

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Fases Geométrica e suas relações com a Teoria de Fibrados e Representação de Grupos

Oswaldo Fernandes Carvalho Neto

2008

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Fases Geométrica e suas relações com a Teoria de Fibrados e Representação de Grupos

por

Oswaldo Fernandes Carvalho Neto

sob orientação do

Prof. Dr. José Gomes de Assis

Dezembro de 2008

João Pessoa-PB

C331f Carvalho Neto, Osvaldo Fernandes.
Fases Geométrica e suas relações com a Teoria de Fibrados e Representações de Grupos / Osvaldo Fernandes Carvalho Neto.-- João Pessoa, 2008.
88f.
Orientador: José Gomes de Assis
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Fase de Berry. 3. Fibrado linha. 4. Toro maximal. 5. Holonomia. 6. Teorema de Borel-Weil-Bott.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Fases Geométricas e suas relações com a Teoria de Fibrados e Representação de Grupos

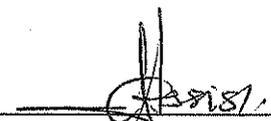
por

Oswaldo Fernandes Carvalho Neto

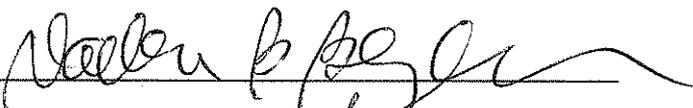
Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Física Matemática

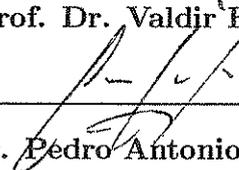
Aprovada por:



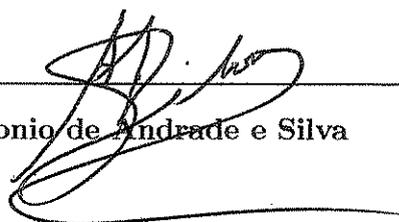
Prof. Dr. José Gomes de Assis - UFPB (Orientador)



Prof. Dr. Valdir B. Bezerra



Prof. Dr. Pedro Antonio Gómez Venegas



Prof. Dr. Antonio de Andrade e Silva

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Aos meus pais, que apesar de todas as dificuldades, com muito carinho e amor deram à mim e aos meus irmãos a maior de todas as heranças: o estudo.

Agradecimentos.

À DEUS, não apenas por ter me dado a oportunidade da vida, mas pela família maravilhosa que me deu e por sempre confiar em mim, proporcionando uma vida muito melhor do que a que tenho merecido.

Ao meu orientador, Prof. Dr. JOSÉ GOMES DE ASSIS, por sua dedicação na realização deste trabalho, pela experiência adquirida com seus ensinamentos, pela compreensão e pela confiança depositada em mim.

A todos os professores e funcionários da Pós-Graduação do DM-UFPB que, de certa forma, foram importantes para a conclusão deste trabalho.

À minha família, meu pai JOSÉ, minha mãe CÉLIA, meus irmãos: LEONARDO e SUELLEN, minha avó RUTH e minha cachorrinha "TUZY"; que são tudo em minha vida, e que apesar de onde estejam, sempre os levarei em meus pensamentos e orações, pois sei que com eles sempre poderei contar.

A todos os meus familiares, pelo apoio e incentivo.

Aos colegas da Pós-Graduação, pela ótima convivência que tivemos, especialmente, à minha amiga KELLY, ao meu colega JONATHA e à FABÍOLA, que durante esse tempo formaram a minha família pessoense.

Ao professor JOÃO MONTENEGRO da UECE, que foi o grande responsável pela minha vinda a este programa de pós-graduação.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Apresentamos o formalismo matemático próprio para, primeiramente, estudarmos as interpretações holonômicas da fase geométrica adiabática apresentadas por Berry-Simon e Aharanov-Anadan e, em seguida, as similaridades encontradas com a Teoria de Representações de Grupos, em particular, com o teorema de Borel-Weil-Bott. Estas relações são feitas via classificação de fibrados linha complexos, e esses resultados são usados para introduzir um procedimento que trata a não-adiabaticidade e a adiabaticidade da fase de Berry por meio de uma modificação na hamiltoniana. Mostramos, também, que em geral, o espaço de parâmetros é uma variedade de bandeira ou uma subvariedade dela e apresentamos um argumento topológico desse espaço, que indica a relação entre a estrutura Riemanniana e a conexão de Berry.

Palavras-Chave:

Fase de Berry, Fase adiabática, Fase não adiabática, Fibrado linha, Holonomia, Toro maximal, Teorema de Borel-Weil-Bott, Variedades.

Abstract

We present the own mathematic formalism to, first of all, study the holonomy interpretations of the adiabatic geometric phase presented by Berry-Simon and Aharanov-Anadan and, after this, the similirities found with the teoria de representações de grupos, particularly, with the Borel-Weil-Bott theorem. These relations are made through classification of complex bundle line, and these results are used to introduce a procedure to treat the nonadiabatic and adiabatic phase of Berry's phase through a cranked Hamiltonian. In general, we also show that the parameter space is a flag manifold or a submanifold of her and present a topologic argument of this space that indicates the relation between the structure Riemannian and the Berry's connection.

Key-Words:

Berry's phase, Adiabatic phase, Nonadiabatic phase, Line Bundle, Homolonomy, Maximal Tori, The Borel-Weil-Bott Theorem, Manifolds.

Sumário

1	Pré-requisitos matemáticos	1
1.1	Definições básicas	1
1.1.1	Espaços de Hilbert	1
1.1.2	Reticulados	2
1.2	Geometria diferencial básica	4
1.2.1	Variedades	4
1.3	Grupos de Lie e Álgebras de Lie	6
1.3.1	Grupos de Lie	6
1.3.2	Álgebras de Lie	10
1.3.3	Relação entre grupo de Lie e álgebra de Lie	14
1.3.4	Complexificação de grupos lineares	15
1.4	Fibrados	17
1.4.1	Pullback	19
1.4.2	Fibrado Principal	20
1.4.3	Conexão em Fibrados	22
1.4.4	Fibrado linha	26
1.5	Levantamento Horizontal e Transporte Paralelo	27
1.6	Holonomia	30
1.7	Classes de Chern	32
1.8	Integral de Volterra	33

2	Apresentação holonômica da fase geométrica via fibrados	35
2.1	Fase de Berry	35
2.2	A abordagem de Berry-Simon (BS)	37
2.3	A abordagem de Aharanov-Anadan (AA)	40
2.4	Comentários	42
3	O teorema de Borel-Weil-Bott e o fibrado linha de Berry-Simon	48
3.1	Definições e propriedades	49
3.1.1	Pesos, raízes e o grupo de Weyl	49
3.1.2	Homologia e Cohomologia	51
3.1.3	Variedades de Bandeira	54
3.2	Resultados preliminares	54
3.3	O teorema de Borel-Weil-Bott (Aplicações e exemplos)	57
4	Conexão de Berry, geometria Riemaniana e fase não adiabática	67
4.1	Conexão de Berry e a geometria Riemaniana da variedade de parâmetro . . .	67
4.2	Redução da fase não-adiabática para a fase adiabática via Hamiltonianas modificadas	69
	Referências Bibliográficas	73

Notações e Simbologias

M designa o espaço de parâmetros.

\mathcal{H} designa o Espaço de Hilbert.

$|\cdot|$ designa a norma euclidiana.

$\|\cdot\|$ designa a norma no espaço de Hilbert.

\hookrightarrow designa a imersão.

\wedge designa o ínfimo.

\vee designa o supremo.

$\mathbb{R}P^n$ designa o espaço projetivo real.

$\mathbb{C}P^n$ designa o espaço projetivo complexo.

$U_{\mathbb{R}}$ denotará um grupo de Lie compacto conexo

Λ designa o reticulado peso.

Introdução

Nos últimos anos, desde o renascimento da fase geométrica feita por Berry, a fase geométrica é um assunto que tem chamado a atenção de muitos físicos. A principal razão para a pouca popularidade deste extraordinário assunto tem sido a sofisticação e, conseqüente, beleza da fundamentação matemática necessária para explicar o fenômeno. Isto foi o que nos motivou para este trabalho.

Recentemente, foi demonstrado que as duas interpretações holonômicas da fase de Berry eram ligadas através da teoria de fibrados universais. Esta curiosa coincidência da física das fases geométricas e a matemática dos fibrados permitem estabelecer uma estrutura conveniente para analisar a fase não adiabática.

No capítulo 1, apresentamos os conteúdos matemáticos básicos que são ricos e bem diversificados, envolvendo assuntos de geometria algébrica, álgebra, geometria diferencial, topologia, teoria de grupos, análise funcional. Apresentamos algumas definições e propriedades algébricas, particularmente grupos e álgebras de Lie. Finalizamos fazendo um aprofundamento no que diz respeito à fibrados

No capítulo 2, damos ênfase a fase de Berry (ou fase geométrica). Primeiramente fazemos uma introdução geral sobre a fase de Berry, para depois fixarmos em duas importantes interpretações de tal fenômeno. A primeira interpretação que damos atenção é a feita por Berry-Simon e no segundo momento estudamos um pouco do que foi feito por Aharanov-Anadan. É bom salientar que, em ambos os casos, tratamos da fase de Berry adiabática, porém ao final do capítulo, faremos alguns comentários à cerca da fase de Berry não adiabática (bem como a relação com a adiabaticidade).

No capítulo 3, utilizamos uma matemática ainda mais específica, aprofundando os conceitos que envolvem grupos e álgebras de Lie. Primeiramente expomos a matemática específica do capítulo, tais como: espaços pesos, raízes, grupos de Weyl, grupos de cohomologia, variedade de bandeira, etc. Apresentamos também alguns resultados importantes para podermos fazer a relação entre a fase adiabática e o teorema de Borel-Weil-Bott, o qual por comodidade trataremos apenas por BWB. Ao teorema BWB, dedicamos

uma seção na qual apresentamos alguns exemplos e aplicações desse extraordinário resultado, o qual une duas importantes áreas da matemática: topologia algébrica e teoria de grupos.

O capítulo 4, no primeiro momento, é dedicado a discussão entre a conexão de Berry e a geometria Riemanniana do espaço de parâmetro. Depois, apresentamos a relação do problema da fase não adiabática para a fase adiabática com hamiltonianas modificadas.

Capítulo 1

Pré-requisitos matemáticos

Neste trabalho utilizamos muitos conceitos, propriedades e resultados matemáticos. Iremos apresentar aqueles que achamos essenciais e indispensáveis para o bom entendimento do que será feito durante os demais capítulos. Aqui, daremos destaque aos conceitos fundamentais: Variedades, Representações, Grupos e Álgebras de Lie, Fibrados, etc. Outros conteúdos matemáticos também serão utilizados, mas estes serão apresentados nos capítulos onde eles serão utilizados. Por estas razões, este capítulo é fundamental para nosso trabalho, que é uma dissertação em matemática tendo uma motivação física.

1.1 Definições básicas

1.1.1 Espaços de Hilbert

Algo de fundamental importância na formulação da Mecânica Quântica é a definição abstrata de espaço de Hilbert, que foi introduzida por J. Von Neuman, em 1930. Estes espaços são o habitat natural dos fenômenos físicos quânticos, em particular, o que nos motivou para este trabalho, a fase geométrica de Berry.

Definição 1.1 Chamaremos de *espaço de Hilbert*, um espaço vetorial com produto interno $\langle ; \rangle$ que seja completo.

Observação 1.1 Um espaço métrico é completo se todas as sequências de Cauchy forem convergentes.

Dois exemplos bem simples de espaços de Hilbert são o espaço Euclidiano \mathbb{R}^n e o espaço Unitário \mathbb{C}^n .

Exemplo 1.1 \mathbb{R}^n será dotado com o seguinte produto interno $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$, enquanto a norma associada a esse produto interno é $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, e sua métrica será $d(x, y) = \|x - y\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$.

Para o caso de \mathbb{C}^n temos o seguinte produto interno $\langle z, w \rangle_{\mathbb{C}^n} = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 + \dots + z_n\bar{w}_n$, a norma e a métrica relativas a esse produto interno são análogas ao de \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.2 $L^2(\mathbb{R}^2) = \{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \text{ mensuráveis; } \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx < \infty\}$, com produto interno $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\overline{g(x)}dx$ e norma $\|f\|_{\mathbb{R}^2} = (\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx)^{1/2}$, que é conhecido como o espaço das funções de quadrado integrável em \mathbb{R}^2 .

1.1.2 Reticulados

Lembramos que um conjunto ordenado (às vezes chamado "parcialmente"ordenado) é um sistema (S, \leq) , onde S é um conjunto e \leq é uma relação binária em S satisfazendo o seguinte:

1. $a \leq a$
2. $a \leq b$ e $b \leq c \implies a \leq c$
3. $a \leq b$ e $b \leq a \implies a = b$

Também, observamos que um conjunto ordenado onde para quaisquer dois elementos a e b tivermos $a \leq b$ ou $b \leq a$, será chamado simplesmente ordenado.

Definição 1.2 Chamaremos de **semirreticulado** um conjunto ordenado no qual dois elementos a e b tem um ínfimo $a \wedge b$. Ou seja, um semirreticulado é um sistema (S, \leq, \wedge) ,

onde (S, \leq) é um conjunto ordenado e \wedge é uma operação binária satisfazendo $c \leq a \wedge b \iff c \leq a$ e $c \leq b$.

Observação 1.2 É claro que todo conjunto simplesmente ordenado é um semi-reticulado.

Definição 1.3 Chamaremos de **reticulado** um sistema (S, \leq, \wedge, \vee) no qual quaisquer dois elementos a e b tem um infímo $a \wedge b$ e um supremo $a \vee b$.

Observação 1.3 Note que todo conjunto simplesmente ordenado é um reticulado no qual $a \wedge b = a$ (ou b) e $a \vee b = b$ (ou a).

Exemplo 1.3 Um reticulado com 0 e 1 é um reticulado com elementos assim designados, tais que sempre

$$0 \leq a \text{ e } a \leq 1$$

Um elemento a' é chamado um complemento de a se

$$a \wedge a' = 0 \quad \text{e} \quad a \vee a' = 1$$

Se todo elemento do reticulado tiver um complemento, teremos um reticulado complementar.

Um reticulado é chamado distributivo se

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Observamos que, caso existam, os complementos de um reticulado distributivo são únicos. Assim supomos que a' e a'' são ambos complementos de a , logo

$$a'' = a'' \wedge 1 = a'' \wedge (a \vee a') = (a'' \wedge a) \vee (a'' \wedge a') = 0 \vee (a'' \wedge a') = a'' \wedge a' = \dots = a'$$

Em um reticulado distributivo também vale a propriedade distributiva dual:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

1.2 Geometria diferencial básica

1.2.1 Variedades

Chamaremos de *variedade diferenciável* um espaço topológico que localmente pode ser visto como \mathbb{R}^n .

Definição 1.4 Uma *variedade diferenciável* M de classe C^∞ , n -dimensional, é um conjunto de pontos juntamente com uma família de pares $\{U_i, \varphi_i\}$, onde i é o índice que assume determinados valores, podendo inclusive assumir valores num conjunto infinito de termos. Essas famílias que também são conhecidas como cartas tem que satisfazer as seguintes condições:

- (i) $\{U_i\}$ são conjuntos abertos que cobrem M , ou seja, $\bigcup_i U_i = M$, e φ_i é um homeomorfismo de U_i em um aberto U'_i de \mathbb{R}^n .
- (ii) Dados U_i e U_j , tais que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, a aplicação $\psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ é de classe C^∞ .

O par (U_i, φ_i) para um i fixo, é chamado carta; enquanto a família $\{(U_i, \varphi_i)\}$ é chamada de atlas. O subconjunto U_i é chamado vizinhança coordenada, φ_i é a função coordenada.

Exemplo 1.4 O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$;

Exemplo 1.5 A esfera unitária $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$;

Exemplo 1.6 O Espaço projetivo real

$\mathbb{R}P^n := \{\text{conjunto das retas não nulas de } \mathbb{R}^{n+1} \text{ que passam pela origem } 0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$,

o qual podemos associar com o espaço euclidiano de dimensão $n + 1$

$$\mathbb{R}P^n := \mathbb{R}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}$$

Observação 1.4 *A partir deste momento denotaremos variedade diferenciável apenas por "variedade".*

Vamos agora falar um pouco sobre espaços tangentes, que são objeto onde se permite fazer cálculos algébricos com elementos associados a pontos de uma variedade. Antes, porém, vamos falar de uma curva diferenciável.

Dada uma variedade M , a aplicação diferenciável

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M,$$

é chamada uma *curva diferenciável* em M .

Definição 1.5 *Sejam M uma variedade (diferenciável) e $p \in M$. Chamamos de **vetor tangente à curva** γ , em $t = 0$, a função $\gamma'(0)$, tal que:*

$$\gamma'(0) f = \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0}$$

$f \in C^\infty(M)$.

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$, com $\gamma(0) = p$.

Definição 1.6 *O espaço linear formado por todos os vetores tangentes em p , será chamado de espaço tangente a M no ponto p , e denotaremos tal espaço por $T_p M$. Além disso, $\dim T_p M = \dim M$.*

Definição 1.7 *Um campo de vetores w em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $w(p) \in T_p M$.*

Dizemos que o campo de vetores w é diferenciável se a aplicação

$$\begin{aligned} w : M &\longrightarrow TM = \bigcup_{p \in M} T_p M \\ p &\longmapsto w(p) \end{aligned}$$

é diferenciável.

A derivada de um vetor ao longo de uma curva em uma variedade fornece a ferramenta para definir o transporte paralelo de vetores nesta variedade

O vetor obtido pela projeção de $(dw/dt)(0)$ sobre o plano $T_p S$ é chamado a derivada covariante em $p = \alpha(0)$ do campo de vetores w em relação ao vetor $y = \alpha'(0)$.

Um vetor é transportado paralelamente sobre uma curva $x(\lambda)$ se sua derivada covariante sobre a curva é zero:

$$\nabla_U V = 0$$

Onde U é o vetor tangente à curva:

$$U = \frac{d}{d\lambda} x(\lambda)$$

O transporte paralelo é feito de forma a manter o vetor paralelo ao vetor original, deslocando-o infinitesimalmente do ponto original ou, equivalentemente:

$$V(\lambda) - V(\lambda + \delta\lambda) = O(\lambda^2)$$

Eles são os mesmos vetores a menos de fatores de ordem λ^2 .

1.3 Grupos de Lie e Álgebras de Lie

1.3.1 Grupos de Lie

A noção de um grupo de Lie é obtida análogamente à definição de um grupo topológico. Podemos dizer que um grupo de Lie G é uma variedade com uma estrutura de grupos, formalmente segue a definição.

Definição 1.8 *Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável G que possui uma estrutura de grupo, tal que as aplicações:*

$$(i) \quad \bullet : G \times G \rightarrow G \quad (\text{fechamento})$$

$$(g, g') \mapsto g \bullet g'$$

$$(ii) \quad \text{inv} : G \rightarrow G \quad (\text{inverso})$$

$$g \mapsto g^{-1}$$

sejam diferenciáveis.

Exemplo 1.7 O conjunto \mathbb{R} dos números reais com a estrutura de grupo da soma e a estrutura diferencial usual é um grupo de Lie.

Exemplo 1.8 Os grupos aditivos \mathbb{R}^m e \mathbb{C}^m .

Exemplo 1.9 O toro m -dimensional

$$T^m = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m - \{0\}; |z_j| = 1 \text{ para } 1 \leq j \leq m\}.$$

Da definição acima temos que em um grupo de Lie as aplicações:

$$\begin{array}{ccc} L_x : G & \longrightarrow & G & \text{e} & R_x : G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & xg & & g & \longmapsto & gx \end{array}$$

são difeomorfismos, para cada $x \in G$. Estas aplicações são chamadas, respectivamente, *translação à esquerda* por h e *translação à direita* por h .

Alguns grupos em particular, serão de grande interesse neste trabalho. Tais grupos são conhecidos como *grupos de matrizes*, os quais são subgrupos dos Grupos Lineares $GL(n, \mathbb{k}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{k}) / \det A \neq 0\}$, onde $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, que são grupos de Lie.

