{L^\sigma} A^{q+1})^{\frac{2}{1-q}}. \end{aligned}$$

Dessa forma, para todo $\lambda \in \left(0, \frac{p-1}{p-q}\right)$, temos que

$$(p-1) - \lambda(p-q) > 0$$

e conseqüentemente, $J_\lambda(u) \rightarrow +\infty$ quando $\|u\| \rightarrow +\infty$, ou seja, J_λ é coercivo em $\mathcal{M}_\lambda$. Além disso,

$$J_\lambda(u) \geq -\lambda \left(\frac{(p-q)(1-q)}{2(q+1)(p+1)} \right) (\|f\|_{L^\sigma} A^{q+1})^{\frac{2}{1-q}}, \quad \forall u \in \mathcal{M}_\lambda. \quad (2.14)$$

Logo, $J_\lambda(u)$ é limitado inferiormente para todo $\lambda \in \left(0, \frac{p-1}{p-q}\right)$. ■

Afim de obtermos algumas estimativas para o ínfimo do funcional J_λ em $\mathcal{M}_\lambda^+$ e $\mathcal{M}_\lambda^-$, vamos considerar o conjunto onde a função f é estritamente positiva. Seja Θ uma bola contida no conjunto $\{x \in \Omega; f(x) > 0\}$, e considere a equação

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p, & \text{em } \Theta \\ 0 \leq u \in H_0^1(\Theta). \end{cases} \quad (2.15)$$

O funcional associado a equação (2.15) é $K : H_0^1(\Theta) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$K(u) = \frac{1}{2} \int_\Theta |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_\Theta |u|^{p+1} dx$$

e $N(\Theta) = \{u \in H_0^1 \setminus \{0\} | \langle K'(u), u \rangle = 0\}$ é a variedade de Nehari associada a K . No Capítulo 1 mostramos que o problema (2.15) possui uma solução positiva w_0 no nível do Passo da Montanha. Além disso, pela Proposição 1.10, definindo

$$\beta(\Theta) = \inf_{u \in N(\Theta)} K(u),$$

temos que $K(w_0) = \beta(\Theta) = c_{PM}$, ou seja, o ínfimo do funcional na variedade de Nehari, que é atingido em w_0 , coincide com o nível do Passo da Montanha.

Para encontrarmos um minimizante para o funcional J_λ precisamos verificar algumas propriedades enunciadas no lema a seguir, onde

$$\begin{aligned}\alpha_\lambda &:= \inf\{J_\lambda(u) : u \in \mathcal{M}_\lambda\}, \\ \alpha_\lambda^+ &:= \inf\{J_\lambda(u) : u \in \mathcal{M}_\lambda^+\} \quad \text{e} \\ \alpha_\lambda^- &:= \inf\{J_\lambda(u) : u \in \mathcal{M}_\lambda^-\}.\end{aligned}$$

Lema 2.7 Para $0 < \lambda < \min\left\{\frac{p-1}{p-q}, \Lambda_2\right\}$ existe $t_\lambda > 0$ tal que

$$\alpha_\lambda \leq \alpha_\lambda^+ < -\frac{1-q}{q+1}t_\lambda^2\beta(\Theta) < 0.$$

Demonstração: Seja w_0 uma solução positiva da equação (2.15) tal que $K(w_0) = \beta(\Theta)$. Então, uma vez que $\Theta \subset \Omega$, definindo $w_0 \equiv 0$ em $\Omega \setminus \Theta$, temos que

$$\int_\Omega f(x)w_0^{q+1}dx = \int_\Theta f(x)w_0^{q+1}dx > 0,$$

pois $f(x) > 0$ em Θ . Segue do Lema 2.5(iv) que existe um único $0 < t_\lambda = t^+(w_0)$ tal que $t_\lambda w_0 \in \mathcal{M}_\lambda^+$ e tem-se

$$s(t_\lambda) = \lambda \int_\Omega f(x)w_0^{q+1}dx > 0.$$

Pela definição de s temos

$$t_\lambda^{1-q}||w_0||^2 - t_\lambda^{p-q} \int_\Omega w_0^{p+1}dx = \lambda \int_\Omega f(x)w_0^{q+1}dx.$$

Dessa forma

$$\begin{aligned}J_\lambda(t_\lambda w_0) &= \frac{1}{2}||t_\lambda w_0||^2 - \frac{1}{p+1} \int_\Omega (t_\lambda w_0)^{p+1}dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega f(x)(t_\lambda w_0)^{q+1}dx \\ &= \frac{t_\lambda^2}{2}||w_0||^2 - \frac{t_\lambda^{p+1}}{p+1} \int_\Omega w_0^{p+1}dx - \frac{\lambda t_\lambda^{q+1}}{q+1} \int_\Omega f(x)w_0^{q+1}dx \\ &= \frac{t_\lambda^2}{2}||w_0||^2 - \frac{t_\lambda^{p+1}}{p+1} \int_\Omega w_0^{p+1}dx - \frac{t_\lambda^{q+1}}{q+1} \left(t_\lambda^{1-q}||w_0||^2 - t_\lambda^{p-q} \int_\Omega w_0^{p+1}dx \right) \\ &= \frac{t_\lambda^2}{2}||w_0||^2 - \frac{t_\lambda^{p+1}}{p+1} \int_\Omega w_0^{p+1}dx - \frac{t_\lambda^2}{q+1}||w_0||^2 + \frac{t_\lambda^{p+1}}{q+1} \int_\Omega w_0^{p+1}dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) t_\lambda^2||w_0||^2 + \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1} \right) t_\lambda^{p+1} \int_\Omega w_0^{p+1}dx.\end{aligned}$$

Como w_0 é solução de (2.15)

$$-\Delta w_0 = w_0^p \quad \Rightarrow \quad ||w_0||^2 = \int_\Theta w_0^{p+1}dx.$$

Sendo $0 < t_\lambda < t_{\max}$, temos

$$t_\lambda < t_{\max} = \left(\frac{(1-q)||w_0||^2}{(p-q) \int_{\Theta} |w_0|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\frac{1-q}{p-q} \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} J_\lambda(t_\lambda w_0) &= \left(\frac{q-1}{2(q+1)} \right) t_\lambda^2 ||w_0||^2 + \left(\frac{p-q}{(q+1)(p+1)} \right) t_\lambda^{p+1} \int_{\Omega} |w_0|^{p+1} dx \\ &= -\frac{1-q}{q+1} t_\lambda^2 \left(\frac{1}{2} ||w_0||^2 - \left(\frac{p-q}{1-q} \right) \frac{1}{p+1} t_\lambda^{p-1} \int_{\Omega} |w_0|^{p+1} dx \right) \\ &< -\frac{1-q}{q+1} t_\lambda^2 \left(\frac{1}{2} ||w_0||^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |w_0|^{p+1} dx \right) \\ &= -\frac{1-q}{q+1} t_\lambda^2 \beta(\Theta) < 0. \end{aligned}$$

E ainda, como $\mathcal{M}_\lambda^+ \subset \mathcal{M}_\lambda$ temos $\alpha_\lambda \leq \alpha_\lambda^+$. Sendo $t_\lambda = t^+$ então $t_\lambda w_0 \in \mathcal{M}_\lambda^+$ e

$$\alpha_\lambda \leq \alpha_\lambda^+(\Omega) \leq J_\lambda(t_\lambda w_0) < -\frac{1-q}{q+1} t_\lambda^2 \beta(\Theta) < 0$$

como desejado. ■

2.4 Existência de seqüências minimizantes para J_λ

Apresentaremos agora dois lemas essenciais para mostrar a existência de seqüências minimizantes que sejam seqüências (PS) para J_λ em $\mathcal{M}_\lambda$ e em $\mathcal{M}_\lambda^-$, a partir do Teorema da Função Implícita para espaços de Banach.

Lema 2.8 *Considere $\lambda \in (0, \Lambda_1)$. Para cada $u \in \mathcal{M}_\lambda$, existem $\varepsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi : B(0, \varepsilon) \subset H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\xi(0) = 1$, a função $\xi(v)(u-v) \in \mathcal{M}_\lambda$ e*

$$\langle \xi'(0), w \rangle = \frac{2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla w dx - (p+1) \int_{\Omega} |u|^{p-1} u w dx - (q+1) \lambda \int_{\Omega} f(x) |u|^{q-1} u w dx}{(1-q) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p-q) \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx} \quad (2.16)$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Para $u \in \mathcal{M}_\lambda$, defina uma função $F : \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(\tau, w) = \langle J'_\lambda(\tau(u-w)), \tau(u-w) \rangle.$$

Pela definição de J'_λ

$$\begin{aligned} F(\tau, w) &= \int_{\Omega} |\nabla(\tau(u-w))|^2 dx - \int_{\Omega} |\tau(u-w)|^{p+1} dx - \lambda \int_{\Omega} f(x) |\tau(u-w)|^{q+1} dx \\ &= \tau^2 \int_{\Omega} |\nabla(u-w)|^2 dx - \tau^{p+1} \int_{\Omega} |u-w|^{p+1} dx - \lambda \tau^{q+1} \int_{\Omega} f(x) |u-w|^{q+1} dx. \end{aligned}$$

Como $u \in \mathcal{M}_\lambda$, obtemos

$$F(1, 0) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx - \lambda \int_{\Omega} f(x) |u|^{q+1} dx = \langle J'_\lambda(u), u \rangle = 0.$$

Derivando F em relação a τ temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} F(\tau, w) &= 2\tau \int_{\Omega} |\nabla(u-w)|^2 dx - (p+1)\tau^p \int_{\Omega} |(u-w)|^{p+1} dx \\ &\quad - \lambda(q+1)\tau^q \int_{\Omega} f(x) |u-w|^{q+1} dx. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.3 temos que $\langle \psi'_\lambda(u), u \rangle \neq 0$, para todo $u \in \mathcal{M}_\lambda$, daí

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} F(1, 0) &= 2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p+1) \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx - \lambda(q+1) \int_{\Omega} f(x) |u|^{q+1} dx \\ &= (1-q) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p-q) \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx = \langle \psi'_\lambda(u), u \rangle \neq 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w} F(\tau, w)(\zeta) &= -2\tau^2 \int_{\Omega} \nabla(u-w) \nabla \zeta dx \\ &\quad + (p+1)\tau^{p+1} \int_{\Omega} |u-w|^{p-1} (u-w) \zeta dx \\ &\quad + (q+1)\tau^{q+1} \lambda \int_{\Omega} f(x) |u-w|^{q-1} (u-w) \zeta dx. \end{aligned}$$

Daí

$$\frac{\partial}{\partial w} F(1, 0)\zeta = -2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla \zeta dx + (p+1) \int_{\Omega} |u|^{p-1} u \zeta dx + (q+1)\lambda \int_{\Omega} f(x) |u|^{q-1} u \zeta dx$$

Assim, pelo Teorema da Função Implícita existem $\varepsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi : B(0, \varepsilon) \subset H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\xi(0) = 1$, $F(\xi(v), v) = 0$, para todo $v \in B(0, \varepsilon)$ e

$$\begin{aligned} \langle \xi'(0), v \rangle &= \frac{-\frac{\partial F}{\partial w}(1, 0)v}{\frac{dF}{d\tau}(1, 0)} \\ &= \frac{2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - (p+1) \int_{\Omega} |u|^{p-1} u v dx - (q+1)\lambda \int_{\Omega} f(x) |u|^{q-1} u v dx}{(1-q) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p-q) \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx}. \end{aligned}$$

Pela definição de F obtemos

$$\langle J'_\lambda(\xi(v)(u-v)), \xi(v)(u-v) \rangle = 0$$

para todo $v \in B(0, \varepsilon)$. Logo $\xi(v)(u-v) \in \mathcal{M}_\lambda$, o que prova o lema. ■

Lema 2.9 Considere $\lambda \in (0, \Lambda_1)$. Para cada $u \in \mathcal{M}_\lambda^-$, existem $\varepsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi^- : B(0, \varepsilon) \subset H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\xi^-(0) = 1$, a função $\xi^-(v)(u-v) \in \mathcal{M}_\lambda^-$ e

$$\langle (\xi^-)'(0), w \rangle = \frac{2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla w dx - (p+1) \int_{\Omega} |u|^{p-1} u w dx - (q+1)\lambda \int_{\Omega} f(x) |u|^{q-1} u w dx}{(1-q) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - (p-q) \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx} \quad (2.17)$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{M}_\lambda^-$, em particular, $u \in \mathcal{M}_\lambda$, então segue do Lema 2.8 que existe $\varepsilon > 0$ e uma função diferenciável $\xi^- : B(0, \varepsilon) \subset H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\xi^-(0) = 1$,

$$\langle (\xi^-)'(0), w \rangle = \frac{2 \int_\Omega \nabla u \nabla w dx - (p+1) \int_\Omega |u|^{p-1} u w dx - (q+1) \int_\Omega f(x) |u|^{q-1} u w dx}{(1-q) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - (p-q) \int_\Omega |u|^{p+1} dx}$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$ e $\xi(v)(u-v) \in \mathcal{M}_\lambda$ para todo $v \in B(0, \varepsilon)$. Basta então mostrar que $\xi(v)(u-v) \in \mathcal{M}_\lambda^-(\Omega)$. Como $u \in \mathcal{M}_\lambda^-$ temos que

$$\langle \psi'_\lambda(u), u \rangle < 0.$$

Pela continuidade das funções ψ_λ e ξ^- , tomando ε suficientemente pequeno temos

$$\langle \psi'_\lambda(\xi^-(v)(u-v)), \xi^-(v)(u-v) \rangle < 0 \quad \forall v \in B(0, \varepsilon).$$

Isto implica que $\xi^-(v)(u-v) \in \mathcal{M}_\lambda^-$. ■

A proposição a seguir mostra a existência de seqüências minimizantes em $M_\lambda(\Omega)$ e $M_\lambda^-(\Omega)$ que sejam seqüências (PS).

Proposição 2.10 *Seja $\Lambda_0 = \min\{\Lambda_1, \Lambda_2, \frac{p-1}{p-q}\}$ então para $\lambda \in (0, \Lambda_0)$,*

(i) existe uma seqüência minimizante $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_\lambda$ tal que

$$J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda + o(1) \quad e \quad J'_\lambda(u_n) = o(1) \quad em \quad H^{-1}(\Omega).$$

(ii) existe uma seqüência minimizante $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_\lambda^-$ tal que

$$J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda^- + o(1) \quad e \quad J'_\lambda(u_n) = o(1) \quad em \quad H^{-1}(\Omega).$$

Demonstração: (i) Pelo Lema 2.6, temos que J_λ é coercivo e limitado inferiormente em $\mathcal{M}_\lambda$ para todo $\lambda \in (0, \frac{p-1}{p-q})$. Sendo $\alpha_\lambda = \inf\{J_\lambda(u); u \in \mathcal{M}_\lambda\}$, pelo Princípio Variacional de Ekeland, Teorema B.5, existe uma seqüência minimizante $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_\lambda$ tal que

$$J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda + \frac{1}{n} \quad e \tag{2.18}$$

$$J_\lambda(u_n) < J_\lambda(w) + \frac{1}{n} \|w - u_n\| \quad \text{para cada } w \in \mathcal{M}_\lambda. \tag{2.19}$$

Dessa forma, esta seqüência u_n satisfaz a primeira condição de (i). Basta mostrar então que $J'(u_n) = o(1)$ em $H^{-1}(\Omega)$. Pelo Lema 2.7 temos que existe $t_\lambda > 0$ tal que

$$\alpha_\lambda < -\frac{1-q}{q+1} t_\lambda^2 \beta(\Theta) < 0.$$

Como $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_\lambda$ temos

$$\int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx = \|u_n\|^2 - \lambda \int_{\Omega} f(x) |u_n|^{q+1} dx.$$

Tomando n grande, por (2.18) temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(u_n) &= \frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \frac{1}{p+1} \left(\|u_n\|^2 - \lambda \int_{\Omega} f(x) |u_n|^{q+1} dx \right) - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} f(x) |u_n|^{q+1} dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|u_n\|^2 - \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1} \right) \lambda \int_{\Omega} f(x) |u_n|^{q+1} dx \\ &= \alpha_\lambda + \frac{1}{n} < -\frac{1-q}{q+1} t_\lambda^2 \beta(\Theta). \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\frac{(p-q)}{(q+1)(p+1)} \lambda \int_{\Omega} f(x) |u_n|^{q+1} dx > \left(\frac{p-1}{2(p+1)} \right) \|u_n\|^2 + \frac{1-q}{q+1} t_\lambda^2 \beta(\Theta) \geq \frac{1-q}{q+1} t_\lambda^2 \beta(\Theta).$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) |u_n|^{q+1} dx &\geq \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1-q}{q+1} t_\lambda^2 \beta(\Theta) \right) \frac{(q+1)(p+1)}{(p-q)} \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{(1-q)(p+1)}{(p-q)} t_\lambda^2 \beta(\Theta) > 0. \end{aligned}$$

Pela imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega)$ e pela desigualdade de Hölder temos

$$\|f\|_{L^\sigma} A^{q+1} \|u_n\|^{q+1} \geq \int_{\Omega} f(x) |u_n|^{q+1} dx > \frac{(1-q)(p+1)}{\lambda(p-q)} t_\lambda^2 \beta(\Theta) > 0,$$

consequentemente, $u_n \neq 0$ e para n grande temos

$$\|u_n\| > \left[\frac{(1-q)(p+1)}{\lambda(p-q)} t_\lambda^2 \beta(\Theta) \|f\|_{L^\sigma}^{-1} A^{-(q+1)} \right]^{\frac{1}{q+1}}. \quad (2.20)$$

Como por (2.18), $J_\lambda(u_n)$ é limitado e pelo Lema 2.6, é coercivo, então devemos ter (u_n) limitada, ou seja, existe $a > 0$ tal que $\|u_n\| \leq a$.

