Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sistemas elípticos em $\mathbb{R}^N$ via métodos variacionais

Edna Cordeiro de Souza

Março/2013
João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sistemas elípticos em $\mathbb{R}^N$ via métodos variacionais

por

Edna Cordeiro de Souza

sob orientação do

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Março/2013
João Pessoa - PB

S729s Souza, Edna Cordeiro de.

Sistemas elípticos em $\mathbb{R}^N$ via métodos variacionais / Edna Cordeiro de Souza.– João Pessoa, 2013.

85f.

Orientador: Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Sistemas Hamiltonianos. 3. Sistemas Gradientes. 4. Teorema do Passo da Montanha.

UFPB/BC CDU: 51(043)

"Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas graças a Deus, não sou o que era antes."

Marthin Luther King.

Sistemas elípticos em $\mathbb{R}^N$ via métodos variacionais

por

Edna Cordeiro de Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro -UFPB (Orientador)

Flank David Morais Bezerra

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra - UFPB

José Anderson Valença Cardoso

Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso - UFS

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Março/2013

Agradecimentos

A Deus acima de tudo, pelo dom da vida, por suprir todas as minhas necessidades e me fezer alcançar mais esta vitória. Ao meu Orientador, Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro pela dedicação, atenção e os ensinamentos que muito contribuíram para a conclusão deste trabalho, muito obrigada. À minha família, por todo o apoio sem os quais seria difícil concluir mais essa etapa de minha vida, em especial, a minha mãe, Maria do Socorro, pelo incentivo e todo amor que sempre me transmitiu. Ao meu namorado Maxwell pelo carinho e companheirismo em todos os momentos. Aos professores da pós-graduação, que contribuíram de forma essencial para a minha formação, e a todos os meus mestres que me instruíram no decorrer de toda minha vida acadêmica, em especial, ao professor Aldo Trajano Lourêdo pelo incentivo. A todos os funcionários da UFPB, pela atenção e cordialidade. Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPB por ter me concedido a oportunidade de participar do mesmo. As minhas amigas Àdima e Natália pelo apoio. Aos colegas de curso, desejo sucesso a todos. A todos aqueles que embora não tenham sido citados me ajudaram direta ou indiretamente de alguma forma. Enfim, ao REUNI, pelo apoio financeiro.

Dedicatória

A Deus que me permitiu concluir mais essa etapa na minha vida e minha amada mãe Maria do Socorro.

Resumo

Nesta dissertação estudamos sistemas de equações elípticas dos tipos gradientes e hamiltonianos via métodos variacionais cujo domínio é todo o $\mathbb{R}^N$. Mais especificamente, utilizamos teoremas de pontos críticos do tipo passo da montanha e linking para provarmos resultados de existência de solução não trivial para estes problemas.

Palavras-Chave: Sistemas Hamiltonianos; Sistemas Gradientes; Teorema do Passo da Montanha.

Abstract

In this work we study systems of elliptic equations of gradient and hamiltonean types by variational methods whose domains is the whole $\mathbb{R}^N$. More specifically, we use critical point theorems of the mountain pass and linking types to prove results of existence of non-trivial solutions to these problems.

Keywords: Hamiltonean systems; Gradient systems; Mountain Pass Theorem.

Sumário

Notações **1**

Introdução **3**

1 Sistemas Elípticos Semilineares **7**

1.1 Sistemas Gradientes 8

1.2 Sistemas Hamiltonianos 16

1.3 O Espaço $H^s_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^t_{rad}(\mathbb{R}^N)$ 17

2 Existência de Solução para um Sistema Gradiente **27**

2.1 Princípio de Criticalidade Simétrica 29

2.2 Existência de Solução Radial 32

3 Existência e Regularidade de Solução para um Sistema Hamiltoniano **38**

3.1 Preliminares 40

3.2 Existência de Solução 41

3.3 Regularidade de Solução 58

A Espaço de Sobolev de Ordem Fracionária **66**

A.1 Espaços de funções integráveis 66

A.2 Espaços de Sobolev 67

A.3 Espaços de Sobolev Fracionários 68

B Resultados Utilizados **69**

B.1 Definições 69

B.2 Resultados Utilizados 71

Referências Bibliográficas **75**

Notações

Neste trabalho, faremos uso da seguinte simbologia:

- $\rightharpoonup$ denota convergência fraca;
- $\rightarrow$ denota convergência forte;
- $\hookrightarrow$ indica imersão;
- ϕ' denota a derivada de Gâteaux e derivada de Fréchet da função ϕ;
- Ω é um domínio do $\mathbb{R}^N$;
- $(H_0^1(\Omega))^2 = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$;
- $W_{loc}^{s,p}(\mathbb{R}^N) = \{u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}; u \in W^{s,p}(K), \text{para todo} \ \ K \subset \mathbb{R}^N \ \ \text{compacto}\}$, $1 \leq p \leq \infty$;
- $H_{rad}^s(\mathbb{R}^N)$ é o subespaço das funções radiais de $H^s(\mathbb{R}^N)$;
- H^{-s} denota o espaço dual de H^s;
- C denota uma constante cujo valor pode mudar de linha para linha;
- $\overline{\Omega}$ denota o fecho de um subconjunto Ω em $\mathbb{R}^N$;
- $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;
- $\operatorname{supp} u$ é o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$, chamado suporte de u;
- $\blacksquare$ denota o fim de uma demonstração;
- q.t.p. significa quase todo ponto;

- $D^i u$ denota o operador diferencial de ordem i;
- $C(\mathbb{R}^N)$ denota o espaço das funções contínuas em $\mathbb{R}^N$;
- $C_0(\mathbb{R}^N)$ são as funções contínuas de suporte compacto em $\mathbb{R}^N$;
- $C^k(\mathbb{R}^N)$, $k \geq 1$ inteiro, denota o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre $\mathbb{R}^N$;
- $C^\infty(\mathbb{R}^N) = \bigcap_{k\geq 1} C^k(\mathbb{R}^N)$;
- $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N) = \{u \in C(\mathbb{R}^N); \sup_{x,y\in\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\}$ com $0 < \alpha < 1$;
- $C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N) = \{u \in C^1(\mathbb{R}^N); D^i u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)\ \forall\ i, |i| \leq 1\}$;
- $p^* = \frac{Np}{N-p}, 1 \leq p < N$ é o expoente crítico de Sobolev;
- p' denota o expoente conjugado de p;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o laplaciano de u;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ denota o gradiente de u;
- $f(x) = o(g(x))$, quando $x \to a$ indica que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;
- $u_n = o(1)$ indica que $\lim u_n = 0$, quando $n \to \infty$;
- F_u representa a derivação parcial $\frac{\partial F}{\partial u}$;
- E' denota o espaço dual de um espaço vetorial normado E;
- $E^\perp$ denota o complemento ortogonal de um subespaço vetorial E.

Introdução

Neste trabalho, estudamos duas classes de sistemas de equações elípticas semilineares: os sistemas gradientes e os sistemas hamiltonianos, os quais serão tratados via métodos variacionais. Consideramos a seguinte classe de problemas:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u,v) \\ -\Delta v = g(x,u,v) \end{cases} \qquad x \in \Omega,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, aberto, podendo inclusive ser todo o $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $f, g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são funções contínuas com crescimento polinomial.

Dizemos que o sistema acima é do tipo Gradiente se existe uma função $F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

$$\frac{\partial F}{\partial u} = f, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = g$$

e é dito do tipo Hamiltoniano se existe uma função $H : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

$$\frac{\partial H}{\partial u} = g, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = f.$$

Podemos ressaltar dois objetivos principais nesta dissertação: o primeiro é destacar as diferenças entre estes dois tipos de sistemas e em seguida discutimos a existência de soluções não triviais em cada caso. Além disso, fazemos um breve estudo sobre espaços de Sobolev de ordem fracionária. Tais espaços surgem no estudo de sistemas hamiltonianos e, embora não possamos deixar de impor certas restrições no crescimento polinomial das não-linearidades, eles permitem uma maior liberdade na escolha dos expoentes máximos destes polinômios.

O estudo de existência de soluções para estes problemas será sobre todo o espaço $\mathbb{R}^N$. A abordagem é variacional, isto é, iremos associar ao problema acima um funcional J definido em um espaço de funções adequado de forma que pontos críticos deste funcional serão as soluções procuradas. Desta forma, uma das grandes dificuldades encontradas deve-se à falta de condições de compacidade sobre J, condições estas necessárias aos teoremas de ponto crítico que pretendemos utilizar. Uma forma de sanar esta dificuldade é trabalhar com simetria radial e utilizar resultados de imersões compactas devido a Strauss [18].

Este trabalho é constituído de três capítulos e dois apêndices.

No Capítulo 1, baseado principalmente em [5], apresentamos uma breve abordagem sobre sistemas gradientes e hamiltonianos. Começamos destacando as diferenças entre os dois tipos de sistemas considerados. Enquanto que os sistemas gradientes se assemelham a problemas escalares, o caso hamiltoniano apresenta dificuldades muito mais acentuadas. Parte destas dificuldades é a escolha do espaço de funções adequado ao funcional J. No sistema gradiente, trabalhamos com o espaço $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$. Já no sistema hamiltoniano, a fim de permitir uma maior liberdade no crescimento polinomial das não-linearidades, precisamos introduzir o espaço $H^s(\mathbb{R}^N) \times H^t(\mathbb{R}^N)$ das funções quadrado integráveis e que possuem uma certa ordem, não necessariamente inteira, de derivabilidade. Estabelecemos a regularidade C^1 dos funcionais em ambos os casos, necessária para fazermos uso dos teoremas de pontos críticos que garantirão a existência de soluções.

No Capítulo 2, discutiremos a existência de solução radial não trivial para o sistema gradiente

$$\begin{cases} -\Delta u + u = F_u(u, v) \\ -\Delta v + v = F_v(u, v) \qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde $N \geq 3$ e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função dada. Os resultados aqui apresentados foram obtidos a partir do estudo realizado no Capítulo 1 e em [19]. No contexto do método variacional, buscamos por pontos críticos do funcional associado ao sistema, definido no espaço de funções $(H^1(\mathbb{R}^N))^2$. Para isto, utilizamos o famoso Teorema do Passo da Montanha de Ambrosseti-Rabinowitz [2], com as adequações necessárias para o caso de sistemas gradientes. Inicialmente restringimos tal funcional ao espaço $(H^1_{rad}(\mathbb{R}^N))^2$ e verificamos que este satisfaz a condição de Palais-Smale e a geometria do passo da montanha. Com isto, concluímos a existência de pontos críticos para o funcional quando restrito ao espaço $(H^1_{rad}(\mathbb{R}^N))^2$. Em seguida, utilizamos o Princípio de Criticalidade Simétrica para concluirmos a existência de pontos críticos em todo o espaço $(H^1(\mathbb{R}^N))^2$, que são as soluções fracas procuradas. Neste estudo, não abordamos questões referentes a regularidade para sistemas gradientes, uma vez que, este caso é semelhante ao que é estudado para o caso de equações elípticas escalares. Mais informações a cerca de regularidade para equações escalares podem ser encontradas em [19]. Assim, faremos um estudo sobre regularidade de soluções apenas para o caso de sistemas hamiltonianos, uma vez que estes apresentam um pouco mais de dificuldades para serem tratados.

No último Capítulo, temos como objetivo estabelecer a existência e regularidade de uma solução radial para o seguinte problema elíptico do tipo hamiltoniano

$$\begin{cases} -\Delta u + u = g(x,v) \\ -\Delta v + v = f(x,u) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $N \geq 3$ e $f, g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas. Aqui apresentamos um resultado de regularidade, o qual será provado utilizando-se um argumento *bootstrap*. Em seguida, buscamos pontos críticos para o funcional associado ao sistema. Neste momento surge uma outra diferença entre os sistemas gradientes e hamiltonianos, uma vez que, o teorema utilizado no caso de sistemas hamiltonianos não será o Teorema do Passo da Montanha e sim um Teorema de Linking, devido a Li e Willem [10], onde decompomos o espaço base em dois subespaços de dimensão infinita, o que é necessário devido ao fato do funcional associado ao sistema ser fortemente indefinido. Assim, esta dificuldade impõe um teorema um pouco mais complicado que o utilizado no capítulo anterior. Os resultados abordados neste capítulo são devidos a Sirakov [17], os quais são apresentados de forma detalhada nesta dissertação.

Assim, além de abordarmos as principais diferenças entre sistemas gradientes e hamiltonianos, no útimo capítulo, fazemos uma releitura auto explicativa deste artigo.

No Apêndice A, inicialmente, daremos uma caracterização dos espaços de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^N)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Em seguida, para m inteiro definimos os Espaços de Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ de ordem m sobre $\mathbb{R}^N$, a partir dos quais fazemos um breve estudo sobre espaços de Sobolev de ordem fracionária. Finalmente, concluímos o nosso trabalho com o Apêndice B onde apresentamos as definições necessárias para uma melhor compreensão do nosso estudo. Além disso, citamos alguns resultados de Análise funcional, Teoria da medida, Equações Diferenciáveis Parciais e Espaços de Sobolev, os quais completam os argumentos utilizados nesta dissertação. Por se tratarem de resultados clássicos, não apresentamos aqui suas demonstrações, porém, citamos as referências onde as mesmas podem ser encontradas.

Capítulo 1

Sistemas Elípticos Semilineares

Neste capítulo estudaremos duas classes especiais de sistemas de equações diferenciais parciais elípticas.

Consideremos o seguinte problema,

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u,v) \\ -\Delta v = g(x,u,v) \end{cases} \qquad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ e $f, g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são funções dadas.

Nosso interesse é utilizar técnicas variacionais para encontrar soluções de (1.1), isto é, associamos a (1.1) um funcional definido num espaço de funções adequado de forma que pontos críticos deste funcional são soluções, num certo sentido, do problema (1.1). Dois tipos de sistemas surgem nesta abordagem:

Dizemos que o Sistema (1.1) é do tipo Gradiente se existe uma função $F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

$$\frac{\partial F}{\partial u} = f, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = g$$

e é dito do tipo Hamiltoniano se existe uma função $H : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

$$\frac{\partial H}{\partial u} = g, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = f.$$

Observe ainda que não estamos restringindo o domínio Ω, que pode, inclusive, ser todo o $\mathbb{R}^N$.

1.1 Sistemas Gradientes

A teoria de sistemas gradientes é semelhante à teoria dos problemas envolvendo uma equação elíptica, ditos problemas de equações escalares.

Consideremos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} -\Delta u = F_u(x,u,v) & \\ -\Delta v = F_v(x,u,v) & x \in \Omega. \\ \quad u,v \in H_0^1(\Omega) & \end{cases} \tag{1.2}$$

No contexto do método variacional, buscamos soluções fracas para (1.2). Dizemos que (u,v) é uma solução fraca para (1.2) se $(u,v) \in (H_0^1(\Omega))^2$ e satisfaz

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega F_u(x,u,v)\varphi \quad \text{e} \quad \int_\Omega \nabla v \nabla \psi = \int_\Omega F_v(x,u,v)\psi \quad \forall\ (\varphi,\psi) \in (H_0^1(\Omega))^2.$$

Denotemos

$$U = (u,v), \quad -\Delta U = (-\Delta u, -\Delta v) \quad \text{e} \quad \nabla F(x,U) = (F_u(x,u,v), F_v(x,u,v)).$$

Assim, o sistema (1.2) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} -\Delta U = \nabla F(x,U) & \\ \quad U \in (H_0^1(\Omega))^2 & \end{cases} x \in \Omega. \tag{1.3}$$

Associado ao sistema (1.3) temos o funcional $I : (H_0^1(\Omega))^2 \to \mathbb{R}$ dado por

$$I(U) = \frac{1}{2}\|U\|^2 - \int_\Omega F(x,U). \tag{1.4}$$

Considere as seguintes hipóteses sobre F:

(F_0) $F \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2)$,

(F_1) Para $1 \leq p,q \leq 2^* - 1$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$,

$$|\nabla F(x,U)| \ \leq \ C(|u|^p + |v|^q),$$

para todo $x \in \Omega$ e $u,v \in \mathbb{R}$,

(F_2) $F(x,0,0) = F_u(x,0,v) = F_v(x,u,0) = 0$, $\forall\ x \in \Omega$, $\forall\ u,v \in \mathbb{R}$,

(F_3) $\nabla F(x,U) = o(|U|)$ quando $|U| \to 0$.

A seguir, apresentamos dois resultados que serão úteis para mostrar que o funcional I está bem definido e de classe C^1.

Lema 1.1 *Suponha* $(F_0) - (F_2)$*. Então, para* $1 \leq p, q \leq 2^* - 1$*, temos*

$$F(x, U) \leq C(1 + |u|^{p+1} + |v|^{q+1}),$$

para todo $x \in \Omega$ *e* $u, v \in \mathbb{R}$*.*

Prova: Sem perda de generalidade suponha $p \geq q$, por (F_1), temos

$$F_u(x, u, v) \leq |F_u(x, u, v)| \leq |\nabla F(x, u, v)| \leq C(|u|^p + |v|^q)$$

daí

$$\begin{aligned} \int_0^u F_s(x, s, v) ds &\leq C \int_0^u |s|^p ds + C \int_0^u |v|^q ds \\ &= C|u|^{p+1} + C|v|^q u \\ &\leq C|u|^{p+1} + C|v|^q |u| \end{aligned}$$

o que implica

$$F(x, u, v) - F(x, 0, v) \leq C|u|^{p+1} + C|v|^q |u|. \tag{1.5}$$

Por (F_1) e (F_2), segue

$$\begin{aligned} F(x, 0, v) &= \int_0^v F_t(x, 0, t) dt \\ &\leq C \int_0^v |t|^q dt \\ &= C|v|^{q+1}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Logo, por (1.5) e (1.6), obtemos

$$F(x, u, v) \leq C|u|^{p+1} + C|v|^q |u| + C|v|^{q+1}.$$

Analisemos os seguintes casos:

Caso 1: $|u| \leq 1$.

Se $|v| \leq 1$, temos

$$F(x, u, v) \leq C.$$

Se $|v| \geq 1$, temos

$$F(x,u,v) \leq C + C|v|^q + C|v|^{q+1} \leq C + C|v|^{q+1}.$$

Caso 2: $|u| \geq 1$.

Se $|v| \leq 1$, temos

$$F(x,u,v) \leq C|u|^{p+1} + C|u| + C \leq C|u|^{p+1} + C.$$

Se $|v| \geq 1$, tomando $t = \frac{p+1}{q+1}$, temos

$$F(x,u,v) \leq C|u|^{p+1} + C|v|^q|u|^t + C|v|^{q+1}. \tag{1.7}$$

Usando a desigualdade de Young (veja Teorema B.8 do Apêndice B), com $a = |v|^q$, $b = |u|^t$ e $(q+1)' = \frac{q+1}{q}$, tem-se

$$|v|^q|u|^t \leq \frac{q}{q+1}|v|^{q+1} + \frac{1}{q+1}|u|^{p+1} \tag{1.8}$$

de (1.7) e (1.8), obtemos

$$F(x,u,v) \leq C|u|^{p+1} + C|v|^{q+1}.$$

Assim, analisando todos os casos, concluímos que

$$F(x,U) \leq C(1 + |u|^{p+1} + |v|^{q+1}). \tag{1.9}$$

■

Lema 1.2 *Suponha* $(F_0) - (F_3)$, *então*

$$F(x,U) \leq \varepsilon(|u|^2 + |v|^2) + C(|u|^{p+1} + |v|^{q+1}),$$

para todo $U \in \mathbb{R}^2$ *e* $\varepsilon > 0$.

Prova: Por (F_3), dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|U| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |\nabla F(x,U)| \leq \varepsilon |U|,$$

isto é,

$$F_u(x,u,v), F_v(x,u,v) \leq |\nabla F(x,u,v)| \leq \varepsilon(|u| + |v|), \quad \text{se} \quad |U| \leq \delta. \tag{1.10}$$

Assim, de (1.10) obtemos

$$\begin{aligned} F(x,u,v)-F(x,0,v) &= \int_0^u F_s(x,s,v)ds \\ &\leq \varepsilon\int_0^u |s|ds+\varepsilon\int_0^u |v|ds \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}|u|^2+\varepsilon|v||u|. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Por (F_2) e (1.10), temos

$$F(x,0,v)=\int_0^v F_t(x,0,t)dt \leq \varepsilon\int_0^v |t|dt=\frac{\varepsilon}{2}|v|^2. \tag{1.12}$$

De (1.11) e (1.12), segue que

$$\begin{aligned} F(x,u,v) &\leq \frac{\varepsilon}{2}|u|^2+\varepsilon|v||u|+\frac{\varepsilon}{2}|v|^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}|u|^2+\varepsilon(\frac{1}{2}|u|^2+\frac{1}{2}|v|^2)+\frac{\varepsilon}{2}|v|^2 \\ &= \varepsilon(|u|^2+|v|^2). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Se $|U|=|u|+|v|\geq\delta$, podemos supor $|u|\geq\frac{\delta}{2}$. Então, pelo Lema 1.1, e considerando $C\leq C_1(\frac{\delta}{2})^{p+1}$, temos

$$\begin{aligned} F(x,u,v) &\leq C+C|u|^{p+1}+C|v|^{q+1} \\ &\leq C_1\left(\frac{\delta}{2}\right)^{p+1}+C(|u|^{p+1}+|v|^{q+1}) \\ &\leq C_1|u|^{p+1}+C(|u|^{p+1}+|v|^{q+1}) \\ &\leq C(|u|^{p+1}+|v|^{q+1}) \end{aligned} \tag{1.14}$$

Por (1.13) e (1.14), concluímos que

$$F(x,U)\leq\varepsilon(|u|^2+|v|^2)+C(|u|^{p+1}+|v|^{q+1}), \tag{1.15}$$

■

Mostraremos agora a regularidade C^1 do funcional I, para isto, apresentamos o seguinte resultado:

Proposição 1.1 *O funcional I está bem definido e $I\in C^1((H_0^1(\Omega))^2,\mathbb{R})$. Além disso,*

$$\langle I'(U),\Phi\rangle=\int_\Omega[\nabla u\nabla\varphi+\nabla v\nabla\psi]-\int_\Omega[F_u(x,u,v)\varphi+F_v(x,u,v)\psi]$$

para todo $U=(u,v),\Phi=(\varphi,\psi)\in(H_0^1(\Omega))^2$.