Para $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ teremos os seguintes grupos:

- (a) $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) / \det A = 1\}$, chamado *grupo linear especial*.
- (b) $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) / AA^t = A^t A = Id\}$, chamado *grupo ortogonal*.
- (c) $SO(n) = \{A \in O(n) / \det A = 1\}$, chamado *grupo ortogonal especial*.

E para $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ temos os seguintes grupos

- (d) $SL(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) / \det A = 1\}$, chamado *grupo linear especial*.
- (e) $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) / AA^\dagger = A^\dagger A = Id\}$, chamado *grupo unitário*.
- (f) $SU(n) = \{A \in U(n) / \det A = 1\}$, chamado *grupo unitário especial*.

Observação 1.5 Note que $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$ e que $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$

Definição 1.9 (Toro maximal) Um toro T de G é um subgrupo de G isomorfo a um produto de fatores de $U(1)$. Diremos que um toro é um **toro maximal** se não existe outro toro H em G , tal que $T \subset H$ seja uma inclusão própria.

Como o grupo de Lie é um tipo especial de grupo, muitos dos conceitos que temos para grupos, também serão úteis em grupos de Lie, assim iremos expor aqueles que mais nos serão úteis.

Definição 1.10 Sejam G e H grupos de Lie. Diremos que

$$\phi : G \rightarrow H$$

é um **homomorfismo de Lie**, se ϕ é um homomorfismo de grupos e é C^∞ .

Observação 1.6 Seguindo a mesma idéia da definição teremos um isomorfismo de Lie, quando tivermos ao mesmo tempo um difeomorfismo e um isomorfismo de grupos.

Definição 1.11 Seja G um grupo de Lie. Diremos que o par (H, ϕ) , onde $H \subset G$, é um **subgrupo de Lie** se:

- (i) H é um grupo de Lie
- (ii) $\phi : H \rightarrow G$ é uma imersão injetiva e um homomorfismo de Lie, ou seja,

$$d\phi : T_p H \rightarrow T_{\phi(p)} G$$

é injetiva, para todo $p \in H$, ϕ é injetiva e homomorfismo.

Outra definição importante é saber quando um grupo de Lie é compacto, para isto, não temos uma definição especial. Teremos um *grupo de Lie compacto* G quando G (vista como variedade) for compacto.

Daremos agora a definição de representação de grupos.

Definição 1.12 Uma representação de um grupo finito G em um espaço vetorial complexo V é um homomorfismo $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(V)$, tal que

$$\rho(xy) = \rho(x)\rho(y), \forall x, y \in G$$

Note que:

1. $\rho(x)$ é uma aplicação linear, pois $\rho(x) \in \text{Aut}(V)$, $\forall x, y \in G$.
2. ρ é um homomorfismo, pois $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$, $\forall x, y \in G$.

Observação 1.7 Demonstra-se que todo grupo de Lie é localmente isomorfo a um subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$.

Quando temos V com dimensão finita, pela linearidade de ρ , podemos associá-la a uma matriz quadrada $n \times n$. Daí segue a definição:

Definição 1.13 Seja G um grupo de ordem h . Uma matriz quadrada $R(g)$, é associada a cada elemento de G , tal que

$$R(g_1)R(g_2) = R(g_1g_2)$$

onde $R : G \rightarrow M(n \times n)$. O grupo de matrizes $R(g)$ é uma **representação n -dimensional do grupo G** , desde que $R(e) = I$.

Diremos que R é uma representação irredutível n -dimensional, se R não pode ser escrita na seguinte forma

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & A \\ \mathbf{0} & R_2 \end{pmatrix}$$

onde R_1 é uma matriz quadrada de ordem m , R_2 é uma matriz quadrada de ordem $(n - m)$, A é uma matriz com m linhas e $(n - m)$ colunas e $\mathbf{0}$ é a matriz nula com $(n - m)$ linhas e m colunas. Com m sendo a dimensão de um subespaço invariante de V e $\dim V = n$

1.3.2 Álgebras de Lie

Atribuído pelo matemático Herman Weyl na década de 30, o termo álgebra de Lie é uma referência a Sofus Lie. As álgebras de Lie inicialmente, foram introduzidas para o estudo das rotações infinitesimais, e é uma estrutura algébrica que tem como principal utilização auxiliar o estudo dos grupos de Lie e das variedades diferenciáveis.

Definição 1.14 *Seja \mathfrak{g} um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{k} , diremos que \mathfrak{g} é uma **álgebra de Lie** se existe uma operação bilinear $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ associada (chamada colchete de Lie), que para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, satisfaz a anticomutatividade e a identidade de Jacobi, isto é:*

$$(i) [X, Y] = -[Y, X]$$

$$(ii) [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

Exemplo 1.10 *Seja \mathfrak{g} um espaço vetorial complexo de dimensão finita. Então, munindo \mathfrak{g} com o colchete de Lie trivial $[u, v] = uv - vu = 0$, temos que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie. Álgebras de Lie deste tipo são chamadas Abelianas e o colchete de Lie trivial é chamado comutador.*

Exemplo 1.11 *O espaço $gl(n, \mathbb{R})$ de todas as matrizes $n \times n$ reais é uma álgebra de Lie com $[A, B] = AB - BA$.*

Exemplo 1.12 *Se G é um grupo de Lie, então o espaço tangente $T_e G$ pode ser dotado com uma estrutura de álgebra de Lie.*

Agora vamos especificar alguns conceitos para álgebras de Lie que nos serão importantes no decorrer do trabalho.

Definição 1.15 *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita **simples**, se ela não tem ideais próprios e $\dim \mathfrak{g} > 1$. Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é dita **semissimples** se ela pode ser escrita como uma soma direta de ideais simples \mathfrak{g}_i , ou seja, $\mathfrak{g} = \oplus \mathfrak{g}_i$, $1 \leq i \leq N$, neste caso denotaremos por \mathfrak{s} .*

Exemplo 1.13 *A álgebras de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ são todas semi-simples (são também álgebras de Lie simples).*

Definição 1.16 *Chamaremos uma álgebra de Lie \mathfrak{g} de **reduzível** quando ela puder ser escrita como uma soma direta de ideais $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{Z}$, onde \mathfrak{Z} é o núcleo de \mathfrak{g} .*

Observação 1.8 *Um grupo de Lie será simples, se sua respectiva álgebra de Lie for simples. Analogamente para os conceitos de semi-simples e reduzível.*

Como, para um grupo de Lie temos a definição de um subgrupo de Lie, para álgebra de Lie, também definiremos uma subálgebra de Lie.

Definição 1.17 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Diremos que um subespaço vetorial $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é uma **subálgebra de Lie** de \mathfrak{g} se \mathfrak{h} é fechado pela operação colchete, ou seja, para $X, Y \in \mathfrak{h}$ temos que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.*

Uma subálgebra de Lie \mathfrak{h} de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} pode ser um ideal, desde que satisfaça o seguinte

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h} \tag{1.1}$$

Se uma álgebra de Lie \mathfrak{h} de um subgrupo $H \subset G$ é um ideal em \mathfrak{g} , então H é um subgrupo normal de G .

Um aplicação k -linear φ entre as álgebras de Lie \mathfrak{a} e \mathfrak{b} é um *morfismo* de álgebras de Lie se

$$\varphi([X, Y]) = [\varphi(X); \varphi(Y)], \text{ para todos } X, Y \in \mathfrak{a}$$

Definição 1.18 *Um homomorfismo de álgebras de Lie é um homomorfismo $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ de espaço vetorial complexo que é compatível com o colchete de Lie, ou seja, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ temos*

$$\varphi\left([X; Y]_{\mathfrak{g}}\right) = [\varphi(X); \varphi(Y)]_{\mathfrak{h}}$$

Seja V um espaço vetorial e $\mathfrak{gl}(V)$ a álgebra de Lie das transformações lineares de V . Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie (sobre o mesmo corpo de escalares que V). Um homomorfismo de álgebras de Lie

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

é chamado uma *representação* de \mathfrak{g} sobre V .

Observação 1.9 Chamamos V de o espaço da representação, onde sua dimensão será a dimensão da representação.

A noção de representação é importante, pois descreve as álgebras de Lie como álgebras de transformações lineares. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.14 Seja $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ subálgebra, teremos que a inclusão define, trivialmente, uma representação de \mathfrak{g} em V , que denominamos representação canônica.

Exemplo 1.15 Seja \mathfrak{a} uma álgebra de Lie. Para todo $X \in \mathfrak{a}$ denotamos por $ad(X)$ a transformação linear em \mathfrak{a} definida por $ad(X)(Y) = [X; Y]$, para todo $Y \in \mathfrak{a}$.

Proposição 1.1 A transformação linear ad é uma representação de \mathfrak{a} em \mathfrak{a} .

Prova. Sejam $X, Y \in \mathfrak{a}$. Como \mathfrak{a} é uma álgebra de Lie, temos

$$\begin{aligned} ad([X; Y])(Z) &= [[X; Y]; Z] \\ &= -[Z; [X; Y]] = [X; [Y; Z]] + \underbrace{[Y; [Z; X]]}_{-[Y; [X; Z]]} \\ &= [X; ad(Y)(Z)] - [Y; ad(X)(Z)] = ad(X)(ad(Y)(Z)) - ad(Y)(ad(X)(Z)) \\ &= (ad(X)ad(Y) - ad(Y)ad(X))(Z) = [ad(X); ad(Y)](Z) \end{aligned}$$

para todo $Z \in \mathfrak{a}$. ■

Esta representação é chamada a *representação adjunta* de \mathfrak{a} .

Abaixo daremos alguns exemplos de representações que são contruídas a partir das operações que serão definidas.

Definição 1.19 Sejam $\varrho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ e $\varrho_W : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(W)$ duas representações da álgebra de Lie \mathfrak{g} . Elas são ditas **equivalentes** se existe um isomorfismo linear $P : V \rightarrow W$ tal que

$$\varrho_W(X) \circ P = P \circ \varrho_V(X); \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}$$

Definição 1.20 Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ representações de \mathfrak{g} em V_1, \dots, V_n , respectivamente. Chamamos de **soma direta das representações** ϱ_i , a aplicação ϱ_\oplus definida por

$$\begin{aligned} \varrho_\oplus : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(V_1 \oplus \dots \oplus V_n) \\ X &\longmapsto \varrho_\oplus(X) = \varrho_1(X) \oplus \dots \oplus \varrho_n(X) \end{aligned}$$

Em forma de matrizes, ϱ se escreve em blocos da seguinte forma

$$\varrho_\oplus = \begin{pmatrix} \varrho_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varrho_n \end{pmatrix}$$

Em particular, sejam $\varrho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ e $\varrho_W : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(W)$ duas representações da álgebra de Lie \mathfrak{g} . Então a soma direta destas representações é definida por

$$\begin{aligned} \varrho_V \oplus \varrho_W : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(V \oplus W) \\ X &\longmapsto \begin{pmatrix} \varrho_V(X) & 0 \\ 0 & \varrho_W(X) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esta definição é compatível com a soma direta de representação de grupos finitos.

Agora temos a seguinte definição para produto tensorial para duas representações de álgebra de Lie:

Definição 1.21 Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $\varrho_i, i = 1, \dots, n$ representações de \mathfrak{g} em V_i . Chamamos de **produto tensorial** destas representações a aplicação ϱ , definida por

$$\begin{aligned} \varrho_\otimes : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(V_1 \otimes \dots \otimes V_n) \\ X &\longmapsto \varrho_\otimes(X) = \varrho_1(X) \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 + \dots + 1 \otimes \dots \otimes \varrho_n(X) \end{aligned}$$

onde 1 representa a identidade em cada um dos espaços.

Em particular quando $n = 2$, ou seja dada duas representações $\varrho_V : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ e $\varrho_W : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(W)$ da álgebra de Lie \mathfrak{g} , então o produto tensorial destas representações é definido por

$$\begin{aligned} \varrho_V \otimes \varrho_W : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(V \otimes W) \\ X &\longmapsto \varrho(X)(v \otimes w) = \varrho_V(X)(v) \otimes w + v \otimes (\varrho_W(X))(w) \end{aligned}$$

Observação 1.10 O produto tensorial de representações de álgebra de Lie é bilinear com respeito à soma direta de representações de álgebras de Lie.

Definição 1.22 Seja $\varrho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma representação da álgebra de Lie \mathfrak{g} . Então a **representação dual** ϱ^* de \mathfrak{g} no dual V^* de V definida por

$$\begin{aligned} \varrho^* : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(V^*) \\ X &\longmapsto -\varrho(X)^T \end{aligned}$$

é determinada pela fórmula

$$\varrho^*(X)(\lambda) = -\lambda \circ \varrho(X), \text{ com } \lambda \in V^*$$

As aplicações $\varrho_{\oplus}, \varrho_{\otimes}$ e ϱ^* definidas acima, são representações.

1.3.3 Relação entre grupo de Lie e álgebra de Lie

Para cada grupo de Lie G de dimensão finita, existe uma álgebra de Lie real correspondente de mesma dimensão, a qual usaremos a notação \mathfrak{g} . Mais precisamente, se $\dim G = n$, então as matrizes $(m \times m)$ E_1, E_2, \dots, E_n definidas por $(E_i)_{jk} = (\partial A_{jk} / \partial x_i)_{x_1=x_2=\dots=x_n=0}$, com $j, k = 1, \dots, m$ e $i = 1, \dots, n$, formam uma base de \mathfrak{g} .

Usando o mecanismo de translação usual (ou seja, mapa exponencial e diferencial) entre grupos de Lie e álgebras de Lie, obtemos álgebras de Lie através de grupos de Lie, e vice versa. Qualquer grupo de Lie G define uma álgebra de Lie associada $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$.

Veja esta identificação

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} = T_e G & \xrightarrow{T_e \varphi} & \text{End}(V) = \mathfrak{gl}(V) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\varphi} & \text{Aut}(V) \end{array}$$

Sejam G um grupo de Lie e $\mathfrak{g} := T_e G$ sua álgebra de Lie correspondente. Se $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ é uma representação de G , então $T_e \varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ é uma representação da álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Se G for simplesmente conexo, este processo também pode ser invertido: Se $\varrho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(V)$ é uma representação (um homomorfismo de álgebras de Lie), então existe um homomorfismo do grupo de Lie (uma representação de G) do tipo $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ tal que $\varrho = T_e \varphi$.

1.3.4 Complexificação de grupos lineares

De agora em diante usaremos o símbolo $G_{\mathbb{R}}$ para denotar um grupo de Lie linear redutível e o símbolo $G_{\mathbb{C}}$ para a complexificação de $G_{\mathbb{R}}$. Suponha que Z_{G^0} (centro da componente identidade $G_{\mathbb{R}}^0$) pode ser expressado como um produto direto

$$Z_{G^0} = C \cdot A, \text{ com } C \text{ compacto, } A \cong (\mathbb{R}^k; +) \text{ para algum } k \geq 0, \text{ e} \quad (1.2)$$

$$\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} = \text{álgebra de Lie de } A, \text{ tem uma base } \{\xi_1, \dots, \xi_k\}, \quad (1.3)$$

tal que ξ_j é diagonalizável, com autovalores racionais.

Os ξ_j são vistos como matrizes via a imersão $G_{\mathbb{R}} \subset GL(n; \mathbb{R})$ ou $G_{\mathbb{R}} \subset GL(n; \mathbb{C})$ que exhibe $G_{\mathbb{R}}$ como um grupo linear. Nesta seção, autovalores reais serão suficientes, mas a racionalidade dos autovalores serão importantes quando complexificarmos $G_{\mathbb{R}}$.

Denotaremos por $K_{\mathbb{R}} \subset G_{\mathbb{R}}$ o *subgrupo compacto maximal*.

Proposição 1.2 *Valem as seguintes hipóteses para $G_{\mathbb{R}}$*

- i) Qualquer subgrupo compacto de $G_{\mathbb{R}}$ está contido em algum subgrupo compacto maximal $K_{\mathbb{R}}$, e $\dim_{\mathbb{R}} K_{\mathbb{R}} \geq 1$ desde que $G_{\mathbb{R}}$ não seja abeliano;
- ii) quaisquer dois subgrupos compactos maximais de $G_{\mathbb{R}}$ são conjugados por um elemento de $G_{\mathbb{R}}$;
- iii) a inclusão $K_{\mathbb{R}} \hookrightarrow G_{\mathbb{R}}$ induz um isomorfismo de grupos de componentes $K_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}^0 \simeq G_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{R}}^0$;

iv) se $G_{\mathbb{R}}$ for semissimples, o normalizador de $K_{\mathbb{R}}$ em $G_{\mathbb{R}}$ coincide com $K_{\mathbb{R}}$.

Observação 1.11 Denotemos por $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ e $\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$ as álgebras de Lie de $G_{\mathbb{R}}$ e $K_{\mathbb{R}}$, respectivamente. Então $K_{\mathbb{R}}$ atua em $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ pela restrição da representação adjunta ad.

Como qualquer grupo de Lie linear, $G_{\mathbb{R}}$ tem uma complexificação, um grupo de Lie complexo $G_{\mathbb{C}}$, com álgebra de Lie,

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{\mathbb{R}},$$

contendo $G_{\mathbb{R}}$ como um subgrupo de Lie, tal que

- a) a inclusão $G_{\mathbb{R}} \hookrightarrow G_{\mathbb{C}}$ induz $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $\xi \mapsto 1 \otimes \xi$, e
- b) $G_{\mathbb{R}}$ contém todas as componentes conexas de $G_{\mathbb{C}}$.

Para construir uma complexificação, consideramos $G_{\mathbb{R}}$ como subgrupo de $GL(n; \mathbb{R})$, tal que $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$. Isso torna $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$. Então $G_{\mathbb{C}}^0$, o subgrupo de Lie conexo, de $GL(n; \mathbb{C})$ com álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, satisfaz a condição **(a)**. Por construção $G_{\mathbb{R}}^0 \subset G_{\mathbb{C}}^0$, e $G_{\mathbb{R}}$ normaliza $G_{\mathbb{C}}^0$, conseqüentemente $G_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{R}} \cdot G_{\mathbb{C}}^0$ é um grupo de Lie complexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, que contém $G_{\mathbb{R}}$ e satisfaz **(a)** e **(b)**. Quando $G_{\mathbb{C}}$ é uma complexificação de $G_{\mathbb{R}}$, chamamos $G_{\mathbb{R}}$ uma *forma real* de $G_{\mathbb{C}}$. Não excluimos o caso no qual um grupo de Lie $G_{\mathbb{R}}$ seja um grupo de Lie complexo; no caso de $G_{\mathbb{R}} = GL(n; \mathbb{C})$, por exemplo, $G_{\mathbb{C}} \cong GL(n; \mathbb{C}) \times GL(n; \mathbb{C}) \subset GL(2n; \mathbb{C})$.

Em geral, a complexificação de um grupo de Lie linear depende de sua complexificação como um grupo linear. Aqui, a complexificação $G_{\mathbb{C}}$ herda a propriedade (1.2) de $G_{\mathbb{R}}$. Isto implica que $G_{\mathbb{C}}$ é determinado por $G_{\mathbb{R}}$ por isomorfismo, mas a imersão depende da realização como grupo real, a menos que $G_{\mathbb{R}}^0$ tenha centro compacto.

Exemplo 1.16 Vamos complexificar a decomposição de Cartan.

Sejam $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{k} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$ e $\mathfrak{p} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{p}_{\mathbb{R}}$; e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ como espaço vetorial. A complexificação $G_{\mathbb{C}}$ de $G_{\mathbb{R}}$ (naturalmente) contém $K_{\mathbb{C}}$ (complexificação de $K_{\mathbb{R}}$), como subgrupo de Lie complexo.

$K_{\mathbb{C}}$ só será compacto se $K_{\mathbb{R}} = \{e\}$. Que não acontece, a menos que $G_{\mathbb{R}}$ seja abeliano.

