

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Álgebras de Clifford: uma introdução à Geometria Spin

Mônica Paula de Sousa

João Pessoa-PB
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Álgebras de Clifford: uma introdução à Geometria Spin

por

Mônica Paula de Sousa

sob orientação do

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta

João Pessoa-PB
Agosto de 2013

S725a Sousa, Mônica Paula de.
Álgebras de Clifford: uma introdução à Geometria Spin /
Mônica Paula de Sousa.- João Pessoa, 2013.

Orientador: Napoleón Caro Tuesta
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Álgebras de Clifford. 3. Grupos Pin e
Spin. 4. Recobrimentos duplos.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Álgebras de Clifford: uma introdução à Geometria Spin

por
Mônica Paula de Sousa

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra.

Aprovada em 23 de agosto de 2013.

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta (Orientador)

Prof. Dra. Jacqueline Fabiola Rojas Arancibia

Prof. Dr. Ramón Orestes Mendoza Ahumada

Aos meus amores

Agradecimentos

A Deus, meu pai... por todo amor.

Minha família, que tanto amo... por toda compreensão e está comigo sempre, mesmo distante...

Minha segunda família, me fazendo ainda mais abençoada... também compreensiva nos momentos de ausência e tão cuidadosa...

Minha terceira família, essa ganhou sobrenome, PEDREGAL, constituída de amigos... que DEUS os guarde sempre. Em especial, a Mary, não preciso escrever...

Meus amigos, não só os que ganhei nesses dois anos, mas todos que fazem parte da minha história...

Meus professores, os do mestrado, e também os que me fizeram a aluna que sou hoje, e a professora, que se DEUS quiser, serei amanhã.

A meu orientador, por tudo, e sempre ver em mim muito mais do que consigo ver.

A banca, pela dedicação e cuidado.

A CAPES, pelo auxílio financeiro, realmente importante.

*"Se o Senhor não edificar a casa, em vão
se têm posto ao trabalho os que a edificam;
se o Senhor não guardar a cidade,
inutilmente se desvela o que a guarda."
(Salmo 126, 1)*

Resumo

No presente trabalho abordamos os conceitos e definições que constroem as álgebras de Clifford com foco em uma introdução a teoria de Geometria Spin. Isso devido a ligação desses dois assunto, permitindo conhecer tais álgebras a medida que se auxilia a compreensão da definição de variedade spin, conceito introdutório desse tópico especial em Geometria Riemanniana. Iniciamos com a construção das álgebras de Clifford associadas a espaços vetoriais de dimensão infinita, sobre um corpo qualquer, passando àquelas associadas aos de dimensão finita. Vemos os grupos spinores, Pin e Spin, os quais caracterizamos e mostramos a relação com a representação adjunta torcida, homomorfismo que, quando restrita a esses grupos, tem papel importante na definição de uma estrutura spin. Como tal definição trabalha com representações das álgebras de Clifford reais, restritas aos grupos spinores dessas álgebras, as apresentamos para em seguida conceituarmos tais representações. Finalizamos abordando a teoria necessária para mostrarmos que esses grupos são também grupos de Lie (onde instigamos uma interseção com a análise) e recobrimentos duplos, para completar os conceitos algébricos presente na definição de variedade spin.

Palavras-chaves: Álgebras de Clifford, grupos Pin e Spin, recobrimentos duplos.

Abstract

In this work we discuss the concepts and definitions that construct Clifford algebras focusing on an introduction to the theory of Spin Geometry. That's because the connection between these two subjects, enabling such algebras to be used as a tool that helps to understand the definition of a spin manifold, is a concept introductory to this special topic in Riemannian Geometry. We begin with the construction of Clifford algebras associated to infinite dimensional vector spaces, over any field, passing to those associated with finite dimensional spaces. We see the spinor groups, Pin and Spin, which characterize and show the relation with the twisted adjoint representation, a homomorphism that, when restricted to these groups, has an important role in defining a spin structure. As this definition works with representations of real Clifford algebras, restricted to spinor groups, we introduced them for soon afterwards consider such representations. We concluded approaching the necessary theory for us to show that those groups are also Lie groups (where we used an intersection with the analysis) and double covering, to complete the algebraic concepts present in the definition of a spin manifold.

Keywords: Clifford Algebras, Pin and Spin groups, double coverings.

Sumário

Introdução	2
1 Álgebras de Clifford e os grupos spinores	5
1.1 Álgebras de Clifford	7
1.2 Os grupos Spinores	16
2 As classificações e representações das álgebras de Clifford	24
2.1 As álgebras de Clifford associadas a \mathbb{R}^n	24
2.2 Representações	30
3 Pin_n e $Spin_n$: grupos de Lie e recobrimentos duplos	35
3.1 Os grupos de Lie nas álgebras de Clifford Reais	35
3.2 Os recobrimentos duplos nas álgebras de Clifford Reais	38
A Noções de Topologia Algébrica	41
B Noção de Variedade Spin	44
Referências Bibliográficas	50

Introdução

As primeiras álgebras não comutativas surgiram entre 1843 e 1844, nos trabalhos de William Rowan Hamilton (1805-1865), com os quatérnios, e nos de Hermann Günther Grassmann (1809-1865), com sua álgebra exterior ([4], pag. 149).

Entre 1850 e 1860, foram introduzidos exemplos novos e mais explícitos, como fez o matemático britânico Arthur Cayley (1821-1895), quando desenvolveu sua teoria das matrizes, mesmo que não a considerasse uma álgebra, já se podia ter um primeiro exemplo de representação linear de uma álgebra.

Houveram outros exemplos, também notáveis, antes de 1870, mas com foco nas álgebras de dimensão finita sobre os corpos dos reais ou complexos. E nesse caminho, foi Benjamin Pierce (1809-1880) que deu os primeiros passos.

É a ele que William K. Clifford (1845-1879) atribui a noção de produto tensorial que usou implicitamente em uma generalização dos quatérnios de Hamilton, e explicitamente para o estudo de suas álgebras, nosso objeto de trabalho.

Nascido em Exeter, na Inglaterra, Clifford estudou no King's College, em Londres, e depois foi para o Trinity College, em Cambridge. Em 1871, o designaram professor de matemática aplicada na University College de Londres.

Influenciado por Riemann (1826-1866) e Lobachevsky (1792-1856) estudou geometria não-Euclidiana. Publicou artigos em formas algébricas e geometria projetiva e um livro sobre dinâmica, mas hoje é lembrado por suas álgebras.

Tais álgebras, as álgebras de Clifford, foram criadas em 1876, quando este introduziu uma nova multiplicação na álgebra exterior de Grassmann, tendo sua primeira publicação em 1878. Mas um primeiro exemplo para uma álgebra de Clifford foi dado por Hamilton, já em 1843 ([16], pag. 320-322).

Essas álgebras foram redescobertas independentemente por R. Lipschitz entre 1880 e 1886, que reconheceu a descoberta anterior de Clifford em seu livro *“Untersuchungen über die Summen von Quadraten”* de 1886 ([16], pag. 322). Também apresentou a primeira aplicação das álgebras de Clifford a Geometria, em 1880.

E como em 1989, ao longo das duas últimas décadas, conforme Lawson e Michelsonh ([14], pag. 5), a geometria das variedades spin vinham desempenhando um papel cada

vez mais importante, tanto em matemática como em física matemática, nossa intenção é contribuir com a compreensão da definição de variedade spin.

Observando essa definição, teríamos uma variedade riemanniana orientada, M , com uma estrutura spin em seu fibrado tangente, TM . E sendo tal estrutura um $Spin_n$ -fibrado principal do fibrado tangente, $P_{Spin}(TM)$, juntamente com um recobrimento duplo desse fibrado principal no SO_n -fibrado principal, $P_{SO}(TM)$,

$$\xi : P_{Spin}(TM) \rightarrow P_{SO}(TM),$$

que depende do recobrimento duplo $\xi_0 : Spin_n \rightarrow SO_n$,

$$\xi(pg) = \xi(p)\xi_0(g), \text{ para todo } p \in P_{Spin}(TM) \text{ e } g \in Spin_n$$

onde SO_n é o grupo especial ortogonal, precisaríamos conhecer os grupos spinores, Pin e Spin, e tal recobrimento.

Para isso apresentamos três capítulos e um apêndice, com a definição de variedade spin, mesmo considerando que o público alvo tenha conhecimentos acerca de teoria de variedade, já que Geometria Spin é um tópico especial em Geometria Riemanniana, dando uma noção de tal definição.

Dessa forma, o primeiro capítulo traz os conceitos e definições para construção da álgebra de Clifford, e a partir daí passamos ao trabalho com os grupos spinores, que são subgrupos do grupo das unidades dessa álgebra.

Abordamos das álgebras de Clifford associadas a espaços vetoriais de dimensão infinita àquelas associadas aos de dimensão finita, fazendo o mesmo com os grupos spinores, mostrando que há definições equivalentes destes quando a dimensão do espaço é infinita e quando é finita.

No segundo capítulo, restringimos ao caso real, isto é, as álgebras de Clifford associadas ao \mathbb{R}^n . Apresentamos uma classificação, comentando também o caso complexo, e então falamos nas representações das álgebras de Clifford.

Isso devido ao fato de que uma variedade spin também pode ser vista, a grosso modo, como uma variedade diferenciável de dimensão n orientável para a qual existe um “levantamento” da estrutura de grupo do fibrado tangente desta para o grupo de recobrimento de tal grupo ([14], pag. 5).

Possibilitando entender que, em termos de cálculo tensorial, refinar uma estrutura diferenciável geral para a spin desse modo não gera nada de novo, pois o grupo de recobrimento não tem representações que não sejam induzidas das representações do grupo de estrutura mencionado.

E concluímos, com o terceiro capítulo, mostrando que os grupos spinores são grupos de Lie e recobrimentos duplos. Intencionando, por meio disso, auxiliar na compreensão de que os ganhos surgem ao se inserir uma métrica riemanniana na variedade.

Já que com isso, a estrutura spin corresponde a existência de levantamento para o recobrimento $Spin_n$ do grupo especial ortogonal, SO_n , não existindo diferença topológica essencial nessa abordagem e existindo representações de dimensão finita de $Spin_n$ que não são levantamentos de representações de SO_n ([14], pag. 5).

Portanto, como poderemos ver, o presente trabalho aborda as álgebras de Clifford de modo a fazer uma introdução a Geometria Spin, destacando seus “enlaces” com as diversas área, sejam da matemática, como geometria e análise, ou outra, como a física¹.

¹por exemplo, o físico P.A.M. Dirac, antes de 1928, formulou uma teoria que predisse a existência do eletron como partícula de energia negativa. Em essência, Dirac procurava um operador diferencial de primeira ordem, que recebeu seu nome, cujo quadrado fosse o laplaciano. Nessa teoria, uma característica interessante é que, na presença de um campo eletromagnético, o Hamiltoniano contém um termo adicional com analogia formal e forte ao termo adicional obtido introduzindo um giro interno nas equações mecânicas de uma partícula em orbita. Esses “giros” ou momentos magnéticos internos foram chamados spinores e suas família de transformações, de representações spinores ([14], pag. ix-x).

Capítulo 1

Álgebras de Clifford e os grupos spinores

Como o objetivo geral do presente trabalho é conhecer as Álgebras de Clifford para auxiliar quando se estuda Geometria Spin, iniciemos lembrando alguns conceitos, que são necessários a compreensão da definição de tais álgebras, e para isso, no que segue, \mathbb{K} denota um corpo.

Definição 1.1. Sejam U e V \mathbb{K} -espaços vetoriais. O *produto tensorial* de U e V é um par, $(U \otimes_{\mathbb{K}} V, \otimes)$, onde $U \otimes_{\mathbb{K}} V$ é um \mathbb{K} -espaço vetorial e $\otimes : U \times V \rightarrow U \otimes_{\mathbb{K}} V$ uma aplicação bilinear tal que a seguinte *propriedade universal* é satisfeita: para todo \mathbb{K} -espaço vetorial W e toda aplicação bilinear $f : U \times V \rightarrow W$, existe uma única aplicação linear, $f_{\otimes} : U \otimes_{\mathbb{K}} V \rightarrow W$ com

$$f_{\otimes}(u \otimes v) = f(u, v) \quad \forall u \in U, v \in V,$$

ou seja, o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{\otimes} & U \otimes_{\mathbb{K}} V \\ & \searrow f & \downarrow f_{\otimes} \\ & & W \end{array}$$

comuta.

Observemos que este existe e é único, no sentido de que se $(U \otimes_{\mathbb{K}} V, \otimes)$ e $(U \tilde{\otimes}_{\mathbb{K}} V, \tilde{\otimes})$ são produtos tensoriais de U e V , então existe um isomorfismo linear $\varphi : U \otimes_{\mathbb{K}} V \rightarrow U \tilde{\otimes}_{\mathbb{K}} V$ tal que

$$\varphi(u \otimes v) = u \tilde{\otimes} v,$$

para $u \in U$ e $v \in V$ ([11], pag. 8-10).

Além disso, como consequência da *propriedade universal*, o produto tensorial é gerado por $\{u \otimes v : u \in U \text{ e } v \in V\}$, isto é, todo elemento t de $U \otimes_{\mathbb{K}} V$ pode ser escrito, de forma não única, como uma soma finita

$$t = \sum \lambda_i (u_i \otimes v_i),$$

onde $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $u_i \in U$ e $v_i \in V$. Também podemos destacar que se U e V são espaços de dimensão finita, $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ e $\dim_{\mathbb{K}} V = m$, então $\dim_{\mathbb{K}} U \otimes V = nm$ ([11], pag. 18).

Definição 1.2. Uma \mathbb{K} -álgebra (associativa) é um par (A, \cdot) , onde A denota um \mathbb{K} -espaço vetorial e $\cdot : A \times A \rightarrow A$ é uma aplicação bilinear, chamada de *multiplicação*, que satisfaz as seguintes propriedades, para a, b e $c \in A$ e $k \in \mathbb{K}$:

- i) $(ka) \cdot b = a \cdot (kb) = k(a \cdot b)$;
- ii) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
- iii) Existe um elemento $1_A \in A$ tal que $1_A \cdot a = a \cdot 1_A = a$, que chamamos *elemento identidade* de A .

Então, dadas duas \mathbb{K} -álgebras (A, \cdot) e (B, \cdot) , um \mathbb{K} -homomorfismo de álgebras é uma aplicação linear, $h : A \rightarrow B$, tal que $h(a \cdot a') = h(a) \cdot h(a')$ e $h(1_A) = 1_B$. E assim uma \mathbb{K} -álgebra especial ao nosso propósito é a seguinte:

Definição 1.3. Dado qualquer \mathbb{K} -espaço vetorial V , a *álgebra tensorial* de V é um par $(T(V), i)$, onde $T(V)$ é uma \mathbb{K} -álgebra e $i : V \rightarrow T(V)$ uma aplicação linear tal que dada qualquer \mathbb{K} -álgebra A e qualquer aplicação linear $f : V \rightarrow A$, existe um único \mathbb{K} -homomorfismo de álgebras, $\bar{f} : T(V) \rightarrow A$, que faz o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & T(V) \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & A \end{array}$$

comutar.

Mostrando sua existência vemos que esta é construída como uma soma direta,

$$T(V) := \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n},$$

onde $V^{\otimes 0} := \mathbb{K}$, $V^{\otimes 1} = V$ e $V^{\otimes n} = V \otimes \dots \otimes V$, n -vezes. Que as aplicações $i_n : V^{\otimes n} \rightarrow T(V)$ são injeções naturais, a identidade de $T(V)$ é a imagem de $1 \in \mathbb{K}$ para $n = 0$, $i_0(1) := \mathbf{1}$, e todo $v \in T(V)$ pode ser escrito da forma

$$v = v_1 + \dots + v_k, \quad v_i \in V^{\otimes n_i}, \quad n_i \in \mathbb{N}, \quad n_i \neq n_j, \quad \text{se } i \neq j.$$

E que, com a aplicação bilinear $\cdot : V^{\otimes n_i} \times V^{\otimes n_j} \rightarrow V^{\otimes(n_i+n_j)}$ definida por

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_{n_i}) \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_{n_j}) = v_1 \otimes \dots \otimes v_{n_i} \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_{n_j}$$

configurando a \mathbb{K} -álgebra $(V^{\otimes(n_i+n_j)}, \cdot)$, usamos a bilinearidade para definir a multiplicação na álgebra tensorial de V .

Com essa caracterização, podemos notar que $k \otimes v$, com $k \in V^{\otimes 0}$ e $v \in V^{\otimes i}$, é o vetor em $V^{\otimes i}$ obtido por $kv_{n_1} \otimes v_{n_2} \otimes \dots \otimes v_{n_i}$. Além disso, se a $\dim V \neq 1$, a multiplicação em $T(V)$ é não comutativa, pois com $u, v \in V$ linearmente independentes, usando a contra-positiva, obtemos que $u \otimes v$ e $v \otimes u$ também o são, e então $u \otimes v \neq v \otimes u$ (conforme [11], pag. 61).

1.1 Álgebras de Clifford

Definição 1.4. Sejam V um \mathbb{K} -espaço vetorial, $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear simétrica e $\Phi : V \rightarrow \mathbb{K}$ a forma quadrática associada, isto é, $\Phi(v) = \varphi(v, v)$. A *álgebra de Clifford*, $Cl(V, \Phi)$, associada a V e Φ é uma \mathbb{K} -álgebra associativa com identidade, juntamente com uma aplicação linear $i_\Phi : V \rightarrow Cl(V, \Phi)$ tal que:

- i) $(i_\Phi(v))^2 = \Phi(v) \cdot 1, \forall v \in V$;
- ii) (Propriedade universal) Para toda \mathbb{K} -álgebra A e toda aplicação linear $f : V \rightarrow A$ com $(f(v))^2 = \Phi(v) \cdot 1_A, \forall v \in V$, existe um único \mathbb{K} -homomorfismo de álgebras, $\bar{f} : Cl(V, \Phi) \rightarrow A$, que faz o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i_\Phi} & Cl(V, \Phi) \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & A \end{array}$$

comutar.

