

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Singularidades de Equações Diferenciais Implícitas.

Por
Francisco Vieira de Oliveira

sob orientação do
Prof. Dr. Lizandro Sanchez Challapa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do
Programa de Pós-Graduação em Matemática-
CCEN-UFPB, como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Matemática.

maio - 2013
João Pessoa - Paraíba

Singularidades de Equações Diferenciais Implícitas.

por

Francisco Vieira de Oliveira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Singularidades

Aprovada por:

Prof. Dr. **Lizandro Sanchez Challapa**
Orientador

Prof. Dr. **Alexandre César G. Fernandes**
Examinador

Prof. Dr. **Roberto Callejas Bedregal**
Examinador

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

maio - 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

Data: **maio - 2013**

Autor: **Francisco Vieira de Oliveira**

Título: **Singularidades de Equações
Diferenciais Implícitas.**

Depto.: **Matemática**

Grau: **M.Sc.** Convocação: **maio** Ano: **2013**

Permissão está juntamente concedida pela Universidade Federal da Paraíba à circular e ser copiado para propósitos não comerciais, em sua descrição, o título acima sob a requisição de indivíduos ou instituições.

Assinatura do Autor

*Dedico este trabalho a Lídia Suzana Vi-
eira de Oliveira.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelas oportunidades e felicidade de enfrentar dois anos de mestrado depois de muitas dificuldades emocionais.

Ao grande amigo e orientador Lizandro Sanchez Challapa, pois sem a ajuda deste nada disto seria possível. Aos meus amigos que sempre estiveram ao meu lado, dando força para continuar, depois de algumas quedas. A minha esposa, Zilândia dos Santos Araújo, pela confiança no meu trabalho. A minha família que sempre acreditou que eu podia chegar onde cheguei, especialmente meu filho, Tiago Torres de Oliveira.

Por último, mas não menos importante, agradeço ao meu amigo Paulo do Nascimento Silva, pela amizade e por inúmeros incentivos dados nos dois longos anos de convivência. Muito obrigado a todos.

Índice

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	ix
1 Preliminares	1
1.1 Germes de aplicações suaves	1
1.2 Transversalidade	5
1.3 Campos de vetores	9
1.4 Involuções	12
2 Equações diferenciais implícitas	14
2.1 Pontos singulares	14
2.2 Equações diferenciais binárias	18
3 Forma normal de EDIs	21
3.1 Singularidades genéricas de EDI	21
3.2 Forma normal de EDI	28
3.3 Forma normal de EDB com discriminante suave	30
3.4 Forma normal de EDB com discriminante tipo Morse	34
Referências Bibliográficas	39

Resumo

Neste trabalho estudamos singularidades de equações diferenciais implícitas. Usando o Teorema de Transversalidade de Thom e a teoria das singularidades encontramos um subconjunto aberto e denso desta classe de equações que apresentam singularidades boas. Estas singularidades são apenas de seis tipos dobra-sela, dobra-nó, dobra-foco, cúspide elíptica e cúspide hiperbólica. Davydov, em [8], mostrou as formas normais da EDI nos casos de dobra-sela, dobra-nó e dobra-foco. No caso de cúspides, Davydov mostrou que as formas normais da EDI apresentam parâmetros e funções arbitrárias. Para uma classe especial de equações diferenciais implícitas, as equações diferenciais binária (EDB), estudamos a forma normal nos casos em que o discriminante é uma função de Morse.

Palavras-Chave:

Equações diferenciais implícitas, Forma normal, Equações diferenciais binárias, Transversalidade de Thom.

Abstract

In this work we study implicit differential equations. Following the Thom transversality theorem and the singularity theory we find an open and dense subset of this equation class that present only good singularity. This singularity are of six kind well folded saddle, well folded node, well folded focus, elliptical gather, hyperbolic gather. Davydov, in [8] showed the normal forms of a IDE in the case of well folded saddle, well folded node, well folded focus. In the case of gathered singularities, Davydov showed that the normal forms of IDE contains functional moduli. For a special class of implicit differential equation, the binary differential equation (BDE), we study the normal forms in the case in that the discriminant is a Morse function.

Keywords:

Implicit differential equation, Normal form, Binary differential equation, Thom transversality.

bh

Introdução

Uma equação diferencial implícita (EDI) é uma equação da forma

$$F(x, y, p) = 0 \tag{1}$$

onde $p = \frac{dy}{dx}$ e $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave. As singularidades de uma EDI foram primeiro estudadas por Dara em [7]. Em seu trabalho, ele mostrou que em uma vizinhança de um ponto singular regular, veja definição (2.4), a forma normal é dada por $p^2 = x$, e em pontos singulares não regulares mostrou que existe um subconjunto aberto e denso no espaço de todas as funções F de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R} com a C^3 -topologia de Whitney tais que os pontos singulares não regulares são de cinco tipos. Os três primeiros são do tipo dobra-sela, dobra-nó e dobra-foco e os dois últimos são do tipo cúspide elíptica e cúspide hiperbólica. Davydov obteve, em [8], a forma normal de uma EDI na vizinhança de um ponto singular não regular com discriminante suave. No caso em que a singularidade é uma cúspide elíptica ou cúspide hiperbólica, a conjectura de Dara não é verdadeira. Davydov mostrou, neste caso, que as formas normais da EDI apresentam parâmetros e funções arbitrárias.

Quando $F(q_0) = F_p(q_0) = 0$ e $F_{pp}(q_0) \neq 0$ em $q_0 = (x_0, y_0, p_0)$, segue do teorema da divisão ([14]), que a Equação (1) pode ser expressa na forma

$$F(x, y, p) = a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y) = 0$$

onde $a, b, c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves numa vizinhança U de (x_0, y_0) . A equação diferencial implícita acima é chamada equação diferencial binária (EDB). Farid e Bruce mostraram, em ([6]), as formas normais da EDB no caso em que o discriminante da EDB é uma função de Morse.

No capítulo 1, introduzimos algumas definições básicas da teoria das singularidades, de campo de vetores e involuções, necessários para entendimento do capítulo 3. Também introduzimos o Teorema de Transversalidade de Thom e a forma normal das aplicações do plano no plano, na vizinhança de um ponto singular.

No capítulo 2, estudamos as singularidades equações diferenciais implícitas e, também, introduzimos alguns resultados sobre equações diferenciais binárias.

No capítulo 3, demonstramos as formas normais das equações diferenciais binárias. Na seção (3.1) demonstramos o teorema de Dara sobre a genericidade das equações diferenciais implícitas que possuem singularidades boas, e provamos, também, a forma normal de equações diferenciais binária nos casos em que o discriminante tem uma singularidade tipo Morse.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduzimos as notações e definições básicas, usualmente utilizadas na teoria das singularidades de aplicações suaves. Em seguida, apresentamos algumas definições e resultados sobre campos de vetores. Na seção (1.2), introduzimos alguns resultados de transversalidade. Também introduzimos o conceito de involução boa. Os resultados deste capítulo podem ser encontrados em [9], [14], [13], [15].

1.1 Germes de aplicações suaves

Sejam U e V conjuntos abertos de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^p , respectivamente. Uma aplicação $f : U \rightarrow V$ é de classe C^k se possui derivadas parciais contínuas de ordem 1 até k . Denotamos o conjunto dessas aplicações por $C^k(U, V)$. Quando f possui derivadas parciais contínuas de todas as ordens, dizemos que $f : U \rightarrow V$ é de classe C^∞ e denotamos por $C^\infty(U, V)$ esta classe de aplicações. Usamos, também, a notação $df_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ para indicar a derivada de f no ponto a .

Definição 1.1. *Dada uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, dizemos que $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto singular de f se, a matriz jacobiana*

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) (x), \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq i \leq p$$

não tem posto máximo em $x \in \mathbb{R}^n$. Caso contrário, dizemos que x é um ponto regular de f .

É claro que um ponto ser uma singularidade de uma aplicação é uma propriedade local e que no caso de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, os pontos singulares de f correspondem a seus pontos críticos. Neste trabalho, focaremos principalmente em aplicações $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ que têm uma singularidade na origem. Por este motivo, introduzimos a seguinte relação de equivalência.

Definição 1.2. Dadas duas aplicações suaves $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^p$, onde $x \in U_1$, $x \in U_2 \subset \mathbb{R}^n$, $f_1 \sim f_2$ se existe uma vizinhança $U \subset U_1 \cap U_2$ de x tal que $f_1(x) = f_2(x), \forall x \in U$.

As classes de equivalência sobre essa relação são chamadas *germes* de aplicações em x . Denotamos o germe de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ em x por $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$, onde $y = f(x)$. Dizemos que x é a fonte do germe e y é a meta do germe. Para cada germe $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$, associamos a sua derivada $df_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ que é definida como sendo a derivada em x de qualquer representante do germe. Um germe é invertível se, e somente se, sua derivada é invertível. O posto de um germe é definido como o posto de sua derivada. Quando o posto de $df_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é igual a n dizemos que o germe é uma imersão. No caso em que o posto é igual a p , dizemos que o germe é uma submersão.

Definição 1.3. Dois germes $f : (\mathbb{R}^n, x_1) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y_1)$ e $g : (\mathbb{R}^n, x_2) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y_2)$ são equivalentes quando existem germes invertíveis $h : (\mathbb{R}^n, x_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x_2)$ e $k : (\mathbb{R}^p, y_1) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y_2)$ para os quais o diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{R}^n, x_1) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^p, y_1) \\
 \downarrow h & \circlearrowleft & \downarrow k \\
 (\mathbb{R}^n, x_2) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{R}^p, y_2)
 \end{array}$$

isto é, $g \circ h = k \circ f$.

Para nosso estudo é importante o conhecimento de alguns resultados básicos da análise no espaço \mathbb{R}^n , incluindo alguns preliminares da teoria de Morse a qual é uma generalização natural dos conceitos usados nos cursos de cálculo.

Definição 1.4. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto crítico não degenerado se x_0 é um ponto singular de f e a Hessiana, que é o determinante da matriz*

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) (x_0), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

é não nulo.

Definição 1.5. *Uma função suave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser uma função de Morse se todos os seus pontos singulares são pontos críticos não degenerados.*

Usando a relação de equivalência entre germes podemos obter as formas normais na vizinhança de um ponto singular não degenerado.

