UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Invariante de Makar-Limanov de certas hipersuperfícies algébricas

Renato dos Santos Diniz

João Pessoa-PB

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Invariante de Makar-Limanov de certas hipersuperfícies algébricas

por

Renato dos Santos Diniz

sob orientação do

Prof. Dr. Cleto Brasileiro de Miranda Neto

João Pessoa-PB

Agosto de 2013

D585i Diniz, Renato dos Santos.

Invariante de Makar-Limanov de certas hipersuperfícies algébricas / Renato dos Santos Diniz.- João Pessoa, 2013.

46f.

Orientador: Cleto Brasileiro de Miranda Neto

Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Hipersuperfícies algébricas. 3. Invariante de Derksen. 4. Invariante de Makar-Limanov.

UFPB/BC CDU: 51(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Invariante de Makar-Limanov de certas hipersuperfícies algébricas

por
Renato dos Santos Diniz

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra.

Aprovada em 29 de agosto de 2013.

Prof. Dr. Cleto Brasileiro de Miranda Neto (Orientador)

Prof. Dr. Aron Simis

Prof. Dr. Fernando Antônio Xavier de Souza

Aos meus avos, Bernadete Alves e Jaime dos Santos e minha mãe, Ivone Alves.

Agradecimentos

A força maior, Deus de amor, O qual me concedeu saúde, paz e prosperidade no desenvolvimento de minhas tarefas e, também, a todos os bons Espíritos de Luz que me assistiram.

A todos meus familiares pelo incentivo e orações, carinhosamente, a meus irmãos, tios e tias, primos e primas.

Aos meus mestres do ensino básico e superior, que participaram de minha formação acadêmica. De forma particular, ao professor, Cleto Brasileiro de Miranda Neto, mostrado-se bem mais que um orientador, um amigo. Pelas sugestões dadas, pelo Professor Aron Simis, enriquecendo nosso trabalho.

Aos meus amigos e amigas, aqueles e aquelas que de fato estavam presentes em minha caminhada, ajudando, torcendo e comemorando a cada vitória.

Sei que meu trabalho é uma gota no oceano, mas sem ele, o oceano seria menor

(Madre Tereza de Calcutá)

Resumo

O *invariante de Makar-Limanov* $ML(B)$ de uma k-álgebra afim B (com k corpo, que tipicamente será assumido de característica zero) é um invariante bastante importante, definido em termos dos núcleos de certas derivações especiais de B chamadas *derivações localmente nilpotentes.* O tema possui conexões com vários problemas centrais em Álgebra Comutativa, por exemplo, a Conjectura Jacobiana, o Décimo Quarto Problema de Hilbert, e o Problema do Cancelamento, e tem sido investigado por diversos autores. Neste trabalho, após a apresentação de conceitos e resultados básicos, nossa principal meta é a obtenção explícita da estrutura de $ML(B)$ (como k-álgebra) quando B é o anel de coordenadas de certas hipersuperfícies algébricas afins especiais, a saber, as chamadas *superfícies de Danielewski*, bem como o famoso 3-fold de Makar-Limanov definido por $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$.

Abstract

The *Makar-Limanov invariant* $ML(B)$ of an affine k-algebra B (with k a field, which will be typically assumed to be of characteristic zero) is a very important invariant, defined in terms of the kernels of suitable derivations of B called *locally nilpotent derivations*. The theme has connections to various central problems in Commutative Algebra, for instance, the Jacobian Conjecture, the Fourteenth Hilbert's Problem, and the Cancellation Problem, and has been investigated by many authors. In this work, after the presentation of basic concepts and results, our main goal is the explicit obtainment of the structure of $ML(B)$ (as a k-algebra) when B is the coordinate ring of certain special affine algebraic hypersurfaces, to wit, the so-called *Danielewski surfaces*, as well as the famous Makar-Limanov 3-fold defined by $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$.

Sumário

Introdução

O chamado *invariante de Makar-Limanov* de uma k-álgebra (onde k é um corpo, tipicamente assumido de característica zero) foi introduzido em 1996 por Leonid Makar-Limanov, em seu artigo [13], onde ele usou tal invariante como um instrumento fundamental para obter o importante resultado de que o 3-fold complexo definido por

$$x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$$

não é algebricamente isomorfo ao espaço afim $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ (mesmo sendo difeomorfo a $\mathbb{R}^6$! Vide, por exemplo, [11]). Até então este intrigante problema estava em aberto e havia recebido várias abordagens, sem sucesso, por parte de vários autores que estavam mais geralmente interessados no clássico problema de classificação de variedades algébricas afins.

A primeira demonstração dada por L. Makar-Limanov, em [13], era bastante longa e técnica, e contou com a intervenção das chamadas *derivações Jacobianas*. Em [15], ele simplificou seus argumentos e escreveu uma prova mais curta. Outras demonstrações surgiram posteriormente por parte de alguns autores.

Em seguida, em [14], Makar-Limanov aplica o mesmo invariante para determinar um conjunto de geradores para o grupo dos k-automorfismos do anel de coordenadas de uma *superfície de Danielewski*, ou seja, uma k-álgebra do tipo

$$k[X, Y, Z]/(X^nZ - p(Y)).$$

Um dos aspectos que justifica a importância de tais superfícies é a estreita conexão com o famoso "*Cancellation Problem*" (vide, e.g., [5]).

Tanto a própria definição do invariante de Makar-Limanov, quanto as memoráveis demonstrações obtidas por L. Makar-Limanov, fazem uso crucial do conceito de *derivação localmente nilpotente*. Se B é uma k-álgebra, então uma derivação D de B é localmente nilpotente se, para cada $b \in B$, existe natural n (dependendo de b) tal que $D^n(b) = 0$. Tal classe de derivações desempenha um papel importante em Álgebra e Geometria Algébrica, o que pode ser justificado, além da própria teoria de L. Makar-Limanov, pelos inúmeros problemas que podem ser atacados ou reformulados em termos desta noção; sem dúvida, uma das principais fontes de interesse é a famosa *Conjectura Jacobiana* (vide, e.g., [7]), bem como o também famoso *Décimo Quarto Problema de Hilbert* (e.g., [2], [8]), além do "*Cancellation Problem*" mencionado acima (vide também [4]), dentre vários outros.

Se B é um k-domínio e se $\mathrm{DLN}(B)$ denota o conjunto das derivações localmente nilpotentes de B, então o seu invariante de Makar-Limanov é definido como

$$ML(B) := \bigcap_{D \in \mathrm{DLN}(B)} \ker D.$$

Note que se trata de uma k-subálgebra de B. O fato básico é que, se A e B são k-álgebras tais que $ML(A)$ e $ML(B)$ são não-isomorfas, então A e B também são não-isomorfas.

O objetivo principal dessa dissertação é calcular explicitamente o anel $ML(B)$, quando B é o anel de coordenadas de certas hipersuperfícies algébricas afins particulares. Primeiro tratamos o caso das superfícies de Danielewski (obtido originalmente por L. Makar-Limanov em [12] e [14], e generalizado por M. Veloso em sua tese [19]), e em seguida, o foco é dado ao célebre 3-fold definido por $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$ mencionado no início desta introdução. O ponto curioso é que, para obtermos o segundo resultado (que trata de um 3-fold), faremos uso do primeiro (que trata de uma superfície) como um dos ingredientes centrais!

Um outro ingrediente primordial aqui utilizado para a obtenção do referido resultado de Makar-Limanov, é o chamado *invariante de Derksen* $\mathcal{D}(B)$ de uma k-ágebra B, introduzido por Derksen em sua tese [6]. Na realidade, se B é o anel de coordenadas do 3-fold acima, então determinaremos $ML(B)$ como um corolário do cálculo de $\mathcal{D}(B)$, seguindo o tratamento apresentado em [10].

Este trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo introduzimos conceitos e propriedades básicas sobre derivações de k-álgebras, incluindo um certo detalhamento acerca de derivações homogêneas bem como $\mathbb{Z}$-filtrações e os anéis graduados associados. No segundo capítulo, introduzimos a noção de derivação localmente nilpotente e provamos uma série de propriedades, por exemplo a respeito do núcleo de uma tal derivação, o que se mostrou crucial para o desenvolvimento da teoria, e que desperta interesse próprio; por exemplo, se D é uma derivação localmente nilpotente de um domínio fatorial B, então $\ker D$ também é fatorial. Merece também atenção especial o uso do automorfismo $exp\, D$ – a exponencial de D – como uma ferramenta bastante útil para a obtenção de propriedades importantes. Ainda no segundo capítulo, apresentamos duas ferramentas de fundamental importância neste trabalho: os invariantes de Makar-Limanov e de Derksen de uma k-álgebra, juntamente com algumas de suas propriedades básicas.

Finalmente, no terceiro capítulo, demonstramos os principais resultados estudados nesse trabalho. Primeiro, calculamos o invariante $ML(B)$ quando B é o anel de coordenadas de uma superfície de Danielewski; e segundo, após provarmos uma seqüência de resultados auxiliares, obtemos explicitamente o invariante $\mathcal{D}(B)$ quando B é o anel de coordenadas do 3-fold mencionado acima, o que nos possibilitou derivar o cálculo de $ML(B)$ para esta hipersuperfície.

Capítulo 1

Preliminares

Ao longo deste trabalho, k denotará um corpo de característica zero, e todos os anéis (denotados A, B,...) serão sempre considerados k-álgebras comutativas. Se B é um anel, denotamos por B^* o grupo dos elementos invertíveis de B, e se B é domínio, por $\mathrm{frac}(B)$ o seu corpo de frações. O grupo dos k-automorfismos de um anel B será denotado por $\mathrm{Aut}_k(B)$.

Se $A \subset B$ é uma extensão de domínios, então $\mathrm{tr.deg}_A(B)$ denota o grau de transcendência de $\mathrm{frac}(B)$ sobre $\mathrm{frac}(A)$. Dado $x \in B$, o ideal principal de B gerado por x será denotado por xB ou (x). De forma mais geral, o ideal gerado por $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$ será denotado por $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. O termo *k-domínio afim* significará um domínio finitamente gerado como k-álgebra. As notações $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ denotam o corpo dos racionais, reais e complexos, respectivamente. Além disso, $\mathbb{Z}$ denota o anel dos inteiros, $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais (incluindo 0), e S_n o grupo de simetrias de n símbolos.

Como referências em Álgebra Comutativa, sugerimos por exemplo os livros [1] e [16].

1.1 Derivações de uma k-álgebra

Nesta seção, introduziremos alguns conceitos e resultados preliminares sobre a teoria de derivações de uma k-álgebra. O conteúdo foi baseado em [3] e [10], mas maiores detalhes e informações podem ser encontradas também em outras referências, como por exemplo [16, Part II].

Definição 1.1. Uma *derivação* D do anel B é uma função $D\colon B \longrightarrow B$ que satisfaz:

(i) $D(a+b) = D(a) + D(b)$

(ii) $D(ab) = bD(a) + aD(b)$ (regra de Leibniz)

para quaisquer $a, b \in B$.