Mostraremos agora que $\|J'(u_n)\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Aplicando o Lema 2.8 com $u_n \in \mathcal{M}_\lambda$, temos que existem $\varepsilon_n > 0$ e $\xi_n : B(0, \varepsilon_n) \subset H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável tal que $\xi_n(w)(u_n - w) \in \mathcal{M}_\lambda$. Fixando $n \in \mathbb{N}$, considere $0 < \rho < \varepsilon_n$. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ com $u \neq 0$ e seja $w_\rho = (\rho/\|u\|)u$, de modo que $w_\rho \in B(0, \varepsilon_n)$. Definindo $\eta_\rho = \xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho)$ temos que $\eta_\rho \in \mathcal{M}_\lambda$, e por (2.19) temos

$$J_\lambda(\eta_\rho) - J_\lambda(u_n) \geq -\frac{1}{n} \|\eta_\rho - u_n\|.$$

Pela definição de diferenciabilidade temos que

$$J_\lambda(u_n + v) = J_\lambda(u_n) + \langle J'_\lambda(u_n), v \rangle + o(\|v\|)$$

onde $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{o(||v||)}{||v||} = 0$. Escrevendo $\eta_\rho = u_n + (\eta_\rho - u_n)$ temos

$$-\frac{1}{n}||\eta_\rho - u_n|| \leq J_\lambda(\eta_\rho) - J_\lambda(u_n) = \langle J'_\lambda(u_n), \eta_\rho - u_n \rangle + o(||\eta_\rho - u_n||). \quad (2.21)$$

Lembrando que $J'_\lambda(u_n)$ é linear, obtemos

$$\begin{aligned} \langle J'_\lambda(u_n), \eta_\rho - u_n \rangle &= \langle J'_\lambda(u_n), (\xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho)) - u_n \rangle \\ &= \xi_n(w_\rho) \langle J'_\lambda(u_n), u_n - w_\rho \rangle - \langle J'_\lambda(u_n), u_n \rangle + \langle J'_\lambda(u_n), w_\rho \rangle - \langle J'_\lambda(u_n), w_\rho \rangle \\ &= \xi_n(w_\rho) \langle J'_\lambda(u_n), (u_n - w_\rho) \rangle - \langle J'_\lambda(u_n), u_n - w_\rho \rangle - \langle J'_\lambda(u_n), w_\rho \rangle \\ &= (\xi_n(w_\rho) - 1) \langle J'_\lambda(u_n), u_n - w_\rho \rangle - \langle J'_\lambda(u_n), w_\rho \rangle. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Assim por (2.21) temos

$$(\xi_n(w_\rho) - 1) \langle J'_\lambda(u_n), u_n - w_\rho \rangle - \langle J'_\lambda(u_n), w_\rho \rangle \geq -\frac{1}{n}||\eta_\rho - u_n|| + o(||\eta_\rho - u_n||).$$

Como $\eta_\rho = \xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho) \in \mathcal{M}_\lambda$ temos que $\langle J'_\lambda(\eta_\rho), \eta_\rho \rangle = 0$, o que implica que

$$\xi_n(w_\rho) \langle J'_\lambda(\eta_\rho), u_n - w_\rho \rangle = 0.$$

Sendo $\xi_n(w_\rho) > 0$ segue que $\langle J'_\lambda(\eta_\rho), u_n - w_\rho \rangle = 0$. Por (2.22) temos

$$\begin{aligned} &(\xi_n(w_\rho) - 1) \langle J'_\lambda(u_n), u_n - w_\rho \rangle - (\xi_n(w_\rho) - 1) \langle J'_\lambda(\eta_\rho), u_n - w_\rho \rangle - \langle J'_\lambda(u_n), \frac{\rho u}{||u||} \rangle \\ &\geq -\frac{1}{n}||\eta_\rho - u_n|| + o(||\eta_\rho - u_n||) \end{aligned}$$

e consequentemente

$$(\xi_n(w_\rho) - 1) \langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(\eta_\rho), u_n - w_\rho \rangle + \frac{1}{n}||\eta_\rho - u_n|| + o(||\eta_\rho - u_n||) \geq \rho \left\langle J'_\lambda(u_n), \frac{u}{||u||} \right\rangle.$$

Assim

$$\begin{aligned} \left\langle J'_\lambda(u_n), \frac{u}{||u||} \right\rangle &\leq \frac{||\eta_\rho - u_n||}{n\rho} + \frac{o(||\eta_\rho - u_n||)}{\rho} \\ &\quad + \frac{(\xi_n(w_\rho) - 1)}{\rho} \langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(\eta_\rho), u_n - w_\rho \rangle. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Analizamos cada parcela separadamente. Temos

$$\begin{aligned} ||\eta_\rho - u_n|| &= ||\xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho) - u_n|| \\ &= ||\xi_n(w_\rho)u_n - \xi_n(w_\rho)w_\rho - u_n|| \\ &\leq ||\xi_n(w_\rho)u_n - u_n|| + |\xi_n(w_\rho)| ||w_\rho|| \\ &\leq |\xi_n(w_\rho) - 1| ||u_n|| + \rho |\xi_n(w_\rho)| \end{aligned} \quad (2.24)$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\xi_n(w_\rho) - 1|}{\rho} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\xi_n(w_\rho) - \xi_n(0)|}{\rho} \\
&= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\xi_n(\frac{\rho u}{||u||}) - \xi_n(0)|}{\rho} \\
&= |\xi'_n(0) \left(\frac{u}{||u||} \right)| \leq ||\xi'_n(0)||.
\end{aligned}$$

Como $\{u_n\}$ é limitada, sendo ξ_n contínuo, por (2.24) temos

$$\begin{aligned}
\limsup_{\rho \rightarrow 0} \frac{||\eta_\rho - u_n||}{n\rho} &\leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\xi_n(w_\rho) - 1| ||u_n|| + \rho |\xi_n(w_\rho)|}{n\rho} \\
&\leq a \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\xi_n(w_\rho) - 1|}{n\rho} + \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\xi_n(w_\rho)|}{n} \\
&\leq \frac{1}{n} (a ||\xi'_n(0)|| + \xi_n(0)) \\
&\leq \frac{c}{n} (||\xi'_n(0)|| + 1)
\end{aligned}$$

onde $c = \max\{a, 1\}$. Observe também que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \eta_\rho = \lim_{\rho \rightarrow 0} \xi_n(w_\rho)(u_n - w_\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \xi_n \left(\frac{\rho u}{||u||} \right) \left(u_n - \frac{\rho u}{||u||} \right) = \xi_n(0)(u_n) = u_n.$$

Dai

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(||\eta_\rho - u_n||)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(||\eta_\rho - u_n||)}{||\eta_\rho - u_n||} \frac{||\eta_\rho - u_n||}{\rho} = 0.$$

Além disso, como J'_λ é contínuo e $\eta_\rho \rightarrow u_n$ quando $\rho \rightarrow 0$, temos que $J'_\lambda(\eta_\rho) \rightarrow J'_\lambda(u_n)$ em $H^{-1}(\Omega)$. Logo

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(\eta_\rho), u_n - \eta_\rho \rangle| \leq ||J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(\eta_\rho)|| ||u_n - \eta_\rho|| = 0.$$

Dessa forma, se $\rho \rightarrow 0$ em (2.23), para um n fixado, podemos encontrar uma constante $c > 0$ independente de u e u_n tal que

$$\left\langle J'_\lambda(u_n), \frac{u}{||u||} \right\rangle \leq \frac{c}{n} (1 + ||\xi'_n(0)||).$$

Precisamos mostrar agora que $||\xi'_n(0)||$ é uniformemente limitado em n . Por (2.16) temos que

$$|\langle \xi'_n(0), v \rangle| \leq \frac{2|\int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx| + (p+1)|\int_\Omega |u_n|^{p-1} u_n v dx| + (q+1)\lambda |\int_\Omega f(x) |u_n|^{q-1} u_n v dx|}{|(1-q)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - (p-q)\int_\Omega |u_n|^{p+1} dx|}.$$

Como $||u_n|| \leq a$ segue que

$$\left| \int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx \right| = |\langle u, v \rangle| \leq ||u_n|| ||v|| \leq a ||v||.$$

Pela desigualdade de Hölder temos que

$$\left| \int_{\Omega} |u_n|^{p-1} u_n v dx \right| \leq \|u_n\|_{L^{p+1}}^p \|v\|_{L^{p+1}} \leq a^p A^{p+1} \|v\|$$

e ainda, como f é limitada e $\frac{q}{q+1} + \frac{1}{q+1} = 1$ temos

$$\left| \int_{\Omega} f(x) |u_n|^{q-1} u_n v dx \right| \leq c_1 \|u_n\|_{L^{q+1}}^q \|v\|_{L^{q+1}} \leq c_1 A^{q+1} a^q \|v\|.$$

Assim, tomando $b = \max\{a, a^p A^{p+1}, c_1 a^q A^{q+1}\} > 0$, temos que

$$\langle \xi'_n(0), v \rangle \leq \frac{b \|v\|}{|(1-q) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - (p-q) \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx|}.$$

Precisamos apenas mostrar que

$$\left| (1-q) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - (p-q) \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx \right| > c \quad (2.25)$$

para algum $c > 0$ e n grande o suficiente. Argumentamos por contradição. Assumamos que existe uma subsequência de $\{u_n\}$ ainda denotada por $\{u_n\}$ que satisfaz

$$(1-q) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - (p-q) \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx = o(1).$$

ou ainda

$$\|u_n\|^2 = \frac{p-q}{1-q} \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx + o(1) \quad (2.26)$$

Por (2.20) existe $d_1 > 0$ tal que $\|u_n\| > d_1$, para n suficientemente grande. Assim, por (2.26)

$$\int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx = \frac{1}{p-q} ((1-q)\|u_n\|^2 + o(1)) \geq \frac{1}{p-q} ((1-q)d_1^2 + o(1)) \geq d \quad (2.27)$$

para todo n suficientemente grande, onde $d = \frac{d_1^2(1-q)}{2(p-q)} > 0$. Unindo o fato de que $u_n \in \mathcal{M}_{\lambda}$ e (2.26) obtemos

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} f(x) |u_n|^{q+1} dx &= \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx \\ &= \frac{p-q}{1-q} \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx - \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx + o(1) \\ &= \frac{p-1}{1-q} \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx + o(1) \\ &= \frac{p-1}{1-q} \left(\frac{1-q}{p-q} \right) \|u_n\|^2 + o(1) = \frac{p-1}{p-q} \|u_n\|^2 + o(1) \end{aligned} \quad (2.28)$$

o que implica

$$\left(\frac{p-1}{p-q} \right) \|u_n\|^2 \leq \lambda \|f\|_{L^{\sigma}} A^{q+1} \|u_n\|^{q+1} + o(1).$$

Logo,

$$\|u_n\| \leq \left[\lambda \left(\frac{p-q}{p-1} \right) \|f\|_{L^\sigma} A^{q+1} \right]^{\frac{1}{1-q}} + o(1). \quad (2.29)$$

Considerando $I_\lambda : \mathcal{M}_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ definido no Lema 2.3, por (2.26) temos

$$I_\lambda(u_n) = C(p, q) \left(\frac{\|u_n\|^{2p}}{\int_\Omega |u_n|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}} - \lambda \int_\Omega f(x) |u_n|^{q+1} dx.$$

Segue de (2.26) e (2.28) que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) &= \left(\frac{1-q}{p-q} \right)^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{p-1}{1-q} \right) \left(\frac{\left(\frac{p-q}{1-q} \right)^p \left(\int_\Omega |u_n|^{p+1} dx \right)^p}{\int_\Omega |u_n|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}} - \frac{p-1}{1-q} \int_\Omega |u_n|^{p+1} dx + o(1) \\ &= \left(\frac{p-1}{1-q} \right) \left[\left(\frac{1-q}{p-q} \right)^{\frac{p}{p-1}} \left(\frac{p-q}{1-q} \right)^{\frac{p}{p-1}} \int_\Omega |u_n|^{p+1} dx - \int_\Omega |u_n|^{p+1} dx \right] + o(1) \\ &= o(1). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Por outro lado, como $\lambda \in (0, \Lambda_0)$, por (2.27), (2.29) temos

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) &= C(p, q) \left(\frac{\|u_n\|^{2p}}{\int_\Omega |u_n|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}} - \lambda \int_\Omega f(x) |u_n|^{q+1} dx \\ &\geq C(p, q) \left(\frac{\|u_n\|^{2p}}{\int_\Omega |u_n|^{p+1} dx} \right)^{\frac{1}{p-1}} - \lambda \|f\|_{L^\sigma} \|u_n\|_{L^{p+1}}^{q+1}. \\ &= \|u_n\|_{L^{p+1}}^{(q+1)} \left(C(p, q) \frac{\|u_n\|^{2p}}{\|u_n\|_{L^{p+1}}^{(q+1)(p-1)+(p+1)}} \right)^{\frac{1}{p-1}} - \lambda \|f\|_{L^\sigma} \|u_n\|_{L^{p+1}}^{q+1}. \end{aligned}$$

Usando a continuidade da imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{p+1}(\Omega)$ temos

$$\|u_n\|_{L^{p+1}}^{(q+1)(p-1)+(p+1)} \leq A^{(q+1)(p-1)+(p+1)} \|u_n\|^{(q+1)(p-1)+(p+1)} = A^{q(p-1)+2p} \|u_n\|^{q(p-1)+2p}.$$

Assim, segue de (2.29) que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) &\geq \|u_n\|_{L^{p+1}}^{q+1} \left(C(p, q) \left(\frac{\|u_n\|^{2p}}{A^{q(p-1)+2p} \|u_n\|^{q(p-1)+2p}} \right)^{\frac{1}{p-1}} - \lambda \|f\|_{L^\sigma} \right) \\ &= \|u_n\|_{L^{p+1}}^{q+1} \left(C(p, q) \left(\frac{1}{A^{q(p-1)+2p}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \left(\frac{1}{\|u_n\|^q} \right) - \lambda \|f\|_{L^\sigma} \right) \\ &\geq \|u_n\|_{L^{p+1}}^{q+1} \left\{ C(p, q) \left(\frac{1}{A^{q(p-1)+2p}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \left[\lambda \left(\frac{p-q}{p-1} \right) \|f\|_{L^\sigma} A^{q+1} \right]^{\frac{-q}{1-q}} - \lambda \|f\|_{L^\sigma} \right\}. \end{aligned}$$

Como $\lambda \leq \Lambda_1$ temos que o termo entre chaves é positivo, então por (2.27) temos que $I_\lambda(u_n) \geq c > 0$ para todo n suficientemente grande. Isto contradiz (2.30). Logo

$$\left\langle J'_\lambda(u_n), \frac{u}{\|u\|} \right\rangle \leq \frac{c}{n}$$

daí, $J'_\lambda(u_n) = o(1)$ em $H^{-1}(\Omega)$.

(ii) Vamos omitir a demonstração, pois provamos (ii) de forma similar a (i) usando o Lema 2.9. ■

2.5 Existência de soluções

Vamos, agora, demonstrar três resultados que provam o Teorema 2.1. O seguinte lema mostra que os minimizantes locais em $\mathcal{M}_\lambda$ são pontos críticos para o funcional J_λ .

Lema 2.11 *Seja $\lambda \in (0, \Lambda_0)$. Se u_0 é um minimizante local para J_λ em $\mathcal{M}_\lambda$, então $J'_\lambda(u_0) = 0$ em $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Considere $\mathcal{M}_\lambda$ um conjunto de vínculos para ψ_λ . Pelo Lema 2.3, temos que para todo $u \in \mathcal{M}_\lambda$ tem-se $\psi'_\lambda(u) \neq 0$, ou seja, 0 é um valor regular para ψ_λ . Se $u_0 \in \mathcal{M}_\lambda$ é um minimizante local para J_λ sobre $\mathcal{M}_\lambda$, então existe uma vizinhança V de u_0 em $\mathcal{M}_\lambda$ tal que u_0 é uma solução do problema de otimização

$$J_\lambda(u_0) = \min_{u \in V} J_\lambda(u).$$

Pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, Teorema B.2, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'_\lambda(u_0) = \theta \psi'_\lambda(u_0) \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Em particular, $\langle J'_\lambda(u_0), u_0 \rangle = \theta \langle \psi'_\lambda(u_0), u_0 \rangle = 0$ pois $u_0 \in \mathcal{M}_\lambda$. Pelo Lema 2.3, temos que $\langle \psi'_\lambda(u_0), u_0 \rangle \neq 0$. Logo, $\theta = 0$ e $J'_\lambda(u_0) = 0$ em $H^{-1}(\Omega)$. ■

Os teoremas a seguir estabelecem a existência de minimizantes locais para J_λ em $\mathcal{M}_\lambda^+$ e $\mathcal{M}_\lambda^+$, os quais serão seus pontos críticos e consequentemente soluções para (2.1).

Teorema 2.12 *Seja Λ_0 como na Proposição 2.10, então para $\lambda \in (0, \Lambda_0)$ o funcional J_λ tem um minimizante u_0^+ em $\mathcal{M}_\lambda^+$ tal que u_0^+ é uma solução positiva da equação (2.1), $J_\lambda(u_0^+) = \alpha_\lambda = \alpha_\lambda^+$ e $J_\lambda(u_0^+) \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow 0$.*

Demonstração: Pela Proposição 2.10(i), vimos que existe uma sequência minimizante $\{u_n\} \subset \mathcal{M}_\lambda$ para J_λ em $\mathcal{M}_\lambda$, que é limitada e que

$$J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda + o(1) \text{ e } J'_\lambda(u_n) = o(1) \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Então, pela Proposição A.2, a menos de subsequência podemos admitir que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u_0^+ \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega) \\ u_n &\rightarrow u_0^+ \text{ fortemente em } L^{p+1}(\Omega) \text{ e em } L^{q+1}(\Omega). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Afirmção 1: u_0^+ é solução do problema (2.1).

Devemos mostrar que

$$\int_{\Omega} \nabla u_0^+ \nabla v dx = \int_{\Omega} |u_0^+|^{p-1} u_0^+ v dx + \lambda \int_{\Omega} f(x) |u_0^+|^{q-1} u_0^+ v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (2.32)$$

ou seja, precisamos mostrar que $\langle J'(u_0^+), v \rangle = 0$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. Temos que $\langle J'(u_n), v \rangle \rightarrow 0$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, assim basta mostrar que $\langle J'(u_n), v \rangle \rightarrow \langle J'(u_0^+), v \rangle$.

Analisaremos a convergência de cada parcela de $\langle J'(u_n), v \rangle$ separadamente.

Como $u_n \rightharpoonup u_0^+$ em $H_0^1(\Omega)$ temos que $\langle u_n, v \rangle \rightarrow \langle u_0^+, v \rangle$. Logo

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \nabla v dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u_0^+ \nabla v dx.$$

Temos que $u_n \rightarrow u_0^+$ em $L^{p+1}(\Omega)$, pelo Teorema B.6 $u_n(x) \rightarrow u_0^+(x)$ q.t.p. em Ω e existe $h \in L^{p+1}(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq h(x)$ q.t.p. Daí

$$|u_n(x)|^{p-1} u_n(x) v(x) \rightarrow |u_0^+(x)|^{p-1} u_0^+(x) v(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

e

$$||u_n(x)|^{p-1} u_n(x) v(x)| = |u_n(x)|^p |v(x)| \leq h(x)^p |v(x)|.$$

Como $h \in L^p(\Omega)$ temos que $h^p |v| \in L^1(\Omega)$, pois

$$\int_{\Omega} h^p |v| dx \leq \left(\int_{\Omega} h^{p+1} dx \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Segue então do Teorema da Convergência dominada de Lebesgue que

$$\int_{\Omega} |u_n|^{p-1} u_n v dx \rightarrow \int_{\Omega} |u_0^+|^{p-1} u_0^+ v dx.$$

Sendo f um função limitada, de maneira semelhante ao que foi feito acima, mostramos que

$$\int_{\Omega} f(x) |u_n|^{q-1} u_n v dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x) |u_0^+|^{q-1} u_0^+ v dx.$$

Portanto, $\langle J'(u_n), v \rangle \rightarrow \langle J'(u_0^+), v \rangle$. Assim, pela unicidade do limite temos $\langle J'(u_0^+), v \rangle = 0$, ou seja, u_0^+ satisfaz (2.32), logo é solução do problema (2.1).