De fato, qualquer $\xi \in \mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$, não nulo, é diagonalizável sobre \mathbb{C} , com autovalores puramente imaginário, não todos nulos, assim o subgrupo complexo de 1-parâmetro $\{z \rightarrow \exp(z\xi)\}$ de $K_{\mathbb{C}}$ é ilimitado. Por construção, as álgebras de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ e os grupos correspondentes satisfazem :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} & \subset & \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \\ \cup & & \cup \\ \mathfrak{k}_{\mathbb{R}} & \subset & \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G_{\mathbb{R}} & \subset & G_{\mathbb{C}} \\ \cup & & \cup \\ K_{\mathbb{R}} & \subset & K_{\mathbb{C}} \end{array}$$

1.4 Fibrados

Nesta seção introduziremos as definições básicas de fibrado, pullback em fibrado, fibrado principal e conexão em fibrado. Um fibrado é um espaço topológico que localmente pode ser visto como um produto direto de dois espaços topológicos. O que nos motiva a estudá-los é que muitas teorias em Física, como a relatividade geral e teorias de gauge, são descritas naturalmente em termos de fibrados.

Definição 1.23 A estrutura de **fibrado diferenciável** em E é a *sêxtupla* (E, π, M, F, G, Ψ) , onde:

1. E é uma variedade de classe C^{∞} , chamada de *espaço total*;
2. M é o espaço quociente, ou seja, $M = E/R$ tal que R é uma relação de equivalência em E , tal que, $R = \{(x_1, x_2) \in E \times E; \exists g \in G; x_1 \cdot g = x_2\}$. M é uma variedade de dimensão n , chamada de *espaço base*;
3. π é a *projeção* definida de E em M , ou seja, $\pi : E \rightarrow M$, com $\pi(x) = \bar{x}$, π é C^{∞} e têm posto n ;
4. F é uma subvariedade de classe C^{∞} , tal que $F \subset E$, e F é chamada de *fibra*;
5. G é um grupo de Lie que atua em F à esquerda, G é chamada grupo de estrutura;

6. $\Psi = \{\Psi_\alpha\}_\alpha$ é uma família de difeomorfismos que satisfaz às seguintes propriedades:

(a) Se $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ é uma cobertura aberta de M , então $\forall x \in M$, $\exists U_\alpha(x)$ e $\exists \Psi_\alpha \in \Psi$ tal que

$$\Psi_\alpha : U_\alpha \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha), \Psi_\alpha(x, y) = x, \forall (x, y) \in U_\alpha \times F \quad (1.4)$$

$(U_\alpha, \Psi_\alpha)_{\alpha \in I}$ é a representação de coordenadas para E . A função Ψ_α é chamada de *triviliação local*.

(b) $\forall (U_\alpha, \Psi_\alpha)_{\alpha \in I}$, temos

$$\Psi_{\alpha,x} : F \longrightarrow F_x = \{y \in E; \pi(y) = x\} \quad (1.5)$$

onde $\Psi_{\alpha,x}(y) = \Psi_\alpha(x, y)$ é bijetora, com $y \in F$ e $x \in U_\alpha$.

Observação 1.12 Frequentemente usamos a seguinte notação $E \xrightarrow{\pi} M$ ou simplesmente E para denotar um fibrado (E, π, M, F, G, Ψ) .

Rigorosamente falando, a definição de fibrado mostra-se independente de uma cobertura especial $\{U_\alpha\}$ de M . Na literatura matemática a definição acima é empregada para definir um fibrado de coordenadas $(E, \pi, M, F, G, \{\Psi_\alpha\}, \{U_\alpha\})$. Chamaremos de *fibrados equivalentes*, dois fibrados com coordenadas $(E, \pi, M, F, G, \{\Psi_\alpha\}, \{U_\alpha\})$ e $(E, \pi, M, F, G, \{\Phi_\alpha\}, \{V_\alpha\})$, tais que com a coordenada $(E, \pi, M, F, G, \{\Psi_\alpha\} \cup \{\Phi_\alpha\}, \{U_\alpha\} \cup \{V_\alpha\})$ ainda temos um fibrado.

Definição 1.24 Seja E um fibrado. Chamaremos a aplicação C^∞ , $s : M \longrightarrow E$ de **secção** se ela satisfaz: $\pi \circ s = Id_M$.

Notemos que para $x \in M$, temos $s(x) = s|_{x \in F_x}$. O conjunto de todas as seções de M será denotado por $\Gamma(M, E)$. Se s está definida em $U \subset M$, com U um aberto; diremos que s é uma *seção local*.

Agora, se $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, temos o difeomorfismo $t_{ij}(x) = \Psi_{i,x}^{-1} \circ \Psi_{j,x} : F \longrightarrow F_x \in G$, e chamamos t_{ij} de função de transição e F_x de fibra sobre $x \in M$, $F_x = \pi^{-1}(x)$, $\forall x \in M$, que é uma subvariedade fechada de E .

Exemplo 1.17 (Fibrado Tangente) *O exemplo mais importante de um fibrado vetorial sobre uma variedade M é o fibrado tangente TM de M . Como conjunto, o espaço total TM é simplesmente a união disjunta de todos os espaços tangentes:*

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M \quad (1.6)$$

A projeção óbvia será denotada por τ_M :

$$\tau_M : TM \rightarrow M \quad (1.7)$$

1.4.1 Pullback

É importante sabermos como construir novos fibrados vetoriais a partir de um fibrado vetorial dado. Aqui apresentaremos um procedimento básico, que é conhecido com *pullback*.

Sejam $E \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado com uma fibra F , e N uma variedade. Dada a aplicação $f : N \rightarrow M$, temos que o par (E, f) define um novo fibrado, agora sobre N , com a mesma fibra F . Consideremos um subespaço f^*E de $N \times E$, que consiste do ponto (p, u) , tal que $f(p) = \pi(u)$. Este subespaço é chamado o *pullback* de E por f . A fibra F_p de f^*E é justamente uma cópia da fibra $F_{f(p)}$ de E . Se definirmos $f^*E \xrightarrow{\pi_1} N$ por $\pi_1(p, u) = p$ e $\pi_2 : f^*E \rightarrow E$ por $\pi_2(p, u) = u$, então o pullback f^*E pode ser dotado com uma estrutura de fibrado e obtemos a seguinte aplicação de fibrado.

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\pi_2} & E \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array} \quad (1.8)$$

A comutatividade do diagrama segue, desde que $\pi(\pi_2(p, u)) = \pi(u) = f(p) = f(\pi_1(p, u))$, com $(p, u) \in f^*E$. Em particular, se $N = M$ e $f = id_M$, então teremos que os dois fibrados f^*E e E são equivalentes.

1.4.2 Fibrado Principal

Um tipo de fibrado importante é o *Fibrado Principal*, que até certo ponto pode ser considerado como uma generalização de grupos de Lie.

Um fibrado principal têm por fibra F , que é idêntica com a estrutura do grupo G . Ele é denotado por $P(M, G)$, sendo também chamado um fibrado G sobre M . As funções de transições atuam sob a fibra à esquerda.

Agora, vamos definir a ação de G sobre F à direita.

Considere $\phi_i : U_i \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U_i)$ sendo a trivialização local dada por $\phi_i^{-1}(u) = (p, g)$, onde $u \in \pi^{-1}(U_i)$ e $p = \pi(u)$. A ação à direita de G sobre $\pi^{-1}(U_i)$ é definida por $\phi_i^{-1}(ua) = (p, g_i a)$, com $ua = \phi_i(p, g_i a)$, qualquer que sejam $a \in G$ e $u \in \pi^{-1}(p)$. No caso em que a ação à direita comute com a ação à esquerda, esta definição não depende da trivialização local. De fato, para $p \in U_i \cap U_j$, se

$$ua = \phi_j(p, g_j a) = \phi_j(p, t_{ji}(p)g_i a) = \phi_i(p, g_i a). \quad (1.9)$$

Então a multiplicação à direita é definida sem se referir a trivialização local. Esta é denotada por $P \times G \longrightarrow P$ ou $(u, a) \longrightarrow ua$.

Note que $\pi(ua) = \pi(u)$. A ação à direita de G sobre $\pi^{-1}(p)$ é transitiva desde que G atue sobre G transitivamente à direita e $F_p = \pi^{-1}(p)$ seja difeomorfica à G . Assim para quaisquer $u_1, u_2 \in \pi^{-1}(p)$, podemos construir a todas as fibras por $\pi^{-1}(p) = \{ua; a \in G\}$. A ação à direita também é livre, se $ua = u$ para algum $u \in P$. a pode ser o elemento identidade $e \in G$. Com efeito, se $u = \phi_i(p, g_i)$, temos $\phi_i(p, g_i a) = \phi_i(p, g_i) a = ua = u = \phi_i(p, g_i)$. Já que ϕ_i é bijetora, podemos ter $g_i a = g_i$, ou seja, $a = e$.

Dada a seção $s_i(p)$ sobre U_i , definimos a preferida trivialização local $\phi_i : U_i \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U_i)$ como a seguir. Para $u \in \pi^{-1}(U_i)$, $p \in U$, há um único elemento $g_u \in G$ tal que $u = s_i(p)g_u$. Então, definimos ϕ_i por $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_u)$. Nesta trivialização local, a seção $s_i(p)$ é expressada como $s_i(p) = \phi_i(p, e)$.

Esta trivialização local é chamada de trivialização canônica. Por definição $\phi_i(p, g) = \phi_i(p, e)g = s_i(p)g$. Se $p \in U_i \cap U_j$, duas seções $s_i(p)$ e $s_j(p)$ são relacionadas pela função de

transição $t_{ij}(p)$ como segue

$$\begin{aligned} s_i(p) &= \phi_i(p, e) = \phi_j(p, t_{ji}(p)e) = \phi_j(p, t_{ji}(p)) \\ &= \phi_j(p, e)t_{ji}(p) = s_j(p)t_{ji}(p). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Exemplo 1.18 Considere P sendo um fibrado principal com fibra $U(1) = S^1$ e o espaço base S^2 . Este fibrado principal representa a topologia ambiente do monopólio magnético.

Seja $\{U_N, U_S\}$ sendo uma cobertura de S^2 pelo usual ângulo polar, nós temos $U_N = \{(\theta, \alpha); 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon, 0 \leq \beta < 2\pi\}$ e $U_S = \{(\theta, \alpha); \frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \beta < 2\pi\}$. A interseção $U_N \cap U_S$ é uma faixa que é essencialmente o equador. Considere ϕ_N e ϕ_S sendo a trivialização local tal que $\phi_N^{-1}(u) = (p, \exp(i\alpha_N))$ e $\phi_S^{-1}(u) = (p, \exp(i\alpha_S))$, onde $p = \pi(u)$. Tomando uma função de transição t_{NS} da forma $e^{in\beta}$, onde n deve ser inteiro. Podemos definir unicamente $t_{NS}(p)$ sobre o equador, desde que t_{NS} aplica o equador S^1 para $U(1)$, este inteiro caracteriza o grupo de homotopia $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$. As fibras coordenadas α_N e α_S são relacionadas sobre o equador como $e^{i\alpha_N} = e^{in\beta}e^{i\alpha_S}$. Se $n = 0$, a função de transição é o elemento unitário de $U(1)$ e nós temos um fibrado trivial $P = S^2 \times S^1$. Se $n \neq 0$, o $U(1)$ -fibrado P_n é curvado. É impressionante que a estrutura topológica de um fibrado seja caracterizado por um número inteiro.

Desde que $U(1)$ seja abeliano, a ação à direita e a ação à esquerda são equivalentes. De acordo com a ação à direita $g = e^{i\lambda}$, nós temos $\phi_N^{-1}(ug) = (p, e^{i(\alpha_N+\lambda)})$ e $\phi_S^{-1}(ug) = (p, e^{i(\alpha_S+\lambda)})$.

Em matemática, o fibrado universal na teoria de fibrados com a estrutura de grupo de um determinado grupo topológico G , é um fibrado específico, sobre o espaço de classificação BG , tal que cada fibrado com um determinado grupo de estrutura G sobre M é um pullback por meio de uma aplicação contínua $M \rightarrow BG$.

Iremos provar a existência de tal grupo para grupos de Lie compacto. Mas, primeiramente iremos provar a seguinte proposição:

Proposição 1.3 *Seja G um grupo Lie compacto. Existe um espaço contrátil EG no qual G atua livremente. A projeção $EG \rightarrow BG$ é um G -fibrado principal.*

Demonstração. Existe uma injeção de G em um grupo unitário $U(n)$ para n suficientemente grande.

Se encontrarmos $EU(n)$ podemos então tomar EG como $EU(n)$. ■

Observação 1.13 *A construção de $EU(n)$ é dada em espaço de classificação para $EU(n)$.*

O seguinte teorema é um corolário da nossa proposição acima.

Teorema 1.1 *Se M é uma variedade compacta e $P \rightarrow M$ é um G -fibrado principal, então existe uma aplicação $f : M \rightarrow BG$, bem definida pela homotopia, tal que P é isomorfo à $f^*(EG)$, o pullback do G -fibrado $EG \rightarrow BG$ por f .*

O espaço total de um fibrado universal é, geralmente, escrito por EG .

1.4.3 Conexão em Fibrados

Primeiramente definiremos conexão sobre um fibrado principal. Sua definição é realizada introduzindo a conexão de 1-forma cuja forma local é bem conhecida para os físicos como um potencial de gauge. Há várias definições equivalentes de uma conexão sobre um fibrado principal. A maneira que iremos trabalhar é baseada na separação do espaço tangente T_pM em subespaços verticais e horizontais. Embora esta aproximação pareça ser abstrata, ela tem vantagens comparada com outras aproximações em que ela esclarece o quadro geométrico envolvido e é definido independente das trivializações locais espaciais. A conexão é também definida como 1-forma g -valuada que satisfaz certos axiomas. Mostra-se que estas definições são equivalentes.

Considere u sendo um elemento de um fibrado principal $P(M, G)$ e considere G_p sendo a fibra em $p = \pi(u)$. O subespaço vertical V_uP é um subespaço de T_uP que é tangente a G_p em u . Vejamos a construção de um plano vertical V_uP . Tomando um elemento $X \in \mathfrak{X}$. Pela ação à direita

$$R_{\exp(tX)}u = u \exp(tX) \tag{1.11}$$

a curva através de u é definida em P . Já que $\pi(u) = \pi(u \exp(tX)) = p$, esta curva existe dentro dos limites de G_p . Definamos um vetor $X^\# \in T_u P$ por

$$X^\# f(u) = \left. \frac{d}{dt} f(u \exp(tX)) \right|_{t=0} \quad (1.12)$$

onde $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável arbitrária. O vetor $X^\#$ é tangente para G_p em u , daí $X^\# \in V_u P$. Deste modo definimos um vetor $X^\#$ em cada ponto de P e construímos um campo de vetores $X^\#$, chamado o campo de vetor fundamental gerado por X . Existe um isomorfismo de espaços vetoriais $\begin{matrix} \mathbb{Y} & \longrightarrow & V_u P \\ X & \longmapsto & X^\# \end{matrix}$. O subespaço horizontal $H_u P$ é o complemento de $V_u P$ em $T_u P$, e este, é definido unicamente no caso de existir uma conexão em P .

Definição 1.25 *Uma conexão sobre P é uma única separação do espaço tangente $T_u P$ nos subespaços vertical e horizontal, tais que*

- (i) $T_u P = H_u P \oplus V_u P$
- (ii) Um campo de vetor $C^\infty X$ sobre P é separado em campos de vetores $C^\infty X^H \in H_u P$ e $X^V \in V_u P$ como $X = X^H + X^V$.
- (iii) $H_{ug} P = R_{g*} H_u P$ para arbitrários $u \in P$ e $g \in G$.

A condição (iii) diz que os subespaços $H_u P$ e $H_{ug} P$ sobre a mesma fibra são relacionados por uma aplicação linear R_{g*} induzida pela ação à direita. A partir do subespaço $H_u P$ sobre u a aplicação R_{g*} gera todos os subespaços sobre a mesma fibra.

Nos cálculos práticos, devemos separar $T_u P$ em $V_u P$ e $H_u P$ de modo sistemático. Esta separação pode ser alcançada introduzindo uma álgebra de Lie valuada 1-forma $w \in \mathbb{Y} \otimes T^* P$ chamada a *conexão de 1-forma*.

Definição 1.26 *A conexão de 1-forma $w \in \mathbb{Y} \otimes T^* P$ é a projeção de $T_u P$ sobre a componente vertical $V_u P \simeq \mathbb{Y}$. A propriedade da projeção é resumida pelas seguintes exigências.*

- (i) $w(X^\#) = X$

$$(ii) R_g^* w = Ad_{g^{-1}} w.$$

Isto é, para $X \in T_u P$,

$$R_g^* w_{ug}(X) = w_{ug}(R_{g^*} X) = g^{-1} w_u(X) g. \quad (1.13)$$

Definição 1.27 *O subespaço horizontal $H_u P$ é o núcleo de w .*

$$H_u P = \{X \in T_u P; w(X) = 0\} \quad (1.14)$$

Para mostrar que esta definição é consistente com a definição 1.25, nós provamos a seguinte proposição.

Proposição 1.4 *O subespaço horizontal (1.14) satisfaz*

$$R_{g^*} H_u P = H_{ug} P. \quad (1.15)$$

Demonstração. Fixe um ponto $u \in P$ e defini $H_u P = \{X \in T_u P; w(X) = 0\}$. Tome $X \in H_u P$ e construa $R_{g^*} X \in T_{ug} P$. Encontramos desde que $w(X) = 0$. De acordo com $R_{g^*} X \in H_{ug} P$. Notamos que R_{g^*} é uma aplicação linear invertível. Daí qualquer vetor $Y \in H_{ug} P$ é expressado como $Y = R_{g^*} X$ para algum $X \in H_u P$. ■

A conexão de 1-forma w definida acima é conhecida na literatura como a *conexão de Ehresmanm*.

Consideremos agora $\{U_i\}$ sendo uma cobertura aberta de M e σ_i uma seção local definida sobre cada U_i . É conveniente para introduzirmos uma álgebra de Lie avaliada em 1-forma \mathbf{A}_i sobre U_i por

$$\mathbf{A}_i \equiv \sigma_i^* w \in \mathfrak{Y} \otimes \Omega(U_i) \quad (1.16)$$

consequentemente, dado a álgebra de Lie avaliada em 1-forma \mathbf{A}_i sobre U_i , nós podemos reconstruir a conexão 1-forma w cujo pullback de σ_i^* é \mathbf{A}_i .

Teorema 1.2 *Dado uma 1-forma \mathfrak{Y} –avaliada, \mathbf{A}_i sobre U_i e a seção local $\sigma_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$, existe uma conexão 1-forma w tal que $\mathbf{A}_i \equiv \sigma_i^* w$ sobre U_i .*

Prova. Ver [6]. ■

Para w ser definida unicamente sobre P , que é separado de maneira única como $T_uP = H_uP \oplus V_uP$, nós devemos ter $w_i = w_j$ sobre $U_i \cap U_j$. A única 1-forma w é então definida inteiramente em P por $w|_{U_i} = w_i$. Para cumprir esta condição, a forma local \mathbf{A}_i precisa satisfazer uma propriedade de transformação peculiar similar aos símbolos de Christofel. Nós primeiro precisamos de um lema técnico.

Lema 1.1 *Considere $P(M, G)$ sendo um fibrado principal e $\sigma_i(\sigma_j)$ sendo uma seção local sobre $U_i(U_j)$ tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Para $X \in T_pM$ ($p \in U_i \cap U_j$), $\sigma_{i*}X$ e $\sigma_{j*}X$ satisfazem*

$$\sigma_{j*}X = R_{t_{ij*}}(\sigma_{i*}X) + (t_{ij}^{-1}dt_{ij}(X))^{\#} \quad (1.17)$$

onde $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ é uma função de transição.

Prova. Ver [6]. ■

A compatibilidade desta equação é obtida pela aplicação da conexão 1-forma w sobre a equação (1.17). Nós encontramos que

$$\begin{aligned} \sigma_j^*w(X) &= R_{t_{ij}}^*w(\sigma_{i*}X) + t_{ij}^{-1}dt_{ij}(X) \\ &= t_{ij}^{-1}w(\sigma_{i*}X)t_{ij} + t_{ij}^{-1}dt_{ij}(X) \end{aligned} \quad (1.18)$$

onde o axioma da definição 1.26 deve ser usado. Desde que esta seja verdadeira para quaisquer $X \in T_pM$, a equação acima se reduz em

$$\mathbf{A}_j = t_{ij}^{-1}\mathbf{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}dt_{ij} \quad (1.19)$$

esta é a condição de compatibilidade que estávamos procurando.