Denotamos por $\operatorname{Der}(B)$ o conjunto de todas as derivações de B. Mais ainda, se A é um subanel de B, então denotamos por $\operatorname{Der}_A(B)$ o conjunto das derivações $D \in \operatorname{Der}(B)$ tais que $D(a) = 0$ para todo $a \in A$; neste caso, dizemos que D é uma A-*derivação*. Claramente, notamos que $\operatorname{Der}(B)$ é um B-módulo e que $\operatorname{Der}_A(B)$ é um B-submódulo de $\operatorname{Der}(B)$. Além disso, é fácil ver que $\operatorname{Der}(B) = \operatorname{Der}_{\mathbb{Z}}(B)$.

O conjunto

$$\ker D := \{b \in B; D(b) = 0\}$$

é o *núcleo de* D, que na verdade é um subanel de B. Na literatura, também é chamado *anel de constantes de* D (alguns autores utilizam a notação B^D). Notemos também que, dados $b \in B$ e $D, E \in \operatorname{Der}(B)$, então $bD, D+E$ e $[D, E] = DE - ED$ são derivações de B.

Exemplos clássicos de derivações são as derivadas parciais no anel de polinômios.

Exemplo 1.1. Se A é um anel e $B = A[x_1, \ldots, x_n]$, temos que, para cada $i = \{1, ..., n\}$, a derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x_i}$ é uma A-derivação.

Dados $D \in \operatorname{Der}(B)$ e $n \geq 0$, D^n é a n-composição $\underbrace{D \circ D \circ ... \circ D}_{n}$, onde D^0 é a aplicação identidade; a imagem de D é denotada $D(B)$ ou simplesmente DB.

Se A é um anel, podemos denotar, quando conveniente, por $A^{[n]}$ o anel de polinômios a n variáveis sobre A.

Seja $A \subset B$ extensão de anéis com $B = A[t] \cong A^{[1]}$, para algum $t \in B$. Então, a derivada de B em relação ao par (A, t) é a derivação $\left(\frac{d}{dt}\right)_A \in \operatorname{Der}_A(B)$ definida por

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_A (t) = 1.$$

Quando o subanel A está subentendido, denotamos esta derivação mais simplesmente por $\frac{d}{dt}$, e neste caso, dado $P(t) \in A[t]$, definimos também

$$P'(t) := \frac{d}{dt}(P(t)).$$

Da mesma forma, dado $n \geq 0$, os símbolos

$$P^{(n)} \quad \text{e} \quad \frac{d^n P}{dt^n}$$

denotam a n-composição

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (P(t)).$$

Proposição 1.1. *Sejam $D \in \mathrm{Der}(B)$ e $A = \ker D$.*

(a) *$D(ab) = aD(b), \forall a \in A, b \in B$. Portanto, D é A-linear.*

(b) (***regra do quociente***) *Se $g \in B^*$ e $f \in B$, então $D(fg^{-1}) = g^{-2}(gDf - fDg)$.*

Prova: A prova do item **a** segue imediatamente da definição de derivada, uma vez que se $a \in A$, tem-se $D(ab) = bD(a) + aD(b) = 0 + aD(b)$. Já para a prova do item **b**, consideremos a seguinte equação:

$$Df = D(gfg^{-1}) = gD(fg^{-1}) + fg^{-1}D(g),$$

donde $gD(fg^{-1}) = Df - fg^{-1}D(g)$, como $g \in B^*$ podemos multiplicar esta última expressão por g^{-1}, implicando $D(fg^{-1}) = g^{-2}(gDf - fDg)$, como queríamos. ■

Proposição 1.2. (***Regra de Leibniz Generalizada***) *Se B é um anel, $D \in \mathrm{Der}(B)$ e $x, y \in B$, $n \in \mathbb{N}$, então*

$$D^n(xy) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^{n-i}(x) D^i(y).$$

Prova: Provaremos usando o princípio de indução finita sobre n. Para $n = 1$ a fórmula é válida pois $D \in \mathrm{Der}(B)$. Seja, agora, $n > 1$. Suponhamos que a igualdade é verificada para $n-1$. Logo

$$
\begin{aligned}
D^n(xy) &= D(D^{n-1}(xy)) \\
&= D\left(\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}D^{n-1-i}(x)D^i(y)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}D\left(D^{n-1-i}(x)D^i(y)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\left(D^{n-i}(x)D^i(y)+D^{n-1-i}(x)D^{i+1}(y)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}D^{n-i}(x)D^i(y)+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}D^{n-1-i}(x)D^{i+1}(y) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}D^{n-i}(x)D^i(y)+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}D^{n-i}(x)D^i \\
&= D^n(x)y+\sum_{i=0}^{n-1}\left(\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}\right)D^{n-i}(x)D^i+xD^n(y) \\
&= D^n(x)y+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}D^{n-i}(x)D^i+xD^n(y) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}D^{n-i}(x)D^i(y).
\end{aligned}
$$

■

Observação 1.1. Usando indução, obtém-se que: Se B é um anel, $D \in \mathrm{Der}(B)$, então $D(b^n) = nb^{n-1}D(b)$, para todo $b \in B, n \geq 1$. O caso $n = 1$ é evidente. Suponhamos que $D(b^n) = nb^{n-1}D(b)$ seja válida. Assim, $D(b^{n+1}) = D(b^n b) = D(b^n)b + b^n D(b) = nb^{n-1}D(b)b + b^n D(b) = nb^n D(b) + b^n D(b) = (n+1)b^n D(b)$. Portanto, a sentença

$$D(b^n) = nb^{n-1}D(b)$$

é verdadeira para todo $n \geq 1$. Este fato é conhecido como **regra da potência**.

Proposição 1.3. *Sejam A um subanel de B, e $t \in B$ um elemento transcendente sobre A. Se $P(t) \in A[t]$ é dado por $P(t) = \sum_{i=0}^{m} a_i t^i$, com $a_i \in A$ para todo $i = 0, \ldots, m$, então*

$$P'(t) = \sum_{i=1}^{m} i a_i t^{i-1},$$

onde $P'(t) = (\frac{d}{dt})_A(P(t).)$

Prova: Da parte (a) da proposição (1.1) e da observação (1.1), para $1 \leq i \leq m$, segue

$$\frac{d}{dt}(a_i t^i) = a_i \frac{d}{dt}(t^i) = a_i(it^{i-1}).$$

Agora, da propriedade de aditividade das derivações, tem-se imediatamente o resultado.
■

Observação 1.2. Um ideal $I \subset B$ é um *ideal diferencial* para uma derivação $D \in \mathrm{Der}(B)$ se $D(I) \subset I$ (esta noção é devida a Seidenberg). Na literatura, também o chamam de *ideal integral* para D, ou também diz-se que D é uma *derivação logarítmica* de I. Por exemplo, qualquer ideal de B gerado por elementos de $\ker D$ é um ideal diferencial para D. Se $I \subset B$ é diferencial para D, então é fácil ver que D induz de forma natural uma derivação do anel quociente B/I, e mais ainda, se B é finitamente gerada como k-álgebra, então tal processo define um epimorfismo partindo do módulo das derivações logarítmicas de I, sobre o módulo das k-derivações da k-álgebra B/I.

Proposição 1.4. *Sejam A um anel e $B = A[x_1, \ldots, x_n]$.*

(i) *Se $D \in \mathrm{Der}_A(B)$ e $f \in B$, então $D(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} D(x_i)$;*

(ii) *Se $f_1, \ldots, f_n \in B$ então existe uma única A-derivação D de B tal que $D(x_1) = f_1, \ldots, D(x_n) = f_n$. Esta derivação é dada por: $D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$;*

(iii) $\mathrm{Der}_A(B)$ *é um B-módulo livre com base livre $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$, ou seja:*

$$\mathrm{Der}_A(B) = \bigoplus_{i=1}^{n} B \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Prova:

(i) Seja $M = \{g \in B; D(g) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} D(x_i)\}$. É fácil verificar que M é um A-submódulo de B contendo todo monômio $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$; segue-se que $M = B$ e consequentemente $f \in M$;

(ii) É claro que $D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ é uma A-derivação de B e que $D(x_i) = f_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Se D_1 é uma outra A-derivação de B com tais propriedades, teremos por (i) que:

$$D_1(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} D_1(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} f_i = D(f),$$

para todo $f \in A[x_1, \ldots, x_n]$. Portanto, D é única.

(iii) Segue imediatamente dos fatos provados acima.

∎

A partir da proposição 1.1, proposição 1.2 (*regra de Leibniz generalizada*) e da observação 1.1 (*regra da potência*), torna-se simples a verificação do seguinte fato:

Proposição 1.5. *Se B é um anel, $D \in \mathrm{Der}(B)$, $f(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i t^i \in B[t] = B^{[1]}$ e $b \in B$, então*

$$D(f(b)) = f^{(D)}(b) + f'(b)D(b),$$

onde $f'(t) \in B[t]$ é a derivada de $f(t)$, e $f^{(D)} = \sum_0^n D(b_i)t^i \in B[t]$. Mais geralmente, se $f \in B[t_1, t_2, ..., t_n]$ e $b_1, b_2, ..., b_n \in B$ então

$$D(f(b_1, b_2, ..., b_n)) = f^{(D)}(b_1, b_2, ..., b_n) + \sum_0^n \frac{d}{dt_i}(b_1, b_2, ..., b_n)D(b_i).$$

Prova: Denotemos $M = \{f \in B[t]; D(f(b)) = f^{(D)}(b) + f'(b)D(b)\}$. Notemos: se $a \in B$ e $f(t) = at^i$ é um monômio de $B[t]$, então $f(b) = ab^i$ e

$$\begin{aligned} D(f(b)) &= D(a)b^i + aD(b^i) \\ &= D(a)b^i + aib^{i-1}D(b) \\ &= f^{(D)}(b) + f'(b)D(b). \end{aligned}$$

Logo, $f \in M$, e como D é linear, segue que $M = B[t]$. Com a mesma idéia, demonstramos a forma geral enunciada. ∎

Observamos a seguir um resultado importante, onde usamos o fato provado acima como um dos ingredientes. Note também que, se $D \in \mathrm{Der}(B)$, $A = \ker D$, $P \in A[t]$ e $t \in B$, então

$$D(P(t)) = P'(t)D(t),$$

que é a bem-conhecida *regra da cadeia*.