Afirmção 2: $u_n \rightarrow u_0^+$.

Como $u_n \in \mathcal{M}_{\lambda}$, $\langle J'_{\lambda}(u_n), u_n \rangle = 0$, para todo n . Além disso, devido às convergências de u_n mostradas anteriormente temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx + \lambda \int_{\Omega} f(x) |u_n|^{q+1} dx \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n|^{p+1} dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \int_{\Omega} f(x) |u_n|^{q+1} dx \\ &= \int_{\Omega} |u_0^+|^{p+1} dx + \lambda \int_{\Omega} f(x) |u_0^+|^{q+1} dx. \end{aligned}$$

Mas como u_0^+ é solução da equação (2.1), temos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0^+|^2 = \int_{\Omega} |u_0^+|^{p+1} + \lambda \int_{\Omega} f(x) |u_0^+|^{q+1} dx.$$

Assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u_0^+|^2.$$

Logo, $u_n \rightharpoonup u_0^+$ e $\|u_n\| \rightarrow \|u_0^+\|$ o que implica que $u_n \rightarrow u_0^+$.

Afirmção 3: $\int_{\Omega} f(x) |u_0^+|^{q+1} dx > 0$.

Pela continuidade de J_{λ} temos que $J_{\lambda}(u_n) \rightarrow J_{\lambda}(u_0^+)$. Mas $J_{\lambda}(u_n) \rightarrow \alpha_{\lambda}$ quando $n \rightarrow \infty$, pois $\{u_n\}$ é uma sequência minimizante para J_{λ} em $\mathcal{M}_{\lambda}$. Pela unicidade do limite temos $J_{\lambda}(u_0^+) = \alpha_{\lambda} < 0$. Daí,

$$\frac{1}{2} \|u_0^+\|^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u_0^+|^{p+1} dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} f(x) |u_0^+|^{q+1} dx < 0.$$

E ainda, como $u_0^+ \in \mathcal{M}_{\lambda}$ temos que $\langle J'_{\lambda}(u_0^+), u_0^+ \rangle = 0$, donde

$$\int_{\Omega} |u_0^+|^{p+1} dx = \|u_0^+\|^2 - \lambda \int_{\Omega} f(x) |u_0^+|^{q+1} dx.$$

Segue das expressões acima que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|u_0^+\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\Omega} f(x) |u_0^+|^{q+1} dx < 0$$

o que implica que

$$\lambda \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\Omega} f(x) |u_0^+|^{q+1} dx > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|u_0^+\|^2.$$

Uma vez que $q+1 < p+1$, $2 < p+1$ e $\lambda > 0$, existe $c > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} f(x) |u_0^+|^{q+1} dx \geq c \|u_0^+\|^2 > 0,$$

o que prova a afirmação.

Afirmção 4: $u_0^+ \in \mathcal{M}_{\lambda}^+$.

De fato, sabendo que $\mathcal{M}_{\lambda}^+ \cap \mathcal{M}_{\lambda}^- = \emptyset$ suponha por contradição que $u_0^+ \in \mathcal{M}_{\lambda}^-$. Então, pelo Lema 2.5, como $\int_{\Omega} f(x) |u_0^+|^{q+1} dx > 0$, existem únicos t_0^+ e t_0^- tais que $t_0^+ u_0^+ \in \mathcal{M}_{\lambda}^+$, $t_0^- u_0^+ \in \mathcal{M}_{\lambda}^-$, $0 < t_0^+ < t_{\max} < t_0^-$. E ainda por (2.13)

$$J_{\lambda}(t_0^+ u_0^+) = \min_{0 < t < t_0^-} J_{\lambda}(t u_0^+) < J_{\lambda}(t u_0^+) \quad \forall t \in (t_0^+, t_0^-) \quad \text{e}$$

$$J_\lambda(t_0^- u_0^+) = \max_{t \geq t_{\max}} J_\lambda(tu_0^+).$$

Como $u_0^+ \in \mathcal{M}_\lambda^-$, então $t_0^- = 1$. Dessa forma,

$$J_\lambda(t_0^+ u_0^+) < J_\lambda(t_{\max} u_0^+) \leq J_\lambda(t_0^- u_0^+) = J_\lambda(u_0^+)$$

o que é uma contradição, pois $J_\lambda(t_0^+ u_0^+) \geq \alpha_\lambda^+ \geq \alpha_\lambda = J_\lambda(u_0^+)$. Logo $u_0^+ \in \mathcal{M}_\lambda^+$. Daí $J_\lambda(u_0^+) = \alpha_\lambda = \alpha_\lambda^+$.

Afirmção 5: Podemos assumir que u_0^+ é uma solução positiva para (2.1).

Como $J_\lambda(|u_0^+|) = J_\lambda(u_0^+)$, $\langle \psi'_\lambda(|u_0^+|), |u_0^+| \rangle = \langle \psi'_\lambda(u_0^+), u_0^+ \rangle$ e $\langle J'_\lambda(|u_0^+|), |u_0^+| \rangle = \langle J'_\lambda(u_0^+), u_0^+ \rangle$, temos que $|u_0^+| \in \mathcal{M}_\lambda^+$ e

$$J_\lambda(|u_0^+|) = \inf_{u \in \mathcal{M}_\lambda^+} J_\lambda(u).$$

Então $|u_0^+|$ é um minimizante para J_λ . Pelo Lema 2.11 temos que $J'_\lambda(|u_0^+|) = 0$, ou seja, $|u_0^+|$ é um ponto crítico para J_λ e portanto uma solução fraca para (2.1). Podemos assumir então que u_0^+ é uma solução não negativa para o problema (2.1). Pela Proposição A.4 vemos que $u_0^+ \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ e é positiva em Ω .

Afirmção 6: $J_\lambda(u_0^+) \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow 0$.

Pelo Lema 2.7 temos

$$0 > \alpha_\lambda = J_\lambda(u_0^+) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \|u_0^+\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1} \right) \int_\Omega f(x) |u_0^+|^{q+1} dx.$$

Como $\lambda \in (0, \Lambda_0)$ e $\Lambda_0 < \frac{p-1}{p-q}$, por (2.14) temos

$$0 > J_\lambda(u_0^+) \geq -\lambda \left(\frac{(p-q)(1-q)}{2(p+1)(q+1)} \right) (\|f\|_{L^\sigma A^{q+1}})^{\frac{2}{1-q}}$$

o que implica que

$$J_\lambda(u_0^+) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \lambda \rightarrow 0.$$

■

O Teorema a seguir mostra que existe um mínimo local para J_λ em $\mathcal{M}_\lambda^-$.

Teorema 2.13 *Seja Λ_0 como na Proposição 2.10, então para $\lambda \in (0, \Lambda_0)$ o funcional J_λ tem um minimizante u_0^- em $\mathcal{M}_\lambda^-$ tal que u_0^- é uma solução positiva da equação (2.1) e $J_\lambda(u_0^-) = \alpha_\lambda^-$.*

Demonstração: Pela Proposição 2.10(ii), existe uma sequência minimizante $\{u_n\}$ para J_λ em $\mathcal{M}_\lambda^-$ tal que,

$$J_\lambda(u_n) = \alpha_\lambda^- + o(1) \quad \text{e} \quad J'_\lambda(u_n) = o(1) \quad \text{em} \quad H^{-1}(\Omega).$$

Analogamente ao que foi feito no Teorema 2.12, mostramos que existe $u_0^- \in \mathcal{M}_\lambda$ uma solução não nula para a equação (2.1) com $u_n \rightarrow u_0^-$. Pela continuidade de ψ'_λ temos que

$$\langle \psi'_\lambda(u_n), u_n \rangle \rightarrow \langle \psi'_\lambda(u_0^-), u_0^- \rangle.$$

Como $u_n \in M_\lambda^-(\Omega)$ devemos ter $\langle \psi'_\lambda(u_0^-), u_0^- \rangle \leq 0$. Pelo Lema 2.3, sabemos que $M_\lambda^0(\Omega)$ é vazio, logo $\langle \psi'_\lambda(u_0^-), u_0^- \rangle < 0$, ou seja, $u_0^- \in \mathcal{M}_\lambda^-$. Pela continuidade de J_λ , temos que

$$J_\lambda(u_n) \rightarrow J_\lambda(u_0^-) \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Mas $J_\lambda(u_n) \rightarrow \alpha_\lambda^-$, pois $\{u_n\}$ é uma sequência minimizante para J_λ em $M_\lambda^-(\Omega)$. Pela unicidade do limite temos $J_\lambda(u_0^-) = \alpha_\lambda^-$.

Assim como fizemos no Teorema 2.12, podemos assumir que u_0^- é uma solução positiva para (2.1) e $u_0^- \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$. ■

Pelos Teoremas 2.12 e 2.13 obtemos que a equação (2.1) possui duas soluções positivas u_0^+ e u_0^- tais que $u_0^+ \in \mathcal{M}_\lambda^+$ e $u_0^- \in \mathcal{M}_\lambda^-$. Sabemos ainda, por definição, que $\mathcal{M}_\lambda^+ \cap \mathcal{M}_\lambda^- = \emptyset$. Portanto, u_0^+ e u_0^- são soluções distintas, o que prova o Teorema 2.1.

2.6 Resultado de não existência

Mostraremos agora que para λ grande o nosso problema não possui solução clássica.

Proposição 2.14 *Seja $\Lambda = \sup\{\lambda > 0 : \text{o problema (2.1) tem uma solução clássica}\}$ então $\Lambda \in (0, \infty)$.*

Demonstração: Sabendo que f muda de sinal em Ω e é uma função contínua, concluímos que existe $a > 0$ tal que $\{x \in \Omega : f(x) > a\}$ é um conjunto não vazio. Seja Ω_1 uma bola contida neste conjunto e consideremos $\phi_1 > 0$ a autofunção associada ao primeiro autovalor μ_1 do problema

$$\begin{cases} -\Delta v = \mu v, & x \in \Omega_1 \\ v = 0, & x \in \partial\Omega_1. \end{cases} \quad (2.33)$$

Escolheremos $\bar{\lambda} > 0$ tal que

$$\mu_1 t < t^p + a\bar{\lambda}t^q, \quad \forall \quad t > 0. \quad (2.34)$$

Observe que

$$\mu_1 t - t^p \rightarrow -\infty \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty,$$

assim existe $t_0 > 0$ tal que $\mu_1 t - t^p \leq 0$ para $t \geq t_0$. Para $\bar{\lambda} > t_0^{1-q} \mu_1 / a$ vemos que se $t \in (0, t_0)$ então

$$\frac{\mu_1 t - t^p}{at^q} < \frac{\mu_1 t}{at^q} < \frac{\mu_1 t_0^{1-q}}{a} < \bar{\lambda}.$$

Isto mostra a existência de $\bar{\lambda}$ satisfazendo (2.34). Agora, se $u \in C^2(\Omega)$, $u > 0$, é solução do problema (2.1) então

$$\int_{\Omega_1} (u^p + a\lambda u^q) \phi_1 dx < \int_{\Omega_1} (u^p + \lambda f(x) u^q) \phi_1 dx = \int_{\Omega_1} (-\Delta u) \phi_1 dx.$$

Pelo Teorema de Green B.13 temos

$$\int_{\Omega_1} (-\Delta u) \phi_1 dx = \int_{\Omega_1} (-\Delta \phi_1) u dx + \int_{\partial\Omega_1} u \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} dS - \int_{\partial\Omega_1} \phi_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} dS.$$

Uma vez que ϕ_1 é uma autofunção positiva associada a μ_1 para (2.33), temos ϕ_1 uma solução clássica, $\phi_1 = 0$ sobre $\partial\Omega_1$ e segue do Lema de Hopf B.14 que $\frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} < 0$ sobre $\partial\Omega_1$. Consequentemente

$$\int_{\Omega_1} (-\Delta u) \phi_1 dx < \int_{\Omega_1} (-\Delta \phi_1) u dx = \int_{\Omega_1} \mu_1 \phi_1 u dx.$$

Pela escolha de $\bar{\lambda}$ obtemos

$$\int_{\Omega_1} (u^p + a\lambda u^q) \phi_1 dx < \int_{\Omega_1} \mu_1 \phi_1 u dx < \int_{\Omega_1} (u^p + a\bar{\lambda} u^q) \phi_1 dx.$$

Logo existe $x_0 \in \Omega_1$ tal que

$$(u^p(x_0) + a\lambda u^q(x_0)) \phi_1(x_0) < (u^p(x_0) + a\bar{\lambda} u^q(x_0)) \phi_1(x_0)$$

o que implica que $\lambda < \bar{\lambda}$. E por sua vez, $\Lambda \leq \bar{\lambda} < \infty$. Além disso, mostramos que existem duas soluções para o problema (2.1) para $\lambda \in (0, \Lambda_0)$, logo $\Lambda \geq \Lambda_0 > 0$. Portanto,

$$0 < \Lambda_0 \leq \Lambda \leq \bar{\lambda} < \infty.$$

Dessa forma, mostramos que para $\lambda > \Lambda$, o problema (2.1) não possui solução positiva $u \in C^2(\Omega)$, pela definição de Λ . ■

Capítulo 3

Existência de soluções para equações elípticas semilineares com caso supercrítico

3.1 Introdução

Neste capítulo mostraremos a existência de duas soluções positivas para uma equação elíptica semilinear em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com simetria cilíndrica envolvendo não linearidade côncavo-convexa do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(u^+)^q + h(x)(u^+)^p, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (P_\lambda)$$

onde $0 < q < 1 < p < 2^* - 1 + \tau$, sendo λ e τ números reais positivos. Consideramos $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$, com $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, um domínio regular limitado e $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^k$ com $k \geq 2$, uma bola de raio R e centrada na origem. Seja h satisfazendo as seguintes condições:

(h_1) h é uma função não negativa, Hölder contínua em $\bar{\Omega}$, radialmente simétrica com relação a $x_2 \in \Omega_2$, satisfazendo

$$h(x_1, 0) = 0 \quad \text{para todo } x_1 \in \Omega_1;$$

(h_2) $l_h > 0$, onde $l_h = \sup\{\lambda > 0 : |h(x)|/|x_2|^\lambda < \infty, x \in \Omega\}$.

Um exemplo de uma função que satisfaz as condições (h_1) – (h_2) é $h(x) = |x_2|^\alpha$ com $\alpha > 0$.

Para nossos estudos neste capítulo, tomamos como referência principal o artigo de Juanjuan Gao, Yong Zhang e Peihao Zhao [8].

No decorrer deste capítulo usaremos as seguintes notações:

$H_s^1(\Omega) := \{u \in H_0^1(\Omega) : u(\cdot, x_2) = u(\cdot, |x_2|)\}$ com a norma

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$L_h^p(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \int_{\Omega} h|u|^p dx < \infty\}$, o qual é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{h,p} = \left(\int_{\Omega} h|u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 < p < \infty.$$

$L^q(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_q = \left(\int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, 1 < q < \infty.$$

$H_s^{-1}(\Omega)$ é o espaço dual de $H_s^1(\Omega)$.

$u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \min\{u, 0\}$.

$c, C, C_1, C_2, \dots$ são (possivelmente diferentes) constantes positivas.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte.

Teorema 3.1 *Sejam $0 < q < 1 < p < 2^* - 1 + \tau$. Se h satisfaz $(h_1) - (h_2)$, então existe $\Lambda \in (0, \infty)$ tal que*

- (1) *para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$, o problema (P_{λ}) tem pelo menos duas soluções;*
- (2) *para $\lambda = \Lambda$, o problema (P_{λ}) tem pelo menos uma solução;*
- (3) *para todo $\lambda > \Lambda$, o problema (P_{λ}) não tem solução.*

Para a demonstração deste teorema usaremos resultados de minimização, o Teorema do Passo da Montanha e o método de sub e supersolução.

3.2 Formulação Variacional

O lema a seguir, cuja demonstração encontramos no artigo [16], mostra um resultado de imersão para valores acima do nível crítico e será crucial para o desenvolvimento deste capítulo.

Lema 3.2 *Assuma que h satisfaz $(h_1) - (h_2)$. Então existe um número $\tau = \tau(h, m, k) > 0$ tal que a imersão $H_s^1(\Omega) \hookrightarrow L_h^r(\Omega)$ é compacta para todo $r \in (1, 2^* + \tau)$.*

De acordo com o Lema 3.2, para $1 < q + 1 < 2 < p + 1 < 2^* + \tau$, a aplicação imersão $i : H_s^1(\Omega) \hookrightarrow L_h^{p+1}(\Omega)$ é compacta e pela Proposição A.2, $H_s^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ é também compacta. Em particular, existe uma constante C tal que

$$\|u\|_{h,p+1} \leq C\|u\| \quad \text{e} \quad \|u\|_{q+1} \leq C\|u\|. \quad (3.1)$$

Uma solução fraca para o problema (P_λ) é uma função $u \in H_s^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \lambda \int_{\Omega} (u^+)^q v dx + \int_{\Omega} h(x)(u^+)^p v dx$$

para toda $v \in H_s^1(\Omega)$. Observe que se u é uma solução fraca para (P_λ) , usando u^- como função teste, obtemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla u^- dx = \lambda \int_{\Omega} (u^+)^q u^- dx + \int_{\Omega} h(x)(u^+)^p u^- dx = 0$$

logo $u^- = 0$ e segue que $u \geq 0$ em Ω . Além disso, se tivermos soluções clássicas não triviais, isto é, soluções de classe $C^2(\Omega)$, uma vez que $\lambda(u^+)^q + h(x)(u^+)^p \geq 0$ em Ω , segue do Princípio do Máximo B.15 que $u > 0$, pois u é não trivial. Sendo assim, todas as soluções clássicas encontradas para (P_λ) serão positivas.

Considere

$$f_\lambda(x, s) = \begin{cases} \lambda s^q + h(x)s^p, & \text{se } s \geq 0, \\ 0, & \text{se } s < 0, \end{cases}$$

e $F_\lambda(x, u) = \int_0^u f_\lambda(x, s) ds$. O funcional associado ao problema (P_λ) é $T_\lambda : H_s^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned} T_\lambda(u) &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} F_\lambda(x, u) dx \\ &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} (u^+)^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} h(x)(u^+)^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Devido ao Lema 3.2, usando argumentos análogos aos da Proposição A.3 vemos que T_λ está bem definido, é de classe $C^1(H_s^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$\langle T'_\lambda(u), v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v - \lambda \int_{\Omega} (u^+)^q v dx - \int_{\Omega} h(x)(u^+)^p v dx$$

para toda $v \in H_s^1(\Omega)$. Encontrar solução fraca para o problema (P_λ) é equivalente a encontrar ponto crítico não trivial para o funcional T_λ .