Convencionalmente, dada uma cobertura aberta $\{U_i\}$, a seção local $\{\sigma_i\}$ e as formas locais $\{\mathbf{A}_i\}$ que satisfaz a equação (1.19), podemos construir a 1-forma \mathbb{Y} –avaluada w sobre P . Desde que um fibrado principal não trivial não admita uma seção global, o pullback $\mathbf{A}_i = \sigma_i^*w$ existe localmente mas não necessariamente global.

1.4.4 Fibrado linha

Definição 1.28 Chamaremos o par (L, π) de fibrado linha complexo sobre uma variedade M , onde L é uma variedade e $\pi : L \rightarrow M$ uma aplicação sobrejetiva suave, se:

- Toda fibra $\pi^{-1}(p) = L_p$ é um espaço vetorial complexo unidimensional;
- Todo $p \in M$ tem uma vizinhança aberta $U \in M$ para a qual existe um difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}$ tal que $\varphi(L_p) \subset \{p\} \times \mathbb{C}$ para todo p e que além disso a aplicação $\varphi|_{L_p} : L_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{C}$ é um isomorfismo linear.

Observação 1.14 A segunda condição é chamada trivialização local pois diz que localmente o fibrado linha pode ser visto como $\mathbb{C} \times M$.

Exemplo 1.19 O exemplo mais simples de um fibrado linha ao longo de uma variedade M é o fibrado trivial $\mathbb{C} \times M$. Aqui o espaço vetorial em cada ponto $p \in M$ é $\mathbb{C} \times \{p\}$ o qual consideramos como uma cópia de \mathbb{C} . A definição geral utiliza este como um modelo local.

Exemplo 1.20 (Fibrado de Hopf) Definimos o fibrado de Hopf $\mathbb{C}P^1$ como o conjunto de todas as linhas (que passam através da origem) em \mathbb{C}^2 . Denote a linha cancelada do vetor $z = (z^0; z^1)$ por $[z] = [z^0; z^1]$. Note que $[\lambda z_0; \lambda z_1] = [z^0; z^1]$ para algum número complexo λ não-nulo. Definindo dois conjuntos abertos U_i por

$$U_i = \{[z^0; z^1]; z^i \neq 0\}$$

e em coordenadas $\psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ por $\psi_0([z]) = z^1/z^0$ e $\psi_1([z]) = z^0/z^1$. Como uma variedade $\mathbb{C}P^1$ é difeomorfa a S^2 . Um difeomorfismo $S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ é dado por $(x, y, z) \mapsto [x + iy, 1 - z]$.

Definimos o fibrado linha H sobre $\mathbb{C}P^1$ por $H \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P^1$ onde

$$H = \{(w, [z]); w = \lambda z \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C}^*\} \quad (1.20)$$

Definimos a projeção $\pi : H \rightarrow \mathbb{C}P^1$ por $\pi((w, [z])) = [z]$. A fibra $H[z] = \pi^{-1}([z])$ é o conjunto

$$\{(\lambda z, [z]); \lambda \in \mathbb{C}^*\} \quad (1.21)$$

o qual é naturalmente identificado com a linha cancelada $[z]$. Isto é, que ele herda uma estrutura do espaço vetorial dada por

$$\alpha(w, [z]) + \beta(w', [z]) = (\alpha w + \beta w' [z])$$

1.5 Levantamento Horizontal e Transporte Paralelo

Nesta seção, iremos definir o *transporte paralelo* de um elemento do fibrado principal ao longo de uma curva em M que será dado através do *levantamento horizontal* de uma curva.

Definição 1.29 Consideremos $P(M, G)$ sendo um G -fibrado e seja $\zeta : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva em M . Uma curva $\tilde{\zeta} : [0, 1] \rightarrow P$ é chamada de **levantamento horizontal de ζ** se satisfaz as seguintes condições

1. $\pi \circ \tilde{\zeta} = \zeta$
2. o vetor tangente a $\tilde{\zeta}(t)$ sempre pertence a $H_{\tilde{\zeta}(t)}P$.

Agora vamos considerar um vetor \tilde{X} tangente a $\tilde{\zeta}$. Logo, por definição, satisfaz $w(\tilde{X}) = 0$. Note que esta condição é uma Equação Diferenciável Ordinária (EDO) e pelo teorema fundamental de EDO, garante-se a existência e unicidade do levantamento horizontal.

Teorema 1.3 Seja $\zeta : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva em M e seja $u_0 \in \pi^{-1}(\zeta(0))$. Então existe um único levantamento horizontal $\tilde{\zeta}(t)$ em P tal que $\tilde{\zeta}(0) = u_0$.

Demonstração. Consideremos a construção de tal curva $\tilde{\zeta}$. Seja U_i uma carta que contém ζ e tome uma seção σ_i sobre U_i . Se existe um levantamento horizontal $\tilde{\zeta}$, ele pode ser expressado como $\tilde{\zeta}(t) = \sigma_i(\zeta(t)) \cdot g_i(t)$, onde $g_i(t)$ levanta para $g_i(\zeta(t)) \in G$. Sem perda de generalidade, nós tomamos uma seção tal que $\sigma_i(\zeta(0)) = \tilde{\zeta}(0)$, isto é $g_i(0) = e$. Considere X sendo um vetor tangente a $\zeta(t)$ sobre $\zeta(0)$. Então $\tilde{X} = \tilde{\zeta}_* X$ é tangente, a $\tilde{\zeta}$ sobre

$u_0 = \tilde{\zeta}(0)$. Desde que o vetor tangente \tilde{X} é horizontal, ele satisfaz $w(\tilde{X}) = 0$. Uma pequena modificação do lema (1.1) produz

$$\tilde{X} = g_i(t)^{-1} \sigma_{i*} X g_i(t) + (g_i(t)^{-1} dg_i(X))^{\#} \quad (1.22)$$

aplicando w sobre a Eq. (1.22), encontramos

$$0 = w(\tilde{X}) = g_i(t)^{-1} w(\sigma_{i*} X) g_i(t) + g_i(t)^{-1} \frac{dg_i(t)}{dt}. \quad (1.23)$$

Multiplicando por $g_i(t)$ à esquerda, obtemos

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -w(\sigma_{i*} X) g_i(t). \quad (1.24)$$

Agora utilizando o teorema fundamental de EDO garantimos a existência e unicidade da solução da equação (1.24).

Já que $w(\sigma_{i*} X) = \sigma_i^* w(X) = \mathbf{A}_i(X)$, expressamos a Eq. (1.24) numa forma local,

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -\mathbf{A}_i(X) g_i(t) \quad (1.25)$$

e sua solução formal com $g_i(0) = e$ é

$$g_i(\gamma(t)) = B \exp \left(- \int_0^1 \mathbf{A}_{i\mu} \frac{dx^\mu}{dt} dt \right) = \quad (1.26)$$

$$B \exp \left(- \int_{\zeta(0)}^{\zeta(t)} \mathbf{A}_{i\mu}(\zeta(t)) dx^\mu \right)$$

onde B é o operador que onderna-caminho ao longo de $\zeta(t)$. O levantamento horizontal é expressado como $\tilde{\zeta}(t) = \sigma_i(\zeta(t)) \cdot g_i(\zeta(t))$. ■

Corolário 1.1 *Seja $\tilde{\zeta}$ outro levantamento de ζ , tal que $\tilde{\zeta}(0) = \zeta(0)g$. Logo $\tilde{\zeta}(t) = \tilde{\zeta}(t)g$ para todo $t \in [0, 1]$.*

Prova. Ver [6]. ■

Exemplo 1.21 Consideremos $P(M, G) \cong M \times R$ com $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Seja $\phi : ((x, y), r) \longrightarrow u \in P$ uma trivialização local, tal que (x, y) são as coordenadas de M e r é um elemento do grupo aditivo \mathbb{R} . Seja

$$w = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} + df \quad (1.27)$$

uma conexão 1-forma.

Verifica-se que w satisfaz o axioma da conexão 1-forma. De fato, para $A^\# = A \frac{\partial}{\partial f}$, $A \in \mathbb{R}$ sendo um elemento da álgebra de Lie do grupo aditivo, temos $w(A^\#) = A$. Além disso, $R_{g^*}w = w = g^{-1}wg$, já que \mathbb{R} é abeliano. Considere $\zeta : [0, 1] \longrightarrow M$ definida por $\zeta(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Vamos construir um levantamento horizontal que passa por $((1, 0), 0)$. Considere

$$X = \frac{d}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \frac{df}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial f} \quad (1.28)$$

como o vetor tangente a $\tilde{\zeta}(t)$. Já que X é horizontal satisfaz

$$0 = w(X) = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{df}{dt} = -2\pi + \frac{df}{dt} \quad (1.29)$$

A solução é dada por $r = 2\pi t + k$, k constante. Assim, encontramos o levantamento horizontal $\tilde{\zeta}$ passando por $((1, 0), 0)$,

$$\tilde{\zeta}(t) = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), 2\pi t) \quad (1.30)$$

o qual é uma hélice sobre o círculo unitário.

De acordo com a ação de grupo (à direita ou à esquerda), f traduz para $f + g$, $g \in \mathbb{R}$. Quanto as mudanças no levantamento horizontal é

$$\tilde{\zeta}(t) = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), 2\pi t + g). \quad (1.31)$$

Considere $\zeta : [0, 1] \longrightarrow M$ uma curva. Seja u_0 um ponto, tal que, $u_0 \in \pi^{-1}(\zeta(0))$. Existe um único levantamento horizontal $\tilde{\zeta}(t)$ de $\zeta(t)$ passando por u_0 , e daí um único ponto $u_1 = \tilde{\zeta}(1) \in \pi^{-1}(\zeta(1))$. Chamamos u_1 de *transporte paralelo* de u_0 ao longo da curva

$\tilde{\zeta}$. Assim, podemos definir a aplicação $\Gamma(\tilde{\zeta}) : \pi^{-1}(\zeta(0)) \longrightarrow \pi^{-1}(\zeta(1))$, tal que $u_0 \longrightarrow u_1$. Empregando a forma local (1.26), temos

$$u_1 = \sigma_i(1) = B \exp \left(- \int_0^1 \mathbf{A}_{i\mu} \frac{dx^\mu(\zeta(t))}{dt} dt \right). \quad (1.32)$$

Pelo corolário (1.1), mostramos que $\Gamma(\tilde{\gamma})$ comuta com a ação à direita R_g . Primeiramente, note que $R_g \Gamma(\tilde{\zeta})(u_0) = u_1 g$ e $\Gamma(\tilde{\zeta}) R_g(u_0) = \Gamma(\tilde{\zeta})(u_0 g)$. Agora, veja que $\tilde{\zeta}(t)g$ é um levantamento horizontal passando por $u_0 g$ e $u_1 g$. Pela unicidade do levantamento horizontal através da $u_0 g$, temos $u_1 g = \Gamma(\tilde{\gamma})(u_0 g)$, que é, $R_g \Gamma(\tilde{\gamma})(u_0) = \Gamma(\tilde{\gamma})(u_0 g) = \Gamma(\tilde{\gamma}) R_g(u_0)$. Daí, para qualquer $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$, temos $R_g \Gamma(\tilde{\gamma}) = \Gamma(\tilde{\gamma}) R_g$.

1.6 Holonomia

Considere $P(M, G)$ como um fibrado principal e uma curva ζ cujo levantamento horizontal em $u_0 \in \pi^{-1}(\zeta(0))$ é $\tilde{\zeta}$. Vimos que a aplicação $\Gamma(\tilde{\gamma}) : \pi^{-1}(\gamma(0)) \longrightarrow \pi^{-1}(\gamma(1))$ aplica um ponto $u_0 = \tilde{\zeta}(0)$ em $u_1 = \tilde{\zeta}(1)$. Considere duas curvas $\alpha, \beta : [0, 1] \longrightarrow M$ com $\alpha(0) = \beta(0) = p_0$ e $\alpha(1) = \beta(1) = p_1$. Passando para os levantamentos horizontais $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ de α e β , respectivamente, tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = u_0$. Então $\tilde{\alpha}(1)$ não é necessariamente igual a $\tilde{\beta}(1)$. Isto mostra que se considerarmos uma curva $\zeta : [0, 1] \longrightarrow M$ sobre $p = \zeta(0) = \zeta(1)$, teremos $\tilde{\zeta}(0) \neq \tilde{\zeta}(1)$. Uma curva ζ define uma transformação $\tau_\zeta : \pi^{-1}(p) \longrightarrow \pi^{-1}(p)$ sobre a fibra. Tal definição é compatível com a ação à direita do grupo,

$$\tau_\zeta(ug) = \tau_\zeta(u)g. \quad (1.33)$$

Observe que τ_ζ não depende apenas da curva ζ , mas também da conexão.

Sejam $u \in P$ um ponto, com $\pi(u) = p$, e $C_p(M)$ o conjunto das curvas sobre p ; $C_p(M) \equiv \{\zeta; \zeta : [0, 1] \longrightarrow M \text{ e } \zeta(0) = \zeta(1) = p\}$.

O conjunto de elementos $\phi_u \equiv \{g \in G; \tau_\zeta(u) = ug, \zeta \in C_p(M)\}$ que é um subgrupo do grupo de estrutura G , é chamado o *grupo de holonomia* sobre u . As propriedades de grupo de ϕ_u podem ser verificadas como se segue:

Se α, β e $\zeta = \alpha * \beta$ são curvas sobre p , temos $\tau_\zeta = \tau_\beta \circ \tau_\alpha$, e assim

$$\tau_\zeta(u) = \tau_\beta \circ \tau_\alpha(u) = \tau_\beta(ug_\alpha) = \tau_\beta(u)g_\alpha = ug_\beta g_\alpha \quad (1.34)$$

onde $\tau_\alpha(u) = ug_\alpha$.

Isto mostra que $g_\zeta = g_\beta g_\alpha$. A curva constante $c : [0, 1] \rightarrow p$ define a transformação identidade $\tau_c : u \rightarrow u$. E a curva inversa ζ^{-1} induz a transformação $\tau_{\zeta^{-1}} = \tau_\zeta^{-1}$, logo $g_{\zeta^{-1}} = g_\zeta^{-1}$.

Na situação que estamos interessados, estamos preocupados com γ 's que são curvas em M , ou seja, $\gamma(T) = \gamma(0)$, e com uma família de Hamiltonianas $\{H_\lambda\}_{\lambda \in M}$ com mesma estrutura, ou seja, sem níveis cruzados. No caso geral $H_\lambda = H_{\gamma(t)}$ tem R autovalores distintos $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^R$. Se $\Pi_i(\lambda)$ o projetivo sobre o auto-espaço $\mathcal{H}_i(\lambda) := \text{span}\{|\Psi_i^\alpha(\lambda)\rangle\}_{\alpha=1}^{n_i}$ de \mathcal{H}_λ , tem o espectro λ -dependente da resolução $\mathcal{H}_\lambda = \sum_{i=1}^R \varepsilon_i(\lambda) \Pi_i(\lambda)$.

O vetor evolui de acordo com a dependência do tempo da equação de Schrödinger

$$i\partial_t |\Psi(t)\rangle = H_{\gamma(t)} |\Psi(t)\rangle.$$

Restringimos o mesmo para o caso no qual as curvas γ 's são adiabáticas, ou seja, $\hbar\gamma'/\gamma \ll \min_{i \neq j} |\varepsilon_j - \varepsilon_i|$. Então é conhecido que alguma $|\Psi_0\rangle \in \mathcal{H}$ será mapeada depois do período T , sobre:

$$|\Psi(T)\rangle = U(T) |\Psi_0\rangle, U(T) = \bigoplus_{l=1}^R e^{i\phi_l(T)} \Gamma_{A_l}(\gamma),$$

onde:

$$\phi_l(T) := \int_0^T \varepsilon_l(\lambda_t) d\tau$$

é a fase dinâmica e

$$\Gamma_{A_l}(\gamma) := \mathbf{P} \exp \int_\gamma A_l \in U(n_l), \quad (l = 1, \dots, R)$$

é chamada a holonomia associada com a curva γ .

Observação 1.15 *Alguma evolução quântica*

$$U(T) = \mathbf{T} \exp \left[-i \int_0^T H(t) dt \right]$$

pode ser associada com o caminho no espaço.

1.7 Classes de Chern

As classes de Chern são um tipo particular de classes características que estão associadas a fibrados vetoriais complexos. Elas são invariantes topológicos associados a fibrados vetoriais em uma variedade suave. A classe de Chern de uma variedade complexa são as classes de Chern do seu fibrado tangente.

Um caso especial e importante de classes de Chern é quando E for um fibrado linha. Então a única classe de Chern não-trivial é a primeira classe de Chern, a qual é um elemento do segundo grupo de cohomologia de X . Como é classe de Chern top, iguala-se com a classe de Euler do fibrado.

As primeiras classes de Chern volta a ser um invariante completo com a qual classifica fibrados linha complexos, no contexto topológico. Ou seja, existe uma bijeção entre as classes de homomorfismos do fibrado linha sobre X e os elementos de $H^2(X; \mathbb{Z})$, os quais associam ao fibrado linha sua primeira classe de Chern. A adição no grupo cohomologia bidimensional coincide com o produto tensorial do fibrado linha complexo.

Em geometria algébrica, essa classificação de (classes de isomorfismo) fibrados linha complexos pela primeira classe de Chern é uma aproximação grosseira com a classificação de (classes de isomorfismo) fibrado linha holomórfico por classes de equivalência linear de divisores.

Para fibrados vetoriais complexos de dimensão superior a 1, as classes de Chern não são um invariante completo.

Se trabalhássemos em uma variedade orientada de dimensão $2n$, então algum produto da classe de Chern de grau total $2n$ pode ser unido com a orientação da classe de homologia (ou "integrado sobre a variedade") para dar um inteiro, um *número de Chern* do fibrado vetorial.

Podemos definir o número de Chern em termos da classe de Chern de uma variedade da seguinte maneira: Para alguma coleção de classes de Chern tal que o seu produto "cup" tem a mesma dimensão da variedade, este produto pode ser avaliada nas classes fundamentais da variedade. O número resultante é chamado o **número de Chern** para essas combinações

de classes de Chern. O aspecto mais importante dos números de Chern é que eles são "bordism" invariante.

Por exemplo, se a variedade tem dimensão 6, existem três números de Chern linearmente independentes, dados por c_1^3 , $c_1 c_2$, e c_3 . Em geral, se a variedade tem dimensão $2n$, o número de possíveis números de Chern independentes é o número de partições de n .

O número de Chern de um fibrado tangente de um complexo (ou quase complexo) muitas vezes são chamados os *números de Chern da variedade*, e são invariantes importantes.

1.8 Integral de Volterra

Vamos agora investigar equações contendo as funções não coincidentes dentro de uma integral. Estas equações são classificadas em duas formas:

1. Se os limites de integração são fixados, chamamos a equação uma equação Fredholm; se um limite é variável, é uma equação de Volterra.
2. Se a função não coincidente aparece apenas sob o sinal da integral, vamos chamá-la de "primeiro tipo". Se aparece tanto dentro quanto fora da integral, chamaremos de "segundo tipo".

Definição 1.30 *Simbolicamente, temos:*

Equação Fredholm de primeiro tipo

$$f(x) = \int_a^b \mathbf{K}(x, t) \varphi(t) dt.$$

Equação Fredholm de segundo tipo

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \mathbf{K}(x, t) \varphi(t) dt.$$

Equação de Volterra de primeiro tipo

$$f(x) = \int_a^x \mathbf{K}(x, t) \varphi(t) dt.$$

Equação de Volterra de segundo tipo

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x \mathbf{K}(x, t) \varphi(t) dt.$$

Em todos os quatro casos $\varphi(t)$ é uma função não coincidente. $\mathbf{K}(x, t)$, o qual chamamos o kernel, e $f(x)$ são assumidos conhecidos. Quando $f(x) = 0$, a equação é dita homogênea.

Capítulo 2

Apresentação holonômica da fase geométrica via fibrados

Neste capítulo, apresentamos duas abordagens da fase de Berry adiabática e mostramos a conexão entre elas que é feita via teoria dos fibrados e também apresentamos como um exemplo, a fase de Berry para o caso não-adiabático usando holonomia.