Prova: Podemos escrever

$$I(U) = \rho(U) - \mu(U)$$

onde $\rho(U) = \frac{1}{2}\|U\|^2$ e $\mu(U) = \int_\Omega F(x, U)$.

Provemos então o seguinte,

(a) I está bem definido.

Claramente $\rho(U) = \frac{1}{2}\|U\|^2$ está bem definido para todo $U \in (H_0^1(\Omega))^2$. Portanto, basta verificar que o funcional μ está bem definido. De fato, como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$, $1 \leq p, q \leq 2^* - 1$ (veja Teorema B.16 do Apêndice B), pelo Lema 1.2 temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega F(x, U) &\leq \int_\Omega \left[\varepsilon(|u|^2 + |v|^2) + C(|u|^{p+1} + |v|^{q+1})\right] \\
&= \varepsilon \int_\Omega |u|^2 + \varepsilon \int_\Omega |v|^2 + C \int_\Omega |u|^{p+1} + C \int_\Omega |v|^{q+1} < \infty.
\end{aligned}$$

Logo, μ está bem definido. Portanto, I está bem definido.

(b) $I \in C^1((H_0^1(\Omega))^2, \mathbb{R})$.

Primeiro, vejamos que ρ é diferenciável com derivada contínua.

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\rho(U + h\Phi) - \rho(U)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}\|U + h\Phi\|^2 - \frac{1}{2}\|U\|^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}(\|U\|^2 + 2h\langle U, \Phi\rangle + h^2\|\Phi\|^2) - \frac{1}{2}\|U\|^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\langle U, \Phi\rangle + \frac{h}{2}\|\Phi\|^2\right) \\
&= \langle U, \Phi\rangle.
\end{aligned}$$

Nosso objetivo é mostrar que

$$\lim_{\|\Phi\| \to 0} \frac{\tau(\Phi)}{\|\Phi\|} = 0,$$

onde $\tau(\Phi) = \rho(U + \Phi) - \rho(U) - \langle U, \Phi\rangle$.

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{\|\Phi\| \to 0} \frac{\rho(U + \Phi) - \rho(U) - \langle U, \Phi\rangle}{\|\Phi\|} &= \lim_{\|\Phi\| \to 0} \frac{\frac{1}{2}\|U + \Phi\|^2 - \frac{1}{2}\|U\|^2 - \langle U, \Phi\rangle}{\|\Phi\|} \\
&= \lim_{\|\Phi\| \to 0} \frac{\frac{1}{2}(\|U\|^2 + 2\langle U, \Phi\rangle + \|\Phi\|^2) - \frac{1}{2}\|U\|^2 - \langle U, \Phi\rangle}{\|\Phi\|} \\
&= \lim_{\|\Phi\| \to 0} \frac{1}{2}\|\Phi\| = 0,
\end{aligned}$$

mostrando que ρ é diferenciável em $(H_0^1(\Omega))^2$, com

$$\langle \rho'(U), \Phi \rangle = \langle U, \Phi \rangle = \int_\Omega [\nabla u \nabla \varphi + \nabla v \nabla \psi]$$

e consequentemente ρ é contínua.

Vamos mostrar agora a continuidade de ρ'. Considere $\{U_n\} \subset (H_0^1(\Omega))^2$, com $U_n \to U$ em $(H_0^1(\Omega))^2$. Temos que

$$\|\rho'(U_n) - \rho'(U)\|_{H_0^{-1} \times H_0^{-1}} = \sup_{\|\Phi\| \leq 1} |\langle \rho'(U_n) - \rho'(U), \Phi \rangle|.$$

Note que

$$\begin{aligned} |\langle \rho'(U_n) - \rho'(U), \Phi \rangle| &= |\langle \rho'(U_n), \Phi \rangle - \langle \rho'(U), \Phi \rangle| \\ &= |\langle U_n, \Phi \rangle - \langle U, \Phi \rangle| \\ &= |\langle U_n - U, \Phi \rangle|. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (veja Teorema B.11 do Apêndice B), segue que

$$|\langle \rho'(U_n) - \rho'(U), \Phi \rangle| \leq \|U_n - U\| \|\Phi\| \leq \|U_n - U\|$$

para $\|\Phi\| \leq 1$. Assim, obtemos

$$\sup_{\|\Phi\| \leq 1} |\langle \rho'(U_n) - \rho'(U), \Phi \rangle| \leq \|U_n - U\|,$$

donde segue que

$$\|\rho'(U_n) - \rho'(U)\|_{H_0^{-1} \times H_0^{-1}} \to 0$$

quando $n \to +\infty$. Logo ρ' é contínua e, portanto, $\rho' \in C^1((H_0^1(\Omega))^2)$.

Em seguida, mostremos que μ é diferenciável. Defina $\gamma(\alpha) = F(x, U + \alpha t \Phi)$ onde $\Phi = (\varphi, \psi) \in (H_0^1(\Omega))^2$ e $\alpha, t \in [0, 1]$. Então, pelo Teorema do Valor Médio (veja Teorema B.3 do Apêndice B), existe $\theta = \theta(x) \in (0, 1)$ tal que $\gamma(1) - \gamma(0) = \gamma'(\theta)$, isto é,

$$\begin{aligned} F(x, U + t\Phi) - F(x, U) &= F_u(x, U + \theta t \Phi) t \varphi + F_v(x, U + \theta t \Phi) t \psi \\ &= \nabla F(x, U + \theta t \Phi) t \Phi. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Quando $t \to 0$ temos que $\nabla F(x, U + \theta t \Phi)\Phi \to \nabla F(x, U)\Phi$ q.t.p. em $\Omega \times \Omega$. Por outro lado, de (F_1) e usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}
|\nabla F(x, U + \theta t\Phi)\Phi| &\leq C|u + \theta t\varphi|^p|\Phi| + C|v + \theta t\psi|^q|\Phi| \\
&\leq C(|u|^p + |\varphi|^p)(|\varphi| + |\psi|) + C(|v|^q + |\psi|^q)(|\varphi| + |\psi|) \\
&= C(|\varphi||u|^p + |\varphi|^{p+1} + |\psi||u|^p + |\psi||\varphi|^p) \\
&\quad + C(|\varphi||v|^q + |\varphi||\psi|^q + |\psi||v|^q + |\psi|^{q+1}) \\
&\leq C(|u|^{p+1} + |\varphi|^{p+1} + |v|^{q+1} + |\psi|^{q+1}). \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

Como, por imersão de Sobolev, $U, \Phi \in L^{p+1}(\Omega) \times L^{q+1}(\Omega)$, então o termo à direita em (1.17) é integrável. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja Teorema B.12 do Apêndice B), segue que

$$\int_\Omega \nabla F(x, U + \theta t\Phi)\Phi \to \int_\Omega \nabla F(x, U)\Phi \quad \text{quando} \quad t \to 0. \qquad (1.18)$$

Logo, de (1.16) e (1.18), temos

$$\begin{aligned}
\langle \mu'(U), \Phi \rangle &= \lim_{t\to 0} \frac{\mu(U + t\Phi) - \mu(U)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{F(x, U + t\Phi) - F(x, U)}{t} \\
&= \int_\Omega \nabla F(x, U)\Phi \\
&= \int_\Omega [F_u(x, u, v)\varphi + F_v(x, u, v)\psi].
\end{aligned}$$

Logo, μ é diferenciável à Gâteaux (veja Definição B.4 do Apêndice B). Agora mostremos que μ' é contínua.

Seja $U_n \to U$ em $(H_0^1(\Omega))^2$. Então, $U_n \to U$ em $L^{p+1}(\Omega) \times L^{q+1}(\Omega)$ e $U_n \to U$ q.t.p. em $\Omega \times \Omega$. Consequentemente, a menos de subsequência, existe $W = (w_1, w_2) \in L^{p+1}(\Omega) \times L^{q+1}(\Omega)$ tal que $|u_n| \leq w_1$ e $|v_n| \leq w_2$ q.t.p. em Ω (veja Teorema B.5 do Apêndice B). Dado $\Phi = (\varphi, \psi) \in (H_0^1(\Omega))^2$, por imersão de Sobolev, $\Phi = (\varphi, \psi) \in L^{p+1}(\Omega) \times L^{q+1}(\Omega)$. Definimos

$$A_n = \nabla F(x, U_n)\Phi$$

então, por (F_1) e a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
|A_n| &= |\nabla F(x, U_n)||\Phi| \\
&\leq C(|u_n|^p + |v_n|^q)|\Phi| \\
&\leq C(|w_1|^p + |w_2|^q)(|\varphi| + |\psi|) \\
&= C(|w_1|^p|\varphi| + |w_1|^p|\psi| + |w_2|^q|\varphi| + |w_2|^q|\psi|) \\
&\leq C(|w_1|^{p+1} + |\varphi|^{p+1} + |w_2|^{q+1} + |\psi|^{q+1}) \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Como $\nabla F(x, U_n)\Phi \to \nabla F(x, U)\Phi$ q.t.p. em $\Omega \times \Omega$, pelo Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\int_\Omega \nabla F(x, U_n)\Phi \to \int_\Omega \nabla F(x, U)\Phi.$$

Assim, para cada $\Phi \in (H_0^1(\Omega))^2$ com $\|\Phi\| \leq 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\mu'(U_n) - \mu'(U)\|_{H_0^{-1} \times H_0^{-1}} &= \sup_{\|\Phi\| \leq 1} |\langle \mu'(U_n) - \mu'(U), \Phi\rangle| \\
&= \sup_{\|\Phi\| \leq 1} |\langle \mu'(U_n), \Phi\rangle - \langle \mu'(U), \Phi\rangle| \\
&\leq \sup_{\|\Phi\| \leq 1} \int_\Omega |\nabla F(x, U_n) - \nabla F(x, U)||\Phi| \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\mu \in C^1((H_0^1(\Omega))^2)$ (veja Observação B.3 do Apêndice B). Portanto, $I \in C^1((H_0^1(\Omega))^2, \mathbb{R})$ e é dado por

$$\langle I'(U), \Phi\rangle = \int_\Omega [\nabla u \nabla \varphi + \nabla v \nabla \psi] - \int_\Omega [F_u(x, u, v)\varphi + F_v(x, u, v)\psi].$$

■

Uma vez que o funcional I é de classe C^1, condições adicionais em F serão estabelecidas de modo que possamos utilizar teoremas de pontos críticos na busca de soluções do problema estudado. Mais precisamente, no Capítulo 2, estudaremos um sistema do tipo gradiente utilizando métodos variacionais, ou seja, associamos ao sistema o funcional I e almejamos encontrar pontos críticos deste funcional, os quais serão as soluções fracas do sistema dado. A idéia é obter, via Teorema do Passo da Montanha, um ponto crítico não trivial U do funcional I restrito ao espaço $(H^1_{rad}(\mathbb{R}^N))^2$. Em seguida, usando o Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais concluímos que U é um ponto crítico não trivial de I no espaço $(H^1(\mathbb{R}^N))^2$.

1.2 Sistemas Hamiltonianos

Nesta seção estudaremos sistemas elípticos da forma

$$\begin{cases} -\Delta u = H_v(x,u,v) \\ -\Delta v = H_u(x,u,v) \end{cases} \qquad x \in \Omega, \tag{1.19}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$.

Observação 1.1 *Quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, o sistema* (1.19) *assume a forma*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = H_v(x,u,v) \\ -\Delta v + v = H_u(x,u,v) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

Dizemos que (u,v) é solução fraca para (1.19) se $(u,v) \in (H_0^1(\Omega))^2$ e

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \nabla \phi &= \int_\Omega H_v(x,u,v)\phi \\ \int_\Omega \nabla v \nabla \psi &= \int_\Omega H_u(x,u,v)\psi \end{aligned}$$

para todo $(\phi,\psi) \in (H_0^1(\Omega))^2$.

Primeiro, se supomos que $H \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2)$ e satisfaz

(H_1) Para $1 \leq p, q \leq 2^* - 1$,

$$\begin{aligned} H_u(x,u,v) &\leq C(|u|^p + |v|^q) \\ H_v(x,u,v) &\leq C(|u|^p + |v|^q), \end{aligned}$$

(H_2) $H(x,0,0) = H_u(x,0,v) = H_v(x,u,0) = 0$,

(H_3) $H_u(x,z) = o(|z|), H_v(x,z) = o(|z|)$, com $|z| \to 0$, para $z = (u,v) \in (H_0^1(\Omega))^2$.

Então, analogamente ao que fizemos para o caso de sistemas gradientes, mostramos que o funcional

$$J(z) = J(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega H(x,u,v) \tag{1.20}$$

associado ao problema (1.19) está bem definido no espaço de Hilbert $E = (H_0^1(\Omega))^2$. Além disso, J é de classe C^1 com derivada dada por

$$\langle J'(z), \eta \rangle = \int_\Omega [\nabla u \nabla \phi + \nabla v \nabla \psi] - \int_\Omega [H_u(x,u,v)\psi + H_v(x,u,v)\phi]$$

para todo $z = (u,v), \eta = (\phi,\psi) \in (H_0^1(\Omega))^2$. Assim, pontos críticos do funcional (1.20) são soluções fracas do sistema (1.19).

Observação 1.2 *Em nosso caso, utilizaremos a noção de hipérbole crítica a qual substitui a noção de expoente crítico do caso escalar. Faremos esta substituição porque queremos considerar os pares* (p, q) *que podem não satisfazer a restrição* (H_1). *Assim, impomos uma nova condição de crescimento onde a exigência básica será que* (p, q) *esteja abaixo da hipérbole crítica, sendo que* p *ou* q *pode ser maior que* $2^* - 1$, *isto é,* p, q *satisfazem*

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{N}$$

conforme figura abaixo

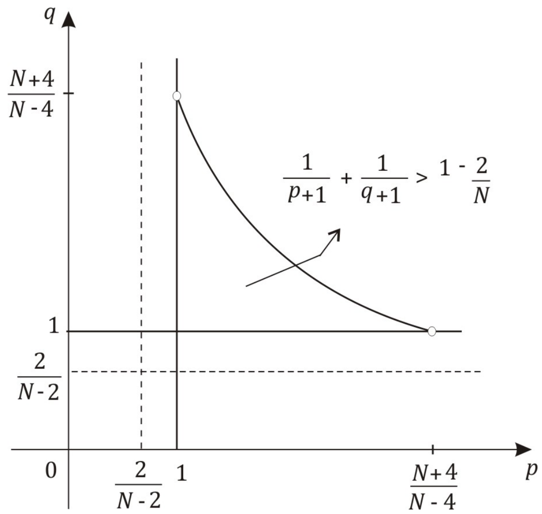

Figura 1.1: Hipérbole crítica

A idéia principal da hipérbole crítica é possibilitar uma maior flexibilidade na escolha de p *e* q, *isto é, a medida que* p *cresce,* q *diminui, havendo portanto, uma compensação. Com isto, a parte quadrática do funcional* (1.20) *deve ser redefinida, e então, precisaremos de espaços de Sobolev de ordem fracionária (veja Apêndice A).*

Observação 1.3 *Nosso interesse é estudar sistemas elípticos em* $\mathbb{R}^N$, *então utilizaremos os espaços de funções sobre o* $\mathbb{R}^N$.

Agora, precisamos estabelecer um espaço adequado para redefinir o funcional (1.20).

1.3 O Espaço $H^s_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^t_{rad}(\mathbb{R}^N)$

Seja H um espaço de Hilbert real separável com produto escalar denotado por $\langle , \rangle$ e a norma correspondente por $\|.\|$. Seja $T : D(T) \subset H \to H$ um operador linear auto-adjunto, satisfazendo o seguinte: Existe $\delta > 0$ tal que

$$\langle Tu, u\rangle \geq \delta \|u\|^2, \quad \forall\ u \in D(T). \tag{1.21}$$

Por simplicidade tomaremos $\delta = 1$. Dizemos que $T : D(T) \subset H \to H$ é positivo se satisfaz $\langle Tu, u\rangle \geq 0$, para todo $u \in D(T)$. Além disso, se T é auto-adjunto e positivo então, existe um único operador linear auto-adjunto S tal que $T = S^2$, tal operador é denominado raiz quadrada de T.

Por (1.21) vemos que T é positivo, deste modo podemos definir sua raiz quadrada $T^{\frac{1}{2}} : D(T^{\frac{1}{2}}) \to H$ um operador auto adjunto e temos

$$\langle T^{\frac{1}{2}}u, u\rangle \geq \|u\|^2, \quad u \in D(T^{\frac{1}{2}}). \tag{1.22}$$

Para cada $s > 0$, denotemos

$$A = T^{\frac{1}{2}}, \quad A^s = T^{\frac{s}{2}}$$

e definimos $E^s = D(A^s)$, onde cada E^s é um espaço de Hilbert dotado com a norma do gráfico

$$\langle u, v\rangle_{E^s} = \langle u, v\rangle + \langle A^s u, A^s v\rangle.$$

Segue de (1.22) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\|u\|^2 \leq \langle T^{\frac{s}{2}}u, u\rangle \leq \|T^{\frac{s}{2}}u\|\|u\|$$

logo

$$\|A^s u\| \geq \|u\|, \quad \forall\ u \in E^s. \tag{1.23}$$

Note que, $\|u\|_{E^s}$ e $\|A^s u\|$ são equivalentes em E^s. De fato, temos

$$\|u\|^2_{E^s} = \|u\|^2 + \|A^s u\|^2 \geq \|A^s u\|^2 \tag{1.24}$$

por outro lado, de (1.23), temos

$$\|u\|^2_{E^s} = \|u\|^2 + \|A^s u\|^2 \leq \|A^s u\|^2 + \|A^s u\|^2 = 2\|A^s u\|^2. \tag{1.25}$$

De (1.24) e (1.25), temos

$$\|A^s u\| \leq \|u\|_{E^s} \leq \sqrt{2}\|A^s u\|.$$

De modo que, em E^s, podemos escrever

$$\langle u, v\rangle_{E^s} = \langle A^s u, A^s v\rangle \quad \text{e} \quad \|u\|_{E^s} = \|A^s u\|. \tag{1.26}$$

Proposição 1.2 *$A^s : E^s \to H$ é um isomorfismo.*

Prova: Primeiro note que, de (1.24) temos que A^s é contínua em E^s. Agora, de (1.23) temos que A^s é injetiva, pois

$$0 = \|A^s(u-v)\| \geq \|u-v\| \geq 0.$$

Mostremos que $A^s(E^s)$ é fechado em H. Seja $\{u_n\}$ uma sequência em E^s e z em H tal que $A^s u_n \to z$ em H. De (1.23) temos

$$\|A^s u_n - A^s u_m\| = \|A^s(u_n - u_m)\| \geq \|u_n - u_m\|.$$

Como $\{A^s u_n\}$ é uma sequência de Cauchy, então $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy em H. Assim, existe $u \in H$ tal que $u_n \to u$ em H e como A^s é contínua temos, $A^s u_n \to A^s u$ em H, daí, pela unicidade do limite, $z = A^s u$ concluindo que $A^s(E^s)$ é fechado em H.

Mostremos também que $A^s(E^s)$ é denso em H. Consideremos $z \in E^s$ de modo que $\langle A^s u, z\rangle = 0$, $\forall\ u \in E^s$. Em particular, para $u = z$ temos

$$0 = \langle A^s z, z\rangle \geq \|z\|^2$$

o que implica $z = 0$. Logo, $A^s(E^s)^\perp = \{0\}$ e portanto $A^s(E^s)$ é denso em H (veja Teorema B.14 do Apêndice B).

Sendo $A^s(E^s)$ fechado e denso em H, então $A^s(E^s) = \overline{A^s(E^s)} = H$. Logo, $A^s(E^s)$ é sobrejetiva.

■

Denotemos por A^{-s} o inverso de A^s e note que, dado $\phi \in H$ e $\psi \in E^s$, então

$$\langle A^{-s}\phi, \psi\rangle_{E^s} = \langle A^s A^{-s}\phi, A^s\psi\rangle = \langle \phi, A^s\psi\rangle.$$

Agora, sejam $s, t > 0$ com $s + t = 2$. Definimos o espaço de Hilbert $E = E^s \times E^t$ com o produto interno $\langle , \rangle$ induzido pelos produtos internos $\langle , \rangle_{E^s}$, $\langle , \rangle_{E^t}$ de modo usual. Em seguida, definimos a forma bilinear $B : E \times E \to \mathbb{R}$ por

$$B(z, \eta) = \langle A^s u, A^t\psi\rangle + \langle A^s\phi, A^t v\rangle$$

para todo $z = (u, v), \eta = (\phi, \psi) \in E \times E$.