Lema 1.1. *Se B é um domínio (contendo um corpo de característica zero, como convencionado desde o início) e se $D \in \mathrm{Der}(B)$, então $\ker D$ é algebricamente fechado em B.*

Prova: Seja $b \in B$ algébrico sobre $\ker D$. Então existe $f \in A[t]$ não-nulo, com menor grau possível, tal que $f(b) = 0$. Aplicando D a esta igualdade, obtemos

$$0 = D(f(b)) = f^{(D)}(b) + f'(b)D(b) = f'(b)D(b)$$

Pela escolha do polinômio f, como característica é zero, temos $f'(b) \neq 0$ e assim $D(b) = 0$.
$\blacksquare$

Na verdade o lema acima é apenas uma das implicações do seguinte teorema:

Teorema 1.1. *Seja B uma k-álgebra finitamente gerada. Então, para uma k-subálgebra A de B, são equivalentes:*

(a) *A é algebricamente fechado em B;*

(b) *$A = \ker D$, para alguma $D \in \mathrm{Der}_k(B)$.*

Prova: Vide [17, Proposition 3.2.6]. $\blacksquare$

1.2 Derivações homogêneas

Suponhamos que B é um anel graduado $B = \bigoplus_{i \in I} B_i$, onde I é um semigrupo abeliano ordenado, e cada B_i é um k-espaço vetorial. Se representarmos por ω a tal graduação de B, então os elementos de cada B_i serão chamados de elementos *ω-homogêneos* de B, e se $f \in B_i$, então o *ω-grau* de f é i.
Uma derivação $D \in \mathrm{Der}(B)$ que respeita a graduação ω é chamada uma *derivação ω-homogênea*. Mais precisamente, existe um $d \in I$ tal que $DB_i \subset B_{i+d}$ para cada $i \in I$. O elemento $d \in I$ é chamado de *ω-grau* de D. Observemos que se D é ω-homogêneo e $f \in B$ se expressa como $f = \sum_{i \in I} f_i$, com $f_i \in B_i$, então $Df = 0$ se, e somente se, $Df_i = 0$ para todo i. Isto é porque a decomposição de Df em somas homogêneas é $\sum_{i \in I} Df_i$.
Nosso principal interesse reside no caso $I = \mathbb{Z}^n$ ou $I = \mathbb{N}^n$ para algum $n \geq 1$.

Definição 1.2. Seja B um anel contendo um corpo k. Uma $\mathbb{Z}$-filtração de B é uma coleção $\mathcal{F} = \{B_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ de subconjuntos de B satisfazendo as seguintes condições:

(i) Cada B_i é um k-espaço vetorial;

(ii) $B_j \subset B_i$, sempre que $j \leq i$;

(iii) $B = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} B_i$;

(iv) $B_i B_j \subset B_{i+j}$, $\forall i, j \in \mathbb{Z}$.

A filtração será chamada $\mathbb{Z}$-*filtração própria* se as seguintes propriedades também forem satisfeitas:

(v) $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} B_i = \{0\}$;

(vi) Se $a \in B_i \cap (B \setminus B_{i-1})$ e $b \in B_j \cap (B \setminus B_{j-1})$, então $ab \in B_{i+j} \cap (B \setminus B_{i+j-1})$.

Para k-espaços vetoriais $W \subset V$, a notação V/W denotará o k-espaço vetorial quociente de V módulo W no sentido usual. Suponha que $B = \cup B_i$ é uma $\mathbb{Z}$-filtração própria, e defina a *álgebra graduada associada* $\mathrm{Gr}_{\mathcal{F}}(B)$ como se segue. A estrutura k-aditiva em $\mathrm{Gr}_{\mathcal{F}}(B)$ é dada por

$$\mathrm{Gr}_{\mathcal{F}}(B) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} B_n/B_{n-1}.$$

Consideremos elementos $a + B_{i-1}$ de B_i/B_{i-1}, e $b + B_{j-1}$ de B_j/B_{j-1}, onde $a \in B_i$ e $b \in B_j$. O produto de seus elementos é definido por:

$$(a + B_i/B_{i-1})(b + B_j/B_{j-1}) = ab + B_{i+j-1} \in B_{i+j}/B_{i+j-1}.$$

Em seguida, estende-se esta multiplicação a todo $\mathrm{Gr}(B)$ por distributividade. Nota-se que, por causa da condição (vi) da definição acima, $\mathrm{Gr}(B)$ é um k-domínio comutativo. Além disso, devido à condição (v), para cada elemento não-nulo a de B, o conjunto $\{i \in \mathbb{Z}; a \in B_i\}$ possui um mínimo, que será denotado por $\iota(a)$. Disto decorre uma aplicação natural

$$\rho \colon B \longrightarrow \mathrm{Gr}(B)$$

que envia cada elemento não-nulo de B à sua classe em B_i/B_{i-1}, onde $i = \iota(a)$. Define-se $\rho(0) = 0$.

Dado $a \in B$, tem-se $\rho(a) = 0$ se, e somente se, $a = 0$. Note ainda que ρ é um mapa multiplicativo, mas não é um homomorfismo de álgebras, uma vez que, em geral, não respeita a adição.

No caso em que B já é um anel $\mathbb{Z}$-graduado, digamos $B = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i (A_0 = k)$, então uma $\mathbb{Z}$-filtração própria de B é $\mathcal{F} = \{B_i = \bigoplus_{j \leq i} A_j\}$. Nesta situação a aplicação fornece um isomorfismo de B sobre $\mathrm{Gr}_{\mathcal{F}}(B)$.

Exemplo 1.2. Seja $B = k[x]$ um anel polinomial sobre k, e seja B_i o conjunto dos polinômios de grau no máximo i ($i \geq 0$). Então $k[x] = \cup B_i$ é um $\mathbb{Z}$-filtração (com

$B_i = \{0\}$ para $i < 0$), e

$$\mathrm{Gr}(k[x]) = \bigoplus_{i \geq 0} kx^i \cong k[x].$$

Exemplo 1.3. Seja $B = k(x) = \mathrm{frac}(k[x])$. Dados $p(x), q(x) \in k[x] \setminus \{0\}$, defina o grau da função racional $p(x)/q(x)$ como deg $p(x)$ − deg $q(x)$. Consideremos B_i formado por funções racionais de grau no máximo i. Então

$$\mathrm{Gr}(k(x)) = k[x, x^{-1}],$$

o anel dos polinômios de Laurent.

Defina uma função $\mathrm{gr}(D)\colon \mathrm{Gr}(B) \longrightarrow \mathrm{Gr}(B)$ da seguinte maneira: se $D = 0$, então $\mathrm{gr}(D)$ é a aplicação nula; Se $D \neq 0$, escolha t como sendo o menor inteiro tal que $DB_i \subset B_{i+t}$, para todo i inteiro. Então, dado $i \in \mathbb{Z}$, defina

$$\mathrm{gr}(D) : B_i/B_{i-1} \longrightarrow B_{i+t}/B_{i+t-1}$$

pela regra natural $\mathrm{gr}(D)(a + B_{i-1}) = Da + B_{i+t-1}$. Agora, estendemos $\mathrm{gr}(D)$ para todo $\mathrm{Gr}(B)$ por linearidade; $\mathrm{gr}(D)$ satisfaz a regra do produto, e portanto, é uma k-derivação homogênea de $\mathrm{Gr}(B)$. Notemos, também, que $\mathrm{gr}(D) = 0$ se, e somente se, $D = 0$. Além disso, por definição, tem-se

$$\rho(\ker D) \subset \ker(\mathrm{gr}(D)).$$

Finalmente, é importante observar que, dado $a \in B$, a notação $\mathrm{gr}(a)$ é usada tipicamente para denotar a imagem $\rho(a)$; com isso, deve-se ter cuidado na distinção entre $\mathrm{gr}(D)(a)$ e $\mathrm{gr}(Da)$.

Capítulo 2

Derivações localmente nilpotentes

2.1 Definição e algumas propriedades

Definição 2.1. Dados um anel B e uma derivação $D \in \mathrm{Der}(B)$, definimos o conjunto

$$\mathrm{Nil}(D) = \{x \in B;\, \exists n \in \mathbb{N}, D^n(x) = 0\}.$$

Claramente, temos

$$\ker(D) \subseteq \mathrm{Nil}(D) \subseteq B$$

e, usando essencialmente a regra de Leibniz, vemos que $\mathrm{Nil}(D)$ é de fato um subanel de B.

Enquanto $\ker(D)$ é algebricamente fechado em B (pelo Teorema 1.1), o mesmo nem sempre ocorre com $\mathrm{Nil}(D)$, que, na verdade, nem sempre é integralmente fechado em B, como se vê no exemplo a seguir.

Exemplo 2.1. Sejam $B = \mathbb{Q}[[t]]$ e $D = \frac{d}{dt} : B \longrightarrow B$. Então, é imediato que $\ker(D) = \mathbb{Q}$, e $\mathrm{Nil}(D) = \mathbb{Q}[t]$. Notamos que $\mathrm{Nil}(D)$ não é integralmente fechado em B, pois considerando o elemento $b = \sqrt{1+t} \in B$, temos $b \notin \mathrm{Nil}(D)$ e $b^2 \in \mathrm{Nil}(D)$.

Definição 2.2. Seja B um anel. Uma derivação $D : B \longrightarrow B$ é dita *localmente nilpotente* se

$$\mathrm{Nil}(D) = B,$$

i.e., se para cada $b \in B$ existe $n \in \mathbb{N}$ (dependendo de b) tal que $D^n(b) = 0$.

Denotaremos por $\mathrm{DLN}(B)$ o conjunto das derivações localmente nilpotentes de B. Também usaremos as seguintes notações:

$$\mathrm{DLN}_k(B) = \mathrm{DLN}(B) \cap \mathrm{Der}_k(B)$$

$$\mathrm{KDLN}(B) = \{\ker D;\ D \in \mathrm{DLN}(B)\}$$

$$\mathrm{KDLN}_k(B) = \{\ker D;\ D \in \mathrm{DLN}_k(B)\}.$$

Por exemplo, se $B = k[x_1, \dots, x_n]$, então

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathrm{DLN}_k(B)$$

para cada i. Note que $\mathrm{DLN}(k) = \{0\}$, e que

$$\mathrm{DLN}(k[x]) = \left\{\alpha \frac{\partial}{\partial x};\ \alpha \in k\right\}.$$

Sabe-se também (vide [18]) que, a menos de mudança de variáveis, tem-se

$$\mathrm{DLN}(k[x, y]) = \left\{f \frac{\partial}{\partial y};\ f \in k[x]\right\}.$$

Ainda não se conhece uma descrição explícita para o caso de 3 ou mais variáveis.

Definição 2.3. Sejam B um anel e $S = \Lambda \cup \{-\infty\}$, onde $\Lambda = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Uma *função grau* em B é qualquer aplicação $deg\colon B \longrightarrow S$ satisfazendo:

(i) $deg(a) = -\infty$ se, e somente se, $a = 0$;

(ii) $deg(ab) = deg(a) + deg(b)$;

(iii) $deg(a + b) \leq \max\{deg(a), deg(b)\}$,

para todos $a, b \in B$.

Dados um anel B e $D \in \mathrm{DLN}(B)$, definimos $deg_D\colon B \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ por $deg_D(0) = -\infty$, e

$$deg_D(a) = \max\{n \in N; D^n(a) \neq 0\}$$

para $a \in B \setminus \{0\}$ (uma de suas propriedades é que, se B é domínio, então deg_D é uma função grau em B). Esta noção será estudada mais adiante, mas ela já aparece de modo natural na demonstração do seguinte fato:

Teorema 2.1. *Seja* $B = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} B_i$ *uma* $\mathbb{Z}$*-filtração própria, e suponhamos que* $D \in \mathrm{DLN}(B)$ *respeita esta filtração no sentido de que existe um inteiro* t *tal que, para todo* $i \in \mathbb{Z}$*, vale* $D(B_i) \subseteq B_{i+t}$*. Então*

$$\mathrm{gr}(D) \in \mathrm{DLN}(\mathrm{Gr}(B)).$$

Prova: Podemos supor que $D \neq 0$. Denotemos simplesmente por δ a derivação $\mathrm{gr}(D)$ de $\mathrm{Gr}(B)$, e seja ρ o mapa natural de B em $\mathrm{Gr}(B)$. É suficiente mostrarmos que δ é localmente nilpotente nos conjuntos geradores B_i/B_{i-1} de $\mathrm{Gr}(B)$.