É natural agora nos assegurarmos que a álgebra de Clifford existe e em que sentido é única para cada espaço vetorial e forma quadrática a este associada:

Proposição 1.5. *Existe uma \mathbb{K} -álgebra associativa satisfazendo a definição 1.4, que é única a menos de isomorfismos, ou seja, se $\overline{Cl}(V, \Phi)$ com $j_\Phi : V \rightarrow \overline{Cl}(V, \Phi)$ é outra álgebra de Clifford associada ao espaço V e a forma Φ , existe um único isomorfismo de \mathbb{K} -álgebras, $\psi : Cl(V, \Phi) \rightarrow \overline{Cl}(V, \Phi)$, tal que*

$$\psi \circ i_\Phi = j_\Phi.$$

Demonstração: Dado o \mathbb{K} -espaço vetorial V , consideremos sua álgebra tensorial $T(V)$, e seja $\mathcal{I} \subset T(V)$ o ideal gerado por $\{v \otimes v - \Phi(v) \cdot 1; v \in V\}$. Afirmamos que a \mathbb{K} -álgebra procurada é $T(V)/\mathcal{I}$ juntamente com $i_\Phi := \pi \circ i_1$, onde $i_1 : V \rightarrow T(V)$ é a injeção natural obtida na construção da $T(V)$ e $\pi : T(V) \rightarrow T(V)/\mathcal{I}$ é a aplicação quociente. Com efeito, temos que

i) $i_\Phi(v)^2 = (\pi(i_1(v)))^2 = (v + \mathcal{I})^2 = (v + \mathcal{I}) \otimes (v + \mathcal{I}) = v \otimes v + \mathcal{I} = \Phi(v) \cdot 1_{T(V)/\mathcal{I}}$,
para todo $v \in V$, uma vez que nesse caso $v \otimes v = \Phi(v) \cdot 1$.

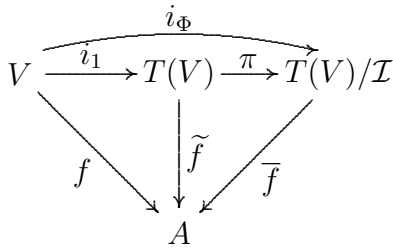
ii) Para toda \mathbb{K} -álgebra A e toda aplicação linear $f : V \rightarrow A$ com $(f(v))^2 = \Phi(v) \cdot 1, \forall v \in V$, como pela propriedade universal da álgebra tensorial, definição 1.3, existe um único \mathbb{K} -homomorfismo de álgebras, $\tilde{f} : T(V) \rightarrow A$ tal que

$$\tilde{f} \circ i_1 = f,$$

obtemos, da propriedade universal do quociente, um único \mathbb{K} -homomorfismo de álgebras, $\bar{f} : T(V)/\mathcal{I} \rightarrow A$ tal que

$$\bar{f} \circ \pi = \tilde{f},$$

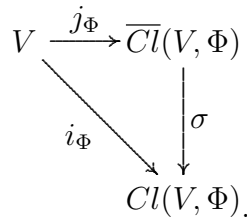
ou seja,



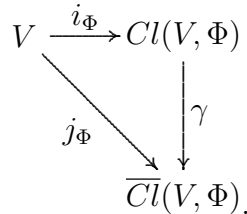
$$\bar{f} \circ i_\Phi = \bar{f} \circ (\pi \circ i_1) = (\bar{f} \circ \pi) \circ i_1 = \tilde{f} \circ i_1 = f.$$

Portanto, $Cl(V, \Phi) := T(V)/\mathcal{I}$ é uma álgebra de Clifford associada ao espaço vetorial V e a forma Φ .

Agora, para mostramos a unicidade, se $\overline{Cl}(V, \Phi)$ com $j_\Phi : V \rightarrow \overline{Cl}(V, \Phi)$ é outra álgebra de Clifford associada a V e Φ , da definição, 1.4 temos



Da mesma forma para $Cl(V, \Phi)$, segue que



Consequentemente,

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{j_\Phi} & \overline{Cl}(V, \Phi) \\
 & \searrow j_\Phi & \downarrow id \\
 & & \overline{Cl}(V, \Phi)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \downarrow \gamma \circ \sigma \\
 \downarrow \gamma \circ \sigma \\
 \downarrow \gamma \circ \sigma
 \end{array}
 \quad
 (\gamma \circ \sigma) \circ j_\Phi = \gamma \circ (\sigma \circ j_\Phi) = \gamma \circ i_\Phi = j_\Phi,$$

e,

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{i_\Phi} & Cl(V, \Phi) \\
 & \searrow i_\Phi & \downarrow id \\
 & & Cl(V, \Phi)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \downarrow \sigma \circ \gamma \\
 \downarrow \sigma \circ \gamma \\
 \downarrow \sigma \circ \gamma
 \end{array}
 \quad
 (\sigma \circ \gamma) \circ i_\Phi = \sigma \circ (\gamma \circ i_\Phi) = \sigma \circ j_\Phi = i_\Phi.$$

Logo, por unicidade da aplicação identidade, temos que $id_{\overline{Cl}(V, \Phi)} = \gamma \circ \sigma$ e $id_{Cl(V, \Phi)} = \sigma \circ \gamma$, donde fazendo $\psi := \gamma$ temos o isomorfismo desejado, concluindo a demonstração. ■

Diferente dessa abordagem, na linha de Gallier [9] e Atiyah, Bott e Shapiro [1], alguns autores, como Lawson e Michelsohn [14], definem as álgebras de Clifford tomando o ideal \mathcal{I} gerado por $\{v \otimes v + \Phi(v) \cdot 1 | v \in V, 1 \in \mathbb{K} = V^{\otimes 0}\}$.

Sendo isso o mesmo que a aplicação i_Φ , chamada de *aplicação estrutural*, satisfazer $(i_\Phi(v))^2 = -\Phi(v) \cdot 1$, pois, como veremos posteriormente, esta é uma inclusão, observa-se uma equivalência entre tais abordagens, já que podemos tomar $\overline{\Phi} := -\Phi$. Destacando, como segue, sua dependência a forma quadrática.

Exemplo 1.6. Sejam $V = \mathbb{R}$ e $\varphi(x, y) = -xy$ para $x, y \in \mathbb{R}$. Então $\Phi(x) = -x^2$ e definindo $i_\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$x \mapsto ix$$

temos que,

- i) $(i_\Phi(x))^2 = (ix)^2 = -x^2 = \Phi(x) \cdot 1$;
- ii) Sendo $f : \mathbb{R} \rightarrow A$ qualquer aplicação linear em uma \mathbb{R} -álgebra A tal que $(f(x))^2 = \Phi(x) \cdot 1_A$, segue que $f(x) = x \cdot f(1)$ e $a^2 = \Phi(1) \cdot 1_A = -1_A$, fazendo $f(1) = a$. Assim definimos $\overline{f} : \mathbb{C} \rightarrow A$ por

$$\overline{f}(x + iy) = x \cdot 1_A + y \cdot a, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

donde obtemos,

$$\overline{f}(i_\Phi(x)) = \overline{f}(ix) = 0 \cdot 1_A + x \cdot a = x \cdot f(1) = f(x).$$

Logo, $Cl(\mathbb{R}, -x^2) = \mathbb{C}$.

Exemplo 1.7. Sejam $V = \mathbb{R}$ e $\varphi(x, y) = xy$ para $x, y \in \mathbb{R}$. Então $\Phi(x) = x^2$ e definindo $i_\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ tal que

$$i_\Phi(1) = (0, 1)$$

temos que,

- i) $(i_\Phi(x))^2 = (x \cdot i_\Phi(1))^2 = x^2(1, 0) = \Phi(x) \cdot 1$, observando que a multiplicação em $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ é $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e a unidade é $(1, 0)$;
- ii) Sendo $f : \mathbb{R} \rightarrow A$ qualquer aplicação linear em uma \mathbb{R} -álgebra A tal que $(f(x))^2 = \Phi(x) \cdot 1_A$, segue que $f(x) = x \cdot f(1)$ e $a^2 = \Phi(1) \cdot 1_A = 1_A$, fazendo $f(1) = a$. Assim definimos $\bar{f} : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow A$ por

$$\bar{f}(x, y) = x \cdot 1_A + y \cdot a, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

donde obtemos,

$$\bar{f}(i_\Phi(x)) = x \cdot \bar{f}(i_\Phi(1)) = x \cdot \bar{f}(0, 1) = x \cdot a = x \cdot f(1) = f(x).$$

Portanto, $Cl(\mathbb{R}, x^2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Pode-se mostrar que $Cl(\mathbb{R}, x^2)$ com $j_\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{A}$, onde $\mathbb{A} := \mathbb{R}^2$ com multiplicação $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, também é uma álgebra de Clifford associada a \mathbb{R} e a Φ , assim $\psi : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{A}$ dada por

$$(1, 0) \mapsto (1, 1) \text{ e } (0, 1) \mapsto (1, -1)$$

é um isomorfismo de álgebras e temos que $\psi(i_\Phi) = j_\Phi$.

Exemplo 1.8. Sejam $V = \mathbb{R}$ e $\varphi(x, y) = 0$ para $x, y \in V$. Então $\Phi \equiv 0$ e assim o ideal \mathcal{I} é gerado por $\{x \otimes x; x \in \mathbb{R}\}$. Logo, a álgebra de Clifford associada a \mathbb{R} e a forma quadrática nula e é a álgebra exterior de \mathbb{R} , $\Lambda(\mathbb{R})$ ([12], pag. 524). Logo, $Cl(\mathbb{R}, 0) = \Lambda(\mathbb{R})$.

Exemplo 1.9. Generalizando os exemplos anteriores, sejam $V = \mathbb{K}$ e $\varphi(x, y) = dxy$ para $x, y \in \mathbb{K}$ e algum $d \in \mathbb{K}$. Então $\Phi(x) = dx^2$, donde temos \mathcal{I} gerado por $\{x \otimes x - d \cdot 1_{\mathbb{K}}; x \in \mathbb{K}\}$. Portanto, sabendo que $T(\mathbb{K}) \approx \mathbb{K}[X]$, $Cl(\mathbb{K}, dx^2) = \mathbb{K}[X] / \langle X^2 - d \rangle$.

Exemplo 1.10. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $\varphi(x, y) = -x_1y_1 - x_2y_2$ para $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Então $\Phi(x) = -x_1^2 - x_2^2$ e definindo $i_\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}$, onde \mathbb{H} denota a álgebra dos quatérnios, tal que

$$i_\Phi(x) = x_1i + x_2j$$

temos que,

i) $(i_\Phi(x))^2 = (x_1i + x_2j)^2 = -x_1^2 - x_2^2 = \Phi(x) \cdot 1$, observando que em \mathbb{H} tem-se $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ e $ij = k, ji = -k$;

ii) Sendo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow A$ qualquer aplicação linear em uma \mathbb{R} -álgebra A tal que $(f(x))^2 = \Phi(x) \cdot 1_A$, segue que $f(x) = x_1 \cdot f(1, 0) + x_2 \cdot f(0, 1)$ e $a^2 = f(1, 0)^2 = \Phi(1, 0) \cdot 1_A = -1_A$, $b^2 = f(0, 1)^2 = \Phi(0, 1) \cdot 1_A = -1_A$, fazendo $f(1, 0) = a$ e $f(0, 1) = b$. Assim definimos $\bar{f} : \mathbb{H} \rightarrow A$ por

$$\bar{f}(t + t_1i + t_2j + t_3k) = t \cdot 1_A + t_1 \cdot a + t_2 \cdot b + t_3 \cdot ab, \quad t, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R},$$

donde obtemos,

$$\bar{f}(i_\Phi(x)) = \bar{f}(x_1i + x_2j) = x_1 \cdot a + x_2 \cdot b = f(x).$$

Portanto, $Cl(\mathbb{R}^2, -x_1^2 - x_2^2) = \mathbb{H}$.

Agora para mostrarmos a injetividade da aplicação estrutural, que mencionamos anteriormente, simplificando a notação com a identificação $i_\Phi(V) = V$, precisamos conhecer um pouco mais dessas álgebras. Começemos observando que a imagem da aplicação estrutural, i_Φ , gera $Cl(V, \Phi)$.

Para isso denotamos por $A := \langle Im i_\Phi \rangle$ a subálgebra gerada por tal imagem e consideramos a aplicação $\tilde{i}_\Phi : V \rightarrow A$. Como $\tilde{i}_\Phi(v)^2 = \Phi(v) \cdot 1$, da definição 1.4, existe um único homomorfismo de álgebras $f : Cl(V, \Phi) \rightarrow A$ tal que

$$f \circ i_\Phi = \tilde{i}_\Phi.$$

Por outro lado, tomando-se a inclusão $j : A \hookrightarrow Cl(V, \Phi)$ temos que

$$j \circ \tilde{i}_\Phi = i_\Phi.$$

Conseqüentemente,

$$(j \circ f) \circ i_\Phi = j \circ (f \circ i_\Phi) = j \circ \tilde{i}_\Phi = i_\Phi,$$

e já que $id \circ i_\Phi = i_\Phi$, por unicidade da aplicação identidade, $j \circ f = id$, donde j é sobrejetiva. Portanto, $\langle Im i_\Phi \rangle = Cl(V, \Phi)$.

Dessa forma, se $x \in Cl(V, \Phi)$, então

$$x = \sum \lambda_{t_1, t_2, \dots, t_m} i_\Phi(v_1)^{t_1} i_\Phi(v_2)^{t_2} \dots i_\Phi(v_m)^{t_m} \quad (1.1)$$

onde $\lambda_j \in \mathbb{K}$ e $v_i \in V$, sujeito as relações:

$$i_\Phi(v)^2 = \Phi(v) \cdot 1$$

e

$$i_\Phi(u) \cdot i_\Phi(v) + i_\Phi(v) \cdot i_\Phi(u) = 2\varphi(u, v) \cdot 1,$$

devido a *identidade polar*, para $u, v \in V$, quando a característica de \mathbb{K} é diferente de 2.

Com isso podemos mostrar a seguinte proposição, também importante para a definição dos spinores na próxima seção.

Proposição 1.11. *Seja V qualquer \mathbb{K} -espaço vetorial associado a forma quadrática Φ . Existe um único automorfismo, $\alpha : Cl(V, \Phi) \rightarrow Cl(V, \Phi)$, tal que*

$$\alpha \circ \alpha = id \quad e \quad \alpha(i_\Phi(v)) = -i_\Phi(v), \quad \forall v \in V.$$

Demonstração: Considerando $\alpha_0 : V \rightarrow Cl(V, \Phi)$ dada por $\alpha_0(v) = -i_\Phi(v)$, vemos que esta é linear e $(\alpha_0(v))^2 = (-i_\Phi(v))^2 = i_\Phi(v)^2 = \Phi(v) \cdot 1$. Assim, pela propriedade universal das álgebras de Clifford, conforme definição 1.4, existe um único homomorfismo de álgebras, $\alpha : Cl(V, \Phi) \rightarrow Cl(V, \Phi)$, tal que

$$\alpha \circ i_\Phi = \alpha_0,$$

isto é,

$$\alpha(i_\Phi(v)) = -i_\Phi(v), \quad v \in V.$$

E para $x \in Cl(V, \Phi)$, de (1.1), temos que

$$\alpha(x) = \sum \lambda_{t_1, t_2, \dots, t_m} \alpha(i_\Phi(v_1))^{t_1} \alpha(i_\Phi(v_2))^{t_2} \dots \alpha(i_\Phi(v_m))^{t_m},$$

donde,

$$\alpha(x) = \sum \lambda_{t_1, t_2, \dots, t_m} (-i_\Phi(v_1))^{t_1} (-i_\Phi(v_2))^{t_2} \dots (-i_\Phi(v_m))^{t_m}, \quad v_i \in V$$

obtendo $\alpha \circ \alpha = id$ e, conseqüentemente, a bijetividade desta. ■

O automorfismo α é chamado *automorfismo canônico*. Usando-o podemos decompor a álgebra de Clifford em uma soma direta de dois subespaços,

$$Cl(V, \Phi) = Cl^0(V, \Phi) \oplus Cl^1(V, \Phi),$$

onde $Cl^i(V, \Phi) = \{x \in Cl(V, \Phi); \alpha(x) = (-1)^i x, \text{ para } i = 0, 1\}$ e x é dito *elemento homogêneo de grau i* . Como podemos ver que $Cl^i(V, \Phi) \cdot Cl^j(V, \Phi) \subseteq Cl^{i+j \bmod 2}(V, \Phi)$, mostra-se que $Cl(V, \Phi)$ é uma *álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada* ou uma *super álgebra*.

Agora observemos que isso nos permite falar na construção da álgebra chamada *produto tensorial \mathbb{Z}_2 -graduada* ou *super produto tensorial*, que de modo geral, se \mathcal{A} e \mathcal{B} são álgebras \mathbb{Z}_2 -graduadas, definimos o *super produto tensorial* $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ da seguinte forma: como espaço vetorial é o produto tensorial $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ e a multiplicação é dada por

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{\text{grau}(b)\text{grau}(a')} (aa') \otimes (bb'),$$

com $a, a' \in \mathcal{A}$ e $b, b' \in \mathcal{B}$ elementos homogêneos.

Além disso, $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$ é uma álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada. De fato $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B} = (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^0 \oplus (\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^1$, onde $(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^0 = (\mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^0) \oplus (\mathcal{A}^1 \otimes \mathcal{B}^1)$ e $(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})^1 = (\mathcal{A}^1 \otimes \mathcal{B}^0) \oplus (\mathcal{A}^0 \otimes \mathcal{B}^1)$. Permitindo afirmar que, se $V = V_1 \oplus V_2$ é uma decomposição ortogonal de um \mathbb{K} -espaço vetorial V associado a forma Φ , $\Phi(v_1 + v_2) = \Phi_1(v_1) + \Phi_2(v_2)$, onde $\Phi_1 = \Phi|_{V_1}$, $\Phi_2 = \Phi|_{V_2}$, $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$, existe um isomorfismo natural de álgebras de Clifford,

$$Cl(V, \Phi) \approx Cl(V_1, \Phi_1) \widehat{\otimes} Cl(V_2, \Phi_2). \quad (1.2)$$

Fato que podemos provar considerando a aplicação $f : V \rightarrow Cl(V_1, \Phi_1) \widehat{\otimes} Cl(V_2, \Phi_2)$ dada por

$$f(v) = v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_2,$$

$v = v_1 + v_2$, e usando a propriedade universal das álgebras de Clifford para obter o isomorfismo, cuja inversa seria dada por

$$u \otimes w \mapsto \gamma(u)\psi(w),$$

onde $u \in Cl(V_1, \Phi_1)$, $w \in Cl(V_2, \Phi_2)$, γ e ψ são também obtidas pela propriedade universal das álgebras de Clifford através da aplicação $V_1 \rightarrow V_1 \oplus V_2 \rightarrow Cl(V, \Phi)$, bem como da aplicação $V_2 \rightarrow V_1 \oplus V_2 \rightarrow Cl(V, \Phi)$, respectivamente ([14], pág. 11, [5], pág. 57).

Com isso mostremos a injetividade da aplicação estrutural e também que se a dimensão de V é finita e $\{e_1, \dots, e_n\}$ for uma base ortogonal de V com respeito a Φ , o produto $e_{j_1} e_{j_2} \dots e_{j_k}$ com $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$, juntamente com 1, é uma base de $Cl(V, \Phi)$, cuja dimensão é 2^n .