Começamos nosso trabalho mostrando que o problema (P_λ) possui solução fraca para λ pequeno.

3.3 Existência da primeira solução para $\lambda \in (0, \lambda_0)$

Primeiramente, mostraremos que existe $\lambda_0 > 0$ tal que podemos encontrar uma solução u_λ do problema (P_λ) para $\lambda \in (0, \lambda_0)$, onde u_λ é um minimizante local para $T_\lambda(u)$.

Lema 3.3 *Existem $\lambda_0 > 0$ e $r_0, \epsilon > 0$, tais que $T_\lambda(u) \geq \epsilon$ para todo $u \in H_s^1(\Omega)$ com $\|u\| = r_0$ e todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$.*

Demonstração: Para $u \in H_s^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} T_\lambda(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} (u^+)^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} h(x)(u^+)^{p+1} dx \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1} \|u^+\|_{q+1}^{q+1} - \frac{1}{p+1} \|u^+\|_{h,p+1}^{p+1}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Sendo $u = u^+ + u^-$ temos que

$$\|u\|^2 = \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2.$$

Assim, por (3.1) e (3.2), deduzimos que

$$\begin{aligned} T_\lambda(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda C}{q+1} \|u^+\|^{q+1} - \frac{C}{p+1} \|u^+\|^{p+1} \\ &= \frac{1}{2}\|u^-\|^2 + \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \lambda (C\|u^+\|)^{q+1} - (C\|u^+\|)^{p+1} \\ &= \frac{1}{2}\|u^-\|^2 + \frac{1}{2}\|u^+\| [\|u^+\| - \lambda(c\|u^+\|)^q - (c\|u^+\|)^p]. \end{aligned}$$

Afirmamos que existem reais $\beta_0, \lambda_0 > 0$ e um intervalo $[a, b]$ contido em $\mathbb{R}$ tais que $t - \lambda_0(ct)^q - (ct)^p \geq \beta_0/2$, para todo t neste intervalo. De fato, como $p > 1$ existe $b > 0$ tal que $t > (ct)^p$ para $t \in (0, b]$. Seja $\beta(t) = t - (ct)^p$. Como $\beta(t)$ é contínua, para $a \in (0, b)$ temos

$$\beta_0 = \min_{t \in [a, b]} \beta(t) > 0.$$

Agora, escolha $\lambda_0 > 0$ pequeno tal que

$$\lambda_0(ct)^q \leq \min \left\{ \frac{\beta_0}{2}, \frac{b^2 - a^2}{2a} \right\}, \quad \forall t \in [a, b]. \quad (3.3)$$

Daí, considere

$$\alpha(t) = t - \lambda_0(ct)^q - (ct)^p,$$

então temos que

$$\alpha(t) \geq \beta_0 - \lambda_0(ct)^q \geq \frac{\beta_0}{2}, \quad \forall t \in [a, b]$$

o que prova a afirmação. Observe que se $\lambda \in (0, \lambda_0)$, então

$$t - \lambda(ct)^q - (ct)^p > t - \lambda_0(ct)^q - (ct)^p = \alpha(t) \geq \frac{\beta_0}{2}, \quad \forall t \in [a, b].$$

Tomando $r_0 = b$, se $\|u\| = r_0$, podemos ter $\|u^+\| \geq a$ ou $\|u^+\| < a$. Se $\|u^+\| \geq a$, então

$$T_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}\|u^-\|^2 + \frac{1}{2}\|u^+\|\frac{\beta_0}{2} \geq \frac{a\beta_0}{4}.$$

Se $\|u^+\| < a$, usando (3.3) obtemos

$$\lambda(c\|u^+\|)^q \frac{\|u^+\|}{2} < \lambda_0(ca)^q \frac{a}{2} \leq \frac{b^2 - a^2}{4}.$$

Por outro lado,

$$b^2 = \|u\|^2 = \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2 < a^2 + \|u^-\|^2$$

o que implica que

$$\|u^-\|^2 > b^2 - a^2.$$

Dessa forma, como $\beta(\|u^+\|) > 0$ temos

$$\begin{aligned} T_\lambda(u) &> \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{\|u^+\|}{2} (\|u^+\| - \lambda(c\|u^+\|)^q - (c\|u^+\|)^p) \\ &> \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{b^2 - a^2}{4} = \frac{b^2 - a^2}{4}. \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon = \min\{(b^2 - a^2), a\beta_0\}/4$ temos

$$T_\lambda(u) \geq \epsilon \quad \text{para cada } \|u\| = r_0$$

o que conclui a demonstração. ■

O lema a seguir garante a existência da primeira solução não trivial para o problema (P_λ) para λ pequeno.

Lema 3.4 *Para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$, T_λ possui um mínimo local perto da origem.*

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} T_\lambda(tu) &= \frac{1}{2}\|tu\|^2 - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega} |tu^+|^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} h(x) |tu^+|^{p+1} dx \\ &= \frac{1}{2}t^2\|u\|^2 - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} (u^+)^{q+1} dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} h(x) (u^+)^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Claramente, $T_\lambda(tu) < 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno e qualquer $u \in H_s^1(\Omega)$ com $\|u^+\| \neq 0$. Seja $\overline{B}_{r_0}(0) = \{u \in H_s^1(\Omega) : \|u\| \leq r_0\}$, então temos

$$I := \inf_{u \in \overline{B}_{r_0}(0)} T_\lambda(u) < 0.$$

Mostraremos que este mínimo é atingido em algum u_λ . Seja $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \overline{B}_{r_0}(0)$ uma sequência minimizante, então

$$T_\lambda(u_n) \rightarrow I.$$

Como $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ é limitada, existe $u_\lambda \in H_s^1(\Omega)$ tal que a menos de subsequência valem as seguintes convergências

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u_\lambda && \text{em } H_s^1(\Omega) \\ u_n &\rightarrow u_\lambda && \text{em } L^{q+1}(\Omega) \\ u_n &\rightarrow u_\lambda && \text{em } L_h^{p+1}(\Omega) \end{aligned}$$

onde a última convergência deve-se ao Lema 3.2. Dessa forma

$$\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega F_\lambda(x, u_n) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega (u_n^+)^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega h(x) (u_n^+)^{p+1} dx \right) \\ &= \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega (u_\lambda^+)^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega h(x) (u_\lambda^+)^{p+1} dx \\ &= \int_\Omega F_\lambda(x, u_\lambda) dx. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} T_\lambda(u_\lambda) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 dx - \int_\Omega F_\lambda(x, u_\lambda) dx \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega F_\lambda(x, u_n) dx \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \int_\Omega F_\lambda(x, u_n) dx \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} T_\lambda(u_n) = I. \end{aligned}$$

Como $I := \inf_{u \in B_{r_0}(0)} T_\lambda(u)$ e $u_\lambda \in B_{r_0}(0)$ temos que $T_\lambda(u_\lambda) \geq I$. Segue então que

$$T_\lambda(u_\lambda) = I = \inf_{u \in B_{r_0}(0)} T_\lambda(u).$$

Isto é, u_λ é um minimizante para T_λ em $\overline{B}_{r_0}(0)$ como desejado. ■

Sendo T_λ de classe C^1 , $T_\lambda(0) = 0$ e $T_\lambda(u_\lambda) = I < 0$, então u_λ é um ponto crítico não trivial para T_λ . Portanto, u_λ é a primeira solução do problema (P_λ) para $\lambda \in (0, \lambda_0)$ e daí $u_\lambda \geq 0$ pois já vimos que todas as soluções fracas para este problema são não negativas.

3.4 Existência da segunda solução para $\lambda \in (0, \lambda_0)$

Na sequência, vamos mostrar a existência da segunda solução v_λ usando o Teorema do Passo da Montanha. Verificaremos que T_λ satisfaz as hipóteses deste teorema por meio dos seguintes lemas.

Lema 3.5 T_λ satisfaz a condição (PS) .

Demonstração: Mostraremos que toda sequência (PS) possui uma subsequência convergente. Seja $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset H_s^1(\Omega)$ uma sequência (PS) , isto é,

$$|T_\lambda(v_n)| \leq C \quad \text{e} \quad T'_\lambda(v_n) \rightarrow 0 \quad \text{em} \quad H_s^{-1}(\Omega). \quad (3.4)$$

Por (3.4), podemos assumir que $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ satisfaz

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega (v_n^+)^{q+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega h(x)(v_n^+)^{p+1} dx = c + o(1). \quad (3.5)$$

Pela definição de T'_λ temos

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx = \langle T'_\lambda(v_n), v_n \rangle + \lambda \int_\Omega (v_n^+)^{q+1} dx + \int_\Omega h(x)(v_n^+)^{p+1} dx.$$

Substituindo em (3.5) obtemos

$$\begin{aligned} c + o(1) &= \frac{1}{2} \langle T'_\lambda(v_n), v_n \rangle + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega (v_n^+)^{q+1} dx + \frac{1}{2} \int_\Omega h(x)(v_n^+)^{p+1} dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_\Omega (v_n^+)^{q+1} dx \\ &\quad - \frac{1}{p+1} \int_\Omega h(x)(v_n^+)^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Dáí

$$\frac{\lambda(q-1)}{2(q+1)} \int_\Omega (v_n^+)^{q+1} dx + \frac{p-1}{2(p+1)} \int_\Omega h(x)(v_n^+)^{p+1} dx = c - \frac{1}{2} \langle T'_\lambda(v_n), v_n \rangle + o(1).$$

Seja $c_1 = (p-1)/2(p+1)$ e $c_2 = \lambda(1-q)/2(q+1)$. Como $0 < q < 1 < p$, vemos claramente que $c_1, c_2 > 0$. Assim

$$c_1 \int_\Omega h(x)(v_n^+)^{p+1} dx \leq c_2 \int_\Omega (v_n^+)^{q+1} dx + c + \|T'_\lambda(v_n)\|_{H_s^{-1}} \|v_n\|,$$

isto é,

$$\|v_n^+\|_{h,p+1}^{p+1} \leq c \|v_n^+\|_{q+1}^{q+1} + c + C \|T'_\lambda(v_n)\|_{H_s^{-1}} \|v_n\|. \quad (3.6)$$

Combinando (3.5) e (3.6), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|v_n\|^2 &= \frac{\lambda}{q+1} \|v_n^+\|_{q+1}^{q+1} + \frac{1}{p+1} \|v_n^+\|_{h,p+1}^{p+1} + c + o(1) \\ &\leq \frac{\lambda}{q+1} \|v_n^+\|_{q+1}^{q+1} + \frac{1}{p+1} (c \|v_n^+\|_{q+1}^{q+1} + c + C \|T'_\lambda(v_n)\|_{H_s^{-1}} \|v_n\|) + c \\ &= C \|v_n^+\|_{q+1}^{q+1} + c + C \|T'_\lambda(v_n)\|_{H_s^{-1}} \|v_n\|. \end{aligned}$$

Segue por (3.1) que

$$\|v_n\|^2 \leq C \|v_n^+\|_{q+1}^{q+1} + C + C \|v_n\|.$$

Deduzimos então que existe uma constante C tal que $\|v_n\| \leq C$. Consequentemente, $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ é limitada em $H_s^1(\Omega)$ e então existe uma subsequência $\{v_{n_j}\}_{j=1}^\infty \subset \{v_n\}_{n=1}^\infty$ fracamente convergente em $H_s^1(\Omega)$. Além disso, temos uma outra desigualdade, por (3.1),

$$\|v_n^+\|_{h,p+1}^{p+1} \leq C.$$

A partir disso, podemos deduzir o seguinte

$$\begin{aligned} v_{n_j} &\rightarrow v \quad \text{fortemente em } L_h^{p+1}(\Omega) \quad \text{para } 1 < p+1 < 2^* + \tau \\ v_{n_j} &\rightarrow v \quad \text{fortemente em } L^{q+1}(\Omega) \quad \text{para } 1 < q+1 < 2^* \\ v_{n_j} &\rightarrow v \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \end{aligned}$$

Considere $P_j, P_0 : H_s^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dados por

$$P_j(\varphi) = \lambda \int_{\Omega} (v_{n_j}^+)^q \varphi dx + \int_{\Omega} h(x) (v_{n_j}^+)^p \varphi dx.$$

e

$$P_0(\varphi) = \lambda \int_{\Omega} (v^+)^q \varphi dx + \int_{\Omega} h(x) (v^+)^p \varphi dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |(P_j - P_0)(\varphi)| &= \left| \lambda \int_{\Omega} \left((v_{n_j}^+)^q - (v^+)^q \right) \varphi dx + \int_{\Omega} h(x) \left((v_{n_j}^+)^p - (v^+)^p \right) \varphi dx \right| \\ &\leq \lambda \left(\int_{\Omega} \left((v_{n_j}^+)^q - (v^+)^q \right)^{\frac{q+1}{q}} dx \right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_{\Omega} |\varphi|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} \\ &\quad + \left(\int_{\Omega} h(x) \left((v_{n_j}^+)^p - (v^+)^p \right)^{\frac{p+1}{p}} dx \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{\Omega} h(x) |\varphi|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p+1}} \\ &\leq c \|\varphi\| \left(\int_{\Omega} \left((v_{n_j}^+)^q - (v^+)^q \right)^{\frac{q+1}{q}} dx \right)^{\frac{q}{q+1}} \\ &\quad + c \|\varphi\| \left(\int_{\Omega} h(x) \left((v_{n_j}^+)^p - (v^+)^p \right)^{\frac{p+1}{p}} dx \right)^{\frac{p}{p+1}}. \end{aligned}$$

Como $v_{n_j} \rightarrow v$ q.t.p. em Ω vemos que $v_{n_j}^+ \rightarrow v^+$ q.t.p. em Ω e como $v_{n_j} \rightarrow v$ em $L^{q+1}(\Omega)$, então existe $l \in L^{q+1}(\Omega)$ tal que

$$(v_{n_j}^+(x)) \leq |v_{n_j}(x)| \leq l(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Assim

$$\begin{aligned} \left((v_{n_j}^+)^q - (v^+)^q \right)^{\frac{q+1}{q}} &\leq \left((v_{n_j}^+)^q + (v^+)^q \right)^{\frac{q+1}{q}} \leq c \left((v_{n_j}^+)^{q+1} + (v^+)^{q+1} \right) \\ &\leq c \left(|l(x)|^{q+1} + (v^+)^{q+1} \right) \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema da Convergência dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\Omega} \left((v_{n_j}^+)^q - (v^+)^q \right)^{\frac{q+1}{q}} dx \rightarrow 0.$$

Por outro lado, como $v_n \rightarrow v$ em $L_h^{p+1}(\Omega)$, então para $h = h^{\frac{p}{p+1}} h^{\frac{1}{p+1}}$, temos

$$v_{n_j} h^{\frac{1}{p+1}} \rightarrow v h^{\frac{1}{p+1}} \quad \text{em} \quad L^{p+1}(\Omega).$$

Assim, existe $l_1 \in L^{p+1}(\Omega)$ tal que

$$|h^{\frac{1}{p+1}}(x) v_{n_j}(x)| \leq l_1(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Dai

$$\begin{aligned} h(x) \left((v_{n_j}^+)^p - (v^+)^p \right)^{\frac{p+1}{p}} &\leq h(x) C \left((v_{n_j}^+)^{p+1} + (v^+)^{p+1} \right) \\ &\leq C (l_1^{p+1}(x) + h(x)|v|^{p+1}) \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\int_{\Omega} h(x) \left((v_{n_j}^+)^p - (v^+)^p \right)^{\frac{p+1}{p}} dx \rightarrow 0.$$

Portanto, $P_j \rightarrow P_0$ em $H_s^{-1}(\Omega)$, ou ainda,

$$\lambda(v_{n_j}^+)^q + h(x)(v_{n_j}^+)^p \rightarrow \lambda(v^+)^q + h(x)(v^+)^p \quad \text{em} \quad H_s^{-1}(\Omega).$$

Pelo Teorema de Representação de Riesz, para cada $f_{\lambda}(w) = \lambda(w^+)^q + h(x)(w^+)^p$ em $H_s^{-1}(\Omega)$, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f_{\lambda}(w), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.7)$$

tem uma única solução $u \in H_s^1(\Omega)$. Considere $\Phi : H_s^{-1}(\Omega) \rightarrow H_s^1(\Omega)$, e seja $u = \Phi(f_{\lambda}(w))$. Notamos que Φ é uma isometria, pois é um isomorfismo que preserva o produto interno. Como u é a única solução do problema (3.7), então satisfaz

$$\int_{\Omega} f_{\lambda}(w) \varphi = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = \langle u, \varphi \rangle = \langle \Phi(f_{\lambda}(w)), \varphi \rangle,$$

para todo $\varphi \in H_s^1(\Omega)$. Assim

$$\begin{aligned} \langle T'_{\lambda}(w), \varphi \rangle &= \langle w, \varphi \rangle - \int_{\Omega} f_{\lambda}(w) \varphi \\ &= \langle w, \varphi \rangle - \langle \Phi(f_{\lambda}(w)), \varphi \rangle = \langle w - \Phi(f_{\lambda}(w)), \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Logo

$$T'_{\lambda}(w) = w - \Phi(f_{\lambda}(w)).$$

Sendo Φ contínua, temos que

$$\Phi(f_\lambda(v_{n_j})) \rightarrow \Phi(f_\lambda(v)) \quad \text{em} \quad H_s^1(\Omega).$$

Por (3.4) temos que

$$T'_\lambda(v_{n_j}) = v_{n_j} - \Phi(f_\lambda(v_{n_j})) \rightarrow 0 \quad \text{em} \quad H_s^{-1}(\Omega),$$

consequentemente,

$$v_{n_j} \rightarrow \Phi(f_\lambda(v)) \quad \text{em} \quad H_s^1(\Omega).$$

Pela unicidade do limite fraco temos que $v = \Phi(f_\lambda(v))$. Portanto, T_λ satisfaz a condição (PS). $\blacksquare$

O seguinte lema conclui a demonstração que T_λ tem a geometria do Passo da Montanha e prova que o problema (P_λ) possui uma segunda solução.