Já que por hipótese D respeita a dada filtração, podemos considerar o menor t tal que $DB_i \subset B_{i+t}$, para todo i. Dado um elemento $a \in B \setminus \{0\}$, seja $\iota(a) = i$, ou seja, $a \in B_i \cap (B \setminus B_{i-1})\}$. Por hipótese, $Da \in B_{i+t}$, assim $\iota(Da) \leq i + t$. Se $\iota(Da) \leq i + t$, então $Da \in B_{i+t-1}$ e

$$\delta(a + B_{i-1}) = Da + B_{i+t-1} = 0.$$

Do contrário, $\iota(Da) = i + t$, o que significa que $\delta(\rho(a)) = \rho(Da)$. Por iteração temos que, ou $\delta^n(\rho(a)) = 0$, ou $\delta^n(\rho(a)) = \rho(D^n a)$. Como D é localmente nilpotente, segue que $\delta^{n+1}(\rho(a)) = 0$ para $n = deg_D(a)$. ■

Definição 2.4. Sejam A um anel e $B = A[x_1, \ldots, x_n]$. Uma A-derivação $D : B \longrightarrow B$ é dita *triangular* se $D(x_1) \in A$, e

$$D(x_i) \in A[x_1, \ldots, x_{i-1}], \quad i = 2, \ldots, n.$$

Note que esta definição depende da escolha de coordenadas.

Exemplo 2.2. Consideremos $B = \mathbb{C}[x, y, z]$. Então, a derivação $x^2\frac{\partial}{\partial y} + (x^5 + y^3)\frac{\partial}{\partial z} \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(B)$ é triangular.

Proposição 2.1. *Sejam* A *um anel e* $B = A[x_1, \ldots, x_n]$*. Então, toda derivação triangular de* B *é localmente nilpotente.*

Prova: Seja $D : B \longrightarrow B$ uma derivação triangular. Procederemos por indução em $n \geq 1$, o caso $n = 1$ sendo óbvio.

Se $n \geq 2$, é claro que D se restringe a uma derivação triangular do subanel $C = A[x_1, \ldots, x_{n-1}] \subset B$. Por indução, $D \in \mathrm{DLN}_k(C)$. Em particular,

$$D(x_n) \in C \subset \mathrm{Nil}(D),$$

o que claramente implica $x_n \in \mathrm{Nil}(D)$. Portanto, D é localmente nilpotente em todo o anel B. $\blacksquare$

Vale ressaltar que o subconjunto $\mathrm{DLN}(B)$ de $\mathrm{Der}(B)$ não possui qualquer estrutura algébrica óbvia. Por exemplo, em $B = k[t]$ a derivação $\frac{d}{dt}$ é localmente nilpotente, enquanto $t\frac{\partial}{\partial t}$ não é; logo, $\mathrm{DLN}(B)$ não é um B-módulo. Seja agora $B = k[x, y]$, e considere as derivações $D_1 = y\frac{\partial}{\partial x}$ e $D_2 = x\frac{\partial}{\partial y}$, que claramente são localmente nilpotentes. No entanto, a soma $D_1 + D_2$ e o bracket de Lie $[D_1, D_2]$ não são localmente nilpotentes (para a soma $D_1 + D_2$, por exemplo, tome $f = x \in B$ e veja que $(D_1 + D_2)^2(x) = x$).

Quando B é um domínio, pode-se provar que deg_D é uma função grau em B (vide [9]) e neste caso utilizando-se tal função pode-se verificar parte do seguinte resultado:

Proposição 2.2. *Sejam B um domínio e $D \in \mathrm{DLN}(B)$. Então:*

(a) $\ker D$ *é saturado (também chamado fatorialmente fechado) em B, isto é, se $a, b \in B \setminus \{0\}$ são tais que $ab \in \ker D$, então $a, b \in \ker D$;*

(b) $B^* \subset \ker D$. *Em particular,* $\mathrm{DLN}(B) = \mathrm{DLN}_k(B)$*;*

(c) *Se B é DFU (domínio de fatoração única), então* $\ker D$ *é DFU.*

(d) *O grupo* $\mathrm{Aut}_k(B)$ *age em* $\mathrm{DLN}(B)$ *por conjugação.*

Prova:

(a) É claro que $\ker\, D = \{x \in B; deg_D(x) \le 0\}$, e assim, se $x, y \in B \setminus \{0\}$ satisfazem $xy \in \ker D$, entao $deg_D(xy) = 0$ e concluimos imediatamente das propriedades da função grau deg_D que $x, y \in \ker D$, ou seja, $\ker\, D$ é um subanel saturado.

(b) Se $y \in B^*$ então existe $y^{-1} \in B$ tal que $yy^{-1} = 1$. Como $1 \in \ker D$ e $\ker D$ é saturado (pelo item (a) acima), segue que $y^{-1} \in \ker D$. Assim, $B^* = (\ker D)^* \subset \ker D$. Finalmente, temos por hipótese $k \subseteq B^*$, logo $D|_k = 0$, i.e., $D \in \mathrm{Der}_k(B)$.

(c) Seja $a \in \ker D$, $a \neq 0$, e escreva $a = q_1 q_2$. Se a é irredutível em $\ker D$, então q_1 ou q_2 pertence a $(\ker D)^*$, e como $(\ker D)^* = B^*$ (como provado acima), segue que a é irredutível em B. A recíproca funciona de maneira análoga. Portanto, segue de imediato que $\ker\, D$ é um DFU.

(d) Segue simplesmente da observação de que

$$(\alpha D \alpha^{-1})^n = \alpha D^n \alpha^{-1},$$

para todos $\alpha \in \mathrm{Aut}_k(B)$ e $n \geq 0$.

■

Com relação ao item (a) da proposição acima, salientamos que nem todo subanel saturado $A \subset B$ é o núcleo de alguma derivação localmente nilpotente de B. De fato, pode-se mostrar que um contra-exemplo é $A = k[x^2 - y^3] \subset B = k[x, y]$.

Proposição 2.3. *Seja $D \in \mathrm{DLN}(B)$ e sejam $f_1, f_2, ..., f_n \in B$ $(n \geq 1)$ elementos dados. Suponhamos que exista uma permutação $\sigma \in S_n$ tal que $Df_i \in f_{\sigma(i)}B$, para cada i. Então em cada órbita de σ existe um i tal que $D(f_i) = 0$.*

Prova:

Suponhamos que $Df_i \neq 0$ para cada i, e escolhamos $a_1, a_2, ..., a_n \in B$ tal que $Df_i = a_i f_{\sigma(i)}$. Então, $deg_D(f_i) \geq 1$ e $deg_D(a_i) \geq 0$ para cada i. Segue que, para cada i,

$$\begin{aligned} deg_D(f_i) - 1 &= deg_D(Df_i) \\ &= deg_D(a_i f_{\sigma(i)}) \\ &= deg_D(a_i) + deg_D(f_{\sigma(i)}) \geq deg_D(f_{\sigma(i)}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} deg_D(f_i) - n \geq \sum_{i=1}^{n} deg_D(f_{\sigma(i)}),$$

o que é um absurdo, uma vez que os dois somatórios que aparecem possuem o mesmo valor. Portanto, $D(f_i) = 0$ para pelo menos algum i. Agora, aplicando este resultado à decomposição de σ em ciclos disjuntos, obtemos o resultado desejado. ■

Se S é um subconjunto multiplicativo do anel B e $D \in \mathrm{Der}(B)$, então a aplicação $S^{-1}D : S^{-1}B \longrightarrow S^{-1}B$ definida por

$$S^{-1}D\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{D(r)s - rD(s)}{s^2},$$

é uma derivação do anel $S^{-1}B$ e é unicamente determinada. A pergunta natural é: quando esta derivação localizada é localmente nilpotente?

Proposição 2.4. *Sejam B um domínio e $D \in \text{Der}(B)$, com $D \neq 0$.*

(a) *Seja $S \subset B \setminus \{0\}$ um subconjunto multiplicativo, e considere a derivação $S^{-1}D$: $S^{-1}B \longrightarrow S^{-1}B$ como acima. Então:*

(a.1) *$S^{-1}D \in \text{DLN}(S^{-1}B)$ se, e somente se, $D \in \text{DLN}(B)$ e $S \subset \ker D$;*

(a.2) *Se $S \subset \ker D = A$, então $\ker(S^{-1}D) = S^{-1}A$ e $(S^{-1}A) \cap B = A$.*

(b) *Seja $b \in B \setminus \{0\}$ e considere a derivação $bD\colon B \longrightarrow B$. Então $bD \in \text{DLN}(B)$ se, e somente se, $D \in \text{DLN(B)}$ e $b \in \ker D$.*

Prova:

(a.1) Suponhamos que $S^{-1}D$ seja localmente nilpotente. Observe que se $b \in B$ então $S^{-1}D(b) = D(b)$, assim D é localmente nilpotente. Claramente, $B \cap \ker(S^{-1}D) = \ker D$. Além disso, temos que

$$S \subset (S^{-1}B)^* \subset \ker(S^{-1}D).$$

Logo, $S \subset B \cap \ker(S^{-1}D) = \ker D$. Reciprocamente, suponhamos que $D \in \text{DLN}(B)$ e $S \subset \ker D$. Seja $\frac{r}{s} \in S^{-1}B$. Como $s \in \ker D$, obtemos $(S^{-1}D)\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{D(r)}{s}$. Por indução sobre n é claro que

$$(S^{-1}D)^n\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{D^n(r)}{s},$$

e já que $D^n(r) = 0$ para algum n, temos $(S^{-1}D)^n\left(\frac{r}{s}\right) = 0$, isto é, $S^{-1}D$ é localmente nilpotente.

(a.2) Dado $\frac{r}{s} \in S^{-1}B$, temos $(S^{-1}D)\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{D(r)}{s}$, logo $\ker(S^{-1}D) = S^{-1}A$. Além disso, $A \subseteq (S^{-1}A) \cap B$. Por outro lado, dado $b \in B \setminus \{0\} \cap S^{-1}A$, temos que existem $a \in A \setminus \{0\}$ e $s \in S$ tal que $b = \frac{a}{s}$. Sendo B um domínio, tem-se $bs = a$, e como A é saturado (por um resultado que já provamos anteriormente), segue que $b \in A$. Portanto, a igualdade $A = (S^{-1}A) \cap B$ é verdadeira.

(b) Vide [10, Pg. 24].

$\blacksquare$

Observamos que se $D \in DLN(B)$ e $D \neq 0$, então existe $a \in \ker D \setminus \{0\}$, e considerando o conjunto multiplicativo $S = \{1, a, a^2, \ldots\}$, obtemos, usando a parte (a.1) da proposição acima, que $S^{-1}D$ é uma derivação localmente nilpotente de $S^{-1}B$.

