Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

A conjectura de Lazer-McKenna para problemas de Ambrosetti-Prodi

por

Maria do Desterro Azevedo da Silva

2012

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

A conjectura de Lazer-McKenna para problemas de Ambrosetti-Prodi

por

Maria do Desterro Azevedo da Silva †

sob a orientação do

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto de 2012

João Pessoa - PB

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq

S586c Silva, Maria do Desterro Azevedo da.
A conjectura de Lazer-McKenna para problemas de Ambrosetti-Prodi / Maria do Desterro Azevedo da Silva.-- João Pessoa, 2012.
100f.
Orientador: Bruno Henrique Carvalho Ribeiro
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Equações diferenciais parciais elípticas. 3. Métodos variacionais. 4. Métodos topológicos. 5. Problemas do tipo Ambrosetti-Prodi.

UFPB/BC CDU: 51(043)

A conjectura de Lazer-McKenna para problemas de Ambrosetti-Prodi

por

Maria do Desterro Azevedo da Silva

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro (Orientador)

(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)

Edcarlos D. da Silva

Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva

(Universidade Federal de Goiás - UFG)

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

(Universidade Federal da Paraíba - UFPB)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Dedicatória

Às minhas avós Antônia e Maria
(in memoriam)

Agradecimentos

A Deus, acima de tudo.

Aos meus pais, Maria de Fátima e Agamenon Penha, pelo constante apoio e por entenderem minha ausência.

Às minhas irmãs, Lidiane Azevedo e Lílian Azevedo, pela amizade, companheirismo e fraternidade.

Ao amigo e orientador Prof. Bruno Ribeiro que, com carinho, aceitou a tarefa de me orientar. Obrigada por me oferecer todo o apoio necessário para a realização deste trabalho, estando sempre disponível para o menor esclarecimento. Igualmente agradeço à Profª. Elisandra Gloss pelo carinho, atenção e ajuda.

Em especial, agradeço ao meu namorado Gilcenio Rodrigues pelo suporte emocional e compreensão inesgotável durante esse trajeto tão cheio de tribulações. Te amo.

Às valiosas amizades de Rainelly Cunha, Ana Karine e Elizabeth Lacerda, por despertarem sempre o melhor de mim.

Aos professores Edcarlos Domingos e Uberlandio Batista, membros da banca, pela disposição e sugestões.

Às pessoas lindas que conheci ao longo dessa caminhada, em especial: Edjane Oliveira, Tatiane Carvalho, Ivaldo Tributino, Elisania Santana, Bruna Dutra, Viviane Lisboa, Marco Mialaret, Rafael Silva, Mariana Brito e outros os quais a lembrança agora falha.

Aos professores, funcionários e colegas do Departamento de Matemática da UFPB, pelo carinho, dedicação e entusiasmo demonstrado ao longo do curso.

Finalmente, à CAPES pelo apoio financeiro durante todo o período de mestrado.

Resumo

Neste trabalho, estudamos questões relacionadas à existência e multiplicidade de soluções para problemas do tipo Ambrosetti-Prodi. Apresentamos a conjectura de Lazer-McKenna, verificando sua validade no caso unidimensional. Na obtenção de nosso resultados, utilizamos essencialmente métodos topológicos, variacionais e de sub e supersolução.

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais elípticas, Métodos variacionais, Métodos topológicos, Problemas do tipo Ambrosetti-Prodi.

Abstract

In this paper, we study questions related to the existence and multiplicity of solutions to problems of Ambrosetti-Prodi type. We present the conjecture of Lazer-McKenna, checking its validity in the one dimensional case. To obtain our results, we use essentially topological, variational and sub and supersolution methods.

Keywords: Elliptic partial differential equations, Variational methods, Methods topological, Problems of the Ambrosetti-Prodi type.

Sumário

Notações

Neste trabalho usaremos as seguintes notações:

- $C, C_0, C_1, \ldots$ denotam constantes positivas (possivelmente diferentes);
- $M^\perp$: ortogonal de M;
- $|A|$ denota a medida de Lebesgue de um conjunto A;
- $B_\varepsilon(x)$ denota a bola aberta de centro $x \in X$ e raio ε, onde X é um espaço normado. Quando $x \in X$ for a origem, denotaremos apenas por B_ε;
- $\rightarrow, \rightharpoonup$ denotam convergência forte e fraca, respectivamente;
- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ denota o gradiente da função u;
- $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$;
- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$: o laplaciano de u;
- $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \eta \cdot \nabla u$: derivada normal exterior;
- q.t.p. quase todo ponto;
- $L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável } : \displaystyle\int_\Omega |u|^p dx < \infty\right\}$, para $1 \leq p < \infty$ com norma dada por
$$||u||_p = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p};$$
- $(\cdot, \cdot)_2$ denota o produto interno em $L^2(\Omega)$;

- $L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \sup_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty \right\}$ com norma dada por
$$||u||_{L^\infty} = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\};$$

- $C(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas em Ω;

- $C_0(\Omega)$ denota as funções contínuas de suporte compacto em Ω;

- $C^k(\Omega)$, $k \geq 1$ inteiro, denota o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω e $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 1} C^k(\Omega)$;

- Para $f \in C^1(\overline{\Omega})$, definamos $\|f\|_{C^1} = \max\left\{ \max_{\overline{\Omega}} |f(t)|, \max_{\overline{\Omega}} |f'(t)| \right\}$;

- $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\Omega);\ \sup_{x,y\in\Omega} \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$ com $0 < \alpha < 1$, e $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ são as funções $C^k(\Omega)$ tais que todas as derivadas parciais de ordem k estão em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$;

- Para $1 \leq p < \infty$,
$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists g_1, g_2, \ldots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega g_i \varphi dx,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } i = 1, \ldots, N \end{array} \right\}$$
com norma dada por
$$||u||_{1,p} = \left[\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) dx \right]^{1/p}$$
e $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma acima. Quando $p = 2$, denotamos $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ e $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$. Para um domínio limitado Ω, a norma considerada em $H_0^1(\Omega)$ é dada por
$$||u|| = \left[\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right]^{1/2};$$

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno em $H_0^1(\Omega)$;

- $H^{-1}(\Omega)$ denota o espaço dual de $H_0^1(\Omega)$, com norma $\| \cdot \|_{H^{-1}}$;

- O expoente crítico de Sobolev é dado por
$$2^* = \begin{cases} \dfrac{2N}{N-2} & \text{se } N \geq 3 \\ \infty & \text{se } N = 1, 2; \end{cases}$$

- $f = o(g)$ se $\dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} \longrightarrow 0$ quando $x \to x_0$;
- $\operatorname{sgn}\, u = \begin{cases} 1, & \text{se } u > 0 \\ -1, & \text{se } u < 0. \end{cases}$

Introdução

Dentre os vários problemas estudados em equações diferenciais elípticas, existem os do tipo Ambrosetti-Prodi, os quais são o foco deste trabalho. Problemas deste tipo caracterizam-se pela existência de interferências particulares entre os autovalores e a não-linearidade do problema, de modo que a equação venha, ou não, a ter solução.

Diversos problemas deste tipo surgiram motivados pelo trabalho pioneiro de A. Ambrosetti e G. Prodi [1] em 1972. Neste artigo, os autores consideraram problemas da forma

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) + f(x), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, g é uma função de classe C^2 de $\mathbb{R}$, satisfazendo $g'' > 0$, e

$$0 < \lim_{s \to -\infty} g'(s) < \lambda_1 < \lim_{s \to +\infty} g'(s) < \lambda_2,$$

com λ_i, $i = 1, 2, \ldots$, denotando os autovalores do operador $-\Delta$ em Ω com condição de fronteira de Dirichlet. Foi provada a existência de uma subvariedade S de classe C^1 em $C^{0,\alpha}$ que divide este espaço em dois subconjuntos disjuntos abertos O_1 e O_2 de tal modo que o problema tem exatamente duas soluções se $f \in O_1$, tem exatamente uma solução se $f \in S$, e caso $f \in O_2$, o problema não possui solução.

Diferente do que era feito em trabalhos anteriores a [1], nos quais a imagem de g' cruzava autovalores, apenas era conhecida a existência de uma única solução para os casos em que a imagem de g' encontrava-se contida em algum intervalo $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$, com $k \geq 0$ e $\lambda_0 = 0$. Este último resultado é creditado a C. L. Dolph [11].

Vários trabalhos surgiram com interesse em obter outros resultados, explorando possíveis variações e generalizações, em busca de respostas sobre questões de existência e multiplicidade de solução. Em 1975, M. S. Berger e E. Podolak [4] deram uma grande contribuição acerca dessas questões. Dando uma estrutura cartesiana para a variedade S, eles decompuseram a função $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ na forma $t\phi_1 + f_1$, onde ϕ_1 designa uma autofunção normalizada e positiva associada ao autovalor λ_1, $f_1 \perp \phi_1$ e $t \in \mathbb{R}$, e reescreveram o problema (1) na seguinte forma:

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) + t\phi_1 + f_1, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Então, para cada f_1 com a propriedade acima, Berger e Podolak mostraram a existência de um número real $t(f_1)$ dependendo continuamente de f_1, de forma que (2) possuísse exatamente duas, uma ou nenhuma solução, conforme $t < t(f_1)$, $t = t(f_1)$ e $t > t(f_1)$, respectivamente. Posteriormente, em 1975 J. Kazdan e F. W. Warner [19] desconsideraram a condição de convexidade e diferenciabilidade sobre a função g e trabalharam com a hipótese:

$$\limsup_{s\to-\infty} \frac{g(s)}{s} < \lambda_1 < \liminf_{s\to+\infty} \frac{g(s)}{s},$$

onde provaram a existência de pelo uma ou nenhuma solução conforme $t < t(f_1)$ ou $t > t(f_1)$, respectivamente. Deixando de assumir as condições ditas anteriormente, Kazdan e Warner perderam informações sobre o número preciso de soluções do problema, como também da existência de solução. Porém, mais tarde, foi imposta uma condição adicional sobre o crescimento da g, no qual se esta fosse assintoticamente polinomial, com o grau deste polinômio limitado por $(N+1)/(N-1)$, garantiríamos a existência de uma solução para $t = t(f_1)$ e pelo menos duas soluções para $t < t(f_1)$. Esta limitação no expoente para o crescimento da g foi devido a um resultado de estimativa a priori de H. Brezis e R. E. L. Turner [6]. Em seguida, D. G. de Figueiredo e S. Solimini [14] conseguiram admitir um crescimento menos restritivo, indo até as potências subcríticas $2^* - 1$, utilizando um resultado de estimativa a priori obtido por B. Gidas e J. Spruck [16].

A existência de mais de duas soluções para o problema em questão, teve início em 1981 em trabalhos de A. C. Lazer e P. J. McKenna, onde foi analisado o que acontece quando os limites $\limsup\limits_{s\to-\infty} g(s)/s$ e $\liminf\limits_{s\to+\infty} g(s)/s$ atravessam mais do que um autovalor. Em [20], os autores provam que se λ_2 é simples e

$$\lambda_2 < \liminf_{s\to+\infty} \frac{g(s)}{s} < \lambda_3,$$

então o problema possui ao menos três soluções. Posteriormente, os mesmos autores conjecturaram que se

$$\limsup_{s\to-\infty}\frac{g(s)}{s}<\lambda_1 \quad \text{e} \quad \lambda_n<\liminf_{s\to+\infty}\frac{g(s)}{s}<\lambda_{n+1},$$

então o problema (1) admite pelo menos $2n$ soluções distintas. Tal conjectura foi comprovada em 1983 no cenário das equações diferenciais ordinárias em [21] e refutada por E. N Dancer [9], em 1989. No entanto, trabalhos recentes de Dancer [10] trazem respostas verdadeiras à conjectura sob variadas possibilidades, os quais foram motivados por resultados de trabalhos de H. Hofer [18] e S. Solimini [30].