Lema 1.6. ([14]) *Seja $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe suave. Então:*

1) *Se x_0 é um ponto regular de f , então o germe é equivalente a $\pi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\pi(x_1, \dots, x_n) = x_1$.*

2) *Se x_0 um ponto crítico não degenerado de f , então o germe é equivalente a $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por*

$$g(x) = x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_\lambda^2 - x_{\lambda+1}^2 - \cdots - x_n^2.$$

Denotaremos por $P^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ o espaço vetorial real das aplicações $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ tal que cada componente f_i de $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ é um polinômio de grau $\leq k$ nas coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n de \mathbb{R}^n com termo constante nulo. A noção de espaço de k -jatos de aplicações suaves é introduzida em [12]. Neste trabalho utilizamos a seguinte identificação:

Proposição 1.7. ([12]) *Seja $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ o espaço dos k -jatos. Então existe uma bijeção canônica entre o espaço de k -jatos e o conjunto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times P^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.*

Isto motiva a seguinte definição.

Definição 1.8. Para cada aplicação $f = (f_1, f_2, \dots, f_p) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ e cada $a \in \mathbb{R}^n$, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} j^k f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \\ a &\longmapsto j^k f(a) = (a, f(a), P_1(a), \dots, P_n(a)), \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde $P_i(a)$ é o polinômio de Taylor da função f_i de ordem k em a , sem o termo constante.

A aplicação $j^k f$ é de classe C^∞ e $j^k f(a)$ é chamado o k -jato de f em a .

Exemplo 1.9. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Neste caso o polinômio de Taylor de f de ordem k em $a \in \mathbb{R}$ sem o termo constante é

$$P(a) = f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k,$$

e $j^k f(a)$ pode ser identificado com um elemento do espaço \mathbb{R}^{k+2} com a correspondência

$$(a, f(a), f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k) \leftrightarrow (a, f(a), f'(a), \frac{f''(a)}{2!}, \dots, \frac{f^{(k)}(a)}{k!}).$$

No conjunto $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, definimos uma topologia, chamada Topologia de Whitney.

Definição 1.10. (Topologia de Whitney) Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Uma base para a topologia de Whitney de classe C^k é dada pelos seguintes conjuntos

$$V(f, \delta) = \{g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p); \|j^k f(x) - j^k g(x)\| < \delta(x)\},$$

onde $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e positiva.

A topologia C^∞ de Whitney de $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, tem como base a união de todos os abertos das topologias C^k de Whitney, com $k \geq 0$.

1.2 Transversalidade

Transversalidade é uma ideia importante e profunda no estudo da teoria das singularidades. Nesta seção apresentamos alguns conceitos de transversalidade que usaremos posteriormente.

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^p$ subconjuntos. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é dita suave se para cada $x \in X$ existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de x e uma aplicação suave $F : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ tais que $F(x) = f(x), \forall x \in U \cap X$. Além disso, diremos que f é um difeomorfismo se f é um homeomorfismo e ambos f e f^{-1} são suaves.

Definição 1.11. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^k$ é chamado uma variedade suave de dimensão m se para cada $x \in M$ existem uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^k$ e um difeomorfismo $g : U \rightarrow W \cap M$, onde U é um aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^m .

No caso em que $m = 1$, dizemos que M é uma curva suave. A aplicação g , na definição acima, é chamado de parametrização de $W \cap M$ e o espaço tangente $T_{g(x)}M$ é definido como a imagem da dg_x . Denotaremos por $\dim(M)$ a dimensão de M .

Definição 1.12. Sejam M e N variedades suaves e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave. Considere S uma subvariedade de N e seja $x \in M$. Então, f é transversal a S em x se;

- 1) $f(x) \notin S$ ou
- 2) $f(x) \in S$ e $df_x(T_xM) + T_{f(x)}S = T_{f(x)}N$.

Diremos que f é transversal a S , denotado por $f \pitchfork S$, quando, para todo $x \in M$, f for transversal a S no ponto x . A definição de transversalidade pode ser interpretada da seguinte forma.

Teorema 1.13. ([12]) Sejam M e N variedades suaves, $S \subset N$ uma subvariedade, e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave. Sejam $p \in S$ e $f(p) \in N$. Suponha que exista uma vizinhança U de $f(p)$ em N e uma submersão $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ ($k = \dim(N) - \dim(S)$) tal que $S \cap U = \phi^{-1}(0)$. Então f é transversal a S em p se, e somente se, $\phi \circ f$ é uma submersão em p .

Proposição 1.14. *Sejam $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave e S uma subvariedade de N . Se $f \pitchfork S$ e $\dim(S) + \dim(M) < \dim(N)$ então $f(M) \cap S = \emptyset$.*

Proposição 1.15. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave. Consideremos o conjunto*

$$M = \{p \in U; f(p) = c \text{ e } df_p : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ sobrejetora}\}.$$

Então

- i) Se M é não vazio, então M é uma variedade suave de dimensão m ;*
- ii) $T_p M = \ker df_p$ para todo $p \in M$.*

Teorema 1.16. *(Transversalidade de Thom) ([7]) Para toda subvariedade fechada S de $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, o conjunto das aplicações $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ tal que $j^k F \pitchfork S$ é aberto e denso na C^r -topologia de Whitney, qualquer que seja $r \geq k + 1$.*

Como consequência do teorema de transversalidade de Thom, temos os seguinte resultado:

Lema 1.17. *([14]) O conjunto de todas as funções de Morse é aberto e denso em $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.*

Um resultado de extrema importância para nosso trabalho é o teorema de Whitney. Antes de enunciar o teorema precisamos de algumas definições sobre singularidades de aplicações do plano no plano. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação suave, onde U é um aberto em \mathbb{R}^2 . Vamos usar a notação $J(p) = \det(Jf(a))$ para indicar o determinante da matriz jacobiana de f no ponto p .

Definição 1.18. *Seja f uma aplicação de classe C^2 . Um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ é dito ser um ponto bom de f se $J(p) \neq 0$ ou $\nabla J(p) \neq 0$. Dizemos que f é uma aplicação boa se todo ponto de \mathbb{R}^2 é um ponto bom de f .*

Uma consequência desta definição é que se f é uma aplicação boa em $U \subset \mathbb{R}^2$, então o conjunto dos pontos singulares de f formam uma curva suave em U . Neste

caso, o conjunto dos pontos singulares pode ser parametrizado por uma curva de classe C^2 .

Definição 1.19. *Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação boa e $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, uma parametrização de classe C^2 do conjunto dos pontos singulares de f tais que $\phi(0) = p$, onde p é um ponto singular de f .*

- 1) Dizemos que p é um ponto de dobra de f se $(f \circ \phi)'(0) \neq 0$
- 2) Dizemos que p é um ponto de cúspide de f se $(f \circ \phi)'(0) = 0$ e $(f \circ \phi)''(0) \neq 0$.

A seguir, denotaremos por J_x e J_y as derivadas parciais com respeito a x e y respectivamente. Observe que no caso em que $J_x(p) \neq 0$, usando as equações acima, temos o seguinte: o ponto p é um ponto de dobra de f se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p)J_y(p) - \frac{\partial f}{\partial y}(p)J_x(p) \neq 0. \quad (1.2)$$

O ponto p é um ponto de cúspide de f se $\frac{\partial f}{\partial x}(p)J_y(p) - \frac{\partial f}{\partial y}(p)J_x(p) = 0$ e a aplicação

$$\left(J_x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial x} J_{yy} \right) J_x^2 - 2 \left(J_x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} J_{yx} \right) J_y J_x + \left(J_x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x} J_{xx} \right) J_y^2 \neq 0 \quad (1.3)$$

em p .

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação suave dada por $f(x, y) = (x, v(x, y))$. Se p é um ponto singular da aplicação f e $J_x(p) \neq 0$. Então, usando as equações (1.2), (1.3), a condição para que p seja um ponto de dobra é

$$v_{yy}(p) \neq 0.$$

Para que p seja um ponto de cúspide é:

$$\begin{cases} v_{yy}(p) = 0 \\ v_{xy}(p) \neq 0 \\ v_{yyy}(p) \neq 0. \end{cases}$$

Um dos grandes resultados sobre genericidade de aplicações do plano no plano foi enunciado e demonstrado por Whitney em [15]. Enunciamos este resultado e algumas de suas implicações abaixo.

Teorema 1.20. (Teorema de Whitney) Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto. O conjunto das aplicações suaves $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ que possuem apenas pontos regulares, singularidades de dobra, e cúspide é aberto e denso em $C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$.

A seguir enunciamos a forma normal das aplicações suaves do plano no plano na vinhança de um ponto singular.

Teorema 1.21. Seja $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$.

i) Se p é um ponto de dobra, então o germe $f : (U, p) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é equivalente a $g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$g(x, y) = (x, y^2)$$

ii) Se p é um ponto de cúspide, então o germe $f : (U, p) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é equivalente a $g : (U, p) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$g(x, y) = (x, y^3 - xy)$$

Definição 1.22. Um germe suave

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto f(t, x) \end{aligned}$$

é chamada p -regular em $(0, 0)$ com respeito a t se;

$$f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial t}(0, 0) = \dots = \frac{\partial^{p-1} f}{\partial t^{p-1}}(0, 0) = 0, \frac{\partial^p f}{\partial t^p}(0, 0) \neq 0$$

Teorema 1.23. (Teorema de preparação de Malgrange) Seja $f : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe p -regular em $(0, 0)$ com respeito a primeira variável. Então, existem germes $u_1, u_2, \dots, u_p : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ e $Q : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que;

$$f = Q \cdot (t^p + \sum_{j=1}^p u_j t^{p-j}),$$

onde $Q(0) \neq 0$.

1.3 Campos de vetores

Nesta seção apresentamos alguns conceitos básicos à respeito de campo de vetores. Os resultados apresentados podem ser encontrados em [4], [2] e [8].

Definição 1.24. *Seja M uma variedade suave. Um campo de vetores w em um subconjunto $U \subset M$ é uma correspondência que associa a cada $p \in U$ um vetor $w(p) \in T_pM$. O campo de vetores w é diferenciável em $p \in U$ se, para alguma parametrização φ em p , as funções $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por*

$$w = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

são funções suaves em p .

Uma trajetória ou curva integral do campo $w : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, é uma curva diferenciável $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que;

$$\gamma'(t) = w(\gamma(t)), \quad \forall t \in (-1, 1).$$

Definição 1.25. *Chama-se solução máxima do campo de vetores $w : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a toda solução φ definida num intervalo I , denominado intervalo máximo de φ tal que se ϕ é outra solução no intervalo J com $J \supseteq I$, e $\varphi(t) = \phi(t), \forall t \in I$, então $I = J$.*

Definição 1.26. *Sejam $w : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores e $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U; t \in I\}$. A aplicação $\varphi : \Omega \rightarrow U$ definida por $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$, onde φ_x é uma solução maximal e $\varphi_x(0) = x$, é denominado o fluxo de w .*

Toda classificação de campos de vetores é baseada em alguma relação de equivalência. Existem, pelo menos, três relações de equivalências para campos de vetores são algébrica, diferencial e a topológica.