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e (1.26), obtemos

$$\begin{aligned} |B(z,\eta)| &\leq \|A^s u\| \|A^t \psi\| + \|A^s \phi\| \|A^t v\| \\ &= \|u\|_{E^s} \|\psi\|_{E^t} + \|\phi\|_{E^s} \|v\|_{E^t} \\ &\leq \|z\|_E \|\eta\|_E + \|\eta\|_E \|z\|_E \\ &= 2\|z\|_E \|\eta\|_E \end{aligned}$$

o que mostra que B é contínua.

Seja, $Lz = (A^{-s}A^t v, A^{-t}A^s u)$, $\forall\ z = (u,v) \in E$. Temos

$$\begin{aligned} \langle Lz, \eta \rangle_E &= \langle (A^{-s}A^t v, A^{-t}A^s u), (\phi, \psi) \rangle_E \\ &= \langle A^{-s}A^t v, \phi \rangle_{E^s} + \langle A^{-t}A^s u, \psi \rangle_{E^t} \\ &= \langle A^t v, A^s \phi \rangle + \langle A^s u, A^t \psi \rangle \\ &= \langle A^s u, A^t \psi \rangle + \langle A^s \phi, A^t v \rangle \\ &= B(z, \eta) \end{aligned}$$

para todo $\eta = (\phi, \psi) \in E$.

Lema 1.3 *Defina $L : E \to E$ tal que*

$$B(z,\eta) = \langle Lz, \eta \rangle_E$$

para todo, $z, \eta \in E$. Então, L é um operador linear, auto-adjunto e contínuo.

Prova: L é contínuo. De fato, pela continuidade de B temos

$$\|Lz\|_E^2 = \langle Lz, Lz \rangle_E = B(z, Lz) \leq C\|z\|_E \|Lz\|_E,$$

logo,

$$\|Lz\|_E \leq C\|z\|_E.$$

Agora, verifiquemos que L é linear. Dados $z_1, z_2 \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \langle L(\alpha z_1 + z_2), \eta \rangle_E &= B(\alpha z_1 + z_2, \eta) \\ &= \alpha B(z_1, \eta) + B(z_2, \eta) \\ &= \alpha \langle L z_1, \eta \rangle_E + \langle L z_2, \eta \rangle_E \\ &= \langle \alpha L z_1 + L z_2, \eta \rangle_E \end{aligned}$$

para todo $\eta \in E$. Logo, $L(\alpha z_1 + z_2) = \alpha L z_1 + L z_2$.

L é auto-adjunto. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle Lz, \eta\rangle_E &= \langle (A^{-s}A^t v, A^{-t}A^s u), (\phi, \psi)\rangle_E \\
&= \langle A^{-s}A^t v, \phi\rangle_{E^s} + \langle A^{-t}A^s u, \psi\rangle_{E^t} \\
&= \langle A^t v, A^s \phi\rangle + \langle A^s u, A^t \psi\rangle \\
&= \langle A^s u, A^t \psi\rangle + \langle A^t v, A^s \phi\rangle \\
&= \langle u, A^{-s}A^t \psi\rangle_{E^s} + \langle v, A^{-t}A^s \phi\rangle_{E^t} \\
&= \langle (u, v), (A^{-s}A^t \psi, A^{-t}A^s \phi)\rangle_E \\
&= \langle z, L\eta\rangle_E.
\end{aligned}$$

■

Mostremos que L possui apenas dois autovalores -1 e 1. Seja

$$Lz = \lambda z, \quad z \neq 0,$$

então

$$(A^{-s}A^t v, A^{-t}A^s u) = \lambda(u, v).$$

Supondo $v \neq 0$, temos

$$\begin{cases} A^{-s}A^t v = \lambda u \\ A^{-t}A^s u = \lambda v. \end{cases} \tag{1.27}$$

Da primeira igualdade de (1.27), temos

$$u = \frac{A^{-s}A^t v}{\lambda}$$

e da segunda igualdade, temos

$$\frac{1}{\lambda} v = \lambda v \Rightarrow v = \lambda^2 v \Rightarrow \|v\| = \lambda^2 \|v\| \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

Além disso, os auto-espaços correspondentes são

$$\begin{aligned}
E^+ &= \{(u, A^{-t}A^s u) : u \in E^s\} \quad \text{para} \quad \lambda = 1, \\
E^- &= \{(u, -A^{-t}A^s u) : u \in E^s\} \quad \text{para} \quad \lambda = -1
\end{aligned}$$

pois,

$$\begin{aligned}
L(u, A^{-t}A^s u) &= (A^{-s}A^t A^{-t}A^s u, A^{-t}A^s u) = (u, A^{-t}A^s u), \\
L(u, -A^{-t}A^s u) &= (-A^{-s}A^t A^{-t}A^s u, A^{-t}A^s u) = (-u, A^{-t}A^s u) = -(u, -A^{-t}A^s u).
\end{aligned}$$

Também temos que

$$E = E^+ \oplus E^-$$

e E^+ e E^- são multualmente ortogonais com respeito a forma bilinear, isto é,

$$B(z^+, z^-) = 0, \quad \forall\ z^+ \in E^+ \quad \text{e} \quad z^- \in E^-.$$

Considere a forma quadrática associada à forma bilinear B, isto é,

$$\begin{aligned} Q(z) &= \frac{1}{2}B(z,z) \\ &= \frac{1}{2}(\langle A^s u, A^t v\rangle + \langle A^s u, A^t v\rangle) \\ &= \langle A^s u, A^t v\rangle \end{aligned}$$

para $z = (u, v) \in E$. Segue então que

$$\frac{1}{2}\|z\|_E^2 = Q(z^+) - Q(z^-) \tag{1.28}$$

onde $z = z^+ + z^-$, $z^+ \in E^+$, $z^- \in E^-$.

De fato, dados $z^+ = (u, A^{-t}A^s u)$, $z^- = (u, -A^{-t}A^s u)$, $u \in E^s$, temos

$$\begin{aligned} Q(z^+) &= \langle A^s u, A^t A^{-t} A^s u\rangle = \langle A^s u, A^s u\rangle = \|A^s u\|^2 = \|u\|_{E^s}^2 \\ Q(z^-) &= \langle A^s u, -A^t A^{-t} A^s u\rangle = -\langle A^s u, A^s u\rangle = -\|A^s u\|^2 = -\|u\|_{E^s}^2. \end{aligned}$$

Daí,

$$Q(z^+) - Q(z^-) = \|u\|_{E^s}^2 + \|u\|_{E^s}^2 = 2\|u\|_{E^s}^2. \tag{1.29}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|z\|_E^2 &= \frac{1}{2}\langle z, z\rangle_E \\ &= \frac{1}{2}\langle z^+ + z^-, z^+ + z^-\rangle_E \\ &= \frac{1}{2}(\langle z^+, z^+\rangle_E + 2\langle z^+, z^-\rangle_E + \langle z^-, z^-\rangle_E) \\ &= \frac{1}{2}(\langle (u, A^{-t}A^s u), (u, A^{-t}A^s u)\rangle_E + \langle (u, -A^{-t}A^s u), (u, -A^{-t}A^s u)\rangle_E) \\ &= \frac{1}{2}(\|u\|_{E^s}^2 + \|A^{-t}A^s u\|_{E^t}^2 + \|u\|_{E^s}^2 + \| - A^{-t}A^s u\|_{E^t}^2) \\ &= \frac{1}{2}(4\|u\|_{E^s}^2) = 2\|u\|_{E^s}^2 \end{aligned} \tag{1.30}$$

uma vez que

$$\|A^{-t}A^s u\|^2_{E^t} = \|A^s u\|^2 = \|u\|^2_{E^s}.$$

Assim, de (1.29) e (1.30) segue (1.28).

Além disso, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} Q(z) &\geq C\|z\|^2_E \quad \text{para} \quad z \in E^+, \\ Q(z) &\leq -C\|z\|^2_E \quad \text{para} \quad z \in E^-. \end{aligned}$$

Observação 1.4 *As desigualdades acima expressam o fato da forma quadrática Q ser fortemente indefinida.*

Definição 1.1 *Uma função é dita radial (em x) quando depende apenas da distância a um ponto fixado em $\mathbb{R}^N$.*

Agora, utilizaremos esses resultados para redefinir o funcional associado ao sistema (1.19) em um espaço apropriado. Como já foi dito vamos precisar de espaços de Sobolev de ordem fracionária, a fim de formularmos corretamente a parte quadrática do funcional J. Além disso, como em problemas variacionais no $\mathbb{R}^N$ há uma perda de compacidade uma vez que não valem as imersões compactas de Sobolev em $\mathbb{R}^N$, para contornarmos este problema, vamos trabalhar no subespaço $H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)$ de $H^s(\mathbb{R}^N)$. Seja $H = L^2_{rad}(\mathbb{R}^N)$ o espaço das funções L^2 em $\mathbb{R}^N$ que são radiais. Seja $T = -\Delta + I$, onde I é a função identidade e $D(T) = H^2_{rad}(\mathbb{R}^N)$ que é o espaço das funções radiais em L^2 com derivada até segunda ordem em L^2. Para $0 \leq s \leq 2$, o espaço E^s é o domínio $D(T^{\frac{s}{2}})$, neste caso, o espaço E^s é o espaço de Sobolev $H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Assim, denotando $A = (-\Delta + I)^{\frac{1}{2}}$, temos, para $0 \leq s \leq 2$

$$E^s = D(A^s) = H^s_{rad}(\mathbb{R}^N).$$

Agora, temos o seguinte teorema de imersão (veja [12]). O caso $s = 1$ foi provado por [18].

Teorema 1.1 *Seja $s > 0$. Então a restrição à $H^s_{rad}(\mathbb{R}^N)$ da imersão de Sobolev de $W^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ em $L^\gamma(\mathbb{R}^N)$ é continua se $2 \leq \gamma \leq \frac{2N}{N-2s}$ e é compacta se $2 < \gamma < \frac{2N}{N-2s}$.*

Seja $E = H^s_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^t_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e a forma bilinear $B : E \times E \to \mathbb{R}$ definida por

$$B(z, \eta) = \int_{\mathbb{R}^N} (A^s u A^t \psi + A^s \phi A^t v), \quad \forall\ z = (u, v), \eta = (\phi, \psi) \in E,$$

e a correspondente forma quadrática por

$$Q(z) = \int_{\mathbb{R}^N} A^s u A^t v, \quad \forall\ z = (u, v) \in E,$$

esta forma quadrática irá substituir

$$\int \nabla u \nabla v$$

no funcional (1.20).

Assim, definimos o funcional $J : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(z) = \int_{\mathbb{R}^N} A^s u A^t v - \int_{\mathbb{R}^N} H(x, u, v) \tag{1.31}$$

para todo $z = (u, v) \in E$.

Proposição 1.3 *Suponha que $H \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2)$ satisfazendo as hipóteses (H_2), (H_3) e a seguinte condição de crescimento*

$$H_u(x, u, v) \le C(|u|^p + |v|^q)$$
$$H_v(x, u, v) \le C(|u|^p + |v|^q)$$

com $p, q > 1$ e

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{N}. \tag{1.32}$$

Então o funcional J dado por (1.31) está bem definido. Além disso, $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ com derivada dada por

$$\langle J'(z), \eta \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [A^s u A^t \psi + A^s \phi A^t v] - \int_{\mathbb{R}^N} [H_u(x, u, v)\phi + H_v(x, u, v)\psi]$$

para $z = (u, v), \eta = (\phi, \psi) \in E$.

Prova: Escreva $J(z) = \nu(z) - \omega(z)$, onde $\nu(z) = \int_{\mathbb{R}^N} A^s u A^t v$ e $\omega(z) = \int_{\mathbb{R}^N} H(x, u, v)$.

Mostremos que J está bem definido. Analogamente ao que fizemos para o caso de sistemas gradientes na Seção 1.1, mostramos que ω está bem definido . Então, verifiquemos que ν está bem definida, temos

$$\nu(z) = \int_{\mathbb{R}^N} A^s u A^t v = \langle A^s u, A^t v \rangle_{L^2} \le \|A^s u\|_{L^2} \|A^t v\|_{L^2} = \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^t},$$

assim, ν está bem definida para todo $z \in E$. Logo, J está bem definido.

Agora, mostremos que J é de classe C^1 em E. Primeiro, mostremos que ν é continuamente diferenciável. Sejam $z = (u, v), \eta = (\phi, \psi) \in E$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\nu(z+h\eta) - \nu(z)}{h} &= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^N} [A^s(u+h\phi)A^t(v+h\psi) - A^s u A^t v] \\
&= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^N} [(A^s u + hA^s\phi)(A^t v + hA^t\psi) - A^s u A^t v] \\
&= \frac{1}{h}\left[h\int_{\mathbb{R}^N} A^s u A^t \psi + h\int_{\mathbb{R}^N} A^s\phi A^t v + h^2\int_{\mathbb{R}^N} A^s\phi A^t\psi\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} A^s u A^t \psi + \int_{\mathbb{R}^N} A^s\phi A^t v + h\int_{\mathbb{R}^N} A^s\phi A^t\psi \\
&\to \int_{\mathbb{R}^N} A^s u A^t \psi + \int_{\mathbb{R}^N} A^s\phi A^t v
\end{aligned}$$

quando $h \to 0$.

Logo,

$$\langle \nu'(z), \eta\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} A^s u A^t \psi + \int_{\mathbb{R}^N} A^s\phi A^t v.$$

Em seguida, mostremos a continuidade de ν'. Sejam $z_1 = (u_1, v_1),\ z_2 = (u_2, v_2) \in E$. Então,

$$\|\nu'(z_1+z_2) - \nu'(z_1)\|_{H^{-s}\times H^{-t}} = \sup_{\|\eta\|\le 1} |\langle \nu'(z_1+z_2) - \nu'(z_1), \eta\rangle|.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
|\langle \nu'(z_1+z_2), \eta\rangle - \langle \nu'(z_1), \eta\rangle| &= |\langle A^s(u_1+u_2), A^t\psi\rangle_{L^2} + \langle A^s\phi, A^t(v_1+v_2)\rangle_{L^2} \\
&\quad - \langle A^s u_1, A^t\psi\rangle_{L^2} - \langle A^s\phi, A^t v_1\rangle_{L^2}| \\
&= |\langle A^s u_2, A^t\psi\rangle_{L^2} + \langle A^s\phi, A^t v_2\rangle_{L^2}|,
\end{aligned}$$

daí

$$\sup_{\|\eta\|\le 1} |\langle \nu'(z_1+z_2) - \nu'(z_1), \eta\rangle| \le \left|\langle A^s u_2, A^t\psi\rangle_{L^2} + \langle A^s\phi, A^t v_2\rangle_{L^2}\right|.$$

Logo,

$$\|\nu'(z_1+z_2) - \nu'(z_1)\|_{H^{-s}\times H^{-t}} \to 0$$

quando $z_2 \to 0$.

Novamente, de forma análoga ao que fizemos na Seção 1.1, mostra-se que ω é diferenciável, ω' é contínua e, além disso,

$$\begin{aligned}
\langle \omega'(z), \eta \rangle &= \lim_{h \to 0} \frac{\omega(z+h\eta) - \omega(z)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{H(x, u+h\phi, v+h\psi) - H(x,u,v)}{h} \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} [H_u(x,u,v)\phi + H_v(x,u,v)\psi].
\end{aligned}$$

Portanto, $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ e sua derivada é dada por

$$\begin{aligned}
\langle J'(z), \eta \rangle &= \langle \nu'(z), \eta \rangle - \langle \omega'(z), \eta \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} [A^s u A^t \psi + A^s \phi A^t v] - \int_{\mathbb{R}^N} [H_u(x,u,v)\phi + H_v(x,u,v)\psi].
\end{aligned}$$

■

Agora, como $J \in C^1(E, \mathbb{R})$, acrescentando sobre H certas hipóteses, estudaremos a existência e regularidade de soluções para um sistemas do tipo hamiltoniano. Este será nosso objetivo no Capítulo 3, onde buscaremos pontos críticos para o funcional J, os quais serão soluções fracas do sistema dado. Para a obtenção dos pontos críticos de J utilizaremos um Teorema de Linking em dimensão infinita, apresentaremos também um resultado de regularidade, o qual será provado utilizando-se um argumento *bootstrap*.

Capítulo 2

Existência de Solução para um Sistema Gradiente

Neste capítulo, estudaremos a existência de solução radial não trivial para o seguinte sistema de equações elípticas do tipo gradiente

$$\begin{cases} -\Delta u + u = F_u(u, v) \\ -\Delta v + v = F_v(u, v) \qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $N \geq 3$ e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função dada. Por simplicidade abordamos neste capítulo apenas o caso autônomo, isto é, F não depende de $x \in \mathbb{R}^N$. No entanto, o caso não autônomo pode ser mostrado de maneira completamente similar desde que F seja radial em $x \in \mathbb{R}^N$.

Assim como fizemos no Capítulo 1, escreveremos o sistema (2.1) da seguinte forma

$$\begin{cases} -\Delta U + U = \nabla F(U) \\ \quad U \in (H^1(\mathbb{R}^N))^2 \end{cases} \qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \tag{2.2}$$

O que fazemos neste capítulo é uma adaptação do Teorema devido a Strauss (veja [19]) que trata do problema escalar

$$\begin{cases} -\Delta u + u = |u|^{p-2}u \\ \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{2.3}$$

onde $N \geq 2$ e $2 < p < 2^*$.

Ressaltamos que os resultados aqui apresentados foram obtidos com base no que foi estudado no Capítulo 1 para sistemas gradientes e em [19], através de um teorema de ponto crítico bastante conhecido, o Teorema do Passo da Montanha (veja Teorema B.2 do Apêndice B), frequentemente utilizado para o caso de equações elípticas escalares. Com as adequações necessárias para o caso de sistemas gradientes, utilizamos este mesmo teorema na demonstração de nossos resultados. Em nosso estudo pretendemos obter soluções fracas radiais para o sistema (2.2). Questões como positividade e regularidade, que são consideradas no teorema (de Strauss) não foram consideradas aqui, pois objetivamos apenas utilizar o Teorema do Passo da Montanha para discutir a existência de soluções radiais para o sistema (2.2). Para isto, associamos a este sistema um funcional definido no espaço $(H^1(\mathbb{R}^N))^2$, cujos pontos críticos correspondem às soluções fracas do sistema (2.2). Procedemos da seguinte forma: verificamos que tal funcional quando restrito ao espaço $(H^1_{rad}(\mathbb{R}^N))^2$ (subespaço de todas as funções radias no espaço de Sobolev $(H^1(\mathbb{R}^N))^2$) satisfaz a condição de Palais-Smale (veja Definição B.7 do Apêndice B) e a geometria do passo da montanha, concluindo assim a existência de pontos críticos para o funcional restrito a $(H^1_{rad}(\mathbb{R}^N))^2$. Por fim, utilizando o Princípio de Criticalidade Simétrica, obtemos a existência de ponto crítico em $(H^1(\mathbb{R}^N))^2$, o qual é a solução fraca procurada. O objetivo de restringir o funcional para o espaço das funções radiais é recuperar sua compacidade, a qual é perdida ao se trabalhar com domínios ilimitados, neste caso, todo o $\mathbb{R}^N$.

Consideremos as seguintes hipóteses sobre a não-linearidade de F:

(F_0) $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$,

(F_1) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\nabla F(s,t)| \leq C(1 + |s|^p + |t|^q), \quad \forall\ (s,t) \in \mathbb{R}^2$$

onde $1 < p, q < 2^* - 1$,

(F_2) $|\nabla F(s,t)| = o(|(s,t)|)$ quando $(s,t) \to 0$,

(F_3) Existe $\mu > 2$ tal que

$$T\nabla F(T) \geq \mu F(T) > 0, \quad \forall\ T \in \mathbb{R}^2, \quad \text{com} \quad T \neq 0,$$

(F_4) $F(0,0) = F_s(0,t) = F_t(s,0) = 0, \quad \forall\ (s,t) \in \mathbb{R}^2$.

Associamos a (2.2) o funcional $I : (H^1(\mathbb{R}^N))^2 \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(U) = \frac{1}{2}\|U\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(U). \tag{2.4}$$

Assim, temos como objetivo buscar pontos críticos para o funcional I. Observemos que o funcional I está bem definido e, mais ainda, é de classe C^1 (demonstração no Capítulo 1), além disso, sua derivada é dada por

$$\langle I'(U), \Phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi) + \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla \psi + v\psi) - \int_{\mathbb{R}^N} (F_u(u,v)\varphi + F_v(u,v)\psi)$$

para todo $U = (u,v), \Phi = (\varphi, \psi) \in (H^1(\mathbb{R}^N))^2$.

Dizemos que $U = (u,v) \in (H^1(\mathbb{R}^N))^2$ é solução fraca de (2.2) se U satisfaz o sistema

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^N} F_u(u,v)\varphi, \quad \forall\ \varphi \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v \nabla \psi + v\psi) &= \int_{\mathbb{R}^N} F_v(u,v)\psi, \quad \forall\ \psi \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Assim, pontos críticos de I são soluções fracas de (2.2).