Outros autores tiveram interesse em obter resultados em diferentes direções, por exemplo, B. Ruf e P. N. Srikanth [27] considerando o seguinte tipo de equação diferencial ordinária

$$\begin{cases} -u'' &= (u^+)^p+\lambda u+t\,\text{sen}\,x, \qquad x\in(0,\pi)\\ u(0) &= u(\pi)=0, \end{cases} \tag{3}$$

onde $p>1$ e $\lambda\in(\lambda_k,\lambda_{k+1})$, com $k\geq 1$, provaram a existência de pelo menos $2k+2$ soluções para $t\geq 0$ e pelo menos 2 soluções para $\lambda\in(-\infty,\lambda_1)$ para $t\leq 0$. Neste caso, os autores caminharam em um sentido contrário ao que vinha sendo feito. De fato, uma vez que a não-linearidade $g(u)=(u^+)^p+\lambda u$ satisfaz

$$\limsup_{s\to-\infty}\frac{g(s)}{s}=\lambda \ \text{ e } \ \liminf_{s\to+\infty}\frac{g(s)}{s}=+\infty,$$

onde

$$\lambda_1<\ldots<\lambda_k<\limsup_{s\to-\infty}\frac{g(s)}{s}=\lambda\ <\lambda_{k+1}<\ \liminf_{s\to+\infty}\frac{g(s)}{s}=+\infty.$$

Dessa forma, o cruzamento de autovalores ocorre apenas para uma ordem superior. Porém, assim como Lazer e Mckenna, os autores conseguiram estabelecer uma relação do número de soluções do problema com o número de autovalores com os quais a não-linearidade não cruza.

Saindo do cenário das equações diferenciáveis ordinárias, Ruf e Srikanth [28] consideraram um problema mais geral

$$\begin{cases} -\Delta u &= (u^+)^p+\lambda u+f, \qquad \text{em } \Omega\\ u &= 0, \qquad\qquad\qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

onde $1 < p < 2^* - 1$ e $\lambda \neq \lambda_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Os autores usaram a decomposição $f = t\phi_1 + f_1$ com $\int_\Omega f_1\phi_1 = 0$ e a hipótese de que $\lambda > \lambda_1$, para mostrar a existência de uma constante $T = T(f_1)$ tal que, para $t > T$, o problema (4) possui pelo menos duas soluções. Neste caso, perde-se o resultado de não existência de solução garantido quando $\lambda < \lambda_1$.

Ao leitor que deseje conhecer mais detalhes históricos, recomendamos a leitura dos trabalhos [13], [25] e [27].

Nosso trabalho está dividido em três capítulos.

No Capítulo 1, relatamos alguns dos resultados de existência de solução para problemas do tipo Ambrosetti-Prodi devido à D. G. de Figueiredo [13] e D. G. de Figueiredo e S. Solimini [14]. Na obtenção dos resultados, usamos métodos de sub e supersolução via iteração monotônica e variacional.

O Capítulo 2 é dedicado à verificação da conjectura de Lazer-McKenna no caso unidimensional utilizando métodos topológicos e de sub e supersolução. Este capítulo tem [21] como referência principal. Em seguida, exibimos o exemplo encontrado por Dancer [9] para contradizer tal conjectura.

No Capítulo 3, com base no artigo de B. Ruf e P. N. Srikanth [27], provamos a existência e multiplicidade de soluções para o problema (4), utilizando como principal ferramenta o Teorema de Linking de Rabinowitz [23].

Além disso, no Apêndice A, apresentaremos alguns resultados clássicos utilizados no decorrer deste trabalho, os quais serão enunciados sem demonstração e com as devidas referências para possíveis consultas. No Apêndice B, enunciamos e demonstramos alguns resultados específicos que serão aplicados nesta dissertação.

Capítulo 1

Existência e multiplicidade de solução para problemas do tipo Ambrosetti - Prodi

O propósito deste capítulo é investigar a existência e multiplicidade de solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u) + f(x) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um aberto, limitado e conexo, com fronteira $\partial\Omega$ de classe $C^{2,\alpha}$, e a não-linearidade g satisfaz:

(g_0) $\displaystyle\limsup_{s\to-\infty} \frac{g(x,s)}{s} < \lambda_1 < \liminf_{s\to+\infty} \frac{g(x,s)}{s}$, uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$.

Observação 1.1 *Os limites acima podem ser infinitos.*

Seja N o autoespaço correspondente ao primeiro autovalor λ_1 do Laplaciano com condição de fronteira Dirichlet em Ω. Tal autoespaço é unidimensional, gerado por uma função $\phi_1 \in C^2(\overline{\Omega})$, positiva e normalizada ($||\phi_1||_2 = 1$). Dada qualquer $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, esta pode ser unicamente escrita como $f = t\phi_1 + f_1$, onde $f_1 \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\displaystyle\int_\Omega f_1\phi_1 = 0$ e $t = \displaystyle\int_\Omega f\phi_1$. Assim, podemos reescrever o problema (P) como

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u) + t\phi_1 + f_1(x), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_t}$$

No que segue, consideraremos

$$M^{\perp} = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap N^{\perp} = \{g \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}); \int_{\Omega} g\phi_1 = 0\}.$$

Antes de tratarmos do resultado principal deste capítulo, enunciemos um resultado auxiliar, não menos importante, que utiliza uma técnica construtiva para sua verificação, diferente das que serão empregadas na literatura.

Teorema 1.2 *Sejam $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $g \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, com $f = t\phi_1 + f_1$. Suponhamos que a condição (g_0) é válida. Então, para cada $f_1 \in M^{\perp}$, existe um número real $\alpha = \alpha(f_1)$, tal que o problema (P_t) não possui solução se $t > \alpha(f_1)$ e possui solução se $t < \alpha(f_1)$.*

Na busca de mais informações sobre a existência e multiplicidade de solução para o problema parametrizado (P_t), faremos uso de técnicas variacionais e utilizaremos hipóteses menos restritivas sobre os espaços aos quais pertencem as funções f e g. A saber, pediremos $f \in C(\overline{\Omega})$ e $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Além disso, conforme a necessidade de cada caso, assumiremos as seguintes hipóteses sobre a não-linearidade g:

(g_1) existem constantes $a_1, a_2 > 0$ tais que

$$|g(x,\xi)| \leq a_1 + a_2|\xi|^s, \text{ onde } 0 \leq s < 2^* - 1;$$

(g_2) $g(x,\xi)$ é localmente Lipschitz em ξ uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$;

(g_3) $g(x,s) = o(|s|)$, uniformemente em x, quando $s \longrightarrow 0$;

(g_3') existem $\theta > 2$ e $s_0 > 0$ tais que

$$\theta G(x,s) \leq sg(x,s), \ \forall s \geq s_0;$$

(g_4) $\displaystyle\lim_{s \to +\infty} \frac{g(x,s)}{s} = \gamma < +\infty$, uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$;

(g_4') $\displaystyle\lim_{s \to +\infty} \frac{g(x,s)}{s^{\sigma}} = 0$, uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$, onde $\sigma = \dfrac{N+1}{N-1}$;

(g_4'') existe uma função $a : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, com $a(x) > 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$ tal que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{g(x,s)}{s^{\sigma}} = a(x),$$

uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$, onde $\dfrac{N+1}{N-1} \leq \sigma < 2^* - 1$.

Seguem os principais resultados deste capítulo.

Teorema 1.3 *Sejam $f \in C(\overline{\Omega})$ e $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. Sob as hipóteses $(g_0) - (g_4)$, os resultados do Teorema 1.2 são garantidos e melhorados, como segue:*

(i_α) (P_t) não possui solução se $t > \alpha(f_1)$;

(ii_α) (P_t) possui pelo menos duas soluções se $t < \alpha(f_1)$;

(iii_α) (P_t) possui pelo menos uma solução se $t = \alpha(f_1)$.

Teorema 1.4 *Sob as hipóteses $(g_0) - (g_3')$ e (g_4') (ou (g_4'')) valem as mesmas as conclusões do Teorema 1.3.*

Destacamos que os resultados deste capítulo são baseados nas notas de D. G. de Figueiredo [13] e no artigo de D. G. de Figueiredo e S. Solimini [14]. Apresentaremos a prova destes resultados em etapas: na seção 1.1 provaremos o Teorema 1.2; nas seções 1.2 a 1.5, provaremos a condição de não existência (i_α), a multiplicidade de solução (ii_α) e a condição (iii_α), resultados referentes aos Teoremas 1.3 e 1.4.

1.1 Método de Sub e Supersolução via Iteração Monotônica

Nesta seção, apresentaremos a técnica de sub e supersolução via iteração monotônica, a qual será utilizada na prova do Teorema 1.2. O método de iteração monotônica tem a vantagem de ser construtivo e implica, facilmente, em alguns fatos importantes que serão vistos no decorrer das próximas subseções.

1.1.1 O Método de Iteração Monotônica

Vejamos algumas definições.

Definição 1.5 *Uma função $\underline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ é dita uma subsolução do problema (P) se*

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} & \leq & g(x, \underline{u}) + f(x), & \text{em } \Omega \\ \underline{u} & \leq & 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Definição 1.6 *Uma função $\overline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ é dita uma supersolução do problema (P) se*

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} & \geq & g(x, \overline{u}) + f(x) & em \ \ \Omega \\ \overline{u} & \geq & 0 & sobre \ \ \partial\Omega \end{cases}$$

A demonstração da proposição que será enunciada a seguir contém a ideia do método de iteração monotônica.

Proposição 1.7 *Se o problema (P) possui uma subsolução $\underline{u}$ e uma supersolução $\overline{u}$, com $\underline{u} \leq \overline{u}$, então o mesmo possui soluções $U, V \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tais que $\underline{u} \leq U \leq V \leq \overline{u}$. Além disso, qualquer outra solução de (P) com $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ é tal que $U \leq u \leq V$.*

Prova. Definamos

$$k = \sup\{|g_s(x,s)|; x \in \overline{\Omega}, \underline{u}(x) \leq s \leq \overline{u}(x)\},$$

onde g_s denota a derivada de g em relação a segunda coordenada. Notemos que $k < +\infty$. De fato, seja

$$\tilde{k} = \max\{|g_s(x,s)|; x \in \overline{\Omega}, s \in [-R, R]\},$$

onde $R = \max\{||\underline{u}||_\infty, ||\overline{u}||_\infty\}$. Como $\overline{\Omega} \times [-R, R]$ é compacto e g_s é contínua, temos que o máximo é atingido, garantindo que $\tilde{k}$ seja finito. Assim, uma vez que

$$\{|g_s(x,s)|; x \in \overline{\Omega}, \underline{u} \leq s \leq \overline{u}\} \subseteq \{|g_s(x,s)|; x \in \overline{\Omega}, s \in [-R, R]\}$$

segue que

$$k = sup\{|g_s(x,s)| : x \in \overline{\Omega}, \underline{u}(x) \leq s \leq \overline{u}(x)\} \leq \tilde{k} < +\infty.$$

Inicialmente, demonstraremos a existência de solução para o problema em questão. Para tanto, consideremos a função

$$\tilde{g}(s) = g(x,s) + ks,$$

que é crescente no intervalo $[\underline{u}(x), \overline{u}(x)]$, para todo $x \in \Omega$. Com efeito, como $\underline{u} \leq \overline{u}$, aplicando o Teorema do Valor Médio para $x \in \Omega$ fixado, temos que

$$\begin{aligned} |g(x, \overline{u}(x)) - g(x, \underline{u}(x))| &= |g_s(x, \xi)|[\overline{u}(x) - \underline{u}(x)] \\ &\leq k_x[\overline{u}(x) - \underline{u}(x)], \end{aligned}$$

onde $\xi \in (\underline{u}(x), \overline{u}(x))$ e $k_x = \max_{s\in[\underline{u}(x),\overline{u}(x)]} |g_s(x,s)|$. Como $k_x \leq k$, obtemos que

$$g(x,\underline{u}(x)) + k\underline{u}(x) \leq g(x,\overline{u}(x)) + k\overline{u}(x), \ \forall x \in \Omega.$$

Portanto, $\tilde{g}$ é crescente no intervalo $[\underline{u}(x), \overline{u}(x)]$, para todo $x \in \Omega$.

Façamos $u_0 = \underline{u}$. Notemos que as funções u_0 e $x \to g(x, u_0(x))$ pertencem a $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + ku_1 &= g(x,u_0) + ku_0 + f(x), \quad \text{em } \Omega \\ u_n &= 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Sabemos, pelo Teorema de Schauder, que existe uma única solução $u_1 \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ que satisfaz (1.1). Assim, por iterações, obtemos uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, tal que, para todo $n \geq 1$, u_n é solução única do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_n + ku_n &= g(x,u_{n-1}) + ku_{n-1} + f(x), \quad \text{em } \Omega \\ u_n &= 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

Utilizando indução sobre n, verifiquemos que

$$\underline{u} \leq u_n \leq \overline{u} \ \text{ e } \ u_n \leq u_{n+1}. \tag{1.3}$$

Tomemos $n = 1$. Sendo $\underline{u}$ subsolução de (P) e u_1 solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + ku_1 &= g(x,\underline{u}) + k\underline{u} + f(x) \quad \text{em } \Omega \\ u_1 &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

temos que

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} + k\underline{u} &\leq -\Delta u_1 + ku_1 \quad \text{em } \Omega \\ \underline{u} &\leq u_1 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e, assim

$$\begin{cases} -\Delta(u_1 - \underline{u}) + k(u_1 - \underline{u}) &\geq 0 \quad \text{em } \Omega \\ u_1 - \underline{u} &\geq 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo, pelo Princípio do Máximo fraco (ver Teorema A.15 no Apêndice A), $u_1 \geq \underline{u}$.