Um fato muito importante envolvendo derivações localmente nilpotentes de um determinado anel é que elas definem automorfismos deste anel. Vamos descrever tal situação. Seja B um anel (que contém, como subanel, um corpo k de característica zero, de acordo com nossa convenção permanente). Como já sabemos, temos $\mathrm{DLN}(B) = \mathrm{DLN}_k(B)$. Agora, se $D \in \mathrm{DLN}(B)$, então a sua exponencial

$$exp\, D = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} D^i = I + D + \frac{1}{2!} D^2 + \cdots$$

(onde I é a identidade de B) é uma função bem definida $B \to B$. O próximo resultado nos auxiliará de maneira crucial a determinar quando B é isomorfo a $A^{[1]} = A[x]$, onde A é o núcleo de uma derivação localmente nilpotente.

Proposição 2.5. *Seja* $D \in \mathrm{DLN}(B)$.

(i) $exp\, D \in \mathrm{Aut}_k(B)$*;*

(ii) *Se* $[D, E] = 0$*, com* $E \in \mathrm{DLN}(B)$*, então* $D + E \in \mathrm{DLN}(B)$*, e*

$$exp\,(D + E) \;=\; exp\, D \,\circ\, exp\, E$$

Prova: Primeiro, observamos que $exp\, D$ é uma função aditiva, uma vez que cada D^i também o é. Para verificar que $exp\, D$ respeita a multiplicação, sejam $f, g \in B$, não-nulos, com $deg_D(f) = m$ e $deg_D(g) = n$. Então, $D^i(f) = D^j(g) = 0$ para $i > m$ e $j > n$, e

$$\begin{aligned}
(expD)(f) \cdot (expD(g)) &= \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} D^i(f) \right) \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} D^j(g) \right) \\
&= \sum_{0 \le i+j \le m+n} \frac{1}{i!j!} D^i(f) D^j(g) \\
&= \sum_{0 \le i+j \le m+n} \frac{1}{(i+j)!} \binom{i+j}{j} D^i(f) D^j(g) \\
&= \sum_{t=0}^{m+n} \frac{1}{t!} \left(\sum_{i+j=t} \binom{i+j}{j} D^i f D^j g \right),
\end{aligned}$$

e usando a regra do produto generalizada, obtemos

$$\sum_{t=0}^{m+n} \frac{1}{t!} D^t(fg) = expD(fg).$$

Assim, $exp\, D$ é um homomorfismo de álgebras. No final desta demonstração obteremos que se trata, de fato, de um automorfismo.

Seja agora $f \in B$ e escolha $m \geq 0$ tal que $D^m(f) = E^m(f) = 0$. Defina $n = 2m$. Como D e E comutam,

$$(D+E)^n(f) = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} D^i E^j(f).$$

Para cada termo desta soma, ou $i \geq$ m ou $j \geq m$, e segue que

$$D^i E^j(f) = E^j D^i(f) = 0,$$

para cada par i, j. Portanto, $D+E \in \mathrm{DLN}(B)$. Em seguida, usando esta mesma expansão de $(D+E)^n$, a prova de que $exp\,(D+E) = exp\, D \circ exp\, E$ agora segue, formalmente, exatamente como acima. Isto prova (ii).

Para concluirmos a prova de (i), note que $-D \in \mathrm{DLN}(B)$. Assim, por (ii), podemos escrever

$$exp\, D \circ exp\,(-D) = exp\,(-D) \circ exp\, D = exp\, 0 = I$$

e portanto $exp\, D$ é um automorfismo, com inversa $exp\,(-D)$. Isto conclui a demonstracao.

■

Segue desta proposição que se $D \in \mathrm{DLN}_k(B)$, então a função $f \longmapsto exp\,(fD)$ é um homomorfismo do grupo aditivo $(k,+)$ no grupo $\mathrm{Aut}_k(B)$ dos k-automorfismos de B. Logo, toda k-derivação localmente nilpotente de B determina uma ação do grupo aditivo $(k,+)$ em B.

Definição 2.5. Sejam B um anel e $D \in \mathrm{Der}(B)$. Um elemento $s \in B$ é dito uma *fatia* da derivação D se $D(s) = 1$, e é dito uma *fatia local* (também chamada *pré-fatia*) se $D(s) \in \ker D$ e $D(s) \neq 0$.

Observação 2.1. No caso em que B é um domínio e $D \in \mathrm{DLN}(B)$, pode-se utilizar a função deg_D para ver que se $s \in B$ é uma fatia, então s não pode ser uma unidade e nem divisor-de-zero.

O próximo resultado é bastante importante e interessante:

Proposição 2.6. *Sejam B um domínio e $D \in \mathrm{DLN}(B)$. Se D tem uma fatia $s \in B$, então $B = A[s] = A^{[1]}$, onde $A = \ker D$.*

Prova: Seja $s \in B$ uma fatia, e considere $f(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i t^i \in A[t] \setminus \{0\}$, onde $n \geq 0,\ a_i \in A$ e $a_n \neq 0$. Pela regra da cadeia (já explicada no capítulo anterior), temos $D(f(s)) = f'(s)D(s) = f'(s)$ e por indução

$$D^j(f(s)) \ = \ f^{(j)}(s),$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, onde $f^{(j)}(t) \in A[t]$ indica a j-ésima derivada de f. Assim, $D^n(f(s)) = n!a_n \neq 0$ e em particular $f(s) \neq 0$. Logo, s é transcendente sobre A , i.e., $A[s] = A^{[1]}$.

Agora, provaremos que $B = A^{[1]}$. Consideremos a função $\xi : B \longrightarrow B$, tal que $\xi(f) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{D^j(f)}{j!}(-s)^j$, para cada $f \in B$, que claramente é uma versão da função exponencial e possui as mesmas propriedades, por exemplo é um homomorfismo de álgebras, e note que

$$D(\xi(f)) \ = \ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^{j+1}(f)}{j!}(-s)^j \ + \ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D^j(f)}{j!} j(-s)^{j-1}(-1) \ = \ 0,$$

e assim $\xi(B) \subseteq A$, e sendo ξ um A-homomorfismo, segue que $\xi(B) = A$.

Por indução sobre $deg_D(f)$, provaremos que $f \in A[s]$, para todo $f \in B$. Isto é claro se $deg_D(f) \leq 0$. Suponhamos então que $deg_D(f) \geq 1$. Como $f = \xi(f) + (f - \xi(f))$, e

$$f - \xi(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D^j(f)}{j!}(-s)^j \in sB,$$

obtemos que $f = a + f's$, para algum $a \in A$ e $f' \in B$. Logo, $D(f) = D(f')s + f'$ e segue facilmente que

$$D^m(f) \ = \ D^m(f')s \ + \ mD^{m-1}(f'),$$

para todo $m \geq 1$. Sendo D localmente nilpotente, existe um $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $D^{m_1-1}(f') \neq 0$ e $D^{m_1}(f') = 0$ (note que, como $deg_D(f) \geq 1$, temos $f \notin A$ e assim $f' \neq 0$). Então, $D^{m_1}(f) = mD^{m_1-1}(f') \neq 0$ e $D^{m_1+1}(f) = 0$, e logo $deg_D(f') = deg_D(f) - 1$. Pela hipótese de indução temos $f' \in A[s]$ e, finalmente, como $f = a + f's$, concluímos que $f \in A[s]$. ■

Um importante resultado devido a Rentschler ([18]) diz que se B é um domínio finitamente gerado sobre k, e se $D \in \mathrm{DLN}_k(B)$ admite uma fatia, então $\ker D$ também é finitamente gerada sobre k. Entretanto, existem k-domínios afins possuindo derivações localmente nilpotentes cujos núcleos não são finitamente gerados (vide [2]); neste caso, não temos elemento fatia, e essa é uma situação bem interessante pois fornece contra-exemplos ao famoso décimo quarto problema de Hilbert ([8]).

Definição 2.6. Dizemos que $D \in \mathrm{Der}(B)$ é uma derivação *irredutível* se o único ideal principal de B contendo a imagem $D(B)$ é o próprio B.

Um primeiro fato a ser observado é o seguinte: se B é um domínio, verificar que uma dada $D \in \mathrm{Der}(B)$ é irredutível é equivalente a mostrar que, se $D = bD'$ para algum $b \in B$ e $D' \in \mathrm{Der}(B)$, então $b \in B^*$.

Exemplo 2.3. Seja $B = k[x_1, \ldots, x_n] = k^{[n]}$ e seja $D \in \mathrm{Der}_k(B)$ tal que

$$\mathrm{mdc}(Dx_1, \ldots, Dx_n) = 1.$$

Então, pelo critério acima, é claro que D é uma derivação irredutível.

No estudo das derivações localmente nilpotentes, um dos principais objetivos é descrever o conjunto $\mathrm{DLN}(B)$ quando B é um k-domínio afim. O corolário 2.1 a seguir será fundamental para se fazer tal descrição; para prová-lo, precisaremos do seguinte lema auxiliar:

Lema 2.1. *Sejam B um domínio e $D \in \mathrm{Der}(B)$, com $D \neq 0$.*

(a) *Se B satisfaz a Condição de Cadeia Ascendente para ideais principais, então existe uma derivação irredutível $D_0 \in \mathrm{Der}(B)$ tal que $D = aD_0$, para algum $a \in B$.*

(b) *Se B é um DFU, então a derivação D_0 (como no item (a)) é única a menos de multiplicação por um invertível.*

Prova: Se D é irredutível, a afirmação (a) é trivial. Suponhamos, então, que D não é irredutível. Então o conjunto

$$\mathfrak{A} = \{a \in B \setminus B^*;\ D(B) \subseteq aB\}$$

é não-vazio. Fixemos $x \in B$ tal que $D(x) \neq 0$ e consideremos a seguinte coleção não-vazia de ideais principais de B:

$$\Sigma = \left\{ \left(\frac{Dx}{a} \right) B;\ a \in \mathfrak{A} \right\}.$$

Por nossa hipótese em B, podemos escolher um $a \in \mathfrak{A}$ tal que $I = (\frac{Dx}{a})B$ é um elemento maximal de Σ. Como $D(B) \subseteq aB$ e B é um domínio, podemos definir a aplicação $D_0 : B \longrightarrow B$ dada por $x \mapsto a^{-1}Dx$. É fácil ver que D_0 é uma derivação de B, e obviamente que $D = aD_0$. Agora, provemos que D_0 é irredutível. Seja $b \in B$ tal que $D_0(B) \subseteq bB$. Temos que mostrar que $b \in B^*$. Temos $D(B) \subseteq abB$, i.e., $ab \in \mathfrak{A}$ e, consequentemente,

$$J = \left(\frac{Dx}{ab}\right) B \in \Sigma.$$

Logo, como $I \subseteq J$ e I é um elemento maximal de Σ, temos $I = J$. Assim, $\frac{Dx}{ab} \in (\frac{Dx}{a})B$, e portanto $b \in B^*$, como queríamos provar.