Proposição 1.12. *A aplicação estrutural, $i_\Phi : V \rightarrow Cl(V, \Phi)$, é injetiva.*

Demonstração: Se a forma bilinear associada a Φ for nula, $\varphi \equiv 0$, observando que o exemplo 1.8 vale para qualquer V , $Cl(V, \Phi) = \Lambda(V)$, então i_Φ é injetiva, visto que $\mathcal{I} \subseteq \bigoplus_{n \geq 2} V^{\otimes n}$, implica que a aplicação quociente, $\pi : T(V) \rightarrow T(V)/\mathcal{I} := \Lambda(V)$, restrita a $V^{\otimes 1}$ é injetiva ([12], pag. 524) e $i_\Phi = \pi \circ i_1 = \pi|_{V^{\otimes 1}}$, onde $i_1 : V^{\otimes 1} \rightarrow T(V)$.

Se a forma bilinear φ é não degenerada, ou seja, se $v \in V$ e $\varphi(v, w) = 0$ para todo $w \in V$, então $v = 0$, temos que se $x \in \ker i_\Phi$, para $y \in V$, segue que

$$0 = i_\Phi(x)i_\Phi(y) + i_\Phi(y)i_\Phi(x) = 2\varphi(x, y) \cdot 1,$$

donde $x = 0$.

Se a forma bilinear é qualquer, podemos escrever $V = V_0 \oplus V_1$, onde V_0 é o *espaço nulo*,

$$V_0 := \{v \in V; \varphi(v, w) = 0, \forall w \in V\},$$

e V_1 é o espaço complementar de V_0 .

Observemos que $\varphi|_{V_1 \times V_1}$ associada a $\Phi_1 := \Phi|_{V_1}$ é não degenerada. Com efeito, se $v_1 \in V_1$ e

$\varphi(v_1, v) = 0$, para todo $v \in V_1$, temos que $\varphi(v_1, w) = \varphi(v_1, w_0) + \varphi(v_1, w_1)$, $w = w_0 + w_1 \in V$, $w_0 \in V_0$, $w_1 \in V_1$, implicando, $\varphi(v_1, w) = 0$ para todo $w \in V$, logo $v_1 \in V_0$, mas como $V_0 \cap V_1 = \{0\}$, tem-se $v_1 = 0$.

Portanto, pelo que mostramos anteriormente, a aplicação estrutural da álgebra de Clifford associada a V_1 e Φ_1 , $i_{\Phi_1} : V_1 \rightarrow Cl(V_1, \Phi)$, é injetiva.

Consideremos assim, a aplicação

$$\psi_1 : V \xrightarrow{\pi_1} V_1 \xrightarrow{i_{\Phi_1}} Cl(V_1, \Phi_1)$$

onde $\pi_1 : V \rightarrow V_1$ é a aplicação projeção. Então,

$$\psi_1(v)^2 = \Phi_1(v_1) \cdot 1 = \Phi(v) \cdot 1,$$

já que $\Phi(v) = \varphi(v_0 + v_1, v_0 + v_1) = \varphi(v_1, v_1) = \Phi_1(v_1)$.

Definamos

$$\begin{aligned} \psi : V &\rightarrow \Lambda(V) \widehat{\otimes} Cl(V_1, \Phi_1) \\ v &\mapsto \pi_0(v) \otimes 1 + 1 \otimes \psi_1(v), \end{aligned}$$

onde $\pi_0 : V \rightarrow V_0$ é aplicação projeção. E notemos que

$$\psi(v)^2 = \pi_0(v)^2 \otimes 1 + \pi_0(v) \otimes \psi_1(v) - \pi_0(v) \otimes \psi_1(v) + 1 \otimes \psi_1(v)^2 = \Phi(v) \cdot 1,$$

pois $\alpha(\pi_0(v)) = \alpha(v_0) = -v_0 = -\pi_0(v)$ e $\alpha(\psi_1(v)) = -i_{\Phi}(\pi_1(v)) = -\psi_1(v)$, donde $grau(\psi_1(v)) = grau(\pi_0(v)) = 1$.

Logo, pela propriedade universal das álgebras de Clifford, definição 1.4, existe um único homomorfismo de álgebras $f : Cl(V, \Phi) \rightarrow \Lambda(V) \widehat{\otimes} Cl(V_1, \Phi_1)$, tal que

$$f \circ i_{\Phi} = \psi.$$

Como ψ é injetiva, pois $\psi(v) = 0$, implica $\pi_0(v) = 0$ e $\psi_1(v) = 0$, donde sendo i_{Φ_1} injetiva, $v = 0$, segue que i_{Φ} é injetiva como queríamos mostrar. ■

Assim, $Cl(V, \Phi)$ é não nula e pode ser vista como uma álgebra gerada por V . Donde se $x \in Cl(V, \Phi)$, de (1.1), tem-se

$$x = \sum \lambda_{t_1, t_2, \dots, t_m} v_1^{t_1} v_2^{t_2} \dots v_m^{t_m}$$

onde $\lambda_j \in \mathbb{K}$ e $v_i \in V$, com

$$v^2 = \Phi(v) \cdot 1$$

e

$$u \cdot v + v \cdot u = 2\varphi(u, v) \cdot 1$$

para $u, v \in V$, quando a característica de \mathbb{K} é diferente de 2.

Proposição 1.13. *Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base ortogonal de um \mathbb{K} -espaço vetorial V com respeito a Φ , então a álgebra $Cl(V, \Phi)$ tem base dada pelos produtos $e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_k}$, onde $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$, juntamente com 1, isto é, $\dim Cl(V, \Phi) = 2^n$.*

Demonstração: Como (e_1, e_2, \dots, e_n) é ortogonal, V admite uma decomposição ortogonal, $V = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{K}e_i$, onde $\Phi(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^2$ para todo $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i \in V$, $\lambda_i, v_i \in \mathbb{K}$ ([10], pag. 65). Assim, sendo $V_i = \mathbb{K}e_i$ e $\Phi_i(v) = \lambda_i v_i^2$, por (1.2), temos que

$$Cl(V, \Phi) \approx Cl(\mathbb{K}e_1, \Phi_1) \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} Cl(\mathbb{K}e_n, \Phi_n).$$

Como do exemplo 1.9, obtemos que $Cl(\mathbb{K}e_i, \Phi_i) = \mathbb{K}[X]/\langle X^2 - \lambda_i \rangle$, temos que cada fator do lado direito desse isomorfismo tem dimensão igual a 2. Portanto, já que como espaço vetorial é um produto tensorial, a dimensão de $Cl(V, \Phi)$ é 2^n .

Dessa forma, sendo $\{1, e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_k}\}$ um conjunto gerador como espaço vetorial com 2^n elementos, onde $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$, é necessariamente uma base de $Cl(V, \Phi)$, como desejamos mostrar. ■

Para finalizar a seção, vejamos que as álgebras de Clifford tem um antiautomorfismo, ou seja, uma aplicação linear bijetiva em $Cl(V, \Phi)$ satisfazendo $t(x \cdot y) = t(y) \cdot t(x)$.

Proposição 1.14. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial associado a forma quadrática Φ . Então existe um único antiautomorfismo, $t : Cl(V, \Phi) \rightarrow Cl(V, \Phi)$, tal que*

$$t \circ t = id, \quad t(x \cdot y) = t(y) \cdot t(x) \quad e \quad t(v) = v$$

para todo $v \in V$ e $x, y \in Cl(V, \Phi)$.

Demonstração: Consideremos a involução $J : T(V) \rightarrow T(V)$ dada por

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_k \mapsto v_k \otimes \dots \otimes v_1$$

estendendo por linearidade.

Observemos que $\mathcal{I} \subset \ker(\pi \circ J)$, onde π é a aplicação quociente e \mathcal{I} é como na prova da proposição 1.5. Com efeito,

$$\pi \circ J(v \otimes v - \Phi(v) \cdot 1) = \pi(v \otimes v - \Phi(v) \cdot 1) = 0.$$

Conseqüentemente, pela propriedade universal do quociente, existe um único homomorfismo $t : Cl(V, \Phi) \rightarrow Cl(V, \Phi)$, tal que

$$\begin{array}{ccc} T(V) & \xrightarrow{J} & T(V) & \xrightarrow{\pi} & Cl(V, \Phi) \\ \pi \downarrow & & & \nearrow t & \\ T(V)/\mathcal{I} & & & & \end{array} \quad t \circ \pi = J \circ \pi.$$

Portanto,

- i) $t(v) = t(i_{\Phi}(v)) = t \circ \pi(i_1(v)) = J \circ \pi(i_1(v)) = J(v) = v$;
- ii) Como π é sobrejetiva, dados $x, y \in Cl(V, \Phi)$, existem $x', y' \in T(V)$ tais que $\pi(x') = x$ e $\pi(y') = y$. Daí $t(x \cdot y) = t(\pi(x')\pi(y')) = t \circ \pi(x' \cdot y') = J \circ \pi(x' \cdot y') = J(x \cdot y) = y \cdot x = J(y)J(x) = J(\pi(y')\pi(x')) = t(y)t(x)$;
- iii) Como $J \circ J = id$, donde $t \circ J(J \circ \pi) = t \circ \pi$, implicando $t \circ J(t \circ \pi) = t \circ \pi$, e por unicidade da identidade, $t \circ J = id$, temos que $t \circ t(x) = t \circ J \circ \pi(x') = \pi(x') = x$.

e assim t é um antiautomorfismo como queríamos mostrar. ■

Assim podemos, como segue, conhecer o conceito algébrico que está no cerne da teoria de Geometria Spin.

1.2 Os grupos Spinores

Como o título da seção indica, precisamos relacionar as álgebras $Cl(V, \Phi)$ com o conceito de grupo. Para isso, consideremos o *grupo multiplicativo das unidades* na álgebra de Clifford, isto é,

$$Cl^*(V, \Phi) := \{x \in Cl(V, \Phi); \exists x^{-1} \in Cl(V, \Phi) \text{ tal que } x^{-1}x = xx^{-1} = 1\}.$$

Assim, como $Cl^*(V, \Phi)$ contém os vetores $v \in V$ tal que $\Phi(v) \neq 0$, pois $v^2 = \Phi(v) \cdot 1$, tomemos o subgrupo de $Cl^*(V, \Phi)$ gerado pelos elementos $v \in V$ com $\Phi(v) \neq 0$, denotando por $P(V, \Phi)$. A parti daí, podemos especificar os grupos spinores:

Definição 1.15. O grupo *Pin* associado ao \mathbb{K} -espaço vetorial V e a Φ , denotado por $Pin(V, \Phi)$, é o subgrupo

$$P(V, \Phi) := \langle \{v \in V; \Phi(v) = \pm 1\} \rangle.$$

E o grupo *Spin* associado a V e a Φ , é dado por

$$Spin(V, \Phi) := Pin(V, \Phi) \cap Cl^0(V, \Phi).$$

Observemos que $Spin(V, \Phi)$ é realmente um grupo, pois como $x \in Pin(V, \Phi)$, restaria mostrar que $x^{-1} \in Cl^0(V, \Phi)$, e isso é possível já que $\alpha(x^{-1}) = \alpha(x)^{-1}$.

Porém, nosso trabalho se desenvolve focando as álgebras de Clifford associadas a certos espaços vetoriais de dimensão finita, e assim passaremos a obter uma definição de tais grupos nesse contexto.

Definição 1.16. Um antiautomorfismo na álgebra de Clifford, $\bar{\cdot} : Cl(V, \Phi) \rightarrow Cl(V, \Phi)$, dado por $\bar{x} := t \circ \alpha(x)$ é dito *conjugação*.

Aproveitemos para observar que $t \circ \alpha = \alpha \circ t$, isso porque sendo a $\dim V < \infty$, da proposição 1.13, $1, e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_k}$, com $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$, formam uma base em $Cl(V, \Phi)$, donde

$$t(e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_k}) = e_{j_k}e_{j_k-1}\dots e_{j_1}$$

e

$$\alpha(e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_k}) = (-1)^k e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_k}.$$

De posse da conjugação, definimos uma outra aplicação que chamamos *norma*, $N : Cl(V, \Phi) \rightarrow Cl(V, \Phi)$, dada por

$$N(x) = x\bar{x},$$

onde $N(e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_k}) = (-1)^k \Phi(e_{j_1})\Phi(e_{j_2})\dots \Phi(e_{j_k})$, pelo mesmo argumento do parágrafo anterior e já que $\overline{e_{j_1}e_{j_2}\dots e_{j_k}} = (-1)^k e_{j_k}e_{j_k-1}\dots e_{j_1}$.

Definição 1.17. Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita. O *grupo Clifford* da forma quadrática Φ , denotado por $\Gamma(V, \Phi)$, é o subgrupo formado pelos elementos $x \in Cl^*(V, \Phi)$ para o qual

$$\alpha(x)vx^{-1} \in V, \quad \forall v \in V.$$

Como a aplicação $\rho_x : V \rightarrow V$, dada por $\rho_x(v) = \alpha(x)vx^{-1}$, é linear e injetiva para cada $x \in \Gamma(V, \Phi)$, devido a $\dim V < \infty$, é bijetiva. Assim a inversa existe e é dada por $\rho_x^{-1}(v) = \alpha(x^{-1})vx$, lembrando que α é um automorfismo. Donde, $x^{-1} \in \Gamma(V, \Phi)$, permitindo mostrar que $xy^{-1} \in \Gamma(V, \Phi)$, para $x, y \in \Gamma(V, \Phi)$, e concluir que $\Gamma(V, \Phi)$ é um subgrupo das unidades da álgebra de Clifford.

Além disso, podemos ver que se $v \in V$ e $\Phi(v) \neq 0$ a aplicação ρ_x tem uma interpretação geométrica como segue:

Proposição 1.18. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita e Φ uma forma quadrática. Se $w \in V$ e $\Phi(w) \neq 0$, então a aplicação $\rho_w : V \rightarrow V$ dada por*

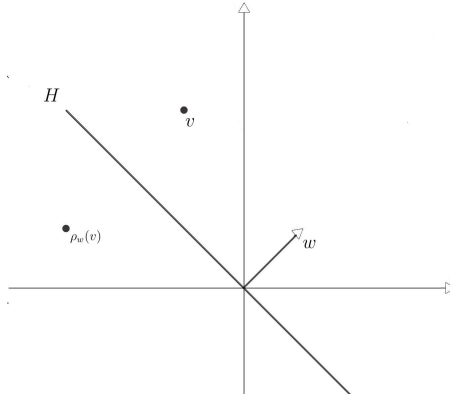
$$v \mapsto \alpha(w)vw^{-1}$$

é a reflexão sobre o hiperplano H ortogonal ao vetor w .

Demonstração: Já que $w^2 = \Phi(w) \cdot 1$ segue que $w^{-1} = \frac{w}{\Phi(w)}$, e daí

$$\begin{aligned} \rho_w(v) &= \alpha(w)vw^{-1} = -wv \frac{w}{\Phi(w)} = (vw - 2\varphi(v, w) \cdot 1) \frac{w}{\Phi(w)} \\ &= v - 2 \frac{\varphi(v, w)}{\Phi(w)} w, \end{aligned}$$

para todo $v \in V$. Portanto, sendo essa última igualdade a definição da reflexão s_w sobre o hiperplano $H := \{v \in V; \varphi(v, w) = 0\}$ ortogonal ao vetor w , segue o desejado. ■

Figura 1.1: ρ_w quando $V = \mathbb{R}^2$

Já vimos na definição 1.15, no início da seção, a caracterização geral dos grupos spinores, teremos agora uma definição equivalente, importante ao presente trabalho, que os caracteriza quando a dimensão de V é finita, como já mencionado antes.

Definição 1.19. O grupo *Pin* associado a um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita V e a uma forma quadrática Φ não degenerada, isto é, se φ é a forma bilinear simétrica associada a Φ e $\varphi(v, w) = 0$ para todo $w \in V$, então $v = 0$, denotado por $Pin(V, \Phi)$, é o subgrupo

$$Pin(V, \Phi) := \{x \in \Gamma(V, \Phi); N(x) = \pm 1\}$$

E o grupo *Spin* associado a V e Φ , é dado por

$$Spin(V, \Phi) := Pin(V, \Phi) \cap Cl^0(V, \Phi).$$

Para mostrarmos tal equivalência vejamos que associado ao grupo *Clifford*, temos uma importante aplicação chamada por Atiyah, Bott e Shapiro ([1], pag. 7) de *representação adjunta torcida*,

$$\begin{aligned} \rho : \Gamma(V, \Phi) &\rightarrow GL(V) \\ x &\mapsto \rho_x : V \rightarrow V \\ v &\mapsto \rho_x(v) = \alpha(x)vx^{-1}, \end{aligned}$$

que está bem definida, como podemos ver no parágrafo posterior a definição 1.17, cujo contradomínio é o *Grupo Linear Geral* de V ,

$$GL(V) := \{T : V \rightarrow V; T \text{ é um } \mathbb{K}\text{-isomorfismo linear}\},$$

e com a qual temos os seguinte resultados:

Lema 1.20. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita e Φ uma forma quadrática não degenerada. O núcleo da aplicação ρ é o grupo multiplicativo, $\mathbb{K}^* \cdot 1$, dos múltiplos não nulos da identidade de $Cl(V, \Phi)$.*

Demonstração: Como Φ é não degenerada, escolhamos uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V tal que $\Phi(e_j) \neq 0$, para todo j , e $\varphi(e_i, e_j) = 0$, para todo $i \neq j$. Se $x \in \ker \rho$, então $\rho_x = id$, donde,

$$\alpha(x)vx^{-1} = v \quad \Rightarrow \quad \alpha(x)v = vx, \quad \forall v \in V.$$

Observemos que, como $Cl(V, \Phi) = Cl^0(V, \Phi) \oplus Cl^1(V, \Phi)$, podemos escrever $x = x_0 + x_1$, onde $x_0 \in Cl^0(V, \Phi)$ e $x_1 \in Cl^1(V, \Phi)$. Assim, de $\alpha(x_0 + x_1)v = v(x_0 + x_1)$, temos $-x_1v + x_0v = vx_1 + vx_0$, e visto que $v \in Cl^1(V, \Phi)$, segue-se,

$$x_1v = -vx_1 \quad \text{e} \quad vx_0 = x_0v, \quad \forall v \in V \quad (1.3)$$

Além disso, da proposição 1.13, podemos escrever x_0 e x_1 como combinações lineares de $e_{j_1} \dots e_{j_k}$, $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$. Dessa forma, usando sucessivamente $e_j e_i = -e_i e_j + 2\varphi(e_j, e_i)$, conseguimos expressar x_1 como $x_1 = a_1 + e_1 a_0$, onde a_1 e a_0 são combinações lineares de $e_{j_1} \dots e_{j_k}$ para $j_i \neq 1$. O mesmo acontece para x_0 .