Uma vez que $\tilde{g}$ é crescente no intervalo $[\underline{u}(x), \overline{u}(x)]$, para todo $x \in \Omega$, obtemos que

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + ku_1 &= g(x,\underline{u}) + k\underline{u} + f(x) \\ &\leq g(x,\overline{u}) + k\overline{u} + f(x) \\ &\leq -\Delta\overline{u} + k\overline{u}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} -\Delta(u_1 - \overline{u}) + k(u_1 - \overline{u}) & \leq & 0 & \text{em } \Omega \\ u_1 - \overline{u} & \leq & 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e, portanto, pelo Princípio do Máximo fraco, $u_1 \leq \overline{u}$. Suponhamos agora que

$$\underline{u} \leq u_{n-1} \leq \overline{u} \text{ e } u_{n-1} \leq u_n. \tag{1.5}$$

Vemos facilmente, por (1.5), que $u_n \geq \underline{u}$. Por outro lado, como $\underline{u} \leq u_{n-1} \leq \overline{u}$, segue que

$$\begin{cases} -\Delta(u_n - \overline{u}) + k(u_n - \overline{u}) & \leq & 0 & \text{em } \Omega \\ u_n - \overline{u} & \leq & 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

e, novamente, pelo Princípio do Máximo fraco, temos que $u_n \leq \overline{u}$.

Sabemos que

$$-\Delta u_{n+1} + ku_{n+1} = g(x, u_n) + ku_n + f(x)$$

e

$$-\Delta u_n + ku_n = g(x, u_{n-1}) + ku_{n-1} + f(x).$$

Subtraindo as igualdades acima, obtemos que

$$-\Delta(u_{n+1} - u_n) + k(u_{n+1} - u_n) = [g(x, u_n) + ku_n] - [g(x, u_{n-1}) + ku_{n-1}].$$

Uma vez que $\underline{u} \leq u_{n-1} \leq u_n \leq \overline{u}$, encontramos que

$$\begin{cases} -\Delta(u_{n+1} - u_n) + k(u_{n+1} - u_n) & \leq & 0 & \text{em } \Omega \\ u_{n+1} - u_n & \leq & 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.6}$$

Assim, o Princípio do Máximo fraco nos leva a concluir que $u_n \leq u_{n+1}$.

Dessa forma, construímos a seguinte sequência:

$$\underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq \overline{u}. \tag{1.7}$$

Usando argumentos similares aos anteriores, conseguimos uma sequência $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^2(\overline{\Omega})$, tal que $v_0 = \overline{u}$ e, para todo $n \geq 1$, v_n é solução única do problema

$$\begin{cases} -\Delta v_n + kv_n & = & g(x, v_{n-1}) + kv_{n-1} + f(x) & \text{em } \Omega \\ v_n & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.8}$$

Tal sequência satisfaz

$$\underline{u} \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots \leq v_2 \leq v_1 \leq \overline{u}. \tag{1.9}$$

Afirmamos que $u_k \leq v_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. De fato, para $k = 0$, temos $u_0 = \underline{u} \leq \overline{u} = v_0$. Supondo que vale para $k-1$, temos que

$$\begin{aligned} -\Delta v_k + k v_k &= g(x, v_{k-1}) + k v_{k-1} + f(x) \\ &\geq g(x, u_{k-1}) + k u_{k-1} + f(x) \\ &= -\Delta u_k + k u_k, \end{aligned} \tag{1.10}$$

o que implica

$$\begin{cases} -\Delta(v_k - u_k) + k(v_k - u_k) \geq 0 & \text{em } \Omega \\ v_k - u_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.11}$$

Garantimos, então, pelo Princípio do Máximo fraco, que $u_k \leq v_k$, conforme afirmamos.

De (1.7) e (1.9) segue que

$$\underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots \leq v_2 \leq v_1 \leq \overline{u}. \tag{1.12}$$

Em virtude de (1.12) e da monotonicidade das sequências $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existem funções U e V, definidas em $\overline{\Omega}$, tais que

$$U(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) \quad \text{e} \quad V(x) = \lim_{n\to\infty} v_n(x).$$

Isto, juntamente com o fato de $u_n \leq v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, implica que $\underline{u} \leq U \leq V \leq \overline{u}$.

Notemos agora que U e V são soluções do problema (P).

Defina a sequência $h_n = |u_n - U|^p$, $1 \leq p < +\infty$. É claro que h_n converge pontualmente para 0 em Ω. Como $|u_n|, |U| \leq R$ em Ω, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos

$$|h_n| = |u_n - U|^p \leq 2^p(|u_n|^p + |U|^p) \leq 2^p(R^p + R^p) = 2^{p+1}R^p,$$

onde $2^{p+1}R^p \in L^1(\Omega)$. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\|u_n - U\|_p^p = \int_\Omega |u_n - U|^p \longrightarrow 0,$$

ou seja,

$$u_n \longrightarrow U \quad \text{em} \quad L^p(\Omega). \tag{1.13}$$

Do fato de g ser contínua na segunda variável, temos $g(x, u_n(x)) \to g(x, U(x))$ pontualmente em Ω. Como $|g(x, u_n(x))| \leq \tilde{k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \Omega$, segue, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$g(x, u_n(x)) \longrightarrow g(x, U(x)) \quad \text{em} \quad L^p(\Omega). \tag{1.14}$$

Assim, concluímos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{g(\cdot, u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em $L^p(\Omega)$.

Sejam

$$\begin{cases} -\Delta u_n + k u_n &= g(x, u_{n-1}) + k u_{n-1} + f(x) \\ -\Delta u_m + k u_m &= g(x, u_{m-1}) + k u_{m-1} + f(x), \end{cases} \tag{1.15}$$

para $m, n \in \mathbb{N}$ fixados. Subtraindo $(1.15)_1$ de $(1.15)_2$, temos que

$$-\Delta(u_n - u_m) + k(u_n - u_m) = g(x, u_{n-1}) - g(x, u_{m-1}) + k(u_{n-1} - u_{m-1}).$$

Como $u_n, u_m \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$, aplicando o Lema A.18, encontramos que

$$\begin{aligned} ||u_n - u_m||_{W^{2,p}(\Omega)} &\leq C||(-\Delta + k)(u_n - u_m)||_{L^p(\Omega)} \\ &= C\left(||g(x, u_{n-1}) - g(x, u_{m-1})||_{L^p(\Omega)} + k||u_{n-1} - u_{m-1}||_{L^p(\Omega)}\right). \end{aligned}$$

Logo, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $W^{2,p}(\Omega)$, pois $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{g(\cdot, u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Como $W^{2,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach, existe $\tilde{U} \in W^{2,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to \tilde{U}$ em $W^{2,p}(\Omega)$. Além disso, por

$$\left\|u_n - \tilde{U}\right\|_p \leq \left\|u_n - \tilde{U}\right\|_{2,p}$$

segue que $u_n \to \tilde{U}$ em $L^p(\Omega)$. Assim, pela unicidade do limite, obtemos $U = \tilde{U}$ q.t.p., e portanto,

$$u_n \to U \quad \text{em} \quad W^{2,p}(\Omega). \tag{1.16}$$

Como u_n é solução do problema (1.2), temos que

$$\int_\Omega \nabla u_{n+1} \nabla \phi + k \int_\Omega u_{n+1}\phi = \int_\Omega g(x, u_n)\phi + k \int_\Omega u_n \phi + \int_\Omega f\phi, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Aplicando o limite na igualdade acima, segue por (1.14) e (1.16) que

$$\int_\Omega \nabla U \nabla \phi + k \int_\Omega U\phi = \int_\Omega g(x, U)\phi + k \int_\Omega U\phi + \int_\Omega f\phi,$$

o que implica
$$\int_\Omega \nabla U \nabla \phi = \int_\Omega \left[g(x,U) + f(x)\right] \phi.$$

Uma vez que $u_n \to U$ em $W^{1,p}(\Omega)$ e $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, temos que $U \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Logo, $U \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta U &= g(x,U) + f(x) & \text{em } \Omega \\ U &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.17}$$

Se $p > N$ é tal que $1 - N/p = \alpha$, temos a imersão $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Como $U \in W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p \in [1,\infty)$, escolhamos p de forma que tenhamos U e $g(x,U) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. O Teorema A.19 nos garante que $U \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

De maneira similar, concluímos que $V \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ é solução para o problema (P).

Mostremos a existência de soluções minimal e maximal com respeito ao intervalo $[\underline{u}, \overline{u}]$.

Seja u uma solução do problema (P), com $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$. Para verificarmos que

$$u_k \leq u \leq v_k, \ \forall k \in \mathbb{N}, \tag{1.18}$$

utilizaremos indução sobre k. Notemos que para $k = 0$, vale

$$u_0 = \underline{u} \leq u \leq \overline{u} = v_0.$$

Suponhamos que para $k-1$ as desigualdades em (1.18) sejam válidas. Assim,

$$g(x,u_{k-1}) + ku_{k-1} \leq g(x,u) + ku$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} -\Delta u + ku &= g(x,u) + ku + f(x) \\ &\geq g(x,u_{k-1}) + ku_{k-1} + f(x) \\ &= -\Delta u_k + ku_k. \end{aligned}$$

Assim, pelo Princípio do Máximo fraco, temos que $u \geq u_k$. De forma análoga, concluímos que $u \leq v_k$.

Portanto, pela forma como U e V foram definidas, temos

$$U \leq u \leq V.$$

■

Observação 1.8 *Pode-se, eventualmente, ter $U = V$. Esse é o caso quando se tem unicidade de solução entre a sub e supersolução.*

1.1.2 Prova do Teorema 1.2

Para provarmos a existência de solução para o problema (P_t), busquemos uma sub e uma supersolução para o mesmo, a fim de utilizarmos a Proposição 1.7. Faremos isso nos lemas a seguir.

Lema 1.9 *Suponhamos (g_0). Então existem números $c \geq 0$, $\underline{\mu}$ e $\overline{\mu}$ tais que $\underline{\mu} < \lambda_1 < \overline{\mu}$ e*

(i) $g(x,s) \geq \underline{\mu}s - c$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \overline{\Omega}$;

(ii) $g(x,s) \geq \overline{\mu}s - c$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \overline{\Omega}$.

Prova. A condição (g_0) nos garante a existência de números $\underline{\mu}$ e $\overline{\mu}$, tais que

$$\limsup_{s\to-\infty} \frac{g(x,s)}{s} \ \leq \ \underline{\mu} \ < \ \lambda_1 \ < \ \overline{\mu} \ \leq \ \liminf_{s\to+\infty} \frac{g(x,s)}{s}.$$

E ainda, como tais limites são uniformes em $x \in \overline{\Omega}$, exitem $s_1, s_2 > 0$ suficientemente grandes tais que, para todo $x \in \overline{\Omega}$, valem

$$\frac{g(x,s)}{s} \leq \underline{\mu}, \quad \forall s \leq -s_1 \quad e \quad \frac{g(x,s)}{s} \geq \overline{\mu}, \quad \forall s \geq s_2.$$

Seja $s_0 = \max\{s_1, s_2\}$. Assim,

$$\begin{cases} g(x,s) \geq \underline{\mu}s, & \forall s \in (-\infty, -s_0] \ \text{ e } \ \forall x \in \overline{\Omega} \\ g(x,s) \geq \overline{\mu}s, & \forall s \in [s_0, +\infty] \ \text{ e } \ \forall x \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Tomemos $c = \max\left\{ \max_{\substack{x\in\overline{\Omega} \\ s\in[-s_0,s_0]}} |\underline{\mu}s - g(x,s)|; \ \max_{\substack{x\in\overline{\Omega} \\ s\in[-s_0,s_0]}} |\overline{\mu}s - g(x,s)| \right\}$, daí

$$\begin{cases} g(x,s) \geq \underline{\mu}s - c, & \forall s \in [-s_0, s_0] \ \text{ e } \ \forall x \in \overline{\Omega}, \\ g(x,s) \geq \overline{\mu}s - c, & \forall s \in [-s_0, s_0] \ \text{ e } \ \forall x \in \overline{\Omega}, \end{cases}$$

o que implica

$$\begin{cases} g(x,s) \geq \underline{\mu}s - c, & \forall s \in (-\infty, s_0] \ \text{ e } \ \forall x \in \overline{\Omega}, \\ g(x,s) \geq \overline{\mu}s - c, & \forall s \in [-s_0, +\infty) \ \text{ e } \ \forall x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{1.19}$$

Agora, notemos que se $s > s_0$, temos que

$$g(x,s) \geq \overline{\mu}s - c \geq \underline{\mu}s - c \quad \Rightarrow \quad g(x,s) \geq \underline{\mu}s - c, \;\; \forall s \in (s_0, +\infty) \;\text{ e }\; \forall x \in \overline{\Omega}. \quad (1.20)$$

Por outro lado, se $s < -s_0$, obtemos que

$$g(x,s) \geq \underline{\mu}s - c \geq \overline{\mu}s - c \quad \Rightarrow \quad g(x,s) \geq \overline{\mu}s - c, \;\; \forall s \in (-\infty, -s_0) \;\text{ e }\; \forall x \in \overline{\Omega}. \quad (1.21)$$

Com (1.19), (1.20) e (1.21) concluímos a prova.