2.1 Princípio de Criticalidade Simétrica

Nesta seção apresentamos o Princípio de Criticalidade Simétrica. Inicialmente introduzimos algumas noções sobre acão de grupo que se fazem necessárias para uma melhor compreensão deste resultado. A importância de tal resultado deve-se ao fato de precisarmos contornar o problema da falta de compacidade, a qual é perdida por estarmos trabalhando em um domínio ilimitado. Assim, para resolver este problema e recuperar tal compacidade procuramos os pontos críticos do funcional restrito ao subespaço das funções radialmente simétricas de $(H^1(\mathbb{R}^N))^2$. Em seguida, o Princípio de Criticalidade Simétrica garante a existência de ponto crítico em todo o espaço $(H^1(\mathbb{R}^N))^2$.

Definição 2.1 *Uma ação de um grupo topológico G sobre um espaço vetorial H é uma aplicação contínua*

$$\begin{aligned} G \times H &\to H \\ (g,u) &\mapsto gu \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes condições:

(*a*) $1u = u$,

(*b*) $(gh)(u) = g(hu)$,

(*c*) $g : H \to H$ *é linear.*

Observação 2.1 *Se* $\|gu\| = \|u\|$ *para todo* $u \in H$, *a ação é dita isométrica.*

Definição 2.2 *Considere a ação de um grupo topológico* G *sobre um espaço vetorial normado* H.

(*a*) *O espaço dos pontos invariantes desta ação é o subespaço fechado de* H *definido por*

$$Fix(G) = \{u \in H : gu = u, \forall\ g \in G\}.$$

(*b*) *Um conjunto* $A \subset H$ *é invariante se* $g(A) = A$, $\forall\ g \in G$.

(*c*) *Um funcional* $I : H \to \mathbb{R}$ *é invariante se* $I \circ g = I$, $\forall\ g \in G$.

(*d*) *Uma aplicação* $f : H \to H$ *é equivariante se* $f \circ g = g \circ f$, $\forall\ g \in G$.

Definição 2.3 (*a*) *Sejam* G *um subgrupo de* $\mathcal{O}(N)$ *e* Ω *um conjunto aberto invariante de* $\mathbb{R}^N$. *A ação de* $G \times G$ *sobre* $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ *é definida por*

$$(fu(x), gv(x)) = (u(f^{-1}x), v(g^{-1}x)). \tag{2.5}$$

Note que a definição acima faz sentido, pois se $x \in \Omega$ *então* $f^{-1}x, g^{-1}x \in \Omega$.

(*b*) *O subespaço das funções invariantes de* $H^1(\Omega)$ *é definido por*

$$H^1_G(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : gu = u, \forall\ g \in G\}.$$

Deste modo, definimos o espaço $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ por:

$$H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : gu = u, \forall\ g \in \mathcal{O}(N)\}.$$

Teorema 2.1 (Princípio de Criticalidade Simétrica) *Suponha que a ação de um grupo topológico* G *sobre um espaço de Hilbert* H *seja isométrica. Se* $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ *é invariante e* u *é ponto crítico de* I *restrito a* $Fix(G)$, *então* u *é um ponto crítico de* I *em* H.

Prova: Desde que I é invariante, para cada $g \in G$ e $u \in H$, temos

$$\begin{aligned}
\langle I'(gu), v\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{I(gu+tv)-I(gu)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{I(g(u+tg^{-1}v))-I(gu)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{I(u+tg^{-1}v)-I(u)}{t} = \langle I'(u), g^{-1}v\rangle. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Representação de Riesz (veja Teorema B.6 do Apêndice B), podemos definir $\nabla I : H \to H$ por

$$\langle I'(u), v\rangle = \langle \nabla I(u), v\rangle \quad \text{e} \quad \|I'(u)\| = \|\nabla I(u)\|, \quad \forall\ v \in H.$$

Portanto,

$$\langle I'(gu), v\rangle = \langle \nabla I(gu), v\rangle \quad \text{e} \quad \langle I'(u), g^{-1}v\rangle = \langle \nabla I(u), g^{-1}v\rangle, \quad \forall\ v \in H.$$

Logo, por (2.6), segue que

$$\langle \nabla I(gu), v\rangle = \langle \nabla I(u), g^{-1}v\rangle.$$

Além disso, ∇I é equivariante com relação à ação de grupo. De fato, sendo a ação isométrica temos

$$\begin{aligned}
\|\nabla I(u) + g^{-1}v\|^2 &= \|\nabla I(u)\|^2 + 2\langle \nabla I(u), g^{-1}v\rangle + \|g^{-1}v\|^2 \\
&= \|\nabla I(u)\|^2 + 2\langle \nabla I(u), g^{-1}v\rangle + \|v\|^2. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Temos também,

$$\begin{aligned}
\|g\nabla I(u) + v\|^2 &= \|g\nabla I(u)\|^2 + 2\langle g\nabla I(u), v\rangle + \|v\|^2 \\
&= \|\nabla I(u)\|^2 + 2\langle g\nabla I(u), v\rangle + \|v\|^2. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Note que,

$$\|g\nabla I(u) + v\|^2 = \|g\nabla I(u) + g(g^{-1}v)\|^2 = \|g(\nabla I(u) + g^{-1}v)\|^2 = \|\nabla I(u) + g^{-1}v\|^2.$$

De (2.7) e (2.8) segue que

$$\langle \nabla I(u), g^{-1}v\rangle = \langle g\nabla I(u), v\rangle.$$

Por (2.6)

$$\langle \nabla I(gu), v\rangle = \langle g\nabla I(u), v\rangle, \quad \forall\ v \in H,$$

donde obtemos que

$$\nabla I(gu) = g\nabla I(u). \tag{2.9}$$

Agora, suponha que u é um ponto crítico de I restrito a $Fix(G)$. Como $u \in Fix(G)$, $gu = u$, $\forall\ g \in G$. Assim, por (2.9), temos

$$\nabla I(u) \in Fix(G).$$

Como u é ponto crítico de I restrito a $Fix(G)$, temos

$$\langle \nabla I(u), v\rangle = \langle I'(u), v\rangle = 0, \quad \forall\ v \in Fix(G),$$

em particular, para $v = \nabla I(u)$, seque que

$$\|\nabla I(u)\|^2 = \langle \nabla I(u), \nabla I(u)\rangle = 0,$$

mostrando que $\nabla I(u) = 0$ em H. Portanto, u é ponto crítico de I em H.

■

2.2 Existência de Solução Radial

O seguinte teorema é uma adaptação de um teorema devido a Strauss, dado por [19]. Aqui provamos a existência de uma solução radial não trivial para o sistema (2.2). Para isto, buscamos pontos críticos para o funcional I dado por (2.4). Porém, para contornar o problema da falta de compacidade devido ao fato de estarmos trabalhando em $\mathbb{R}^N$, restringimos o funcional I ao subespaço $(H^1_{rad}(\mathbb{R}^N))^2$ de $(H^1(\mathbb{R}^N))^2$ e buscamos pontos críticos neste subespaço via Teorema do Passo da Montanha. Em seguida, o Princípio de Criticalidade Simétrica garante a existência de pontos críticos em todo o espaço $(H^1(\mathbb{R}^N))^2$.

Teorema 2.2 *Se $N \geq 3$ e $1 < p, q < 2^* - 1$, supondo $(F_0) - (F_4)$ então (2.2) tem uma solução radial não trivial.*

Prova: Vamos considerar a ação definida em (2.5) do grupo $(\mathcal{O}(N))^2$ sobre $(H^1(\mathbb{R}^N))^2$ e trabalhar com o funcional I, definido em (2.4), restrito a $(H^1_{rad}(\mathbb{R}^N))^2$.

Mostremos que o funcional I satisfaz a condição (PS). Seja $(U_n) = (u_n, v_n) \subset (H^1_{rad}(\mathbb{R}^N))^2$ uma subsequência tal que $|I(U_n)| \leq C$ e $I'(U_n) \to 0$. Para n suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned}
I(U_n) - \frac{1}{\mu}\langle \nabla I(U_n), U_n\rangle &\leq \left|I(U_n) - \frac{1}{\mu}\langle \nabla I(U_n), U_n\rangle\right| \\
&\leq |I(U_n)| + \frac{1}{\mu}|\langle \nabla I(U_n), U_n\rangle| \\
&\leq |I(U_n)| + \frac{1}{\mu}\|\nabla I(U_n)\|\|U_n\| \\
&\leq C + C\|U_n\|. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Por outro lado, de (F_3), temos

$$\begin{aligned}
I(U_n) - \frac{1}{\mu}\langle \nabla I(U_n), U_n\rangle &= \frac{1}{2}\|U_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(U_n) - \frac{1}{\mu}\|U_n\|^2 + \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla F(U_n)U_n \\
&\geq \frac{1}{2}\|U_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(U_n) - \frac{1}{\mu}\|U_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} F(U_n) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|U_n\|^2. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

De (2.10) e (2.11) segue que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|U_n\|^2 \leq C + C\|U_n\|. \qquad (2.12)$$

Logo, (U_n) deve ser limitada em $(H^1_{rad}(\mathbb{R}^N))^2$, caso contrário, a menos de subsequência $\|U_n\| \to +\infty$. Então, de (2.12), teríamos

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \leq \frac{C}{\|U_n\|^2} + \frac{C}{\|U_n\|} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Daí, $\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \leq 0$, isto é, $\mu \leq 2$ o que é uma contradição. Assim, a menos de subsequência, temos

$$\begin{aligned}
U_n &\rightharpoonup U \quad \text{em} \quad (H^1_{rad}(\mathbb{R}^N))^2 \\
U_n &\to U \quad \text{em} \quad L^{p+1}(\mathbb{R}^N) \times L^{q+1}(\mathbb{R}^N) \\
U_n &\to U \quad \text{q.t.p. em} \quad \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N
\end{aligned}$$

e existe $W = (w_1, w_2) \in L^{p+1}(\mathbb{R}^N) \times L^{q+1}(\mathbb{R}^N)$ tal que $|u_n| \leq w_1$ e $|v_n| \leq w_2$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Daí,

$$\begin{aligned}
|u_n|^p &\leq w_1^p \in L^s(\mathbb{R}^N), \quad s = \frac{p+1}{p}, \\
|v_n|^q &\leq w_2^q \in L^r(\mathbb{R}^N), \quad r = \frac{q+1}{q}.
\end{aligned}$$

Assim, por (F_1), temos

$$\begin{aligned}|\nabla F(U_n)| &\leq C(1+|u_n|^p+|v_n|^q)\\ &\leq C(1+w_1^p+w_2^q)\in L^s\times L^r.\end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}\|U_n-U\|^2 &= \|U_n\|^2-2\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_n\nabla u+u_nu+\nabla v_n\nabla v+v_nv)+\|U\|^2\\ &= \langle\nabla I(U_n),U_n-U\rangle-\langle\nabla I(U),U_n-U\rangle+\int_{\mathbb{R}^N}[\nabla F(U_n)-\nabla F(U)](U_n-U).\end{aligned}$$

Considere

$$A_n=\left|\int_{\mathbb{R}^N}[\nabla F(U_n)-\nabla F(U)](U_n-U)\right|,$$

pela desigualdade de Hölder (veja Teorema B.7 do Apêndice B), obtemos

$$\begin{aligned}A_n &\leq \|\nabla F(U_n)-\nabla F(U)\|_{L^s\times L^r}\|U_n-U\|_{L^{p+1}\times L^{q+1}}\\ &\leq (\|\nabla F(U_n)\|_{L^s\times L^r}+\|\nabla F(U)\|_{L^s\times L^r})\|U_n-U\|_{L^{p+1}\times L^{q+1}}\\ &\leq [C(1+\|w_1^p\|_{L^s}+\|w_2^q\|_{L^r})+\|\nabla F(U)\|_{L^s\times L^r}]\|U_n-U\|_{L^{p+1}\times L^{q+1}}\\ &\to 0.\end{aligned}$$

Agora, desde que $\nabla I(U_n)\to 0$ e (U_n) é limitada, temos

$$|\langle\nabla I(U_n),U_n-U\rangle|\leq\|\nabla I(U_n)\|\|U_n-U\|\to 0.$$

Além disso, como $U_n\rightharpoonup U$ em $(H^1_{rad}(\mathbb{R}^N))^2$, então

$$\langle\nabla I(U),U_n-U\rangle\to 0.$$

Portanto,

$$\|U_n-U\|\to 0.$$

Para concluirmos, verifiquemos que I satisfaz a geometria do passo da montanha.

Condição (i) da geometria: Pelo Lema 1.2 do Capítulo 1, temos

$$F(u,v)\leq\varepsilon(|u|^2+|v|^2)+C(|u|^{p+1}+|v|^{q+1}).\tag{2.13}$$

Assim, de (2.13), segue que

$$\begin{aligned} I(U) &= \frac{1}{2}\|U\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(U) \\ &\geq \frac{1}{2}\|U\|^2 - \varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2 - \varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}|v|^2 - C\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1} - C\int_{\mathbb{R}^N}|v|^{q+1} \\ &= \frac{1}{2}\|U\|^2 - \varepsilon\|u\|_{L^2}^2 - \varepsilon\|v\|_{L^2}^2 - C\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} - C\|v\|_{L^{q+1}}^{q+1} \\ &\geq \frac{1}{2}\|U\|^2 - \varepsilon\|U\|_{L^2\times L^2}^2 - C\|U\|_{L^{p+1}\times L^{q+1}}^{p+1} - C\|U\|_{L^{p+1}\times L^{q+1}}^{q+1}. \end{aligned}$$

Daí, por imersão de Sobolev

$$\begin{aligned} I(U) &\geq \frac{1}{2}\|U\|^2 - \varepsilon\|U\|^2 - C\|U\|^{p+1} - C\|U\|^{q+1} \\ &= \|U\|^2\left(\frac{1}{2} - \varepsilon - C\|U\|^{p-1} - C\|U\|^{q-1}\right). \end{aligned}$$

Se $\|U\| = \rho$, então

$$I(U) \geq \rho^2\left(\frac{1}{2} - \varepsilon - C\rho^{p-1} - C\rho^{q-1}\right) = \alpha > 0$$

para ρ suficientemente pequeno.

Portanto,

$$\inf_{\|U\|=\rho} I(U) \geq \alpha > 0.$$

Condição (ii) da geometria:

Afirmação 2.2.1 *Para todo $u \in \mathbb{R}$, temos*

$$F(u,0) \geq C|u|^\mu - D. \tag{2.14}$$

De fato, por (F_3), temos

$$uF_u(u,0) = (u,0)(F_u(u,0), F_t(u,0)) \geq \mu F(u,0).$$

Se $u \geq 1$, obtemos

$$\int_1^u \frac{F_s(s,0)}{F(s,0)}ds \geq \mu\int_1^u \frac{1}{s}ds$$

logo,

$$\ln F(u,0) - \ln F(1,0) \geq \mu \ln u \;\Rightarrow\; \ln\frac{F(u,0)}{F(1,0)} \geq \ln u^\mu$$

donde segue que,

$$F(u,0) \geq F(1,0)u^\mu.$$

Assim,

$$F(u,0) \geq C_2 u^{\mu}, \quad \forall\ u \geq 1. \tag{2.15}$$

Se $u \leq -1$, então

$$\int_u^{-1} \frac{F_s(s,0)}{F(s,0)} ds \leq \mu \int_u^{-1} \frac{1}{s} ds.$$

Analogamente ao caso anterior, obtemos

$$F(u,0) \geq C_3 |u|^{\mu}, \quad \forall\ u \leq -1. \tag{2.16}$$

Seja $C = \min\{C_2, C_3\}$, por (2.15) e (2.16), obtemos

$$F(u,0) \geq C|u|^{\mu}, \quad \forall\ |u| \geq 1. \tag{2.17}$$

Por outro lado,

$$F(u,0) \geq M, \quad \text{para} \quad |u| \leq 1,$$

onde $M = \min_{u \in [-1,1]} F(u,0)$. Considere $D > 0$ de modo que

$$D \geq C - M \ \Rightarrow\ D \geq C|u|^{\mu} - M, \quad \forall\ |u| \leq 1,$$

ou seja,

$$M \geq C|u|^{\mu} - D, \quad \forall\ |u| \leq 1.$$

Assim,

$$F(u,0) \geq C|u|^{\mu} - D, \quad \forall\ |u| \leq 1 \tag{2.18}$$

e de (2.17),

$$F(u,0) \geq C|u|^{\mu} \geq C|u|^{\mu} - D, \quad \forall\ |u| \geq 1. \tag{2.19}$$

Segue de (2.18) e (2.19) que

$$F(u,0) \geq C|u|^{\mu} - D, \quad \forall\ u \in \mathbb{R}. \tag{2.20}$$

mostrando, assim, a afirmação 2.2.1.

Seja $U = (u,0)$ com $u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N) \cap H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ fixo. Então, para $t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} I(t(u,0)) &= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(t(u,0)) \\ &= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \int_K F(t(u,0)) \end{aligned}$$

onde $K = \operatorname{supp} u$. Daí, por (2.20)

$$\begin{aligned} I(t(u,0)) &\leq \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - C\int_K |tu|^\mu + D\int_K 1 \\ &= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - Ct^\mu \int_{\mathbb{R}^N} |u|^\mu + D|K| \\ &= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - Ct^\mu \|u\|^\mu_{L^\mu} + D|K| \end{aligned} \tag{2.21}$$

desde que $\mu > 2$ passando o limite em (2.21) quando $t \to +\infty$, concluímos que

$$I(t(u,0)) \to -\infty.$$

Segue que existe $t_0 > 0$ tal que

$$\|t_0(u,0)\| > \rho \quad \text{e} \quad I(t_0(u,0)) < 0,$$

onde podemos escolher $e = t_0(u,0)$. Assim, mostramos que I satisfaz a geometria do passo da montanha. Portanto, pelo Teorema do Passo da Montanha, obtemos um ponto crítico não trivial U de I em $(H^1_{rad}(\mathbb{R}^N))^2$. Como a ação de $(\mathcal{O}(N))^2$ sobre $(H^1(\mathbb{R}^N))^2$ é isométrica e observando que I é invariante, então, pelo Princípio de Criticalidade Simétrica, temos que U é um ponto crítico não trivial de I em $H^1(\mathbb{R}^N)^2$.

■

No capítulo seguinte, apresentaremos condições que garantem a existência e regularidade de soluções para um sistema de equações elípticas do tipo hamiltoniano. Utilizaremos, para isto, um Teorema de Linking que garante a existência de solução e um argumento *bootstrap* de onde obtemos a regularidade de tal solução.

Capítulo 3

Existência e Regularidade de Solução para um Sistema Hamiltoniano

Neste Capítulo, estudaremos resultados apresentados no artigo de Sirakov [17], os quais são extensões de resultados apresentados por Figueiredo e Yang [6]. Além disso, as provas apresentadas em [17] são diferentes das apresentadas em [6]. Em nosso trabalho, faremos um detalhamento dos resultados contidos em [17]. Nosso objetivo é estabelecer a existência e regularidade de uma solução radial para o seguinte problema elíptico do tipo hamiltoniano.

$$\begin{cases} -\Delta u + u = g(x, v) \\ -\Delta v + v = f(x, u) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.1}$$

onde $N \geq 3$ e $f, g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas. Consideremos as seguintes hipóteses.

(H_0) Existem constantes positivas C e δ, tal que

$$|f(x,t)| \leq C|t| \quad \text{e} \quad |g(x,t)| \leq C|t| \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad |t| \leq \delta;$$

(H_1) Para todo $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} f(x,0) &= g(x,0) = 0, \\ \lim_{t \to 0} \frac{f(x,t)}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{g(x,t)}{t} = 0; \end{aligned}$$

(H_2) Existem constantes positivas C, p e q, tais que para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in \mathbb{R}$

$$|f(x,t)| \leq C(1+|t|^p),$$
$$|g(x,t)| \leq C(1+|t|^q),$$

onde $p, q > 1$ e satisfazem a desigualdade

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{N}; \tag{3.2}$$

(H_3) Existe um número $\mu > 2$ tal que

$$tf(x,t) \geq \mu F(x,t) > 0,$$
$$tg(x,t) \geq \mu G(x,t) > 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, onde $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$ e $G(x,t) = \int_0^t g(x,s)ds$;

(H_4) Considere μ dado em (H_3), tal que

$$\liminf_{t \to 0} \frac{f(x,t)}{|t|^{\mu-1}} > 0,$$
$$\liminf_{t \to 0} \frac{g(x,t)}{|t|^{\mu-1}} > 0.$$

Note que, embora a hipótese (H_1) implique em (H_0), justifica-se a exigência de ambas as hipóteses pelo fato de trabalharmos com cada uma delas separadamente. A hipótese (H_2) expressa o fato do sistema ser subcrítico. Na hipótese (H_3) temos uma condição do tipo Ambrosetti-Rabinowitz que indica a superlinearidade do sistema. A desigualdade (3.2) descreve a região do plano onde o par (p,q) deve situar-se de modo que as técnicas variacionais podem ser usadas para solucionar (3.1). Esta região é limitada pela chamada hipérbole crítica (veja Figura 1.2), a qual exprime o fato de que um dos números p ou q podem ser maior que o expoente crítico $\frac{N+2}{N-2}$ de Sobolev, contanto que o outro seja pequeno o suficiente para compensar (note que, quando $p = q$, (3.2) se reduz a $p < \frac{N+2}{N-2}$). Observe ainda que, o sistema hamiltoniano abordado neste capítulo é mais simples que o apresentado no Capítulo 1, uma vez que, aqui trabalhamos com apenas uma variável. No entanto o sistema dado neste capítulo decorre do sistema hamiltoniano apresentado no Capítulo 1, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta u + u = H_v(x,u,v) \\ -\Delta v + v = H_u(x,u,v) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.3}$$

onde $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ é um função de classe C^1. Basta considerarmos $H(x,u,v) = F(x,u) + G(x,v)$ com $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$ e $G(x,v) = \int_0^v g(x,s)ds$. Note ainda que, o fato de trabalharmos com apenas uma variável nos permite estabelecer as hipóteses de forma independente.