Notemos que $a_1 \in Cl^1(V, \Phi)$ e $a_0 \in Cl^0(V, \Phi)$, pois $-x_1 = \alpha(a_1) - e_1 \alpha(a_0)$, e assim $-a_1 - e_1 a_0 = \alpha(a_1) - e_1 \alpha(a_0)$. E para $v = e_1$ em (1.3), tem-se

$$\begin{aligned} a_1 e_1 + e_1 a_0 e_1 = -e_1 a_1 - e_1^2 a_0 &\Rightarrow -e_1 a_1 + e_1^2 a_0 = -e_1 a_1 - e_1^2 a_0 \\ &\Rightarrow e_1^2 a_0 = 0, \text{ como } \Phi(e_1) \neq 0, \\ &\Rightarrow a_0 = 0. \end{aligned}$$

Logo, $x_1 = a_1$, e com isso não tem e_1 em sua expressão. Podendo expressar $x_1 = a_1 = b_0 + e_2 b_1$, e assim indutivamente, em seguida fazendo esse mesmos procedimento, chegamos que x_1 não tem e_2, \dots, e_n em sua expressão, ou seja, é gerado apenas por 1. Com isso, $x_1 \in Cl^0(V, \Phi)$, mas vimos que $x_1 \in Cl^1(V, \Phi)$, portanto, $x_1 = 0$.

Analogamente, mostramos que $x_0 = t \cdot 1, t \in \mathbb{K}$. E concluímos, $x = t \cdot 1$, e como $x \in \Gamma(V, \Phi)$, $x \neq 0$, o que completa a demonstração. ■

Proposição 1.21. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita e Φ uma forma quadrática não degenerada. Se $x \in \Gamma(V, \Phi)$, então $N(x) \in \mathbb{K}^* \cdot 1$.*

Demonstração: Notemos inicialmente que α e t induzem, respectivamente, um automorfismo e um antiautomorfismo em $\Gamma(V, \Phi)$, já que $\alpha(\alpha(x))v\alpha(x)^{-1} = -\alpha(\alpha(x)vx^{-1}) = \alpha(x)vx^{-1} \in V$ e, analogamente, $\alpha(t(x))vt(x)^{-1} \in V$, para todo $x \in \Gamma(V, \Phi)$ e $v \in V$.

Assim, se $x \in \Gamma(V, \Phi)$, tem-se

$$\begin{aligned} t(\alpha(x)vx^{-1}) = \alpha(x)vx^{-1} &\Rightarrow t(x)^{-1}vt(\alpha(x)) = \alpha(x)vx^{-1} \\ &\Rightarrow v = t(x)\alpha(x)vx^{-1}t(\alpha(x))^{-1} \\ &\Rightarrow v = \alpha(\alpha \circ t(x)x)v(\alpha \circ t(x)x)^{-1}, \end{aligned}$$

donde, $\bar{x}x \in \ker \rho$. Como $\bar{x} = \alpha(t(x)) \in \Gamma(V, \Phi)$, segue que $N(x) = x\bar{x} = \alpha \circ t(\alpha \circ t(x))\alpha \circ t(x) = \bar{\bar{x}}\bar{x} \in \ker \rho$, que pelo lema anterior mostra o desejado. ■

Corolário 1.22. *A norma restrita ao grupo $\Gamma(V, \Phi)$, $N : \Gamma(V, \Phi) \rightarrow \mathbb{K}^* \cdot 1$, é um homomorfismo e $N(\alpha(x)) = N(x)$ para todo $x \in \Gamma(V, \Phi)$.*

Demonstração: Vejamos que para $x, y \in \Gamma(V, \Phi)$, pela proposição anterior, tem-se

$$N(xy) = xy\overline{xy} = xyt \circ \alpha(xy) = xyt \circ \alpha(y)t \circ \alpha(x) = xN(y)\bar{x} = N(x)N(y).$$

Da mesma forma,

$$N(\alpha(x)) = \alpha(x)\overline{\alpha(x)} = \alpha(x)\alpha \circ t(\alpha(x)) = \alpha(x)\alpha(\bar{x}) = \alpha(N(x)) = N(x).$$

■

Para o próximo corolário precisamos do seguinte resultado, conhecido como teorema de Cartan-Dieudonné, cuja demonstração omitiremos, mas pode ser vista em Bourbaki ([3], pag. 97, proposição 5).

Teorema 1.23. *Seja V um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita e Φ uma forma quadrática não degenerada. Todo elemento do grupo ortogonal, $f \in O(V, \Phi)$, pode ser escrito como o produto de k reflexões,*

$$f = s_1 \circ \dots \circ s_k,$$

onde $k \leq \dim V$ e $O(V, \Phi) = \{T \in GL(V); \Phi(Tv) = \Phi(v), \forall v \in V\}$.

Corolário 1.24. *A imagem da representação adjunta torcida é o grupo das aplicações ortogonais, ou seja, $\rho(\Gamma(V, \Phi)) = O(V, \Phi)$.*

Demonstração: Observemos que se $x \in \Gamma(V, \Phi)$ e $v \in V$, com $\Phi(v) \neq 0$, pelo corolário anterior,

$$N(\rho_x(v)) = N(\alpha(x)v\alpha(x)^{-1}) = N(x)N(v)N(x)^{-1} = N(v), \quad \forall v \in V \text{ e } x \in \Gamma(V, \Phi),$$

donde, $\Phi(\rho_x(v)) = \Phi(v)$, mostrando que $\rho_x \in O(V, \Phi)$.

Agora, se $f \in O(V, \Phi)$, como Φ é não degenerada, pelo teorema de Cartan-Dieudonné,

$$f = s_1 \circ \dots \circ s_k.$$

Também por Φ ser não degenerada, $V' := \{v \in V; \Phi(v) \neq 0\}$ é não vazio, e pela proposição 1.18, tem-se $V' \subseteq \Gamma(V, \Phi)$. Assim podemos considerar o vetor não nulo $w_j \in V'$ ortogonal ao hiperplano sobre o qual está definido s_j , obtendo

$$\rho(w_j) = s_j.$$

Conseqüentemente, notando que para $x_1, \dots, x_r \in Cl(V, \Phi)$ tem-se

$$\rho_{x_1 \dots x_r}(v) = \alpha(x_1 \dots x_r)v(x_1 \dots x_r)^{-1} = \rho_{x_1} \circ \dots \circ \rho_{x_r}(v), \quad \forall v \in V,$$

segue que

$$f = \rho_{w_1 \dots w_k}, \quad w_j \in \Gamma(V, \Phi),$$

concluindo a demonstração. ■

Observação 1.25. Assim temos a seguinte seqüência exata:

$$1 \longrightarrow \mathbb{K}^* \cdot 1 \hookrightarrow \Gamma(V, \Phi) \xrightarrow{\rho} O(V, \Phi) \longrightarrow 1.$$

Agora podemos ver a equivalência entre as definições 1.15 e 1.19. Para isso denotemos o conjunto $Pin(V, \Phi)$ na definição 1.19 por

$$G_{V, \Phi} := \{x \in \Gamma(V, \Phi); N(x) = \pm 1\}$$

e observemos que este é um grupo, já que Φ é não degenerada e, do corolário 1.22, a norma no grupo Clifford é um homomorfismo. Assim basta vermos primeiro que o conjunto gerador

$$V'' = \{v \in V; \Phi(v) = \pm 1\}$$

do grupo $Pin(V, \Phi)$ está contido em $G_{V, \Phi}$. Com efeito, se $v \in V''$, tem-se $v^{-1} = \pm v$ e $\alpha(v)wv^{-1} = \pm w \mp 2\varphi(w, v)v$, para todo $w \in V$, donde $V' \subseteq \Gamma(V, \Phi)$ e como $N(v) = -v^2 = \pm 1$, segue que $V'' \subseteq G_{V, \Phi}$, e portanto, $Pin(V, \Phi) \subseteq G_{V, \Phi}$.

Para a outra inclusão, se $x \in G_{V, \Phi}$, então $x \in \Gamma(V, \Phi)$, e da prova do corolário anterior, existem $w_j \in \Gamma(V, \Phi)$ com $\Phi(w_j) \neq 0$ tais que

$$\rho(x) = \rho_{w_1 \dots w_k},$$

daí,

$$\begin{aligned} \rho(xw_1^{-1} \dots w_k^{-1}) = id &\quad \Rightarrow \quad xw_1^{-1} \dots w_k^{-1} \in \ker \rho \\ &\quad \Rightarrow \quad x = \lambda w_1 \dots w_k, \quad \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \neq 0. \end{aligned}$$

Como $N(x) = \pm 1$ segue que $\lambda = \pm 1$ e $\Phi(w_j) = -N(w_j) = \pm 1$. Portanto, obtemos que $G_{V, \Phi} \subseteq Pin(V, \Phi)$.

Assim, temos a equivalência desejada e destacamos que é crucial a forma quadrática Φ ser não degenerada, visto a necessidade do $\ker \rho$ ser igual a $\mathbb{K}^* \cdot 1$. O que não acontece quando a forma é degenerada. No exemplo 1.8, onde a forma é degenerada, $1 + e_1 e_2 \in \ker \rho$, já que $(1 + e_1 e_2)^{-1} = 1 - e_1 e_2$, mas $1 + e_1 e_2 \notin \mathbb{K}^* \cdot 1$.

Exemplo 1.26. Quando $V = \mathbb{R}$ e $\Phi(x) = -x^2$ temos que $Cl(\mathbb{R}, \Phi) = \mathbb{C}$, conforme o exemplo 1.6. Assim, como a aplicação estrutural é injetiva, identificamos \mathbb{R} com $\mathbb{R}i$, daí $\alpha(bi) = -bi$, e conseqüentemente,

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathbb{R}, \Phi) &= \{a + bi \in \mathbb{C}^*; (a - bi)v \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}i, \forall v \in \mathbb{R}i, a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a + bi \in \mathbb{C}^*; b = 0 \text{ ou } a = 0 \text{ } a, b, \in \mathbb{R}\} \\ &= Cl^0(\mathbb{R}, \Phi) \cup Cl^0(\mathbb{R}, \Phi)i,\end{aligned}$$

donde,

$$Pin(\mathbb{R}, \Phi) = \{a + bi \in \Gamma(\mathbb{R}, \Phi); a^2 + b^2 = 1\} = \{-1, 1, -i, i\}$$

e

$$Spin(\mathbb{R}, \Phi) = \{a + bi \in Pin(\mathbb{R}, \Phi); \alpha(a + bi) = a + bi\} = \{-1, 1\},$$

isto é,

$$Pin(\mathbb{R}, \Phi) \approx \mathbb{Z}_4 \quad \text{e} \quad Spin(\mathbb{R}, \Phi) \approx \mathbb{Z}_2.$$

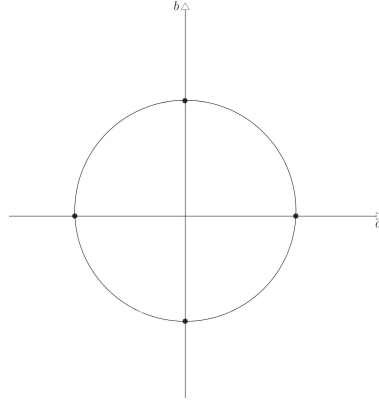


Figura 1.2: $Pin(\mathbb{R}, \Phi)$

Exemplo 1.27. Quando $V = \mathbb{R}$ e $\Phi(x) = x^2$ temos que $Cl(\mathbb{R}, \Phi) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, conforme o exemplo 1.7. Assim, identificamos \mathbb{R} com $\mathbb{R}\xi$, onde $\xi = (0, 1)$. Dessa forma o automorfismo canônico $\alpha(0, b) = -(0, b)$, e conseqüentemente,

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathbb{R}, \Phi) &= \{(a, b) \in (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})^*; (a, -b)v\xi \left(-\frac{a}{b^2 - a^2}, \frac{b}{b^2 - a^2}\right) \in \mathbb{R}\xi, \forall v \in \mathbb{R}\xi, a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a, b) \in (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})^*; b = 0 \text{ ou } a = 0 \text{ } a, b, \in \mathbb{R}\} \\ &= Cl^0(\mathbb{R}, \Phi) \cup Cl^0(\mathbb{R}, \Phi)\xi,\end{aligned}$$

E, já que $N(a, b) = (a, b)(a, -b) = (a^2 - b^2) \cdot 1$, temos

$$Pin(\mathbb{R}, \Phi) = \{(a, b) \in \Gamma(\mathbb{R}, \Phi); a^2 - b^2 = \pm 1\} = \{(-1, 0), (1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$$

onde a ordem de seus elementos é dois, e

$$Spin(\mathbb{R}, \Phi) = \{(a, b) \in Pin(\mathbb{R}, \Phi); (a, -b) = (a, b)\} = \{(-1, 0), (1, 0)\},$$

isto é,

$$Pin(\mathbb{R}, \Phi) \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \quad \text{e} \quad Spin(\mathbb{R}, \Phi) \approx \mathbb{Z}_2.$$

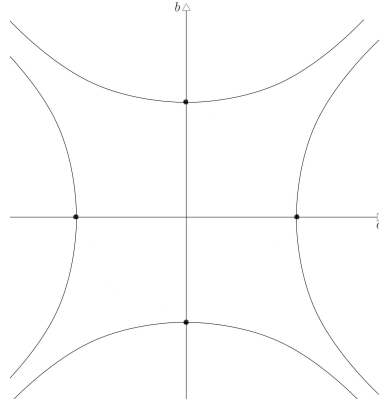


Figura 1.3: $Pin(\mathbb{R}, \Phi)$

Assim, finalizamos a seção obtendo que a *representação adjunta torcida* restrita aos grupos $Pin(V, \Phi)$ e $Spin(V, \Phi)$ são homomorfismos sobrejetivos, respectivamente, sobre o grupo ortogonal, $O(V, \Phi)$, e o grupo ortogonal especial,

$$SO(V, \Phi) = \{T \in O(V, \Phi); \det(T) = 1\}.$$

característica fundamental para o último capítulo desse trabalho, que nos permite, como veremos, mostrar que tais grupos são recobrimentos duplos. Conceito este utilizado para abordar a estrutura das variedades spins de modo topologicamente equivalente a como são definidas, contudo mais ricamente ([14], pag. 5).

Teorema 1.28. *As restrições de ρ aos grupos spinores, $\rho : Pin(V, \Phi) \rightarrow O(V, \Phi)$ e $\rho : Spin(V, \Phi) \rightarrow SO(V, \Phi)$, são homomorfismos sobrejetivos de grupos.*

Demonstração: Como do corolário 1.24 temos que $\rho(\Gamma(V, \Phi)) = O(V, \Phi)$, na demonstração deste podemos tomar w_j unitário, $u_j = \frac{w_j}{|\Phi(w_j)|}$, e obtemos que $u_1 \dots u_j \in Pin(V, \Phi)$, pois $N(u_j) = \pm 1$, e assim, para qualquer $f \in O(V, \Phi)$,

$$f = \rho_{u_1 \dots u_k},$$

mostrando a sobrejetividade de $\rho|_{Pin(V, \Phi)}$.

Agora, suponhamos por absurdo que $\rho(Spin(V, \Phi)) \neq SO(V, \Phi)$. Então existe uma $f \in O(V, \Phi) \setminus SO(V, \Phi)$ tal que $\rho_x = f$ para algum $x \in Spin(V, \Phi)$.

Notemos que escolhendo uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V com $v = e_1$ e $\varphi(v, e_j) = 0$ para $j \geq 2$, tem-se $\rho_v(e_1) = -e_1$ e $\rho_v(e_j) = e_j$, $j \geq 2$. Com isso o $\det \rho_v = -1$, e conseqüentemente,

$$SO(V, \Phi) = \{s_1 \circ \dots \circ s_k; k \text{ é par}\}.$$

Daí, f pode ser escrita como $f = \rho_{w_1 \dots w_{2k+1}}$, e assim $\rho_{w_1 \dots w_{2k+1}} = \rho_x$, o que implica $x^{-1}w_1 \dots w_{2k+1} \in \mathbb{K}^* \cdot 1$, pelo lema 1.20.

Dessa forma, para algum $\lambda \in \mathbb{K}^*$,

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{\lambda} w_1 \dots w_{2k+1} &\Rightarrow \alpha(x) = \frac{1}{\lambda} \alpha(w_1) \dots \alpha(w_{2k+1}) \\ &\Rightarrow \alpha(x) = \frac{1}{\lambda} (-1)^{2k+1} w_1 \dots w_{2k+1} = -x, \end{aligned}$$

o que é absurdo, pois $x \in Spin(V, \Phi)$. Portanto, $\rho : Spin(V, \Phi) \rightarrow SO(V, \Phi)$ é também sobrejetiva. ■

Assim, como já conhecemos os grupos spinores, podemos passar as representações das álgebras de Clifford, representações estas importantes em Geometria Spin, como faremos no próximo capítulo.

Capítulo 2

As classificações e representações das álgebras de Clifford

Aqui, se considerarmos que o leitor tenha conhecimentos em teoria das variedades ou um consulta ao apêndice, como já vimos a definição dos grupos spinores, deveremos seguir buscando compreender as representações.

Dessa forma, o presente capítulo se estrutura com tal finalidade. Iniciando com as álgebras de Clifford associadas ao espaço vetorial \mathbb{R}^n , passando, na seção seguinte, as representações de modo geral, mas com foco nas representações dessas álgebras.

2.1 As álgebras de Clifford associadas a \mathbb{R}^n

Seria oportuno detalharmos melhor o motivo de foco em um caso particular das álgebras de Clifford. Esse está nas representações dessas álgebras restritas aos grupos spinores, conceito que veremos na próxima seção, não serem induzidas de representações dos grupos ortogonais ou ortogonais especiais ([14], pag. 21).

E isso é importância, pois o modo de abordar a estrutura spin das variedades spin, utilizando levantamento, está relacionado com tais representações, que por não serem induzidas como citado, geram novas construções, inexistentes sobre variedades gerais, mesmo quando se refina a estrutura das variedades diferenciais passando as variedades spin, sem abordar-la assim ([14], pag. 5).

Então, iniciemos considerando V como um \mathbb{R} -espaço vetorial n -dimensional, e supondo que a forma quadrática Φ seja não degenerada em V . Com isso, podemos escolher uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ para V , conforme Garling ([10], pag. 64), de forma que

$$\Phi(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2,$$

onde $p + q = n$ e $0 \leq p \leq n$. Denotamos por $\Phi_{p,q}$ a forma quadrática correspondente ao par (p, q) , chamado de *assinatura* de $\Phi_{p,q}$.

As álgebras de Clifford associadas as formas quadráticas que têm essa assinatura recebem, conseqüentemente, a notação $Cl_{p,q}$, seus grupos Clifford, $\Gamma_{p,q}$, bem como seus grupos spinores, $pin_{p,q}$ e $spin_{p,q}$. Também os grupos ortogonais e ortogonais especiais são convencionalmente escritos como $O_{p,q}$ e $SO_{p,q}$.