Lema 3.6 *Para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$, T_λ tem uma segunda solução v_λ do tipo passo da montanha.*

Demonstração: Seja $v \in H_s^1(\Omega)$. Pelos Lemas 3.3 e 3.5, para usarmos o Teorema do Passo da Montanha B.3 precisamos verificar agora que existe $v \notin B_{r_0}$ tal que $T_\lambda(v) \leq 0$. Claramente, $T_\lambda(0) = 0 < \epsilon$. Agora, fixe $v \in H_s^1(\Omega)$, $v^+ \neq 0$ e escreva $\omega := tv$ para $t > 0$. Por (3.2) temos

$$\begin{aligned} T_\lambda(\omega) &= \frac{1}{2} \|\omega\|^2 - \frac{\lambda}{q+1} \|\omega^+\|_{q+1}^{q+1} - \frac{1}{p+1} \|\omega^+\|_{h,p+1}^{p+1} \\ &= \frac{1}{2} t^2 \|v\|^2 - \frac{\lambda}{q+1} t^{q+1} \|v^+\|_{q+1}^{q+1} - \frac{1}{p+1} t^{p+1} \|v^+\|_{h,p+1}^{p+1}. \end{aligned}$$

Como $q+1 < 2 < p+1$, segue que

$$T_\lambda(\omega) = T_\lambda(tv) \rightarrow -\infty \quad \text{quando} \quad t \rightarrow +\infty.$$

Logo existe $t_0 > 0$ tal que

$$\|\omega\| = \|t_0 v\| > r_0 \quad \text{e} \quad T_\lambda(\omega) = T_\lambda(t_0 v) \leq 0.$$

Pelo Teorema do Passo da Montanha B.3, existe uma função $v_\lambda \in H_s^1(\Omega)$, $v_\lambda \neq 0$, tal que $T_\lambda(v_\lambda) = c \geq \epsilon > 0$ e $T'_\lambda(v_\lambda) = 0$. Isto é, v_λ é um ponto crítico não trivial para T_λ . Uma vez que $T_\lambda(u_\lambda) < 0$ e $T_\lambda(v_\lambda) > 0$ temos que $u_\lambda \neq v_\lambda$ e v_λ é a segunda solução para o problema (P_λ) . $\blacksquare$

3.5 Regularidade

Vamos agora estabelecer a regularidade $C^{2,\alpha}$ das soluções fracas para (P_λ) pertencentes a $H_s^1(\Omega)$.

Lema 3.7 *Seja $v \in H_s^1(\Omega)$ uma solução do problema (P_λ) , então $v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ para algum $\alpha \in (0, 1)$.*

Demonstração: Seja $v \in H_s^1(\Omega)$ a solução de (P_λ) fixado, denotamos

$$f_\lambda(x) = f_\lambda(x, v(x)) = \lambda(v^+(x))^q + h(x)(v^+(x))^p.$$

Pelo Lema 3.2 temos a continuidade da imersão $H_s^1(\Omega) \hookrightarrow L_h^r(\Omega)$ e por definição $L_h^r(\Omega) \subset L^r(\Omega)$ para $r = 2^* + \tau$. Como $v \in H_s^1(\Omega)$, então $v \in L_h^r(\Omega)$ e por sua vez, $v \in L^r(\Omega)$. Daí

$$\int_{\Omega} (v^+)^{q\frac{r}{p}} dx = \int_{\{(v^+) \leq 1\}} (v^+)^{q\frac{r}{p}} dx + \int_{\{(v^+) > 1\}} (v^+)^{q\frac{r}{p}} dx \leq |\Omega| + \int_{\Omega} (v^+)^r dx < \infty.$$

Além disso, como h é limitado em $\bar{\Omega}$

$$\int_{\Omega} (h(x)v^+)^{p\frac{r}{p}} dx \leq c \int_{\Omega} (v^+)^r dx < \infty.$$

Logo

$$\left(\int_{\Omega} |f_\lambda(x)|^{\frac{r}{p}} dx \right)^{\frac{p}{r}} < \infty,$$

ou seja, $f_\lambda(x) \in L^\vartheta$, para $\vartheta = \frac{r}{p}$. Como $1 < p < 2^* - 1 + \tau$, obtemos

$$\vartheta = \frac{r}{p} > \frac{2^* + \tau}{2^* - 1 + \tau}.$$

Assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\vartheta = \frac{2^* + \tau}{2^* - 1 + \tau} (1 + \varepsilon).$$

Podemos escrever o problema como uma equação elíptica linear não homogênea

$$\begin{cases} -\Delta v = f_\lambda(x), & x \in \Omega \\ v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.8)$$

De acordo com o Teorema de Regularidade para equações elípticas lineares não homogêneas Teorema B.9, como $f_\lambda(x) \in L^\vartheta(\Omega)$, temos que $v \in W^{2,\vartheta}(\Omega)$. Se $2\vartheta > N$, pelas imersões de Sobolev temos que $W^{2,\vartheta}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\vartheta}(\bar{\Omega})$. Sendo $v \in C^{0,\vartheta}(\bar{\Omega})$ e h Hölder contínua, temos que $f_\lambda(x, v) \in C^{0,\vartheta}(\bar{\Omega})$. Assim, pelo Teorema de Schauder B.10 temos que $v \in C^{2,\vartheta}(\bar{\Omega})$.

Se $2\vartheta = N$, então temos que $W_0^{2,\vartheta}(\Omega) \hookrightarrow L^\gamma(\Omega)$, para todo $\gamma > \vartheta$. Logo, tomando $\frac{\gamma}{p} > \frac{N}{2}$ temos que $v \in L^\gamma(\Omega)$. Claramente, vemos que $f_\lambda \in L^\xi(\Omega)$, para $\xi = \frac{\gamma}{p}$ então

pelo Teorema B.9 temos $v \in W^{2,\xi}(\Omega)$. Pelas imersões de Sobolev, $v \in C^{0,\xi}(\bar{\Omega})$, da mesma forma, como $h \in C^\xi(\Omega)$, então $f_\lambda \in C^{0,\nu}(\bar{\Omega})$. Daí, pelo Teorema de Schauder B.10, $v \in C^{2,\xi}(\bar{\Omega})$.

No caso em que $2\vartheta < N$, pelo Teorema de imersão de Sobolev, temos

$$W^{2,\vartheta}(\Omega) \hookrightarrow L^{r_1}(\Omega),$$

com $r_1 = \frac{N\vartheta}{N-2\vartheta}$. Como $v \in W^{2,\vartheta}(\Omega)$, então $v \in L^{r_1}(\Omega)$ e tem-se

$$\int_{\Omega} (v^+)^{q \frac{r_1}{p}} dx = \int_{\{(v^+) \leq 1\}} (v^+)^{q \frac{r_1}{p}} dx + \int_{\{(v^+) > 1\}} (v^+)^{q \frac{r_1}{p}} dx \leq |\Omega| + \int_{\Omega} (v^+)^{r_1} dx < \infty$$

e

$$\int_{\Omega} |h(x)v^+|^{\frac{r_1}{p}} dx \leq c \int_{\Omega} (v^+)^{r_1} dx < \infty$$

e resulta que

$$\left(\int_{\Omega} |f_\lambda(x)|^{\frac{r_1}{p}} \right)^{\frac{p}{r_1}} < \infty.$$

Logo $f_\lambda(x) \in L^{\vartheta_1}(\Omega)$, com $\vartheta_1 = \frac{r_1}{p}$. Então, $v \in W^{2,\vartheta_1}(\Omega)$.

Para mostrar que a regularidade de v foi melhorada, é necessário mostrar que

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta} = \frac{r_1}{r} > 1.$$

Temos que

$$r_1 = \frac{N \left(\frac{2^* + \tau}{2^* - 1 + \tau} (1 + \varepsilon) \right)}{N - 2 \left(\frac{2^* + \tau}{2^* - 1 + \tau} \right) (1 + \varepsilon)} = \frac{N(2^* + \tau)(1 + \varepsilon)}{N(2^* - 1 + \tau) - 2(2^* + \tau)(1 + \varepsilon)}.$$

Daí

$$\frac{r_1}{r} = \frac{N(2^* + \tau)(1 + \varepsilon)}{N(2^* - 1 + \tau) - 2(2^* + \tau)(1 + \varepsilon)} \frac{1}{(2^* + \tau)} = \frac{N(1 + \varepsilon)}{N(2^* - 1 + \tau) - 2(2^* + \tau)(1 + \varepsilon)}.$$

Assim, basta verificarmos que

$$N(2^* - 1 + \tau) - 2(1 + \varepsilon)(2^* + \tau) > 0 \quad \text{e} \tag{3.9}$$

$$N(1 + \varepsilon) > N(2^* - 1 + \tau) - 2(2^* + \tau)(1 + \varepsilon). \tag{3.10}$$

A partir de (3.9)

$$N(2^* - 1 + \tau) > 2(1 + \varepsilon)(2^* + \tau)$$

o que implica que

$$\frac{N(2^* - 1 + \tau)}{2(2^* + \tau)} - 1 > \varepsilon$$

e por (3.10) temos

$$\begin{aligned} N(2^* - 1 + \tau) &< N(1 + \varepsilon) + 2(1 + \varepsilon)(2^* + \tau) \\ &= [N + 2(2^* + \tau)](1 + \varepsilon) \end{aligned}$$

daí

$$\frac{N(2^* - 1 + \tau)}{N + 2(2^* + \tau)} - 1 < \varepsilon. \quad (3.11)$$

Assim

$$\frac{N(2^* - 1 + \tau)}{N + 2(2^* + \tau)} - 1 < \varepsilon < \frac{N(2^* - 1 + \tau)}{2(2^* + \tau)} - 1. \quad (3.12)$$

Podemos então encontrar um $\varepsilon > 0$ satisfazendo (3.12). Consequentemente, temos

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta} > 1.$$

Pelo Teorema de regularidade B.9, assim como para $\vartheta_1 > \vartheta$ temos $v \in W^{2,\vartheta_1}(\Omega)$, também para qualquer ϑ_k suficientemente grande, $v \in W^{2,\vartheta_k}(\Omega)$. Quando $2\vartheta_k > N$, pelo Teorema de imersão de Sobolev, podemos obter que $v \in C^{0,\theta}(\bar{\Omega})$, $f_\lambda(x) \in C^{0,\theta}(\bar{\Omega})$, então $v \in C^{2,\theta}(\bar{\Omega})$ pelo Teorema de regularidade de Schauder B.10. ■

3.6 Existência da primeira solução para $\lambda \in (0, \Lambda)$

Mostramos que existe solução positiva para o problema (P_λ) para $\lambda \in (0, \lambda_0)$. Mostraremos agora a existência de soluções para $\lambda \in (0, \Lambda)$.

Lema 3.8 *Seja $\Lambda = \sup\{\lambda > 0 : \text{o problema } (P_\lambda) \text{ tem uma solução}\}$ então $\Lambda \in (0, \infty)$.*

Demonstração: Como h é uma função não negativa e não trivial existe $x \in \Omega$ tal que $h(x) > 0$. Sendo ainda h uma função contínua, existe $a > 0$ tal que o conjunto $\{x \in \Omega; h(x) > a\}$ é não vazio. Considere Ω_0 como sendo uma bola contida neste conjunto e $\phi_1 \in H_0^1(\Omega_0)$ uma autofunção positiva associada ao primeiro autovalor λ_1 do problema

$$\begin{cases} -\Delta\phi_1 = \lambda_1\phi_1, & x \in \Omega_0 \\ \phi_1 = 0, & x \in \partial\Omega_0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Sabemos que $\lambda_1 > 0$ e $\phi_1 = 0$ sobre $\partial\Omega_0$. Pelo Lema de Hopf (veja Teorema B.14) segue que $\frac{\partial\phi_1}{\partial\nu} < 0$ sobre $\partial\Omega_0$. Agora, escolha $\bar{\lambda} > 0$ satisfazendo

$$\lambda_1 t < \bar{\lambda} t^q + at^p, \quad \forall t > 0. \quad (3.14)$$

Note que

$$\lambda_1 t - at^p \rightarrow -\infty \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty.$$

Então existe $t_0 > 1$ tal que

$$\lambda_1 t - at^p \leq 0, \quad \forall \quad t \geq t_0.$$

Para $t \in [1, t_0]$ temos que existe $c > 0$ tal que

$$\lambda_1 t - at^p < ct^q.$$

Para $t \in (0, 1)$ temos

$$\lambda_1 t - at^p < \lambda_1 t < \lambda_1 t^q.$$

Dáí, para $\bar{\lambda} = \max\{c, \lambda_1\}$ temos

$$\lambda_1 t - at^p < \bar{\lambda} t^q, \quad \text{quando} \quad t > 0.$$

Considere $u \in C^2(\Omega)$ uma solução do problema (P_λ) para $\lambda \in (0, \Lambda)$. Assim como fizemos na Proposição 2.14 do capítulo anterior, usando Teorema de Green B.13 e o Teorema de Hopf B.14, obtemos

$$\int_{\Omega_0} (\lambda u^q + au^p) \phi_1(x) dx < \int_{\Omega_0} (\bar{\lambda} u^q + au^p) \phi_1 dx.$$

Logo existe $x_0 \in \Omega_0$ tal que

$$(\lambda u^q(x_0) + au^p(x_0)) \phi_1(x_0) < (\bar{\lambda} u^q(x_0) + au^p(x_0)) \phi_1(x_0)$$

o que implica que $\lambda < \bar{\lambda}$. Em particular, $\Lambda \leq \bar{\lambda} < \infty$. Por outro lado, mostramos que para $\lambda \in (0, \lambda_0)$, o problema (P_λ) possui uma solução, então $\Lambda \geq \lambda_0 > 0$. Portanto,

$$0 < \lambda_0 \leq \Lambda \leq \bar{\lambda} < \infty,$$

como queríamos demonstrar. ■

O problema sublinear apresentado a seguir terá uma importante relação com o problema (P_λ) .

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.15)$$

A proposição a seguir nos fornece informações sobre o problema sublinear (3.15) que serão necessárias para a demonstração dos resultados posteriores. Lembrando que uma função

$\underline{u}(\bar{u}) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ é uma subsolução (supersolução) do problema (3.15) se satisfaz respectivamente

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \leq \lambda \underline{u}^q, & \text{em } \Omega \\ \underline{u} \leq 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} \geq \lambda \bar{u}^q, & \text{em } \Omega \\ \bar{u} \geq 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.17)$$

Proposição 3.9 *Seja $\lambda \in (0, \Lambda)$. Temos que $\varepsilon\phi_1$ é uma subsolução do problema (3.15) para ε suficientemente pequeno.*

Demonstração: Seja ϕ_1 a autofunção do operador $-\Delta$ associada ao autovalor λ_1 em relação a Ω . Queremos mostrar que

$$-\Delta(\varepsilon\phi_1) \leq \lambda(\varepsilon\phi_1)^q.$$

Temos que

$$-\Delta(\varepsilon\phi_1) = \varepsilon(\lambda_1\phi_1) = \left(\frac{\varepsilon^{1-q}\lambda_1}{\lambda} \phi_1^{1-q} \right) (\lambda(\varepsilon\phi_1)^q).$$

Então, basta encontrar $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{\varepsilon^{1-q}\lambda_1}{\lambda} \phi_1^{1-q} \leq 1.$$

Como $\phi_1 \in L^\infty(\Omega)$, existe $c > 0$ tal que

$$\phi_1^{1-q}(x) \leq c, \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Daí

$$\frac{\varepsilon^{1-q}\lambda_1}{\lambda} \phi_1^{1-q} \leq \varepsilon^{1-q} \left(\frac{\lambda_1 c}{\lambda} \right) \leq 1$$

desde que

$$0 < \varepsilon \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda_1 c} \right)^{\frac{1}{1-q}}.$$

Isto implica que

$$-\Delta(\varepsilon\phi_1) \leq \lambda(\varepsilon\phi_1)^q,$$

ou seja, $\varepsilon\phi_1$ é uma subsolução do problema (3.15). Além disso, dado qualquer supersolução positiva $\bar{u}$ de (3.15), usando argumentos semelhantes aos usados por Annaxsuel Lima em [6], podemos mostrar que $\varepsilon\phi_1 \leq \bar{u}$ para ε suficientemente pequeno. De fato, considere $\bar{u}$ uma supersolução positiva do problema (3.15). Seja $\Omega_1 = \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \delta\}$. Como $\phi_1, \bar{u} > 0$ em Ω e pela compacidade de $\overline{\Omega \setminus \Omega_1}$, existe $c > 0$ tal que

$$\frac{\bar{u}(x)}{\phi(x)} \geq c, \quad \forall x \in \overline{\Omega \setminus \Omega_1}. \quad (3.18)$$

Por outro lado, pelo Teorema de Hopf temos que $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} < 0$ em $\partial\Omega$. Para cada $x \in \bar{\Omega}_1$, escolha um único $\tilde{x} \in \partial\Omega$ tal que a reta que passa por esses dois pontos coincida com a reta suporte do vetor normal exterior $\nu = \nu(\tilde{x})$. Considere

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}(x) = \langle \nabla \bar{u}(x), \nu(\tilde{x}) \rangle.$$

Como $\partial\Omega$ é compacto, temos que existe $C < 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}(x) \right| < C, \quad \forall x \in \bar{\Omega}_1.$$

Analogamente, como $\phi_1 \in C_0^1(\bar{\Omega})$ temos que existe $c_1 > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu}(x) \right| \leq c_1, \quad \forall x \in \bar{\Omega}_1.$$

Sejam $c_0 = \inf_{\bar{\Omega}_1} (\partial \phi_1) / (\partial \nu) < 0$ e $0 < \gamma < C/c_0$. Considere a função $h : \bar{\Omega}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \gamma \phi_1(x) - \bar{u}(x)$. Temos

$$\frac{\partial h}{\partial \nu}(x) = \gamma \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}(x) \geq \gamma c_0 - C > 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}_1. \quad (3.19)$$

Fixando $x \in \bar{\Omega}_1$, definimos $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(t) = h(x + t\nu)$ onde $\nu = \nu(\tilde{x})$. Assim, existe $\tilde{t} > 0$ tal que $x + \tilde{t}\nu = \tilde{x} \in \partial\Omega$. Temos que $h(\partial\Omega) \equiv 0$, daí

$$g(\tilde{t}) = h(x + \tilde{t}\nu) = h(\tilde{x}) = 0. \quad (3.20)$$

Observe que g é a composta de duas funções de classe C^1 , logo $g : [0, \tilde{t}] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[0, \tilde{t}]$ e derivável em $(0, \tilde{t})$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi \in (0, \tilde{t})$, tal que

$$g(\tilde{t}) - g(0) = g'(\xi)(\tilde{t} - 0).$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \nu}(x + \xi\nu) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{h(x + \xi\nu + z\nu) - h(x + \xi\nu)}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{h(x + (\xi + z)\nu) - h(x + \xi\nu)}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(\xi + z) - g(\xi)}{z} \\ &= g'(\xi), \end{aligned}$$

segue de (3.20) que

$$\tilde{t} \frac{\partial h}{\partial \nu}(x + \xi\nu) = \tilde{t} g'(\xi) = g(\tilde{t}) - g(0) = -h(x).$$

Por (3.19) e sendo $\tilde{t} > 0$ segue que

$$-h(x) = \tilde{t} \frac{\partial h}{\partial \nu}(x + \xi\nu) > 0 \quad \text{em } \Omega_1.$$

Consequentemente, $h(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega_1$ e assim $h(x) = \gamma\phi_1(x) - \bar{u}(x) \leq 0$. Segue então que

$$\gamma\phi_1(x) \leq \bar{u}(x), \quad \forall x \in \Omega_1$$

o que implica que

$$\frac{\bar{u}(x)}{\phi_1(x)} \geq \gamma > 0 \quad \text{em } \Omega_1. \quad (3.21)$$

Por (3.18) e (3.21) obtemos

$$\frac{\bar{u}(x)}{\phi_1} \geq c_2 > 0, \quad \forall x \in \Omega$$

onde $c_2 = \min\{c, \gamma\}$. Portanto, tomando $0 < \varepsilon < c_2$ temos que $\varepsilon\phi_1 \leq \bar{u}$. ■

Dessa forma pelo Teorema B.11 o problema (3.15) possui uma solução u tal que

$$\varepsilon\phi_1 \leq u \leq \bar{u}$$

desde que $\varepsilon > 0$ seja suficientemente pequeno.