Definição 1.27. *Sejam φ e ϕ fluxos de campos de vetores $w : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\bar{w} : \bar{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ respectivamente. Dizemos que w é equivalente a \bar{w} se existe uma aplicação bijetora $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $h \circ (\varphi(t, x)) = \phi(h(x), t)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$.*

Além disso, dizemos que:

- (1) A aplicação h é uma equivalência linear se $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear.
- (2) A aplicação h é uma C^r -equivalência se $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo de classe C^r .
- (3) A aplicação h é uma equivalência topológica se $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo.

Observe que na definição (1.27), se $r \geq 1$ então $dh \circ w = \bar{w} \circ h$. Um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é dito ponto singular do campo de vetores $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se $w(p) = 0$.

O processo de reduzir um campo de vetores a uma forma linear é chamado de linearização do campo. O teorema de Poincaré é um dos principais resultados à respeito de linearização de campos e faz parte dos trabalhos desenvolvidos por Poincaré para reduzir campos de vetores à uma forma normal por meio de séries de potências.

Sejam $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores dado por $w(x, y) = (a(x, y), b(x, y))$ e

$$Jw(p) = \begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix}$$

a matriz jacobiana do campo w onde a_x, a_y e b_x, b_y são as derivadas parciais de a e b com respeito a x e y , respectivamente.

Denotamos por $\Delta(p) = \det Jw(p) = a_x b_y - a_y b_x$ o determinante da matriz $Jw(p)$ e por $T = a_x + b_y$ o traço de $Jw(p)$.

Definição 1.28. *Sejam $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores. Um ponto singular p de w é dito ser não degenerado se $\Delta(p) \neq 0$. Caso contrário p é dito um ponto singular degenerado. No caso de p ser não degenerado, tem-se a seguinte classificação;*

- i) O ponto p é uma sela se $\Delta < 0$*
- ii) O ponto p é um nó se $T^2 \geq 4\Delta > 0$*
- iii) O ponto p é um foco se $4\Delta > T^2 > 0$.*

Associado ao conceito de campo de vetores em \mathbb{R}^2 temos o conceito de campo de direções \mathbb{R}^2 . Um campo de direções r em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ é uma correspondência que associa a cada $p \in U$ uma linha $r(p)$ em \mathbb{R}^2 passando por p . O campo de direções r é dito ser suave em $p \in U$ se existe um campo de vetores suave não nulo w , definido

em uma vizinhança $V \subset U$ de p tal que, para cada $q \in V$, $w(q) \neq 0$ é uma base de $r(q)$; o campo de direções r é suave em U se é suave em todo $p \in U$.

Para cada campo de vetores suave w em $U \subset \mathbb{R}^2$ corresponde um campo de direções r definido em p como a linha gerada por $w(p)$, $p \in U$.

Uma curva conexa regular $C \subset U$ é uma curva integral do campo de direções r definido em $U \subset \mathbb{R}^2$ se $r(q)$ é a linha tangente a C em q para todo $q \in C$.

A seguir relembremos o teorema de Poincaré. Assumimos que os auto-valores de A são distintos.

Definição 1.29. *A n -upla $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \subset \mathbb{C}^n$ é dita ser ressonante se existe uma relação da forma*

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i$$

onde $m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\sum_{i=1}^n m_i \geq 2$. Esta relação é chamada de ressonância e o número $|m| = \sum_{i=1}^n m_i$ é chamada ordem da ressonância.

Exemplo 1.30. *A relação $\lambda_1 = 2\lambda_2$ é uma ressonância de ordem 2. A relação $2\lambda_1 = 3\lambda_2$ não é uma ressonância. A relação $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ é uma ressonância de ordem 3 pois, $\lambda_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2$.*

Teorema 1.31. *([2]) Seja $v(x) = A(x) + q(x)$ uma série de potências em n variáveis com coeficientes complexos, onde A é uma matriz de ordem $n \times n$ e $q(x)$ é uma série de potências sem termos lineares e constantes. Se os autovalores da matriz A são não ressonantes, então a equação*

$$\dot{x} = Ax + q(x)$$

pode ser reduzida à equação linear

$$\dot{y} = Ay$$

por uma mudança de variáveis da forma $x = y + h(y)$ onde $h(y)$ é uma série de potências sem termos lineares e constantes.

Definição 1.32. *Sejam r um campo de direções suave em $U \subset \mathbb{R}^2$ e w o campo de vetores que representa r . Se p é um ponto de sela ou nó, o expoente de $p \in U$ é definido como sendo a razão entre o maior autovalor, em valor absoluto, da linearização de w e o menor. No caso em que p é um foco o expoente é o valor absoluto da razão entre a parte imaginária e a parte real.*

Definição 1.33. *Um ponto singular não degenerado de um campo de direções em $U \subset \mathbb{R}^2$ do tipo sela, nó e foco é dito C^k -normal, se o campo de vetores que representa r é C^k -difeomorfo aos campos vetores*

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

onde α é o expoente deste ponto singular, respectivamente.

Para os campos direcionais determinados por este três campos vetoriais iremos, também, utilizar a notação v_2 , v_3 e v_4 .

1.4 Involuções

Uma aplicação $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita uma involução se $\phi \circ \phi = I_{\mathbb{R}^2}$. Onde $I_{\mathbb{R}^2}$ é a aplicação identidade de \mathbb{R}^2 .

Definição 1.34. *Seja $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores. Uma involução $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que tem uma linha de pontos fixos passando pela origem é dita ser compatível com o campo de vetores v , se nesta linha e, somente nesta linha, as direções do campo e a sua imagem pela involução são idênticas, isto é, $d\varphi \circ v \circ \varphi = v$ somente nos pontos que satisfazem $\varphi(x, y) = (x, y)$.*

Definição 1.35. *Sejam $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $(0,0)$ um ponto singular não degenerado de v . Uma involução que é compatível com o campo v é dita ser v -boa se as direções características da derivada da involução em $(0,0)$ e do campo de vetores v em $(0,0)$ são duas a duas distintas.*

Exemplo 1.36. *Sejam $\theta(x, y) = (x - 2y/\alpha, -y)$ uma aplicação e $v(x, y) = (x - \alpha y, \alpha x + y)$. Note que $(0, 0)$ é um ponto singular não degenerado de v e, por outro lado, a igualdade*

$$\begin{aligned} v(x, y) &= d\theta \circ v \circ \theta(x, y) \\ (x - \alpha y, \alpha x + y) &= \left(x - \frac{2y}{\alpha} + \alpha y, \alpha x - 3y\right) \end{aligned}$$

só acontece em $y = 0$, que coincide como o conjunto de pontos fixos de θ isso mostra que θ é compatível com v . Falta verificar que θ e v têm autovetores distintos e, de fato, os autovetores de θ são $w_1 = (\frac{2y}{\alpha}, y)$, $w_2 = (-\frac{2y}{\alpha}, y)$ e os autovetores de v são $u_1 = (\alpha y, y)$, $u_2 = (-\alpha y, y)$. Portanto, θ é uma involução v -boa.

Exemplo 1.37. *Na superfície $S = \{(x, y, p) \in \mathbb{R}^3; F(x, y, p) = p^2 - 2y + \chi x^2 = 0, 0 \neq \chi \neq 1/4\}$, tomemos a projeção sobre o plano xp . Tome $v(x, p) = (F_p, pF_p, -F_x - pF_y)$ sendo um campo de vetores tangente a equação. Dado um sistema de coordenadas no plano, podemos escrever o campo na forma $v(x, p) = (F_p, -F_x - pF_y)$. Note que $(0, 0)$ é um ponto singular não degenerado do campo $v(x, p) = (F_p, -F_x - pF_y)$ associados a $F = 0$ (ver definição (2.1)). Não é difícil mostrar que a involução $\phi(x, p) = (x, -p)$ é v -boa.*

Algumas definições e resultados sobre involuções utilizados por Davydov em [8] serão trabalhadas aqui para melhor organização e clareza dos resultados.

Definição 1.38. *Sejam $\theta_1, \theta_2 : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dois germes de involuções. Dizemos que θ_1 é v -equivalente a θ_2 , se existe um C^∞ -difeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo $h^{-1}\theta_1 \circ h = \theta_2$ e $dh^{-1} \circ v \circ h = v$.*

Apesar das propriedades adicionais exigidas para que uma involução seja v -boa, estas formam um conjunto aberto e denso no conjunto de todas as involuções compatíveis com o campo v com a topologia C^∞ .

Lema 1.39. *([8]) Sejam $\theta_1, \theta_2 : (\mathbb{R}^2, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}^2$ duas involuções v -boa. Se a linha de pontos fixos de θ_1 coincide com a linha de pontos fixos θ_2 numa vizinhança de $(0, 0)$, então θ_1 é v -equivalente a θ_2 .*

Capítulo 2

Equações diferenciais implícitas

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns resultados conhecidos de equações diferenciais implícitas (EDI). Na seção (2.1), descrevemos os pontos singulares destas equações e mostramos que tais singularidades podem ser estudadas através do contato da 1-forma $\omega = dy - p dx$ com o discriminante da EDI. Em seguida, apresentamos alguns resultados de campo de vetores associados a estas equações e as relações entre este e a 1-forma ω . Na seção (2.2) introduzimos o conceito de ponto singular de uma equação diferencial binária (EDB) e apresentamos algumas propriedades desses pontos.