Para provar (b), suponha que B é um DFU e que $D = a_1 D_1 = a_2 D_2$, onde $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(B)$ são irredutíveis e $a_1, a_2 \in B \backslash \{0\}$. Podemos assumir que $\mathrm{mdc}(a_1, a_2) = 1$. Suponha que $a_1 \notin B^*$. Então existe um elemento primo p de B tal que p divide a_1; para todo $x \in B$ temos que p divide $a_2 D_2(x)$, logo p divide $D_2(x)$; isto significa que $D_2(B) \subseteq pB$, o que é uma contradição com o fato de que D_2 é irredutível. Daí, $a_1 \in B^*$ e, por simetria de argumentação, temos $a_2 \in B^*$, o que conclui a demonstração da parte (b). ∎

Corolário 2.1. *Seja B um domínio que satisfaz a Condição de Cadeia Ascendente para ideais principiais, e seja $A \in \mathrm{KDLN}(B)$. Considere o conjunto $S = \{D \in \mathrm{DLN}_A(B)$; D é uma derivação irredutível $\}$. Então, $S \neq \emptyset$ e*

$$\mathrm{DLN}_A(B) = \{aD;\, a \in A,\, D \in S\}.$$

Prova: De acordo com o lema acima, cada elemento não-nulo de $\mathrm{DLN}_A(B)$ tem a forma aD, onde $a \in B \backslash \{0\}$ e $D \in \mathrm{Der}_A(B)$ é uma derivação irredutível. Aplicando a proposição 2.4(b), obtemos que $a \in A$ e $D \in S$. ∎

2.2 Invariante de Makar-Limanov e de Derksen

Seja B um anel (que, como sempre, assumimos conter o corpo $k \supseteq \mathbb{Q}$). No artigo [13], L. Makar-Limanov introduziu o ML invariante de B, que passou a ser denotado por $ML(B)$. Este invariante demonstrou ter bastante importância no estudo de k-álgebras finitamente geradas (e também em questões clássicas da Geometria Algébrica Afim); por exemplo, na determinação dos k-automorfismos de certas k-álgebras (vide, e.g., [14]).

Definição 2.7. Se B é um domínio, definimos o seu *invariante de Makar-Limanov* por

$$ML(B) := \bigcap_{D \in \mathrm{DLN}(B)} \ker D.$$

Observação 2.2. Da definição acima, segue que:

(1) $ML(B)$ é uma k-subálgebra de B;

(2) $B^* \subseteq ML(B)$;

(3) $ML(k) = k$.

Definição 2.8. Dizemos que o anel B é *rígido* se $ML(B) = B$. Como um primeiro exemplo, da observação (3) acima vem que todo corpo é um anel rígido.

Exemplo 2.4. Tem-se $ML(k^{[n]}) = k$; veja que k é a interseção dos núcleos das derivadas parciais. Logo, $k^{[n]}$ não é rígido. Se agora $B = \mathbb{C}[t^2, t^3]$ (subanel de $\mathbb{C}[t]$), então pode-se verificar que $\mathrm{DLN}(B) = \{0\}$ e portanto $ML(B) = B$, isto é, B é rígido.

Proposição 2.7. *Sejam A e B anéis. Se $A \cong B$ (A é isomorfo a B), então*

$$ML(A) \cong ML(B).$$

Além disso, todo isomorfismo de A em B restrito a $ML(A)$ é um isomorfismo entre $ML(A)$ e $ML(B)$.

Prova: Considere um isomorfismo $\phi : A \longrightarrow B$. Se $D \in \mathrm{DLN}(B)$, é fácil verificar que $\phi^{-1}D\phi \in \mathrm{DLN}(A)$. Observe que se $a \in ML(A)$, temos $\phi^{-1}D\phi(a) = 0$, para qualquer $D \in DLN(B)$. Logo, $D\phi(a) = 0$, para toda $D \in DLN(B)$, ou seja, $\phi(a) \in ML(B)$. É imediato que a restrição de ϕ ao anel $ML(A)$ é um isomorfismo entre $ML(A)$ e $ML(B)$. ■

O resultado acima tem como consequência o fato interessante de que $ML(B)$ é um subanel *característico* de B, no sentido de que, para todo k-automorfismo τ de B, a sua restrição a $ML(B)$ também é um k-automorfismo, ou seja:

$$\tau|_{ML(B)} \in \mathrm{Aut}_k(ML(B)).$$

Definição 2.9. Seja B um domínio. Definimos o *invariante de Derksen* de B, denotado por $\mathcal{D}(B)$, como sendo a k-subálgebra de B gerada pelo conjunto

$$\{\ker D;\ D \in \mathrm{DLN}(B),\ D \neq 0\}.$$

Em outras palavras, $\mathcal{D}(B)$ é a menor subálgebra de B contendo o núcleo de todas as derivações localmente nilpotentes não-nulas de B.

Exemplo 2.5. Seja $B = k[x_1, ..., x_n] = k^{[n]}$, então $x_i \in \mathcal{D}(B)$ para cada i, e assim $\mathcal{D}(B) = B$.

Os invariantes de Makar-Limanov e Derksen estão entre as mais importantes e promissoras ferramentas emergentes do estudo das derivações localmente nilpotentes ao longo das duas últimas décadas. A utilidade de tais invariantes em aplicações a questões geométricas já foi amplamente comprovada. Claramente, muitas questões intrigantes permanecem em aberto a respeito do tema.

Capítulo 3

Invariante de Makar-Limanov de certas hipersuperfícies algébricas

Neste capítulo, nosso objetivo é descrever o invariante de Makar-Limanov de certas hipersuperfícies algébricas afins especiais. Primeiro, estudamos o caso das denominadas *superfícies de Danielewski* no espaço afim 3-dimensional. Em seguida, daremos ênfase ao 3-fold dado por $x + x^2y + z^3 + t^3 = 0$ no espaço afim 4-dimensional.

O caso do 3-fold foi primeiro explorado por L. Makar-Limanov; a prova original fornecida pelo próprio Makar-Limanov foi bastante longa e técnica, e contou com o auxílio das chamadas *derivações Jacobianas*. Em [15] , ele simplificou seus argumentos e escreveu uma prova mais curta; em tal prova, considerou $k = \mathbb{C}$. Aqui, a demonstração apresentada é válida para o corpo k de característica zero, e na verdade será um corolário do teorema onde calcularemos o invariante de Derksen de tal 3-fold.

3.1 Superfícies de Danielewski

Definição 3.1. Uma *superfície de Danielewski* (sobre k) é qualquer superfície S que seja algebricamente isomorfa à uma superfície em $\mathbb{A}^3_k$ definida por uma equação da forma

$$x^n z = p(y),$$

onde $n \geq 0$ e $p(y) \in k[y]$ é não-constante.

Note que não se exige que S seja suave (não-singular). De modo geral, a normalização de S pode ou não ser uma superfície de Danielewski.

Uma propriedade muito forte das superfícies de Danielewski é que elas admitem $\mathbb{G}_a$-ações algébricas não-triviais, essencialmente devido ao fato de que a derivação triangular $x^n\frac{\partial}{\partial y} + p'(y)\frac{\partial}{\partial z}$ (do anel de polinômios $k[x,y,z]$) anula $x^n z - p(y)$. Em particular, o anel de coordenadas $B = k[x,y,z]/(x^n z - p(y))$ de uma superfície de Danielewski S não é rígido. Isto é uma consideração importante, por exemplo, quanto à compreensão do grupo $\mathrm{Aut}_k(S)$. De fato, Makar-Limanov calculou $ML(S)$ (=$ML(B)$) e $\mathrm{Aut}_k(S)$ (=$\mathrm{Aut}_k(B)$) para todas as superfícies de Danielewski S, e forneceu condições sob as quais duas superfícies de Danielewski são isomorfas (vide [12], [14]).

Teorema 3.1. *Seja $B = k[x,y,z]$ com a relação $x^n z = p(y)$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $p(y) \in k[y]$.*

(a) *Se $n \leq 1$ ou se $deg(p(y)) = 1$, então*

$$ML(B) = k$$

(b) *Se $n \geq 2$ e $deg(p(y)) \geq 2$, então*

$$ML(B) = k[x]$$

e além disso $\ker D = k[x]$*, para toda $D \in \mathrm{DLN}(B) \setminus \{0\}$.*

Prova: Defina $\delta \in \mathrm{DLN}(B)$ por $\delta(x) = 0$ e $\delta(y) = x^n$. Então, $\ker\delta = k[x]$, de maneira que $ML(B) \subset k[x]$ em todos os casos.

No caso $n = 1$, defina $\epsilon = \alpha\delta\alpha^{-1}$, onde α é automorfismo de B com $\alpha(x) = z$ ou $\alpha(z) = x$. Então, $\ker\epsilon = k[z]$, e assim $ML(B) = k$, quando $n = 1$.

No caso $n = 0$ ou $deg\, p(y) = 1$, o polinômio $X^n Z - p(Y)$ é uma variável de $k[X,Y,Z] = k^{[3]}$, o que implica $B = k^{[2]}$. Assim, temos também que $ML(B) = k$ neste caso, o que prova o item (a).

Suponhamos agora $n \geq 2$ e $deg\, p(y) \geq 2$, e defina a seguinte graduação em B: $deg\,(x) = -1$ e $deg\,(y) = 0$. Daí, $deg\,(z) = n$.

Seja $D \in \mathrm{DLN}(B)$, $D \neq 0$, e seja $f \in \ker D$. Suponhamos que $Dx \neq 0$. Pela relação $x^n z = p(y)$, é possível escrever f como uma soma de monômios da forma $x^a q(y)$ para $a \geq 0$, e $x^a z^b q(y)$ para $0 \leq a < n$ e $b \geq 0$.

Se $deg f < 0$, então x aparece em todos os monômios de f, o que implica $f \in xB$. Mas então teríamos $Dx = 0$, o que é uma contradição. Assim, $deg\, f \geq 0$.

Sejam $\overline{D}$ e $\overline{f}$ os somandos homogêneos de maior grau de D e f, respectivamente. Então $deg\, \overline{f} \geq 0$. Assuma que $\deg \overline{f} = 0$. Assim, $\overline{f}$ é um invariante da k^*-ação sobre B definida pela função grau, isto é, para $t \in k^*$, $t \cdot x = t^{-1}x$, e $t \cdot y = y$. Assim, $\overline{f} \in B^{k^*} = k[x^n z, y] = k[y]$. Mas então $\overline{D}y = 0$, donde $\overline{D}(x^n z) = 0$, o que por sua vez implica $\overline{D}x = \overline{D}z = 0$, uma contradição.

Portanto, $\deg \overline{f} > 0$. Por homogeneidade, isso significa que z aparece em todos os monômios de $\overline{f}$, e assim $\overline{f} \in zB$. Consequentemente, $\overline{D}z = 0$. Segue que $\overline{D}$ se estende a uma K-derivação localmente nilpotente de $K[x, y]$, onde $K = k(z)$. Mas este é o anel de coordenadas de uma curva C sobre K, e C não é uma reta, uma vez que $n \geq 2$ e $deg\, p(y) \geq 2$. Sendo assim, a única derivação localmente nilpotente de $K[x, y]$ é a nula, o que é uma contradição pois $\overline{D} \neq 0$.