Quando $p = 0$ obtemos casos que são importantes para o presente trabalho, cuja notação é Cl_n , isto é,

$$\Phi_n(x) = -x_1^2 - \dots - x_n^2, \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } N(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2, \forall x \in \Gamma_n, \quad (2.1)$$

mostrando que a aplicação *norma* é sempre não negativa para tais álgebras reais e permitindo definir os grupos pin_n e $spin_n$ também da seguinte forma, como fazem Atiyah, Bott e Shapiro ([1], pag. 8), sendo esta exatamente a definição 1.19 em tais álgebras:

Definição 2.1. Pin_n é o núcleo de $N : \Gamma_n \rightarrow \mathbb{R}^* \cdot 1$, para $n \geq 1$, e $Spin_n$ é o subgrupo de Pin_n que é imagem inversa de SO_n sobre $\rho : Pin_n \rightarrow O_n$, para $n \geq 1$.

Lembremos que alguns autores, por exemplo, Lawson e Michelsohn [14], definem as álgebras de Clifford com $(i_\Phi(v))^2 = -\Phi(v) \cdot 1$, assim suas Cl_n são nossas $Cl_{n,0}$. Mas o trabalho é similar, já que há apenas uma inversão de sinal no decorrer das demonstrações.

Uma classificação dessas álgebras é obtida a partir dos seguintes teoremas, onde o segundo é dito *o teorema da 8-periodicidade* devidos a Elie Cartan e Raoul Bott.

Teorema 2.2. *Os \mathbb{R} -isomorfismos de álgebras*

$$Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2} \cong Cl_{0,n+2} \quad (2.2)$$

$$Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0} \cong Cl_{n+2,0} \quad (2.3)$$

$$Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1} \cong Cl_{p+1,q+1} \quad (2.4)$$

existem para todo $n, p, q \geq 0$.

Demonstração: Como o procedimento é similar para os três isomorfismos (ver [14], pag. 26), façamos o (2.4). Assim, escolhamos $\{e_1, \dots, e_{p+1}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{q+1}\}$ uma base ortogonal para \mathbb{R}^{p+q+2} tal que $\Phi_{p+1,q+1}(e_i) = 1$ e $\Phi_{p+1,q+1}(\varepsilon_j) = -1$, $\forall i, j$. Então seja $\{e'_1, \dots, e'_p, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_q\}$ uma base para $\mathbb{R}^{p+q} \hookrightarrow Cl_{p,q}$ e $\{e''_1, \varepsilon''_1\}$ uma base para $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow Cl_{1,1}$. Dessa forma, definamos $f : \mathbb{R}^{p+q+2} \rightarrow Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1}$ estendendo linearmente

$$f(x) = x \otimes e''_1 \varepsilon''_1, \quad x \in \mathbb{R}^{p+q}, \quad f(e_{p+1}) = 1 \otimes \varepsilon''_1 \text{ e } f(\varepsilon_{q+1}) = 1 \otimes e''_1.$$

Notando que está bem definida, visto a injetividade da aplicação estrutural, e que

$$\begin{aligned}
f(x + \lambda e_{p+1} + \mu \varepsilon_{q+1})^2 &= (x \otimes e_1'' \varepsilon_1'' + \lambda 1 \otimes \varepsilon_1'' + \mu 1 \otimes e_1'')^2 \\
&= -x^2 \otimes e_1''^2 \varepsilon_1''^2 + \lambda^2 1 \otimes e_1''^2 + (\lambda - \lambda)x \otimes e_1''^2 \varepsilon_1'' + (\mu - \mu)x \otimes e_1'' \varepsilon_1''^2 \\
&\quad + (\lambda\mu - \mu\lambda)1 \otimes e_1'' \varepsilon_1'' + \mu^2 1 \otimes \varepsilon_1''^2 \\
&= [-\Phi_{p,q}(x)\Phi_{1,1}(e_1'')\Phi_{1,1}(\varepsilon_1'') + \lambda^2\Phi_{1,1}(e_1'') + \mu^2\Phi_{1,1}(\varepsilon_1'')]1 \otimes 1 \\
&= [\Phi_{p,q}(x) + \lambda^2 - \mu^2]1 \otimes 1 \\
&= \Phi_{p+1,q+1}(x + \lambda e_{p+1} + \mu \varepsilon_{q+1})1 \otimes 1,
\end{aligned}$$

obtemos, pela definição 1.4, o homomorfismo $\tilde{f} : Cl_{p+1,q+1} \rightarrow Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1}$. Como $\tilde{f}((-1)^{k-1}(-1)^{l-1}e_{i_1} \dots e_{i_k} \varepsilon_{j_1} \dots \varepsilon_{j_l}) = e_{i_1}' \dots e_{i_k}' \varepsilon_{j_1}' \dots \varepsilon_{j_l}' \otimes e_1'' \varepsilon_1''$, com $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p+1$, $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq q+1$, este é sobrejetivo. E já que a $\dim Cl_{p+1,q+1} = 2^{p+q+2} = \dim Cl_{p,q} \cdot \dim Cl_{1,1}$, conforme proposição 1.13, temos o isomorfismo desejado. ■

Teorema 2.3. (*8-periodicidade de Cartan/Bott*) Para $n \geq 0$, existem os \mathbb{R} -isomorfismos de álgebras

$$\begin{aligned}
Cl_{n+8,0} &\cong Cl_{n,0} \otimes Cl_{8,0}, \\
Cl_{0,n+8} &\cong Cl_{0,n} \otimes Cl_{0,8}.
\end{aligned}$$

Demonstração: Do teorema anterior, usando (2.2) e (2.3), temos que

$$\begin{aligned}
Cl_{n+8,0} &\cong Cl_{0,n+6} \otimes Cl_{2,0} \cong Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \otimes Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \\
&\cong Cl_{n,0} \otimes Cl_{4,0} \otimes Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \\
&\cong Cl_{n,0} \otimes Cl_{8,0}.
\end{aligned}$$

O mesmo acontece com $Cl_{0,n+8}$, como queríamos demonstrar. ■

Assim, essas álgebras são vistas como álgebras de matrizes $n \times n$, que denotamos por $\mathbb{K}(n)$, sobre os reais, complexos e quatérnios, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e \mathbb{H} , pois temos a seguinte proposição, cuja demonstração pode ser vista em [14] (pag. 27) e [17] (pag. 83-84):

Proposição 2.4. Para todo $n, m \geq 0$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ temos os \mathbb{R} -isomorfismos seguinte:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}(n) \otimes \mathbb{R}(m) &\cong \mathbb{R}(mn) \\
\mathbb{R}(n) \otimes \mathbb{K} &\cong \mathbb{K}(n) \\
\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} &\cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \\
\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} &\cong \mathbb{C}(2) \\
\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} &\cong \mathbb{R}(4).
\end{aligned}$$

Além de sabermos que,

$$Cl_{0,1} = \mathbb{C}, \quad Cl_{1,0} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R},$$

$$Cl_{0,2} = \mathbb{H}, \quad Cl_{2,0} = \mathbb{R}(2) \quad \text{e} \quad Cl_{1,1} = \mathbb{R}(2),$$

conforme os exemplos 1.6, 1.7, 1.10 e Garling [10] (pag. 106-107), observando que suas álgebras de Clifford \mathcal{A}_n são nossas $Cl_{0,n}$, bem como as $\mathcal{A}_{0,n}$ são as $Cl_{n,0}$.

Exemplo 2.5. Temos que

$$Cl_{8,0} \cong Cl_8,$$

pois $Cl_{8,0} \cong Cl_6 \otimes Cl_{2,0} \cong Cl_{4,0} \otimes Cl_2 \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}(16)$ e, analogamente, $Cl_8 \cong \mathbb{R}(16)$.

Observação 2.6. Também poderíamos considerar as *álgebras de Clifford Complexas*, isto é, aquelas associadas a \mathbb{C} -espaços vetoriais n -dimensionais, V , com suas formas quadráticas não degeneradas, que devido a existência de uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ para V , ([10], pag. 82), são dadas por:

$$\Phi_n^{\mathbb{C}}(z) = z_1^2 + \dots + z_n^2.$$

A notação usada é $\mathbb{C}l_n$ e podemos identifica-las com complexificações das álgebras de Clifford reais, pois sabemos que a complexificação de \mathbb{R}^n é por definição $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C}$ com forma quadrática complexificada $\Phi_{\mathbb{C}}(x \otimes z) := z^2 \Phi_n(x)$, donde temos a proposição seguinte, além de $(\mathbb{R} \otimes \mathbb{C})^n \cong \mathbb{C}^n$ e $\Phi_{\mathbb{C}} = -\Phi_n^{\mathbb{C}}$.

Proposição 2.7. Para $n \geq 0$, temos o seguinte \mathbb{C} -isomorfismo de álgebras

$$Cl(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C}, \Phi_{\mathbb{C}}) \cong Cl_n \otimes \mathbb{C}.$$

Demonstração: Notemos que $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} \rightarrow Cl_n \otimes \mathbb{C}$ dada por $\phi(x, z) = x \otimes z$ é \mathbb{R} -bilinear. Então, pela definição 1.1, induz uma aplicação \mathbb{R} -linear $\phi_{\otimes} : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C} \rightarrow Cl_n \otimes \mathbb{C}$ tal que $\phi_{\otimes}(x \otimes z) = x \otimes z$. Como $\phi_{\otimes}(x \otimes z) = (x \otimes 1)z = \phi_{\otimes}(x \otimes 1)z$, temos que é também \mathbb{C} -linear. Além disso $\phi_{\otimes}(x \otimes z)^2 = (x \otimes 1)^2 z^2 = z^2 x^2 1 \otimes 1 = z^2 \Phi_n(x) \cdot 1$, donde, pela definição 1.4, existe um único \mathbb{C} -homomorfismo de álgebras $\overline{\phi_{\otimes}} : Cl(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C}, \Phi_{\mathbb{C}}) \rightarrow Cl_n \otimes \mathbb{C}$. Sendo $\overline{\phi_{\otimes}}$ injetiva, pois ϕ_{\otimes} é, e $\dim(Cl(\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C}, \Phi_{\mathbb{C}})) = \dim(Cl_n \otimes \mathbb{C})$, segue que $\overline{\phi_{\otimes}}$ é um isomorfismo. ■

De modo mais geral, sendo V um \mathbb{R} -espaço vetorial e Φ uma forma quadrática não degenerada, com uma demonstração análoga, obtemos que $Cl(V \otimes \mathbb{C}, \Phi_{\mathbb{C}}) \cong Cl(V, \Phi) \otimes \mathbb{C}$. Assim identificamos $\mathbb{C}l_{p,q} \equiv Cl_{p,q} \otimes \mathbb{C} \equiv Cl_{q,p} \otimes \mathbb{C}$ e mostramos o terceiro isomorfismo no *teorema de 8-periodicidade de Cartan e Bott*:

Teorema 2.8. Para $n \geq 0$, existe o isomorfismo

$$\mathbb{C}l_{n+2} \cong \mathbb{C}l_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l_2.$$

Demonstração: Da proposição anterior e do teorema 2.2 tem-se

$$\mathbb{C}l_{n+2} \cong \mathbb{C}l_{n+2} \otimes \mathbb{C} \cong (\mathbb{C}l_{n,0} \otimes \mathbb{C}l_{0,2}) \otimes \mathbb{C} \cong (\mathbb{C}l_n \otimes \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}l_2 \otimes \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}l_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l_2,$$

como queríamos mostrar. ■

Exemplo 2.9. Temos que

$$\mathbb{C}l_4 \cong \mathbb{C}(2) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(2),$$

já que $\mathbb{C}l_2 \cong \mathbb{C}l_2 \otimes \mathbb{C}$ e, pela proposição 2.4, $\mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}(2)$, donde $\mathbb{C}l_{1,1} \cong \mathbb{C}l_2 \cong \mathbb{C}(2)$.

Para encerrar esta seção veremos duas proposições relativas ao *elemento de volume* de $\mathbb{C}l_{p,q}$, também importantes para a próxima seção. Assim escolhamos uma orientação em \mathbb{R}^{p+q} e seja (e_1, \dots, e_{p+q}) qualquer base $\Phi_{p,q}$ -ortonormal ($\{e_1, \dots, e_{p+q}\}$ $\Phi_{p,q}$ -ortogonal com $\Phi(e_i) = 1, 1 \leq i \leq p$ e $\Phi(e_j) = -1, p+1 \leq j \leq p+q$) orientada positiva, isto é, qualquer base cuja matriz de mudança de base tenha determinante positivo.

Definição 2.10. O *elemento de volume* em $\mathbb{C}l_{p,q}$ associado a qualquer base $\{e_1, \dots, e_{p+q}\}$ $\Phi_{p,q}$ -ortonormal orientada positiva é definido por

$$\omega = e_1 \dots e_{p+q}.$$

Observemos que essa definição independe da base, pois se $\{e'_1, \dots, e'_{p+q}\}$ é outra base, então $e'_i = \sum_j g_{ij} e_j$ para $g = (g_{ij}) \in SO_{p,q}$, e como $e_i e_j + e_j e_i = 0$, se $i \neq j$, e $e_i^2 = \pm 1$, segue que $e'_1 \dots e'_{p+q} = \det(g) e_1 \dots e_{p+q} = e_1 \dots e_{p+q}$.

E lembremos que o *centro* de uma \mathbb{K} -álgebra A é o conjunto definido por

$$Z(A) := \{a \in A; ab = ba, \forall b \in A\},$$

onde um elemento $a \in Z(A)$ é dito *central*, o que nos permite ver a primeira proposição:

Proposição 2.11. Seja $n = p + q$, então o elemento de volume em $\mathbb{C}l_{p,q}$ é tal que

$$\omega^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2} + q} \quad e \quad v\omega = (-1)^{n-1} \omega v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Em particular, se n é ímpar, ω é central em $\mathbb{C}l_{p,q}$, caso contrário,

$$x\omega = \omega\alpha(x), \quad \forall x \in \mathbb{C}l_{p,q}.$$

Demonstração: Escolhendo uma base $\Phi_{p,q}$ -ortonormal $\{e_1, \dots, e_p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q\}$ e aplicando $e_i e_j = -e_j e_i$, $\varepsilon_i \varepsilon_j = -\varepsilon_j \varepsilon_i$ e $\varepsilon_i e_j = -e_j \varepsilon_i$, obtemos que

$$\omega^2 = (-1)^{n-1}(-1)^{n-2} \dots (-1)^{n-q} 1^p (-1)^{q-1} \dots (-1)^{q-q} (-1)^q = (-1)^{n \cdot n - (1+2+\dots+p+q)+q},$$

donde segue a primeira igualdade. Analogamente, têm-se a segunda e a terceira, lembrando que uma base de $Cl_{p,q}$ são os produtos $e_{i_1} \dots e_{i_k} \varepsilon_{j_1} \dots \varepsilon_{j_l}$, conforme a proposição 1.13. ■

Lema 2.12. Se $\omega^2 = 1$, então $\pi^+ := \frac{1}{2}(1 + \omega)$ e $\pi^- := \frac{1}{2}(1 - \omega)$ satisfazem as relações:

$$\pi^+ + \pi^- = 1, \quad (\pi^+)^2 = \pi^+, \quad (\pi^-)^2 = \pi^- \quad e \quad \pi^+ \pi^- = \pi^- \pi^+ = 0.$$

Demonstração: Segue diretamente de $\omega^2 = 1$ e da definição de π^+ e π^- . ■

Proposição 2.13. Se $\omega^2 = 1$ e $p + q$ é ímpar, então $Cl_{p,q}$ pode ser decomposta em

$$Cl_{p,q} = Cl_{p,q}^+ \oplus Cl_{p,q}^-,$$

onde $Cl_{p,q}^\pm := \pi^\pm \cdot Cl_{p,q} = Cl_{p,q} \cdot \pi^\pm$ são subálgebras isomorfas e $\alpha(Cl_{p,q}^\pm) = Cl_{p,q}^\mp$.

Demonstração: Já que $\omega^2 = 1$, pelo lema anterior, temos que para todo $x \in Cl_{p,q}$, $\pi^+ x + \pi^- x = x$ e $Cl_{p,q}^+ \cap Cl_{p,q}^- = \{0\}$, pois de $x = \pi^+ y = \pi^- z$ para algum $y, z \in Cl_{p,q}$, tem-se $0 = (\pi^-)^2 z$, donde $x = 0$. Obtendo a decomposição desejada. E como $p + q$ é ímpar, pela proposição anterior, tem-se ω central, implicando que π^\pm também o são, e daí $\pi^\pm \cdot Cl_{p,q} = Cl_{p,q} \cdot \pi^\pm$, além de $\alpha(\pi^\pm) = \pi^\mp$. Consequentemente, $\alpha(Cl_{p,q}^\pm) = Cl_{p,q}^\mp$, já que $\alpha(x) \in Cl_{p,q}$, e sendo α um automorfismo, temos o isomorfismo. ■

Observação 2.14. No caso complexo, $\mathbb{C}l_n$, o elemento de volume complexo é dado por:

$$\omega_{\mathbb{C}} := i^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \omega,$$

onde $\omega \in Cl_{n,0}$ e $\lfloor \cdot \rfloor$ significa a parte inteira da fração. Assim quando n é par, $\omega_{\mathbb{C}} = i^k e_1 \dots e_{2k}$. Se n for ímpar, como ω é central, $\omega_{\mathbb{C}}$ também é. Tem-se também

$$\omega_{\mathbb{C}}^2 = 1, \quad \text{para todo } n,$$

e com isso o lema anterior acontece para o caso complexo, bem como a proposição, se n é ímpar, com $\mathbb{C}l_{p,q}^\pm = (1 \pm \omega_{\mathbb{C}}) \mathbb{C}l_{p,q}$, obtendo a decomposição

$$\mathbb{C}l_{p,q} = \mathbb{C}l_{p,q}^+ \oplus \mathbb{C}l_{p,q}^-.$$

Assim finalizamos essa seção vendo um conceito importante para determinação de representações irredutíveis, assunto este que trataremos na próxima seção e completa esse capítulo, cujo o objetivo é conhecer as representações das álgebras de Clifford.

2.2 Representações

Lembremos que mencionamos o nome representação na segunda seção do primeiro capítulo, com a *representação adjunta torcida*, mas sem definir. Isso ocorreu por abordarmos as álgebra de Clifford reais só nesse capítulo e serem as representações dessas álgebras de interesse para Geometria Spin.

Assim, iniciaremos com uma definição geral e algumas características, restringindo-nos em seguida as Cl_n , para definirmos tais representações de interesse, as representações spinores, ou seja, a representações reais spin.

Definição 2.15. Sejam V um \mathbb{K} -espaço vetorial e \mathbb{L} um anel de divisão tal que $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{K}$. Uma \mathbb{L} -representação n -dimensional de $Cl(V, \Phi)$ é um \mathbb{K} -homomorfismo de álgebras,

$$\rho : Cl(V, \Phi) \rightarrow End_{\mathbb{L}}(W),$$

de $Cl(V, \Phi)$ na álgebra das transformações lineares de um \mathbb{L} -espaço vetorial W de dimensão finita n .