2.1 Pontos singulares

Uma equação diferencial implícita (EDI) é uma equação da forma

$$F(x, y, p) = 0, \tag{2.1}$$

onde $p = \frac{dy}{dx}$ e $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave. Uma curva integral de (2.1) é uma curva suave

$$\begin{aligned} \alpha : (-1, 1) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\alpha_1(t), \alpha_2(t)), \end{aligned}$$

tal que $\beta(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_1'(t)/\alpha_2'(t))$ é uma solução da equação (2.1), isto é $F(\beta(t)) = 0$. Se F_p é diferente de zero em um ponto (x_0, y_0, p_0) da Equação (2.1), segue do Teorema da Função Implícita que a Equação (2.1) reduz-se, numa vizinhança do ponto (x_0, y_0) , a uma equação diferencial ordinária na forma

$$dy/dx = g(x, y).$$

Assim, para cada valor de p_0 tal que $F(x, y, p) = 0$ e $F_p(x, y, p) \neq 0$ obtemos uma curva integral que passa pelo ponto (x_0, y_0) . Portanto, uma EDI pode ser pensada como uma superposição de equações diferenciais ordinárias e determinará, geralmente, várias curvas integrais por um ponto dado no plano. Os pontos de uma equação diferencial (2.1) tais que $F_p \neq 0$ são estudados com as ferramentas das equações diferenciais ordinárias. Assim, no estudo de uma EDI, os pontos de interesse são aqueles para os quais esta não se reduz localmente a uma EDO. Tais pontos correspondem aos zeros da equação $F = F_p = 0$. Como o estudo desses pontos é de caráter local, é suficiente estudar a função F na vizinhança de um ponto fixado. Denotemos por (F, q) o germe de F em q tal que $F(q) = 0$.

Pelo teorema de Sard, Genericamente, a Equação (2.1) determina uma superfície suave. Então, podemos supor sem perda de generalidade que, 0 é valor regular de F . Assim, $S = F^{-1}(0)$ é uma superfície suave dada pela Equação (2.1). Chamaremos esta superfície de superfície da equação. Seja $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação projeção definida por $\pi(x, y, p) = (x, y)$. Considere $\pi|_S : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação π restrita a S .

Definição 2.1. Um ponto (x_0, y_0, p_0) da superfície suave S é chamado ponto singular da equação diferencial implícita (2.1), se é um ponto crítico da aplicação $\pi|_S$.

Geometricamente, os pontos singulares da Equação (2.1) correspondem à pontos da superfície suave S tais que o plano tangente à S no ponto é perpendicular ao plano $\mathbb{R}^2 \times 0$. Escolhendo parametrização de S em pontos singulares da EDI, obtemos que os pontos singulares satisfazem $F = F_p = 0$.

O conjunto C dos pontos singulares da aplicação $\pi|_S$ é chamado de **criminante** e

corresponde a zeros da aplicação

$$\begin{aligned} C_F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, p) &\longmapsto (F, F_p) \end{aligned}$$

A aplicação C_F é chamada aplicação discriminante. Genericamente, o conjunto de zeros de C_F forma uma curva suave.

Definição 2.2. *A imagem da discriminante pela aplicação $\pi|_S$ é chamado curva discriminante da EDI.*

Como consequência do Teorema (1.20), para um conjunto aberto e denso do espaço das funções $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ com a topologia de Whitney, os únicos pontos críticos da projeção $\pi|_S$ são dobras e cúspides, onde $S = F^{-1}(0)$. Usando equações (1.2), as dobras correspondem a pontos tais que $F_{pp} \neq 0$ e usando (1.3) as cúspides correspondem a pontos tais que $F_{pp} = 0$ e $F_{ppp} \neq 0$. Pelo teorema (1.20), em um ponto de dobra, escolhendo parametrização em S e em \mathbb{R}^2 , a forma normal de $\pi|_S$ é (u, v^2) , em um ponto de cúspide, a forma normal de $\pi|_S$ é $(u, v^3 + uv)$.

O método que usaremos para estudar equações diferenciais implícitas consiste em levantar o campo de linhas a um campo de vetores sobre um espaço mais complicado, desdobrando a EDI em uma simples EDO. Este campo de vetores é obtido da seguinte forma, em cada ponto (x, y, p) na superfície S da Equação (2.1), escolhemos uma direção tangente a S cuja imagem pela aplicação $\pi|_S$ é uma linha com inclinação p . Assim, o campo de vetores associados a essas direções é

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + p F_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + p F_y) \frac{\partial}{\partial p} \quad (2.2)$$

que é tangente à S . Existe um outro método chamado transformação de Legendre que não utilizamos aqui, veja [6].

Uma das propriedades deste campo de vetores é que a imagem pela aplicação $\pi|_S$ das curvas integrais do campo ξ sobre S , corresponde a curvas integrais da EDI (2.1). Os zeros do campo ξ em S correspondem a um tipo especial de pontos singulares, que serão estudados nos próximos resultados.

Seja $\omega = dy - p dx$ a 1-forma definida em \mathbb{R}^3 chamada 1-forma de contato. O estudo de EDI também pode ser feito estudando a 1-forma de contato definida em $S = F^{-1}(0)$, veja [7]. Indicaremos por $\omega|_S$ a 1-forma induzida em S e por $\xi|_S$ o campo de vetores ξ restrito a S .

Teorema 2.3. *Sejam S uma superfície suave e $q_0 \in S$. Então, q_0 é um zero de $\omega|_S$ se, e somente se, q_0 é um zero do campo de vetores $\xi|_S$.*

Demonstração: Seja $q_0 = (x_0, y_0, p_0)$ um zero de $\omega|_S$. Considere a aplicação linear

$$\begin{aligned} T_{q_0} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v, w) &\longmapsto (F_x(q_0)u + F_y(q_0)v + F_p(q_0)w, v - p_0u). \end{aligned}$$

Note que o núcleo de T_{q_0} é o espaço tangente a S em q_0 . Então, o posto de T_{q_0} é igual a 1. Portanto, o plano tangente a S em q_0 coincide com o plano $\omega|_S(q_0) = 0$, ou seja $F(q_0) = F_p(q_0) = (F_x + pF_y)(q_0) = 0$. Reciprocamente, seja q_0 um zero do campo $\xi|_S$. Então, $F(q_0) = F_p(q_0) = (F_x + pF_y)(q_0) = 0$. Sendo S suave, por hipótese, segue que $F_y(q_0) \neq 0$. Logo, $(\nabla F)(q_0) = (-F_y(q_0), F_y(q_0), 0)$. Como o gradiente é ortogonal a $T_{q_0}S$, temos que, para todo $(u, v, w) \in T_{q_0}S$, tem-se $-p_0u + v = 0$. Portanto, q_0 é um zero de $\omega|_S$. ■

Definição 2.4. *Um ponto singular q_0 da EDI é dito ser regular se a aplicação criminante C_F é regular no ponto q_0 e $\omega|_C(q_0) \neq 0$.*

Genericamente, isto é, existe um subconjunto aberto e denso no conjunto das equações tal que, o criminante de uma EDI (2.1) é uma curva suave e os zeros da $\omega|_S$ são isolados. Portanto, o conjunto dos pontos regulares de $\omega|_S$ é aberto e denso no criminante.

Exemplo 2.5. *Considere a equação $F(x, y, p) = p^2 - x = 0$. O criminante da equação é dada pela equação $p = 0$ e $x = 0$, que coincide com o eixo y . A condição de regularidade de C_F é satisfeita. O vetor $(0, 1, 0)$, tangente a criminante em $(0, y_0, 0)$ não pertence ao plano de contato $\omega(0, y_0, 0) = 0$. Assim, todo ponto singular da equação $F(x, y, p) = p^2 - x = 0$ é regular.*

Pelo Teorema (2.3), os pontos singulares regulares não anulam o campo de vetores $\xi|_S$. O teorema a seguir caracteriza os pontos singulares não regulares.

Teorema 2.6. *Seja q_0 um ponto singular. Então, q_0 é não regular se, e somente se, $\omega|_C(q_0) = 0$ ou $F_{pp}(q_0) = 0$.*

Para equações diferenciais implícitas, definimos a seguinte relação de equivalência, a qual usaremos em todo o trabalho.

Definição 2.7. *Dizemos que (F, q_0) é equivalente a (G, q_1) , se existe um germe de difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^2, q_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, q_1)$ que leva curvas integrais de F em curvas integrais de G , onde $q_0 = (z_0, p_0)$ e $q_1 = (z_1, p_1)$. Analogamente, dizemos que (F, q_0) é topologicamente equivalente a (G, q_1) se h é um germe de homeomorfismo que leva curvas integrais de F em curvas integrais de G .*

2.2 Equações diferenciais binárias

Uma equação diferencial binária (EDB) é da forma

$$E(x, y)[dx, dy] = a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dx dy + c(x, y)dx^2 = 0 \quad (2.3)$$

onde $a, b, c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves em uma vizinhança U de (x_0, y_0) . As funções $a, b, c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são chamados coeficientes da EDB (2.3). Uma curva integral da EDB (2.3) é uma curva suave

$$\begin{aligned} \alpha : (-1, 1) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\alpha_1(t), \alpha_2(t)), \end{aligned}$$

tal que $E(\alpha(t))[\alpha'(t)] = 0$.

A função $\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\delta = b^2 - ac$ é denominada função discriminante e o conjunto $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \delta(x, y) = (b^2 - ac)(x, y) = 0\}$ é chamado conjunto discriminante da EDB. Uma equação diferencial binária é positiva se $\delta \geq 0$ e $\delta = 0$ se, e somente se, $a(x, y) = b(x, y) = c(x, y) = 0$. As equações diferenciais positivas são bastante estudadas, por exemplo em [3].

Exemplo 2.8. As linhas de curvatura em superfície de \mathbb{R}^3 , em torno de um ponto umbílico determinam uma equação diferencial binária positiva

$$(gF - fG)dy^2 + (gE - eG)dxdy + (fE - eF)dx^2 = 0$$

onde e, f, g e E, F, G são os coeficientes de primeira e segunda formas fundamentais da superfície.

Exemplo 2.9. As linhas assintóticas de uma superfície em \mathbb{R}^3 determinam uma EDO não necessariamente positiva

$$edy^2 + 2fdxdy + gdx^2 = 0.$$

onde e, f e g são os coeficientes da segunda forma fundamental, é uma equação diferencial binária.

Uma EDB (2.3) pode ser pensada como uma equação diferencial implícita. De fato, se $dx \neq 0$ a equação (2.1) pode ser expressa na forma

$$F(x, y, p) = a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y) = 0. \quad (2.4)$$

Observe que uma curva integral da EDB define uma curva integral de EDI. Dizemos que (x_0, y_0) é um ponto singular da EDB (2.3) se existir $p_0 \in \mathbb{R}$ tal que (x_0, y_0, p_0) é um ponto singular da EDI (2.1). Denotamos por (E, z_0) um germe de EDB, onde E é uma EDB e $z_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto singular de E .