2.1 Fase de Berry

A *fase de Berry* (ou fase geométrica) é um conceito geométrico que está ligado ao transporte paralelo em uma superfície curva. Se tivermos um vetor que foi deslocado paralelamente ao longo de uma curva fechada sobre a superfície de uma esfera, por exemplo, este vetor ao final formará, com a direção inicial, um ângulo característico da curvatura da superfície.

Analogamente à superfície, em mecânica quântica consideramos os estados puros que são descritos por raios. E diremos que duas funções de onda pertencem ao mesmo raio quando estas diferenciam-se somente por uma fase, que no caso das funções de onda, a fase corresponde as direções dos vetores sobre a superfície. Quando uma fase sofrer o transporte paralelo ao longo de uma curva fechada no espaço dos estados da mecânica quântica, ao final

ela pode diferir do valor inicial. Chamamos essa diferença entre o valor final e o valor inicial de **fase de Berry**.

Durante muito tempo achava-se que esta fase não tinha muita importância e Berry fazendo cálculo de forma global, ou seja usando holonomia, mostrou que essas fases trazem informações importantes.

O transporte paralelo no espaço dos estados da Mecânica Quântica é dado pela seguinte equação adiabática:

$$\langle \psi(t), \dot{\psi}(t) \rangle = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2.1)$$

Vamos considerar o operador Hamiltoniano $H(X)$ de um sistema quântico dependendo de k parâmetros $X = (X_1, \dots, X_k)$. Seja $|n; X\rangle$ o n -ésimo autovetor normalizado de $H(X)$,

$$H(X) |n; X\rangle = E_n(X) |n; X\rangle \quad (2.2)$$

Assumimos $\langle n; X | n; X \rangle = 1$ e E_n isolado e não degenerado. Vamos supor que X descreve uma curva fechada no espaço de parâmetro, ou seja, $X = X(t)$, com $X(0) = X(1)$. Depois de fazer o transporte ao longo de uma curva fechada β no espaço de parâmetro M , o estado ganha um fator de fase extra.

$$\eta_n = i \oint_{\beta} \langle n, X | \frac{\partial}{\partial X^n} | n; X \rangle dX^n \quad (2.3)$$

conhecido como fase de Berry.

Simon, em 1983, foi quem primeiro reconheceu o grande significado geométrico que estava por trás da fase de Berry, observando que a origem da fase de Berry está atribuída a holonomia no espaço de parâmetro. Ele mostrou que a fase de Berry era precisamente a holonomia no fibrado linha hermitiano, antes mesmo do relatório de Berry ter sido publicado. Berry, por sua vez, foi quem demonstrou que a evolução cíclica e adiabática de um sistema quântico gera um fator de fase global composto pela soma entre um termo dinâmico e outro geométrico, e esta ficou conhecida como a fase de Berry. A contribuição dinâmica é feita dependendo da velocidade com o qual o sistema tem sua evolução, enquanto a contribuição geométrica é dependente do caminho descrito pela evolução no espaço de

parâmetros. A estrutura da fase de Berry (mais especificamente, a feita por Simon) foi explorada e generalizada em diferentes contextos por diversos autores. A generalização mais revolucionária da fase de Berry, foi feita por Aharonov e Anandan, que considerava as fases geométricas em evoluções quânticas cíclicas unitárias arbitrárias.

Trataremos aqui, de duas interpretações matemáticas da fase de Berry. A primeira que foi feita por Simon (e Berry) e a segunda por Aharonov e Anandan, e por comodidade iremos nos referir a elas por "BS" e "AA", respectivamente. Não é difícil perceber que elas têm estrutura geométrica diferentes, pois na primeira temos um fibrado vetorial cujo espaço base é a variedade de parâmetro da Hamiltoniana $H(X^1, \dots, X^N) =: H(X)$, a fibra é o autoespaço $V_m(X)$ de $H(X)$ e o grupo de estrutura é $GL(d_m, \mathbb{C})$, onde d_m é a dimensão de $V_m(X)$. Enquanto no segundo temos um fibrado principal cujo o espaço é o espaço vetorial de Hilbert sem o vetor nulo, cujo espaço base é o espaço projetivo de Hilbert e o grupo de estrutura é $GL(1, \mathbb{C})$. Enquanto que no primeiro o fibrado é correspondido a apenas uma Hamiltoniana $H(X)$ dependente do parâmetro, no fibrado de AA é correspondido a um número infinito de Hamiltonianas.

Para entender um pouco mais essa diferença, vamos analisar separadamente essas duas interpretações.

2.2 A abordagem de Berry-Simon (BS)

Aqui construiremos um fibrado linha L sobre o espaço de parâmetros M do sistema. De onde teremos que L é dotado de uma conexão particular que reproduzirá a fase de Berry como holonomia de um caminho fechado no espaço de parâmetros M .

Vamos considerar um sistema de mecânica quântica no qual a evolução é controlada por uma Hamiltoniana dependente do parâmetro $x = x(t)$

$$H = H(x), \quad x \in M$$

Assumimos que para cada $x \in M$, o espectro de $H(x)$ é discreto e que existem níveis não cruzados. Assim, podemos escolher (localmente) uma base ortonormal de autovetores

$\{|n; x\rangle\}$. Podemos dizer que os autovetores $|n; x\rangle$ são suaves e tem valores simples, vistas como funções de x . E por serem autovetores, eles obviamente satisfazem a equação

$$H(x) |n; x\rangle = E_n(x) |n; x\rangle \quad (2.4)$$

onde nota-se que $E_n(x)$ são os autovalores que correspondem a energia. Como interpretamos o tempo t como um parâmetro da curva, logo a Hamiltoniana é explicitamente dependente do tempo

$$\begin{aligned} C : [0, T] &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto x(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

daí, podemos fixar

$$H(t) := H(x(t)), \quad t \in [0, T] \quad (2.6)$$

Assim, para cada curva fechada C em M teremos uma Hamiltoniana periódica, definida pela curva C e com período T . Aqui nos preocupamos em discutir apenas a evolução do estado cíclico não degenerado com período T . Antes de continuarmos desenvolvendo a idéia da fase de Berry de BS, vamos esclarecer melhor com o que estamos trabalhando.

Chamamos de *estado quântico* $|\psi_n(t)\rangle$ qualquer estado (elemento do espaço de Hilbert \mathcal{H}) possível em que um sistema mecânico quântico possa se encontrar. Um estado quântico plenamente especificado pode ser descrito por um vetor de estado, por uma função de onda ou por um conjunto completo de números quânticos para um dado sistema. Diremos que um estado de um sistema mecânico quântico cujas dinâmicas são governadas pela equação de Schrödinger

$$H(t) |\psi_n(t)\rangle = i \frac{d}{dt} |\psi_n(t)\rangle \quad (2.7)$$

é *cíclico* com um período T , se ele é um auto-estado do operador de evolução temporal $U(T) := \mathcal{T} \exp[-i \int_0^T H(t) dt]$. Aqui \mathcal{T} é o operador de ordenação-temporal. Um vetor de estado inicial associado $\psi(0)$ então satisfaz

$$\psi(T) = U(T) \psi(0) = e^{i\alpha(T)} \psi(0) \quad (2.8)$$

onde $\alpha(T) \in \mathbb{C}$. Se a Hamiltoniana é auto-adjunta, então $\alpha(T) \in \mathbb{R}$ e consequentemente $\psi(\tau)$ e $\psi(0)$ diferem em fase. Em geral $\alpha(T)$ pode ser expressado como a soma de uma parte

geométrica e uma parte dinâmica. Esta decomposição usa a estrutura de produto interno do espaço de Hilbert.

Pela aproximação adiabática o auto-estado inicial sofre evoluções cíclicas. Se $|\psi_n(t)\rangle$ denota o vetor estado desenvolvido, ou seja a solução da equação de Schrödinger:

$$H(t) |\psi_n(t)\rangle = i \frac{d}{dt} |\psi_n(t)\rangle \quad (2.9)$$

$$|\psi_n(0)\rangle = |n; x(0)\rangle \quad (2.10)$$

então

$$|\psi_n(T)\rangle \langle \psi_n(T)| \simeq |\psi_n(0)\rangle \langle \psi_n(0)| \quad (2.11)$$

Depois de completar um ciclo, o vetor estado passa a ter um fator fase que, com já foi dito, consiste de uma parte dinâmica ($e^{i\omega}$) e uma geométrica ($e^{i\gamma}$)

$$|\psi_n(T)\rangle = e^{i(\omega+\gamma)} |\psi_n(0)\rangle \quad (2.12)$$

onde

$$\begin{aligned} \omega &:= - \int_0^T E_n(x(t)) dt \\ e^{i\gamma} &:= \exp \oint_C A \end{aligned} \quad (2.13)$$

que é a holonomia discutida no capítulo 1.

$$A := - \langle n; x | d | n; x \rangle = - \langle n; x | \frac{\partial}{\partial x^\mu} | n; x \rangle dx^\mu \quad (2.14)$$

A 1-forma A é conhecida como a conexão de 1-forma de Berry.

Em [13], Simon mostra que A pode ser interpretada como uma conexão 1-forma em um (espectro) fibrado linha L sobre M

$$\mathbb{C} \rightarrow L \rightarrow M \quad (2.15)$$

os quais as fibras são obtidas pelos auto-estados de energia no espaço de Hilbert \mathcal{H} .

$$L_x := \{z | n; x\}; z \in \mathbb{C}\} \quad (2.16)$$

Assim no enfoque de BS, a fase de Berry é identificada com a holonomia do caminho $C \subset M$ definido pela conexão 1-forma A da Eq. (2.14)

2.3 A abordagem de Aharonov-Anadan (AA)

Aqui vamos considerar um fibrado linha complexo E , ou de modo opcional, o fibrado principal $U(1)$ associado, sobre o espaço projetivo de Hilbert $\mathcal{P}(\mathcal{H}) = \mathbb{C}P^N$, $N := \dim(\mathcal{H}) - 1$.

$$\mathbb{C} \rightarrow E \rightarrow \mathbb{C}P^N = \mathcal{P}(\mathcal{H}) \quad (2.17)$$

Neste caso temos que as fibras nos pontos $\eta = |\eta\rangle\langle\eta|$, $\eta \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ serão os raios correspondentes no espaço de Hilbert \mathcal{H} .

$$E_\eta := \{z|\eta\rangle; z \in \mathbb{C}\} \quad (2.18)$$

A conexão 1-forma A de AA pode ser então vista como uma conexão 1-forma de E . A fase geométrica é identificada com a holonomia correspondete aos caminhos

$$\mathcal{C} : [0, T] \ni t \rightarrow \eta(t) \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \quad (2.19)$$

em $\mathcal{P}(\mathcal{H})$. Na evolução adiabática aproximamos $\eta(t)$ por $\psi_n(t)$ da Eq. (2.4).

Vamos supor que a Hamiltoniana de um sistema quântico aberto $H(t)$ não é necessariamente Hermitiana e consideremos a evolução do sistema controlada pela equação de Schrödinger como na Eq. (2.7).

Agora definamos

$$\phi(t) = \psi(t) \exp \left\{ i \int_0^t \frac{\langle \psi(\tau) | H(\tau) | \psi(\tau) \rangle}{\langle \psi(\tau) | \psi(\tau) \rangle} d\tau \right\} \quad (2.20)$$

Obtemos

$$i \frac{d}{dt} \phi(t) = H(t) \phi(t) - \frac{\langle \phi(t) | H(t) | \phi(t) \rangle}{\langle \phi(t) | \phi(t) \rangle} \phi(t) \quad (2.21)$$

e

$$\left\langle \phi(t) \left| \frac{d}{dt} \phi(t) \right. \right\rangle = 0, \text{ ou } \langle \phi(t) | d\phi(t) \rangle = 0 \quad (2.22)$$

Da última equação notamos que $\langle \phi(t) | \phi(t) \rangle$ é uma constante, independente de $H(t)$ ser hermitiana ou não. Em outras palavras, o vetor estado $\phi(t)$ obtido de $\psi(t)$ tirando o fator de fase dinâmico sofre uma transformação unitária durante a evolução. Sabe-se que fase

geométrica = fase total – fase dinâmica. Conseqüentemente a fase geométrica definida sempre é real. Mostramos que a fase geométrica definida pela Eq. (2.21) é realmente geométrica de acordo com o sentido de A-A.

Seja \mathcal{H}^* o subconjunto do espaço vetorial de Hilbert que consiste em todos os vetores não-nulos, e, \sim uma relação de equivalência em \mathcal{H}^* , tal que

$$\psi \sim \phi \Leftrightarrow \psi = c\phi,$$

para algum número complexo c .

O espaço quociente $\mathcal{H}^*/\sim := \mathcal{R}$ é o espaço projetivo de Hilbert. Denotamos por $[\psi]$ a classe de equivalência contendo ψ .

Temos a projeção canônica $\pi : \mathcal{H}^* \longrightarrow \mathcal{R}, \psi \mapsto [\psi]$. Agora seja $\{\mathcal{H}^*, \mathcal{R}, \pi, GL(1, \mathbb{C})\}$ um fibrado principal, com o espaço total \mathcal{H}^* , o espaço base \mathcal{R} , e o grupo de estrutura $GL(1, \mathbb{C})$. A conexão é determinada pela Eq. (2.22). Consideremos uma evolução cíclica $\phi(t)$ onde $\phi(\tau) = \phi(0) e^{i\beta}$. Tomemos $\Phi(t)$ tal que, $\Phi(\tau) = \Phi(0)$, e designando um representante de $[\phi(t)]$, temos

$$\phi(t) = \Phi(t)e^{i\alpha(t)} \tag{2.23}$$

daí podemos encontrar β . Da Eq. (2.23), temos que:

$$\phi(\tau) = \Phi(\tau)e^{i\alpha(\tau)} \quad \text{e} \quad \phi(0) = \Phi(0)e^{i\alpha(0)} \tag{2.24}$$

Como $\Phi(\tau) = \Phi(0)$ e $\phi(\tau) = \phi(0) e^{i\beta}$, substituindo em (2.24), teremos

$$\phi(0) e^{i\beta} = \Phi(0)e^{i\alpha(\tau)} \quad \text{e} \quad \phi(0) = \Phi(0)e^{i\alpha(0)}$$

Daí

$$\underbrace{\Phi(0)e^{i\alpha(0)}}_{\phi(0)} e^{i\beta} = \Phi(0)e^{i\alpha(\tau)}$$

$$e^{i\beta} = \frac{e^{i\alpha(\tau)}}{e^{i\alpha(0)}}$$

$$e^{i\beta} = e^{i[\alpha(\tau)-\alpha(0)]}$$

Portanto

$$\beta = \alpha(\tau) - \alpha(0)$$

Obtemos

$$\beta = i \int_0^\tau \langle \Phi(t) \left| \frac{d}{dt} \Phi(t) \right\rangle dt = i \oint \langle \Phi(t) | d\Phi(t) \rangle \quad (2.25)$$

Daí a fase geométrica β de A-A depende apenas do caminho fechado em \mathbb{R} e não tem nada haver com a duração. Em [15], porém, a fase dinâmica está definida como $-\int_0^t h(t') dt'$, onde

$$h(t') = \langle \psi(t') | \psi(t') \rangle^{-1} \operatorname{Re} \langle \psi(t') | H(t') | \psi(t') \rangle$$

A fase geométrica de A-A definida em [15] seria

$$i \oint \langle \Phi(t) | d\Phi(t) \rangle - i \operatorname{Im} \int_0^\tau \frac{\langle \Phi(t) | H(t) | \Phi(t) \rangle}{\langle \Phi(t) | \Phi(t) \rangle} dt$$

Como o segundo termo depende de $H(t)$, logo não é geométrico dentro do sentido de A-A. Assim a única generalização correta da fase dinâmica de A-A (conseqüentemente geométrica) para evolução não-unitária está definida pela Eq. (2.20). A fase geométrica de A-A sempre é real. Porém a fase geométrica de Berry pode ser complexa para evolução não-unitária. Então é necessário ver se a fase de Berry é o limite adiabático da fase de A-A ou não.

2.4 Comentários

Aqui duas interpretações da fase de Berry foram apresentadas e são unidas via teoria universal de fibrados. É mostrado em [11] e [12] que E (com $N \rightarrow \infty$) é de fato a classificação universal de fibrado linha, e como um resultado da classificação do teorema para fibrados linha complexos, todo fibrado pulback de E , isto é, existe uma aplicação suave,

$$f : M \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H}) \quad (2.26)$$

tal que

$$L = f^*(E) \quad (2.27)$$

Para o caso adiabático a função f é simplesmente dada pela Hamiltoniana, ou seja

$$f(x) := |n; x\rangle \langle n; x| \quad (2.28)$$

Além disso, o fato de que a fase é obtida por A ou \mathcal{A} é uma consequência da teoria das conexões universal. De fato, a conexão \mathcal{A} de AA é exatamente a conexão universal, a qual produz todas as conexões em todos os fibrados linhas complexos com conexão pullback. Em particular, a conexão de Berry em L é dada por

$$A = f^*(\mathcal{A}) \quad (2.29)$$

Exemplo 2.1 *Vamos considerar um dipolo magnético μ com campo magnético $B(x(t))$. A Hamiltoniana do sistema é dada por*

$$H(x) = -\mu \cdot B(x) = b\mathbf{x} \cdot \mathbf{J} \quad (2.30)$$

onde $b = Bg\mu/2mc$ é a frequência de Larmor, \mathbf{x} é a direção do campo magnético e $\mathbf{J} = (J_i)$, $i = 1, 2, 3$, são os geradores de rotações, $J_i \in \mathfrak{so}(3) = \mathfrak{su}(2)$. O espaço de parâmetros é S^2 e os seguintes caminhos circulares

$$C : [0, T] \ni t \rightarrow x(t) = (\theta, \varphi) = (cte, wt) \in S^2 \quad (2.31)$$

são os caminhos fechados considerados. Onde $x \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ e (θ, φ) são as coordenadas esféricas com respeito a base de coordenadas cartesianas canônica $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ ou $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ de \mathbb{R}^3 .

Neste caso, a equação de Schrödinger tem uma solução exata. Podemos escrever a Hamiltoniana H na seguinte forma

$$H = U^\dagger H_0 U \quad (2.32)$$

onde

$$U \equiv \exp((it\omega/\hbar) J_3)$$

$$H_0 \equiv bx_0 \cdot J = b(\cos\theta J_3 + \sin\theta J_1)$$

$$x_0 \equiv (\theta, \varphi = 0)$$

e J é o operador momento angular. Note que de (2.31) temos que H_0 é independente do tempo. E de $U \equiv \exp((i\omega/\hbar) J_3)$, temos que $U^\dagger \equiv -\exp((i\omega/\hbar) J_3)$.