Como \mathbb{L} é uma álgebra de divisão, definimos um espaço vetorial sobre \mathbb{L} como um \mathbb{L} -módulo à direita, visto termos noções de independência linear, base e dimensão neste.

Chamamos o espaço vetorial W de $Cl(V, \Phi)$ -módulo sobre \mathbb{L} e, frequentemente, referem-se a $\rho(x)(w)$, $x \in Cl(V, \Phi)$ e $w \in W$, como *multiplicação de Clifford*, usando

$$x \cdot w := \rho(x)(w) := \rho_x(w),$$

para simplificar a notação. Agora, sob as condições da definição anterior, podemos ver a noção de irredutibilidade de uma representação.

Definição 2.16. Dizemos que uma \mathbb{L} -representação, $\rho : Cl(V, \Phi) \rightarrow End_{\mathbb{L}}(W)$, é *reduzível*, se o espaço W pode ser escrito como uma soma direta não trivial, $W = W_1 \oplus W_2$, tal que W_i são $Cl(V, \Phi)$ -subespaços, isto é,

$$\rho(x)(W_i) \subseteq W_i,$$

para $i = 1, 2$ e $\forall x \in Cl(V, \Phi)$. E é dita *irreduzível*, se não for reduzível.

Notemos que, como $End_{\mathbb{L}}(W) \cong End_{\mathbb{L}}(W_1) \oplus End_{\mathbb{L}}(W_2)$ ([12], pag. 420-421), devido a $Hom_{\mathbb{L}}(W_1, W_2) = Hom_{\mathbb{L}}(W_2, W_1) = \{0\}$, por ser reduzível, podemos escrever

$$\rho = \rho_1 \oplus \rho_2,$$

onde $\rho_i(x) = \rho(x)|_{W_i}$, para $i = 1, 2$. Consequentemente, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.17. *Toda \mathbb{L} -representação ρ de $Cl(V, \Phi)$ pode ser decomposta em uma soma direta, $\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_m$, de \mathbb{L} -representações irredutíveis.*

Demonstração: Se ρ for irredutível nada a fazer. Se for redutível, vimos que $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$. Sendo ρ_1 ou ρ_2 redutível, obtemos $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \rho_3$, e assim seguimos nesse processo, mas como a dimensão de W é finita, tal processo termina, donde segue o desejado. ■

Assim para conhecê-las, basta trabalharmos com as representações irredutíveis, ou ainda, com uma representante nas classes de equivalência dessas, uma vez que podemos definir uma relação de equivalência entre as mesmas.

Definição 2.18. Dadas duas \mathbb{L} -representações de Clifford, $\rho : Cl(V, \Phi) \rightarrow End_{\mathbb{L}}(W)$ e $\tau : Cl(V, \Phi) \rightarrow End_{\mathbb{L}}(U)$, dizemos que são *equivalentes* se existe um \mathbb{L} -isomorfismo, $F : W \rightarrow U$, tal que

$$F \circ \rho(x) \circ F^{-1} = \tau(x), \quad \forall x \in Cl(V, \Phi),$$

isto é, o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{F} & U \\ \rho(x) \downarrow & & \downarrow \tau(x) \\ W & \xrightarrow{F} & U \end{array}$$

comuta para todo $x \in Cl(V, \Phi)$.

Exemplo 2.19. A representação real $\rho : Cl_{1,1} \rightarrow End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\rho(A)(x, y) = (a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y),$$

onde $A = (a_{ij}) \in Cl_{1,1} = \mathbb{R}(2)$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, é irredutível, pois sendo as matrizes *álgebras simples* sobre os reais, isto é, seus únicos ideais são os triviais ([10], pag. 20), e como \mathbb{R}^2 , é um $\mathbb{R}(2)$ -módulo à esquerda, a representação natural ρ é irredutível ([10], pag. 30).

Isso nos remete a um resultado mais geral, pois como vimos na seção anterior, as álgebras de Clifford reais, $Cl_{p,q}$, são álgebras de matrizes da forma $\mathbb{L}(2^m)$ ou $\mathbb{L}(2^m) \otimes \mathbb{L}(2^m)$, com $\mathbb{L} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} , como álgebras sobre \mathbb{R} .

Teorema 2.20. *Considerando $\mathbb{L}(n)$, $\mathbb{L} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} , álgebras sobre \mathbb{R} , tem-se:*

1. *A representação natural $\rho : \mathbb{R}(n) \rightarrow End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$, onde $\rho(A)(x) = A \cdot x$, $A \in \mathbb{R}(n)$ e $x \in \mathbb{R}^n$, é uma \mathbb{R} -representação real irredutível;*
2. *A representação natural $\rho : \mathbb{H}(n) \rightarrow End_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$, onde $\rho(A)(x) = A \cdot x$, $A \in \mathbb{H}(n)$ e $x \in \mathbb{H}^n$, é uma \mathbb{H} -representação real irredutível;*

3. A representação natural $\rho : \mathbb{C}(n) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$, onde $\rho(A)(x) = A \cdot x$ ou $\rho(A)(x) = \bar{A} \cdot x$, $A \in \mathbb{R}(n)$, \bar{A} a matriz conjugada de A e $x \in \mathbb{R}^n$, é uma \mathbb{C} -representação real irredutível.

Além disso, as representações naturais $\rho_i : \mathbb{L}(n) \oplus \mathbb{L}(n) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L}^n)$, com $i = 1, 2$, dadas por

$$\rho_1(A, B)(x) = \rho(A)(x) \quad e \quad \rho_2(A, B)(x) = \rho(B)(x),$$

onde $A, B \in \mathbb{L}(n)$ e $x \in \mathbb{R}^n$, são \mathbb{L} -representação reais irredutíveis.

Demonstração: Como $\mathbb{L}(n)$ são álgebras simples ([10], pag. 33), qualquer representação irredutível de $\mathbb{L}(n)$ é isomorfa a representação natural de $\mathbb{L}(n)$ sobre $\text{End}_{\mathbb{L}}(\mathbb{L}^n)$ ([10], pag. 34). ■

Mesmo se o interesse fosse as \mathbb{L} -representações de $Cl_{p,q}$, $\mathbb{L} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} , poderíamos focar na representações reais, visto que, um \mathbb{C} -espaço vetorial é um \mathbb{R} -espaço vetorial W juntamente com uma aplicação linear $J : W \rightarrow W$ tal que $J^2 = -id$ e uma *representação complexa* de $Cl_{p,q}$ é uma representação real, $\rho : Cl_{p,q} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(W)$, tal que

$$\rho(x) \circ J = J \circ \rho(x), \quad \forall x \in Cl_{p,q}.$$

Analogamente para as *representações quaterniônicas* dessas álgebras ([14], pag. 30).

Também podemos no restringir as álgebras Cl_n , pois são as representações de $Spin_n$, definidas a seguir, que se fazem importantes na Geometria Spin, quando não são induzidas das representações dos grupos SO_n .

Definição 2.21. A *representação real spin* de $Spin_n$ é o homomorfismo de grupos

$$\Delta_n : Spin_n \rightarrow GL(W)$$

dado pela restrição de uma representação real irredutível $\rho : Cl_n \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(W)$ a $Spin_n$.

Tal definição é coerente, uma vez que $Spin_n \subset Cl_n^*$ e assim $\rho(x)^{-1} = \rho(x^{-1})$, para todo $x \in Spin_n$. E como

$$Cl_n \cong Cl_{n+1}^0,$$

para todo n ([1], proposição 5.4, pag. 12), donde $Cl_{n-1} \cong Cl_n^0$, tem-se $Spin_n \subset Cl_{n-1}$. Conseqüentemente, conhecendo uma representação de Clifford irredutível, obtemos duas representações reais spin, como podemos ver a seguir.

Exemplo 2.22. Observemos que os *octônios* ou *números de Cayley* \mathbb{O} podem ser definidos como pares de quatérnios, $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$, com multiplicação dada por

$$(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c}),$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{H}$ e \bar{a} é o conjugado de a . Essa multiplicação não é comutativa nem associativa, mas todo elemento não nulo tem inverso, isto é, uma *álgebra com divisão*. Além disso, dado um $x = (a, b) \in \mathbb{O}$, escrevendo $\bar{x} = (\bar{a}, -b)$, definimos as partes reais e imaginárias de x como

$$\operatorname{Re}(x) = \frac{1}{2}(x + \bar{x}) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(x) = \frac{1}{2}(x - \bar{x})$$

Assim, podemos considerar $\mathbb{R}^7 = \operatorname{Im}(\mathbb{O})$ e $\mathbb{R}^8 = \mathbb{O}$ e definirmos, para todo $v \in \mathbb{R}^7$, o \mathbb{R} -homomorfismo $\lambda_v : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8$ dado por

$$\lambda_v(x) = v \cdot x,$$

onde $x \in \mathbb{R}^8$. Dessa forma, com $\varphi(x, y) = \operatorname{Re}(x\bar{y})$, para a aplicação linear $\lambda : \mathbb{R}^7 \rightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^8)$ temos

$$\lambda(v)^2(x) = \lambda_v \circ \lambda_v(x) = v^2 \cdot x = \Phi_7(v)id(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^8,$$

donde, pela definição 1.4, existe um \mathbb{R} -homomorfismo de álgebra

$$\tilde{\lambda} : Cl_7 \rightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^8),$$

ou seja, temos uma representação 8-dimensional de Cl_7 . Agora, como

$$Cl_7 \cong ((Cl_{1,0} \otimes Cl_{0,2}) \otimes Cl_{2,0}) \otimes Cl_{0,2} \cong (((\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \otimes \mathbb{H}) \otimes \mathbb{R}(2)) \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8),$$

sabemos, pelo teorema 2.20, que $\tilde{\lambda}$ é irredutível.

Portanto,

$$\Delta_7 : Spin_7 \rightarrow GL(\mathbb{R}^8)$$

é a representação real spin 8-dimensional de $Spin_7$. E já que

$$Spin_8 \subset Cl_8^0 \cong Cl_7,$$

tem-se também

$$\Delta_8 : Spin_8 \rightarrow GL(\mathbb{R}^8)$$

a representação real spin 8-dimensional de $Spin_8$.

Agora para encerrar, e conseqüentemente, o capítulo, vejamos os seguintes resultados que, com o conceito de *elemento de volume*, trazem uma condição necessária para termos representações irredutíveis.

Proposição 2.23. *Seja $\rho : Cl_n \rightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(W)$ qualquer representação irredutível onde $n - 3 = 4m$. Então, ou*

$$\rho(\omega) = id \text{ ou } \rho(\omega) = -id,$$

ou podem existir representações para ambas possibilidades e estas são não equivalentes.

Demonstração: Como $n - 3 = 4m$, pela proposição 2.11, temos que $\omega^2 = 1$, e obtemos $\rho(\omega)^2 = \rho(\omega^2) = id$. Assim as relações do lema 2.12, na seção anterior, são satisfeitas para $\pi^\pm = \frac{1}{2}(id \pm \rho(\omega))$ permitindo decompor $W = W^+ \oplus W^-$, onde $W^\pm = \frac{1}{2}(id \pm \rho(\omega))W$. Observando que n é ímpar, tem-se ω central, e com isso segue que

$$\begin{aligned} \rho(x)(w^\pm) &= x \cdot \frac{1}{2}(w \pm \rho(\omega)(w)) = \frac{1}{2}x \cdot (w \pm \omega w) = \frac{1}{2}x \cdot (w \pm w\omega) = \frac{1}{2}x \cdot w(1 \pm \omega) = \\ &= \frac{1}{2}(\rho(x)(w) \pm \omega\rho(x)(w)) = \frac{1}{2}(id \pm \rho(\omega))(\rho(x)(w)), \end{aligned}$$

$\forall x \in Cl_n$, $w^\pm \in W^\pm$ e algum $w \in W$, donde temos que W^\pm é Cl_n -subespaço. E já que ρ é irredutível, concluímos que ou $W^+ = W$ ou $W^- = W$, demonstrando que uma ou outra das afirmações acontecem.

Para ver que ambas podem existir tomamos Cl_n agindo Cl_n^\pm , por meio das representações naturais $\rho_\pm : Cl_n \rightarrow End_{\mathbb{R}}(Cl_n^\pm, Cl_n^\pm)$, onde

$$\rho_\pm(x)(w) := x\pi^\pm\bar{w},$$

com $x \in Cl_n$, $w = \pi^\pm\bar{w} \in Cl_n^\pm$ para algum $\bar{w} \in Cl_n$.

Restando mostrar a não equivalência, que se $F : W \rightarrow W'$ for qualquer isomorfismo, e sendo $\rho(\omega) = \pm id$, $F \circ \rho(\omega) \circ F^{-1} = \rho(x)$, mostrando o desejado. ■

Proposição 2.24. *Seja $\rho : Cl_{n,0} \rightarrow End_{\mathbb{R}}(W)$ qualquer representação irredutível onde $n - 1 = 4m$. Então, ou*

$$\rho(\omega) = id \text{ ou } \rho(\omega) = -id,$$

ou podem existir representações para ambas possibilidades e estas são não equivalente.

Demonstração: Análoga a anterior, uma vez que $n - 1 = 4m$, pela proposição 2.11, temos que $\omega^2 = 1$ e obtemos $\rho(\omega)^2 = \rho(\omega^2) = id$. ■

Enfim, intencionamos nesses dois capítulos, proporcionar um contato com conceitos das álgebras de Clifford necessários a uma compreensão da definição de variedade spin. Completando tal intenção o próximo capítulo traz que os grupos $Pin_{p,q}$ e $Spin_{p,q}$ são grupos de Lie e recobrimento duplo de $O_{p,q}$ e $SO_{p,q}$, respectivamente.

Capítulo 3

Pin_n e $Spin_n$: grupos de Lie e recobrimentos duplos

Como já declaramos, um questionamento do leitor diante da definição de variedade spin seria se os grupos $spin_n$ são realmente grupos de Lie, considerando que o público alvo de nosso trabalho tenha conhecimento da teoria das variedades, ou tenha consultado o apêndice B. E outro seria o conceito de recobrimento duplo.

Assim, veremos que tais grupos são grupos de Lie e, em seguida, que são recobrimentos duplos. Concluindo o capítulo com uma observação acerca de levantamento de representações, visto que é o levantamento da estrutura de grupo SO_n do fibrado tangente de uma variedade riemanniana orientada para o recobrimento $Spin_n$, como já citamos, que gera novas construções sobre tais variedades, sem existir diferenças topológicas essenciais na estrutura spin destes ([14], pag. 5).

3.1 Os grupos de Lie nas álgebras de Clifford Reais

Iniciemos lembrando que um *grupo de Lie*, G , é um grupo com uma estrutura de variedade diferenciável, tal que as operações

$$\mu(g, h) = gh \quad \text{e} \quad \lambda(g) = g^{-1},$$

para $g, h \in G$, são diferenciáveis.

Exemplo 3.1. O grupo $GL(\mathbb{R}^n)$ é um grupo de Lie, pois este é uma variedade diferenciável (ver apêndice), a operação μ , dita multiplicação, e λ , dita inversa, são diferenciáveis, uma vez que μ é uma aplicação polinomial nas coordenadas e $g^{-1} = adj(g)/\det g$, onde $adj(g)$ é a transposta da matriz dos cofatores da matriz associada a transformação linear g , com as coordenadas de λ frações polinomiais nas coordenadas de g e $\det g \neq 0$.

Com isso, para vermos que os grupos Pin_n e $Spin_n$ são grupo de Lie, precisamos também do conceito de *subgrupo de Lie*, como segue:

Definição 3.2. Dizemos que H é um *subgrupo de Lie* de um grupo de Lie G , se existe um grupo de Lie H' e uma imersão injetiva, $\varphi : H' \rightarrow G$, tal que $H = Im \varphi$ e $\varphi : H' \rightarrow H$ é um difeomorfismo.

Além do corolário do seguinte resultado, cujas demonstrações omitimos por se tratar de teoria de grupos de Lie.

Teorema 3.3. *Seja G um grupo de Lie e $H \subseteq G$ um subgrupo. Então H é um subgrupo de Lie regular se, e somente se, H é fechado, onde regular significa que a topologia de H é a topologia relativa.*

Corolário 3.4. *Todo subgrupo fechado de um grupo de Lie, é um grupo de Lie com relação a topologia relativa.*

Assim veremos que $Spin_n$ é um subgrupo fechado em Pin_n , que por sua vez é um subgrupo fechado em Γ_n , que também é um subgrupo fechado em Cl_n^* , e por fim este é um grupo de Lie, porque é um aberto em Cl_n .

Iniciemos observando que $Cl_{p,q}$ tem estrutura topológica e diferenciável. Com efeito, da proposição 1.13, sabemos que $Cl_{p,q}$ tem dimensão 2^{p+q} . Daí, se $\{e_1, \dots, e_{2^{p+q}}\}$ é uma base de $Cl_{p,q}$ como espaço vetorial, temos o isomorfismo $J : \mathbb{R}^{2^{p+q}} \rightarrow Cl_{p,q}$ dado por

$$J(\lambda_1, \dots, \lambda_{2^{p+q}}) = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{2^{p+q}} e_{2^{p+q}}.$$

Assim $Cl_{p,q}$ é um espaço topológico como espaço vetorial isomorfo ao $\mathbb{R}^{2^{p+q}}$, uma vez que sendo $\mathbb{R}^{2^{p+q}}$ um espaço métrico completo, podemos definir uma norma em $Cl_{p,q}$ fixando

$$\|J(x)\| := \|x\|,$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana, que mesmo dependendo da escolha da base, temos a mesma topologia, já que quaisquer duas normas são equivalentes. Além disso $Cl_{p,q}$ herda a estrutura diferenciável de $\mathbb{R}^{2^{p+q}}$.

Daí, definindo $\lambda_x(y) = xy$, para $x, y \in Cl_{p,q}$, segue que a função $f : Cl_{p,q} \rightarrow Cl_{p,q}$, dada por

$$x \mapsto \det(\lambda_x)$$

é contínua, sendo polinomial em $Cl_{p,q}$.

Consequentemente, como para cada $x \in Cl_{p,q}^*$ obtém-se λ_x invertível, e dessa forma $f(x) \neq 0$, concluímos que $Cl_{p,q}^*$ é aberto em $Cl_{p,q}$. Logo, tem a estrutura topológica e diferenciável de $Cl_{p,q}$ (ver [20], pag. 54), obtida com o isomorfismo J . E portanto, o grupo das unidade de Clifford $Cl_{p,q}^*$ é um grupo de Lie.

Em particular, Cl_n^* é um grupo de Lie e vemos que Γ_n é fechado em Cl_n^* .