■

Lema 1.10 (Existência de Subsolução) *Suponhamos* (g_0). *Dada* $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, *existe uma subsolução* $w \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, *com* $w = 0$ *sobre* $\partial\Omega$, *tal que* $w < v$ *em* Ω, *para toda* v *supersolução de* (P) *que se anula sobre* $\partial\Omega$.

Prova. Pelo Lema 1.9, existem $c \geq 0$, $\underline{\mu}$ e $\overline{\mu}$ tais que $\underline{\mu} < \lambda_1 < \overline{\mu}$, (i) e (ii) são satisfeitas. Tomemos c de forma que as desigualdades sejam estritas. Seja w a única solução $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de

$$\begin{cases} -\Delta w - \underline{\mu} w = f(x) - c & \text{em } \Omega \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela condição (i), temos que

$$-\Delta w = f(x) + \underline{\mu} w - c < g(x,w) + f(x), \quad \text{em } \Omega.$$

Logo, w é subsolução de (P) que se anula sobre $\partial\Omega$.

Seja u uma supersolução de (P) que se anula sobre $\partial\Omega$. Assim,

$$\begin{cases} -\Delta u + \Delta w \geq g(x,u) + c - \underline{\mu} w & \text{em } \Omega \\ u - w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

o que implica, novamente pela condição (i), que

$$\begin{cases} -\Delta(u-w) - \underline{\mu}(u-w) > 0 & \text{em } \Omega \\ u - w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.22)$$

Note que, se $u - w \equiv 0$, teríamos

$$-\Delta(u-w) - \underline{\mu}(u-w) = 0 \;\text{ em }\; \Omega,$$

contradizendo o problema $(1.22)_1$.

Finalmente, como $\underline{\mu} < \lambda_1$ e $u - w \not\equiv 0$, decorre do Princípio do Máximo (ver Teorema B.1 no Apêndice B) que $u - w > 0$.

$\blacksquare$

Observação 1.11 *Note que podemos supor apenas $f \in L^\infty(\Omega)$ e garantirmos uma subsolução $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Tal fato segue da aplicação dos Teoremas A.17 e A.14, nesta ordem.*

Lema 1.12 (Existência de Supersolução) *Se $f_1 \in M^\perp$, então existe $t \in \mathbb{R}$ tal que (P_t) tem uma supersolução.*

Prova. Fixemos $Q > 0$ e definamos

$$m = \max\{|g(x,s) + f_1(x)|; x \in \overline{\Omega}, 0 \leq s \leq Q\}.$$

Escolhamos agora subdomínios

$$\Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2 \subset \overline{\Omega}_2 \subset \Omega,$$

onde $|\Omega \backslash \Omega_1| \leq \delta$ para uma escolha futura de $\delta > 0$. Consideremos a função $H \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que

$$H \equiv m \text{ em } \Omega\backslash\Omega_2, \;\; H \equiv 0 \text{ em } \Omega_1 \;\text{ e }\; 0 \leq H \leq m \text{ em } \Omega.$$

Seja v uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta v &= H \quad\quad \text{em } \Omega \\ v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Notemos que se $m = 0$, então $H \equiv 0$, e portanto, $v \equiv 0$ em Ω. Tomando $t < 0$, temos que $t\phi_1 < 0$, pois ϕ_1 é positiva. Assim, uma vez que $m = 0$, obtemos que

$$-\Delta v = 0 > t\phi_1 = t\phi_1 + g(x,v) + f_1 \text{ em } \Omega.$$

Assim, $v \equiv 0$ é uma supersolução para o problema (P_t) que se anula sobre $\partial\Omega$ para todo $t < 0$.

No caso em que $m > 0$, segue, pelo Princípio do Máximo forte (ver Teorema A.16 no Apêndice A), que $v > 0$ em Ω. Pelo Lema A.18, temos que

$$\begin{aligned} ||v||_{W^{2,p}(\Omega)} &\leq C||H||_p \\ &\leq Cm(|\Omega \backslash \Omega_1|)^{1/p} \\ &\leq Cm\delta^{1/p}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Tomando $p = N$ em (1.23), como $W^{2,N}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, segue do Teorema A.14, que

$$||v||_\infty \leq \bar{C}||v||_{2,p} \leq C\bar{C}m\delta^{1/N}.$$

Escolhendo δ de forma que $C\bar{C}m\delta^{1/N} \leq Q$, encontramos que

$$0 < v \leq Q.$$

Agora, verifiquemos para quais $t \in \mathbb{R}$ temos $H \geq m + t\phi_1$. Observemos que, se $x \in \Omega \backslash \Omega_2$, então $H = m$. Daí

$$H = m > m + t\phi_1 \text{ para } t < 0.$$

Se $x \in \Omega_2$, basta tomar $t \leq -\dfrac{m}{c}$, onde $c > 0$ é tal que $\phi_1(x) \geq c$ em Ω_2, e teremos que

$$H \geq 0 \geq m + t\phi_1.$$

Assim,

$$-\Delta v = H \geq m + t\phi_1 \geq g(x, v) + t\phi_1 + f_1(x) \text{ em } \Omega, \, \forall t \leq -\frac{m}{c}.$$

Dessa forma, concluímos que v é uma supersolução de (P_t) que se anula sobre $\partial\Omega$.

∎

Observação 1.13 *Note que Q é arbitrário e m depende de Q. Assim, se $m \equiv 0$, para todo $Q > 0$, temos que $g(x, s) = -f_1(x)$, $\forall s \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in \overline{\Omega}$. Consequentemente, o problema principal se reduziria a $-\Delta u = t\phi_1$, tendo como única solução $u = \dfrac{t}{\lambda_1}\phi_1$. Sendo assim, trataremos apenas do caso em que $m > 0$.*

Observação 1.14 *No caso em que $f \in L^\infty(\Omega)$, ainda preservamos a integridade do Lema 1.12, uma vez que a demonstração do mesmo independe do espaço ao qual pertence a função f.*

Lema 1.15 (Não existência de solução) *Se a condição* (g_0) *é válida, então existe um número* τ *(independente de* f_1*) tal que, para todo* $t > \tau$*, o problema* (P_t) *não tem solução.*

Prova. Seja u uma solução do problema (P_t). Da definição de solução fraca, temos que

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \nabla u \nabla \phi_1 &= \int_\Omega g(x,u)\phi_1 + t \underbrace{\int_\Omega \phi_1^2}_{=1} + \underbrace{\int_\Omega f_1\phi_1}_{=0} \\ &= \int_\Omega g(x,u)\phi_1 + t. \end{aligned}$$

Como

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi_1 = \lambda_1 \int_\Omega u\phi_1,$$

obtemos que

$$\lambda_1 \int_\Omega u\phi_1 = \int_\Omega g(x,u)\phi_1 + t.$$

Utilizando o Lema 1.9, segue que

$$\begin{cases} \lambda_1 \displaystyle\int_\Omega u\phi_1 \geq \underline{\mu} \int_\Omega u\phi_1 - c\int_\Omega \phi_1 + t \\ \lambda_1 \displaystyle\int_\Omega u\phi_1 \geq \overline{\mu} \int_\Omega u\phi_1 - c\int_\Omega \phi + t, \end{cases}$$

daí,

$$\begin{cases} t \;\leq\; c\displaystyle\int_\Omega \phi_1 + \underbrace{(\lambda_1 - \underline{\mu})}_{>0}\int_\Omega u\phi_1 \;\leq\; c\int_\Omega \phi_1, \text{ se } \int_\Omega u\phi_1 \leq 0 \\ t \;\leq\; c\displaystyle\int_\Omega \phi_1 + \underbrace{(\lambda_1 - \overline{\mu})}_{<0}\int_\Omega u\phi_1 \;\leq\; c\int_\Omega \phi_1, \text{ se } \int_\Omega u\phi_1 \geq 0. \end{cases}$$

Portanto, em qualquer caso, a existência de solução u para o problema (P_t) implica necessariamente que $t \leq \tau \equiv c\displaystyle\int_\Omega \phi_1$. Logo, se $t > \tau$, o problema (P_t) não possui solução.

■

Corolário 1.16 *Suponhamos que vale* (g_0)*. Se, para uma função* $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *dada, o problema* (P) *tem uma solução, então o problema* (P) *tem uma solução minimal* $u_{\min}$*, isto é,* $u_{\min} \leq u$ *em* $\overline{\Omega}$ *para toda* u *solução de* (P)*.*

Prova. Seja u solução de (P) (que também é supersolução de (P) que se anula sobre $\partial\Omega$). Pelo Lema 1.10, existe subsolução w de (P) que satisfaz $w < u$. Agora, pela Proposição 1.7, temos que $w < U \leq u$, onde U é uma solução de (P). Notemos que $U = u_{\min}$, pois, uma vez que w não depende da supersolução u e a solução U é obtida por iterações que também independe de u, temos que qualquer solução v que se anula sobre $\partial\Omega$ satisfaz $w < v$ e, portanto, $w < U \leq v$.

■

Lema 1.17 *Suponhamos (g_0). Se o problema (P) tem uma solução para uma função $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ dada, então o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u &= g(x,u) + h(x) \qquad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.24}$$

com $h \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $h \leq f$, tem também solução.

Prova. Seja v uma solução de (P). Por hipótese, temos que

$$\begin{cases} -\Delta v &= g(x,v) + f(x) \geq g(x,v) + h(x) \qquad \text{em } \Omega \\ v &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

ou seja, v é supersolução do problema (1.24) que se anula sobre $\partial\Omega$. Pelo Lema 1.10, existe uma subsolução w de (1.24) tal que $w < v$. Assim, pela Proposição 1.7 garantimos que (1.24) possui uma solução U.

■

Corolário 1.18 *Seja $f_1 \in M^\perp$. Suponhamos que (g_0) seja válida e que (P_t) tenha solução para dado $t_0 \in \mathbb{R}$. Então (P_t) também tem solução para qualquer $t < t_0$.*

Prova. Denotemos $f = t_0\phi_1 + f_1$ e $h = t\phi_1 + f_1$. Assim, para $t < t_0$, temos que $h < f$ e, portanto, a existência da solução desejada decorre do Lema 1.17.

■

Finalmente, apresentemos a prova do Teorema 1.2.

Prova. Pelo Lema 1.12, dada $f_1 \in M^\perp$ existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que o problema (P_t) tem uma supersolução $\overline{u}$ que se anula sobre $\partial\Omega$. O Lema 1.10 garante a existência de uma subsolução $\underline{u}$, para $f = t_0\phi + f_1$, tal que $\underline{u} < \overline{u}$. Podemos então construir uma solução u tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$. Assim, para qualquer $t < t_0$, pelo Corolário 1.18, temos que (P_t) tem solução. O conjunto de $t's$ onde (P_t) tem solução para f_1 fixada é limitado superiormente. Isto é consequência do Lema 1.15. Logo, podemos definir

$$\alpha(f_1) = \sup\{t \in \mathbb{R}; \text{ o problema } (P_t) \text{ possui solução para } f = t\phi_1 + f_1\}.$$

O resultado segue da definição do supremo, juntamente com o Corolário 1.18.

■

1.2 Método de Sub e Supersolução via Técnica Variacional

Pretendemos discutir nesta seção a existência de solução para (P), utilizando um método de sub e supersolução via técnica variacional.

Vejamos algumas definições.

Definição 1.19 *Diz-se que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma subsolução fraca do problema (P) se*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx \leq \int_\Omega g(x,u)v dx + \int_\Omega f(x)v dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \ v \geq 0.$$

Definição 1.20 *Diz-se que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma supersolução fraca do problema (P) se*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx \geq \int_\Omega g(x,u)v dx + \int_\Omega f(x)v dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \ v \geq 0.$$

Antes de continuarmos, mostremos que, de posse da condição (g_0), podemos supor sem perda de generalidade que $g(x,s) = 0$, $\forall s \leq C$, onde a constante C é tomada convenientemente.