Agora, seja $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$. Daí temos $|\psi\rangle = U^\dagger|\psi'\rangle$ e substituindo na equação de Schrödinger teremos

$$\begin{aligned}
i\hbar\partial_t|\psi\rangle &= H|\psi\rangle & (2.33) \\
i\hbar\partial_t(U^\dagger|\psi'\rangle) &= H(U^\dagger|\psi'\rangle) \\
i\hbar U\partial_t(U^\dagger|\psi'\rangle) &= UH(U^\dagger|\psi'\rangle) \\
i\hbar U(\partial_t U^\dagger(|\psi'\rangle) + U^\dagger\partial_t|\psi'\rangle) &= UH(U^\dagger|\psi'\rangle) \\
i\hbar U\partial_t U^\dagger(|\psi'\rangle) + i\hbar\underbrace{UU^\dagger}_1\partial_t|\psi'\rangle &= UHU^\dagger(|\psi'\rangle) \\
i\hbar\partial_t|\psi'\rangle &= \underbrace{(UHU^\dagger - i\hbar U\partial_t U^\dagger)}_{H'_0}|\psi'\rangle \\
&= H'_0|\psi'\rangle & (2.34)
\end{aligned}$$

de $H = U^\dagger H_0 U$, temos $H_0 = U^\dagger H U$. E como H'_0 é definido por

$$H'_0 = U H U^\dagger - i\hbar U \partial_t U^\dagger$$

encontramos

$$H'_0 = H_0 - i\hbar U \partial_t U^\dagger$$

como $U = e^{(i\omega/\hbar)J_3}$, logo $U^\dagger = e^{-(i\omega/\hbar)J_3}$. Daí

$$\partial_t U^\dagger = -\frac{i\omega}{\hbar} J_3 U^\dagger$$

assim

$$H'_0 = H_0 - i\hbar\underbrace{UU^\dagger}_1\left(-\frac{i\omega}{\hbar}J_3\right)$$

ou seja

$$\begin{aligned}
H'_0 &= H_0 - \omega J_3 \\
H'_0 &= b \cos \theta J_3 + b \sin \theta J_1 - b \frac{\omega}{b} J_3 \\
&= b \left[\left(\cos \theta - \frac{\omega}{b} \right) J_3 + \sin \theta J_1 \right]
\end{aligned}$$

Novamente por (2.31) teremos que H'_0 é também independente do tempo. Integrando a parte final da Eq.(2.33) teremos

$$\left| \psi' (t) \right\rangle = e^{-(it/\hbar)H'_0} \left| \psi' (0) \right\rangle \quad (2.35)$$

Substituindo em $|\psi\rangle = U^\dagger |\psi'\rangle$ teremos

$$|\psi (t)\rangle = e^{-(it\omega/\hbar)J_3} e^{-(it/\hbar)H'_0} |\psi (0)\rangle. \quad (2.36)$$

A seguir, mostraremos que os vetores estados cíclicos são autovetores de H'_0 .

Seja $|\tilde{\psi}(0)\rangle$ um vetor estado cíclico exato, ou seja,

$$|\tilde{\psi}(T)\rangle = e^{i\alpha} |\tilde{\psi}(0)\rangle \quad (2.37)$$

onde $T \equiv \frac{2\pi}{\omega}$ é o período de um ciclo e $\alpha \in \mathbb{R}$. Substituindo na Eq. (2.36), temos

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(T)\rangle &= e^{-(iT\omega/\hbar)J_3} e^{-(iT/\hbar)H'_0} |\tilde{\psi}(0)\rangle \\ e^{i\alpha} |\tilde{\psi}(0)\rangle &= e^{-(i\frac{2\pi}{\omega}\omega/\hbar)J_3} e^{-(iT/\hbar)H'_0} |\tilde{\psi}(0)\rangle \end{aligned}$$

ou

$$e^{-(2\pi i/\hbar)J_3} e^{-(iT/\hbar)H'_0} |\tilde{\psi}(0)\rangle = e^{i\alpha} |\tilde{\psi}(0)\rangle \quad (2.38)$$

é a solução.

Da Eq.(2.38) notamos que $|\tilde{\psi}(0)\rangle$ é um autovetor do operador

$$\exp\left(- (2\pi i/\hbar) J_3\right) \exp\left(- (iT/\hbar) H'_0\right).$$

Porém, os dois operadores $\exp\left(- (2\pi i/\hbar) J_3\right)$ e $\exp\left(- (iT/\hbar) H'_0\right)$ comutam, logo $|\tilde{\psi}(0)\rangle$ é autovetor simultâneo destes dois operadores e portanto de H'_0 . Além disso, como H_0 e H'_0 não comutam, logo $|\tilde{\psi}(0)\rangle$ não é um autovetor da energia.

Fixando x como um eixo fixo podemos, então, promover a construção de Simon para o caso não-adiabático, a saber: definimos uma conexão de Berry análoga não-adiabática e identificamos a fase não adiabática com sua holonomia. Isto pode ser feito, em geral, a menos que a frequência de precisão ω , fique igual a b .

Seja $A = ik(1 - \cos \theta) d\varphi$ a conexão, daí

$$\Omega = dA = ik(1 - \cos \theta) d\theta \wedge d\varphi$$

$$\tilde{f} = f \circ F, \text{ onde } F(x) = \tilde{x} = (\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$$

No hemisfério norte a conexão não adiabática \tilde{A} é dada por

$$\tilde{A} = ik(1 - \cos \tilde{\theta}) d\phi \quad (2.39)$$

$$\tilde{\Omega} = d\tilde{A} = ik \sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta} \wedge d\tilde{\varphi} \quad (2.40)$$

onde k designa um autovalor de $H(x)$ (alternativamente um autovalor de J_3), e

$$\cos \tilde{\theta} := \frac{\cos \theta - v}{\sqrt{v^2 - 2v \cos \theta + 1}} \quad (2.41)$$

$$v := \frac{\omega}{b} \quad (2.42)$$

ou

$$\cos \tilde{\theta} := \frac{\cos \theta - \frac{w}{b}}{\sqrt{\frac{w^2}{b^2} - 2\frac{w}{b} \cos \theta + 1}}$$

e

$$\sin \tilde{\theta} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\frac{w^2}{b^2} - 2\frac{w}{b} \cos \theta + 1}}$$

onde $\tilde{\varphi} = \varphi$.

Aqui (θ, ϕ) são as coordenadas esféricas ($\theta \in [0, \pi)$), e $v = \frac{\omega}{b}$ é o "parâmetro de lentidão". O limite adiabático é caracterizado por $v \rightarrow 0$. Neste limite \tilde{A} aproxima-se da conexão de Berry, pois $\cos \tilde{\theta} \rightarrow \cos \theta$, daí

$$A = ik(1 - \cos \theta) d\phi \quad (2.43)$$

Note que ao contrário do caso adiabático ($v \rightarrow 0$) o estado cíclico no caso não adiabático mais geral, não pode ser aproximado pelos estados próprios da Hamiltoniana inicial, e eles não compartilham de auto estados simultâneos.

A topologia do fibrado linha em S^2 é determinado por seus primeiros números de Chern

$$c_l := \frac{i}{2\pi} \int_{S^2} \Omega, \quad (2.44)$$

onde Ω é a 2-forma curvatura. Para fibrados linha a curvatura 2-forma é obtida pela conexão 1-forma, tomando suas derivadas exteriores ordinárias. Tomando $\Omega = d\tilde{A}$ temos

$$c_l = \frac{i}{2\pi} \int_{S^2} d\tilde{A}$$

como $\tilde{A} = ik(1 - \cos\tilde{\theta})d\phi$, notemos que $d\tilde{A} = ikdS^2$

$$c_l = \frac{i}{2\pi} \int_{S^2} ikdS^2$$

$$c_l = \frac{-k}{2\pi} \int_{S^2} dS^2$$

como $\int_{S^2} dS^2 = \text{área da esfera} = 4\pi$, obtemos

$$c_l = -2k, \text{ para } v < 1 \quad (2.45)$$

Isto é extraordinário, já que o fato de que c_l é um inteiro corresponde com o fato de que k é uma semi-inteiro.

A eq.(2.45) pode também ser vista como um exemplo de uma quantização topológica do momento angular. Na linguagem de monopólio magnético, os quais são relevantes para o caso adiabático, $k = -\frac{c_l}{2}$ corresponde para o produto dos campos elétricos e magnéticos.

Capítulo 3

O teorema de Borel-Weil-Bott e o fibrado linha de Berry-Simon

No capítulo anterior, vimos que as fases de Berry adiabática e não adiabática tinham $k = -c_l/2$, onde o número de Chern c_l é um inteiro, que é um resultado de topologia algébrica, e k um semi-inteiro, é um resultado de teoria dos grupos.

Vamos estabelecer a relação entre a fase de Berry adiabática e o teorema de Borel-Weil-Bott, que é um resultado de teoria de grupos, em particular de representação de grupos.

Uma prática comum em matemática é estudar propriedades de uma certa classe de objetos, observando os sub-objetos nos quais tais propriedades são conhecidas. Na teoria de representação esta situação é aplicada no caso de representação de grupos compactos, restringindo ao toro maximal, onde representações de grupos redutíveis lineares não compactos são estudadas por restrição a subgrupos compactos maximais.

O famoso teorema de Borel-Weil-Bott constrói todas as representações irredutíveis de dimensão finita de grupos de Lie compactos semi-simples pela irredutibilidade no seu toro maximal. Este teorema é muito importante, visto que é um dos melhores resultados matemáticos conhecido que une a topologia algébrica e a teoria de grupos.

Antes de enunciarmos o teorema de Borel-Weil-Bott iremos apresentar alguns conceitos matemáticos e algumas propriedades, que faz-se necessário para podermos trabalhar no

teorema.

3.1 Definições e propriedades

3.1.1 Pesos, raízes e o grupo de Weyl

Definimos, primeiramente, o reticulado peso Λ da seguinte forma

$$\Lambda := \{\lambda \in i\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*; \langle \lambda, L \rangle \subset 2\pi i\mathbb{Z}\} \longrightarrow \hat{T}_{\mathbb{R}}, \quad \Lambda \ni \lambda \longmapsto e^\lambda \in \hat{T}_{\mathbb{R}},$$

com $e^\lambda : T_{\mathbb{R}} \rightarrow \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Onde, $\hat{T}_{\mathbb{R}}$ denota o grupo de homomorfismos de $T_{\mathbb{R}}$ para o círculo unitário $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Nesta definição, $\Lambda \subset i\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$, exceto para o fator $2\pi i$, é o reticulado dual do reticulado unidade $L \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$.

Definição 3.1 (peso) Chamaremos de **peso**, uma representação λ que seja uma representação irredutível de T .

Observação 3.1 Para alguma representação π de G , o espaço peso correspondente a um determinado peso λ será

$$V^\lambda := \{v \in V; \pi(t)v = e^\lambda(t)v, \forall t \in T_{\mathbb{R}}\} = \{v \in V; \pi(\xi)v = \langle \lambda, \xi \rangle v, \forall \xi \in \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}\}; \text{ com } V^\lambda \neq 0$$

onde $T_{\mathbb{R}}$ denota um toro maximal e $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ sua álgebra de Lie. Chamaremos de multiplicidade do peso λ a $\dim V^\lambda$.

Definição 3.2 Um peso $\lambda \in i\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$ é dito dominante se $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$, para todo $\alpha \in \Phi^+$, e regular se $\langle \lambda, \alpha \rangle \neq 0$, para todo $\alpha \in \Phi$.

Existem diversas maneiras de etiquetar pesos explicitamente e podemos então, fazer em termos ou do grupo $T_{\mathbb{R}}$ ou da álgebra de Lie $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$.

Definição 3.3 (raiz) As **raízes** de \mathfrak{g} são os pesos não-nulos da representação adjunta no espaço vetorial real. Equivalentemente, as raízes são os elementos não-nulos de $\alpha \in \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$, tendo valores inteiros sobre o reticulado inteiro.

Denotaremos por $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ = conjunto de todas as raízes, e nos referimos a Φ como o sistema de raízes.

Teremos a decomposição do espaço de raízes de \mathfrak{g} relativa à ação de $T_{\mathbb{R}}$, ou equivalentemente, relativa a ação de \mathfrak{t} .

Observação 3.2 É importante saber que $\alpha \in \Phi \implies \dim \mathfrak{g}^{\alpha} = 1$, ou seja todas as raízes tem multiplicidade 1.

Definição 3.4 (grupo de Weyl) Dado um toro maximal T em um grupo de Lie compacto e conexo G , o normalizador de T é o subgrupo

$$N(T) = \{g \in G; gT = Tg\} = \{g \in G; gTg^{-1} = T\}$$

T é um subgrupo normal de $N(T)$ e o grupo quociente

$$W(G, T) = N(T) / T$$

é chamado o **grupo de Weyl** de G .

Assim, para cada elemento $t \in T$, consideraremos, em particular, o normalizador $N(t)$ desse elemento, e não apenas o normalizador $N(T)$ de seu toro. O normalizador $N(t)$ terá dimensões diferentes para elementos diferentes.

Definição 3.5 Para cada $t \in T$, vamos definir o normalizador $N(t)$ de t como

$$N(t) = \{g \in G; gtg^{-1} = t\}$$

e teremos que t é dito um elemento:

- **regular** de T , se $\dim N(t) = \dim T$;
- **singular** de T , se $\dim N(t) > \dim T$.

Exemplo 3.1 Consideremos $G = SU(2)$ e podemos escolher $T = U(1)$ o subgrupo de matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

O espaço G/T é, neste caso, $S^2 = \mathbb{C}P^1$. A aplicação

$$SU(2) = S^3 \rightarrow SU(2)/U(1) = S^2$$

é o chamado fibrado de Hopf.

O normalizador $N(T)$ de T consiste de duas classes distintas de matrizes

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

Então o grupo de Weyl de $SU(2)$ é o grupo de dois elementos, com representantes em $N(T)$ dados por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

O elemento não-trivial do grupo de Weyl age permutando $e^{i\theta}$ e $e^{-i\theta}$. Os elementos regulares de T são os elementos tais que $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$. Enquanto que para os dois elementos de T onde $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ temos que esses são singulares, pois, é claro que seus normalizadores são todo o grupo.

3.1.2 Homologia e Cohomologia

Homologia consiste na atribuição de uma sequência de grupos a um espaço topológico.

Cohomologia em topologia algébrica, é um termo geral para uma sequência de grupos abelianos definidos de uma cadeia de complexos. Ou seja, a cohomologia é definida como o estudo abstrato de cocadeias, cociclos e co-limites. A cohomologia pode ser vista como um método para atribuir invariantes algébricos a um espaço topológico que possui uma estrutura algébrica mais refinada do que a da homologia. A cohomologia emerge da dualização

algébrica da construção da homologia. Numa linguagem menos abstrata, cocadeias num sentido fundamental devem atribuir "quantidades" às cadeias da teoria homológica.

Desde seu início na topologia, esta idéia tornou-se um método importante na matemática da segunda metade do século XX; da idéia inicial de homologia como uma relação topologicamente invariante de cadeias, a gama de aplicações das teorias de homologia e cohomologia espalhou-se pela geometria e álgebra abstrata. A terminologia tende a mascarar o fato de que em muitas aplicações, cohomologia, uma teoria contravariante, é mais natural do que a homologia. Num nível elementar, isso tem a ver com funções e pullbacks em situações geométricas: dados os espaços X e Y , e algum tipo de função F em Y , para qualquer mapa $f : X \rightarrow Y$, a composição com f cria uma função $F \circ f$ em X . Grupos cohomológicos freqüentemente possuem também um produto natural, a medida produto, a qual lhes dá uma estrutura de anel.

Afim de definir a cohomologia de um grupo topológico G , temos antes que introduzir o conceito de um espaço de classificação. O espaço de classificação BG é o espaço base EG de um fibrado principal G , que é chamado fibrado universal, o qual tem as seguintes propriedades fundamentais: qualquer G fibrado E sobre uma variedade M permite uma aplicação do fibrado sobre o fibrado universal e quaisquer dois desses morfismos são suavemente homotópicos. Escrevemos

$$\gamma : M \rightarrow BG \tag{3.1}$$

para a aplicação induzida das variedades bases, que chamamos mapa de classificação. A topologia do fibrado E é totalmente determinada pela classe de homotopy da aplicação classificado γ . Ou seja, as diferentes componentes do espaço $Map(M; BG)$ correspondem a diferentes fibrados E sobre M . Para isto pode ser mostrado que a homotopia BG é determinada unicamente exigindo que EG seja contrátil. Quer dizer, qualquer espaço contrátil com uma ação livre de G é uma realização de EG . Em geral o espaço classificado BG de um grupo compacto é um espaço dedimensional infinita, como por exemplo: $B\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^\infty$, $BU(1) = \mathbb{C}P^\infty$ e $BSU(2) = HP^\infty$. Notemos que, para nossa classe de grupos de Lie, BG será um fibrado sobre $B\Gamma$ com fibra BG_0 .

O grupo de cohomologia de um grupo - em detrimento de sua cohomologia como espaço topológico - pode agora ser definida como a cohomologia dos espaços classificados associados BG . Os elementos em $H^*(BG; \mathbb{Z})$ também são chamados *classes de característica universal*, desde que sob o pullback γ^* eles dêem origem as classes de cohomologia em $H^*(M; \mathbb{Z})$ que depende apenas da topologia do fibrado E .

Para um grupo de Lie compacto temos a propriedade muito útil, devido à Borel, que para coeficientes reais todas as cohomologias ímpares desaparecem:

$$H^{ímpar}(BG; \mathbb{R}) = 0 \quad (3.2)$$

Assim a cohomologia (e homologia) ímpar consiste completamente de torção. Para grupos finitos temos resultado mais fortes: toda cohomologia é finita se $H^*(BG; \mathbb{R}) = 0$. Com o uso da sequência exata $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow R \rightarrow R/\mathbb{Z} \rightarrow 0$ isto implica para G finito o isomorfismo

$$H^k(BG; \mathbb{Z}) \cong H^{k-1}(BG; R/\mathbb{Z}). \quad (3.3)$$

Para pares, a cohomologia real existe um importante isomorfismo devido à Weil:

$$H^*(BG; \mathbb{R}) = I(G). \quad (3.4)$$

Aqui $I(G)$ é o anel de polinômios em $Lie(G)$ os quais são invariantes sobre a ação adjunta de G . O isomorfismo é estabelecido utilizando o homomorfismo de Chern-Weil das aplicações dos polinômios $P \in I(G)$ para as classes $[P(F)]$, onde F é a curvatura de uma conexão arbitrária no fibrado universal. $P(F)$ é uma forma diferencial fechada de grau $2k$ se o polinômio P tem grau k . Um resultado fundamental é que a imagem $[P(F)]$ em $H^*(BG; \mathbb{R})$ é independente da escolha da conexão.

Um grupo importante em nosso trabalho é o grupo unitário $U(n)$, logo apresentaremos o seu grupo de cohomologia, que talvez seja o exemplo mais familiar de grupo de cohomologia. Tal grupo, não contém nenhuma torção e é determinado pelo anel polinomial na classe de Chern c_k de grau $2k$

$$H(BU(n); \mathbb{Z}) = Pol[c_1; \dots; c_n]. \quad (3.5)$$

Como um exemplo de um grupo finito, vamos considerar o grupo cíclico \mathbb{Z}_n . Novamente o anel de cohomologia é gerado finitamente. Existe um único gerador x de ordem n e grau 2, tal que

$$H^{\text{ímpar}}(B\mathbb{Z}_n; \mathbb{Z}) = 0; \quad H^{\text{par}}(B\mathbb{Z}_n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n.$$

3.1.3 Variedades de Bandeira

Definição 3.6 *Uma bandeira em \mathbb{C}^n é uma sequência L_i de subespaços lineares de \mathbb{C}^n tal que*

$$L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_{n-1} \subset \mathbb{C}^n$$

onde $\dim L_i = i$.

Dada a base canônica $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de \mathbb{C}^n podemos definir a bandeira canônica tomando L_1 como todas as combinações lineares de e_1 , L_2 todas as combinações lineares de e_1 e e_2 , etc.. Então $U(n)$ age transitivamente sobre o conjunto de todas as bandeiras, com o subgrupo T não alterando a bandeira. Assim $U(n)/T$ é o espaço de todas as bandeiras.

Tomando G compacto, o espaço G/T será chamado uma variedade de bandeira e pode ser identificado com o quociente dos grupos complexos $G_{\mathbb{C}}/B$. O $G_{\mathbb{C}}/P$ para subgrupos parabólicos P , são chamados variedade de bandeira parcial. Um caso especial importante é

$$Gr(k, n) = \frac{U(n)}{U(k) \times U(n-k)}$$

o Grassmaniano de k -planos complexos em \mathbb{C}^n .

3.2 Resultados preliminares

Aqui apresentaremos alguns resultados que são fundamentais para introduzirmos o teorema de Borel-Weyl-Bott, eles são clássicos da Geometria Algébrica e Teoria de Grupos compactos, portanto não faremos as demonstrações, apenas as citamos.

Teorema 3.1 *Sejam G um grupo de Lie compacto e conexo e T um toro maximal de G . Então, algum elemento de G é conjugado a um elemento de T .*

Teorema 3.2 (Peso maximal) *Para uma representação π irredutível complexa com dimensão finita, temos que as seguintes condições sobre um peso λ de π são equivalentes*

- I) $\lambda + \alpha$ não é um peso, para toda raiz $\alpha \in \Phi^+$;
- II) Existe $v_0 \in V^\lambda \setminus \{0\}$, tal que $\pi(g^\alpha)v_0 = 0$, para todo $\alpha \in \Phi^+$;
- III) Algum peso de π pode ser expresso como $\lambda - A$, onde A é uma soma de raízes positivas (possivelmente vazias, pois repetições são permitidas).