Proposição 3.5. *O grupo Clifford Γ_n é fechado em Cl_n^* .*

Demonstração: Iniciemos observemos que o homomorfismo $\varphi : Cl_n^* \rightarrow GL(Cl_n)$ definido por $x \mapsto \varphi_x(y) := \alpha(x)yx^{-1}$ é contínuo, visto que φ_x é um isomorfismo linear, para cada $x \in Cl_n^*$, pois $\varphi_x^{-1} = \varphi_{x^{-1}}$, e é polinomial em Cl_n . Então a ação associada $\mu_\varphi : Cl_n^* \times Cl_n \rightarrow Cl_n$, $\mu_\varphi(x, y) = \varphi_x(y)$, também é contínua. E já que $\mathbb{R}^n \subset Cl_n$ e \mathbb{R}^n é um \mathbb{R} -subespaço vetorial, é fechado e o *estabilizador* de \mathbb{R}^n por Cl_n^* , $\mathbb{R}_{Cl_n^*}^n := \{x \in Cl_n^*; \varphi_x(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n\}$, é fechado em Cl_n^* ([2], pag. 38). Portanto, pela definição 1.17, Γ_n é fechado em Cl_n^* , como queríamos mostrar. ■

Portanto, pelo corolário 3.4, o grupo Clifford Γ_n é um grupo de Lie. E dessa forma, a aplicação norma restrita a este, $N : \Gamma_n \rightarrow \mathbb{R}^n$, é um homomorfismo de grupos contínuo, conforme o corolário 1.22 e, em (2.1), temos $N(x) = \|x\|^2$.

Daí, da definição 2.1, segue que Pin_n é fechado em Γ_n , e conseqüentemente, é também um grupo de Lie. Com isso temos que o automorfismo canônico restrito a Pin_n , $\alpha : Pin_n \rightarrow Pin_n$, é contínuo. E como $Spin_n = \alpha(Pin_n \cap Cl_n^0)$, obtemos que este é fechado em Pin_n , com a topologia relativa. Logo, $Spin_n$ é um grupo de Lie.

Observação 3.6. Poderíamos trabalhar de uma outra forma, destacando uma linha de interseção entre Álgebra e Análise, e com isso ressaltar a abrangência do uso das álgebras de Clifford nas diversas áreas da Matemática.

O caminho seria ver que podemos definir um produto interno na álgebra de Clifford real, já que em dimensão finita esta é isomorfa a álgebra exterior de \mathbb{R}^{p+q} , e assim observar que, com norma induzida pelo produto interno, será uma *álgebra de Banach unitária real* (ver [18], pag. 13-14), isto é, $(Cl_{p,q}, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado onde toda sequência de Cauchy é convergente e tal que

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \text{ e } \|1_{Cl(V,\Phi)}\| = 1,$$

para todo $x, y \in Cl_{p,q}$.

Sabermos também que em uma *álgebra de Banach* o grupo das unidades é um aberto na álgebra e as operações, $(x, y) \mapsto xy$ e $x \mapsto x^{-1}$, são contínuas ([6], pag. 3 e pag. 8). Além de, por um cálculo, mostrar que tais operações são diferenciáveis, donde $Cl_{p,q}^*$ será um grupo de Lie.

Finalizando a seção com a intenção de ter instigado um sentimento de termos uma vasta gama de conhecimentos envoltos as álgebras de Clifford.

3.2 Os recobrimentos duplos nas álgebras de Clifford Reais

Considerando os conceitos apresentados nos apêndice A, mostraremos que $Pin_{p,q}$ e $Spin_{p,q}$ são recobrimentos duplos, e em particular, Pin_n e $Spin_n$ são. Assim, lembremos o que é uma ação de um grupo em um espaço topológico, pois o caminho que seguiremos mostra tais recobrimentos como resultante da ação do grupo \mathbb{Z}_2 .

Definição 3.7. Uma *ação* de um grupo G em um espaço topológico Y , à esquerda, é uma aplicação $G \times Y \rightarrow Y$, dada por $(g, y) \mapsto gy$, satisfazendo:

- i) Para todo $g, h \in G$ e $y \in Y$, $(gh)y = g(hy)$;
- ii) Para todo $y \in Y$ e $e \in G$ a unidade em G , $ey = y$;
- iii) Para todo $g \in G$, a aplicação $y \mapsto gy$ é um homeomorfismo de Y .

Com tal ação podemos definir uma relação de equivalência em Y , onde para $x, y \in Y$, $x \sim y$ se, e somente se, $y = gx$, para algum $g \in G$. Assim podemos obter o conjunto Y/G das classe de equivalência $Gx = \{gx; g \in G\}$ de qualquer $x \in Y$, que chamamos de *órbita* de x , e a aplicação projeção

$$\begin{aligned} p : Y &\rightarrow Y/G \\ y &\mapsto Gy. \end{aligned}$$

Dotando-o com a topologia quociente, isto é, um subconjunto U em Y/G é aberto, se $p^{-1}(U)$ for aberto em Y , temos o espaço quociente Y/G .

Além disso, dado um subconjunto V de Y e qualquer $g \in G$ definimos o conjunto $gV = \{gy; y \in V\}$ e dizemos que G *age uniformemente* em Y , se para todo $y \in Y$, existe um subconjunto aberto V , $y \in V$, tal que $gV \cap hV = \emptyset$, para quaisquer dois elementos distintos $g, h \in G$. Assim temos o seguinte resultado fundamental para o que desejamos mostrar:

Proposição 3.8. *Se G age uniformemente no espaço Y , então a aplicação projeção $p : Y \rightarrow Y/G$ é uma aplicação de recobrimento.*

Demonstração: Como p é sobrejetiva, por construção, e contínua, pela definição da topologia quociente, resta-nos mostrar que para cada ponto $x = p(y)$ em Y/G existe uma vizinhança distinguida.

Para isso observemos que p é uma aplicação aberta, uma vez que, se V é um aberto em Y temos que $p(V)$ é aberto em Y/G , pois $p^{-1}(p(V)) = \bigcup gV$ e gV é aberto. Este último,

pelo fato de $y \mapsto gy$ é um homeomorfismo, conforme a definição 3.7, e o anterior, se $y \in p^{-1}(p(V))$, então $p(y) = p(v)$, para algum $v \in V$, implicando que $Gy = Gv \Rightarrow hy = gv$, para algum $h, g \in G$, donde $y \in \bigcup gV$, e para inclusão inversa se $y \in \bigcup gV$, tem-se $y = gv$, para algum $g \in G$, o que implica $p(y) = p(gv) = Ggv = Gv = p(v) \Rightarrow y \in p^{-1}(p(V))$.

Assim, como G age uniformemente em Y , tomamos um aberto V , $y \in V$, e existe uma aberto $U = p(V)$, para todo $x \in Y/G$. E como $gV \cap hV = \emptyset$, para $g \neq h \in G$, tem-se $p^{-1}(U) = p^{-1}(p(V)) = \bigsqcup gV$.

E para concluirmos, temos que $p|_{gV} : gV \rightarrow p(V)$ é bijetiva, pelo fato de $y \sim gy$, implicando que $p(gy) = p(y)$, e $Ggy_1 = Ggy_2 \Rightarrow hgy_1 = gy_2$, para algum $h \in G$, donde $gV = ghV$, que sendo a ação uniforme, $h = e$. Portanto, como p é aberta, é um homeomorfismo. ■

Enfim, podemos apresentar $Pin_{p,q}$ e $Spin_{p,q}$ como recobrimentos não triviais, exceto quando $p = q = 1$, e duplos, pois $SO_{p,q}$ tem duas componentes conexas ([14], pag. 20), e $(\rho|_{Spin_{p,q}})^{-1}(id) = \mathbb{Z}_2$, já que

$$\ker(\rho|_{Spin_{p,q}}) = \ker \rho \cap Spin_{p,q} = \mathbb{R}^* \cdot 1 \cap Spin_{p,q} = \{-1, 1\},$$

e $O_{p,q} = SO_{p,q} \cup T \cdot SO_{p,q}$, com $T \in O_{p,q} \setminus SO_{p,q}$ ([10], pag.72).

Proposição 3.9. *Os grupos $Pin_{p,q}$ e $Spin_{p,q}$ são recobrimentos duplos de $O_{p,q}$ e $SO_{p,q}$, respectivamente, para $p, q \geq 0$. Além disso, são não triviais se $(p, q) \neq (1, 1)$.*

Demonstração: Observando que, como $\rho|_{Pin_{p,q}}$ é um homomorfismo sobrejetivo, conforme o teorema 1.28, e \mathbb{Z}_2 é seu núcleo, $O_{p,q} \approx Pin_{p,q}/\mathbb{Z}_2$, onde $Pin_{p,q}/\mathbb{Z}_2$ representa o grupo quociente dado pela relação: $x \sim y \Rightarrow y^{-1}x \in \mathbb{Z}_2$, $x, y \in Pin_{p,q}$.

Agora, se tomarmos a ação natural de \mathbb{Z}_2 em $Pin_{p,q}$, $\mathbb{Z}_2 \times Pin_{p,q} \rightarrow Pin_{p,q}$, dada por $(-1, x) \mapsto -x$ e $(1, x) \mapsto x$, temos a aplicação projeção $\pi : Pin_{p,q} \rightarrow Pin_{p,q}/\mathbb{Z}_2$, onde $Pin_{p,q}/\mathbb{Z}_2$ é o espaço topológico das orbitas dadas pela relação: $x \sim y \Rightarrow y = x$ ou $y = -x$, para $x, y \in Pin_{p,q}$.

Assim, como as relações determinam a mesma estrutura algébrica. ρ é uma aplicação projeção e obtemos que $O_{p,q}$ é homeomorfo a $Pin_{p,q}/\mathbb{Z}_2$, visto a definição de topologia quociente em $O_{p,q}$.

Então, mostrando que \mathbb{Z}_2 age uniformemente, segue da proposição anterior, que $Pin_{p,q}$ é um recobrimento de $O_{p,q}$. Se isso não acontecesse existiria $y \in Pin_{p,q}$ e um aberto V , $y \in V$, tal que $1V \cap (-1)V \neq \emptyset$, donde teríamos $y' = y$ e $y' = -y$, implicando $y = 0 \Rightarrow N(y) = 0 \Rightarrow y \notin Pin_{p,q}$, o que é absurdo. Logo temos que \mathbb{Z}_2 age uniformemente em $Pin_{p,q}$, como queríamos mostrar.

Para vermos que os recobrimentos são não triviais para $(p, q) \neq (1, 1)$, é suficiente mostrarmos que -1 e 1 são ligados por um caminho em $Pin_{p,q}$. Isso porquê, do contrário, se

$Pin_{p,q} = \bigsqcup V_\alpha$, com V_α homeomorfo a $O_{p,q}$, -1 e 1 não podem pertencer ao mesmo V_α , visto que $\rho(-1) = \rho(1) = id$, donde estariam em componentes conexas disjuntas.

Dessa forma, como $(p, q) \neq (1, 1)$, podemos encontrar dois vetores ortogonais tais que $\Phi_{p,q}(e_1) = \Phi_{p,q}(e_2) = \pm 1$, e definirmos $\gamma : [0, \pi] \rightarrow Pin_{p,q}$ dada por $\gamma(t) = \pm \cos(2t)1 + \text{sen}(2t)e_1e_2$, que é um caminho em $Pin_{p,q}$, como podemos mostrar por meio de um cálculo, sabendo que $\gamma(t)^{-1} = \gamma(t) = \pm \cos(2t)1 - \text{sen}(2t)e_1e_2$. Analogamente, obtemos que $Spin_{p,q}$ é um recobrimento de $SO_{p,q}$. ■

Corolário 3.10. *Os grupos Pin_n e $Spin_n$ são subgrupos compactos.*

Demonstração: Observemos que Cl_n é Hausdorff (ver apêndice), pois é um espaço topológico isomorfo ao \mathbb{R}^n como espaço vetorial, como foi visto após ao corolário 3.4. Assim Pin_n e $Spin_n$ também são Hausdorff. E sendo as aplicações $\rho_1 : Pin_n \rightarrow O_n$ e $\rho_2 : Spin_n \rightarrow SO_n$ recobrimentos duplos, são homeomorfismos locais tais que $\rho_1^{-1}(f)$ e $\rho_2^{-1}(g)$ têm dois elementos, para todo $f \in O_n$ e $g \in SO_n$. Conseqüentemente, são aplicações *próprias* ([15], pag. 121), isto é, a imagem inversa de compacto é compacta. Portanto, já que O_n e SO_n são compactos, segue o resultado. ■

Observação 3.11. A proposição anterior pode ser usado para estudar as relações entre as representações de $Spin_n$ e SO_n , conforme Garling ([10], pag. 180), usando o seguinte resultado: suponhamos que G seja um grupo de Lie compacto, cujas representações são conhecidas e $\beta : G \rightarrow H$ um homomorfismo sobrejetivo contínuo de G em um grupo de Lie compacto H , onde K é o núcleo. Se π for uma representação irredutível de H , então $\pi \circ \beta$ será uma representação irredutível de G .

Com isso temos uma correspondência injetiva entre tais representações levando K no operador identidade. E então, para determinarmos as representações de $Spin_n$ que não são levantamentos das representações de SO_n escolhemos aquelas que não aplicam $\{-1, 1\}$ na identidade. Ou seja, aquelas para as quais não temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Spin_n & & \\
 & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \rho & \searrow \pi \circ \rho & \\
 Y & \xrightarrow{f} & SO_n & \xrightarrow{\pi} & GL(W)
 \end{array}$$

Assim encerramos o presente trabalho destacando, que se intencionou, além de trabalhar os conceitos algébricos da definição de variedade spin, proporcionar um vislumbre da afirmação de Lawson ([14], pag. 5, segundo parágrafo) da relação entre as representações de $Spin_n$ e as de SO_n , destacando ainda mais a beleza dos “enlaces” nos quais as Álgebras de Clifford se inserem.

Apêndice A

Noções de Topologia Algébrica

Lembraremos alguns conceitos de Topologia Algébrica que são importantes para segunda seção do terceiro capítulo, pois possibilita compreender que os grupos $Pin_{p,q}$ e $Spin_{p,q}$ são recobrimentos duplos, além de auxiliar a definição de variedade spin.

Definição A.1. Sejam X e Y dois espaços topológicos. Uma *aplicação de recobrimento* é uma aplicação $p : Y \rightarrow X$ sobrejetiva contínua em que todo ponto $x \in X$ tem um aberto $U \subseteq X$, com $x \in U$, onde $p^{-1}(U)$ é a união disjunta de abertos em Y , $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha} V_{\alpha}$, e $p : V_{\alpha} \rightarrow U$ é um homeomorfismo, isto é, uma bijeção contínua com inversa contínua.

Dizemos que U , chamado uma *vizinhança distinguida*, é *uniformemente coberto* por p , Y é um *espaço de recobrimento* de X , e para cada $x \in X$, $p^{-1}(x)$ é uma *fibra* sobre x . Se X for uniformemente coberto por p , isto é, $Y = p^{-1}(X) = \bigsqcup_{\alpha} V_{\alpha}$ com V_{α} homeomorfo a X , o recobrimento p é chamado *trivial*.

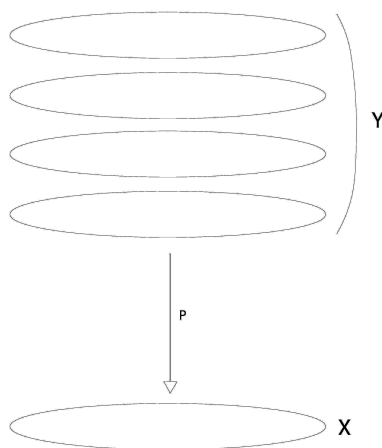


Figura A.1: Recobrimento trivial ([8], pag.153)

Exemplo A.2. $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por

$$p(y) = (\cos 2\pi y, \text{sen } 2\pi y),$$

é uma aplicação de recobrimento não trivial, pois é sobrejetiva, contínua com a topologia induzida pela métrica e para $x \in \mathbb{S}^1$ e $y \in \mathbb{R}$ com $p(y) = -x$ temos $U_x = \mathbb{S}^1 / \{-x\}$, aberto, onde,

$$\begin{aligned} p^{-1}(U_x) &= \{y' \in \mathbb{R}; p(y') \neq p(y)\} \\ &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} V_{n,x}, \end{aligned}$$

com $V_{n,x} := (y + n, y + n + 1)$, uma vez que $y' = y + n$, se, e somente se, $p(y') = p(y)$. Além disso, considerando $p_{U_x} : U_x \rightarrow (-1, 1)$, dada por $p_{U_x}(x_1, x_2) = x_1$, temos um homeomorfismo, cujo inverso é $p_{U_x}^{-1}(x_1) = (x_1, \sqrt{1 - x_1^2})$, o que permite obtermos outro, $p_{U_x} \circ p : V_{n,x} \rightarrow (-1, 1)$, definido por $y' \mapsto \cos 2\pi y'$. E já que

$$p|_{V_{n,x}} = p_{U_x}^{-1} \circ (p_{U_x} \circ p),$$

este também é. Portanto, \mathbb{R} é um espaço de recobrimento de \mathbb{S}^1 .

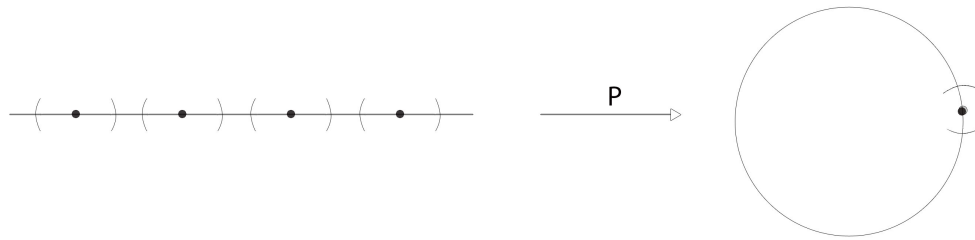


Figura A.2: Recobrimento de \mathbb{S}^1 ([8], pag.154)

Observemos que, no caso anterior, a cardinalidade de $p^{-1}((1, 0))$ não é finita. Assim podemos conhecer o que significa dizer um recobrimento ser duplo, por exemplo.

Definição A.3. Quando cada fibra, $p^{-1}(x)$, do espaço topológico X , tem a mesma cardinalidade finita n , chamada *número de folhas* do recobrimento, para todo $x \in X$, dizemos que p é um *n-recobrimento* ou um *recobrimento de n folhas*.

Quando o espaço X é conexo, por exemplo, suas aplicações de recobrimento são sempre *n-recobrimentos*, como mostras a proposição seguinte:

Proposição A.4. Se X , as vezes chamado base, de um recobrimento $p : Y \rightarrow X$ é conexo, então todas as fibras $p^{-1}(x)$, $x \in X$, possuem o mesmo número de folhas.