O resultado a seguir é importante para encontrar a primeira solução para $\lambda \in (0, \Lambda)$.

Lema 3.10 *Para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$, (P_λ) tem um mínimo na topologia C^1 .*

Demonstração: Fixe $\lambda \in [\lambda_0, \Lambda)$. Escolha $\lambda < \lambda_2 < \Lambda$ tal que (P_{λ_2}) tem uma solução u_2 . De acordo com o Teorema 2.5 (veja [4]), como a função

$$t \mapsto \frac{g(x, t)}{t} = \lambda_0 t^{q-1}$$

é não decrescente para $t > 0$, o problema (3.15) possui uma única solução positiva u_0 quando $\lambda = \lambda_0$. Como u_2 é solução de (P_{λ_2}) temos

$$-\Delta u_2 = \lambda_2 u_2^q + h(x) u_2^p > \lambda u_2^q,$$

dessa forma, u_2 é uma supersolução do problema (3.15). Assim, pela Proposição 3.9 e pelo Teorema B.11, para ε suficientemente pequeno existe uma solução do problema (3.15) tal que

$$\varepsilon\phi_1 \leq u \leq u_2.$$

Como a solução é única $u_0 = u$ e $u_0 \leq u_2$. Como u_0 é solução e u_2 não é solução de (3.15), temos que $u_0 \neq u_2$. Uma vez que

$$-\Delta(u_2 - u_0) \geq \lambda(u_2^q - u_0^q) \geq 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad u_2 - u_0 = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

segue do Princípio do Máximo B.15 que $u_0 < u_2$ em Ω . Sejam

$$\tilde{f}_\lambda(x, t) = \begin{cases} f_\lambda(x, u_0(x)), & \text{se } t \leq u_0(x) \\ f_\lambda(x, t), & \text{se } u_0(x) < t < u_2(x) \\ f_\lambda(x, u_2(x)), & \text{se } t \geq u_2(x) \end{cases} \quad \tilde{F}_\lambda(x, u) = \int_0^u \tilde{f}_\lambda(x, t) dt$$

e o funcional $\tilde{T}_\lambda : H_s^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\tilde{T}_\lambda(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_\Omega \tilde{F}_\lambda(x, u) dx.$$

Como u_0 e u_2 são contínuas em $\bar{\Omega}$ então são limitadas em $\bar{\Omega}$. Portanto, $\tilde{f}_\lambda$ é uma função limitada. Sendo assim, $\tilde{F}_\lambda(x, t) \leq ct$ para todo $x \in \Omega$ e $t > 0$. Pela imersão de $H^1(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$ obtemos

$$\tilde{T}_\lambda(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - c \|u\| = \|u\| \left(\frac{1}{2} \|u\| - c \right)$$

para toda $u \in H_s^1(\Omega)$. Assim, $\tilde{T}_\lambda$ é coercivo e limitado inferiormente. Logo $\tilde{T}_\lambda$ possui um mínimo global $u_\lambda \in H_s^1(\Omega)$ e por sua vez u_λ é ponto crítico para $\tilde{T}_\lambda$. Logo,

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda = \tilde{f}_\lambda(x, u_\lambda) & x \in \Omega \\ u_\lambda = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela definição de $\tilde{f}_\lambda$ temos

$$f_\lambda(x, u_2) \geq \tilde{f}_\lambda(x, u_\lambda) \geq f_\lambda(x, u_0) \geq \lambda u_0^q.$$

Assim, como u_0 é solução do problema (3.15), u_2 é solução do problema (P_{λ_2}) e $\lambda < \lambda_2$ temos

$$\begin{cases} -\Delta(u_0 - u_\lambda) = \lambda_0 u_0^q - \tilde{f}_\lambda(x, u_\lambda) \leq \lambda u_0^q - \tilde{f}_\lambda(x, u_\lambda) \leq 0 & \text{em } \Omega \\ u_0 - u_\lambda = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta(u_\lambda - u_2) = \tilde{f}_\lambda(x, u_\lambda) - f_{\lambda_2}(x, u_2) \leq 0 & \text{em } \Omega \\ u_\lambda - u_2 = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Princípio do Máximo B.15 temos $u_\lambda \equiv u_0$ ou $u_0 < u_\lambda$ em Ω . Mas se $u_\lambda \equiv u_0$ teríamos $-\Delta(u_\lambda - u_0) = 0$ e daí $\tilde{f}_\lambda(x, u_\lambda) = \lambda_0 u_0^q$ o que não é válido pois $u_0 > 0$ e $h \neq 0$. De modo análogo concluímos que $u_\lambda < u_2$ em Ω pois caso contrário, se $u_\lambda \equiv u_2$, teríamos $\tilde{f}_\lambda(x, u_2) = f_{\lambda_2}(x, u_2)$, ou seja

$$\lambda u_2^q + h(x) u_2^p = \lambda_2 u_2^q + h(x) u_2^p \quad \Rightarrow \quad (\lambda - \lambda_2) u_2^q = 0$$

o que não é válido pois $u_2 > 0$ e $\lambda < \lambda_2$. Logo,

$$u_0 < u_\lambda < u_2 \quad \text{em } \Omega. \quad (3.22)$$

Pelo Lema A.4, $u_\lambda \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, $\alpha \in (0, 1)$, daí se $\|u - u_\lambda\|_{C^1} \leq \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que $u_0 < u < u_2$, em Ω . Dessa forma, por definição temos que $\tilde{f}_\lambda(x, u) = f_\lambda(x, u)$, e conseqüentemente, $T_\lambda(u) = \tilde{T}_\lambda(u)$, para $u_0 < u < u_2$. Portanto, u_λ também é um minimizante local para T_λ , na topologia C^1 . ■

O próximo lema nos garante a existência de uma solução para o nosso problema por meio de resultados de minimização.

Lema 3.11 *Seja $\lambda \in (0, \Lambda)$, u_λ é um minimizante local para T_λ em $H_s^1(\Omega)$.*

A prova deste resultado é encontrada nos artigos [5] e [15]. Como consequência deste lema, temos que u_λ é um ponto crítico para o funcional T_λ e por sua vez é solução para o problema (P_λ) e é positiva por construção. Além disso,

$$\begin{aligned} T_\lambda(u_\lambda) &= \tilde{T}_\lambda(u_\lambda) \leq \tilde{T}_\lambda(u_0) = \frac{1}{2}\|u_0\|^2 - \int_{\Omega} f(x, u_0)u_0 dx \\ &= \frac{1}{2}\lambda \int_{\Omega} u_0^{q+1} dx - \lambda \int_{\Omega} u_0^{q+1} dx - \int_{\Omega} h(x)u_0^{p+1} dx < 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.7 Existência da segunda solução para $\lambda \in (0, \Lambda)$

Na sequência fixamos $\lambda \in (0, \Lambda)$ e esperamos encontrar uma solução do tipo passo da montanha da forma $v_\lambda = u_\lambda + v$, onde u_λ é o minimizante local encontrado no Lema 3.11, e $v > 0$ em Ω . Definimos

$$z_\lambda(x, t) = \begin{cases} f_\lambda(u_\lambda + t) - f_\lambda(u_\lambda) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$Z_\lambda(x, v) = \int_0^v z_\lambda(x, t) dt$$

e

$$S_\lambda(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \int_{\Omega} Z_\lambda(x, v) dx.$$

Temos que $S_\lambda : H_s^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional de classe C^1 .

Precisamos provar que existe um ponto crítico para S_λ que seja uma função positiva.

Lema 3.12 *Seja $\lambda \in (0, \Lambda)$. S_λ tem um ponto crítico v_0 com $v_0 > 0$ em Ω .*

Demonstração: Claramente, $S_\lambda(0) = 0$. Além disso, $v = 0$ é um minimizante local de S_λ para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$. De fato, pela definição de $Z_\lambda(x, v)$, temos

$$\begin{aligned} Z_\lambda(x, v) &= \int_0^{v^+} z_\lambda(x, t) dt = \int_0^{v^+} (f_\lambda(u_\lambda + t) - f_\lambda(u_\lambda)) dt \\ &= \int_{u_\lambda(x)}^{u_\lambda(x) + v^+} f_\lambda(\xi) d\xi - \int_0^{v^+} f_\lambda(u_\lambda) dt \\ &= F_\lambda(u_\lambda + v^+) - F_\lambda(u_\lambda) - f_\lambda(u_\lambda)v^+ \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
S_\lambda(v) &= \frac{1}{2}||v||^2 - \int_{\Omega} Z_\lambda(x, v)dx \\
&= \frac{1}{2}||v||^2 - \int_{\Omega} F_\lambda(u_\lambda + v^+)dx + \int_{\Omega} F_\lambda(u_\lambda)dx + \int_{\Omega} f_\lambda(u_\lambda)v^+dx \\
&= \frac{1}{2}||v^+||^2 + \frac{1}{2}||v^-||^2 - \frac{1}{2}||u_\lambda + v^+||^2 + T_\lambda(u_\lambda + v^+) \\
&\quad - T_\lambda(u_\lambda) + \frac{1}{2}||u_\lambda||^2 + \int_{\Omega} f_\lambda(u_\lambda)v^+dx \\
&= \frac{1}{2}||v^-||^2 - \langle u_\lambda, v^+ \rangle + T_\lambda(u_\lambda + v^+) - T_\lambda(u_\lambda) + \int_{\Omega} f_\lambda(u_\lambda)v^+dx \\
&\geq \frac{1}{2}||v^-||^2 + T_\lambda(u_\lambda + v^+) - T_\lambda(u_\lambda) \geq 0,
\end{aligned}$$

pois pelo Lema 3.11 u_λ é um minimizante local para T_λ , daí $T_\lambda(u_\lambda + v^+) - T_\lambda(u_\lambda) \geq 0$ se $||v^+||$ é pequena. De forma análoga ao Lema 3.5, mostramos que S_λ satisfaz a condição (PS). Além disso, como $u_\lambda > 0$ temos para $t > 0$

$$\begin{aligned}
S_\lambda(tv) &= \frac{t^2}{2}||v||^2 - \int_{\Omega} F_\lambda(u_\lambda + tv^+)dx + \int_{\Omega} F_\lambda(u_\lambda)dx + t \int_{\Omega} f_\lambda(u_\lambda)v^+dx \\
&= \frac{t^2}{2}||v||^2 - \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{q+1}(u_\lambda + tv^+)^{q+1} + \frac{1}{p+1}h(x)(u_\lambda + tv^+)^{p+1} \right) dx \\
&\quad + t \int_{\Omega} f_\lambda(u_\lambda)v^+dx + C_\lambda \\
&\leq \frac{t^2}{2}||v||^2 - \frac{\lambda t^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} (v^+)^{q+1} dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} h(x) (v^+)^{p+1} dx + t \int_{\Omega} f_\lambda(u_\lambda)v^+dx.
\end{aligned}$$

Tomando $v \in H_s^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} h(x) (v^+)^{p+1} dx > 0,$$

lembrando que $p+1 > 2 > q+1 > 1$, obtemos $S_\lambda(tv) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Aplicando o Teorema do Passo da Montanha B.4, podemos obter um ponto crítico $v_0 \in H_s^1(\Omega)$ para S_λ com $v_0 \not\equiv 0$ em Ω . Então temos $-\Delta v_0 = z_\lambda(x, v_0)$ e usando v_0^- como função teste obtemos $||v_0^-|| = 0$ pois $z_\lambda(x, t) = 0$ para $t < 0$. Segue então do Princípio do Máximo que $v_0 > 0$. ■

Observe que, se v_0 é um ponto crítico não trivial de S_λ , então v_0 satisfaz a equação

$$\begin{cases} -\Delta v_0 = f_\lambda(u_\lambda + v_0) - f_\lambda(u_\lambda) & x \in \Omega \\ v_0 = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.24)$$

Além disso, considerando $v_\lambda = v_0 + u_\lambda$ obtemos

$$-\Delta v_\lambda = -\Delta(v_0 + u_\lambda) = f_\lambda(v_0 + u_\lambda) - f_\lambda(u_\lambda) + f_\lambda(u_\lambda) = f_\lambda(v_\lambda).$$

Logo, $v_\lambda = v_0 + u_\lambda$ é uma solução não trivial de (P_λ) e $v_\lambda \neq u_\lambda$, pois v_0 e u_λ são positivas.

Podemos agora, apresentar a demonstração do Teorema 3.1.

Demonstração: (Teorema 3.1)

- (1) Este item é provado através dos Lemas 3.11 e 3.12.
- (2) Para todo $\lambda \in (\lambda_0, \Lambda)$, pelo Lema 3.11 sabemos que existe uma solução u_λ para o problema (P_λ) e segue de (3.22) e (3.23) que $0 < u_0 < u_\lambda$ em Ω e $T_\lambda(u_\lambda) < 0$. Escolha uma sequência $\{\lambda_n\}$ tal que $\lambda_0 < \lambda_n < \Lambda$ e $\lambda_n \rightarrow \Lambda$ quando $n \rightarrow \infty$. Denotamos as soluções correspondentes a λ_n por u_{λ_n} . Então, elas satisfazem

$$T_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) < 0, \quad T'_{\lambda_n}(u_{\lambda_n}) = 0.$$

Isto é,

$$\frac{1}{2} \|u_{\lambda_n}\|^2 - \frac{\lambda_n}{q+1} \|u_{\lambda_n}^+\|_{q+1}^{q+1} - \frac{1}{p+1} \|u_{\lambda_n}^+\|_{h,p+1}^{p+1} < 0 \quad (3.25)$$

e

$$\|u_{\lambda_n}\|^2 - \lambda_n \|u_{\lambda_n}^+\|_{q+1}^{q+1} - \|u_{\lambda_n}^+\|_{h,p+1}^{p+1} = 0. \quad (3.26)$$

Segue por (3.25) e (3.26), que existe $C > 0$ tal que

$$\|u_{\lambda_n}\| < C$$

para todo n . Assim, existe uma subsequência fracamente convergente de $\{u_{\lambda_n}\}$, denotada por $\{u_{\lambda_m}\}$ tal que

$$\begin{aligned} u_{\lambda_m} &\rightharpoonup u_\Lambda && \text{em } H_s^1(\Omega) \\ u_{\lambda_m} &\rightarrow u_\Lambda && \text{em } L_h^{p+1}(\Omega) \\ u_{\lambda_m} &\rightarrow u_\Lambda && \text{em } L^{q+1}(\Omega) \\ u_{\lambda_m}(x) &\rightarrow u_\Lambda(x) && \text{q.t.p. em } \Omega. \end{aligned}$$

Com argumentos semelhantes aos do Lema 3.5 mostramos que $\langle T'_{\lambda_m}(u_{\lambda_m}), v \rangle \rightarrow \langle T'_\Lambda(u_\Lambda), v \rangle$ para toda $v \in H_s^1(\Omega)$. Por outro lado, $\langle T'_{\lambda_m}(u_{\lambda_m}), v \rangle = 0$, daí pela unicidade do limite temos que $\langle T'_\Lambda(u_\Lambda), v \rangle = 0$. Portanto, u_Λ é solução fraca para (P_Λ) . Pelo Lema A.4, temos que $u_\Lambda \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Uma vez que $u_{\lambda_n}(x) \geq u_0(x)$ em Ω segue que $u_\Lambda(x) \geq u_0(x) > 0$ em Ω .

- (3) Este item segue da definição de Λ , pois

$$\Lambda = \sup\{\lambda > 0 : \text{o problema } (P_\lambda) \text{ tem uma solução}\}.$$

Isto conclui a prova do teorema. ■

Apêndice A

Resultados de Regularidade

Queremos mostrar que o funcional associado ao problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x, u), & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e que a solução $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. Além disso, mostraremos que se u é uma solução não negativa e não trivial então $u > 0$.

Proposição A.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e seja g uma função satisfazendo*

(i) $g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(ii) *existem constantes $r, s \geq 1$ e $a_1, a_2 \geq 0$ tais que $|g(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^{\frac{r}{s}}$ para todo $x \in \bar{\Omega}$ e $\xi \in \mathbb{R}$.*

Então a aplicação $\varphi(x) \rightarrow g(x, \varphi(x))$ pertence a $C(L^r(\Omega), L^s(\Omega))$.

Demonstração: Sejam $u \in L^r(\Omega)$ e $x \in \bar{\Omega}$. Por (ii), temos

$$\int_{\Omega} (|g(x, u(x))|)^s dx \leq \int_{\Omega} \left(a_1 + a_2 |u(x)|^{\frac{r}{s}} \right)^s dx.$$

Se $s \geq 1$ temos

$$(|g(x, u(x))|)^s \leq \left(a_1 + a_2 |u(x)|^{\frac{r}{s}} \right)^s \leq 2^s (a_1^s + a_2^s |u(x)|^r).$$

Tomando $a_3 = \max\{a_1, a_2\}$ e $c = 2^s a_3^s$, obtemos

$$|g(x, u(x))|^s \leq 2^s a_3^s (1 + |u(x)|^r) = c (1 + |u(x)|^r), \quad \forall \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (\text{A.2})$$

Daí, lembrando que $|\Omega| < \infty$, temos

$$\int_{\Omega} |g(x, u(x))|^s dx \leq c \int_{\Omega} (1 + |u(x)|^r) dx < +\infty.$$

Logo, $g(., u(.)) \in L^s(\Omega)$, e assim, a aplicação $\varphi(x) \rightarrow g(x, \varphi(x))$ está bem definida. Vamos verificar a continuidade da aplicação

$$\begin{aligned} G : L^r(\Omega) &\rightarrow L^s(\Omega) \\ \varphi &\mapsto G(\varphi)(x) = g(x, \varphi(x)). \end{aligned}$$

Afirmção: Dados $z, \varphi \in L^r(\Omega)$ e $x \in \bar{\Omega}$, considere $F(z) = G(z + \varphi) - G(\varphi)$, com φ fixo. Então, G é contínua em φ se, e somente se, F é contínua em $z \equiv 0$.