Definição 2.10. Dois germes de equações diferenciais binárias (E_1, z_1) e (E_2, z_2) , dadas por

$$\begin{aligned} E_1(x, y)[dx, dy] &= a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0 \\ E_2(x, y)[dx, dy] &= A(x, y)dy^2 + 2B(x, y)dxdy + C(x, y)dx^2 = 0 \end{aligned}$$

são equivalentes se existem um germe de função $\rho : (\mathbb{R}^2, z_1) \rightarrow \mathbb{R}$ não nula em z_1 e

um germe de difeomorfismo $h = (h_1, h_2) : (\mathbb{R}^2, z_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, z_2)$, tais que

$$\begin{pmatrix} \xi & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho(a \circ h) & \rho(b \circ h) \\ \rho(b \circ h) & \rho(c \circ h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix},$$

onde $h_{1x} = \alpha$, $h_{1y} = \beta$, $h_{2x} = \gamma$ e $h_{2y} = \xi$ são as derivadas parciais de h . Neste caso, denotaremos $E_2 = \rho \cdot h^*(E_1)$.

Uma propriedade importante desta relação de equivalência é que h leva curvas integrais de (E_2, z_2) em curvas integrais de (E_1, z_1) . A classificação das EDBs com relação a equivalência dada na definição (2.10) apresenta infinitas formas normais, dizemos neste caso que a EDI apresenta moduli. Entretanto, é possível definir uma relação de equivalência mais fraca que genericamente não apresenta modalidade. Dizemos que dois germes de EDB's (E_1, z_1) , (E_2, z_2) são topologicamente equivalentes se existe um germe de homeomorfismo $h : (\mathbb{R}^2, q_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, q_2)$ que leva curvas integrais de (E_1, z_1) em curvas integrais de (E_2, z_2) .

Capítulo 3

Forma normal de EDIs

Apresentamos, neste capítulo, as formas normais das equações diferenciais implícitas obtidas por Davydov em [8]. Na seção (3.1) provamos um teorema de genericidade de equações diferenciais implícitas necessário para obtenção da forma normal das EDI. Apresentamos, também, a forma normal de algumas EDB nos casos em que a função o discriminante é uma função de morse.

3.1 Singularidades genéricas de EDI

Na seção (2.1) foi dada a definição de uma singularidade de uma EDI

$$F(x, y, p) = 0. \tag{3.1}$$

Para classificar analiticamente cada tipo de singularidade que pode acontecer em uma EDI (3.1), Dara usou fortemente a intuição geométrica. O que faremos neste início é dar definições equivalentes as anteriores mas, de um ponto vista mais geométrico, visando o trabalho de Dara. Para isso vamos fixar as seguintes notações. O espaço $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de 1-jato de funções diferenciáveis definidas em \mathbb{R} com valores em \mathbb{R} , pode ser considerado como sendo o espaço \mathbb{R}^3 das triplas (x, y, p) e, munido de uma estrutura de contato canônica, definida pela forma diferencial

$$\omega = dy - p dx.$$

Sejam $F(x, y, p) = 0$ uma EDI e $S = F^{-1}(0)$ a superfície da equação. A restrição a S da projeção canônica π de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^2 é representada por $\pi|_S : S \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Aparecem aqui duas noções de singularidades para a equação (3.1);

- (a) Singularidade da projeção $\pi|_S : S \rightarrow \mathbb{R}^2$
- (b) Singularidade de $\omega|_S = dy - p dx$.

A condição (a) acontece nos pontos de S em que o plano tangente é vertical, isto é, paralelo ao eixo op . O caso b) representa os pontos q de S tais que $\omega|_S(q) = 0$, isto é, o plano vertical dado por $\omega(q) = 0$ é tangente à S em q . Neste caso duas situações podem acontecer, os dois planos serem transversais ou coincidirem.

Definição 3.1. *Seja $q \in S$ um ponto singular da EDI. Dizemos que q é um ponto singular não transversal se q é um zero $\omega|_S$. Caso contrário é dito tangente transversal.*

Definição 3.2. *Dizemos que $q \in \mathbb{R}^3$ é uma singularidade de dobra simples para a EDI (3.1) se:*

- i) *O ponto q é de dobra para $\pi|_S$*
- ii) *O ponto q não é um zero de $\omega|_S$ sobre S .*

Uma condição necessária e suficiente para que $q = (x_0, y_0, z_0)$ seja um ponto de dobra simples é que

$$F(q) = F_p(q) = 0 \quad e \quad [F_x(q) + pF_y(q)]F_{p^2}(0) \neq 0.$$

pois, a primeira condição garante que o ponto singular seja, pelo menos, de dobra e a segunda assegura que este não seja um ponto de cúspide e que $\omega|_S(q) \neq 0$.

Exemplo 3.3. *Um exemplo da EDI que possui um ponto de dobra simples na origem é*

$$F(x, y, p) = p^2 - x$$

A aplicação $\pi|_S$ e a 1-forma de contato $\omega|_S$ na parametrização $g(p, y) = (p^2, y, p)$ de $S = F^{-1}(0)$ são dadas por $\pi(p, y) = (p^2, y)$ e $\omega = dy - 2p^2 dp$. Portanto, a origem é um ponto dobra simples.

As singularidades do tipo cúspide são definidas seguindo o mesmo padrão geométrico, com um pouco mais de imaginação como segue.

Definição 3.4. Um ponto $q \in \mathbb{R}^3$ é dito ser uma cúspide da EDI (3.1) se;

- i) q é um ponto de cúspide da aplicação $\pi|_S$
- ii) q não é um zero da 1-forma $\omega|_S$

Uma condição necessária e suficiente para que $q \in \mathbb{R}^3$ seja uma singularidade de cúspide EDI (3.1) é que;

$$F(q) = F_p(q) = F_{pp}(q) = 0 \quad e \quad (F_x(q)F_{py}(q) - F_y(q)F_{px}(q))F_{ppp}(q)[F_x(q) + pF_y(q)] \neq 0$$

Note que a primeira equação garante que o ponto seja pelo menos de cúspide. A segunda equação assegura que o ponto seja não degenerado, isto é, tem que ser ponto de cúspide e mais, garante ainda que este não pode ser uma singularidade da 1-forma de contato restrita a S .

No caso em que $\rho = (F_x(q)F_{py}(q) - F_y(q)F_{px}(q)) > 0$ dizemos que o ponto $q = (0, 0, 0)$ é uma singularidade do tipo elíptica. Se $\rho < 0$, dizemos que $(0, 0, 0)$ é do tipo hiperbólica.

Exemplo 3.5. Considere, agora, a equação diferencial implícita dada por

$$F(x, y, p) = p^3 + yp - x = 0.$$

A aplicação $\pi|_S$ e a 1-forma de contato $\omega|_S$ na parametrização $g(p, y) = (p^3 + yp, y, p)$ de $S = F^{-1}(0)$ são dadas por $\pi(p, y) = (p^3 + yp, y)$ e $\omega = (1 - p^2)dy - p(3p^2 - y)dp$ tem zero como um ponto de cúspide de π mas não é uma singularidade de ω . Portanto, zero é um ponto de cúspide hiperbólica.

Os casos mais importantes tratados aqui são as singularidade de dobra (ver definição (1.19)) da aplicação π que é zero da 1-forma $\omega|_S$. No que segue, usaremos o campo de vetores $\xi|_S$ associado a equação para classificar as singularidades não transversais.

Exemplo 3.6. Considere a EDI dada por

$$F(x, y, p) = y - p^2 - 2xp = 0,$$

A aplicação $\pi|_S$ e a 1-forma de contato $\omega|_S$ na parametrização $g(x, p) = (x, p^2 + 2xp, p)$ de $S = F^{-1}(0)$ são dadas por $\pi(x, p) = (x, p^2 + 2px)$ e a 1-forma de contato é $\omega = (2p + 2x)dp + pdx$. A origem é claramente um ponto de dobra de $\pi|_S$ e uma singularidade de ω . O campo de vetores associado a esta equação, na parametrização é dada por (ver equação (2.2)), $\xi|_S = (F_p, -(F_x + pF_y)) = (2p + 2x, -(2p - p))$ a matriz da parte linear de $\xi|_S$ é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

o determinante de A é menor que zero. Portanto, a origem é um ponto de sela, (ver definição (1.33)), do campo $\xi|_S$.

Definição 3.7. Chamamos de singularidade de dobra-sela da EDI a todo ponto da superfície S da equação tal que este é uma singularidade do tipo dobra da aplicação $\pi|_S$ e um ponto de sela para $\xi|_S$. De maneira análoga se define ponto de dobra-nó (dobra-foco) como sendo ponto de dobra da aplicação $\xi|_S$ apresenta singularidades do tipo dobra-nó (dobra-foco) neste ponto.

Um exemplo de EDI que apresenta singularidade do tipo dobra-nó na origem é dado por

$$F(x, y, p) = y - p^2 - \frac{1}{3}xp = 0$$

A aplicação $\pi|_S$ e a 1-forma de contato $\omega|_S$ na parametrização $g(x, p) = (x, p^2 + 1/3xp, p)$ de $S = F^{-1}(0)$ são dados por $\pi(x, p) = (x, p^2 + \frac{1}{3}px)$ e $\xi|_S = (-2p - 1/3x, -1/3p)$. Note que o determinante da matriz A de $\xi|_S$ é maior que zero e satisfaz as condições descritas em (2.10) para uma singularidade do tipo nó de $\xi|_S$.

O principal resultado desta seção é o seguinte teorema foi enunciado e demonstrado por Dara em [7].

Teorema 3.8. O conjunto das funções F em $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tais que as singularidades da EDI

$$F(x, y, p) = 0 \tag{3.2}$$

são dos seis tipos seguintes:

i) Singularidade de dobra simples

ii) Singularidade de dobra-sela, dobra-nó e dobra-foco,

iii) Singularidade de cúspide elíptica ou hiperbólica,

é aberto e denso em $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ na C^r – topologia, qualquer que seja $r \geq 3$.