Observação 3.1 *Em [17] são utilizadas as hipóteses* (H_2) *e* (H_3) *para provar a desigualdade dada no Lema 3.1.1 (veja adiante). No entanto, percebemos que não é possível verificar tal desigualdade utilizando apenas essas duas hipóteses, por esse motivo acrescentamos a hipótese* (H_4) *a qual juntamente com as hipóteses já citadas fornecem o Lema 3.1.1. Note ainda que, no caso de sistemas gradientes, estudado no Capítulo 2, não foi necessário adicionar tal hipótese, uma vez que, neste caso, podemos acrescentar uma constante à desigualdade citada e escolher uma função* $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ *de modo que podemos trabalhar sobre o* $\operatorname{supp} u$.

Observação 3.2 *Note que a constante* μ *utilizada em* (H_4) *poderia ser diferente da utilizada em* (H_3)*, porém por simplicidade optamos por escolher a mesma.*

3.1 Preliminares

Associado ao sistema (3.1) definimos o seguinte funcional

$$J(z) = J(u,v) = \int_{\mathbb{R}^N} A^s u A^t v - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,v) \tag{3.4}$$

definido no espaço $E = H^s_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^t_{rad}(\mathbb{R}^N)$, onde E é um espaço de Hilbert, J está bem definido e $J \in C^1(E,\mathbb{R})$. Portanto, como

$$\langle J'(z), \eta \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (A^s u A^t \psi + A^s \phi A^t v) - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)\phi - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,v)\psi$$

onde $\eta = (\phi, \psi)$, $z = (u,v)$ será uma solução fraca de (3.1) se $z = (u,v)$ for um ponto crítico do funcional J dado por (3.4). Logo teremos como objetivo determinar pontos críticos de J.

Note que, a parte quadrática de J, $Q(z) = \int_{\mathbb{R}^N} A^s u A^t v$, é fortemente indefinida, isto é, se o espaço E for decomposto em soma direta dos subespaços E^+ e E^- de dimensão infinita, implicará que, $Q(z)$ será positivo definido em E^+ e negativo definido em E^-.

Para a obtenção dos pontos críticos de J utilizaremos um Teorema de Linking em dimensão infinita introduzido por Li e Willem em 1995 (veja [10]), observe que não podemos utilizar o teorema clássico já que este requer que um dos subespaços E^+ e E^- tenha dimensão finita.

Antes de enunciarmos os resultados deste capítulo apresentaremos algumas definições.

Definição 3.1 *O par* (u, v) *é dito solução forte de* (3.1)*, se satisfaz* (3.1) *em quase todo ponto e* $u \in W^{2,\frac{p+1}{p}}(\mathbb{R}^N)$*,* $v \in W^{2,\frac{q+1}{q}}(\mathbb{R}^N)$*.*

Definição 3.2 *O par* (u, v) *é chamado solução fraca de* (3.1) *se satisfaz a formulação fraca de* (3.1) *e* $(u, v) \in H^s(\mathbb{R}^N) \times H^t(\mathbb{R}^N)$*, onde* s *e* t *são números positivos escolhidos adequadamente (Veja Teorema 3.1 para uma definição precisa).*

Observação 3.3 *Em particular,* s *e* t *são escolhidos de modo que* $H^s(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$ *e* $H^t(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q+1}(\mathbb{R}^N)$*.*

Observação 3.4 *Neste capítulo, todos os espaços de funções são tomados sobre o* $\mathbb{R}^N$*.*

3.2 Existência de Solução

Nesta seção, é apresentado o teorema de existência de solução de (3.1). Aqui utilizaremos um teorema de linking em dimensão infinita para provarmos o seguinte resultado:

Teorema 3.1 *Suponha* (H_1)*,* (H_2) *e* (H_3)*. Se* f *e* g *são radias em* x*, então existe uma solução radial fraca não trivial de (3.1).*

Prova: Considere o funcional

$$J(z) = J(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} A^s u A^t v - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, v)$$

definido no espaço $E = H^s_{rad} \times H^t_{rad}$, onde H^s_{rad} é o subespaço de todas as funções radiais no espaço de Sobolev fracional H^s, s e t são números reais positivos tais que $s + t = 2$ e $A^s : H^s \to L^2$ é um isomorfismo. Note que $\|u\|_{H^s} = \|A^s u\|_{L^2}$.

Em E consideramos a norma

$$\|z\|_E^2 = \|(u, v)\|_E^2 = \|u\|_{H^s}^2 + \|v\|_{H^t}^2.$$

Devido a (3.2) podemos escolher $0 < s < 2$, tal que

$$s < \frac{N}{2}, \quad 2 - s < \frac{N}{2}, \quad \frac{N(p-1)}{2(p+1)} < s < \frac{4(q+1) - N(q-1)}{2(q+1)}$$

e fazemos $t = 2 - s$. Assim, obtemos

$$s > \frac{N(p-1)}{2(p+1)} = \frac{N(p+1) - 2N}{2(p+1)} = \frac{N}{2} - \frac{N}{p+1} \Rightarrow$$
$$\frac{N}{p+1} > \frac{N}{2} - s \Rightarrow \frac{1}{p+1} > \frac{1}{2} - \frac{s}{N} \Rightarrow p + 1 < \frac{2N}{N - 2s}$$

e

$$s < \frac{4(q+1) - N(q-1)}{2(q+1)} = \frac{4(q+1) - N(q+1) + 2N}{2(q+1)} = 2 - \frac{N}{2} + \frac{N}{q+1} \Rightarrow$$
$$\frac{N}{2} - 2 + s < \frac{N}{q+1} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{2-s}{N} < \frac{1}{q+1} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{t}{N} < \frac{1}{q+1} \Rightarrow q + 1 < \frac{2N}{N - 2t}$$

o que implica, pelo Teorema 1.1, que as imersões $H^s_{rad} \hookrightarrow L^{p+1}$ e $H^t_{rad} \hookrightarrow L^{q+1}$ existem e são compactas.

A derivada de J é dada por

$$\langle J'(z), \eta \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (A^s u A^t \psi + A^s \phi A^t v) - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)\phi - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,v)\psi$$

para qualquer $z = (u,v), \eta = (\phi, \psi) \in E$. Fazendo $\eta = (\phi, 0)$ e $\eta = (0, \psi)$ obtemos a formulação fraca de (3.1), dada pelo sistema abaixo

$$\int_{\mathbb{R}^N} A^s \phi A^t v = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)\phi, \quad \forall\ \phi \in H^s_{rad}$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} A^s u A^t \psi = \int_{\mathbb{R}^N} g(x,v)\psi, \quad \forall\ \psi \in H^t_{rad}.$$

Em outras palavras, pontos críticos de J são soluções fracas de (3.1).

A fim de buscarmos soluções fracas para o funcional J, utilizaremos um teorema de linking em dimensão infinita, devido a Li e Willem (veja [10]). Vejamos este resultado.

Sejam E^1 e E^2 espaços de Hilbert cujas bases são $\{e_i^k\}_{i=1}^{\infty}$, $k = 1, 2$. Sejam $E = E^1 \times E^2$ e $E_n = E_n^+ \oplus E_n^-$, onde $E_n^+ = \text{span}\{(e_i^1, e_i^2)\}_{i=1}^n$ e $E_n^- = \text{span}\{(e_i^1, -e_i^2)\}_{i=1}^n$. Fazendo $E^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+$ e $E^- = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^-$, temos $E = E^+ \oplus E^-$.

Teorema 3.1.1 (Li-Willem, [10]) *Seja E um espaço de Hilbert com $E = E^+ \oplus E^-$. Suponha que $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ e satisfaz as seguintes condições:*

(**LW1**) *J tem um linking local em 0, isto é, para algum $r > 0$*

$$J(z) \geq 0 \quad se \quad z \in E^+ \cap \{z \in E : \|z\|_E \leq r\} \qquad e$$
$$J(z) \leq 0 \quad se \quad z \in E^- \cap \{z \in E : \|z\|_E \leq r\};$$

(**LW2**) *J é limitado em todo subconjunto limitado de E;*

(**LW3**) *Para todo n*

$$J(z) \to -\infty \quad com \quad z \in E_n^+ \oplus E^- \quad e \quad \|z\|_E \to +\infty;$$

(**LW4**) *Toda sequência $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ tal que*

$$z_n \in E_n, \tag{3.5}$$
$$|J(z_n)| \leq C, \tag{3.6}$$
$$|\langle J'(z_n), \eta\rangle| \leq o(1)\|\eta\|_E, \quad \eta \in E_n \tag{3.7}$$

é precompacta na topologia forte de E.

Então J tem um ponto crítico não trivial.

Em nosso caso escrevemos $E = E^+ \oplus E^-$ com

$$E^+ = \{(u, A^{-t}A^s u) : u \in H^s_{rad}\},$$
$$E^- = \{(u, -A^{-t}A^s u) : u \in H^s_{rad}\}.$$

De fato, para qualquer $(u, v) \in E$, temos

$$(u, v) = (w_+, A^{-t}A^s w_+) + (w_-, -A^{-t}A^s w_-),$$

onde

$$w_+ = \frac{u + A^{-s}A^t v}{2} \in H^s \quad \text{e} \quad w_- = \frac{u - A^{-s}A^t v}{2} \in H^s.$$

Agora, verifiquemos que as hipóteses do Teorema de Li-Willem são satisfeitas.

Prova de (LW1). De (H_1) e (H_2) segue que, para todo $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$, tal que

$$|f(x,t)| \leq \varepsilon|t| + C_\varepsilon|t|^p,$$
$$|F(x,t)| \leq \varepsilon\frac{|t|^2}{2} + C_\varepsilon|t|^{p+1} \tag{3.8}$$

pois,

$$\begin{aligned}|F(x,t)| &= \left|\int_0^t f(x,s)ds\right| \leq \int_0^t |f(x,s)|ds \leq \varepsilon \int_0^t |s|ds + C_\varepsilon \int_0^t |s|^p ds \\ &= \varepsilon\frac{|t|^2}{2} + C_\varepsilon |t|^{p+1}.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}|g(x,t)| &\leq \varepsilon|t| + C_\varepsilon|t|^q, \\ |G(x,t)| &\leq \varepsilon\frac{|t|^2}{2} + C_\varepsilon|t|^{q+1}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Assim, seja $z = (u, A^{-t}A^s u) \in E^+$. Notemos que (3.8) e (3.9) implicam

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u) \leq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 + C\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} = \frac{1}{4}\|u\|^2_{L^2} + C\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}} \tag{3.10}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} G(x, A^{-t}A^s u) &\leq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} |A^{-t}A^s u|^2 + C\int_{\mathbb{R}^N} |A^{-t}A^s u|^{q+1} \\ &= \frac{1}{4}\|A^{s-t}u\|^2_{L^2} + C\|A^{-t}A^s u\|^{q+1}_{L^{q+1}} \\ &= \frac{1}{4}\|u\|^2_{H^{s-t}} + C\|A^{-t}A^s u\|^{q+1}_{L^{q+1}}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Além disso,

$$\|z\|^2_E = \|u\|^2_{H^s} + \|A^{-t}A^s u\|^2_{H^t} = \|u\|^2_{H^s} + \|A^s u\|^2_{L^2} = \|u\|^2_{H^s} + \|u\|^2_{H^s} = 2\|u\|^2_{H^s} \tag{3.12}$$

e usando o fato que

$$\begin{aligned}H^s \hookrightarrow L^{p+1} &\Rightarrow \|u\|_{L^{p+1}} \leq C\|u\|_{H^s} \\ H^t \hookrightarrow L^{q+1} &\Rightarrow \|u\|_{L^{q+1}} \leq C\|u\|_{H^t}\end{aligned} \tag{3.13}$$

obtemos de (3.10), (3.11), (3.12) e (3.13), que

$$\begin{aligned}J(z) &= \int_{\mathbb{R}^N} A^s u A^s u - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, A^{-t}A^s u) \\ &= \|A^s u\|^2_{L^2} - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, A^{-t}A^s u) \\ &\geq \|u\|^2_{H^s} - \frac{1}{4}\|u\|^2_{L^2} - C\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}} - \frac{1}{4}\|u\|^2_{H^{s-t}} - C\|A^{-t}A^s u\|^{q+1}_{L^{q+1}} \\ &\geq \|u\|^2_{H^s} - \frac{1}{4}\|u\|^2_{H^s} - C\|u\|^{p+1}_{H^s} - \frac{1}{4}\|u\|^2_{H^s} - C\|A^{-t}A^s u\|^{q+1}_{H^t} \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^s} - C\|u\|^{p+1}_{H^s} - C\|A^{-t}A^s u\|^{q+1}_{H^t} \\ &\geq \frac{1}{4}\|z\|^2_E - C\|z\|^{p+1}_E - C\|z\|^{q+1}_E \\ &\geq C\|z\|^2_E.\end{aligned}$$

Contanto que $\|z\|_E$ seja suficientemente pequena.

Por outro lado, seja $z = (u, -A^{-t}A^s u) \in E^-$, então

$$\begin{aligned} J(z) &= -\|A^s u\|_{L^2}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, -A^{-t}A^s u) \\ &\leq -\|u\|_{H^s}^2 \\ &= -\frac{1}{2}\|z\|_E^2. \end{aligned}$$

Isto prova (LW1).

Prova de (LW2). Temos

$$\begin{aligned} |J(z)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} A^s u A^t v - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,v) \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^N} A^s u A^t v \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u) \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^N} G(x,v) \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^N} A^s u A^t v \right| + \int_{\mathbb{R}^N} |F(x,u)| + \int_{\mathbb{R}^N} |G(x,v)| \\ &\leq |\langle A^s u, A^t v\rangle_{L^2}| + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 + C\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 + C\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q+1} \\ &\leq \|A^s u\|_{L^2}\|A^t v\|_{L^2} + \frac{1}{4}\|u\|_{L^2}^2 + C\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} + \frac{1}{4}\|v\|_{L^2}^2 + C\|v\|_{L^{q+1}}^{q+1} \\ &\leq \|u\|_{H^s}\|v\|_{H^t} + \frac{1}{4}\|u\|_{H^s}^2 + C\|u\|_{H^s}^{p+1} + \frac{1}{4}\|v\|_{H^t}^2 + C\|v\|_{H^t}^{q+1} \\ &\leq \|z\|_E^2 + \frac{1}{4}\|z\|_E^2 + C\|z\|_E^{p+1} + \frac{1}{4}\|z\|_E^2 + C\|z\|_E^{q+1} \\ &= \frac{3}{2}\|z\|_E^2 + C\|z\|_E^{p+1} + C\|z\|_E^{q+1}. \end{aligned}$$

Logo, J é limitada para z em qualquer subconjunto limitado de E.

Utilizaremos o seguinte lema na prova de (LW3).

Lema 3.1.1 *Supondo* (H_2), (H_3) *e* (H_4), *temos que*

$$F(x,t) \geq d_1(x)|t|^\mu \quad e \quad G(x,t) \geq d_2(x)|t|^\mu$$

onde $d_1(x)$ *e* $d_2(x)$ *são funções limitadas positivas.*

Prova: De (H_4), pela regra de L'Hôpital, temos

$$\liminf_{t\to 0} \frac{F(x,t)}{|t|^\mu} > 0.$$

Assim, existem $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ (sem perda de generalidade podemos tomar $\delta < 1$) tais que

$$\frac{F(x,t)}{|t|^{\mu}} \geq \varepsilon, \quad \forall\ |t| \leq \delta$$

isto é,

$$F(x,t) \geq \varepsilon |t|^{\mu}, \quad \forall\ |t| \leq \delta. \tag{3.14}$$

Por outro lado, de (H_3), temos

$$\frac{f(x,t)}{F(x,t)} \geq \frac{\mu}{t}.$$

Se $t \geq \delta$, obtemos

$$\int_{\delta}^{t} \frac{f(x,s)}{F(x,s)} ds \geq \int_{\delta}^{t} \frac{\mu}{s} ds,$$

daí,

$$\ln F(x,t) - \ln F(x,\delta) \geq \mu(\ln t - \ln \delta) \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{F(x,t)}{F(x,\delta)} \geq \ln \left(\frac{t}{\delta}\right)^{\mu}$$

logo,

$$F(x,t) \geq \frac{F(x,\delta)}{\delta^{\mu}} t^{\mu}, \quad \forall\ t \geq \delta. \tag{3.15}$$

Além disso, de (H_2), temos

$$|F(x,\delta)| \leq C.$$

Se $t \leq -\delta$, então

$$\int_{t}^{-\delta} \frac{f(x,s)}{F(x,s)} ds \leq \int_{t}^{-\delta} \frac{\mu}{s} ds.$$

Analogamente ao caso anterior, obtemos

$$F(x,t) \geq \frac{F(x,-\delta)}{|\delta|^{\mu}} |t|^{\mu}, \quad \forall\ t \leq -\delta \tag{3.16}$$

com $|F(x,-\delta)| \leq C$.

Para cada $x \in \mathbb{R}^N$, seja $c_1(x) = \min\{\frac{F(x,\delta)}{\delta^{\mu}}, \frac{F(x,-\delta)}{|\delta|^{\mu}}\}$, por (3.15) e (3.16), temos

$$F(x,t) \geq c_1(x)|t|^{\mu}, \quad \forall\ |t| \geq \delta. \tag{3.17}$$

Agora, seja $d_1(x) = \min\{\varepsilon, c_1(x)\}$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$, de (3.14) e (3.17), concluímos que

$$F(x,t) \geq d_1(x)|t|^{\mu}, \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

onde $d_1(x)$ é uma função limitada e positiva. Analogamente, mostramos para G.

$\blacksquare$

Prova de (LW3). Pelo Lema 3.1.1, temos

$$F(x,t) \geq d_1(x)|t|^\mu \quad \text{e} \quad G(x,t) \geq d_2(x)|t|^\mu \tag{3.18}$$

onde $d_1(x)$ e $d_2(x)$ são funções limitadas positivas.

Assim, seja $z \in E_n^+ \oplus E^-$. Então $z = (u,v) = z^+ + z^- = (u^+, A^{-t}A^s u^+) + (u^-, -A^{-t}A^s u^-)$ para algum $u^+, u^- \in H^s$. Temos

$$\begin{aligned}
J(z) &= \int_{\mathbb{R}^N} (A^s u^+ + A^s u^-)(A^s u^+ - A^s u^-) - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,v) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} A^s u^+ A^s u^+ - \int_{\mathbb{R}^N} A^s u^+ A^s u^- + \int_{\mathbb{R}^N} A^s u^- A^s u^+ \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} A^s u^- A^s u^- - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,v) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} A^s u^+ A^s u^+ - \int_{\mathbb{R}^N} A^s u^- A^s u^- - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,v) \\
&= \|A^s u^+\|_{L^2}^2 - \|A^s u^-\|_{L^2}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,v) \\
&= \|u^+\|_{H^s}^2 - \|u^-\|_{H^s}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,v) \\
&= \frac{1}{2}\|z^+\|_E^2 - \frac{1}{2}\|z^-\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,v) \\
&\leq -\frac{1}{2}\|z^-\|_E^2 + \frac{1}{2}\|z^+\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} d_1(x)|u|^\mu - \int_{\mathbb{R}^N} d_2(x)|v|^\mu.
\end{aligned}$$

Para qualquer $z = (u,v) \in E$ defina,

$$\varphi(z) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} d_1(x)|u|^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} d_2(x)|v|^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}}$$

(note que $2 < \mu < \min\{p+1, q+1\}$). Além disso, veja que φ é uma norma em E. De fato,

(a) $\varphi(z) \geq 0 \quad \text{e} \quad \varphi(z) = 0 \Leftrightarrow z = (u,v) = 0, \quad \forall\, z \in E.$

(b) Para todo escalar λ e $z \in E$,

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda z) &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} d_1(x)|\lambda u|^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} d_2(x)|\lambda v|^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}} \\
&= \left(|\lambda|^\mu \int_{\mathbb{R}^N} d_1(x)|u|^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}} + \left(|\lambda|^\mu \int_{\mathbb{R}^N} d_2(x)|v|^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}} \\
&= |\lambda|\varphi(z).
\end{aligned}$$

(c) Sejam $z_1 = (u_1, v_1), z_2 = (u_2, v_2) \in E$. Pela desigualdade de Minkowski (veja Teorema B.9 do Apêndice B), temos

$$\begin{aligned}
\varphi(z_1+z_2) &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} d_1(x)|u_1+u_2|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} d_2(x)|v_1+v_2|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} d_1(x)|u_1|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} d_1(x)|u_2|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}} \\
&\quad + \left(\int_{\mathbb{R}^N} d_2(x)|v_1|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} d_2(x)|v_2|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}} \\
&= \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} d_1(x)|u_1|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} d_2(x)|v_1|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}}\right] \\
&\quad + \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} d_1(x)|u_2|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} d_2(x)|v_2|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}}\right] \\
&= \varphi(z_1) + \varphi(z_2).
\end{aligned}$$

Agora, usaremos o seguinte fato.