Com efeito, seja $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\psi(s) = \begin{cases} 1; & \text{se} \quad s \in [-||\underline{u}||_\infty, +\infty) \\ 0; & \text{se} \quad s \in (-\infty, -||\underline{u}||_\infty - 1] \end{cases}$$

e $0 < \psi(s) < 1$, se $s \in (-||\underline{u}||_\infty - 1, -||\underline{u}||_\infty)$, onde $\underline{u}$ é uma subsolução do problema (P), obtida pelo Lema 1.10.

Definamos $\tilde{g}(x,s) = g(x,s)\psi(s)$. Observemos na figura 1.1 o comportamento da aplicação $\tilde{g}$ comparado com o da g, para um $x \in \overline{\Omega}$ fixado.

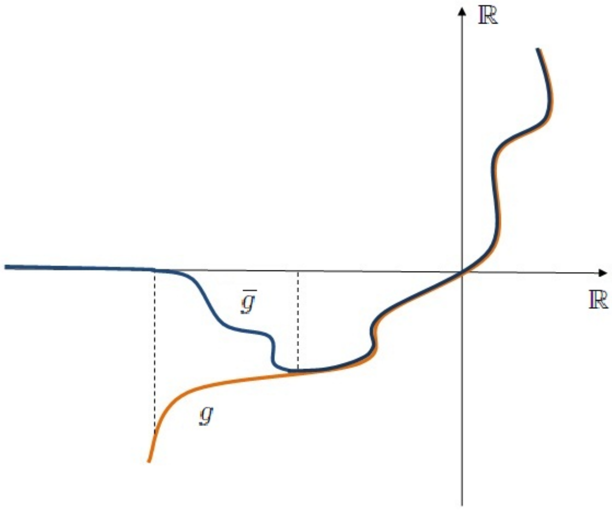

Figura 1.1: Truncamento da função g pela ψ

Seja $\tilde{u}$ solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \tilde{g}(x,u) + f(x) \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.25}$$

Como $\tilde{g}$ ainda satisfaz a condição (g_0) temos, pelo Lema 1.9, que

$$\tilde{g}(x,s) \geq \underline{\mu} s - c, \quad \forall x \in \Omega \ \text{ e } \ s \in \mathbb{R},$$

donde segue que

$$-\Delta\tilde{u} = \tilde{g}(x,\tilde{u}) + f(x) \geq \underline{\mu}\tilde{u} - c + f(x),$$

onde $\underline{\mu} < \lambda_1$. É sabido, pelo Lema 1.10, que a subsolução $\underline{u}$ para o problema (P), é solução do problema

$$-\Delta\underline{u} = \underline{\mu} u - c + f(x).$$

Assim,

$$-\Delta(\tilde{u} - \underline{u}) - \underline{\mu}(\tilde{u} - \underline{u}) > 0,$$

Pelo Princípio do Máximo fraco, temos $\tilde{u} \geq \underline{u}$, o que implica que $\tilde{u} \geq -\|\underline{u}\|_\infty$.

Pela forma como foi definido o truncamento, temos que

$$\tilde{g}(x,\tilde{u}) = g(x,\tilde{u}) \cdot 1 = g(x,\tilde{u}),$$

o que implica que $\tilde{u}$ é solução para o problema (P).

Portanto, podemos supor, ao invés de (g_0), a condição

$(\tilde{g}_0)$ existe $M_0 > 0$ tal que $g(x,s) = 0, \forall s \leq -M_0$ e $\liminf_{s\to+\infty} \dfrac{g(x,s)}{s} > \lambda_1$, uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$.

Observação 1.21 *Notemos que de posse das condições $(\tilde{g}_0)$ e (g_4) ou (g_4') ou (g_4''), juntamente com o fato da aplicação g ser contínua, temos que a condição (g_1) é satisfeita. Vejamos porque as condições $(\tilde{g}_0)$ e (g_4) implicam em (g_1). Da condição (g_4), dado $\varepsilon > 0$, existe $s_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left|\frac{g(x,s)}{s} - \gamma\right| < \varepsilon \Rightarrow |g(x,s)| < (\varepsilon + \gamma)|s|, \ \forall s \geq s_0.$$

Do truncamento feito na função $g(x,s)$, juntamente com o fato de ser contínua, garantimos uma limitação para a mesma no compacto $[-M_0, s_0]$, verificando assim a condição (g_1). Os outros casos seguem de forma análoga.

Seja $I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado ao problema (P), definido por:

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega H(x,u)dx,$$

onde $h(x,u) = g(x,u) + f(x)$ e $H(x,u) = \displaystyle\int_0^u h(x,\xi)d\xi$.

No que segue, precisaremos de condições que assegurarão as asserções:

(I_1) I está bem definido;

(I_2) $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$I'(u)\varphi = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi - \int_\Omega h(x,u)\varphi, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Para tal fim, como $h(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, vemos que pelo Teorema A.21, é suficiente considerarmos a hipótese (g_1).

Definição 1.22 *Dizemos que um funcional $F \in C^1(E, \mathbb{R})$, onde E é um espaço de Banach, satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c, ou de forma abreviada, que F satisfaz $(PS)_c$, se toda sequência $\{u_n\} \subset E$ de Palais-Smale, isto é,*

$$F(u_n) \longrightarrow c \quad e \quad \|F'(u_n)\|_{E'} \longrightarrow 0,$$

possui uma subsequência convergente. Dizemos que F satisfaz a condição de Palais-Smale, ou simplesmente que F satisfaz (PS), se satisfaz $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Mais adiante, iremos verificar a condição (PS) para o funcional energia I associado ao problema (P).

O teorema abaixo descreve um método de sub e supersolução via técninca variacional e é devido à D. G. de Figueiredo e S. Solimini [14].

Teorema 1.23 *Suponhamos que as condições (g_1) e (PS) são satisfeitas, e ainda, que existam $w, W \in H_0^1(\Omega)$ sub e supersolução fraca para o problema (P), respectivamente, com $w \leq W$. Se a função $g(x,s)$ é não-decrescente em $s \in [w(x), W(x)]$, para todo $x \in \Omega$, então existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $I(u_0) = \inf\limits_{[w,W]} I$, $I'(u_0) = 0$ e*

$$u_0 \in [w, W] = \{u \in H_0^1(\Omega);\ w(x) \leq u(x) \leq W(x), \forall x \in \Omega\}.$$

Prova. Tomemos $C = [w, W]$. Observemos que C é convexo e fechado. De fato, sejam $u_1, u_2 \in C$, temos que

$$\begin{cases} tu_1 + (1-t)u_2 \ \leq \ tW + (1-t)W = W \\ tu_1 + (1-t)u_2 \ \geq \ tw + (1-t)w = w \end{cases} \Rightarrow\ tu_1 + (1-t)u_2 \in [w, W],\ \forall t \in [0,1],$$

garantindo a convexidade de C. Seja $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $H_0^1(\Omega)$, assim, $u_n \to u$ q.t.p.em Ω, para uma subsequência se necessário. Daí,

$$\begin{cases} u_n \leq W \Rightarrow u \leq W \\ u_n \geq w \Rightarrow u \geq w \end{cases} \Rightarrow u \in [w, W]$$

e, portanto, C é fechado.

Como $H_0^1(\Omega)$ é isomorfo a $H^{-1}(\Omega)$, estamos identificando $I' : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ por $I' : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$. De posse que $I'(u)v = \langle u, v\rangle - \int_\Omega h(x,u)v dx$, temos

$$\langle I'(u), v\rangle = I'(u)v = \langle u, v\rangle - \int_\Omega h(x,u)v dx.$$

Aplicando o Teorema de Riesz, existe $Ku \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle I'(u), v\rangle = \langle u, v\rangle - \langle Ku, v\rangle,\ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Logo, $Ku = u - I'(u)$.

Afirmamos que K é uma aplicação de C em C, isto é, $K(C) \subseteq C$. De fato, seja $u \in [w, W]$. Uma vez que $g(x, \cdot)$ é não-decrescente em $[w(x), W(x)]$, para todo $x \in \Omega$, obtemos

$$h(x, w(x)) \leq h(x, u(x)) \leq h(x, W(x)).$$

Dado $v \in H_0^1(\Omega)$, com $v \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle w, v\rangle &\leq \int_\Omega h(x, w(x))v(x)dx \\
&\leq \int_\Omega h(x, u(x))v(x)dx \\
&\leq \int_\Omega h(x, W(x))v(x)dx \\
&\leq \langle W, v\rangle,
\end{aligned}$$

donde segue que

$$\langle w, v\rangle \leq \langle Ku, v\rangle \leq \langle W, v\rangle, \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ com } v \geq 0.$$

Pelo Princípio do Máximo fraco, vemos que

$$w \leq Ku \leq W \Rightarrow Ku \in C,$$

concluindo a validade da afirmação.

Observemos agora que I é limitada inferiormente em C. Seja $u \in C$, temos pela condição (g_1), que

$$\begin{aligned}
I(u) &= \frac{1}{2}||u||^2 - \int_\Omega H(x, u)dx \\
&\geq -\int_\Omega \int_0^{u(x)} h(x, \xi)d\xi dx \\
&\geq \int_\Omega \int_0^{u(x)} -|h(x, \xi)|d\xi dx \\
&\geq -C\int_\Omega |u(x)|dx - C_0\int_\Omega |u(x)|^{s+1}dx
\end{aligned}$$

Como $|u(x)| \leq \max\{|w(x)|, |W(x)|\}$, façamos $p(x) = \max\{|w(x)|, |W(x)|\}$, assim

$$\begin{aligned}
I(u) &\geq -C\int_\Omega |p(x)|dx - C_0\int_\Omega |p(x)|^{s+1}dx \\
&\geq C_1.
\end{aligned}$$

Em virtude do Teorema B.3 existe $u_0 \in [w, W]$ tal que $I'(u_0) = 0$ e $\inf\limits_{[w,W]} I = I(u_0)$.

■

Vejamos que podemos descartar o fato de g ser não-decrescente e concluir o mesmo resultado obtido acima a partir da condição (g_2).

Teorema 1.24 *Nas mesmas hipóteses do Teorema 1.23, exceto a suposição de que g é uma função não-decrescente em $s \in [w(x), W(x)]$, $\forall x \in \Omega$. Suponha contudo que vale (g_2). Então as conclusões do Teorema 1.23 se mantém.*

Prova. Tomemos $R = \max\{||w||_\infty, ||W||_\infty\}$. Como g é localmente Lipschitz em s e uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$, existe $M > 0$ satisfazendo

$$|g(x,s) - g(x,t)| \leq M|s-t|, \quad \forall s,t \in [-R,R], \ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Sejam $s_1, s_2 \in [-R,R]$. Supondo $s_1 \leq s_2$, temos $|s_1 - s_2| = s_1 - s_2$ e assim

$$g(x,s_1) - g(x,s_2) \leq M(s_2 - s_1),$$

o que implica

$$h(x,s_1) + Ms_1 \leq h(x,s_2) + Ms_2, \ \forall s_1, s_2 \in [-R,R].$$

Vemos então que a função $h_M(x,s) = h(x,s) + Ms$ é não-decrescente para $s \in [-R,R]$. Em particular, $h_M(x,s)$ é não-decrescente em $s \in [w(x), W(x)], \forall x \in \Omega$. Denotemos

$$\langle u,v\rangle_M = \langle u,v\rangle + M\int_\Omega uv dx.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} H_M(x,s) &= \int_0^s h_M(x,\xi)d\xi \\ &= \int_0^s h(x,\xi)d\xi + M\int_0^s \xi d\xi \\ &= H(x,s) + \frac{M}{2}s^2. \end{aligned}$$

Consideremos o problema

$$\begin{cases} \langle u,v\rangle_M = \displaystyle\int_\Omega h_M(x,u)v \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

e notemos que

$$I_M(u) = \frac{1}{2}||u||_M^2 + \int_\Omega H_M(x,u)dx = \frac{1}{2}||u||^2 + \int_\Omega H(x,u)dx = I(u).$$

Desse modo, I_M é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e satisfaz a condição (PS). Podemos então aplicar o Teorema 1.23 e concluir o resultado do mesmo.

■

1.2.1 Condição de Palais-Smale (PS)

Provaremos agora a importante propriedade de compacidade com respeito ao funcional energia I, requerida na hipótese do Teorema 1.24. Consideraremos dois casos, onde, em cada, vamos impor diferentes condições.

A partir de (g_1) temos, pelo Teorema A.22, que basta verificar que uma sequência (PS) é limitada.

Caso 1: Sob as hipóteses do Teorema 1.4.