Demonstração: Observe que $J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ é isomorfo ao \mathbb{R}^{13} . Denotemos por

$$q = (x, y, p, \xi, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33}, \xi_{23}, \xi_{31}, \xi_{12}),$$

um elemento de $J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

Sejam

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{q \in \mathbb{R}^{13} / \xi = \xi_3 = \xi_{33} = 0\} \\ \Sigma' &= \{q \in \mathbb{R}^{13} / \xi = \xi_3 = \xi_1 + p\xi_2 = 0\} \\ \Sigma'' &= \{q \in \mathbb{R}^{13} / \xi = \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0\} \\ \Sigma''' &= \Sigma \cap \Sigma'. \end{aligned}$$

subvariedades fechadas de $J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. E uma outra subvariedade, também fechada, que nos dará uma melhor conclusão,

$$\begin{aligned} \Sigma_0 = \{q \in \mathbb{R}^{13} / \xi = \xi_3 = \xi_1 + p\xi_2 = \xi_2^2 + 4[(\xi_{31} + p\xi_{23})(\xi_2 + \\ \xi_{31} + p\xi_{23}) - \xi_{33}(\xi_{11} + 2p\xi_{12} + p^2\xi_{22})] = 0\}. \end{aligned}$$

É uma consequência do Teorema de Transversalidade de Thom que o conjunto \mathfrak{A} , das funções F de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R} , de classe C^∞ tais que:

$$j^2F : \mathbb{R}^3 \rightarrow J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

é transversal a $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \Sigma'''$ e Σ_0 é aberto e denso em $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ na C^r -topologia com $r \geq 3$.

Analisemos, agora, as propriedades que tem um elemento F que está em \mathfrak{A} .

1) Dizer que j^2F é transversal a Σ'' significa que $j^2F(\mathbb{R}^3) \cap \Sigma'' = \emptyset$ pois a codimensão de Σ'' é 4 (proposição (1.14)). Portanto, as equações $F_x = F_y = F_p = 0$ não podem ocorrer simultaneamente, isto significa que 0 é um valor regular de F , ou seja, $S = F^{-1}(0)$ é uma superfície regular.

2) Considere, agora, uma singularidade da EDI (3.2). Sem perda de generalidade, podemos supor que a singularidade é 0. Analisemos os três casos possíveis. Quando $j^2F(0)$ não pertence a Σ nem Σ' , quando pertence Σ e não pertence Σ' e quando pertence Σ' e não pertence Σ .

a) Se $j^2F(0)$ não pertence a Σ nem a Σ' então 0 não anula a forma de contato. Portanto, o ponto é de dobra simples.

b) Se $j^2F(0)$ pertence a Σ então $j^2F(0)$ não pode pertencer a Σ' devido da transversalidade de j^2F à $\Sigma'' = \Sigma \cap \Sigma'$ que é de codimensão 4. Como consequência temos:

$$F(0) = F_p(0) = F_{p^2}(0) = 0 \quad e \quad F_x(0) \neq 0.$$

Pelo teorema da função implícita e da divisão de Malgrange, existe uma vizinhança de zero em que a EDI (3.2) é da forma $F(x, y, p) = 1/u[g(x, y) - x]$, onde $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tal que $u(0) \neq 0$. Mostra-se (veja [7]) que a transversalidade de j^2uF às subvariedades $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \Sigma'''$, e Σ_0 é preservada e, portanto, podemos pensar na EDI (3.2) na forma $F(x, y, p) = G(y, p) - x$.

Note que $\Sigma = \{h^{-1}(0)\}$, onde

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^{13} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\xi_1, \dots, \xi_{33}) &\longmapsto (\xi_1, \xi_3, \xi_{33}) \end{aligned}$$

é uma aplicação sobrejetiva. Como j^2F é transversal a Σ em 0, temos que $h \circ j^2F$ é uma submersão. Assim

$$\begin{aligned} j^2F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow j^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \\ (x, y, p) &\longmapsto (x, y, \dots, G_{p^2}) \end{aligned}$$

a transversalidade acontece se, e somente se, (ver teorema (1.13)) a composta de f e

g é um difeomorfismo, isto é

$$\det J(h \circ j^2 F) = \det \begin{pmatrix} -1 & G_y(0) & 0 \\ 0 & G_{py}(0) & 0 \\ * & * & G_{p^3}(0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

o que nos dá $G_{p^3}(0)G_{py}(0) \neq 0$ e neste caso, segue da definição que, a singularidade é do tipo elíptica ou hiperbólica.

c) Se $j^2 F(0)$ pertence a Σ' , pela mesma razão de (b), $j^2 F(0)$ não pertence à Σ . Isto significa que:

$$F(0) = F_p(0) = 0 \quad e \quad F_{p^2}(0) \neq 0$$

Portanto, a aplicação $\pi|_S : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ tem uma singularidade do tipo dobra na origem. Por outro lado, $F_x(0) = 0$, logo se trata de uma singularidade em que o plano $\Sigma = 0$ não é transversal ao plano tangente de S , segue de (1) que $F_y(0) \neq 0$ e, pelo teorema da função implícita, podemos escrever F na forma;

$$F(x, y, p) = G(x, p) - y.$$

e, novamente, podemos escolher uma função

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^{13} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\xi_1, \dots, \xi_{33}) &\longmapsto (\xi, \xi_3, \xi_1 + p\xi_1) \end{aligned}$$

tal que $\Sigma' = \{g^{-1}(0)\}$. Tomando a composta entre esta e a aplicação 2-jato de F , a condição de transversalidade a Σ' , (ver teorema (1.13)), chegamos que;

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ G_{px}(0) & 0 & G_{p^2}(0) \\ G_{x^2}(0) & 0 & G_{px}(0) - 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Usando as definições (2.10), isto significa que a matriz jacobiana A do campo $\xi|_S = (F_p, -(F_x + pF_y)) = (G_p, -(G_x - p))$ tem determinante diferente de zero, e a transversalidade à Σ_0 implica em $\det A \neq 1/4$ pela definição de Σ_0 . Resta, então, três possibilidades para o jacobiano de $\xi|_S$, são elas;

- 1) $\det A < 0$, segue da definição que a singularidade é do tipo dobra-sela.
- 2) $0 < \det A < \frac{1}{4}$, neste caso trata-se de um ponto de dobra-nó.
- 3) $\frac{1}{4} < \det A$, o ponto é de dobra-foco.

Portanto, a EDI (3.2) apresenta apenas seis tipos de singularidades. ■

3.2 Forma normal de EDI

A seguir, enunciamos as formas normais das EDI na vizinhança de um ponto singular.

Teorema 3.9. *Seja q um ponto singular de F . Se q é um ponto de dobra simples, então (F, q) é equivalente a $(x - p^2, 0)$.*

Dara, no teorema (3.8), conjecturou com respeito ao subconjunto aberto e denso $\Lambda \subset C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$;

(i) Se q é um ponto singular não regular do tipo sela, nó e foco do campo vetorial ξ_S , então, o germe F, q é equivalente respectivamente a $(p^2 + y + x^2\lambda/4, 0)$, para $\lambda < 0$, $0 < \lambda < 1/4$, $\lambda > 1/4$, correspondendo a sela, nó e foco respectivamente.

(ii) Se q é um ponto singular do tipo cúspide elíptica, então o germe (F, q) é equivalente a $(x - p^3 + yp, 0)$.

(iii) Se q é um ponto singular do tipo cúspide hiperbólica, então o germe (F, q) é equivalente a $(x - p^3 - yp, 0)$.

Davydov em [8] obteve a forma normal de uma EDI na vizinhança de um ponto singular de dobra com discriminante suave, mostrando que a conjectura de Dara era verdadeira nos casos em que ocorre singularidade de dobra. Também, Davydov em [8] mostrou que na ocorrência de pontos singular de cúspide, a conjectura de Dara não se verifica, ocorrendo modalidade. A seguir, damos uma ideia da prova de Davydov.

Seja

$$F(x, y, p) = 0 \tag{3.4}$$

uma EDI. Se $q \in \mathbb{R}^2$ é um ponto de dobra da EDI (3.4), isto é, $F(q) = F_p(q) = 0$ e

$F_{pp} \neq 0$, então a EDI (3.4) é equivalente a

$$G(x, y, p) = a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y) \quad (3.5)$$

onde a , b e c são funções suaves em \mathbb{R}^2 . Podemos supor, sem perda de generalidade, que $G_y(q) \neq 0$. Assim, Pelo Teorema da Função Implícita, existe uma parametrização h na vizinhança de q tal que $G(x, h(x, y), p) = 0$. Observe que, a involução canônica em $G^{-1}(0)$ é dado por

$$\theta(x, y, p) = (x, y, -2b - p).$$

Logo, na parametrização $g(x, p) = (x, h(x, y), p)$, o campo $\xi|_S$ e a involução θ são dadas por

$$V_G(x, p) = (G_p(x, h(x, y), p), -G_x(x, h(x, y), p) - pG_y(x, h(x, y), p))$$

e

$$\theta_G(x, p) = (x, -2b - p)$$

respectivamente.

Se $q \in \mathbb{R}^2$ é uma singularidade da EDI tipo dobra-sela, dobra-nó ou dobra-foco, então a involução θ_G é v-boua.

Definição 3.10. *Sejam $v, \bar{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ campos de direções e $\theta, \bar{\theta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ involuções. Dizemos que (v, θ) é equivalente a $(\bar{v}, \bar{\theta})$ se existe um difeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que*

$$v = dh^{-1} \circ \bar{v} \circ h \quad e \quad \theta = dh^{-1} \circ \bar{\theta} \circ h.$$

Seja θ uma involução V-boua. Um dos principais resultados de Davydov é o teorema seguinte.

Teorema 3.11. *Sejam $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de direções e $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma involução. Então, existe uma EDI $G = 0$ tal que (v, θ) é equivalente a (V_G, θ_G) .*

O teorema acima reduz o problema de classificar EDI à classificação de pares (v, θ) , onde θ é uma involução v-boua. Davydov mostrou em [8] que só existem três classes

de equivalência de pares (v, θ) . Portanto, na vizinhança de um ponto singular do tipo dobra, exis; tem apenas três formas normais. No caso em que a a EDI apresenta singularidade cúspide, Davydov mostrou que a EDI apresenta modalidade.

O teorema seguinte, demonstrado por Davydov em [8], apresenta as formas normais das EDI nos casos em que o ponto singular é do tipo dobra-sela, dobra-nó, dobra-foco.