Proposição 3.1.1 *Seja E um espaço de Hilbert com $E = E^+ \oplus E^-$, e seja φ uma norma em E. Então existe uma norma ψ em E^+, tal que para qualquer $z^+ \in E^+$ temos*

$$\psi(z^+) \leq \varphi(z),$$

para todo $z = z^+ + e^-$, com $e^- \in E^-$.

Prova: De fato, podemos tomar

$$\psi(z^+) = \inf\{\varphi(z) : z = z^+ + e^-, e^- \in E^-\}$$

e verificar que ψ é uma norma em E^+,

(a) $\psi(z^+) = \inf \varphi(z) \geq 0 \quad \text{e} \quad \psi(z^+) = \inf \varphi(z) = 0 \Leftrightarrow z^+ = e^- = 0, \forall\ z^+ \in E^+$.

(b) $\psi(\lambda z^+) = \inf \varphi(\lambda z) = \inf |\lambda|\varphi(z) = |\lambda| \inf \varphi(z) = |\lambda|\psi(z^+)$
para todo escalar λ e $z^+ \in E^+$.

(c) Para todo $z_1 = z_1^+ + e_1^-$, $z_2 = z_2^+ + e_2^-$ com $e_1^-, e_2^- \in E^-$
$\psi(z_1^+ + z_2^+) = \inf \varphi(z_1 + z_2) \leq \inf[\varphi(z_1) + \varphi(z_2)] = \inf \varphi(z_1) + \inf \varphi(z_2) = \psi(z_1^+) + \psi(z_2^+)$.

■

Daí, temos que

$$\begin{aligned}[\varphi(z)]^\mu &= \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} d_1(x)|u|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} d_2(x)|v|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}}\right]^\mu \\ &\leq 2^{\mu-1}\left[\int_{\mathbb{R}^N} d_1(x)|u|^\mu + \int_{\mathbb{R}^N} d_2(x)|v|^\mu\right]\end{aligned}$$

logo,

$$2^{1-\mu}[\varphi(z)]^\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} d_1(x)|u|^\mu + \int_{\mathbb{R}^N} d_2(x)|v|^\mu.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}J(z) &\leq -\frac{1}{2}\|z^-\|_E^2 + \frac{1}{2}\|z^+\|_E^2 - 2^{1-\mu}[\varphi(z)]^\mu \\ &\leq -\frac{1}{2}\|z^-\|_E^2 + \frac{1}{2}\|z^+\|_E^2 - 2^{1-\mu}[\psi(z^+)]^\mu. \qquad (3.19)\end{aligned}$$

Assim, (LW3) segue de (3.19), uma vez que ψ e $\|.\|_E$ são equivalentes no espaço de dimensão finita E_n^+ (lembre-se que $\mu > 2$).

Prova de (LW4). Seja $z = (u, v) \in E$ definamos a função teste $\overline{z} = (A^{-s}A^t v, A^{-t}A^s u)$. Agora, tome uma sequência $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset E$, $z_n = (u_n, v_n)$ satisfazendo (3.5), (3.6) e (3.7).

Recordemos que a derivada de J é dada por

$$\langle J'(z), \eta\rangle = \int_{\mathbb{R}^N}(A^s u A^t\psi + A^s\phi A^t v) - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)\phi - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,v)\psi$$

para todo $z = (u, v), \eta = (\phi, \psi) \in E$. Faremos duas escolhas especiais para η em (3.7), de onde devemos conseguir a limitação da sequência $\{z_n\}$.

Lema 3.1.2 *Se $z \in E_n$ então $\overline{z} \in E_n$.*

Prova: De fato,

$$\begin{aligned}z = (u, v) &= (u^+, A^{-t}A^s u^+) + (u^-, -A^{-t}A^s u^-) \\ &= (u^+ + u^-, A^{-t}A^s(u^+ - u^-))\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\overline{z} &= (u^+ - u^-, A^{-t}A^s(u^+ + u^-)) \\ &= (u^+, A^{-t}A^s u^+) + (-1)(u^-, -A^{-t}A^s u^-).\end{aligned}$$

Logo, $\overline{z} \in E_n$. ■

Lema 3.1.3 *A aplicação* $z \in E \mapsto \overline{z} \in E$ *é uma isometria.*

Prova: Dado $z = (u, v) \in E$ temos que

$$\begin{aligned}
\|\overline{z}\|_E^2 &= \|(A^{-s}A^t v, A^{-t}A^s u)\|_E^2 \\
&= \|A^{-s}A^t v\|_{H^s}^2 + \|A^{-t}A^s u\|_{H^t}^2 \\
&= \|A^t v\|_{L^2}^2 + \|A^s u\|_{L^2}^2 \\
&= \|v\|_{H^t}^2 + \|u\|_{H^s}^2 \\
&= \|z\|_E^2.
\end{aligned}$$

■

Agora, seja $\eta = \overline{z_n}$ em (3.7), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle J'(z_n), \eta\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} (A^s u_n A^s u_n + A^t v_n A^t v_n) - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) A^{-s} A^t v_n \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, v_n) A^{-t} A^s u_n \\
&= \|A^s u_n\|_{L^2}^2 + \|A^t v_n\|_{L^2}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) A^{-s} A^t v_n \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, v_n) A^{-t} A^s u_n \\
&= \|u_n\|_{H^s}^2 + \|v_n\|_{H^t}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) A^{-s} A^t v_n \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, v_n) A^{-t} A^s u_n.
\end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle J'(z_n), \eta\rangle &= \|z_n\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n) A^{-s} A^t v_n - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, v_n) A^{-t} A^s u_n \\
&\leq o(1)\|\eta\|_E = o(1)\|z_n\|_E \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

na última igualdade usamos o Lema 3.1.3.

Pela hipótese (H_1) podemos fixar $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, t)| \leq \frac{1}{4}|t| \quad \text{e} \quad |g(x, t)| \leq \frac{1}{4}|t|, \qquad (3.21)$$

para $|t| \leq \delta$. Por (H_2), temos

$$|f(x, t)| \leq C|t|^p \quad \text{e} \quad |g(x, t)| \leq C|t|^q, \qquad (3.22)$$

para $|t| \geq \delta$.

Assim, por (3.20), obtemos

$$\begin{aligned}
\|z_n\|_E^2 &= \langle J'(z_n),\eta\rangle + \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)A^{-s}A^t v_n + \int_{\mathbb{R}^N} g(x,v_n)A^{-t}A^s u_n \\
&\leq o(1)\|z_n\|_E + \int_{|u_n|\leq\delta} |f(x,u_n)||A^{-s}A^t v_n| + \int_{|v_n|\leq\delta} |g(x,v_n)||A^{-t}A^s u_n| \\
&\quad + \int_{|u_n|\geq\delta} |f(x,u_n)||A^{-s}A^t v_n| + \int_{|v_n|\geq\delta} |g(x,v_n)||A^{-t}A^s u_n|.
\end{aligned}$$

Por (3.21) e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\|z_n\|_E^2 &\leq o(1)\|z_n\|_E + \frac{1}{4}\int_{|u_n|\leq\delta} |u_n||A^{t-s}v_n| + \frac{1}{4}\int_{|v_n|\leq\delta} |v_n||A^{s-t}u_n| \\
&\quad + \left(\int_{|u_n|\geq\delta} |f(x,u_n)|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{|u_n|\geq\delta} |A^{-s}A^t v_n|^{p+1}\right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&\quad + \left(\int_{|v_n|\geq\delta} |g(x,v_n)|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_{|v_n|\geq\delta} |A^{-t}A^s u_n|^{q+1}\right)^{\frac{1}{q+1}} \\
&\leq o(1)\|z_n\|_E + \frac{1}{8}\int_{|u_n|\leq\delta} (|u_n|^2 + |A^{t-s}v_n|^2) + \frac{1}{8}\int_{|v_n|\leq\delta} (|v_n|^2 + |A^{s-t}u_n|^2) \\
&\quad + \left(\int_{|u_n|\geq\delta} |f(x,u_n)|^{1+\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}} \|A^{-s}A^t v_n\|_{L^{p+1}} \\
&\quad + \left(\int_{|v_n|\geq\delta} |g(x,v_n)|^{1+\frac{1}{q}}\right)^{\frac{q}{q+1}} \|A^{-t}A^s u_n\|_{L^{q+1}} \\
&\leq o(1)\|z_n\|_E + \frac{1}{8}(\|u_n\|_{L^2}^2 + \|A^{t-s}v_n\|_{L^2}^2) + \frac{1}{8}(\|v_n\|_{L^2}^2 + \|A^{s-t}u_n\|_{L^2}^2) \\
&\quad + \left(\int_{|u_n|\geq\delta} |f(x,u_n)|^{1+\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}} \|A^{-s}A^t v_n\|_{L^{p+1}} \\
&\quad + \left(\int_{|v_n|\geq\delta} |g(x,v_n)|^{1+\frac{1}{q}}\right)^{\frac{q}{q+1}} \|A^{-t}A^s u_n\|_{L^{q+1}}.
\end{aligned}$$

Usando, o isomorfismo dado na Proposição 1.2 e as imersões de Sobolev, temos

$$\begin{aligned}
\|z_n\|_E^2 &\leq o(1)\|z_n\|_E + \frac{1}{8}(\|u_n\|_{L^2}^2 + \|v_n\|_{H^{t-s}}^2) + \frac{1}{8}(\|v_n\|_{L^2}^2 + \|u_n\|_{H^{s-t}}^2) \\
&\quad + \left(\int_{|u_n|\geq\delta} |f(x,u_n)|^{1+\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}} C\|A^{-s}A^t v_n\|_{H^s} \\
&\quad + \left(\int_{|v_n|\geq\delta} |g(x,v_n)|^{1+\frac{1}{q}}\right)^{\frac{q}{q+1}} C\|A^{-t}A^s u_n\|_{H^t} \\
&\leq o(1)\|z_n\|_E + \frac{1}{8}(\|u_n\|_{H^s}^2 + \|v_n\|_{H^t}^2) + \frac{1}{8}(\|v_n\|_{H^t}^2 + \|u_n\|_{H^s}^2) \\
&\quad + \left(\int_{|u_n|\geq\delta} |f(x,u_n)||f(x,u_n)|^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}} C\|A^{-s}A^t v_n\|_{H^s} \\
&\quad + \left(\int_{|v_n|\geq\delta} |g(x,v_n)||g(x,v_n)|^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{q}{q+1}} C\|A^{-t}A^s u_n\|_{H^t}.
\end{aligned}$$

Por (3.22), temos

$$\begin{aligned}
\|z_n\|_E^2 &\leq o(1)\|z_n\|_E + \frac{1}{8}\|z_n\|_E^2 + \frac{1}{8}\|z_n\|_E^2 \\
&+ \bigg(\int_{|u_n|\geq\delta} |f(x,u_n)|C|u_n|\bigg)^{\frac{p}{p+1}} C\|A^{-s}A^t v_n\|_{H^s} \\
&+ \bigg(\int_{|v_n|\geq\delta} |g(x,v_n)|C|v_n|\bigg)^{\frac{q}{q+1}} C\|A^{-t}A^s u_n\|_{H^t} \\
&\leq o(1)\|z_n\|_E + \frac{1}{4}\|z_n\|_E^2 + C\bigg(\int_{|u_n|\geq\delta} |f(x,u_n)||u_n|\bigg)^{\frac{p}{p+1}} \|A^{-s}A^t v_n\|_{H^s} \\
&+ C\bigg(\int_{|v_n|\geq\delta} |g(x,v_n)||v_n|\bigg)^{\frac{q}{q+1}} \|A^{-t}A^s u_n\|_{H^t}.
\end{aligned}$$

Novamente, pelo isomorfismo dado na Proposição 1.2, temos

$$\begin{aligned}
\|z_n\|_E^2 &\leq o(1)\|z_n\|_E + \frac{1}{4}\|z_n\|_E^2 + C\bigg(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x,u_n)u_n|\bigg)^{\frac{p}{p+1}} \|A^t v_n\|_{L^2} \\
&+ C\bigg(\int_{\mathbb{R}^N} |g(x,v_n)v_n|\bigg)^{\frac{q}{q+1}} \|A^s u_n\|_{L^2} \\
&\leq o(1)\|z_n\|_E + \frac{1}{4}\|z_n\|_E^2 + C\bigg(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x,u_n)u_n|\bigg)^{\frac{p}{p+1}} \|v_n\|_{H^t} \\
&+ C\bigg(\int_{\mathbb{R}^N} |g(x,v_n)v_n|\bigg)^{\frac{q}{q+1}} \|u_n\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\|z_n\|_E^2 \leq o(1)\|z_n\|_E + \frac{1}{4}\|z_n\|_E^2 + CA_n^{\frac{p}{p+1}}\|z_n\|_E + CB_n^{\frac{q}{q+1}}\|z_n\|_E,$$

onde

$$A_n = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x,u_n)u_n| \quad \text{e} \quad B_n = \int_{\mathbb{R}^N} |g(x,v_n)v_n|.$$

Portanto,

$$\|z_n\|_E \leq o(1) + CA_n^{\frac{p}{p+1}} + CB_n^{\frac{q}{q+1}}. \tag{3.23}$$

A segunda escolha de η que faremos em (3.7) é $\eta = z_n$. Por (H_3) temos

$$F(x,u_n) \leq \frac{1}{\mu}u_n f(x,u_n) \quad \text{e} \quad G(x,v_n) \leq \frac{1}{\mu}v_n g(x,v_n).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
2J(z_n) - \langle J'(z_n), z_n\rangle &= 2\Big[\int_{\mathbb{R}^N} A^s u_n A^t v_n - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u_n) - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,v_n)\Big] \\
&\quad -\Big[2\int_{\mathbb{R}^N} A^s u_n A^t v_n - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,v_n)v_n\Big] \\
&\geq -\frac{2}{\mu}\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n - \frac{2}{\mu}\int_{\mathbb{R}^N} g(x,v_n)v_n \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)u_n + \int_{\mathbb{R}^N} g(x,v_n)v_n \\
&= -\frac{2}{\mu}A_n - \frac{2}{\mu}B_n + A_n + B_n = \Big(1-\frac{2}{\mu}\Big)A_n + \Big(1-\frac{2}{\mu}\Big)B_n.
\end{aligned}$$

Assim, por (3.6) e (3.7), obtemos

$$\begin{aligned}
\Big(1-\frac{2}{\mu}\Big)(A_n + B_n) &\leq 2J(z_n) - \langle J'(z_n), z_n\rangle \\
&\leq |2J(z_n) - \langle J'(z_n), z_n\rangle| \\
&\leq 2|J(z_n)| + |\langle J'(z_n), z_n\rangle| \\
&\leq C + o(1)\|z_n\|_E. \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

De (3.23) e (3.24), obtemos

$$A_n + B_n \leq C + o(1) + o(1)\Big[A_n^{\frac{p}{p+1}} + B_n^{\frac{q}{q+1}}\Big]. \qquad (3.25)$$

Como $A_n, B_n \geq 0$, então $A_n, B_n \leq A_n + B_n$. Daí, por (3.25) concluímos que as sequências $\{A_n\}$ e $\{B_n\}$ são limitadas. Então, por (3.23), $\{z_n\}$ é limitada em E.

Observação 3.5 *Note que até aqui não foi necessário utilizar (3.5), mostramos que qualquer sequência em E satisfazendo (3.6) e (3.7) é limitada.*

Agora, podemos extrair uma subsequência fracamente convergente de $\{z_n\}$ (ao extrairmos uma subsequência manteremos a mesma notação da sequência original). Assim temos

$$\begin{aligned}
u_n &\rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H^s \\
u_n &\to u \quad \text{em} \quad L^r_{loc}, \quad 2 \leq r < \frac{2N}{N-2s} \\
u_n &\to u \quad \text{q.t.p.} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N
\end{aligned}$$

e

$$\begin{array}{llll} v_n & \rightharpoonup & v & \text{em} \quad H^t \\ v_n & \to & v & \text{em} \quad L^r_{loc}, \quad 2 \le r < \dfrac{2N}{N-2t} \\ v_n & \to & v & \text{q.t.p.} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \end{array}$$

Afirmação 3.1.1 *Se* $\langle J'(z_n), \widetilde{\eta}\rangle \to \langle J'(z), \widetilde{\eta}\rangle$, $\forall\ \widetilde{\eta} \in C_0^\infty \times C_0^\infty$. *Então, por densidade,* $\langle J'(z_n), \eta\rangle \to \langle J'(z), \eta\rangle$, $\forall\ \eta \in E$.

Prova: Tome $\widetilde{\eta} = (\widetilde{\phi}, \widetilde{\psi}) \in C_0^\infty \times C_0^\infty$, então

$$\langle J'(z_n), \widetilde{\eta}\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (A^s u_n A^t \widetilde{\psi} + A^s \widetilde{\phi} A^t v_n) - \int_{supp\ \widetilde{\phi}} f(x, u_n)\widetilde{\phi} - \int_{supp\ \widetilde{\psi}} g(x, v_n)\widetilde{\psi}$$

sabemos que

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^r(\operatorname{supp} \widetilde{\phi}), \quad 2 \le r < \frac{2N}{N-2s}, \tag{3.26}$$

$$v_n \to u \quad \text{em} \quad L^r(\operatorname{supp} \widetilde{\psi}), \quad 2 \le r < \frac{2N}{N-2t}. \tag{3.27}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (A^s u_n A^t \widetilde{\psi} + A^s \widetilde{\phi} A^t v_n) &= \langle A^s u_n, A^t \widetilde{\psi}\rangle_{L^2} + \langle A^s \widetilde{\phi}, A^t v_n\rangle_{L^2} \\ &\to \langle A^s u, A^t \widetilde{\psi}\rangle_{L^2} + \langle A^s \widetilde{\phi}, A^t v\rangle_{L^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (A^s u A^t \widetilde{\psi} + A^s \widetilde{\phi} A^t v). \end{aligned}$$

Agora, mostremos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{supp\ \widetilde{\phi}} f(x, u_n)\widetilde{\phi} = \int_{supp\ \widetilde{\phi}} f(x, u)\widetilde{\phi}, \tag{3.28}$$

isto é,

$$\left| \int_{supp\ \widetilde{\phi}} [f(x, u_n) - f(x, u)]\widetilde{\phi} \right| \to 0.$$

Segue de (3.26) que $f(x, u_n) \to f(x, u)$ q.t.p. Além disso, como $u_n \rightharpoonup u$ em H^s_{rad} e $H^s_{rad} \hookrightarrow L^{p+1}$ compactamente, a menos de subsequência, sabemos que

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^{p+1}(\operatorname{supp} \widetilde{\phi}) \Rightarrow |u_n| \le w \in L^{p+1}(\operatorname{supp} \widetilde{\phi}) \quad q.t.p. \tag{3.29}$$

Daí, de (3.29) e (H_2), temos

$$|f(x, u_n)| \le C + C|u_n|^p \le C + Cw^p \in L^{\frac{p+1}{p}}(\operatorname{supp} \widetilde{\phi}),$$

pois

$$\int_{supp\ \widetilde{\phi}} |w^p|^{\frac{p+1}{p}} = \int_{supp\ \widetilde{\phi}} |w|^{p+1} < \infty.$$

Logo, pela desigualdade de Hölder e o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{supp\ \widetilde{\phi}} [f(x,u_n) - f(x,u)]\widetilde{\phi} \right| &\leq \int_{supp\ \widetilde{\phi}} |f(x,u_n) - f(x,u)||\widetilde{\phi}| \\
&\leq \left(\int_{supp\ \widetilde{\phi}} |f(x,u_n) - f(x,u)|^{\frac{p+1}{p}} \right)^{\frac{p}{p+1}} \|\widetilde{\phi}\|_{L^{p+1}(supp\ \widetilde{\phi})} \\
&\leq C\|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} \to 0.
\end{aligned}$$

Analogamente, mostramos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{supp\ \widetilde{\psi}} g(x,v_n)\widetilde{\psi} = \int_{supp\ \widetilde{\psi}} g(x,v)\widetilde{\psi}.$$

Isso mostra que $\langle J'(z_n), \widetilde{\eta}\rangle \to \langle J'(z), \widetilde{\eta}\rangle$, $\forall\ \widetilde{\eta} \in C_0^\infty \times C_0^\infty$, e como $C_0^\infty \times C_0^\infty$ é denso em E, segue que $\langle J'(z_n), \eta\rangle \to \langle J'(z), \eta\rangle$, $\forall\ \eta \in E$.