De fato, F é contínua em $z \equiv 0$, se e somente se, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\|h - 0\|_{L^r(\Omega)} < \delta \Rightarrow \|F(h) - F(0)\|_{L^s(\Omega)} < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\|h - 0\|_{L^r(\Omega)} < \delta \Rightarrow \|G(h + \varphi) - G(\varphi)\|_{L^s(\Omega)} < \varepsilon.$$

Escrevendo $\psi(x) = h(x) + \varphi(x)$, temos

$$\|\psi - \varphi\| < \delta \Rightarrow \|G(\psi) - G(\varphi)\| < \varepsilon$$

que é a definição da continuidade de G em φ . Portanto é suficiente mostrar que G é contínua em $\phi \equiv 0$ e podemos supor, sem perda de generalidade, que $g(x, 0) = 0$ em Ω . Seja $\varepsilon > 0$. Uma vez que supomos $G(0) = g(\cdot, 0) = 0$, devemos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \delta \Rightarrow \|G(u)\|_{L^s(\Omega)} < \varepsilon.$$

Como $g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, dado $\hat{\varepsilon}$, para cada $x \in \bar{\Omega}$, existe $\delta_x > 0$ tal que, usando a equivalência das normas em $\mathbb{R}^N$.

$$\|z - x\| + |\xi| \leq \delta_x \Rightarrow |g(z, \xi) - g(x, 0)| < \hat{\varepsilon} \Rightarrow |g(z, \xi)| < \hat{\varepsilon}.$$

As bolas $B(x, \frac{\delta_x}{2})$ formam uma cobertura para $\bar{\Omega}$ que é compacto, logo esta admite uma subcobertura finita, ou seja, $\exists x_1, \dots, x_k \in \bar{\Omega}$ tais que

$$\bar{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \frac{\delta_i}{2}), \text{ com } \delta_i = \delta_{x_i}.$$

Seja $\delta_1 = \min_{1 \leq i \leq k} \delta_i$. Sejam $z \in \bar{\Omega}$ e $\xi \in \mathbb{R}$ com $|\xi| \leq \frac{\delta_1}{2}$. Como $z \in \bar{\Omega}$, $\exists i$ tal que $z \in B(x_i, \frac{\delta_i}{2})$ e ainda $|\xi| \leq \frac{\delta_1}{2} \leq \frac{\delta_i}{2}$ então

$$\|z - x_i\| + |\xi| \leq \frac{\delta_i}{2} + \frac{\delta_i}{2} = \delta_i \Rightarrow \|g(z, \xi) - g(x_i, 0)\| < \hat{\varepsilon}.$$

Logo, dado qualquer $\hat{\varepsilon} > 0$, existe $\beta > 0$ tal que

$$|\xi| \leq \beta \Rightarrow |g(x, \xi)| \leq \hat{\varepsilon}, \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (\text{A.3})$$

Agora, para $\hat{\varepsilon} > 0$ e $\delta > 0$ a serem escolhidos, seja $u \in L^r(\Omega)$ com $\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \delta$ e considere o conjunto

$$\Omega_1 \equiv \{x \in \bar{\Omega}; |u(x)| \leq \beta\}.$$

Logo, $u(x) \in \mathbb{R}$ por (A.2) temos $|g(x, u(x))| < \hat{\varepsilon}$, o que implica que

$$\int_{\Omega_1} |g(x, u(x))|^s dx < \int_{\Omega_1} \hat{\varepsilon}^s dx \leq \hat{\varepsilon}^s |\Omega_1| \leq \hat{\varepsilon}^s |\Omega|. \quad (\text{A.4})$$

pois $\Omega_1 \subset \bar{\Omega}$ e $|\Omega_1| \leq |\bar{\Omega}| = |\Omega|$ onde $|\Omega|$ determina a medida de Lebesgue de Ω . Escolha $\hat{\varepsilon}$ tal que $(\hat{\varepsilon})^s |\Omega| \leq \frac{\varepsilon^s}{2}$. Então por (A.3)

$$\int_{\Omega_1} |g(x, u(x))|^s dx \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2.$$

Seja $\Omega_2 = \bar{\Omega} \setminus \Omega_1$. Então, por (A.2) temos que

$$\int_{\Omega_2} |g(x, u(x))|^s dx \leq c \int_{\Omega_2} (1 + |u(x)|^r) dx \leq c(|\Omega_2| + \delta^r) \quad (\text{A.5})$$

pois $\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \delta$. Além disso, $\Omega_2 = \bar{\Omega} \setminus \Omega_1 \equiv \{x \in \bar{\Omega}; |u(x)| > \beta\}$, daí

$$\int_{\Omega_2} |u(x)|^r dx \geq \int_{\Omega_2} \beta^r dx \Rightarrow \int_{\Omega_2} |u(x)|^r dx \geq \beta^r |\Omega_2|.$$

Logo, $\delta^r \geq \int_{\Omega_2} |u(x)|^r dx \geq \beta^r |\Omega_2|$, o que implica que $|\Omega_2| \leq (\delta \beta^{-1})^r$. Assim substituindo em (A.5) temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} |g(x, u(x))|^s dx &\leq c(|\Omega_2| + \delta^r) \\ &\leq c((\delta \beta^{-1})^r + \delta^r) \\ &\leq c((\beta^{-1})^r + 1)\delta^r. \end{aligned}$$

Escolhendo δ tal que $c((\delta \beta^{-1})^r + 1)\delta^r \leq \frac{\varepsilon^s}{2}$, obtemos

$$\int_{\Omega_2} |g(x, u(x))|^s dx \leq \frac{\varepsilon^s}{2}. \quad (\text{A.6})$$

Logo, por (A.5) e (A.6) temos que

$$\int_{\Omega} |g(x, u(x))|^s dx \leq \frac{\varepsilon^s}{2} + \frac{\varepsilon^s}{2} = \varepsilon^s \Rightarrow \|g(\cdot, u)\|_{L^s(\Omega)} \leq \varepsilon$$

Portanto,

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \delta \Rightarrow \|g(\cdot, u)\|_{L^s(\Omega)} \leq \varepsilon$$

■

A proposição a seguir é devida ao Teorema de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg e o Teorema de Rellich-Kondrachov.

Proposição A.2 *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ cuja fronteira é uma variedade suave. Se $u \in H_0^1(\Omega)$ então $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ (com $n \geq 3$) e para todo $t \in [1, 2n(n-2)^{-1}]$ existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^t(\Omega)} \leq c\|u\|$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, a aplicação inclusão

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega)$$

é compacta para $t \in [1, 2n(n-2)^{-1}]$.

Estabeleceremos a seguir um resultado de regularidade para funcionais.

Proposição A.3 *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ cuja fronteira é uma variedade suave. Seja g satisfazendo*

$$(i) \quad g(x, \xi) \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R});$$

(ii) *existem constantes $a_1, a_2 > 0$ tais que*

$$|g(x, \xi)| \leq a_1 + a_2|\xi|^s$$

onde $0 \leq s < (n+2)(n-2)^{-1}$ e $n \geq 3$. Se $G(x, \xi) \equiv \int_0^\xi g(x, t)dt$ e

$$I(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - G(x, u) \right) dx$$

então

$$I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}) \text{ e } I'(u)\varphi = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi - g(x, u)\varphi) dx$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Além disso, $J(u) \equiv \int_{\Omega} G(x, u(x)) dx$ é fracamente contínuo e $J'(u)$ é compacto.

Demonstração: Escrevemos $I(u) = N(u) + J(u)$, onde $N(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$. Note que, $N \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, pois $N(u)$ é contínuo e ainda

$$\begin{aligned} N'(u)\varphi &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{N(u+t\varphi) - N(u)}{t} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|u+t\varphi\|^2 - \|u\|^2}{t} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\|u\|^2 + 2t\langle u, \varphi \rangle + t^2\|\varphi\|^2 - \|u\|^2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + t\|\varphi\|^2 \right) \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = \langle u, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Daí a bilinearidade do produto interno garante a linearidade de $N' : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$.

Se $\|\varphi\| \leq 1$ então

$$|N'u\varphi| = \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \right| = |\langle u, \varphi \rangle| \leq \|u\| \|\varphi\|$$

o que implica que

$$\|N'u\|_{H^{-1}} \leq \|u\|.$$

Logo N' é limitado e por sua vez é contínuo. Mostraremos agora que $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Dividimos esta demonstração em três passos.

1º Passo: J está bem definido e é fracamente contínuo.

2º Passo: J é Fréchet diferenciável.

3º Passo: J' é compacto.

(1º) Para mostrar que J está bem definido, basta mostrar que $G(\cdot, u) \in L^1(\Omega)$. Temos

$$\begin{aligned} |G(x, \xi)| &= \left| \int_0^{\xi} g(x, t) dt \right| \leq \int_{\min\{0, \xi\}}^{\max\{0, \xi\}} |g(x, t)| dt \\ &\leq \int_0^{|\xi|} (a_1 + a_2 |t|^s) dt = a_1 |\xi| + \frac{a_2}{(s+1)} |\xi|^{s+1} = a_1 |\xi| + \hat{a}_2 |\xi|^{s+1}. \end{aligned}$$

Note que, se $|\xi| \leq 1$

$$|G(x, \xi)| \leq a_1 + \hat{a}_2 |\xi|^{s+1}$$

e se $|\xi| > 1$

$$|G(x, \xi)| \leq a_1 |\xi|^{s+1} + \hat{a}_2 |\xi|^{s+1} \leq 1 + a_3 |\xi|^{s+1}.$$

Logo existem $c, d > 0$ tais que

$$|G(x, \xi)| \leq c + d |\xi|^{s+1}$$

com $1 \leq s+1 < 2^*$. Além disso, $G \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, logo satisfaz as condições (i)-(ii) da Proposição A.1, com $r = 1$. Portanto, a aplicação $\varphi \mapsto G(\cdot, \varphi(\cdot)) \in C(L^{s+1}(\Omega), L^1(\Omega))$. Pela Proposição A.2 temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{s+1}(\Omega)$ com imersão compacta. Logo $G(\cdot, u) \in L^1(\Omega)$, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Logo J está definido em $H_0^1(\Omega)$. Para mostrar que J é fracamente contínuo, seja $u_m \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Então $u_m \rightarrow u$ em $L^{s+1}(\Omega)$ pela Proposição A.2, pois $s+1 < 2^*$. Como $G \in C(L^{s+1}(\Omega), L^1(\Omega))$, temos que $G(\cdot, u_m(\cdot)) \rightarrow G(\cdot, u(\cdot))$ em $L^1(\Omega)$ daí,

$$\left| \int_{\Omega} G(x, u_m(x)) - G(x, u(x)) dx \right| \leq \int_{\Omega} |G(x, u_m(x)) - G(x, u(x))| dx \rightarrow 0.$$

Logo, $J(u_m) \rightarrow J(u)$ e J é fracamente contínuo.

(2°) Mostraremos agora que J é Fréchet diferenciável em $H_0^1(\Omega)$. Inicialmente, observe que por (ii) temos

$$|g(x, \xi)| \leq a_1 + a_2 |\xi|^{\frac{\alpha s}{\alpha}}$$

para todo $\alpha \geq 1$ e $\forall x \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}$. Daí, pela Proposição A.1, $p \in C(L^{\alpha s}(\Omega), L^\alpha)$. Em particular, para $\alpha = \frac{s+1}{s}$, temos $p \in C(L^{s+1}(\Omega), L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega))$. Daí

$$\int_{\Omega} |g(x, u)\varphi| dx \leq \|g(x, u)\|_{L^{\frac{s+1}{s}}} \|\varphi\|_{L^{s+1}} < \infty, \quad \forall u, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Seja $u \in H_0^1$. Queremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon, u)$ tal que

$$\left| J(u + \varphi) - J(u) - \int_{\Omega} g(x, u)\varphi dx \right| \leq \varepsilon \|\varphi\|, \quad \text{sempre que } \|\varphi\| \leq \delta.$$

Mostraremos que $\delta = \delta(\varepsilon, \|u\|)$ e J é uniformemente diferenciável em um conjunto limitado. Dado $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Escrevendo $\psi \equiv |G(x, u(x) + \varphi(x)) - G(x, u(x)) - g(x, u(x))\varphi(x)|$ temos que

$$|J(u + \varphi) - J(u) - \int_{\Omega} g(x, u)\varphi(x) dx| = \int_{\Omega} \psi dx.$$

Defina

$$\begin{aligned} \Omega_1 &\equiv \{x \in \bar{\Omega}; |u(x)| \geq \beta\} \\ \Omega_2 &\equiv \{x \in \bar{\Omega}; |\varphi(x)| \geq \gamma\} \\ \Omega_3 &\equiv \{x \in \bar{\Omega}; |u(x)| \leq \beta \text{ e } |\varphi(x)| \geq \gamma\} \end{aligned}$$

com β e γ a serem escolhidos adequadamente. Logo, $\Omega = \bigcup_{i=1}^3 \Omega_i$ (união não disjunta)

$$\int_{\Omega} \psi dx \leq \int_{\Omega_1} \psi dx + \int_{\Omega_2} \psi dx + \int_{\Omega_3} \psi dx$$

Tomando $f(t) = G(x, \xi + t\eta) - G(x, \xi)$ com $t \in [0, 1]$, temos $f \in C^1$ e pelo Teorema do Valor Médio existe $\theta \in (0, 1)$ com $\theta(x, \xi, \eta)$ tal que $f(1) - f(0) = f'(\theta)$. Mas

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\theta + t) - f(\theta)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(x, \xi + \theta\eta + t\eta) - G(x, \xi + \theta\eta)}{t} \\ &= G'_u(x, \xi + \theta\eta)\eta \\ &= g(x, \xi + \theta\eta)\eta \end{aligned}$$

o que implica $G(x, \xi + \eta) - G(x, \xi) = p(x, \xi + \theta\eta)\eta$. Logo pela condição (ii)

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} |G(x, u(x) + \varphi(x)) - G(x, u(x))| dx &= \int_{\Omega_1} |g(x, u(x) + \theta\varphi(x))\varphi(x)| dx \\
&\leq \int_{\Omega_1} [a_1 + a_2 |u(x) + \theta\varphi(x)|^s] |\varphi(x)| dx \\
&\leq \int_{\Omega_1} [a_1 + a_2 2^s (|u|^s + \theta^s |\varphi|^s)] |\varphi| dx \\
&\leq \int_{\Omega_1} [a_1 |\varphi| + \hat{a}_2 (|u|^s |\varphi| + |\varphi|^{s+1})] dx. \quad (\text{A.7})
\end{aligned}$$

Vamos estimar cada uma dessas parcelas separadamente. Pela desigualdade de Holder temos

$$\int_{\Omega_1} |\varphi(x)| dx \leq |\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}} \|\varphi\|_{L^{2^*}}.$$

Uma vez que $\frac{s}{s+1} + \frac{1}{2^*} < 1$, existe $\sigma > 1$ tal que $\frac{s}{s+1} + \frac{1}{2^*} + \frac{1}{\sigma} = 1$. Assim, pela desigualdade de Holder temos

$$\int_{\Omega_1} |u(x)|^s |\varphi(x)| dx \leq |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}} \|u\|_{L^{s+1}}^s \|\varphi\|_{L^{2^*}}.$$

Temos que

$$\int_{\Omega_1} |\varphi(x)|^s |\varphi(x)| dx \leq |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}} \|\varphi\|_{L^{s+1}}^s \|\varphi\|_{L^{2^*}}.$$

Logo por (A.7) temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} |G(x, u(x) + \varphi(x)) - G(x, u(x))| dx &\leq a_1 |\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}} \|\varphi\|_{L^{2^*}} + a_3 (|\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}} \|u\|_{L^{s+1}(\Omega)}^s \|\varphi\|_{L^{2^*}(\Omega)} \\
&\quad + |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}} \|\varphi\|_{L^{s+1}(\Omega)}^s \|\varphi\|_{L^{2^*}(\Omega)}) \\
&\leq a_1 |\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}} c \|\varphi\| + a_3 |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}} c_1 (|u|^s + |\varphi|^s) \|\varphi\| \\
&= a_4 \|\varphi\| [|\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}} + |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}} (|u|^s + |\varphi|^s)]. \quad (\text{A.8})
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} |g(x, u(x))\varphi(x)| dx &\leq \int_{\Omega_1} (a_1 + a_2 |u(x)|^s) |\varphi(x)| dx \\
&\leq a_1 \int_{\Omega_1} |\varphi(x)| dx + a_2 \int_{\Omega_1} |u(x)|^s |\varphi(x)| dx \\
&\leq a_1 |\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}} \|\varphi\|_{L^{2^*}(\Omega)} \\
&\quad + a_2 |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}} \|u\|_{L^{s+1}(\Omega)}^s \|\varphi\|_{L^{2^*}(\Omega)} \\
&\leq a_5 \|\varphi\| [|\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}} + |\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}} |u|^s]. \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

Além disso, pela proposição anterior, existe $a_6 > 0$ tal que $\|u\| \geq a_6 \|u\|_{L^2} \geq a_6 \beta |\Omega_1|^{\frac{1}{2}}$.