Existe apenas um peso λ de π com estas propriedades, o qual chamamos de peso maximal de π .

Observação 3.3 *O peso maximal é dominante, tem multiplicidade 1 ($\dim V^\lambda = 1$) e determina a representação π por isomorfismo.*

Observação 3.4 *Todo peso dominante $\lambda \in \Lambda$ é o peso maximal de uma representação irredutível*

Teorema 3.3 (do desaparecimento de Kodaira) *Sejam M uma variedade de Kahler, L um fibrado linha holomórfico qualquer em M que é um fibrado linha positivo, e K é o fibrado linha canônico, então*

$$H^q(M, KL) = \{0\}, \text{ para } q > 0.$$

Aqui KL representa o produto tensorial de fibrados linha. Pela dualidade de Serre, K pode ser removido.

Prova. Ver [19] ■

Observação 3.5 *Existe uma generalização do teorema acima, o teorema de desaparecimento de Kodaira-Nakano, onde K , a n -ésima força exterior do fibrado co-tangente holomórfico onde n (dimensão complexa de M), é substituída pela r -ésima força exterior. Então o grupo de cohomologia desaparece sempre que $q + r > n$.*

Teorema 3.4 (Borel-Weil) *Se λ é um peso dominante, as representações de $U_{\mathbb{R}}$ em $H^0(X, \mathcal{O}(\mathcal{L}_\lambda))$ são irredutíveis com peso maximal λ e, além disso, $H^p(X, \mathcal{O}(\mathcal{L}_\lambda)) = 0$ para $p > 0$.*

Demonstração. Ver [16] ■

Corolário 3.1 *Se $\lambda \in \Lambda$ não é dominante, então $H^0(X, \mathcal{O}(\mathcal{L}_\lambda)) = 0$*

Em particular, o teorema fornece uma concreta realização geométrica de todas as representações irredutíveis de dimensão finita de $U_{\mathbb{R}}$. A descrição de $H^0(X, \mathcal{O}(\mathcal{L}_\lambda))$ pode ser deduzida do teorema do peso maximal, e o desaparecimento do grupo de cohomologia maximal é uma consequência do teorema de desaparecimento de Kodaira.

Teorema 3.5 (Riemann-Roch) *Sejam X uma curva lisa projetiva de gênero g e D um divisor em X . Então*

$$\dim H^0(X, L(D)) - \dim H^0(X, \omega_X \otimes L(D)) = \deg D + 1 - g \quad (3.6)$$

Pela dualidade de Serre, $H^0(X, \omega_X \otimes L(D))$ é dual a $H^1(X, L(D))$, assim (3.6) fica

$$\dim H^0(X, L(D)) - \dim H^1(X, L(D)) = \deg D + 1 - g$$

Prova. Ver [18] ■

Teorema 3.6 (Stone-Weierstrass) *Se X é um espaço compacto qualquer, seja A um subálgebra da álgebra $C(X)$ sobre \mathbb{R} com as operações $+$ e \times . Então, se A contém as funções constantes e separa os pontos de X (i.e., para qualquer dois pontos x e y distintos de X , existe alguma função f em A tal que $f(x) \neq f(y)$), A é denso em $C(X)$ equipada com norma uniforme.*

Prova. Ver [17] ■

Proposição 3.1 *Sejam G um grupo de Lie e ρ uma representação de G em \mathbb{C}^n (para algum $n \in \mathbb{N}$), a qual é contínua se a função $G \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ definida por $(g, v) \mapsto \rho(g)(v)$ é contínua. Então para cada $v \in \mathbb{C}^n$ e cada $\alpha \in (\mathbb{C}^n)^*$, a função $G \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g \mapsto \alpha(\rho(g)(v))$, é contínua. A medida do espaço vetorial de todas as funções é chamada o espaço das funções representativas.*

Teorema 3.7 (Peter-Weyl) *Assumindo a proposição (3.1). Seja G um grupo de Lie compacto, logo vale:*

1. *As funções representativas são densas no espaço de todas as funções contínuas, com respeito à norma do supremo;*
2. *As funções representativas são densas no espaço $L^2(G)$ de todas as funções quadrado-integráveis, com respeito a uma medida de Haar em G ;*
3. *A medida do espaço vetorial das características das representações contínuas irredutíveis de G é densa no espaço de todas as funções contínuas de G dentro de \mathbb{C} o qual é constante em cada classe de conjugação de G , com respeito à norma de supremo.*

Prova. Ver [20] ■

Observação 3.6 *Assumindo G como um grupo de matriz, deduzimos o teorema (3.7) facilmente do teorema (3.6).*

Corolário 3.2 *Todo grupo de Lie compacto é isomorfo a algum grupo de matriz.*

3.3 O teorema de Borel-Weil-Bott (Aplicações e exemplos)

Teorema 3.8 (Borel-Weil-Bott) *Se $\lambda \in \Lambda$ e se $\lambda + \rho$ é singular, então*

$$H^p(X, \mathcal{O}(\mathcal{L}_\lambda)) = 0, \text{ para todo } p \in \mathbb{Z}$$

Se $\lambda + \rho$ é regular, seja w o único elemento de W tal que $w(\lambda + \rho)$ é dominante, e defina

$p(\lambda) = \#\{\alpha \in \Phi^+ / (\lambda + \rho, \alpha) < 0\}$. Nesta situação, temos

$$H^p(X, \mathcal{O}(\mathcal{L}_\lambda)) = \begin{cases} \text{é não nulo, irredutível, de peso maximal } w(\lambda + \rho) - \rho, & \text{se } p = p(\lambda) \\ 0 & \text{, se } p \neq p(\lambda) \end{cases}$$

Prova. Ver [21] ■

O teorema de Borel-Weil-Bott (BWB) constrói todas as representações irredutíveis de dimensão finita de grupos de Lie compactos semisimples através das representações irredutíveis do seu toro maximal.

A construção é feita como se segue.

Sejam G um grupo de Lie compacto semisimples e T um toro máximo. Sejam \mathfrak{g} e \mathfrak{t} as álgebras de Lie de G e T , respectivamente. Podemos ver G como um fibrado principal sobre o espaço quociente G/T :

$$T \rightarrow G \rightarrow G/T \tag{3.7}$$

O espaço homogêneo G/T pode ser mostrado para ter uma estrutura complexa canônica. Já que T é abeliano, suas representações irredutíveis são unidimensionais. Assim, cada representação irredutível Λ de T define um fibrado linha complexo associado L_Λ para (3.7):

$$\mathbb{C} \rightarrow L_\Lambda \rightarrow G/T \tag{3.8}$$

Agora, considere um Λ cujo fibrado linha correspondente L_Λ é um fibrado linha positivo. Então L_Λ tem a estrutura de um fibrado linha holomórfico. O teorema BWB afirma que todas representações irredutíveis de G são realizada nos espaços de seções holomórficas do fibrado linha positivo L_Λ . Em particular, o espaço \mathcal{H}_Λ das seções holomórficas de L_Λ fornece a representação irredutível de G com peso maximal Λ .

Exemplo 3.2 *O exemplo mais simples da aplicação do teorema BWB que temos, é quando $G = SU(2)$. Neste caso, teremos $T = U(1) = S^1$ e $G/T = S^2 = \mathbb{C}P^1$.*

O fibrado de (3.7) é o fibrado de Hopf (1.20):

$$U(1) = S^1 \rightarrow SU(2) = S^3 \rightarrow S^2. \quad (3.9)$$

Λ toma semi-inteiros não negativos, normalmente denotado por j em Mecânica Quântica. É de conhecimento geral que para $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$, dê todas as representações irredutíveis de $SU(2)$ e que a representação de j tem dimensão $2j + 1$. A dimensão do espaço \mathcal{H}_Λ pode ser dada por um teorema de índice. Para $SU(2)$, é obtido pelo teorema de Riemann-Roch (teorema 3.5) no contexto da teoria de superfícies de Riemann. O resultado é

$$\dim(\mathcal{H}_\Lambda) = c(L_\Lambda) = 1 + c_1(L_\Lambda), \quad (3.10)$$

onde c e c_1 denotam o total e primeiro números de Chern de L_Λ . Isto significa que devemos ter

$$c_1(L_\Lambda) = 2j. \quad (3.11)$$

Combinando as equações (2.45) e (3.11), reestabelecemos o fibrado linha L_Λ como o fibrado linha de Simon L de (2.15) com $k = -j$.

Vamos mostrar que há uma relação geral entre as construções usadas no teorema de Borel-Weil-Bott e as que foram encontradas na interpretação BS da fase de Berry. Para fazer isto, iremos considerar a generalização da Eq. (2.30) para um grupo de Lie compacto semisimples arbitrário, ou seja, consideraremos

$$H(x) = \epsilon \sum_{i=1}^d x^i J_i, \quad (x^i) \in \mathbb{R}^d - \{0\}. \quad (3.12)$$

Aqui J_i são os geradores de G e ϵ é uma constante com a dimensão de energia. Já que $H(x)$ é assumido como a Hermitiana, J_i deve ser representado através de matrizes Hermitianas. Em outras palavras, o grupo que G é em uma representação unitária. Neste sentido, o exemplo de $G = U(n)$ faz um papel universal. (Isto lembra um do teorema de Peter-Weyl)

O sistema descrito pela Eq.(3.12) é estudado em [22] e [23]. Em [22], é discutido que, em geral, existem os operadores unitários $U(t)$ que diagonalizam a Hamiltoniana instantânea

$$H(t) = U(t) H_D(t) U(t)^\dagger \quad (3.13)$$

pela Eq.(2.6), temos

$$U(t) = U(x(t)), \quad (3.14)$$

onde

$$x(t) = (x^i(t)) \in \mathfrak{g} - \{0\} = \mathbb{R}^d - \{0\} \quad (3.15)$$

são os pontos da curva no espaço de parâmetro. De fato, podemos mostrar que o espaço de parâmetro "não é" $\mathbb{R}^d - \{0\}$, mas uma subvariedade deste espaço, isto é, a variedade de bandeira G/T .

Para ver isto, vamos introduzir primeiro o sistema de raízes de \mathfrak{g} associado com \mathfrak{t} e a decomposição de Cartan correspondente:

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha} \quad (3.16)$$

onde a subscrição \mathbb{C} quer dizer complexificação e α o posto para as raízes. Seja l denotando o grau de \mathfrak{g} , $\{H_i\}_{i=1,2,\dots,l}$ e E_{α} são bases de \mathfrak{t} e \mathfrak{g}_{α} , respectivamente. Então, temos

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, [H_i, E_{\alpha}] \propto E_{\alpha}, [E_{\alpha}, E_{-\alpha}] \propto H_{\alpha} \in \mathfrak{t}, \\ [E_{\alpha}, E_{\beta}] &\propto E_{\alpha+\beta}, \text{ para } \beta \neq \alpha \end{aligned} \quad (3.17)$$

Qualquer elemento de grupo pode ser obtido como um produto do exponenciais dos geradores da álgebra. Em particular,

$$U(t) = \exp \left[i \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(t) E_{\alpha} \right] \exp \left[i \sum_i \chi_i(t) H_i \right] \quad (3.18)$$

Como qualquer elemento diagonal do grupo comuta com H_i 's, logo pertencem a \mathfrak{t} . Conseqüentemente, temos

$$H_D(t) = \sum_i b_i(t) H_i \quad (3.19)$$

substituindo a Eq.(3.19) na Eq.(3.18), a Eq.(3.13) torna-se

$$H(t) = \exp \left(i \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(t) E_{\alpha} \right) H_D(t) \exp \left(-i \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(t) E_{\alpha} \right) \quad (3.20)$$

$$= \exp \left(i \sum_{\alpha > 0} [z_{\alpha}(t) E_{\alpha} + z_{\alpha}^*(t) E_{-\alpha}] \right) H_D(t) \times \exp \left(-i \sum_{\alpha > 0} [z_{\alpha}^*(t) E_{\alpha} + z_{\alpha}(t) E_{-\alpha}] \right) \quad (3.21)$$

onde $\chi_{\alpha} \in \mathbb{R}$ e $z_{\alpha} \in \mathbb{C}$, são parâmetros que dependem do tempo. Mostra-se que, em geral, a fase geométrica é determinada em termos de χ_{α} 's, ou alternativamente em termos de z_{α} 's, e não depende de $H_D(t)$. Notemos que realmente χ_{α} corresponde às coordenadas dos pontos da variedade de bandeira G/T e, alternativamente, podemos usar as coordenadas complexas z_{α} , isto decorre do fato que G/T tem uma estrutura complexa canônica.

Isto mostra que o espaço de parâmetro do sistema, descrito pela Eq. (3.12), é G/T ou uma subvariedade de G/T . Vamos utilizar o fato que G/T pode ser visto como uma imersão em \mathfrak{g} , isto é útil porque nos permite trabalhar com os sistemas de coordenadas cartesianas globais em $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^d$. A imersão natural de G/T é definida levando um elemento regular (não degenerado) H_0 de \mathfrak{t} e considerando a ação adjunta de G em \mathfrak{g} . A órbita que corresponde a H_0 é uma cópia de G/T . Assim, poderíamos notar que na Eq. (3.12),

$$x = (x^i) \in G/T \subset \mathbb{R}^d. \quad (3.22)$$

O fato que a informação de fase é codificada em $U(t)$ de Eq. (3.13) pode ser usado para simplificar o problema, isto é podemos restringir ao caso onde o $H_D(t) = H_D(0) = H_0$ são mantidos constante, i.e.,

$$H_D = \sum_i b_i H_i =: H_0 \in \mathfrak{t}, \quad b_i = \text{cte} \quad (3.23)$$

O espaço de Hilbert \mathcal{H} dos estados quânticos fornece o espaço das representações. Portanto, pode ser decomposto em espaços de representações irredutíveis. Assumiremos que \mathcal{H} (ou o subespaço de \mathcal{H} pertinente à fase geométrica) corresponde a uma representação irredutível com peso maximal Λ . Os pesos são o autovetores simultâneos de H_i 's. Eles são denotados convenientemente por $|\lambda_1, \dots, \lambda_l\rangle$ ou coletivamente por $|\lambda\rangle$, onde

$$H_i |\lambda\rangle = \lambda_i |\lambda\rangle, \quad \forall i = 1, \dots, l \quad (3.24)$$

Claramente, os vetores pesos $|\lambda\rangle$ são os vetores de auto-estados da Hamiltoniana inicial. Aqui, fixamos $U(0) = 1$, na Eq.(3.13). Em geral, isto pode ser alcançado escolhendo o toro

maximal T adequadamente. Assim, temos

$$H(x(0)) = H_D = H_0 \quad (3.25)$$

e

$$H_D |\lambda\rangle = \sum_{i=1}^l b_i \lambda_i |\lambda\rangle \quad (3.26)$$

Fazendo a dependência de $H_D(H_0)$ no ponto inicial $x_0 := x(0)$ explícito, podemos escrever a Eq.(3.26) na forma

$$H_0(x_0) |\lambda, x_0\rangle = E_\lambda(x_0) |\lambda, x_0\rangle, \text{ onde } E_\lambda(x_0) := \sum_{i=1}^l b_i \lambda_i(x_0). \quad (3.27)$$

O vetores peso $|\lambda, x_0\rangle$, são precisamente os autovetores $|n, x_0\rangle$ da Hamiltoniana inicial $H_0(x_0)$. Já que x_0 podem ser escolhidos arbitrariamente, podemos simplesmente retirar a subscrição "0", i.e., substituir x_0 por x e $H_0(x_0)$ por $H(x)$.

O fibrado linha de BS, neste caso, é obtido como o fibrado pullback do fibrado universal E ,

$$L_\lambda^{\text{BS}} := f^*(E), \quad (3.28)$$

induzido pela aplicação

$$f : x \in M \rightarrow |\lambda, x\rangle \langle \lambda, x| \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \subset \mathbb{C}P^\infty.$$

Recordando alguns fatos básicos sobre variedades de bandeira e a relação delas para espaços projetivos, achamos que, de fato que L_λ^{BS} corresponde ao fibrado linha L_Λ do teorema de BWB, se o vetor peso $|\lambda, x_0\rangle$ é escolhido como o peso maximal Λ da representação. Primeiro, vamos recordar que variedades de bandeira são variedades projetivas, i.e., existem imersões de M em $\mathbb{C}P^\infty$,

$$i : M \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty. \quad (3.29)$$

Realmente, podemos obter $M = G/T$ como uma órbita fechada única da ação de G em $\mathcal{P}(\mathbb{C}^{N+1})$, para alguma representação irredutível $(N+1)$ -dimensional ([24], secção 23.3). O fibrado linha L_Λ é então a restrição (pullback sobre a aplicação identidade) de E :

$$L_\Lambda = i^*(E). \quad (3.30)$$

Seja $|v_0\rangle$ um vetor não nulo no espaço de representação (de Hilbert) da representação Λ de G , $G_{\mathbb{C}}$ é a complexificação de G , e considere a aplicação

$$\Phi : G_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H}),$$

definido por

$$\Phi(\tilde{g}) := [U(\tilde{g})|v_0\rangle] = U(\tilde{g})|v_0\rangle \langle v_0|U(\tilde{g})^\dagger. \quad (3.31)$$

Aqui $U(\tilde{g})$ é a representação de $\tilde{g} \in G_{\mathbb{C}}$ e $[U(\tilde{g})|v_0\rangle]$ denota o raio passando através de $U(\tilde{g})|v_0\rangle$. Φ é claramente não injetiva. Seja P o subgrupo fechado de $G_{\mathbb{C}}$ definido por

$$P := \left\{ \tilde{h} \in G_{\mathbb{C}}; U(\tilde{h})|v_0\rangle = c|v_0\rangle, \text{ para algum } c \in \mathbb{C} - \{0\} \right\}. \quad (3.32)$$

Por construção a aplicação Φ induz uma aplicação injetiva em $G_{\mathbb{C}}/P$:

$$\hat{\Phi} : G_{\mathbb{C}}/P \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H}). \quad (3.33)$$

Agora, escolhamos

$$|v_0\rangle := |\Lambda, x_0\rangle \quad (3.34)$$

e denotando por B o subgrupo de Borel de $G_{\mathbb{C}}$ gerado por H_i e $E_\alpha > 0$.

Observação 3.7 *Se G é um grupo de Lie com uma álgebra de Lie semisimples \mathfrak{g} , o subgrupo conexo B de G com álgebra de Lie \mathfrak{b} é chamado um subgrupo de Borel.*

Então, $B \subset P$ e por consequência $G_{\mathbb{C}}/P$ é um subvariedade compacta de $G_{\mathbb{C}}/B$. Porém, temos a identidade

$$G_{\mathbb{C}}/b = G/T,$$

onde por igualdade I quer dizer o difeomorfismo de espaços homogêneos. Assim, em geral, $G_{\mathbb{C}}/P \subset G/T$.

O caso extremo é quando $P = B$, i.e., $M = G_{\mathbb{C}}/P = G/T$. Porém, em geral, B pode ser um subgrupo próprio de P neste caso a variedade de parâmetro pode ser restringida a subvariedade $G_{\mathbb{C}}/P$ de G/T . Isto depende da representação, i.e., de Λ .