Assim, a única possibilidade é $Dx = 0$. Como $k[x]$ é algebricamente fechado em B, o item (b) está provado.

■

Note que este teorema implica imediatamente que as superfícies $xz = p(y)$ e $x^n z = q(y)$ não são algebricamente isomorfas quando $n \geq 2$ e $deg\, q(y) \geq 2$.

Dizemos que uma superfície de Danielewski S é *especial* se $ML(S) = k$. Isto é equivalente a dizer que S é isomorfa a uma superfície em $\mathbb{A}^3$ dada por uma equação da forma $xz = p(y)$. Assim, por exemplo, um plano é uma superfície de Danielewski especial. As superfícies de Danielewski especiais são importantes por uma série de razões, incluindo o fato de que elas possuem um grupo de automorfismos relativamente "grande".

3.2 O 3-fold $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$

Derksen, em sua tese [6], introduziu o invariante $\mathcal{D}(B)$, e mostrou que $\mathcal{D}(B) \neq B$ para o anel

$$B = k[x, y, z, t]/(x + x^2y + z^2 + t^3)$$

que Makar-Limanov havia considerado. Sua prova segue as idéias de Makar-Limanov, colocando-as em um contexto mais geométrico. A prova dada para o teorema principal a ser tratado aqui (que implica que o 3-fold em consideração *não* é algebricamente isomorfo a $\mathbb{A}^3$) é uma variação da segunda prova feita por Makar-Limanov. A principal diferença é que a prova apresentada aqui (seguindo o tratamento dado em [10]) é válida para qualquer corpo k de característica zero.

Antes de proceder com uma prova do resultado de Makar-Limanov, precisamos de alguns resultados auxiliares.

Lema 3.1. *Sejam a e b números inteiros positivos tais que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ (isto é, a, b são relativamente primos), e defina uma graduação ω em $A = k[x, y]$ por $deg_\omega(x) = a$ e $deg_\omega(y) = b$. Então um dado $f \in A$ é ω-homogêneo se, e somente se, existe um polinômio homogêneo padrão ("standard") $g \in A$ tal que*

$$f = x^i y^j g(x^b, y^a)$$

para inteiros i e j, com $0 \leq i < b$ e $0 \leq j < a$.

Prova: Se $a = b = 1$, não há o que provar. Assuma $ab > 1$. Denotemos por G o grupo cíclico $\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b = \mathbb{Z}_{ab}$ e suponhamos G é gerado por t. Então, G age em A por $t \cdot (x, y) = (t^a x, t^b y)$, e $A^G = k[x^b, y^a]$. Vendo A como um A^G-módulo, podemos decompor A em espaços semi-invariantes,

$$A = \bigoplus_{\substack{0 \leq i < b \\ 0 \leq j < a}} x^i y^j A^G,$$

onde o peso de um elemento de $x^i y^j A^G$ é $ai + bj$. Se $f \in A$ é ω-homogêneo, ele é um semi-invariante desta G-ação, e assim $f = x^i y^j g(x^b, y^a)$, para alguns $i, j \geq 0$ e algum $g \in A$. Como f é ω-homogêneo, g tem de ser homogêneo padrão. ∎

Lema 3.2. *Seja B um domínio e assuma que $B[x] = B^{[1]}$. Suponhamos que*

$$c_1 u^m + c_2 v^n \in B \setminus \{0\},$$

onde $c_1, c_2 \in B \setminus \{0\}$, $u, v \in B[x]$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Se $m, n \geq 2$, então $u, v \in B$.

Prova: É suficiente assumir que o domínio B é um corpo; do contrário, substituímos B pelo seu corpo de frações $\text{frac}(B)$.

Suponhamos que $m, n \geq 2$ e escreva $c_1u^m + c_2v^n = t \in B^*$, o que implica que u e v são relativamente primos. Agora, derivando em relação a x esta última igualdade, obtemos

$$mc_1u^{m-1}u' + nc_2v^{n-1}v' = 0,$$

donde tem-se que $u' \in vB[x]$ e $v' \in uB[x]$. Pela proposição 2.3, segue que ou $u' = 0$ ou $v' = 0$. Logo, ou $u \in B$ ou $v \in B$. Mas então, como $c_1u^m + c_2v^n \in B$, tem-se que ambos u e v pertencem a B. ∎

Lema 3.3. *Sejam $m, n \geq 2$ números naturais. Sejam B um domínio, $D \in \mathrm{DLN}(B) \setminus \{0\}$ e $A = \ker D$. Suponha que*

$$D(c_1a^m + c_2b^n) = 0,$$

onde $a, b \in B, c_1, c_2 \in \ker D \setminus \{0\}$, e $c_1a^m + c_2b^n \neq 0$. Então, $D(a) = D(b) = 0$.

Prova: Seja r uma fatia local de D (veja definição 2.5). Então, localizando com respeito ao sistema multiplicativo das potências de Dr, temos $B_{Dr} = A_{Dr}[r]$, e podemos escrever $a = u(r)$ e $b = v(r)$, para certos polinômios u e v tendo coeficientes em A_{Dr}. Pelo lema acima, segue que u e v pertencem a A_{Dr}, o que implica $Da = Db = 0$. ∎

Proposição 3.1. *Seja B um domínio e seja $D \in \mathrm{DLN}(B) \setminus \{0\}$. Suponhamos que existam $f, g \in B$, inteiros positivos m, n, e um polinômio $P \in k[x, y] = k^{[2]}$ homogêneo (com respeito à graduação padrão) e não-constante, tais que $P(f^m, g^n) \in \ker D \setminus \{0\}$. Então, pelo menos uma das sentenças abaixo é verdadeira:*

(i) *$Df = Dg = 0$;*

(ii) *$P \in k[x]$ (o que implica $Df = 0$);*

(iii) *$P \in k[y]$ (o que implica $Dg = 0$);*

(iv) *$m = 1$ e $P(f, g^n) = a(f + bg^n)^e$, para algum $a \in k^*$, $b \in k$ e $e \geq 1$;*

(v) *$n = 1$ e $P(f^m, g) = a(g + bf^m)^e$, para algum $a \in k^*, b \in k$ e $e \geq 1$.*

Prova: Assuma que ou $Df \neq 0$ ou $Dg \neq 0$; do contrário, (i) vale e não há nada a provar.

Seja K o fecho algébrico do corpo k. Observe que em $K[x, y], P(x, y)$ pode ser fatorado como produto de polinômios lineares, e assim $P(f^m, g^n)$ pode ser fatorado como

$$\prod_{i=1}^{e}(c_if^m + d_ig^n),$$

com $c_i, d_i \in K$ e $e \geq 1$. Seja δ a extensão de D a $B_K = (K \otimes_k B)$. Então, δ é localmente nilpotente, já que $B \subset \mathrm{Nil}(\delta)$, e B_K é gerado por B sobre K. Temos que $\delta(c_i f^m + d_i g^n) = 0$, para cada i. Se quaisquer dois desses fatores são linearmente independentes, então $\delta(f^m) = \delta(g^n) = 0$, o que implicaria $\delta f = Df = 0$ e $\delta g = Dg = 0$, o que contradiz a nossa hipótese. Portanto, existem $c, d \in K$ tais que $P(f^m, g^n) = (cf^m + dg^n)^e$, onde ou $c \neq 0$ ou $d \neq 0$ (ou ambos).

Se $c = 0$, então $P \in k[y]$, e o caso (3) vale. Se $d = 0$, então $P \in k[x]$, e o caso (2) vale.

Assuma, agora, $cd \neq 0$, o que implica $Df \neq 0$ e $Dg \neq 0$. Então, $P(f^m, g^n) = a(f^m + bg^n)^e$, para algum $a \in K^*$ e $b \in K$. Como $\delta(f^m + bg^n) = 0$, segue que

$$mf^{m-1}\delta f = -bng^{n-1}\delta g \;\Rightarrow\; b = -\frac{mf^{m-1}Df}{ng^{n-1}Dg} \in \mathrm{frac}(B) \cap K = k.$$

Sendo assim, $(f^m + bg^n) \in B$ e $D(f^m + bg^n) = 0$. Se $m > 1$ e $n > 1$, o lema anterior implicaria que $Df = Dg = 0$, o que é uma contradição. Portanto, ou $m = 1$ ou $n = 1$. ■

Agora, estamos prontos para provar:

Teorema 3.2. *Seja $B = k[x, y, z, t]$, onde $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$. Então,*

$$\mathcal{D}(B) = k[x, z, t].$$

Em particular, este 3-fold não é algebricamente isomorfo a $\mathbb{A}^3_k$.

Prova:

Inicialmente, notemos que

$$k[x, z, t] \subset B \subset k[x, x^{-1}, z, t], \qquad y = -x^{-2}(x + z^2 + t^3).$$

Consideremos uma aplicação grau *deg* definida em $k[x, x^{-1}, z, t]$ definida por $\deg(x) = -1$ e $deg(z) = deg(t) = 0$. Daí, $deg(y) = 2$. Tal função *deg* induz uma $\mathbb{Z}$-filtração própria

$$B = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} B_i, \qquad B_i = \{f \in B;\, deg(f) \leq i\}.$$

Seja $\mathrm{Gr}(B) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (B_i / B_{i-1})$ o anel graduado associado à filtração de B, e consideremos o mapa natural $\mathrm{gr}\colon B \longrightarrow \mathrm{Gr}(B)$. Façamos

$$X = \mathrm{gr}(x), \quad Y = \mathrm{gr}(y), \quad Z = \mathrm{gr}(z), \quad T = \mathrm{gr}(t).$$

Note que x^2y, z^2 e $t^3 \in B_0$, mas a soma de tais elementos satisfaz $x^2y+z^2+t^3 = -x \in B_{-1}$. Com efeito, $deg(x^2y) = deg(x^2) + deg(y) = -2+2$, $deg(z^2) = deg(t^3) = 0$, implicando x^2y, z^2 e $t^3 \in B_0 = \{f \in B; deg(f) \leq 0\}$. Daqui, tem-se $X^2Y + Z^2 + T^3 = 0$ em $\mathrm{Gr}(B)$ (atenção: isso não quer dizer que $\mathrm{gr}(x) = 0$, uma vez que gr não é um homomorfismo de álgebras).

Afirmação: $\mathrm{Gr}(B) = k[X, Y, Z, T]$. De fato, considere qualquer elemento de B tendo a forma cx^ay^b, com $c \in k[z, t]$ e $a, b \in \mathbb{N}$, notando que qualquer elemento r de B pode ser escrito como uma soma de tais termos. Se $a \geq 2b$, então

$$cx^ay^b \;=\; cx^{a-2b}(x^2y)^b \;\in\; k[x, z, t].$$

Se $a < 2b$, escreva $a = 2n + \delta$, onde $\delta = 0$ ou 1. Então $n < b$, e

$$cx^ay^b = cx^{\delta}y^{b-n}(x^2y)^n = cx^{\delta}(-x - z^2 - t^3)^n y^{b-n},$$

de modo que neste caso, se $n > 0$, então o grau em y pode ser reduzido. Segue então que todo $r \in B$ pode ser escrito na forma

$$r = p(x, z, t) + v(y, z, t) + x \cdot w(y, z, t)$$

para polinômios p, v e w. Movendo as partes puras em z, t dos polinômios v e w ao polinômio p, podemos expressar r na seguinte forma:

$$r = p(x, z, t) + y \cdot v(y, z, t) + xy \cdot w(y, z, t).$$

Se $v \neq 0$, então $deg(yv)$ é um inteiro par positivo; e se $w \neq 0$, então $deg(xyw)$ é um inteiro ímpar positivo. Em particular, os graus de p, yv e xyw são distintos, o que implica

$$\mathrm{gr}(r) \;\in\; \{\mathrm{gr}(p), \mathrm{gr}(yv), \mathrm{gr}(xyw)\} \;\subset\; k[X, Y, Z, T].$$

Portanto, $\mathrm{Gr}(B) = k[X, Y, Z, T]$, como afirmamos.