■

Agora, fixemos $m \geq 1$ e tomemos $\eta \in E_m$. Então, passando o limite em (3.7) (note que (3.7) vale para todo $n \geq m$), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (A^s u A^t \psi + A^s \phi A^t v) - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)\phi - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,v)\psi = 0 \tag{3.30}$$

e essa igualdade vale para todo $\eta \in E_m$ e todo $m \geq 1$. Desde que $\bigcup_{m=1}^\infty E_m$ é denso em E, (3.30) vale para todo $\eta \in E$. Fazendo $\eta = \overline{z}$ em (3.30), temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (A^s u A^s u + A^t v A^t v) - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)A^{-s}A^t v - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,v)A^{-t}A^s u &= 0 \\
\|A^s u\|_{L^2}^2 + \|A^t v\|_{L^2}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)A^{-s}A^t v - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,v)A^{-t}A^s u &= 0 \\
\|u\|_{H^s}^2 + \|v\|_{H^t}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)A^{-s}A^t v - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,v)A^{-t}A^s u &= 0
\end{aligned}$$

logo,

$$\|z\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)A^{-s}A^t v - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,v)A^{-t}A^s u = 0. \tag{3.31}$$

Por outro lado, fazendo $\eta = \overline{z_n}$ em (3.7), temos

$$\|z_n\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)A^{-s}A^t v_n - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,v_n)A^{-t}A^s u_n = o(1). \tag{3.32}$$

Assim, (LW4) seguirá de (3.31) e (3.32), contanto que mostremos que o segundo e o terceiro termos de (3.32) converge para o segundo e o terceiro termos de (3.31) respectivamente. Mostremos a convergência do segundo termo e a do terceiro é feita de forma análoga.

Afirmação 3.1.2

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)A^{-s}A^t v_n \to \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)A^{-s}A^t v, \quad n\to\infty.$$

Prova: Primeiro notemos que

$$P_n = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x,u)||A^{-s}A^t(v_n - v)| \to 0 \quad \text{quando} \quad n\to\infty.$$

Usando (3.8), a desigualdade de Hölder e o fato que $v_n \rightharpoonup v$ em H^t temos $A^{-s}A^t v_n \rightharpoonup A^{-s}A^t v$ em H^s e por imersão $A^{-s}A^t v_n \to A^{-s}A^t v$ em L^{p+1} (recordemos que nos restringimos a funções radiais). Então,

$$\begin{aligned}
P_n &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x,u)|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |A^{-s}A^t(v_n - v)|^{p+1}\right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} (\varepsilon|u| + C_\varepsilon |u|^p)^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}} \|A^{-s}A^t(v_n - v)\|_{L^{p+1}} \\
&\leq \left(C\int_{\mathbb{R}^N} (|u|^{\frac{p+1}{p}} + |u|^{p+1})\right)^{\frac{p}{p+1}} \|A^{-s}A^t(v_n - v)\|_{L^{p+1}} \\
&\leq C\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}\right)^{\frac{p}{p+1}}\right] \|A^{-s}A^t(v_n - v)\|_{L^{p+1}} \\
&\leq C\left(\|u\|_{L^{\frac{p+1}{p}}} + \|u\|^p_{L^{p+1}}\right) \|A^{-s}A^t v_n - A^{-s}A^t v\|_{L^{p+1}} \to 0
\end{aligned}$$

quando $n\to\infty$.

Agora, considere

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x,u_n) - f(x,u)||A^{-s}A^t v_n|. \tag{3.33}$$

Sejam $R > 0$ e $B_R = B(0, R)$. Pela desigualdade de Hölder e as hipóteses (H_1) e (H_2), temos que

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x,u_n) - f(x,u)||A^{-s}A^t v_n| \\
&= \int_{|x|<R} |f(x,u_n) - f(x,u)||A^{-s}A^t v_n| + \int_{|x|\geq R} |f(x,u_n) - f(x,u)||A^{-s}A^t v_n| \\
&\leq \left(\int_{|x|<R} |f(x,u_n) - f(x,u)|^{\frac{p+1}{p}} \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{|x|<R} |A^{-s}A^t v_n|^{p+1} \right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&\quad + \int_{|x|\geq R} (|f(x,u_n)| + |f(x,u)|)|A^{-s}A^t v_n| \\
&\leq \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(B_R)} \|A^{-s}A^t v_n\|_{L^{p+1}(B_R)} \\
&\quad + \int_{|x|\geq R} (\varepsilon|u_n| + C|u_n|^p + \varepsilon|u| + C|u|^p)|A^{-s}A^t v_n| \\
&\leq \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(B_R)} \|A^{-s}A^t v_n\|_{L^{p+1}(B_R)} \\
&\quad + \varepsilon \int_{|x|\geq R} (|u_n| + |u|)|A^{-s}A^t v_n| + C \int_{|x|\geq R} |u_n|^p|A^{-s}A^t v_n| \\
&\quad + C \int_{|x|\geq R} |u|^p|A^{-s}A^t v_n| \\
&\leq \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(B_R)} \|A^{-s}A^t v_n\|_{L^{p+1}(B_R)} \\
&\quad + \varepsilon\left(\int_{|x|\geq R} |u_n||A^{-s}A^t v_n| + \int_{|x|\geq R} |u||A^{-s}A^t v_n| \right) \\
&\quad + C \int_{|x|\geq R} |u_n - u + u|^p|A^{-s}A^t v_n| + C \int_{|x|\geq R} |u|^p|A^{-s}A^t v_n| \\
&\leq \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(B_R)} \|A^{-s}A^t v_n\|_{L^{p+1}(B_R)} \\
&\quad + \varepsilon(\|u_n\|_{L^2}\|A^{-s}A^t v_n\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|A^{-s}A^t v_n\|_{L^2}) + C \int_{|x|\geq R} |u_n - u|^p|A^{-s}A^t v_n| \\
&\quad + C \int_{|x|\geq R} |u|^p|A^{-s}A^t v_n| + C \int_{|x|\geq R} |u|^p|A^{-s}A^t v_n| \\
&\leq \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(B_R)} \|A^{-s}A^t v_n\|_{L^{p+1}(B_R)} \\
&\quad + \varepsilon C + C\left(\int_{|x|\geq R} |u_n - u|^{p+1} \right)^{\frac{p}{p+1}} \|A^{-s}A^t v_n\|_{L^{p+1}} \\
&\quad + C\left(\int_{|x|\geq R} |u|^{p+1} \right)^{\frac{p}{p+1}} \|A^{-s}A^t v_n\|_{L^{p+1}} \\
&\leq o(1) + \varepsilon C + C\|u_n - u\|^p_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N \setminus B_R)} + C\|u\|^p_{L^{p+1}(\mathbb{R}^N \setminus B_R)}.
\end{aligned}$$

Daí, segue que $I_n \to 0$, desde que a última expressão pode ser feita arbitrariamente pequena, tomando ε suficientemente pequeno e n, R suficientemente grande.

Note agora

$$\begin{aligned} I_n + P_n &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left| [f(x,u_n) - f(x,u)]A^{-s}A^t v_n \right| + \left| f(x,u)[A^{-s}A^t v_n - A^{-s}A^t v] \right| \right) \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} \left| f(x,u_n)A^{-s}A^t v_n - f(x,u)A^{-s}A^t v \right|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)A^{-s}A^t v_n - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)A^{-s}A^t v \leq I_n + P_n \to 0.$$

Isto prova a afirmação.

■

Portanto, de (3.31) e (3.32), concluímos que

$$\|z_n\|_E^2 - \|z\|_E^2 = o(1).$$

Isto prova o Teorema 3.1.

■

3.3 Regularidade de Solução

Nesta seção, é apresentado um resultado de regularidade, o qual será provado utilizando-se um argumento *bootstrap*. No item (i) do teorema abaixo prova-se que soluções fortes pertencem a $W^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ para todo s, um resultado dado por Sirakov [17] que não foi provado em [6]. O item (ii) é na verdade o resultado de regularidade em [8]. O item (iii) é inspirado num famoso resultado de Barestycki e Lions [3] para equações escalares.

Teorema 3.2

(i) *Suponha* (H_0) *e* (H_2). *Então soluções fortes de* (3.1) *pertencem a* $W^{2,s}(\mathbb{R}^N)^2$, *para todo* $2 \leq s < \infty$. *Em particular, as funções* u *e* v *decaem no infinito, juntamente com suas derivadas.*

(ii) *Suponha* (H_2). *Então soluções fracas de* (3.1) *pertencem a* $W^{2,s}_{loc}(\mathbb{R}^N)^2$, *para todo* $2 \leq s < \infty$.

(iii) *Suponha* (H_1) *e* (H_2). *Então soluções radiais fracas de* (3.1) *pertencem a* $C^2(\mathbb{R}^N)$.

Prova: Primeiro note que se $p \leq \frac{2}{N-2}$ (ou $q \leq \frac{2}{N-2}$) então $p(N-2) \leq 2 \Rightarrow pN \leq 2(p+1) \Rightarrow \frac{p+1}{p} \geq \frac{N}{2}$ (ou $\frac{q+1}{q} \geq \frac{N}{2}$) e pelo Teorema de Imersão de Sobolev (veja Teorema B.16 do Apêndice B) $W^{2,\frac{p+1}{p}} \hookrightarrow L^s$, para todo $s \in \left[\dfrac{p+1}{p}, \infty\right)$. Então, por teoria padrão de regularidade elíptica (veja Teorema B.15 do Apêndice B) aplicado a (3.1), concluímos o item (i). Assim, podemos supor que $p, q > \frac{2}{N-2} \;\Rightarrow\; \frac{p+1}{p} < \frac{N}{2}$ e $\frac{q+1}{q} < \frac{N}{2}$.

Por (3.2), temos $p, q > 1$ e

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{N} \Rightarrow \frac{1}{p+1} > 1 - \frac{2}{N} - \frac{1}{q+1} \Rightarrow$$
$$\frac{1}{p+1} > \frac{Nq + N - 2q - 2 - N}{Nq + N} \Rightarrow p + 1 < \frac{Nq + N}{Nq - 2q - 2} \Rightarrow p < \frac{N + 2q + 2}{(N-2)q - 2}.$$

Assim, (3.2) pode ser escrito como $p \in (1, p_0)$, com

$$p_0 = \frac{N + 2q + 2}{(N-2)q - 2}$$

e respectivamente, $q \in (1, q_0)$, com

$$q_0 = \frac{N + 2p + 2}{(N-2)p - 2}.$$

Como (u, v) é solução forte, o Teorema de Imersão de Sobolev implica que $u \in L^s$, para todo $s \in \left[\dfrac{p+1}{p}, p_1\right]$, onde

$$p_1 = \frac{N(p+1)}{Np - 2(p+1)}$$

e respectivamente, $v \in L^s$, para todo $s \in \left[\dfrac{q+1}{q}, q_1\right]$, onde

$$q_1 = \frac{N(q+1)}{Nq - 2(q+1)}.$$

Agora, observe que $p_1 > p + 1$ ou $q_1 > q + 1$. De fato,

$$p_1 > p + 1 \Leftrightarrow \frac{N(p+1)}{Np - 2(p+1)} > p + 1 \Leftrightarrow N(p+1) > (p+1)[Np - 2(p+1)] \Leftrightarrow$$
$$N + 2 > p(N-2) \Leftrightarrow p < \frac{N+2}{N-2}$$

analogamente, $q_1 > q + 1 \Leftrightarrow q < \frac{N+2}{N-2}$, e por (3.2) não podemos ter simultaneamente $p, q \geq \frac{N+2}{N-2}$, pois se

$$p \geq \frac{N+2}{N-2} \Rightarrow p + 1 \geq \frac{2N}{N-2} \Rightarrow \frac{1}{p+1} \leq \frac{N-2}{2N}$$

e

$$q \geq \frac{N+2}{N-2} \Rightarrow q+1 \geq \frac{2N}{N-2} \Rightarrow \frac{1}{q+1} \leq \frac{N-2}{2N}.$$

Daí,

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} \leq 1 - \frac{2}{N}$$

o que contradiz a hipótese (H_2).

Iniciaremos agora um processo *bootstrap* para provar o item (i). Note que, se em qualquer fase desse processo o denominador for não positivo, por exemplo, $Np-2(p+1) \leq 0 \Rightarrow \frac{p+1}{p} \geq \frac{N}{2}$, então voltamos ao caso anterior e podemos então concluir a prova com a teoria de regularidade elíptica.

Assim, seja, por exemplo, $q_1 > q+1$. Desde que (H_0) e (H_2) implicam

$$|f(x,t)| \leq C(|t| + |t|^p) \tag{3.34}$$

e

$$|g(x,t)| \leq C(|t| + |t|^q), \tag{3.35}$$

então $g(x,v) \in L^{\frac{q_1}{q}}$. De fato, usando (3.35) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(x,v)|^{\frac{q_1}{q}} \leq \int_{\mathbb{R}^N} C(|v| + |v|^q)^{\frac{q_1}{q}} \leq C\bigg(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{\frac{q_1}{q}} + \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q_1}\bigg) < +\infty.$$

Então, pela teoria de regularidade elíptica, temos que $u \in W^{2,\frac{q_1}{q}}$. Pelo Teorema de Imersão de Sobolev $u \in L^{p_2}$, com

$$p_2 = \frac{Nq_1}{Nq - 2q_1}.$$

Agora, note que $p_2 > p+1$. De fato,

$$p_2 > p+1 \Leftrightarrow \frac{Nq_1}{Nq-2q_1} > p+1 \Leftrightarrow p < \frac{Nq_1 - Nq + 2q_1}{Nq - 2q_1} \Leftrightarrow p < \frac{(N+2)q_1 - Nq}{Nq-2q_1} = P$$

e a última desigualdade é válida se $p_0 < P$, mas isto é equivalente a $q_1 > q+1$, de fato

$$\begin{aligned}
p_0 < P \Leftrightarrow \frac{2q+N+2}{(N-2)q-2} &< \frac{(N+2)q_1 - Nq}{Nq-2q_1} \\
\Leftrightarrow (2q+N+2)(Nq-2q_1) &< [(N+2)q_1 - Nq][(N-2)q-2] \\
\Leftrightarrow 2Nq^2 - 4qq_1 + N^2q - 2Nq_1 + 2Nq - 4q_1 &< N^2qq_1 - 2Nqq_1 - 2Nq_1 + 2Nqq_1 - 4qq_1 \\
&\quad -4q_1 - N^2q^2 + 2Nq^2 + 2Nq \\
\Leftrightarrow N^2q < N^2qq_1 - N^2q^2 \Leftrightarrow q &< q(q_1 - q) \Leftrightarrow q+1 < q_1
\end{aligned}$$

Assim, de (3.34) segue que $f(x,u) \in L^{\frac{p_2}{p}}$ e novamente por teoria elíptica padrão $v \in W^{2,\frac{p_2}{p}}$ e por imersão de Sobolev $v \in L^{q_2}$ com

$$q_2 = \frac{Np_2}{Np - 2p_2}.$$

Agora, afirmamos que $q_2 > q_1$. Com efeito,

$$\begin{aligned} q_2 &> q_1 \Leftrightarrow \frac{Np_2}{Np-2p_2} > q_1 \Leftrightarrow \frac{N[Nq_1/(Nq-2q_1)]}{Np-2[Nq_1/(Nq-2q_1)]} > q_1 \\ \Leftrightarrow \frac{N^2q_1}{N^2pq - 2Npq_1 - 2Nq_1} &> q_1 \Leftrightarrow \frac{N}{Npq - 2pq_1 - 2q_1} > 1 \Leftrightarrow N > Npq - (2p+2)q_1 \\ \Leftrightarrow q_1 &> \frac{N(pq-1)}{2p+2} = h_q(p). \end{aligned}$$

Então, considerando a função $h_q(p)$, vemos que ela é crescente, de fato

$$h_q'(p) = \frac{Nq(2p+2) - 2N(pq-1)}{(2p+2)^2} > 0$$

uma vez que $Nq(2p+2) - 2N(pq-1) = 2N(q+1) > 0$ pois $N \geq 3$ e $q > 1$. Em particular, $h_q(p)$ é crescente em $[1, p_0]$, assim $h_q(p)$ atinge o máximo em p_0. Além disso, $h_q(p_0) = q+1$, pois

$$\begin{aligned} h_q(p_0) &= \frac{Np_0q - N}{2p_0+2} = \frac{Nq[2q+N+2/((N-2)q-2)] - N}{2[2q+N+2/((N-2)q-2)]+2} \\ &= \frac{2Nq^2 + N^2q + 2Nq - N^2q + 2Nq + 2N}{4q + 2N + 4 + 2Nq - 4q - 4} \\ &= \frac{2N(q^2+2q+1)}{2N(q+1)} = \frac{q(q+1)+q+1}{q+1} = \frac{(q+1)(q+1)}{q+1} = q+1 \end{aligned}$$

o que comprova a afirmação, desde supomos $q_1 > q+1$.

Utilizando agora nosso argumento *bootstrap*, temos que $g(x,v) \in L^{\frac{q_2}{q}}$, então a teoria de regularidade elíptica implica que $u \in W^{2,\frac{q_2}{q}}$ e por imersão de Sobolev $u \in L^{p_3}$, com

$$p_3 = \frac{Nq_2}{Nq - 2q_2}$$

onde $p_3 > p_2$ que é equivalente a $q_2 > q_1$. Continuando com esse processo, temos $v \in L^{q_3}$, com $q_3 > q_2$ equivalente a $p_3 > p_2$.

De tal forma construímos duas sequências $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{Nq_n}{Nq - 2q_n} \quad \text{e} \quad p_{n+1} > p_n \quad \text{para} \quad n \geq 2, \\ q_{n+1} &= \frac{Np_{n+1}}{Np - 2p_{n+1}} \quad \text{e} \quad q_{n+1} > q_n \quad \text{para} \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Assim, se uma dessas sequências tem um limite, então a outra sequência também terá um limite. Suponha que $p_n \to l_1$ e $q_n \to l_2$ quando $n \to \infty$. Então, temos

$$l_1 = \frac{Nl_2}{Nq - 2l_2} \quad \text{e} \quad l_2 = \frac{Nl_1}{Np - 2l_1}.$$

Daí obtemos,

$$\begin{aligned} l_2 &= \frac{N[Nl_2/(Nq-2l_2)]}{Np - 2[Nl_2/(Nq-2l_2)]} = \frac{N^2 l_2}{N^2pq - 2Npl_2 - 2Nl_2} \Rightarrow \\ 1 &= \frac{N}{Npq - 2pl_2 - 2l_2} \Rightarrow Npq - (2p+2)l_2 = N \Rightarrow l_2 = \frac{N(pq-1)}{2p+2}. \end{aligned}$$

Isso implica que,

$$l_2 = h_q(p) \leq h_q(p_0) = q + 1$$

isto é,

$$l_2 \leq q + 1$$

o que contradiz o fato que $q_{n+1} > q_n \ \forall\ n$.

Assim, concluímos que ambas as sequências tendem ao infinito. Logo, $u, v \in L^s$ para s arbitrariamente grande e a teoria elíptica padrão implica que $u, v \in W^{2,s} \ \ \forall\ s < \infty$. O decaimento no infinito é uma consequência do Teorema de Morrey (veja Teorema B.17 do Apêndice B). Note ainda que no caso de supomos (H_1) ao invés de (H_0), este decaimento é exponencial, como foi provado por Figueiredo e Yang em [6].

Agora, provemos o item (ii). Seja (u, v) uma solução fraca de (3.1), então $u \in L^{p+1}$ e $v \in L^{q+1}$. Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ um compacto, de (H_2) temos que

$$\int_K |g(x,v)|^{\frac{q+1}{q}} \leq \int_K C(1 + |v|^q)^{\frac{q+1}{q}} \leq C\left(|K| + \int_K |v|^{q+1}\right) < \infty.$$

Assim, $g(x,v) \in L_{loc}^{\frac{q+1}{q}}$, então pela teoria de regularidade elíptica temos que $u \in W_{loc}^{2,\frac{q+1}{q}}$. Analogamente, $v \in W_{loc}^{2,\frac{p+1}{p}}$. Agora, precisamos de um argumento *bootstrap* para tais u e v. Como na parte (i) tomemos $u \in L_{loc}^{q_1}$ e $v \in L_{loc}^{p_1}$. Seja $p_0 = q + 1$ e $q_0 = p + 1$, note que (3.2) implica

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} &> 1 - \frac{2}{N} \Leftrightarrow \frac{1}{q+1} > 1 - \frac{2}{N} - \frac{1}{p+1} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{q+1} &> \frac{N(p+1) - 2(p+1) - N}{N(p+1)} \Leftrightarrow q + 1 < \frac{N(p+1)}{Np - 2(p+1)} = p_1 \end{aligned}$$

assim $p_1 > p_0$ e analogamente $q_1 > q_0$.