Consideremos o caso geral, i.e., $M = G_{\mathbb{C}}/P$. Os vetores $|\lambda, x\rangle$ da base são parametrizados pelos pontos de $G_{\mathbb{C}}/P \subset G/T$ e a aplicação f de (2.28) torna-se

$$f : G_{\mathbb{C}}/P \ni x \rightarrow |\lambda, x\rangle \langle \lambda, x| \in \mathcal{P}(\mathcal{H}). \quad (3.35)$$

Devido ao fato que $G_{\mathbb{C}}/P \subset G/T$, podemos trabalhar com o representante de $x = [g] \in G/T$ em lugar de $x = [\tilde{g}] \in G_{\mathbb{C}}/P$ para os parâmetros x . O próximo passo lógico é comparar a aplicação $\hat{\Phi}$ da Eq. (3.33) com f . Seja $x \in M \subset G/T$; então todo vetor auto-estado $|\lambda, x\rangle$ pode ser obtido pela ação de G em um vetor não nulo. Em particular, existe um $g_x \in G$ tal que

$$|\lambda, x\rangle = U(g_x) |\lambda, x_0\rangle. \quad (3.36)$$

Combinado as Eqs. (3.35) e (3.36) e restringindo para $\lambda = \Lambda$, achamos

$$\begin{aligned} f(x) &= |\lambda, x\rangle \langle \lambda, x| \\ &= U(g_x) |\lambda, x_0\rangle \langle \lambda, x_0| U(g_x) \end{aligned} \quad (3.37)$$

e aplicando a Eq. (3.34), fazendo a restrição $\lambda = \Lambda$, achamos

$$f(x) = U(g_x) |v_0\rangle \langle v_0| U(g_x) = [U(g_x) |v_0\rangle] \quad (3.38)$$

Recordando o procedimento para o qual x é assumido para representar o parâmetro (3.22) do sistema (3.12), podemos identificar $[g_x] \in G_{\mathbb{C}}/P \subset G/T$ com x , i.e.,

$$U(g_x) \equiv U(x),$$

e conseqüentemente

$$f(x) = [U(x) |v_0\rangle] = \hat{\Phi}(x). \quad (3.39)$$

Para o caso especial de $P = B$, a aplicação $\hat{\Phi}$ se torna a aplicação i de (3.29). Assim, de acordo com Eqs. (3.30) e (3.39), a identidade seguinte é estabelecida:

$$L_{\Lambda} = f^*(E). \quad (3.40)$$

A eq.(3.40) geralmente é válida, i.e., até mesmo quando $P \neq B$. Neste caso, $M = G_{\mathbb{C}}/P$ é um subvariedade própria de G/T e o papel da imersão i da Eq.(3.29) é substituído por

$$i' : M \hookrightarrow G/T \hookrightarrow^i \mathbb{C}P^{\infty}$$

Comparando a Eq.(3.40) com a Eq.(3.28), chegamos ao resultado desejado, isto é, que o fibrado L_{Λ} do teorema de Borel-Weil-Bott é idêntico ao fibrado L_{Λ}^{BS} de Berry-Simon. Em particular, a dimensão da representação irredutível, i.e., o espaço de Hilbert \mathcal{H} é determinado pelo número de seções holomórficas linearmente independentes de L_{Λ}^{BS} . O posterior é um invariante topológico L_{Λ}^{BS} .

É resultado conhecido que a topologia de um fibrado linha complexo é exclusivamente determinada por sua primeira classe de Chern \hat{c}_1 . \hat{c}_1 é representado por uma 2-forma diferencial fechada em M . Pode ser caracterizado por um conjunto de $[p := \dim H_2(M, \mathbb{Z})]$ integrais integrando isto sobre subvariedades bidimensionais compactas p de M , que é chamado 2-cela de M . Por exemplo, se $G = SU(2)$, $M = S^2$ e o espaço S^2 é o único 2-cela. Então, \hat{c}_1 é determinado por uma integral simples c_1 via Eq.(2.44).

Em geral, a modificação seguinte de Eq.(2.44) encontra as integrais necessárias,

$$c_1^a = \hat{c}_1(\sigma_a) := \frac{i}{2\pi} \int_{\sigma_a} \Omega, \quad (3.41)$$

onde σ_a é a a -ésima 2-cela ($a = 1, \dots, p$), c_1 é o primeiro número de Chern associado com σ_a e Ω é a curvatura 2-forma do fibrado linha.

Para o caso do fibrado linha BWB-BS, c_1 determina as representações irredutíveis. Por outro lado, as representações irredutíveis são determinadas pelo peso maximal Λ da representação. Os posteriores podem ser escritos como uma combinação linear dos denominados pesos fundamentais ([24], Secção 14.1), com coeficientes de integração não-negativos. Denotamos estes por Λ_b , $b = 1, \dots, l$. Então,

$$\Lambda = \sum_{b=1}^l k_b \Lambda_b, \quad k_b \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}. \quad (3.42)$$

Isto significa que para determinar os k_b 's e conseqüentemente a representação irredutível precisamos precisamente do primeiro número de Chern "independente" l . Estes são obtidos

integrando (3.41) sobre 2-cela de G/T . Os 2-cela são cópias de l de S^2 que corresponde ao subgrupos canônico $SU(2)$ de G . Estes são gerados pelas triplas dos geradores $(E_\alpha, E_{-\alpha}, H_\alpha)$, onde α 's são as raízes simples l de \mathfrak{g} , e E_α e H_α são como na Eq.(3.17). Denotando este subgrupos $SU(2)$ e o seu toro maximal por G_α e T_α , respectivamente, os 2-cela são dados por

$$\sigma_\alpha := G_\alpha/T_\alpha = SU(2)/U(1) = S^2. \quad (3.43)$$

A restrição da curvatura 2-forma Ω em σ_α fornece a curvatura de Berry 2-forma. Integrando estes 2-forma em σ_α dá origem a identidades l da forma (2.45).

Capítulo 4

Conexão de Berry, geometria Riemanniana e fase não adiabática

4.1 Conexão de Berry e a geometria Riemanniana da variedade de parâmetro

Consideramos como algo interessante sobre a fase geométrica o fato que a conexão \mathcal{A} de AA está relacionada à métrica de Fubini do espaço projetivo $\mathbb{C}P^N$. Na linguagem de fibrados, a geometria Riemanniana de uma variedade X significa a geometria do seu fibrado tangente TX . Em particular, a métrica Riemanniana (a conexão de Levi-Civita) é uma métrica (respectivamente, uma conexão) em TX . A afirmação de que a conexão de AA está relacionada à geometria Riemanniana de $\mathbb{C}P^N$ é equivalente a dizer que o fibrado universal (AA),

$$E : \mathbb{C} \rightarrow E \rightarrow \mathbb{C}P^N$$

está relacionado ao fibrado tangente

$$TCP^N : \mathbb{C} \rightarrow TCP^N \rightarrow \mathbb{C}P^N$$

Observação 4.1 *Demonstra-se esta afirmação via topologia*

A relação fundamental para estabelecer a relação entre AA e a geometria métrica Riemanniana é:

$$Det [TCP^N] = E^* \otimes E^*, \quad (4.1)$$

onde Det significa o fibrado determinante:

$$Det [TCP^N] := \underbrace{TCP^N \wedge \dots \wedge TCP^N}_{n \text{ termos}}$$

\wedge representa o produto de cunha do fibrado vetorial, E^* é o fibrado linha dual para E , e \otimes é o produto tensorial.

Para verificarmos a Eq.(4.1) vamos examinar a primeira classe de Chern em ambos os lados.

De fato, já que CP^N tem um único 2-cela, isto é, $CP^1 = S^2$ podemos simplesmente comparar os primeiros números de Chern .

É conhecido que:

$$c_1(E) = -1 \quad (4.2)$$

Além disso, para qualquer fibrado vetorial V ,

$$\hat{c}_1 [\det V] = \hat{c}_1 [V] \quad (4.3)$$

Também, mostra-se que

$$c_1 (TCP^N) = c_1 (TCP^1) = \chi (S^2) = 2 \quad (4.4)$$

onde χ representa a característica de Euler-Poincaré. Das equações (4.3) e (4.4), temos

$$\begin{aligned} c_1 [\det TCP^N] &= c_1 [TCP^N] \\ &= 2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Como

$$c_1 (E^*) = -c_1 (E),$$

Logo, por (4.2), obtemos

$$c_1 (E^*) = 1$$

e assim, temos que a equação (4.5) se verifica.

A existência desta relação entre a conexão de AA e a métrica Riemanniana em $\mathbb{C}P^N$ promoveu a investigação de forma similar ao formalismo de BS. em [28], os autores discutem o caso de uma Hamiltoniana geral com um grupo dinâmico G e um espaço de parâmetro G/H onde H é um subgrupo fechado do grupo de simetrias da Hamiltoniana. A análise apresentada acima parece incluir todos estes casos.

Nesta seção, iremos mostrar que o sistema descrito pela Eq.(3.12) tem um caráter universal. Nestes casos considerados, o espaço de parâmetros G/H , como uma subvariedade de $FU(m) := U(m)/T^m$, onde $T^m := [U(1)]^m$, o qual está imerso em $\mathbb{C}P^\infty$. Conseqüentemente, os resultados de [28] são esperados pois

- (i) o fibrado (conexão) de BS é o pullback (restrição) do fibrado universal E ;
- (ii) E é relacionado a $T\mathbb{C}P^N$, pela Eq. (4.1).

4.2 Redução da fase não-adiabática para a fase adiabática via Hamiltonianas modificadas

Consideremos uma Hamiltoniana H arbitrária ($m \times m$) atuando em $\mathcal{H} = \mathbb{C}^m$. H pode ser visto como um elemento do espaço vetorial (real) de todas as matrizes Hermitianas complexas ($m \times m$)-dimensionais complexas. Notemos que a dimensão real deste espaço é igual a m^2 . Assim, H pode ser escrito como uma combinação linear de m^2 matrizes Hermitianas linearmente independentes. Incidentalmente, os geradores J_i de $U(m)$ formam um conjunto de m^2 matrizes. Isto simplesmente indica que sempre podemos expressar H na forma da Eq.(3.12). Isto pode ser visto como uma consequência do teorema de Peter-Weyl. A representação particular de H dada pela Eq.(3.12) com $G = U(m)$ para algum $m \in \mathbb{Z}^+$ poderia não ser uma escolha prática. A escolha abaixo,

$$H = \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j,$$

com σ_i sendo a matriz de Pauli, é mais manejável nesta forma do que na forma da Eq.(3.12), com J_i escolhido para ser os geradores de $U(4)$. No entanto, em princípio, podemos sempre usar a representação linear, Eq.(3.12). De fato, podemos usar os geradores de $SU(m)$ em vez de $U(m)$. Isto é enfatizado em. [22]. Pode ser justificado diretamente recordando que os $(m^2 - 1)$ geradores de $SU(m)$ também são linearmente independentes e estes junto com a matriz identidade I ($m \times m$) fornece uma base para o espaço de matrizes Hermitianas ($m \times m$). As Hamiltonianas H podem ser escritas então como uma combinação linear nesta base. Claramente, o termo proporcional a I não contribui à fase geométrica. Isto é frequentemente usado como uma indicação da natureza geométrica da fase de Berry.

Uma vantagem da representação linear é que nos permite usar diretamente o conhecimento sobre os fibrados universais e teorema de BWB. Em particular, em alguns casos, é possível obter o análogo não adiabático do fibrado linha de BS e a conexão A . O primeiro exemplo disto é apresentado em [12]. Mostraremos que desde que o argumento anterior não recorra a adiabaticidade do sistema, sempre podemos reduzir a Hamiltoniana à forma linear. Além disso, se a dependência temporal da Hamiltoniana linear correspondente é realizada pela modificação da Hamiltoniana inicial ao longo de um direção fixa, então podemos obter uma conexão análoga não-adiabática \tilde{A} da conexão de Berry A , como uma conexão de 1-forma. A fase geométrica é identificada então com a holonomia associada das curvas no espaço de parâmetros. Isto é notável porque significa que, até onde a fase geométrica está relacionada, não necessitamos de todas as soluções da equação de Schrödinger. O ingrediente essencial é a função F que induz \tilde{A} como um pullback 1-forma sobre a conexão adiabática 1-forma A .

Vamos utilizar o procedimento apresentado por S. S. Wang [23] para determinar a função F , utilizando as seguintes condições:

(1) Os estados cíclicos são os auto-estados de um operador da Hermitiana \tilde{H} que depende parametricamente dos pontos da variedade de parâmetro M , i.e., os estados cíclicos são os auto-estados de $\tilde{H}(x_0)$ com $x_0 = x(t=0)$.

(2) \tilde{H} é relacionado à Hamiltoniana H pela equação

$$\tilde{H}(x) = H(F(x)) = (H \circ F)(x) \quad (4.6)$$

onde $F : M \rightarrow M$ é alguma função suave, tal que no limite adiabático, F aproxima da aplicação identidade.

Veremos primeiro como a primeira condição é cumprida para qualquer Hamiltoniana periódica. De acordo com um resultado da teoria de Floquet ¹ o operador de evolução de tempo para qualquer Hamiltoniana periódica é da forma

$$\mathcal{U}(t) = Z(t) e^{it\tilde{H}}, \quad (4.7)$$

onde \tilde{H} é um operador Hermitiano independente do tempo e Z é um operador unitário periódico com o mesmo período da Hamiltoniana, i.e.,

$$Z(t+T) = Z(t), \quad Z(0) = 1 \quad (4.8)$$

daí para $t = 0$, temos

$$\mathcal{U}(T) = \mathcal{U}(0+T) \quad (4.9)$$

$$= Z(0+T) e^{it\tilde{H}} \quad (4.10)$$

$$= Z(0) e^{it\tilde{H}} \quad (4.11)$$

$$= e^{it\tilde{H}} \quad (4.12)$$

o que justifica a primeira condição.

A segunda condição pode ser vista seguindo o argumento usado na discussão da transformação da Hamiltoniana na forma linear. Simplesmente começamos percebendo que já que \tilde{H} é Hermitiana, também pode ser escrito na forma linear:

$$\tilde{H}(x_0) = \sum_{i=1}^d \tilde{x}_0^i J_i, \quad (4.13)$$

¹A teoria de Floquet é um ramo da teoria das equações diferenciais ordinárias relativa à classe de soluções para equações diferenciais lineares da forma $\dot{x} = A(t)x$, com $A(t)$ uma função periódica contínua com período T

onde $\tilde{x}_0 := (\tilde{x}_0^i) \in M$ depende da Hamiltoniana (3.12), e conseqüentemente de $C \subset M$. Porém, para as Hamiltonianas modificadas a dependência temporal da Hamiltoniana é governada pela ação de um subgrupo de 1–parâmetro de G , i.e., o operador $U(t)$ da Eq. (3.14) é dado por

$$U(t) := \exp [i\omega t n_\alpha E_\alpha], \text{ com } n_\alpha = cte$$

onde ω e (n_α) são chamadas de taxa acionada e direção, respectivamente. É claro que para tais sistemas \tilde{x}_0 só podem depender da Hamiltoniana inicial e assim de x_0 . A função F é definida por

$$\tilde{x}_0 =: F(x_0) \tag{4.14}$$

O único problema é que em alguns casos, dependendo do valor do parâmetro de lentidão $v(\omega)$, F pode ser descontínuo ou até multi-avaliado. Isto acontece no caso da Eq. (2.30) para $v = \omega/b = 1$. Mas no caso genérico F é suave e a segunda condição é satisfeita. O análogo não-adiabático do fibrado linha de BS é então determinado por

$$\tilde{L} := F^*(L) \tag{4.15}$$

É dotado com uma conexão 1–forma não-adiabática,

$$\tilde{A} := F^*(A) \tag{4.16}$$

Para completar, vamos revisar brevemente os argumentos de [12], os quais conduzem as Eqs.(4.15) e (4.16). A idéia básica é que a existência de \tilde{H} que satisfaz a Eq. (4.13) nos permite imitar o tratamento de Berry dos sistemas adiabáticos. Os autovetores de energia $|n, x\rangle$ são substituídos pelos autovetores de energia $|\tilde{n}, x\rangle$ de $\tilde{H}(x)$. Devido a Eq.(4.6), estes são determinados por

$$|\tilde{n}, x\rangle = |n, \tilde{x}\rangle = |n, F(x)\rangle \tag{4.17}$$

A não adiabaticidade do fibrado \tilde{L} é obtida pelo fibrado linha universal E via o análogo não-adiabático da aplicação f da Eq.(2.26). Denotando o posterior por $\tilde{f} : M \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$ temos

$$\tilde{f}(x) := |\tilde{n}, x\rangle \langle \tilde{n}, x| = |n, F(x)\rangle \langle n, F(x)| = (f \circ F)(x).$$

Então, usando a propriedade de functorial da operação do pullback, mostramos que

$$\tilde{L} = \tilde{f}^*(E) - (f \circ F)^*(E) = (F^* \circ f^*)(E) = F^*(L) \quad (4.18)$$

onde na última igualdade a Eq.(2.27) é usada. Isto prova a Eq.(4.15). A prova da Eq.(4.16) é idêntica. Uma observação importante é que o distinto $|n, x_0\rangle$, os vetores estado inicial $|\tilde{n}, x_0\rangle$ sofrem evoluções cíclicas exatas.

Referências Bibliográficas

- [1] A. MOSTAFAZADEH, J. Math. Phys. 40, 3697 (1999).
- [2] S. PANCHARATNAM, Proc. Ind. Acad. Sci. A 44, 247 (1956).
- [3] C. A. MEAD AND D. TRUHLAR, J. Chem. Phys. 70, 2284 (1979).
- [4] M. V. BERRY, Proc. R. Soc. London, Ser. A 392, 45 (1984).
- [5] W. SCHMID, *Geometric Methods in Representation Theory* (Lecture Notes Taken by Matvei Libine, 2004).
- [6] M. NAKAHARA, *Geometry, Topology and Physics* (Adam Hilger, New York, 1990).
- [7] VARADARAJAN, V. S. *Lie groups, Lie algebras, and their representations*. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1984
- [8] SAN MARTIN, L. A. *Álgebras de Lie*. (Coleção Livro-texto) Editora da Unicamp, 1999.
- [9] A. FAZZIO E K. WATARI, *Introdução a Teoria de grupos*. Santa Maria: Ed. UFSM, 1998.
- [10] G. B. ARFKEN, *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, Inc. (London) LTD., 1970.
- [11] A. BOHM, L. J. BOYA, A. MOSTAFAZADEH, AND G. RUDOLPH, J. Geom. Phys. 12, 13 (1993).

- [12] A. MOSTAFAZADEH AND A. BOHM, *J. Phys. A* 26, 5473 (1993).
- [13] B. SIMON, *Phys. Rev. Lett.* 51, 2167 (1983).
- [14] Y. AHARONOV AND J. ANANDAN, *Phys. Rev. Lett.* 58, 1593 (1987).
- [15] J. SAMUEL AND R. BHANDARI, *Phys. Rev. Lett.* 60 (1988) 2339.
- [16] SEGAL, G. *Lectures on Lie groups, in Lectures on Lie Groups and Lie Algebras*, Cambridge University Press, 1995.
- [17] BRUNO BROSI AND FRANK DEUTSCH. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 81, No. 1 (Jan., 1981), pp. 89-92.
- [18] MISHA KAPOVICH, *The Riemann–Roch Theorem (lecture note) an elementary introduction.*
- [19] DELIGNE, PIERRE; ILLUSIE, LUC (1987), "Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham", *Inventiones Mathematicae* 89: 247–270
- [20] THIERRY COQUAND, BAS SPITERS. *Mathematical Logic Quarterly*. Volume 51, Issue 4 , Pages351 - 359.
- [21] JACOB LURIE. *A Proof of the Borel-Weil-Bott Theorem*,. Retrieved on Dec. 14, 2007.
- [22] J. ANANDAN AND L. STODOLSKY, *Phys. Rev. D* 35, 2597 (1987).
- [23] S-J. WANG, *Phys. Rev. A* 42, 5103 (1990).
- [24] W. FULTON AND J. HARRIS, *Representation Theory* (Springer-Verlag, New York, 1991).
- [25] H. GEORGI, *Lie Algebras in Particle Physics* (Addison-Wesley, New York, 1982).
- [26] D. N. PAGE, *Phys. Rev. A* 36, 3479 (1987).
- [27] A. BOHM, L. J. BOYA, AND B. KENDRICK, *ibid.* 43, 1206 (1991).

- [28] S. GILLER, C. GONERA, P. KOSINSKI, AND P. MASLANKA, *Phys. Rev. A* 48, 907 (1993).
- [29] H. ARADZ AND A. BABIUCH, *Acta Phys. Polon. B* 20, 579 (1989).
- [30] A. BOHM, *Quantum Mechanics: Foundations and Applications*, 3rd ed. (Springer-Verlag, New York, 1993).
- [31] D. J. MOORE, *J. Phys A* 23, L665 (1990).