Teorema 3.12. ([8]) *A EDI (3.2), em um ponto de dobra-sela, dobra-nó, dobra-foco é equivalente a EDI $G(x, y, p) = y - (p - kx^2)$ para $k < 0$, $0 < k < 1/4$, $k > 1/4$ respectivamente.*

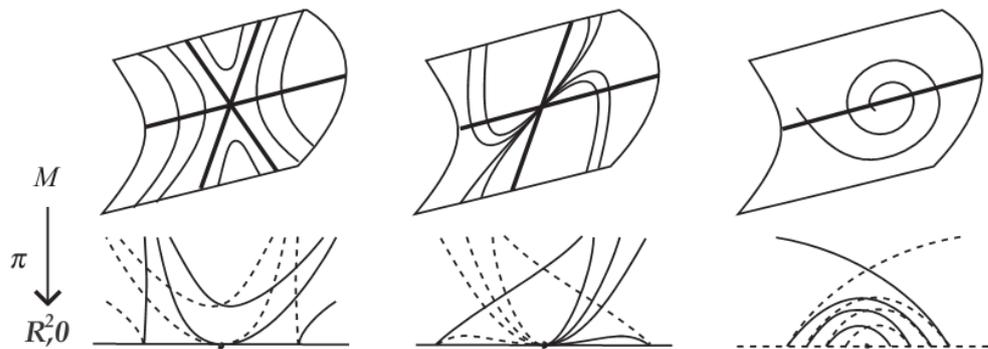


Figura 3.1: pontos singulares não regulares do tipo sela, nó e foco respectivamente

3.3 Forma normal de EDB com discriminante suave

Considere a Equação Diferencial Binária (EDB), dada por

$$E(x, y)[dx, dy] = a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0 \quad (3.6)$$

onde a , b e c são funções suaves em \mathbb{R}^2 e $b^2 - ac = 0$ o discriminante da EDB (3.6). Note que se o discriminante é suave em $(0, 0)$, então a, b e c não se anulam simultaneamente em $(0, 0)$. Vamos começar com uma mudança de coordenadas linear na tentativa de anular seus termos constantes. Denotemos os termos contantes de

a, b e c por A, B e C respectivamente. Uma aplicação linear dada por $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ na EDB, tal que $L(X, Y) = (\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y)$ e $\beta\gamma - \delta\alpha \neq 0$. Os termos constantes da nova EDB $L^*(E)$ são dados por

$$\begin{aligned} A' &= A\beta^2 + 2B\beta\delta + C\delta^2 \\ B' &= A\gamma\delta + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + C\alpha\beta \\ C' &= A\gamma^2 + 2B\alpha\gamma + C\alpha^2. \end{aligned}$$

que podemos reescrever como

$$\begin{pmatrix} \beta & \delta \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix}.$$

Denotaremos por

$$A dy^2 + 2B dx dy + C dx^2 \quad e \quad J^k a(x, y) dy^2 + 2J^k b(x, y) dx dy + J^k c(x, y) dx^2,$$

a parte constante e o k -jato da EDB (3.6).

Note que a equação acima define uma relação de equivalência no conjunto das matrizes, simetrias, veja definição (2.10). Esta relação de equivalência nos dá seis classes de equivalência, são elas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ou seja, EDB $L^*(E)$ tem parte constante

$$dy^2 + dx^2, \quad dy^2 - dx^2, \quad dy^2 \quad \text{ou} \quad 0.$$

Proposição 3.13. *Suponha que a EDB (3.6) tenha parte constante $dy^2 + dx^2$. Então, $(E, 0)$ é equivalente a $(E_1, 0)$ tal que o k -jato de $(E_1, 0)$ é $dy^2 + dx^2, k \geq 1$.*

Demonstração: *Suponha que tenhamos reduzido o k -jato da EDB na forma*

$$(1 + a_k) dy^2 + 2b_k dx dy + (1 + c_k) dx^2$$

onde a_k, b_k e c_k são polinômios homogêneos de grau k . Sejam $p = (X + p(X, Y), Y + q(X, Y))$, e $\rho(x, y) = 1 + r(X, Y)$, onde p e q são polinômios homogêneos de grau $k + 1$ e r é homogêneo de grau k . Então o coeficiente do k -jato da nova EDB são dados por $E_2 = \rho \cdot L^*(E)$

$$A_k = a_k + 2p_y + r$$

$$B_k = b_k + p_x + q_y$$

$$C_k = c_k + 2q_x + r.$$

Vamos mostrar que é possível encontrar polinômios p , q e r que satisfaçam $A_k = B_k = C_k = 0$. Para isto, definamos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} T : H^{k+1} \times H^{k+1} \times H^k &\longrightarrow H^k \times H^k \times H^k \\ (p, q, r) &\longmapsto (2p_y + r, p_x + q_y, 2q_x + r) \end{aligned}$$

onde H^k denota o espaço dos polinômios homogêneos de grau k . Nosso trabalho consiste, agora, apenas em mostrar a sobrejetividade da aplicação acima e vamos fazer isto mostrando que a dimensão da imagem é $3k + 1$, isto é, a dimensão do núcleo da aplicação T é dois. Suponha que (p, q, r) pertença ao núcleo da aplicação. Então, $p_x + q_y = p_y - q_x = 0$, e estas duas equações, por independender de r , implicam que é possível encontrar r tal que a aplicação linear T se anule, para convenientes p e q . Escreva $p = \sum_{i=0}^{k+1} p_i x^{k+1-i} y^i$ e $q = \sum_{i=0}^{k+1} q_i x^{k+1-i} y^i$. As duas condições acima implicam que

$$\sum_{i=0}^{k+1} (k+1-i)p_i x^{k-i} y^i + \sum_{i=0}^{k+1} i q_i x^{k+1-i} y^{i-1} = 0 \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=0}^{k+1} i p_i x^{k+i-1} y^{i-1} + \sum_{i=0}^{k+1} (k+i-1) q_i x^{k-i} y^i = 0 \quad (3.8)$$

Somando os coeficientes e igualando a zero na primeira igualdade e fazendo o mesmo na segunda, obtemos:

$$(k+1-i)p_i + (i+1)q_{i+1} = 0, \quad 0 \leq i \leq k$$

$$(i+1)p_{i+1} - (k+i-1)q_i = 0, \quad 0 \leq i \leq k$$

que pode ser escrito por recorrência, para melhor visualização das soluções, como segue

$$q_{i+1} = \frac{i-k-1}{i+1}p_i = \frac{i+2}{k+i}p_{i+2} \quad , \quad i \geq 2$$

note que, na relação acima, os termos de p com índice maior ou igual a dois estão relacionados com os termos em q . Basta, então, tomar valores para p_0 e p_1 , para obtermos duas soluções para a equação (3.7), por exemplo $p_0 = 0$, $p_1 = 1$ e $p_0 = 1$, $p_1 = 0$. Portanto, nossa aplicação tem nulidade dois e portanto é sobrejetiva, o que mostra a proposição. ■

Como consequência do resultado anterior temos;

Proposição 3.14. *Suponha que a EDB (3.6) tenha parte constante $dy^2 - dx^2$. Então, $(E, 0)$ é equivalente a $(E_1, 0)$ tal que o k -jato de $(E_1, 0)$ é $dy^2 - dx^2$, $k \geq 1$.*

Proposição 3.15. *Suponha que a EDB tenha parte constante $dy^2 + xdx^2$. Então, $(E, 0)$ é equivalente a $(E_1, 0)$ tal que o k -jato de $(E_1, 0)$ é $dy^2 + xdx^2$, $k \geq 0$.*

Demonstração: *Seja*

$$(1 + a_1x + a_2y)dy^2 + 2(b_1x + b_2y)dx dy + (c_1x + c_2y)dx^2$$

Multiplicando o 1-jato da EDB (3.6) por $(1 + a_1x + a_2y)^{-1}$. Seja

$$L(x, y) = (\alpha X + \beta Y, Y + \gamma Y^2 + 2\gamma XY + \delta Y^2)$$

com um pouco mais de esforço, mas inteiramente análogo ao caso anterior, encontramos que o 1-jato da EDB $L^*(E)$ é

$$dy^2 + xdx^2 \quad , \quad dy^2 - ydx^2 \quad \text{ou} \quad dy^2.$$

Analizamos, agora, o k -jato dos casos acima:

1) O caso $dy^2 + xdx^2$. Assuma que o k -jato da EDB é da forma

$$(1 + a_k)dy^2 + 2b_k dx dy + (x + c_k)dx^2.$$

onde a_k, b_k e c_k são polinômios homogêneos de grau $k \geq 2$.

Seja

$$L(X, Y) = (X + p(X, Y), Y + q(X, Y)) \quad \text{e} \quad \rho(x, y) = 1 + r(X, Y)$$

onde $p \in H^k, q \in H^{k+1}$ e $r \in H^k$. Então, o k -jato da EDB $E_1 = \rho \cdot L^*(E)$ é dado por

$$(1 + a_k + r + 2q_Y)dY^2 + 2(b_k + q_X + p_Y)dXdY + (x + c_k + p + 2Xp_X)dX^2.$$

Análoga ao caso anterior, o processo de eliminação de termos de grau k produz a aplicação linear

$$\begin{aligned} H^k \times H^{k+1} \times H^k &\longrightarrow H^k \times H^k \times H^k \\ (p, q, r) &\longmapsto (r + 2q_y, p + 2Xp_x, q_x + Xp_y) \end{aligned}$$

que é sobrejetiva. ■

O caso $dy^2 - ydx^2$. Este caso é mais complicado pois a mudança de coordenadas anterior não elimina o termo em x no k -ésimo jato da EDB, ou seja, seu 2-jato é da forma $dy^2 - (y+^2)dx^2$.

Para tentar contornar esta situação, vamos utilizar ferramentas da teoria das singularidades.

Definição 3.16. Dizemos que $(E, 0)$ é formalmente k -determinada se, para toda EDB $(E_1, 0)$ com o mesmo k -jato de $(E_0, 0)$ é equivalente a $(E_1, 0)$.

O resultado a seguir foi mostrado em [6].

Proposição 3.17. A EDB $dy^2 - (y + \lambda x^2)dx^2$ é formalmente 2-determinada.

A proposição acima mostra que toda EDI que tem o mesmo 2-jato de $dy^2 - (y + \lambda x^2)dx^2$ é equivalente a esta.

3.4 Forma normal de EDB com discriminante tipo Morse

Nesta seção estudamos EDB da forma

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0 \tag{3.9}$$

onde a , b e c são funções suaves anulando-se em $(0, 0)$ e o discriminante $\Delta = b^2 - ac = 0$ é do tipo morse. Seja $S = F^{-1}(0)$;

Proposição 3.18. 1) A superfície S é suave na vizinhança de $0 \times \mathbb{R}$ se, e somente se, a função discriminante tem uma singularidade tipo Morse.