Sejam $q_1 > q_0$ e $K \subset \mathbb{R}^N$ um compacto. De (H_2), temos

$$\int_K |f(x,u)|^{\frac{q_1}{p}} \leq \int_K C(1+|u|^p)^{\frac{q_1}{p}} \leq C\Big(|K| + \int_K |u|^{q_1}\Big) < \infty.$$

Assim, $f(x,u) \in L^{\frac{q_1}{p}}_{loc}$. Pela teoria de regularidade elíptica temos que $v \in W^{2,\frac{q_1}{p}}_{loc}$ e por imersão de Sobolev $v \in L^{p_2}_{loc}$ com

$$p_2 = \frac{Nq_1}{Np - 2q_1}.$$

Note que $p_2 > p_1$. De fato,

$$\frac{Nq_1}{Np-2q_1} > \frac{N(p+1)}{Np-2(p+1)} \Leftrightarrow \frac{p}{q_1} - \frac{2}{N} < \frac{p}{p+1} - \frac{2}{N} \Leftrightarrow q_1 > p+1.$$

Temos que $g(x,v) \in L^{\frac{p_1}{q}}_{loc}$, por teoria de regularidade elíptica $u \in W^{2,\frac{p_1}{q}}_{loc}$ e por imersão de Sobolev $u \in L^{q_2}$ com

$$q_2 = \frac{Np_1}{Nq - 2p_1}.$$

Daí, analogamente ao que fizemos no item (i), temos que $f(x,u) \in L^{\frac{q_2}{p}}_{loc}$ e por regularidade $v \in W^{2,\frac{q_2}{p}}_{loc}$ e por imersão $v \in L^{p_3}_{loc}$ com

$$p_3 = \frac{Nq_2}{Np - 2q_2}$$

onde $p_3 > p_2$ é equivalente a $q_2 > q_1$. Continuando com o processo, temos $u \in L^{q_3}_{loc}$ com $q_3 > q_2$ que é equivalente a $p_2 > p_1$. De tal forma que construímos duas sequências $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$p_{n+1} = \frac{Nq_n}{Np - 2q_n}, \quad \text{com} \quad p_{n+1} > p_n \quad \text{e} \quad q_{n+1} = \frac{Np_n}{Nq - 2p_n}, \quad \text{com} \quad q_{n+1} > q_n, \tag{3.36}$$

para todo n.

Se supomos que (u,v) não é uma solução forte, então pelo item (i) pelo menos uma dessas duas sequências será limitada e como as sequências são crescentes ela terá um limite, assim por (3.36) a outra sequência também terá um limite. Colocando $l_1 = \lim p_n$ e $l_2 = \lim q_n$, como no item (i) obtemos $l_1 < q+1$ o que é uma contradição. Portanto, segue que ambas as sequências tendem ao infinito. Logo, $u, v \in L^s_{loc}$ para s arbitrariamente grande e a teoria elíptica padrão implica que $u, v \in W^{2,s}_{loc} \ \ \forall\ s < \infty$.

Finalmente, provemos o item (iii). Como, por (ii), $(u,v) \in W^{2,s}_{loc}(\mathbb{R}^N)^2 \ \ \forall\ 2 \leq s < \infty$, por imersão de Sobolev $u, v \in C^{1,\alpha}$ para $0 < \alpha < 1$.

Provemos que $u, v \in C^2$. Mostremos aqui para a função u. Como u satisfaz a primeira equação de (3.1) e u é radial, isto é, $u = u(r),\ r = \|x\|$, então

$$-\triangle u = -u'' - \frac{N-1}{r}u', \quad r \in (0, +\infty).$$

De fato, desde que

$$u(r) = u(\|x\|) = u\left(\sqrt{\sum x_i^2}\right) \quad \text{e} \quad \triangle u = \sum_{i=1}^{N} u_{x_i x_i}$$

como $r = \left(\sum x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, temos

$$r_{x_i} = \frac{2x_i}{2\sqrt{\sum x_i^2}} = \frac{x_i}{r}.$$

Agora,

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= u'(r) r_{x_i} = u'(r)\frac{x_i}{r} \\ u_{x_i x_i} &= u''(r)\left(\frac{x_i}{r}\right)^2 + u'(r)\left(\frac{r^2 - x_i^2}{r^3}\right) = u''(r)\left(\frac{x_i}{r}\right)^2 + u'(r)\frac{1}{r} - u'(r)\left(\frac{x_i}{r}\right)^2\frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Como

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i}{r}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^2}{\|x\|^2} = 1$$

então,

$$\triangle u = \sum_{i=1}^{N} u_{x_i x_i} = u'' + \frac{u'}{r}N - \frac{u'}{r} = u'' + \frac{1}{r}(N-1)u'.$$

Assim a primeira equação de (3.1) pode ser escrita como

$$-\frac{d}{dr}\left(r^{N-1}u'(r)\right) = r^{N-1}g_1(r) \tag{3.37}$$

onde $g_1(r) = g(x, v(r)) - u(r)$. Pois, (3.37) implica

$$\begin{aligned} -[(N-1)r^{N-2}u'(r) + r^{N-1}u''(r)] &= r^{N-1}g_1(r) \\ \Rightarrow -r^{N-1}\left(\frac{N-1}{r}u'(r) + u''(r)\right) &= r^{N-1}g_1(r) \\ \Rightarrow -\triangle u &= g_1(r). \end{aligned}$$

Agora, integrando (3.37) de 0 a r temos

$$r^{N-1}u'(r) = -\int_0^r s^{N-1}g_1(s)ds.$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis $s = rt$, $ds = rdt$, temos

$$\begin{aligned} r^{N-1}u'(r) &= -\int_0^1 r^{N-1}t^{N-1}g_1(rt)rdt \Rightarrow \\ u'(r) &= -r\int_0^1 t^{N-1}g_1(rt)dt \Rightarrow \frac{u'(r)}{r} = -\int_0^1 t^{N-1}g_1(rt)dt. \end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{r\to 0}\int_0^1 t^{N-1}g_1(rt)dt = \int_0^1 t^{N-1}g_1(0)dt = g_1(0)\frac{t^N}{N}\bigg|_0^1 = \frac{g_1(0)}{N}.$$

Então,

$$\frac{u'(r)}{r} \to -\frac{g_1(0)}{N} \quad \text{quando} \quad r \to 0.$$

Por (3.37) concluímos que u_{rr} existe e $u_{rr}(0) = -\frac{g_1(0)}{N}$ quando $r \to 0$. Então $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Isto mostra a regularidade da solução.

■

Apêndice A

Espaço de Sobolev de Ordem Fracionária

A.1 Espaços de funções integráveis

Consideremos agora funções de valores reais definidas sobre $\mathbb{R}^N$ que são Lebesgue integráveis. Para $1 \leq p < \infty$, definimos o espaço de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^N)$ como o conjunto de todas as funções u definidas em $\mathbb{R}^N$ tal que $|u|^p$ é integrável à Lebesgue sobre $\mathbb{R}^N$. O espaço $L^p(\mathbb{R}^N)$ equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de Banach.

Definição A.1 *O supremo essencial de u é o ínfimo do conjunto de todos os números reais M tais que $|u| \leq M$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Denotamos o supremo essencial por* $\sup ess\, u$.

Logo, quando $p = \infty$, o espaço $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ denota o conjunto das funções de valores reais u definidas sobre $\mathbb{R}^N$, que são mensuráveis à Lebesgue, tal que, $|u|$ tem supremo essencial finito. O espaço $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ equipado com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} ess|u(x)|,$$

é um espaço de Banach.

A.2 Espaços de Sobolev

Dado o multi-índice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ define-se $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$ e $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}...D_N^{\alpha_N}$ denota o operador diferencial de ordem α.

Definição A.2 *Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$, o conjunto das funções localmente integráveis, $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ é definido por*

$$L^p_{loc}(\mathbb{R}^N) = \{u : u \in L^p(K), \forall\ K \subset \mathbb{R}^N\}.$$

Definição A.3 *Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e α um multi-índice. Então, v é a $\alpha -$ ésima derivada fraca de u se, e somente se,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} uD^\alpha\phi = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^N} v\phi, \quad \forall\ \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Da mesma forma como nas derivadas clássicas escrevemos $v = D^\alpha u$. A definição de derivada fraca estende a de derivada clássica.

Seja $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Representa-se por $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, o espaço de Sobolev de ordem m sobre $\mathbb{R}^N$, isto é, o espaço vetorial das (classes de) funções

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^N) : D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^N), \quad \text{para todo} \quad |\alpha| \leq m\},$$

Para cada $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ define-se a norma de u por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para} \quad 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\mathbb{R}^N)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},$$

$W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach. Além disso, $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 < p \leq \infty$.

Quando $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\mathbb{R}^N)$ é denotado por $H^m(\mathbb{R}^N)$, o qual é um espaço de Hilbert com o produto escalar dado por

$$(u, v)_{H^m(\mathbb{R}^N)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

para todo $u, v \in H^m(\mathbb{R}^N)$, e é denominado espaço de Sobolev de ordem m.

Seja $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ o conjunto de todas as funções C^∞ com suporte compacto em $\mathbb{R}^N$, o qual é denso em $L^p(\mathbb{R}^N) = W^{0,p}(\mathbb{R}^N)$. Porém, $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ nem sempre será denso em $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, para $m \geq 1$. Motivado por este fato, define-se o espaço $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. O espaço de Sobolev $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < \infty$ também é um espaço de Banach, reflexivo e separável. Quando $p = 2$, escreve-se $H_0^m(\mathbb{R}^N)$ em lugar de $W_0^{m,2}(\mathbb{R}^N)$.

Apresentaremos agora os Espaços de Sobolev de Ordem Fracionária.

A.3 Espaços de Sobolev Fracionários

Dados $s > 0$ e $s \notin \mathbb{N}$ escrevemos $s = m + \lambda$ com $0 < \lambda < 1$ e $m \geq 0$ inteiro. Definimos, para $1 \leq p < \infty$

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N) : \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^{\lambda + \frac{N}{p}}} \in L^p(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N), \quad \forall\ |\alpha| = m \right\},$$

e para $p = \infty$

$$W^{s,\infty}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in W^{m,\infty}(\mathbb{R}^N) : \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^{\lambda}} \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N), \quad \forall\ |\alpha| = m \right\}.$$

Definimos a semi-norma de Sobolev,

$$|u|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{\lambda p + N}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}},$$

para $1 \leq p < \infty$ e,

$$|u|_{W^{s,\infty}(\mathbb{R}^N)} = \sum_{|\alpha|=m} \sup_{x,y \in \mathbb{R}^N} ess \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^{\lambda}},$$

para $p = \infty$.

O espaço $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach reflexivo com a norma

$$\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} = (\|u\|^p_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} + |u|^p_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)})^{\frac{1}{p}},$$

para $1 \leq p < \infty$, e

$$\|u\|_{W^{s,\infty}(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{W^{m,\infty}(\mathbb{R}^N)} + |u|_{W^{s,\infty}(\mathbb{R}^N)},$$

para $p = \infty$.

Quando $p = 2$ a notação usada é $H^s(\mathbb{R}^N)$ ao invés de $W^{s,2}(\mathbb{R}^N)$.

Para maiores detalhes sobre os espaços apresentados neste apêndice veja [1].

Apêndice B

Resultados Utilizados

B.1 Definições

Definição B.1 (Imersão contínua) *Sejam E_1 e E_2 espaços normados. Dizemos que E_1 está imerso continuamente em E_2 se*

(a) *E_1 é subespaço vetorial de E_2,*

(b) *O operador identidade $Id : E_1 \to E_2$ é contínuo.*

Definição B.2 (Imersão compacta) *Sejam E_1 e E_2 espaços de Banach, com $E_1 \subset E_2$. Dizemos que E_1 está imerso compactamente em E_2 se $Id : E_1 \to E_2$ for um operador contínuo e compacto, isto é, se satisfaz*

(a) $\|u\|_{E_2} \leq C\|u\|_{E_1}$,

(b) *Qualquer sequência limitada em E_1 é pré-compacta em E_2.*

Definição B.3 *Seja E um espaço de Banach. Uma sequência $\{u_n\} \subset E$ é dita pré-compacta se ela possui uma subsequência convergente.*

Definição B.4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. O suporte de u é o fecho, em Ω, do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$. Diz-se que uma função u tem suporte compacto em Ω se existir um conjunto compacto K, com $K \subset \Omega$ tal que $\operatorname{supp} u \subset K$.*

Definição B.5 *Seja $J : U \subset E \to \mathbb{R}$ um funcional definido em um subconjunto aberto U de um espaço de Banach E. Diremos que J é diferenciável à Gâteaux em $u \in U$ se para cada $h \in E$*

$$\lim_{t \to 0} \frac{J(u + th) - J(u)}{t}$$

existir.

Denotaremos a derivada de Gâteaux em u por $J'(u)$.

Observação B.1 *A Derivada de Gâteaux para funcionais definidos em espaços de Banach é uma extensão natural da derivada direcional de funções com n variáveis.*

Definição B.6 *Seja $J : U \subset E \to \mathbb{R}$ um funcional definido em U, um subconjunto aberto do espaço de Banach E. Diremos que J é diferenciável à Fréchet em $u \in U$, se existir $A \in E'$ tal que, para cada $h \in E$*

$$\lim_{h \to 0} \frac{J(u + h) - J(u) - Ah}{\|h\|} = 0.$$

Denotaremos A por $J'(u)$.

Observação B.2 *É imediato verificar que todo funcional diferenciável à Fréchet é diferenciável à Gâteaux.*

Observação B.3 *Se o funcional J da definição anterior tiver derivada de Gâteaux contínua em U. Então, f é diferenciável à Fréchet e $f \in C^1(U, \mathbb{R})$.*

Definição B.7 (Condição (PS)) *Sejam E um espaço de Banach e $J : E \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 em E. Dizemos que J satisfaz a condição de Palais-Smale (condição (PS)) se toda sequência $(u_n) \subset E$ tal que*

(i) $|J(u_n)| \leq C$,

(ii) $J'(u_n) \to 0$

possui uma subsequência convergente.

Definição B.8 *Uma função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função carathéodory se:*

(a) *para cada $s \in \mathbb{R}$ fixado, a função $x \mapsto f(x, s)$ é mensurável em Ω;*

(b) *para quase todo ponto $x \in \Omega$ função $s \mapsto f(x, s)$ é contínua em $\mathbb{R}$.*

B.2 Resultados Utilizados

Para demonstração do Lema B.1 ao Teorema B.2, veja [15].

Lema B.1 *Se $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory, então a função $x \mapsto f(x, u)$ é mensurável para toda $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mensurável.*

Lema B.2 *Se $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory, então o operador N_f : $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$, ($\mathcal{M}$ é o conjunto de todas as funções mensuráveis $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$) dado por*

$$N_f(u) = f(x, u),$$

é chamado de Operador de Nemitskii.

Teorema B.1 (Continuidade do Operador de Nemitskii) *Seja $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory. Suponha que existem uma constante $C > 0$, uma função $b \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$ e $r > 0$ tais que*

$$|f(x, s)| \leq b(x) + C|s|^r.$$

Então $N_f : L^{rq}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ é contínuo.

Teorema B.2 (Teorema do Passo da Montanha) *Seja E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição Palais-Smale. Suponha que $I(0) = 0$ e que as seguintes condições sejam sastisfeitas:*

(i) Existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que $I(u) \geq \alpha$ se $\|u\| = \rho$;

(ii) Existe $e \in E$ tal que

$$\|e\| \geq \rho \quad e \quad I(e) \leq 0.$$

Defina

$$\Gamma = \{g \in C([0, 1], E);\ g(0) = 0 \quad e \quad g(1) = e\}.$$

Então,

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(g(t))$$

é um valor crítico de I.

Teorema B.3 (Teorema do Valor Médio) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, diferenciável em (a,b). Existe $c \in (a, b)$, tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

(Veja [11])

Para demonstração dos Teoremas B.4 a B.8, veja [4].

Teorema B.4 *Sejam E um espaço normado e uma sequência $\{u_n\} \subset E$. Então, $u_n \rightharpoonup u$ se, e somente se, $\langle u_n, \phi\rangle \to \langle u, \phi\rangle$, para todo $\phi \in E'$.*

Teorema B.5 *Sejam $\{u_n\}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$, tais que $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Então, existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ tal que*

(a) $u_{n_k}(x) \to u(x)$ *q.t.p. em* Ω,

(b) $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *q.t.p. em* Ω, $\forall\ k$, *onde* $h \in L^p(\Omega)$.

Teorema B.6 (Teorema de Representação de Riesz) *Seja H um espaço de Hilbert, então dado $f \in H'$ existe um único $y \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle y, x\rangle, \quad \forall\ x \in H.$$

E verifica-se que

$$\|f\|_{H'} = \|y\|_H.$$

Teorema B.7 (Desigualdade de Hölder) *Sejam Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Teorema B.8 (Desigualdade de Young) *Para todo $a, b \geq 0$ vale a desigualdade:*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}$$

com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Para demonstração dos Teoremas B.9 a B.11, veja [9].

Teorema B.9 (Desigualdade de Minkowski) *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $f, g \in L^p(\Omega)$, *então* $f + g \in L^p(\Omega)$ *e*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Teorema B.10 *Se* $1 \leq p < \infty$ *e* $a, b \geq 0$, *então*

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Teorema B.11 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Seja* E *um espaço vetorial com produto interno. Então*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Teorema B.12 (Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções de* $L^1(\Omega)$. *Suponhamos que*

(*a*) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω,

(*b*) *Existe* $h \in L^1(\Omega)$ *tal que, para cada* n, $|f_n(x)| \leq h(x)$ *q.t.p. em* Ω.

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e* $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.
(Veja [4])

Para demonstração dos Teoremas B.13 a B.14, veja [14].

Teorema B.13 *Suponha que* E *seja um espaço de Banach reflexivo, então toda sequência limitada em* E *possui subsequência fracamente convergente.*

Teorema B.14 *Seja* H *um espaço de Hilbert. Se* E *é um subconjunto de* H, *então*

$$\overline{E} = H \quad \Leftrightarrow \quad E^{\perp} = \{0\}.$$

Teorema B.15 (Agmon-Douglis-Niremberg) *Suponha que* Ω *é um aberto de classe* C^2 *com fronteira* $\partial\Omega$ *limitada. Seja* $1 < p < \infty$. *Então, para todo* $f \in L^p(\Omega)$, *existe uma única solução do problema*

$$-\Delta u + u = f \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Além disso, se Ω *é de classe* C^{m+2} *e se* $f \in W^{m,p}(\Omega)$*,* $m \in \mathbb{N}$*, então*

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega) \quad e \quad \|u\|_{W^{m+2,p}} \leq C\|u\|_{W^{m,p}}.$$

(Veja [7])

Teorema B.16 (Imersão de Sobolev) *As seguintes imersões são contínuas:*

(a) $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, $p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp} = p^*$ *se* $mp < N$.

(b) $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, $p \leq q < \infty$ *se* $mp = N$.

(c) $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{k,\alpha}$ *se* $mp > N$,

onde k *é um inteiro verificando* $k < m - Np \leq k+1$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *satisfazendo* $0 < \alpha \leq m - k - \frac{N}{p} = \alpha_0$ *se* $\alpha_0 < 1$ *e* $0 < \alpha < 1$ *se* $\alpha_0 = 1$.

(Veja [13])

Teorema B.17 (Morrey) *Seja* $p > N$ *então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

continuamente.

Além disso, para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *se verifica*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p},$$

quase sempre em $x, y \in \mathbb{R}^N$*. Com* $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ *e* C *uma constante (que depende somente de* p *e de* N*).*
(veja [4])

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, N.Y., (1975).

[2] AMBROSETTI, A & RABINOWITZ, P. H., *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Functional Analysis 14, 349-381, (1973).

[3] BERESTYCKI, H. & LIONS P.L., *Nonlinear scalar field equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. 82, 313-379, (1983).

[4] BREZIS, H., *Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, (1987).

[5] FIGUEIREDO, D. G. de, *Semilinear Elliptic Systems*, School on Nonlinear Differential Equations, UNICAMP, Campinas, Brazil, (2006).

[6] FIGUEIREDO, D. G. de, & YANG J., *Decay, symmetry and existence of positive solutions of semilinear elliptic systems*, Nonl. Anal. TMA 33(3): 211-234, (1998).

[7] GILBARG D. & TRUDINGER N., *Elliptic Partial Differential Equations Of Second Order*, Second Edition. Springer, (1998).

[8] HULSHOF, J. & VAN DER VORST, R.C.A.M., *Differential systems with strongly indefinite variational structure*, J. Funct. Anal. 114: 32-58, (1993).

[9] KREYZKIG, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, New York, (1989).

[10] LI, S. & WILLEM, M., *Applications of local linking to critical point theory*. J. Math. Anal. Appl. 189: 6-32, (1995).

[11] LIMA, E. L., *Curso de Análise*, v.1.12.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, (2008).

[12] LIONS, P. L., *Symétrie et compacité dans les espaces de Sobolev*, J. Functl. Anal., 49, 315-334, (1982).

[13] MEDEIROS, L. A. & MIRANDA, M.M., *Espaços de Sobolev: Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos*, Rio de Janeiro: UFRJ. IM, (2000).

[14] OLIVEIRA, C. R. de, *Introdução à Análise Funcional*, Rio de Janeiro: IMPA, (2010).

[15] RABINOWITZ, P. H., *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, (1986).

[16] SERRIN, J. & ZOU H., *Existence of positive entire solutions of elliptic Hamiltonian systems* Comm. Part. Diff. Eq. 23(3-4): 577-599, (1998).

[17] SIRAKOV, B., *On the existence of solutions of Hamiltonian elliptic systems in* $\mathbb{R}^N$, Adv. Differential Equations 5, no. 10-12, 1445-1464, (2000).

[18] STRAUSS, W., *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Commun. Math. Phys., 55, 149-162. (1977).

[19] WILLEM, M., *Minimax Theorems*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlim, (1996).