Além disso, este mesmo argumento mostra que, se $r \in B$ e $r \notin k[x, z, t]$, então $deg(r) > 0$ e $\mathrm{gr}(r) \notin k[X, Z, T]$, já que os elementos de $k[X, Z, T]$ não podem ter grau positivo. Logo,

$$\mathrm{gr}^{-1}(k[X, Z, T]) \;\subset\; k[x, z, t].$$

Agora, suponha que $D \in \mathrm{DLN}(B) \setminus \{0\}$, e seja $f \in \ker D$. Considere o caso em que $f \notin k[x, z, t]$; então $F = \mathrm{gr}(f) \notin k[X, Z, T]$.

Seja $\delta = \mathrm{gr}(D)$ a derivação homogênea de $\mathrm{Gr}(B)$ associada a D. Pelo teorema 2.1, sabemos que $\delta \in \mathrm{DLN}(\mathrm{Gr}(B))$, e que $\delta F = 0$. Pela definição da função gr, temos que F é um elemento homogêneo de $\mathrm{Gr}(B)$.

Consideremos F como um elemento de $S[X,Y]$, onde $S = k[Z,T]$. Escreva $F = X^a Y^b Q(X,Y)$, onde $a, b \in \mathbb{N}$ e $Q \in S[X,Y]$, mas $Q \notin X \cdot S[X,Y]$ e $Q \notin Y \cdot S[X,Y]$. Então $Q(X,Y)$ é, também, homogêneo. Escreva

$$Q(X,Y) = \lambda X^c + \mu Y^d + XY \cdot G,$$

para elementos não-nulos λ, μ de S, $c, d \in \mathbb{N}$, e $G \in S[X,Y]$. Então $-c = 2d$, o que implica $c = d = 0$, i.e., $Q \in S$. Portanto, podemos escrever

$$F = X^a Y^b g(Z,T) \quad (a, b \in \mathbb{N},\ g \in k[Z,T]).$$

Se $a \geq 2b$, então $F = X^{a-2b}(X^2Y)^b g(Z,T) \in k[X,Z,T]$, o que é uma contradição. Logo, $0 \leq a < 2b$. Em particular, $b \geq 1$, o que implica $\delta Y = 0$.

Consideremos agora um outro sistema de pesos em $\mathrm{Gr}(B)$ dado por:

$$\omega(X) = 6, \quad \omega(Y) = -6, \quad \omega(Z) = 3, \quad \omega(T) = 2.$$

Seja $\overline{\delta}$ o somando homogêneo de δ de maior grau com relação à graduação induzida, notando que $\overline{\delta}$ é localmente nilpotente. Temos $\overline{\delta}(Y) = 0$ uma vez que Y é homogêneo. Escolha $H \in \ker(\overline{\delta})$ que seja algebricamente independente de Y, o que é possível pois

$$\mathrm{tr.deg}_k(\ker(\overline{\delta})) \;=\; 2.$$

Também, assuma que H é homogêneo com respeito a ambas as graduações de $\mathrm{gr}(B)$, o que é possível uma vez que $\ker \overline{\delta}$ é gerado por elementos homogêneos. Então, H tem a forma $H = X^a Y^b h(Z,T)$, para certos $a, b \in \mathbb{N}$ e $h \in k[Z,T]$ homogêneo. Por independência algébrica, podemos assumir que

$$H = X^a h(Z,T),$$

que é não-constante.

Suponhamos $a \geq 1$, de modo que $\overline{\delta}(X) = 0$. Assim, $\overline{\delta}(Z^2 + T^3) = 0$. Mas então o lema 3.3 implicaria que $\overline{\delta}(Z) = \overline{\delta}(T) = 0$, ou seja, $\overline{\delta} = 0$, que não é o caso. Portanto,

$\overline{\delta}(X) \neq 0$, e $a = 0$, de modo que $H = h(Z,T)$. De acordo com o lema 3.1, existe um polinômio homogêneo padrão $P \in k^{[2]}$ tal que

$$h(Z,T) \ = \ P(Z^2, T^3).$$

Da proposição 3.1, segue que $\overline{\delta}(Z) = 0$ ou $\overline{\delta}(T) = 0$ (ou ambos).

Seja $K = k(Z)$ se $\overline{\delta}(Z) = 0$, e $K = k(T)$ se $\overline{\delta}(T) = 0$. Então $\overline{\delta}$ se estende a uma K-derivação localmente nilpotente de $K[X,Y,Z,T]$, que é o anel de coordenadas de uma superfície de Danielewski não-especial sobre K. Pelo teorema 3.1, temos $\overline{\delta}(X) = 0$; porém, isto contradiz a conclusão anterior de que $\overline{\delta}(X) \neq 0$.

A única possibilidade, dessa forma, é que $f \in k[x,z,t]$. Isto prova que $\mathcal{D}(B) \subset k[x,z,t]$.

Finalmente, basta definir as derivações D_1, $D_2 \in \mathrm{DLN}(B)$ por

$$D_1(x) = D_1(z) = 0, \quad D_1(t) = -x^2$$

e

$$D_2(x) = D_2(t), \quad D_2(z) = -x^2,$$

o que mostra que $k[x,z,t] \subset \mathcal{D}(B)$, concluindo portanto a demonstração. ■

Com o auxílio crucial do teorema acima, podemos finalmente determinar explicitamente o invariante de Makar-Limanov do 3-fold em consideração:

Corolário 3.1. *Seja* $B = k[x,y,z,t]$, *onde* $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$. *Então,*

$$ML(B) \ = \ k[x].$$

Prova: Seja $D \in \mathrm{DLN}(B)$, $D \neq 0$, e suponha que $D(x) \neq 0$. Escolha elementos $f, g \in \ker D$ algebricamente independentes. Pelo teorema 3.2, $f, g \in k[x,z,t]$. Escreva,

$$f = xf_1(x,z,t) + f_2(z,t) \ \ e \ \ g = xg_1(x,z,t) + g_2(z,t).$$

Note que $f_2(z,t)$ e $g_2(z,t)$ são algebricamente independentes em B; do contrário, existiria um polinômio P, em duas variáveis sobre k, tal que $P(f_2, g_2) = 0$. Mas então $P(f,g) \in xB$, o que implica $x \in \ker D$, contradição.

Seguindo a notação usada na prova do teorema anterior, seja δ a derivação associada de $\mathrm{Gr}(B)$. Já que $deg\, xf_1(x,z,t)$ e $deg\, xg_1(x,z,t)$ são negativos, temos $deg\ f = deg\ f_2$ e

$deg\ g = deg\ g_2$. Segue-se que

$$\mathrm{gr}(f) = \mathrm{gr}(f_2(z,t)) = f_2(Z,T)$$

e

$$\mathrm{gr}(g) = \mathrm{gr}(g_2(z,t)) = g_2(Z,T),$$

e estas imagens são elementos (de ker δ) algebricamente independentes (basta ver que a restrição $\mathrm{gr}\colon k[z,t] \longrightarrow k[Z,T]$ é um isomorfismo de álgebras). Como $k[Z,T]$ é o fecho algébrico de $k[f_2(Z,T),\ g_2(Z,T)] \subset \ker\delta$, segue que $k[Z,T] \subset \ker\delta$. Mas então

$$0 \;=\; \delta(X^2Y + Z^2 + T^3) \;=\; \delta(X^2Y),$$

o que implica $\delta = 0$, uma contradição.

Assim, a única possibilidade é $D(x) = 0$.

Inversamente, se D_1 e D_2 são as derivações como no final da prova do teorema anterior, temos

$$\ker D_1 \cap \ker D_2 \;=\; k[x].$$

Portanto, $ML(B) = k[x]$. ∎

Referências Bibliográficas

[1] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesly, Reading, Mass. (1969).

[2] D. Daigle, *A Counterexample to Hilbert's Fourteenth Problem in Dimension 5*, Journal of Algebra 221, 528-535 (1999).

[3] D. Daigle, *Locally nilpotent derivations*, Lecture notes for the Setember School of algebraic geometry, Luk≫ecin, Poland, Setember 2003, Avaible at http://aix1.uottawa.ca/ ddaigle.

[4] D. Daigle, *Locally nilpotent derivations and Danielewski surfaces*, Osaka J. Math.41, 37-80 (2004).

[5] W. Danielewski, *On the cancellation problem and automorphism groups of affine algebraic varieties*, Preprint, Warsaw, 1989.

[6] H. Derksen, *Constructive Invariant Theory and the Linearization Problem*, Ph.D. thesis, Univ. Basel, 1997.

[7] A. van den Essen, *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Progress in Mathematics, BirkhÄauser Verlag, Basel, 2000.

[8] A. van den Essen, *A simple solution of Hilbert's fourttenth problem*, Colloq. Mathh. 105, 167-170 (2006).

[9] M. Ferreiro, Y. Lequain, A. Nowicki, *A note on locally nilpotent derivations*, J. Pure Appl. Algebra 79, 45-50 (1992).

[10] G. Freudenburg, *Algebraic theory of locally nilpotent derivations*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 136. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, VII. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[11] S. Kaliman, *Smooth contractible hypersurfaces in* $\mathbb{C}^n$ *and exotic algebraic structures on* $\mathbb{C}^3$, Math. Z. 214, 499-510 (1993).

[12] L. Makar-Limanov, *On the group of automorphisms of a class of surfaces*, Israel J. of Math. 68, 250-256 (1990).

[13] L. Makar-Limanov, *On the hypersurface* $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$ *in* $\mathbb{C}^4$ *or a* $\mathbb{C}^3$*-like threefold which is not* $\mathbb{C}^3$, Israel J. of Math. 96, 419-429 (1996).

[14] L. Makar-Limanov, *On the groups of automorphisms of a surface* $x^ny = P(z)$, Israel J. of Math. 121, 113-123 (2001).

[15] L. Makar-Limanov, *Again* $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$, Contemp. Math., vol. 369, 177-182, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[16] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, The Benjamin/Cummings, Reading, 1980.

[17] A. Nowicki, *Polynomial derivations and their rings of constants*, Uniwersytet Mikolaja Kopernika, Torun, 1994.

[18] R. Rentschler, *Opérations du groupe additif sur le plan affine*, C. R. Acad. Sc. Paris 267, 384-387 (1968).

[19] M. Veloso, *Derivações localmente nilpotentes de certas k-álgebras finitamente geradas*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, 2009.