Logo

$$|\Omega_1|^{\frac{1}{\sigma}} \leq \left(\frac{\|u\|}{a_6\beta} \right)^{\frac{2}{\sigma}} \equiv M_1 \quad \text{e} \quad |\Omega_1|^{\frac{n+2}{2n}} \leq \left(\frac{\|u\|}{a_6\beta} \right)^{\frac{n+2}{n}} \equiv M_2$$

assim, se $\beta \rightarrow \infty$ então $M_1, M_2 \rightarrow 0$. Daí, por (A.8) e (A.9) temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \psi dx &= \int_{\Omega_1} |G(x, u(x) + \varphi(x)) - G(x, u(x)) - g(x, u(x))\varphi(x)| dx \\ &\leq a_7 \|\varphi\| [M_2 + M_1(\|u\|^s + \|\varphi\|^s)]. \end{aligned}$$

Podemos escolher β suficientemente grande tal que

$$a_7[M_2 + M_1(\|u\|^s + 1)] \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Assim,

$$\|\varphi\| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega_1} \psi dx \leq \frac{\varepsilon}{3} \|\varphi\|.$$

Da mesma forma mostramos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi dx &= \int_{\Omega_2} |G(x, u(x) + \varphi(x)) - G(x, u(x)) - g(x, u(x))\varphi(x)| dx \\ &\leq \int_{\Omega_2} |g(x, u(x) + \theta\varphi(x))| + |g(x, u(x))| |\varphi(x)| dx \\ &\leq \int_{\Omega_2} [a_1 + a_2(|u(x)| + |\varphi(x)|)^s + a_1 + a_2|u(x)|^s] |\varphi(x)| dx \\ &\leq a_4 \left(\int_{\Omega_2} [1 + (|u(x)| + |\varphi(x)|)^s]^{\frac{s+1}{s}} \right)^{\frac{s}{s+1}} \left(\int_{\Omega_2} |\varphi(x)|^{s+1} \right)^{\frac{1}{s+1}} \\ &\leq a_4 \left(\int_{\Omega_2} [1 + (|u(x)| + |\varphi(x)|)^s]^{\frac{s+1}{s}} \right)^{\frac{s}{s+1}} \|\varphi\|_{L^{s+1}(\Omega_2)}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde $\frac{s}{s+1} + \frac{1}{s+1} = 1$ e $1 < s+1 < 2^*$. Temos ainda

$$\begin{aligned} a_4 \left[\left(\int_{\Omega_2} [1 + (|u(x)| + |\varphi(x)|)^s]^{\frac{s+1}{s}} \right)^{\frac{1}{s+1}} \right]^s &\leq k [|\Omega_2|^{\frac{1}{s+1}} + \|u\|_{L^{s+1}(\Omega_2)} + \|\varphi\|_{L^{s+1}(\Omega_2)}]^s \\ &\leq c_1 (1 + \|u\|_{L^{s+1}(\Omega_2)}^s + \|\varphi\|_{L^{s+1}(\Omega_2)}^s) \\ &\leq c (1 + \|u\|^s + \|\varphi\|^s). \end{aligned}$$

Como em Ω_2 tem-se $|\varphi(x)| \geq \gamma$ então $\left(\frac{|\varphi(x)|}{\gamma} \right)^k \geq 1$, para todo $k > 0$, em particular para $k = 2^* - (s+1) > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega_2} |\varphi(x)|^{s+1} \right)^{\frac{1}{s+1}} &\leq \left(\int_{\Omega_2} |\varphi(x)|^{s+1} \left(\frac{|\varphi(x)|}{\gamma} \right)^{2^* - (s+1)} dx \right)^{\frac{1}{s+1}} \\ &= \gamma^{\frac{(s+1)-2^*}{s+1}} \|\varphi\|_{L^{2^*}(\Omega_2)}^{\frac{2^*}{s+1}} \\ &\leq c \gamma^{\frac{(s+1)-2^*}{s+1}} \|\varphi\|_{L^{2^*}(\Omega_2)}^{\frac{2^*}{s+1}}. \end{aligned}$$

Assim, por (A.10) temos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \psi dx &\leq a(1 + \|u\|^s + \|\varphi\|^s)(c_1 \gamma^{\frac{(s+1)-2^*}{s+1}} \|\varphi\|^{\frac{2^*}{s+1}}) \\ &\leq k \gamma^{\frac{(s+1)-2^*}{s+1}} (1 + \|u\|^s + \|\varphi\|^s) \|\varphi\|^{\frac{2^*}{s+1}}.\end{aligned}$$

Como por (i), $p \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, então $G \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, ou seja, dados quaisquer $\hat{\varepsilon}, \hat{\beta} > 0$, existe um $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\hat{\varepsilon}, \hat{\beta})$ tal que

$$|G(x, t+h) - G(x, t) - g(x, t)h| \leq \hat{\varepsilon}|h|$$

sempre que $x \in \bar{\Omega}$, $|t| \leq \hat{\beta}$ e $|h| \leq \hat{\gamma}$. Em particular, se $\hat{\beta} \equiv \beta$ e $\gamma \leq \hat{\gamma}$, temos pela proposição anterior que existe $a > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_3} \psi dx &= \int_{\Omega_3} |G(x, u(x) + \varphi(x)) - G(x, u(x)) - g(x, u(x))\varphi(x)| dx \\ &\leq \int_{\Omega_3} \hat{\varepsilon} |\varphi(x)| dx \\ &= \hat{\varepsilon} \|\varphi\|_{L^1(\Omega_3)} \\ &\leq a \hat{\varepsilon} \|\varphi\|.\end{aligned}$$

Escolha $\hat{\varepsilon}$ tal que $3a\hat{\varepsilon} \leq \varepsilon$. Isto determina $\hat{\gamma}$. Escolha $\gamma = \hat{\gamma}$. Assim, como

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \psi dx &\leq \int_{\Omega_1} \psi dx + \int_{\Omega_2} \psi dx + \int_{\Omega_3} \psi dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} \|\varphi\| + k \gamma^{\frac{(s+1)-2^*}{s+1}} (1 + \|u\|^s + \|\varphi\|^s) \|\varphi\|^{\frac{2^*}{s+1}} + a \hat{\varepsilon} \|\varphi\| \\ &\leq \frac{\varepsilon \|\varphi\| + 3k \gamma^{\frac{(s+1)-2^*}{s+1}} (1 + \|u\|^s + \|\varphi\|^s) \|\varphi\|^{\frac{2^*}{s+1}} + \hat{\varepsilon} \|\varphi\|}{3} \\ &= \frac{2\varepsilon}{3} \|\varphi\| + k \gamma^{\frac{(s+1)-2^*}{s+1}} (1 + \|u\|^s + \|\varphi\|^s) \|\varphi\|^{\frac{2^*}{s+1}}.\end{aligned}$$

Finalmente, escolha δ suficientemente pequeno tal que se $\|\varphi\| \leq \delta$ e $\delta \leq 1$ temos

$$k \gamma^{\frac{(s+1)-2^*}{s+1}} (2 + \|u\|^s) \delta^{\frac{2^*}{s+1}-1} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

daí, obtemos

$$\int_{\Omega} \psi dx \leq \varepsilon \|\varphi\|$$

e por sua vez

$$|J(u + \varphi) - J(u) - \int_{\Omega} g(x, u)\varphi dx| \leq \int_{\Omega} \psi dx \leq \varepsilon \|\varphi\|,$$

ou seja, J é Fréchet diferenciável.

(3º) Para mostrar que J' é compacto. Se $u_m \rightarrow u$ em $L^{s+1}(\Omega)$, então $J'(u_m) \rightarrow J'(u)$.

Pela desigualdade de Holder temos

$$\begin{aligned}
\|J'(u_m) - J'(u)\| &= \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left| \int_{\Omega} (g(x, u_m(x)) - g(x, u(x))) \varphi(x) dx \right| \\
&\leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left(\int_{\Omega} |g(\cdot, u_m(x)) - g(\cdot, u(x))|^{\frac{s+1}{s}} \right)^{\frac{s}{s+1}} \left(\int_{\Omega} |\varphi(x)|^{s+1} \right)^{\frac{1}{s+1}} \\
&\leq \sup_{\|\varphi\| \leq 1} a \|g(\cdot, u_m) - g(\cdot, u)\|_{L^{\frac{s+1}{s}}} \|\varphi\| \\
&\leq a \|g(\cdot, u_m) - g(\cdot, u)\|_{L^{\frac{s+1}{s}}}
\end{aligned}$$

e como $p \in C(L^{s+1}(\Omega), L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega))$ segue que

$$\|g(\cdot, u_m) - g(\cdot, u)\|_{L^{\frac{s+1}{s}}} \rightarrow 0 \quad \text{quando } m \rightarrow \infty.$$

Logo

$$\|J'(u_m) - J'(u)\| \rightarrow 0.$$

Seja $(u_m) \in H_0^1(\Omega)$ sequência limitada. Queremos mostrar que J' é compacto, ou seja, que existe uma subsequência de $(J'(u_m))$ convergente em $H^{-1}(\Omega)$. Como (u_m) é limitada, então (u_m) possui uma subsequência fracamente convergente, $u_{m_k} \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$. Utilizando a Proposição A.2, a menos de subsequência

$$u_{m_k} \rightarrow u \quad \text{em } L^{s+1}(\Omega)$$

o que implica que $J'(u_{m_k}) \rightarrow J'(u)$. Logo, J' leva sequência limitada em sequência que possui subsequência convergente. Portanto J' é compacto. ■

Mostraremos a regularidade da solução do problema (A.1).

Proposição A.4 *Se $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ é solução fraca do problema (A.1) então $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$. Além disso, se $u \geq 0$ e u é não trivial então $u > 0$.*

Demonstração: Usando o Teorema B.8 temos que $u \in L^b(\Omega)$, para todo $b < \infty$. Assim, pelo Teorema B.9 temos que $u \in W^{2,a}(\Omega) \cap W_0^{1,a}(\Omega)$ e por sua vez, pelo Teorema B.7 temos que $u \in L^\infty(\Omega)$. Temos então que $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, (veja Teorema 7.26 Trudinger). Aplicando o Teorema B.12 obtemos que u é positiva em Ω . De fato, se existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = 0$, tome $R > 0$ pequeno de modo que $B_{4R} \subset \Omega$ e pela Desigualdade de Harnack, Teorema B.12 existe $c > 0$ tal que

$$0 \leq \sup_{B_R(x_0)} u \leq c \inf_{B_R(x_0)} u = u(x_0) = 0$$

o que implica que

$$u \equiv 0 \quad \text{em } B_R(x_0).$$

Assim $A = \{x \in \Omega; u(x) = 0\}$ é aberto em Ω . Sendo u contínuo, segue que A é fechado. Como Ω é conexo, então $A = \Omega$ ou $A = \emptyset$. Se $A = \Omega$ temos que $u(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$, o que é um absurdo. Logo $A = \emptyset$, dessa forma u é uma solução positiva para (A.1).

■

Apêndice B

Resultados básicos

Enunciaremos aqui alguns resultados utilizados em nosso trabalho e indicaremos as referências onde podem ser encontradas as respectivas demonstrações.

Teorema B.1 ([2], Teorema 4.6, Desigualdade de Hölder) *Assuma que $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $fg \in L^1$ e*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Teorema B.2 ([3], Teorema 2.1, Multiplicadores de Lagrange) *Seja $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e suponha que $\mathcal{M} \subset X$ é uma C^1 -subvariedade de codimensão k , $\mathcal{M} = \{u \in \Omega : \psi_j(u) = 0, j = 1, 2, \dots, k\}$ onde $\psi_j \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $j = 1, 2, \dots, k$, $\Omega \subset X$ é um conjunto aberto e $\psi'_1(u), \psi'_2(u), \dots, \psi'_k(u)$ são linearmente independentes para cada $u \in \Omega$. Então se $\hat{u} \in \mathcal{M}$ é um ponto crítico de $\psi|_{\mathcal{M}}$ então existe $\hat{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \in \mathbb{R}^k$ tal que*

$$\varphi'(\hat{u}) = \hat{\theta} \psi'(\hat{u}) = \sum_{j=1}^k \theta_j \psi'_j(\hat{u}).$$

Teorema B.3 ([11], Teorema 2.2, Teorema do Passo da Montanha) *Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição (PS). Suponha que $I(0) = 0$ e*

(I) *existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$;*

(II) *existe $e \in H_0^1(\Omega) \setminus \bar{B}_\rho$ tal que $I(e) \leq 0$.*

Então I possui um valor crítico $c \geq \alpha$. Além disso, c pode ser caracterizado como

$$c_{PM} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([0,1])} I(u),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

O teorema a seguir é uma versão geral do Teorema do Passo da Montanha.

Teorema B.4 ([9], Corolário 5.11) *Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Suponha que para dois pontos u e v em E e um escalar α vale:*

- (1) *existe $0 < \rho < \|u - v\|$ tal que $\inf I|_{\partial B_\rho(u)} \geq \alpha$;*
- (2) $\max\{I(u), I(v)\} \leq \alpha$.

Então

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma_u^v} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq \alpha,$$

onde

$$\Gamma_u^v = \{\gamma \in C([0, 1], X) : \gamma(0) = u \text{ e } \gamma(1) = v\}.$$

Se I satisfaz a condição $(PS)_c$ então c é um valor crítico para I . Além disso, se $c = \alpha$ então existe um ponto crítico em $\partial B_\rho(u)$ no nível c .

Teorema B.5 ([12], Teorema 5.1, Princípio Variacional de Ekeland) *Seja V um espaço métrico completo, e $F : V \rightarrow \mathbb{R} \cup (+\infty)$ uma função semicontínua inferiormente, $\neq +\infty$. Então para quaisquer $\epsilon, \delta > 0$ e qualquer $u \in V$ com*

$$F(u) \leq \inf_V F + \epsilon,$$

existe um elemento $\nu \in V$ minimizando estritamente o funcional

$$F_\nu(w) \equiv F(w) + \frac{\epsilon}{\delta} d(\nu, w)$$

Além disso, temos

$$F(\nu) \leq F(u) \quad \text{e} \quad d(u, \nu) \leq \delta$$

Teorema B.6 ([2], Teorema 4.9) *Seja (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e seja $f \in L^p(\Omega)$ tal que $f_n \rightarrow f$ em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que*

- (a) $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω ;
- (b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ q.t.p. em Ω .

Teorema B.7 ([2], Corolário 9.13, Teorema de Morrey) *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Temos*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega), \quad \text{se } p > N,$$

com imersão contínua.

Teorema B.8 ([12], Lema B.3) *Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$ e seja $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory tal que*

$$|g(x, u)| \leq c(x)(1 + |u|) \quad \text{q.t.p em } \Omega,$$

com $0 \leq c(x) \in L^{\frac{N}{2}}_{loc}(\Omega)$. Se $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ é uma solução fraca da equação

$$-\Delta u = g(x, u) \quad \text{em } \Omega,$$

então $u \in L^b_{loc}(\Omega)$ para qualquer $b < \infty$. Se $u \in H^{1,2}_0(\Omega)$, e $c \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$, então $u \in L^b(\Omega)$ para qualquer $b < \infty$.

Teorema B.9 ([13], Teorema 9.15) *Seja Ω um domínio de classe $C^{1,1}$ em $\mathbb{R}^N$. Então se $h \in L^p(\Omega)$, com $1 < p < \infty$, o problema de Dirichlet $-\Delta u = h$ em Ω , $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ tem uma única solução $u \in W^{2,p}(\Omega)$.*

Teorema B.10 ([2], Teorema 9.33, Teorema de Schauder) *Suponha que Ω é limitado e de classe $C^{2,\alpha}$ com $0 < \alpha < 1$. Então para cada $f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ existe uma única solução $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Teorema B.11 ([4], Teorema 2.1) *Suponhamos que o problema $-\Delta u = f(u)$ possua uma subsolução $\underline{u}$ e uma supersolução $\bar{u}$, com $\underline{u} \leq \bar{u}$ em Ω . Suponhamos ainda, que f seja de classe C^k e*

$$f(t_1) - f(t_2) \leq -c(t_1 - t_2);$$

para alguma constante $c \geq 0$ e para todo $t_1 \geq t_2$, $|t_1|, |t_2| \leq \max\{||\underline{u}||_\infty, ||\bar{u}||_\infty\}$. Então o problema possui soluções $U, V \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$; tais que $\underline{u} \leq U \leq V \leq \bar{u}$. Além disso, qualquer solução u com $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ é tal que $U \leq u \leq V$, ou seja, U é solução mínima e V é solução máxima com respeito ao intervalo $[\underline{u}, \bar{u}]$.

Teorema B.12 ([13], Teorema 8.20, Desigualdade de Harnack) *Seja o operador $Lu = -\Delta u + c(x)u$ com $c \in L^\infty(\Omega)$ e seja $u \in W^{1,2}(\Omega)$ satisfazendo $u \geq 0$ e $Lu = 0$ em Ω . Então para qualquer bola $B_{4R}(y) \subset \Omega$, temos*

$$\sup_{B_R(y)} u \leq C \inf_{B_R(y)} u$$

onde $C = C(N, R, ||c||_{L^\infty})$.

Teorema B.13 ([7], Apêndice Teorema 2, Fórmula de Green) *Sejam $u, v \in C^2(\Omega)$. Então*

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS.$$

Teorema B.14 ([7], Lema de Hopf) *Assuma que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Seja Lu definido como em B.12. Assuma ainda que, $Lu \geq 0$ em Ω e que exista um ponto $x_0 \in \partial\Omega$, tal que*

$$u(x_0) \leq u(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Finalmente, suponhamos que Ω satisfaz a condição da bola interior em x_0 , isto é, que existe uma bola $B \subset \Omega$ com $x_0 \in \partial B$. Então,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$$

onde ν é o vetor normal unitário a bola B em x_0 . Se $c \geq 0$ em Ω , a mesma conclusão é válida desde que $u(x_0) \leq 0$.

Teorema B.15 ([7], Capítulo 6 Teorema 4, Princípio do Máximo Forte) *Suponha que Ω é conexo, que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Seja Lu definido como em B.12.*

- (i) Se $Lu \leq 0$ em Ω e u atinge o máximo não negativo sobre $\bar{\Omega}$ em um ponto interior, então u é constante em Ω ;*
- (ii) Similarmente, se $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge um mínimo não positivo sobre $\bar{\Omega}$ em um ponto interior, então u é constante em Ω .*

Referências Bibliográficas

- [1] Ambrosetti, A.; Brezis, H.; Cerami, G. *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122 (1994), 519 a 543.
- [2] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer - Verlag, 2010.
- [3] Costa, D. G., *An Invitation to Variational Methods in Differential Equations*, Birkhauser, Boston-Basel-Berlin 2007, 138 pages, ISBN 978-0-8176-4535-9. Price (softcover): 39.90 EUR.
- [4] de Figueiredo, D. G., *Positive Solutions of Semilinear Elliptic Problems*, Escola Latino-Americana de Equações Diferenciais, IME-USP, São Paulo, 1981.
- [5] de Figueiredo, D. G.; Solimini, S., *A variational approach to superlinear elliptic problems*, American Mathematical Society 7, (1984), 699 a 717.1532 a 4133
- [6] de Lima, A. A., *O Método de Sub e Supersolução e Aplicações a Problemas Elípticos*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Campina Grande, 2011.
- [7] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in mathematics, American Mathematical Society, Volume 19, 1998.
- [8] Gao, J.; Zhang Y.; Zhao P., *Existence of positive solutions for a class of semilinear and quasilinear elliptic equations with supercritical case*, J. Math. Anal. Appl. 381, (2011), 215 a 228.
- [9] Ghoussoub, N., *Duality and perturbation methods in critical point theory*, Cambridge University Press, 1993.
- [10] Kavian, O., *Introduction à la théorie des points critiques*, Springer-Verlag France, Paris, 1993.
- [11] Rabinowitz, P. H., *Minimax Methods in Critical Point Theory With Applications to Differential Equations*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 1984.

- [12] Struwe, M., *Variational Methods - Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*. Springer, 4th Edition, 2008.
- [13] Trudinger, N. S., *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967), 721 a 747.
- [14] Wu, T.-F., *On semilinear elliptic equations involving concave-convex nonlinearities and sign-changing weight function*, J. Math. Anal. Appl. 318 (2006), 253 a 270.
- [15] Brezis, H.; Nirenberg, L., *H^1 versus C^1 local minimizers*, C. R. Acad. Sci. Paris Sèr. I Math. 317 (5) (1993), 465 a 472.
- [16] Wang, W.Z., *Sobolev embeddings involving symmetry*, Bull. Sci. Math. 130 (2006), 269 a 278.