Seja $\{u_m\} \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência (PS) para I, isto é,

$$|I(u_m)| \leq M, \ \forall m \in \mathbb{N} \tag{1.26}$$

e

$$I'(u_m) \to 0, \text{ quando } m \to +\infty. \tag{1.27}$$

Da condição (1.27), temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 > 0$ tal que

$$||I'(u_m)||_{H^{-1}} < \varepsilon, \ \forall m > m_0.$$

Observemos, então, que

$$\begin{aligned} I(u_m) - \frac{1}{\theta}I'(u_m)u_m &\leq |I(u_m) - \frac{1}{\theta}I'(u_m)u_m| \\ &\leq |I(u_m)| + \frac{1}{\theta}\|I'(u_m)\|_{H^{-1}} \cdot \|u_m\| \\ &\leq M + \frac{1}{\theta}\varepsilon\|u_m\|. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} I(u_m) - \frac{1}{\theta}I'(u_m)u_m &= \frac{1}{2}||u_m||^2 - \int_\Omega G(x, u_m) - \int_\Omega f(x)u_m \\ &\quad -\frac{1}{\theta}||u_m||^2 + \frac{1}{\theta}\int_\Omega g(x, u_m)u_m + \frac{1}{\theta}\int_\Omega f(x)u_m \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)||u_m||^2 - \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)\int_\Omega f(x)u_m \\ &\quad - \int_\Omega \left(G(x, u_m) - \frac{1}{\theta}g(x, u_m)u_m\right), \end{aligned} \tag{1.29}$$

onde denotamos $G(x,t) = \displaystyle\int_0^t g(x,\xi)d\xi$.

Consideremos $\Omega = \Omega_m \cup \tilde{\Omega}_m \cup \overline{\Omega}_m$, com $\Omega_m = \{x \in \Omega; u_m(x) \leq -||\underline{u}||_\infty - 1\}$, $\tilde{\Omega}_m = \{x \in \Omega; -||\underline{u}||_\infty - 1 \leq u_m(x) \leq s_0\}$ e $\overline{\Omega}_m = \{x \in \Omega; u_m(x) \geq s_0\}$.

Denotando $A = G(x, u_m) - \dfrac{1}{\theta} g(x, u_m) u_m$, notemos que, pela forma como o conjunto Ω_m foi definido, segue, do truncamento feito sobre a aplicação g, que

$$\int_{\Omega_m} A = 0. \tag{1.30}$$

Garantimos ainda, pela condição (g_3'), que

$$\int_{\overline{\Omega}_m} A \geq 0. \tag{1.31}$$

Por fim, da continuidade das funções g e G no compacto $\overline{\Omega} \times [-\|\underline{u}\|_\infty - 1, s_0]$, temos que estas são limitadas e, portanto, que

$$\int_{\tilde{\Omega}_m} A \leq C. \tag{1.32}$$

Das condições (1.30), (1.31) e (1.32), obtemos, pela condição (1.29), que

$$I(u_m) - \frac{1}{\theta} I'(u_m) u_m \quad \geq \quad C||u_m||^2 - C. \tag{1.33}$$

Relacionando as desigualdades (1.28) e (1.33), concluímos que

$$C\|u_m\|^2 - C\|u_m\| - C \leq 0. \tag{1.34}$$

Observando a inequação acima com uma forma quadrática em $\|u_m\|$, temos que $\|u_m\|$ deve ser limitada.

Caso 2: Sob as hipóteses do Teorema 1.3.

A demonstração da condição (PS) segue por contradição, ou seja, supondo que $\|u_m\| \longrightarrow +\infty$, quando $m \longrightarrow +\infty$.

Consideremos $v_m := \dfrac{u_m}{\|u_m\|}$. Como $\|v_m\| = 1$ temos que $v_m \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$, pois $H_0^1(\Omega)$ é Banach e reflexivo. Pela imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, com $p \in [1, 2^*)$, temos que $v_m \longrightarrow v$ em $L^p(\Omega)$. Assim, pelo Teorema A.5, $v_m \longrightarrow v$ q.t.p. em Ω e, existe uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|v_m(x)| \leq h(x) \in L^p(\Omega)$ q.t.p. em Ω. As convergências obtidas acima ocorrem a menos de uma subsequência.

Dessa forma, temos que v é solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta v &= \gamma v \quad \text{em } \Omega \\ v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.35}$$

Com efeito, como

$$\frac{I'(u_m)\phi}{\|u_m\|} = \int_\Omega \nabla v_m \nabla \phi - \int_\Omega \frac{g(x,u_m)}{u_m} v_m \phi - \int_\Omega f(x) \frac{\phi}{\|u_m\|}, \ \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

$I'(u_m) \longrightarrow 0$, $v_m \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$ e $\|u_m\| \longrightarrow +\infty$, obtemos, aplicando o limite quando $m \longrightarrow +\infty$, que

$$0 = \int_\Omega \nabla v \nabla \phi - \lim_{m \to +\infty} \int_\Omega \frac{g(x,u_m)}{u_m} v_m \phi \tag{1.36}$$

Denotemos $\Omega_+ = \{x \in \Omega; v(x) > 0\}$, $\Omega_- = \{x \in \Omega; v(x) < 0\}$ e $\Omega_0 = \{x \in \Omega; v(x) = 0\}$. Notemos que, em Ω_+, como $v_m \longrightarrow v$ q.t.p. em Ω e $\|u_m\| \longrightarrow +\infty$, temos, pela forma como foi definida a sequência v_m, que $u_m(x)$ deve convergir q.t.p. em Ω para $+\infty$. Em Ω_-, um raciocínio análogo ao anterior garante que $u_m(x)$ deve convergir q.t.p. em Ω para $-\infty$.

Pela condição (g_3), dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{|g(x,s)|}{|s|} \leq \varepsilon, \ \forall |s| \leq \delta. \tag{1.37}$$

Temos ainda que

$$\frac{|g(x,s)|}{|s|} \leq \frac{c}{|s|} + c \leq \frac{c}{\delta} + c, \ \forall |s| \geq \delta, \tag{1.38}$$

o que implica

$$\left| \frac{g(x,s)}{s} \right| \leq C, \ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{1.39}$$

Assim, como $|v_m(x)| \leq h(x) \in L^p(\Omega)$, com $p \in [1, 2^*)$, e por (1.39), obtemos que

$$\left| \frac{g(x,u_m)}{u_m} v_m \phi \right| = \left| \frac{g(x,u_m)}{u_m} \right| |v_m||\phi| \leq Ch|\phi| \in L^1(\Omega), \tag{1.40}$$

Observemos agora o comportamento da função $\dfrac{g(x,u_m)}{u_m} v_m \phi$ em cada um dos subconjuntos de Ω definidos acima.

- Em Ω_+:

  Como $v_m \longrightarrow v$ q.t.p. em Ω_+ e segue do domínio em questão que $u_m \longrightarrow +\infty$, temos, pela condição (g_4), que

  $$\frac{g(x,u_m)}{u_m} v_m \phi \longrightarrow \gamma v \phi, \ \text{q.t.p. em } \Omega_+. \tag{1.41}$$

  Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos que

  $$\int_{\Omega_+} \frac{g(x,u_m)}{u_m} v_m \phi \longrightarrow \int_{\Omega_+} \gamma v \phi. \tag{1.42}$$

- Em Ω_-:

  Como $v_n \longrightarrow v$ q.t.p. em Ω_- e, pelo truncamento feito na função g, temos $\displaystyle\lim_{s\to-\infty}\frac{g(x,u_m)}{u_m} = 0$ q.t.p. , segue que

$$\frac{g(x,u_m)}{u_m}v_m\phi \longrightarrow 0, \text{ q.t.p. em } \Omega_-, \tag{1.43}$$

  Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos que

$$\int_{\Omega_-}\frac{g(x,u_m)}{u_m}v_m\phi \longrightarrow 0. \tag{1.44}$$

- Em Ω_0:

  Como $v_m \longrightarrow 0$ q.t.p. em Ω_0 e $\dfrac{g(x,u_m)}{u_m}$ é limitada, segue que

$$\frac{g(x,u_m)}{u_m}v_m\phi \longrightarrow 0v\phi$$

  Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos que

$$\int_{\Omega_0}\frac{g(x,u_m)}{u_m}v_m\phi \longrightarrow 0. \tag{1.45}$$

Consequentemente, por (1.42), (1.44) e (1.45), encontramos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\frac{g(x,u_m)}{u_m}v_m\phi &= \int_{\Omega_+}\frac{g(x,u_m)}{u_m}v_m\phi + \int_{\Omega_-}\frac{g(x,u_m)}{u_m}v_m\phi + \int_{\Omega_0}\frac{g(x,u_n)}{u_m}v_m\phi \\ &\longrightarrow \gamma\int_{\Omega_+}v\phi.\end{aligned}$$

donde segue, por (1.36), que

$$\int_{\Omega}\nabla v\nabla\phi = \gamma\int_{\Omega}v\phi,\ \forall\phi\in H_0^1(\Omega). \tag{1.46}$$

Observemos, ainda, que $v \neq 0$. De fato, como

$$\frac{I(u_m)}{\|u_m\|^2} = \|v_m\|^2 - \int_{\Omega}\frac{G(x,u_m)}{u_m^2}v_m^2 - \int_{\Omega}\frac{f(x)}{\|u_m\|}v_m,$$

$I(u_n)$ é limitada, $\|u_n\| \longrightarrow +\infty$ e $\|v_n\| = 1$, ao passar o limite quando $m \longrightarrow +\infty$ na igualdade na acima, obtemos

$$1 = \lim_{m\to+\infty}\int_{\Omega}\frac{G(x,u_m)}{u_m^2}v_m^2. \tag{1.47}$$

Afirmação:

$$\int_{\Omega} \frac{G(x,u_m)}{u_m^2} v_m^2 \longrightarrow \int_{\Omega_+} \frac{\gamma}{2} v^2. \tag{1.48}$$

Com efeito, por (1.39), temos

$$|g(x,s)| \leq C|s| \implies \left| \int_0^t g(x,s)ds \right| \leq \int_0^t C|s|ds, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Da definição de $G(x,s)$, segue que

$$|G(x,t)| \leq \frac{C}{2}|t|^2 \implies \left| \frac{G(x,t)}{t^2} \right| \leq C, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\left| \frac{G(x,u_m)}{u_m^2} v_m^2 \right| = \left| \frac{G(x,u_m)}{u_m^2} \right| |v_m^2| \leq Ch^2 \in L^1(\Omega) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Observemos agora o comportamento da função $\dfrac{G(x,u_m)}{u_m} v_m \phi$ em cada um dos subconjuntos de Ω que foram definidos anteriormente.

- Em Ω_0:

  Como $v_m \longrightarrow 0$ q.t.p. em Ω_0 e $\dfrac{G(x,u_m)}{u_m}$ é limitada, temos

$$\frac{G(x,u_m)}{u_m} v_m^2 \longrightarrow 0, \text{ q.t.p. em } \Omega_0. \tag{1.49}$$

  Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{\Omega_0} \frac{G(x,u_m)}{u_m^2} v_m^2 \longrightarrow 0. \tag{1.50}$$

- Em Ω_-:

  Sabemos que

$$\lim_{s \to -\infty} \frac{g(x,s)}{s} = 0,$$

  isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $s_0 > 0$ tal que

$$\left| \frac{g(x,s)}{s} \right| < \varepsilon, \quad \forall s < -s_0.$$

  Integrando a desigualdade acima, obtemos que

$$\left| \int_t^0 g(x,s) \right| < \int_t^0 \varepsilon|s|, \quad \forall t < -s_0,$$

o que implica

$$|G(x,t)| < \frac{\varepsilon}{2}|t|^2, \quad \forall t < -s_0.$$

Assim, temos que

$$\lim_{s\to-\infty} \frac{G(x,s)}{s^2} = 0.$$

Disto segue que

$$\frac{G(x,u_m)}{u_m^2} v_m^2 \longrightarrow 0, \text{ q.t.p. em } \Omega_0.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\int_{\Omega_-} \frac{G(x,u_m)}{u_m^2} v_m^2 \longrightarrow 0. \tag{1.51}$$

- Em Ω_+:

Pela condição (g_4), dado $\varepsilon > 0$, existe $s_0 > 0$ tal que

$$\left|\frac{g(x,s)}{s} - \gamma\right| < \varepsilon, \quad \forall s > s_0.$$

Tomemos $s_1 > s_0$ tal que

$$\frac{\int_0^{s_0} g(x,t)dt}{s^2} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall s > s_1. \tag{1.52}$$

Notemos então que, por um lado

$$\begin{aligned}
\frac{G(x,s)}{s^2} &= \frac{\int_0^{s_0} g(x,t)dt}{s^2} + \frac{\int_{s_0}^{s} g(x,t)dt}{s^2} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(\gamma+\varepsilon)\int_s^{s_0} tdt}{s^2} \\
&\leq \frac{\gamma}{2} + \varepsilon, \quad \forall s > s_1.
\end{aligned}$$

Por um processo análogo, obtemos que

$$\frac{G(x,s)}{s^2} \geq \frac{\gamma}{2} - \varepsilon, \quad \forall s > s_1.$$

donde segue que

$$\lim_{s\longrightarrow+\infty} \frac{G(x,s)}{s^2} = \frac{\gamma}{2}. \tag{1.53}$$

Logo,

$$\frac{G(x,u_m)}{u_m^2} v_m^2 \longrightarrow \frac{\gamma}{2} v^2, \quad \text{q.t.p. em } \Omega_+. \tag{1.54}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_{\Omega_+} \frac{G(x,u_m)}{u_m^2} v_m^2 \longrightarrow \int_{\Omega_+} \frac{\gamma}{2} v^2. \tag{1.55}$$

Consequentemente, por (1.50), (1.51) e (1.55), verificamos (1.48). Assim, segue, por (1.56) e (1.48), que

$$\frac{\gamma}{2}\|v\|_{2,\Omega_+} = \int_{\Omega_+} \frac{\gamma}{2}v^2 = 1 \tag{1.56}$$

o que implica que, $v \neq 0$ em Ω.