2) A projeção natural $\pi|_S : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $(x, y, p) \mapsto (x, y)$ é um difeomorfismo local longe do $\pi^{-1}(\Delta)$

Demonstração: 1) Observe que função $F_p = 2ap + 2b$ é identicamente zero em $0 \times \mathbb{R}$. Assim, a superfície S deixa de ser suave em uma vizinhança de $0 \times \mathbb{R}$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0, p) &= a_1 p^2 + 2b_1 p + c_1 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0, p) &= a_2 p^2 + 2b_2 p + c_2 = 0\end{aligned}$$

para algum $p \in \mathbb{R}$. Usando a resultante destes polinômios formados pelas derivadas parciais de F , vemos que este é o caso quando

$$(c_2 a_1 - c_1 a_2)^2 - 4(b_2 a_1 - b_1 a_2)(c_2 b_1 - c_1 b_2) = 0. \quad (3.10)$$

Considere a expansão de Taylor de ordem 2 da função discriminante dada por

$$b^2 - ac = (b_1^2 - a_1 c_1)x^2 + (2b_1 b_2 - c_2 a_1 - c_1 a_2)xy + (b_2^2 - c_2 a_2)y^2 + o(2).$$

Para que Δ tenha uma singularidade tipo Morse é necessário que a parte quadrática da equação acima seja não degenerada, veja (1.5), e isto acontece se, e somente se, (3.10) não se verifica.

2) A projeção $\pi|_S$ deixa de ser um difeomorfismo nos pontos (x, y, p) onde $F_p(x, y, p) = 0$, isto é, quando $F = F_p = 0$. Este conjunto é precisamente em $\pi^{-1}(\Delta)$. ■

Proposição 3.19. O campo de vetores $\xi = F_p \partial/\partial x + p F_p \partial/\partial y - (F_x + p F_y) \partial/\partial p$ tem, genericamente, um ou três zeros em $0 \times \mathbb{R}P^1$, dados pela cúbica

$$\phi(p) = a_2 p^3 + (2b_2 + a_1)p^2 + (2b_1 + c_2)p + c_1.$$

Estes zeros são do tipo nó ou sela.

Demonstração: veja [1] ■

Proposição 3.20. *Suponha que $\phi(p)$ não tenha raiz repetida, e $\alpha_1(p)$ e $\phi(p)$ não têm raízes em comum. Então, a EDB (3.9) é equivalente a $(E_1, 0)$ tal que 1-jato de E_1 é*

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy + \pm ydx^2.$$

Demonstração: *O que vamos fazer agora é, formalmente, reduzir a EDB (3.9) para o caso onde $a = \pm c = y$. A ideia é a mesma utilizada na seção (3.3). Começamos reduzindo o 1-jato da EDB (3.9) dado por*

$$(a_1x + a_2y)dy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy + (c_1x + c_2y)dx^2.$$

Seja

$$L(X, Y) = (\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y),$$

tal que $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$. Então, o 1-jato da EDB $L^*(E)$ é

$$AdY^2 + 2BdXdY + CdX$$

onde $A = A_1X + A_2Y$, $B = B_1X + B_2Y$ e $C = C_1X + C_2Y$ com

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha^2(\alpha a_1 + \gamma a_2) + 2\delta\beta(\alpha b_1 + \gamma b_2) + \beta^2(\alpha c_1 + \gamma c_2) \\ A_2 &= a_2\delta^3 + (2b_2 + a_1)\delta^2\beta + (2b_1 + c_2)\delta\beta^2 + c_1\beta^3 \\ B_1 &= \gamma\delta(\alpha a_1 + \gamma a_2) + (\alpha\delta + \gamma\beta)(\alpha b_1 + \gamma b_2) + \alpha\beta(\alpha c_1 + \gamma c_2) \\ B_2 &= \gamma\delta(\beta a_1 + \delta a_2) + (\alpha\delta + \gamma\beta)(\beta b_1 + \delta b_2) + \alpha\beta(\beta c_1 + \delta c_2) \\ C_1 &= a_2\gamma^3 + (2b_2 + a_1)\gamma^2\alpha + (2b_1 + c_2)\gamma\alpha^2 + c_1\alpha^3 \\ C_2 &= \gamma^2(\beta a_1 + \delta a_2) + 2\gamma\alpha(\beta b_1 + \delta b_2) + \alpha^2(\beta c_1 + \delta c_2). \end{aligned}$$

O que se nota a princípio é que $A_2 = \beta^3\phi(\delta/\beta)$ e $C_1 = \alpha^3\phi(\gamma/\alpha)$, onde ϕ tem pelo menos uma raiz. Tome p_1 sendo uma dessas raízes, isto é, $\gamma = \alpha p_1$. Assim, obtemos $C_1 = 0$. (Note que não podemos fazer $\delta = \beta p_1$ pois neste caso a mudança de coordenadas deixaria de ser um difeomorfismo). As expressões para A_1 e C_2 tornam-se

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha\{(a_2p_1 + a_1)\delta^2 + 2(b_2p_1 + b_1)\delta\beta + (c_2p_1 + c_1)\beta^2\} \\ C_2 &= \alpha^2\{(a_1p_1^2 + 2b_1p_1 + c_1)\beta + (a_2p_1^2 + 2b_2p_1 + c_2)\delta\} \end{aligned}$$

Observe que se $C = 0$, então L não é um difeomorfismo. 2) Também podemos garantir que $A_1 = 0$.

De fato, $A_1 = 0$ se, e somente se,

$$(a_2p_1 + a_1)\delta^2 + 2(b_2p_1 + b_1)\delta\beta + (c_2p_1 + c_1)\beta^2 = 0.$$

Fazendo $\delta = \beta p_1$, teremos $A_1 = \alpha\beta^2\phi(p_1) = 0$. Assim, $\delta = \beta p_1$ é uma solução da equação acima. Esta equação tem ainda outra solução que é $\delta = \lambda\beta$. Se as duas soluções coincidem, isto é $\lambda = p_1$, então

$$a_2p_1^2 + (b_2 + a_1)p_1 + b_1 = \frac{1}{2}\alpha_1(p_1) = 0.$$

Assim α_1 e φ têm uma raiz em comum p_1 . O que é uma contradição com a hipótese. Podemos, agora, fazer $A_1 = 1$ e $B_1 = \pm 1$ usando uma translação. E o resultado segue. ■

Seguindo o resultado da proposição (3.20), consideramos a EDB da forma

$$(y + a(x, y))dy^2 + 2(b_1x + b_2y + b(x, y))dxdy + (\pm y + c(x, y))dx^2 = 0 \quad (3.11)$$

onde a , b e c são função suaves que não possuem termos constantes nem lineares. Usando um método inteiramente análogo ao da proposição (3.13), mostra-se a seguinte proposição.

Proposição 3.21. *Genericamente, a EDB (3.11) é formalmente equivalente a*

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y + b(x, y))dxdy + \pm ydx^2 = 0,$$

onde b é uma série de potências que não possui termos constantes ou lineares.

No caso em que o discriminante tem uma singularidade tipo morse, a cúbica $\phi(p)$ não tem raízes repetidas e $\phi(p)$ e $\alpha(p)$ não tem raízes comum. O próximo teorema mostra que a EDB (3.9) são topologicamente determinadas usando, apenas, seu 1-jato.

Teorema 3.22. *A EDB (3.9) é topologicamente equivalente a:*

I. O discriminante é um ponto isolado (Teorema 0.1, [3]):

(a) *Lemon* $ydy^2 + 2xdxdy - ydx^2 = 0$

(b) *Star* $ydy^2 - 2xdxdy - ydx^2 = 0$

(c) *Monstar* $ydy^2 + \frac{1}{2}xdxdy - ydx^2 = 0.$

II. O discriminante é a interseção de duas curvas suaves:

(a) $ydy^2 + 2xdxdy + ydx^2 = 0$

(b) $ydy^2 - \frac{1}{2}xdxdy + ydx^2 = 0$

(c) $ydy^2 - 4xdxdy + ydx^2 = 0$

(d) $ydy^2 + 2(y - x)dxdy + ydx^2 = 0$

(e) $ydy^2 - \frac{4}{3}xdxdy + ydx^2 = 0.$

O tipo é determinado pelas constantes a_1, a_2, b_1 e b_2 . Mais geralmente, este homeomorfismo é um difeomorfismo longe de certos pontos singulares pela origem.

Referências Bibliográficas

- [1] *J. W. Bruce and F. Tari.: On binary differential equations. Boll. Nonlinearity 8, (1995), 255-271.*
- [2] *V. I. Arnold.: Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Springer, Berlin, (1983).*
- [3] *J. W. Bruce, D. L. Fidal.: On binary differential equations and umbilics. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.A 111, (1989), no. 1-2, 147-168.*
- [4] *Carmo, Manfredo P. do.: Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. Textos Universitários. Rio de Janeiro. SBM, 2005.*
- [5] *Carmo, Manfredo P. do.: Geometria Rimanniana. Textos Universitários. Rio de Janeiro. SBM, 2008.*
- [6] *J. W. Bruce and Farid Tari: Implicit Differential Equations From The Singularity Theory Viewpoint, Singularities and Differential equations. Banach Centre Publications, Volume 33, 23-38, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warsaw 1996.*
- [7] *L. Dara.: Singularité géenériques des équations différentielles multiformes. Bol. Soc. Brasil Math 6, (1975), 95-128.*
- [8] *A. A. Davydov.: Normal forms of differential equations unresolved with respect to derivatives in a neighbourhood of its singular point. Funct. Anal. Appl. 19, (1985), 1-10.*

- [9] C. G. Gibson.: *Singular points of smooth mappings. Research Notes in Math.* 25, Pitman, London (1979).
- [10] M. Golubitsky, D. Schaeffer.: *Singularities and groups in bifurcation theory. Applied Mathematical Sciences.* 51, Springer, Berlin (1985).
- [11] L. S. Challapa.: *Índice de equações diferenciais binárias. tese, ICMC-USP, 2006.*
- [12] Golubitsky M., Guillemin V. .: *Stable mappings and their singularities. Graduate text in mathematics,* 14.
- [13] Lima, E. L.: *Variedades Diferenciáveis.* IMPA, Rio de Janeiro, 1973.
- [14] LU, Yung-chen.:*Singularity theory and an introduction to catastrophe theory. Universitext,* 1976.
- [15] H. Whitney.:*On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane. Ann. of Math. (2)* 62 (1955), 374-410.
- [16] J. W. Bruce, A. A. du Plessis and C. T. C. Wall.:*Determinacy and Unipotency Invent. Math.* 88 (1987), 147-168.
- [17] Chertavskih, R. R, Remizov, O. A.:*On pleated improper singular points of first order implicit differential equation Math. CA.* October, 2/2012