Demonstração: Observemos inicialmente, que para todo x de uma vizinhança distinguida U o número cardinal da fibra $p^{-1}(x)$ é o mesmo, pois como $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha} V_{\alpha}$ e $p|_{V_{\alpha}}$ é um homeomorfismo, cada V_{α} tem um único ponto de $p^{-1}(x)$, do contrário, esta não

seria injetiva. Assim o número de folhas para cada x em uma vizinhança distinguida é o número de componentes V_α desta.

Agora, dado qualquer ponto x_0 de X , podemos definir o conjunto

$$A = \{x \in X; \text{ a cardinalidade de } p^{-1}(x) \text{ é a mesma de } p^{-1}(x_0)\}.$$

Sendo este aberto, pois se $x \in A$, pelo que foi observado, $U \subset A$, temos uma decomposição de X como uma união disjunta de abertos, nos quais o número de folhas de $p^{-1}(x)$ é constante. Logo, como X é conexo, tem-se um aberto único, e portanto, todas fibras $p^{-1}(x)$ tem o mesmo número de folhas como queríamos provar. ■

Com isso, a próxima definição finaliza o presente apêndice, dando o suporte já mencionado a forma equivalente de se ver o conceito de estrutura spin, como se pode ver após a definição B.15.

Definição A.5. Sejam $p : Y \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento e $f : Z \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Um *levantamento* de f é uma aplicação $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$ contínua tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Apêndice B

Noção de Variedade Spin

Mesmo considerando que o público alvo do presente trabalho tenha conhecimentos a certa da teoria das variedades, apresentaremos aqui alguns conceitos de tal assunto. Isso por ser uma produção de cunho algébrico, o que fomenta seu manuseio por outros. E assim possibilitar uma visão explícita da linha na qual se abordou os conceitos acerca das álgebras de Clifford.

Iniciemos então relembrando que um *espaço topológico* é um conjunto X juntamente com uma família Γ de subconjuntos de X tais que:

- i) Se $X_1, X_2 \in \Gamma$, então $X_1 \cap X_2 \in \Gamma$;
- ii) Se $(X_\alpha)_{\alpha \in A} \subset \Gamma$ para todo conjunto de índice A , então $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \in \Gamma$;
- iii) $\emptyset, X \in \Gamma$.

Os subconjunto de Γ são ditos *abertos* e uma subfamília \mathcal{B} de Γ é uma *base* da topologia Γ se, para todo aberto $U \in \Gamma$ e todo ponto $p \in U$, existir um aberto $B \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B \subset U$, sendo esta enumerável, dizemos que o espaço topológico é *2-enumerável*.

Também dizemos que um espaço topológico é *Hausdorff* se, para quaisquer dois pontos distintos, $p_1, p_2 \in X$, existem abertos, $X_1, X_2 \in \Gamma$ tais que $p_1 \in X_1$, $p_2 \in X_2$ e $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Além de chamarmos as aplicações entre espaços topológicos cujas imagens inversas de abertos é um aberto de aplicações *contínuas*, dizemos que as bijetivas com inversas contínuas são *homeomorfismos*.

Agora para as seguintes definições é também importante recordamos que um espaço topológico X é *localmente euclidiano* se para todo $x \in X$ existe um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$, que chamamos de *carta*, onde $U \subset X$ é alguma vizinhança aberta de x , isto é, $x \in U$, e $V \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n .

Definição B.1. Uma *variedade topológica* de dimensão n é um espaço topológico Hausdorff, 2-enumerável e localmente euclidiano.

Definição B.2. Uma *variedade diferenciável* de dimensão n é uma variedade topológica M junto com uma coleção de cartas, $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$, chamado *atlas*, tal que:

- i) $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$;
- ii) A *aplicação de transição*, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, é diferenciável em \mathbb{R}^n para todo α, β onde $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

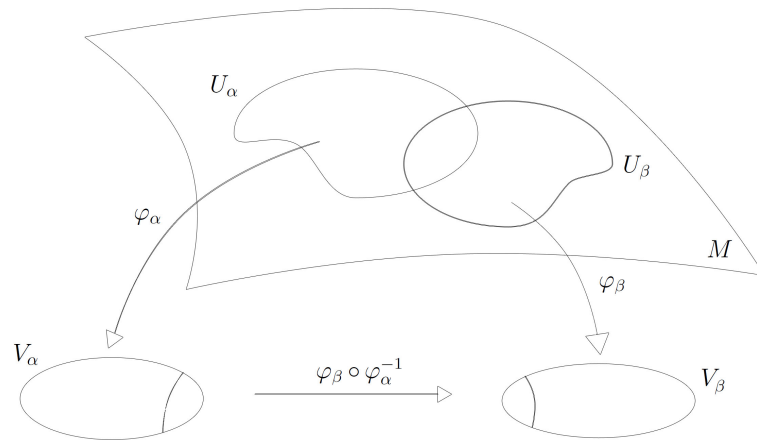


Figura B.1: Variedade diferenciável

Observemos que qualquer atlas é convencionalmente estendido para um único atlas maximal contendo o original ([7], pag. 03), e quando este é diferenciável, é chamado uma *estrutura diferenciável*, com as componentes de $\varphi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^n$, $p \in U_\alpha$, ditas *coordenadas locais* de p .

Exemplo B.3. O *grupo linear geral*, $GL(\mathbb{R}^n) = \{g \in \mathbb{R}(n); g \text{ é invertível}\}$, que é um aberto das matrizes $n \times n$ com entradas reais, $\mathbb{R}(n)$ ([19], pag. 2).

Definição B.4. Um atlas é *orientado*, quando todas as aplicações de transição têm determinante positivo. Uma variedade diferenciável é *orientável* se possui um atlas orientado.

Definição B.5. Sejam M e M' variedades diferenciáveis com cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e $(U'_\alpha, \varphi'_\alpha)$, respectivamente. Dizemos que uma aplicação $f : M \rightarrow M'$ é *diferenciável*, se todas as aplicações $\varphi'_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ são diferenciáveis. Sendo f bijetiva com inversa diferenciável, essa será um *difeomorfismo*.

Para podermos falar em variedades diferenciáveis riemanniana precisamos do conceito de espaço tangente. Como é costume escrever as coordenadas locais do \mathbb{R}^n , em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, como $x = (x^1, \dots, x^n)$, também as consideramos como as coordenadas locais em uma variedade M , isto é, $(U_\alpha, \varphi_\alpha) := (U, x)$, onde $x : U \rightarrow \Omega$ é uma carta.

Assim para definirmos o espaço tangente em uma variedade precisamos definir-lo antes em um aberto do \mathbb{R}^n .

Definição B.6. Seja $x = (x^1, \dots, x^n)$ as coordenadas locais do \mathbb{R}^n , $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $x_0 \in \Omega$. O *espaço tangente* de Ω no ponto x_0 é o espaço

$$T_{x_0}\Omega := \{x_0\} \times E,$$

onde E é o espaço vetorial n -dimensional gerado pela base $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$, com $\frac{\partial}{\partial x^i}$ as derivadas parciais no ponto x_0 .

Se $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ é uma aplicação diferenciável, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$ são abertos, definimos a *diferencial* $df(x_0)$ para $x_0 \in \Omega$ como a aplicação linear induzida

$$\begin{aligned} df(x_0) : T_{x_0}\Omega &\rightarrow T_{f(x_0)}\Omega' \\ \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} &\mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m v^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(x_0) \frac{\partial}{\partial f^j}, \end{aligned}$$

onde, $\frac{\partial}{\partial f^j}$ são as derivadas parciais no ponto $f(x_0)$.

Definição B.7. Sejam M uma variedade diferenciável e $p \in M$. Consideremos o conjunto $\mathcal{A} := \{(x, v); x : U \rightarrow \Omega \text{ é uma carta com } p \in U, v \in T_{x(p)}\Omega\}$ e a relação de equivalência: $(x, v) \sim (y, w) \Leftrightarrow w = d(y \circ x^{-1})v$. O *espaço tangente* para M no ponto p é o espaço das classes de equivalência de \mathcal{A} , ou seja, em notação $T_pM := \mathcal{A}/\sim$.

Podemos ver que T_pM tem estrutura de espaço vetorial e se $F : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis, a *diferencial* $dF : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$, em coordenadas locais, $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $y : V \subset N \rightarrow \mathbb{R}^n$, é dada por $d(y \circ F \circ x^{-1})$. E assim temos as seguintes definições:

Definição B.8. Uma aplicação diferenciável $F : M \rightarrow N$ é chamada uma *imersão*, se para qualquer $p \in M$ a diferencial dF é injetiva.

Definição B.9. Uma *métrica riemanniana* na variedade diferenciável M é dada por um produto interno em cada espaço tangente T_pM que depende diferenciavelmente no ponto base p . Uma *variedade riemanniana* é uma variedade diferenciável equipada com uma métrica riemanniana.

Um resultado importante, cuja demonstração pode ser vista em Do Carmo ([7], pag. 47) e Jost ([13], pag.14), mostra que toda variedade diferenciável pode ser equipada com uma métrica riemanniana.

Definição B.10. O *fibrado tangente* da variedade M é uma tripla (TM, π, M) , onde: TM , chamado *espaço total* do fibrado tangente, é a união disjunta dos espaços tangentes, T_pM , $p \in M$; $\pi : TM \rightarrow M$ com $\pi(w) = p$ para $w \in T_pM$ é a projeção no ponto

base; E se $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ são cartas para M , $dx : TU \rightarrow Tx(U)$ é definida por $w \mapsto dx(\pi(w))(w) \in T_{x(\pi(w))}x(U)$, onde $TU := \bigsqcup_{p \in U} T_p M$ e $Tx(U)$ tem estrutura diferenciável de $x(U) \times \mathbb{R}^m$, então as aplicações transição $dy \circ dx^{-1} = d(y \circ x^{-1})$ são diferenciáveis.

Observando que o fibrado tangente é um exemplo de *fibrado vetorial*, passemos a definição deste, que pode ser considerado como uma família de espaços vetoriais parametrizados por uma variedade.

Definição B.11. Um *fibrado vetorial diferenciável* de posto n é uma tripla (E, π, M) onde E , dita *espaço total*, e M , dita *base*, são variedades diferenciáveis, a projeção $\pi : E \rightarrow M$ é diferenciável, cada *fibra* $E_x := \pi^{-1}(x)$, $x \in M$ tem estrutura de espaço vetorial n -dimensional e para cada $x \in M$, existe uma vizinhança $U \in M$, e um difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$, chamado *trivialização local*, tal que para todo $y \in U$, $\varphi_y := \varphi|_{E_y} : E_y \rightarrow \{y\} \times \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. O par (U, φ) é chamado *carta fibrado*.

Quando $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ é uma cobertura aberta de M , cujos fibrados são *triviais*, isto é, isomorfos a $M \times \mathbb{R}^m$, com trivializações correspondentes $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m$, e $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, obtemos a *aplicação transição*

$$\varphi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(\mathbb{R}^m)$$

dada por $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, v) = (x, \varphi_{\beta\alpha}(x)v)$, para $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $v \in \mathbb{R}^m$. E notemos que um fibrado vetorial pode ser construído de suas aplicações transição.

Definição B.12. Um fibrado vetorial (E, π, M) é *orientado*, se existir uma orientação continuamente definida nas fibras E_x , $x \in M$.

Definição B.13. Uma *estrutura riemanniana* em um fibrado vetorial (E, π, M) é uma família de produto interno positivo definido continuamente definido nas fibras E_x , $x \in M$. Um *fibrado vetorial riemanniano* é um fibrado vetorial equipado com uma estrutura riemanniana.

Observemos que todo fibrado pode ser equipado como uma estrutura riemanniana. E para podermos passarmos a noção de variedade spin, resta-nos o seguinte conceito:

Definição B.14. Um *G-fibrado principal* é uma tripla $(P_G(M), \pi, M)$ juntamente com um grupo de Lie G , onde o espaço total do fibrado $P_G(M)$ e a base M são variedades diferenciáveis, a projeção $\pi : P_G(M) \rightarrow M$ é diferenciável, com a ação de G em $P_G(M)$, $(p, g) \mapsto pg$, $(p, g) \in G \times P_G(M)$ e $pg \in P_G(M)$, satisfazendo:

- (i) G age *livremente* em $P_G(M)$, isto é, $pg \neq p$ para $g \neq e$.

- (ii) M é o quociente de $P_G(M)$ pela relação de equivalência definida pela ação de G , onde $p \sim q \Leftrightarrow \exists g \in G; p = qg$, π aplica $p \in P_G(M)$ na sua classe de equivalência, e a fibra $\pi^{-1}(x)$ pode ser identificado com G .
- (iii) Para cada $x \in M$, existe uma vizinhança U e um difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$, dito *trivialização local*, dado por $\varphi(p) = (\pi(p), \psi(p))$, que é G -invariante, ou seja, $\varphi(pg) = (\pi(p), \psi(p)g)$, para todo $g \in G$.

E, da mesma forma que em um fibrado vetorial qualquer, como destacamos após a definição B.11, temos a *aplicação transição* de $P_G(M)$

$$\varphi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$$

dada por $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, g) = (x, \varphi_{\beta\alpha}(x)g)$, para $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $g \in G$. As quais, quando todas tomam valores em um subgrupo H de G , este é dito *grupo estrutura* do fibrado $P_G(M)$.

Enfim, seja E um fibrado vetorial riemanniano n -dimensional orientado sobre uma variedade M , $P_{SO}(E)$ seu SO_n -fibrado principal, uma vez que E ser orientado é equivalente a escolhermos um tal fibrado ([14], pag. 80), e, para $n \geq 3$, $\xi_0 : Spin_n \rightarrow SO_n$ o homomorfismo de recobrimento de SO_n , cujo núcleo é $\{-1, 1\} \cong \mathbb{Z}_2$.

Definição B.15. Uma *estrutura spin* em E é um $Spin_n$ -fibrado principal $P_{Spin}(E)$ juntamente como um recobrimento duplo

$$\xi : P_{Spin}(E) \rightarrow P_{SO}(E)$$

tal que $\xi(pg) = \xi(p)\xi_0(g)$, para todo $p \in P_{Spin}(E)$ e $g \in Spin_n$.

Considerando as ações de $Spin_n$ e SO_n , vemos que isso é o mesmo que seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} P_{Spin}(E) \times Spin_n & \longrightarrow & P_{Spin}(E) \\ \downarrow \xi \times \xi_0 & & \downarrow \xi \\ P_{SO}(E) \times SO_n & \longrightarrow & P_{SO}(E) \end{array}$$

comutar.

E a existência de uma tal estrutura, já que pode ser construída de suas aplicações transição, equivale a podemos levantar cada função de transição $\varphi_{\beta\alpha}$ de $P_{SO}(E)$, ou seja,

$$\begin{array}{ccc} & & Spin_n \\ & \nearrow \tilde{\varphi}_{\beta\alpha} & \downarrow \xi_0 \\ M \supset U_\alpha \cap U_\beta & \xrightarrow{\varphi_{\beta\alpha}} & SO_n \end{array}$$

comuta e

$$\tilde{\varphi}_{\gamma\beta} \circ \tilde{\varphi}_{\beta\alpha} = \tilde{\varphi}_{\gamma\alpha}.$$

Quando $n = 2$, é análogo, $Spin_2$ é substituído por SO_2 e $\xi_0 : SO_2 \rightarrow SO_2$ é seu recobrimento duplo. E se $n = 1$, $P_{SO}(E) \cong M$ e a estrutura spin é definida pelo recobrimento duplo de M ([14], pag. 80).

Com isso podemos apresentar a definição de variedade spin, fato inicial da discussão da noção de uma estrutura spin nas variedades diferenciáveis.

Definição B.16. Seja M uma variedade riemanniana orientada. Dizemos que M é uma *variedade spin*, quando tem uma estrutura spin em seu fibrado tangente TM .

Assim, finalizamos o presente apêndice com o intuito de ter dado condições para compreensão da definição de variedade spin, servindo não só para lembrar tais conceitos, aos que são familiarizados com os mesmos, como também para conhece-los, aos quais estes não são cotidianos.

Referências Bibliográficas

- [1] Atiyah M. F., Bott R. e Shapiro, A. *Clifford modules*. *Topology*, 3, Suppl. 1:3-38, 1964.
- [2] Baker, A. *Matrix Groups: an introduction to Lie Group Theory*. Springer-Verlag: London, 2002. 330p.
- [3] Bourbaki, N. *Algèbre, Chapitre 9*. *Eléments de mathématiques*. Springer-Verlag: New York, 2007. 211p.
- [4] Bourbaki, N. *Éléments d'histoire Des Mathématiques*. Springer-Verlag: Berlin, 2007. 376p.
- [5] Brocker, T. e Dieck, T. T. *Representations of Compact Lie Groups*. Springer-Verlag: New York, 1985. 313p.
- [6] Dales, H. G. et al. *Introduction to Banach algebras, operators, and Harmonic Analysis*. Cambridge University Press: New York, 2003. 324p.
- [7] Do Carmo, Manfredo P. *Geometria Riemanniana*. 5ª Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. 336p.
- [8] Fulton, W. *Algebraic Topology: A First Course*. Springer-Verlag: New York, 1995. 430p.
- [9] Gallier, J. *Clifford Algebras, Clifford Groups, and a Generalization of the Quaternions: the Pin and Spin Groups*. [2002]. Disponível em <<http://carlossicoli.free.fr/G/>>. Acessado em 26 de junho de 2013, às 16h38min.
- [10] Garling, D. J. H. *Clifford Algebras: An Introduction*. Cambridge University Press: New York, 2011. 200p.
- [11] Greub, W. *Multilinear Algebra*. 2ª Ed. Springer-Verlag: New York, 1978. 294p.
- [12] Grillet, P. A. *Abstract Algebra*. 2ª Ed. Springer-Science: New York, 2007. 669p.

- [13] Jost, J. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. 5ª Ed. Springer-Verlag: Berlin, 2008. 583p.
- [14] Lawson, H. B. e Michelsonh, M. L. *Spin Geometry*. Princeton University Press: New Jersey, 1989. 427p.
- [15] Lima, E. L. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. 4ª Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 210p.
- [16] Lounesto, P. *Clifford Algebras and Spinors*. 2ª Ed. University Press: Cambridge, 2001. 338p.
- [17] Porteous, I. R. *Clifford Algebras and the Classical Groups*. Cambridge University Press: New York, 1995. 295p.
- [18] Rot, T. *A Note on Clifford Algebras in Gravitational Physics*. [2009]. Disponível em <<https://testweb.science.uu.nl/ITF/Teaching/Thesis2009.htm>>. Acessado em 31 de maio de 2013, às 15h00min.
- [19] Sepanski, M. R. *Compact Lie Groups*. Springer-Science: New York, 2007. 198p.
- [20] Varadarajan, V. S. *Lie groups, Lie algebras, and their representations*. Springer-Verlag: New York, 1984. 430p.