Por fim, verifiquemos que $v > 0$. De fato, como

$$\frac{I'(u_m)}{\|u_m\|}v^- = \int_\Omega \nabla v_m \nabla v^- - \int_\Omega \frac{g(x,u_m)}{\|u_m\|}v^- - \int_\Omega \frac{f(x)v^-}{\|u_m\|}, \tag{1.57}$$

temos, aplicando o limite quando $m \longrightarrow +\infty$, que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \nabla v \nabla v^- - \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \frac{g(x,u_m)}{u_m}v^- \\ &= \|v^-\|^2. \end{aligned}$$

Portanto, $\|v^-\| = 0$, o implica que $v \geq 0$ em Ω.

Concluímos então que v é uma solução não-trivial para o problema (1.35), positiva em Ω, o que é um absurdo, pois, teríamos $\gamma = \lambda_1$ e estamos supondo $\lambda_1 < \gamma$.

1.3 Não existência de solução

Nesta seção, mostraremos a condição de não existência de solução (i_α) dos Teoremas 1.3 e 1.4.

De posse da hipótese (g_0) e do fato da função f pertencer ao espaço $C(\overline{\Omega})$, garantimos a existência de uma sub e supersolução solução fraca para o problema (P_t), com $t < 0$ grande (ver Observações 1.11 e 1.14). Assim, a partir das hipóteses dos Teoremas 1.3 e 1.4 temos, pelo Teorema 1.24, que (P_t) tem solução para $t < 0$ grande.

Observemos, ainda, que preservamos o resultado do Lema 1.15 e do Corolário 1.18 no sentido fraco. Logo, o conjunto dos t's onde (P_t) tem solução para f_1 fixada é limitado superiormente, e assim, podemos definir

$$\alpha(f_1) = \sup\{t \in \mathbb{R};\ \text{o problema } (P_t) \text{ possui solução para } f = t\phi + f_1\}.$$

Portanto, a condição (i_α) e parte da condição (ii_α) (obtenção da primeira solução), seguem da definição do supremo, juntamente com o Corolário 1.18.

1.4 Existência de solução via Passo da Montanha

Nosso resultado de existência de uma segunda solução para o problema (P_t) será obtido utilizando-se a técnica do tipo *minimax*. Mais precisamente, a seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha devido à A. Ambrosetti e P. H. Rabinowitz [2].

Teorema 1.25 *Seja E um espaço de Banach real e $F \in C^1(E, \mathbb{R})$ que satisfaz (PS). Suponha que $F(0) = 0$ e as seguintes condições são válidas:*

(i) existem $\overline{\alpha}, r > 0$ tais que $F \,|_{\partial B_r(0)} \geq \overline{\alpha}$;

(ii) existe $e \in E$ tal que $||e|| > r$ e $F(e) \leq 0$.

Então, F possui um valor crítico $\overline{c} \geq \overline{\alpha}$. Além disso, $\overline{c}$ pode ser caracterizado por

$$\overline{c} = \inf_{\lambda \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} F(\lambda(t))$$

onde $\Gamma = \{\lambda \in C([0,1], E); \lambda(0) = 0 \;\; e \;\; \lambda(1) = e\}$.

1.4.1 Geometria do Passo da Montanha

A partir das condições dos Teoremas 1.3 e 1.4, garantimos pelo Teorema 1.24 a existência de um ponto crítico $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ para o funcional I, tal que, $u_0 \in [w, W]$ e $I(u_0) = \inf\limits_{[w,W]} I$, onde $w, W \in H_0^1(\Omega)$ são sub e supersolução do problema (P). Mostraremos, nesta subseção, que o funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por $J(u) = I(u + u_0) - I(u_0)$ tem a geometria do passo da montanha. Com este intuito, enunciaremos e demonstraremos os lemas a seguir.

Lema 1.26 *u_0 é um mínimo local na topologia $H_0^1(\Omega)$ no conjunto Q, dado por:*

$$Q = \{w \in C_0^1(\overline{\Omega});\ \underline{u}(x) < w(x) < \overline{u}(x),\ \forall x \in \overline{\Omega}\}.$$

Prova. Inicialmente, verifiquemos alguns resultados, são eles:

(i) $\dfrac{\partial(u_0 - \underline{u})}{\partial \eta} < 0$ sobre $\partial\Omega$;

(ii) $\dfrac{\partial(u_0 - \overline{u})}{\partial \eta} > 0$ sobre $\partial\Omega$.

Uma vez que u_0 é solução do problema (P) e $\underline{u}$ é solução do problema

$$-\Delta\underline{u} - \underline{\mu}\underline{u} = f(x) - c,$$

obtemos que

$$-\Delta(\underline{u} - u_0) + \underline{\mu}(\underline{u} - u_0) \leq 0.$$

Pelo Princípio do Máximo, concluímos que $u_0 - \underline{u} > 0$ em Ω. Logo, a condição (i) segue da aplicação do Lema de Hopf.

Sabemos que $\overline{u}$ é supersolução de (P) e que para

$$k = \sup\{|g_s(x,s)| : x \in \overline{\Omega},\ \underline{u} \leq s \leq \overline{u}\}$$

a função $\tilde{g} = g(x,s) + ks$ é crescente no intervalo $[\underline{u}(x), \overline{u}(x)]$, para todo $x \in \Omega$. Assim, como $u_0 < \overline{u}$, temos que

$$\begin{aligned} -\Delta u_0 + ku_0 &= g(x,u_0) + ku_0 + f(x) \\ &\leq g(x,\overline{u}) + k\overline{u} + f(x) \\ &\leq -\Delta\overline{u} + k\overline{u}. \end{aligned}$$

Pelo Princípio do Máximo, segue que $u_0 - \overline{u} < 0$ em Ω. Garantimos então pelo Lema de Hopf que a condição (ii) é satisfeita.

De posse das condições (i) e (ii), como $u_0 - \overline{u} > 0$ em Ω, existe $\varepsilon > 0$ tal que, se

$$\begin{aligned} \|w - u_0\|_{C^1} &= \|w - \underline{u} - (u_0 + \underline{u})\|_{C^1} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

então $w - \underline{u} > 0$.

De forma análoga ao caso acima, obtemos que $w - \overline{u} < 0$. Portanto, $B_\varepsilon(u_0) \subset Q$, ou seja, u_0 é um mínimo local em Q.

■

Sabendo que u_0 é um mínimo local na topologia $C_0^1(\overline{\Omega})$, segue, pelo resultado contido em Brezis-Nirenberg [5], que u_0 é também um mínimo local na topologia $H_0^1(\Omega)$.

Observação 1.27 *Assumiremos que u_0 é um mínimo local estrito, pois caso contrário, não teríamos o que fazer, uma vez que garantiríamos a existência de infinitas soluções para o problema.*

Lema 1.28 *Seja $I(u_0) = \beta$. As seguintes condições são satisfeitas:*

(1) Existem $\tilde{\alpha}, \rho > 0$ tais que

$$I\mid_{\partial B_\rho(u_0)} \geq \tilde{\alpha},$$

com $\tilde{\alpha} > \beta$.

(2) Existe $\tilde{e} \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\tilde{e} \notin \overline{B}_\rho(u_0)$ e $I(\tilde{e}) \leq \beta$.

Prova. Como u_0 é um mínimo local estrito, temos que $I\mid_{\partial B_\rho(u_0)} > \beta$. Logo, existe $\tilde{\alpha}$ tal que $I\mid_{\partial B_\rho(u_0)} \geq \tilde{\alpha} > \beta$, e isto conclui a condição (1).

Mostremos, agora, a existência de $v \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ tal que $I(tv) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$, o que prova nossa condição (2) se tomarmos t suficientemente grande.

De fato, pelo Lema 1.9, obtemos que

$$G(x, tv) \geq \frac{\overline{\mu}}{2} t^2 v^2 - ctv, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \overline{\Omega},$$

onde $\overline{\mu} > \lambda_1$, donde segue que

$$\begin{aligned} I(tv) &\leq \frac{t^2}{2}||v||^2 - \frac{\overline{\mu}}{2} t^2 \int_{\Omega)} v^2 + ct \int_\Omega v \\ &\leq \frac{t^2}{2}||v||^2 - \frac{\overline{\mu}}{2} t^2 ||v||_2^2 + ct||v||_1. \end{aligned}$$

Da caracterização variacional do autovalor λ_1, temos que

$$I(tv) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\overline{\mu}}{\lambda_1}\right) ||v||^2 t^2 + ct||v||_{L^1(\Omega)}.$$

Logo, $I(tv) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$ e, portanto, existe $\tilde{e} \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\tilde{e} \notin \overline{B}_\rho(u_0)$ e $I(\tilde{e}) \leq \beta$.

■

As condições (1) e (2) do Lema 1.28 garantem a geometria do passo da montanha para o funcional I, como podemos observar na figura 1.2.

Em vista dos Lemas 1.26 e 1.28, podemos, agora, provar que o funcional $J(u) = I(u - u_0) - I(u_0)$ satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 1.29 *O funcional J satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

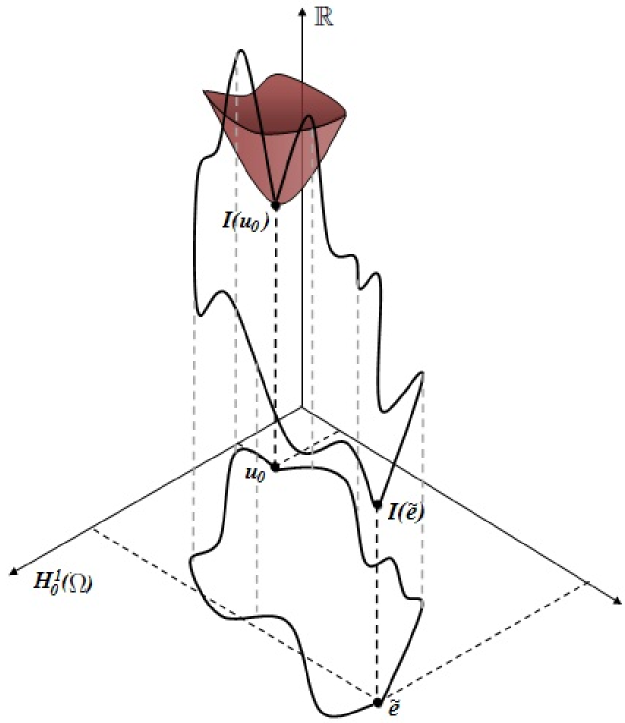

Figura 1.2: Geometria do funcional I

(2) J satisfaz a condição (PS).

(3) $J(0) = 0$.

(4) Existem $\overline{\alpha}, r > 0$ tais que $J\mid_{\partial B_r(0)} \geq \overline{\alpha}$.

(5) Existe $e \in H_0^1(\Omega)$ tal que $e \notin \overline{B}_r(0)$ e $J(e) \leq 0$.

Prova. É fácil ver que as condições (1) - (3) seguem diretamente da definição de J.

Para provarmos (4), tomemos $u = w + u_0$ com $w \in \partial B_\rho(0)$. Pela propriedade (1) do Lema 1.28 , temos que

$$I(w + u_0) \geq \tilde{\alpha},\ \forall w \in \partial B_\rho(0).$$

Façamos $\overline{\alpha} = \tilde{\alpha} - I(u_0)$ e $r = \rho$, daí

$$I(w + u_0) \geq \overline{\alpha} + I(u_0) \Rightarrow J(w) \geq \overline{\alpha},\ \forall w \in \partial B_r(0),$$

onde $\overline{\alpha}$ positivo, uma vez que $\tilde{\alpha} > I(u_0)$.

A fim de provarmos (5), tomemos $e = \tilde{e} - u_0$. Logo, pela propriedade (2) do Lema 1.28 , temos $I(e+u_0) \leq \beta$, e pela definição de J nos faz concluir que $J(e) \leq 0$, onde $e \notin \overline{B}_r(0)$, pois $r = \rho$.

■

1.4.2 Multiplicidade de solução

No Lema 1.29 checamos que J satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, logo, J possui um valor crítico $J(\widehat{u}) = \overline{c} > \overline{\alpha}$ em que

$$\overline{c} = \inf_{\psi \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} J(\psi(t)),$$

onde $\Gamma = \{\psi \in C([0,1], H_0^1(\Omega)); \psi(0) = 0 \text{ e } \psi(1) = e\}$.

Para mostrarmos a existência de uma segunda solução para o problema (P_t), verificando assim a condição (ii_α), tomemos $u_1 = \widehat{u} + u_0$. Daí,

$$J'(\widehat{u}) = I'(\widehat{u} + u_0) - I'(u_0) = I'(\widehat{u} + u_0) = I'(u_1).$$

Como $\overline{c}$ é valor crítico de J, temos que $I'(u_1) = 0$, e assim, u_1 é um ponto crítico do funcional energia I, diferente de u_0, uma vez que o nível de energia de u_1 é dado por $I(u_1) = \overline{c} + I(u_0)$, onde $\overline{c} > 0$.

Notemos ainda, que o valor crítico $I(u_1) = \widehat{c}$ pode ser caracterizado por

$$\widehat{c} = \inf_{g \in \tilde{\Gamma}} \max_{s \in [0,1]} I(g(s)),$$

onde $\tilde{\Gamma} = \{g \in C([0,1], H_0^1(\Omega));\ g(0) = u_0 \text{ e } g(1) = \tilde{e}\}$.

Concluímos aqui a validade da condição (ii_α) nos Teorema 1.3 e 1.4.

1.5 Existência de solução no supremo

Esta seção será dedicada à existência de uma solução para o problema (P_t) no caso em que $t = \alpha(f_1)$. Denotaremos, no decorrer desta seção $t_\alpha = \alpha(f_1)$. No que segue, obteremos inicialmente uma estimativa para a parte negativa de possíveis soluções do problema.

Lema 1.30 *Suponhamos (g_0). Então, para cada $f_1 \in L^\infty(\Omega)$, existe uma constante $C > 0$, independente da solução u_n de (P_{t_n}), tal que*

$$||u_n^-||_{L^\infty} \leq C, \tag{1.58}$$

para todo $t_n \in [t_\alpha - 1, t_\alpha)$.

Prova. Seja $\underline{u}_n$ subsolução do problema (P_{t_n}) obtida pelo Lema 1.10. Temos que

$$\begin{cases} (-\Delta - \underline{\mu})\underline{u}_n &= t_n\phi_1 + f_1 - c \quad \text{em } \Omega \\ \underline{u}_n &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Se $t_n \in [t_\alpha - 1, t_\alpha)$, obtemos pelo Teorema A.18, que

$$\begin{aligned} \|\underline{u}_n\|_{2,p} &\leq \|t_n\phi_1 + f_1 - c\|_p \\ &\leq C|t_n| + C \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Usando a imersão $W^{2,q}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, para $q > \frac{N}{2}$, concluímos que

$$\|\underline{u}_n\|_{L^\infty} \leq C\|\underline{u}_n\|_{2,q} \leq C.$$

Agora, dada u_n solução do problema (P_{t_n}), com $t_n \in [t_\alpha - 1, t_\alpha)$, obtida pelo método de sub e supersolução via técnica variacional, onde é sabido que $u_n > \underline{u}_n$, temos

$$u_n(x) > \underline{u}_n(x) \geq -\|\underline{u}_n\|_{L^\infty} \geq -C, \ \forall t_n \in [t_\alpha - 1, t_\alpha) \ e \ \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Portanto, $\|u_n^-\|_{L^\infty} \leq C$, para todo $t_n \in [t_\alpha - 1, t_\alpha)$.

■

As estimativas da parte posivita de u_n são mais delicadas e requerem um pouco mais de trabalho. Para conseguirmos a estimativa desejada, a demonstração será separada em três vertentes, onde em cada, urge considerar diferentes condições de crescimento adicionais sobre a não-linearidade g.

1.5.1 Crescimento linear

Nesta subseção, provaremos a existência de solução no supremo, no caso em que a não-linearidade g é assintoticamente linear.

Teorema 1.31 *Suponhamos $(g_0) - (g_4)$. Então o problema (P_t) tem pelo menos uma solução no caso em que $t = t_\alpha$.*

Vejamos antes o seguinte lema.

Lema 1.32 *Suponhamos (g_0) e (g_4). Então, para cada $f_1 \in L^\infty(\Omega)$ existe uma constante $C > 0$, independente da solução u_n de (P_{t_n}), tal que*

$$\|u_n\| \leq C, \tag{1.59}$$

para todo $t_n \in [t_\alpha - 1, t_\alpha)$.

Prova. Raciocinando por absurdo, suponhamos que exista uma sequência $\{t_n\} \subset [t_\alpha - 1, t_\alpha)$ tal que $\|u_n\| \longrightarrow +\infty$, onde cada u_n é solução para o problema (P_{t_n}). Logo,

$$(-\Delta - \gamma)u_n = -\gamma u_n + g(x, u_n) + t_n\phi_1 + f_1.$$

Mostremos que

$$\frac{\| -\gamma u_n + g(x, u_n)\|_2}{\|u_n\|} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow +\infty. \tag{1.60}$$

De fato, consideremos $v_n := \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$. Como $\|v_n\| = 1$ temos, que $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$, pois $H_0^1(\Omega)$ é Banach e reflexivo. Pela imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, com $p \in [1, 2^*)$, temos que $v_n \longrightarrow v$ em $L^p(\Omega)$. Assim, pelo Teorema A.5, $v_n \longrightarrow v$ q.t.p. em Ω e, existe uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|v_n(x)| \leq h(x) \in L^p(\Omega)$ q.t.p. . As convergências obtidas acima ocorrem a menos de uma subsequência.

Analogamente ao que fizemos na demonstração da condição (PS), consideremos os conjuntos $\Omega_+ = \{x \in \Omega; v(x) > 0\}$, $\Omega_- = \{x \in \Omega; v(x) < 0\}$ e $\Omega_0 = \{x \in \Omega; v(x) = 0\}$. Observemos que em Ω_+ temos que $u_n \longrightarrow +\infty$, e que $\Omega_- = \emptyset$, já que pelo Lema 1.30, temos que $u_n \not\to -\infty$.

$$\begin{aligned}
\frac{\| -\gamma + g(x, u_n)\|_2}{\|u_n\|} &= \left(\int_\Omega \left|\frac{-\gamma u_n + g(x, u_n)}{\|u_n\|}\right|^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_\Omega \left|\frac{-\gamma u_n + g(x, u_n)}{u_n}\right|^2 v_n^2\right)^{1/2} \\
&= \left[\int_{\Omega_+} \left(\frac{-\gamma u_n + g(x, u_n)}{u_n}\right)^2 v_n^2 + \int_{\Omega_0} \left(\frac{-\gamma + g(x, u_n)}{u_n}\right)^2 v_n^2\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

Do fato de $|v_n(x)| \leq h(x) \in L^p(\Omega)$, com $p \in [1, 2^*)$, e $\dfrac{g(x, u_n)}{u_n}$ ser limitado, obtemos que

$$\left|\left(\frac{-\gamma u_n + g(x, u_n)}{u_n}\right)^2 v_n^2\right| = \left|\left(-\gamma + \frac{g(x, u_n)}{u_n}\right)^2 v_n^2\right| \leq C.h^2 \in L^1(\Omega) \text{ q.t.p.},$$

Observemos agora o comportamento da função $\left(\frac{-\gamma u_n + g(x,u_n)}{u_n}\right)^2 v_n^2$ em cada um dos subconjuntos de Ω que foram definidos acima.

- Em Ω_+:

  Como $u_n \longrightarrow +\infty$ em Ω_+, temos que $\frac{g(x,u_n)}{u_n} \longrightarrow \gamma$. A convergência $v_n \longrightarrow v$ q.t.p. em Ω, garante que

  $$\left(\frac{-\gamma u_n + g(x,u_n)}{u_n}\right)^2 v_n^2 = \left(-\gamma + \frac{g(x,u_n)}{u_n}\right)^2 v_n^2 \longrightarrow (-\gamma+\gamma)v = 0 \text{ q.t.p. em } \Omega_+.$$

  Segue, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

  $$\int_{\Omega_+} \left(\frac{-\gamma u_n + g(x,u_n)}{u_n}\right)^2 v_n^2 \longrightarrow 0. \tag{1.61}$$

- Em Ω_0:

  Como $v_n \longrightarrow 0$ q.t.p. em Ω_0 e $\frac{g(x,u_n)}{u_n}$ é limitada, temos

  $$\left(\frac{-\gamma u_n + g(x,u_n)}{u_n}\right)^2 v_n^2 = \left(-\gamma + \frac{g(x,u_n)}{u_n}\right)^2 v_n^2 \longrightarrow 0 \text{ q.t.p. em } \Omega_0.$$

  Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos que

  $$\int_{\Omega_-} \left(\frac{-\gamma u_n + g(x,u_n)}{u_n}\right)^2 v_n^2 \longrightarrow 0. \tag{1.62}$$

Consequentemente, por (1.61) e (1.62), temos que (1.60) é satisfeita.

Por (1.60), temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon > 0$ tal que

$$\| -\gamma u_n + g(x,u_n)\|_2 \leq \varepsilon \|u_n\|, \ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Disto segue que

$$\begin{aligned} ||u_n|| &\leq C|| -\gamma u_n + g(x,u_n) + t_n\phi_1 + f_1||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \varepsilon\|u_n\| + C|t_n| + C, \end{aligned}$$

o que implica que

$$(1-\varepsilon)\|u_n\| \leq C|t_n| + C.$$

Tomemos $\varepsilon < 1$. Portanto, como $\|u_n\| \longrightarrow +\infty$, teríamos que $|t_n| \longrightarrow +\infty$, o que é um absurdo, pois $|t_n| \subseteq [t_\alpha - 1, t_\alpha)$. Assim, concluímos que $\|u_n\| \leq C$, para todo $t_n \in [t_\alpha - 1, t_\alpha)$.

■

Apresentaremos agora a prova do Teorema 1.31.

Prova. Seja $t_n \subset [t_\alpha - 1, t_\alpha)$ tal que $t_n \longrightarrow t_\alpha$. Como u_n é limitada em $H_0^1(\Omega)$, então $u_n \rightharpoonup u_{t_\alpha}$ em $H_0^1(\Omega)$ para algum $u_{t_\alpha} \in H_0^1(\Omega)$, pois $H_0^1(\Omega)$ é Banach e reflexivo. Iremos mostrar que u_{t_α} é solução de (P_{t_α}).

Pela imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para $p \in [1, 2^*)$, temos que $u_n \longrightarrow u_{t_\alpha}$ em $L^p(\Omega)$. Assim, pelo Teorema A.5, $u_n \longrightarrow u_{t_\alpha}$ q.t.p. em Ω e, existe uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq h(x) \in L^p(\Omega)$ q.t.p. . As convergências obtidas acima ocorrem a menos de uma subsequência.

Notemos que

$$
\begin{aligned}
|g(x,u_n)v| &= |g(x,u_n)||v| \\
&\leq (C + C|u_n|)|v| \\
&\leq (C + h)|v| \in L^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

Como $u_n \longrightarrow u_{t_\alpha}$ q.t.p. em Ω, temos, usando a continuidade na segunda variável de g, que

$$
g(x,u_n)v \longrightarrow g(x,u_{t_\alpha})v, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.
$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$
\int_\Omega g(x,u_n)v \longrightarrow \int_\Omega g(x,u_{t_\alpha})v \tag{1.63}
$$

Dessa forma, como u_n é solução do problema (P_{t_n}), temos, aplicando o limite quando $n \longrightarrow +\infty$, que

$$
\int_\Omega \nabla u_{t_\alpha} \nabla v = \int_\Omega g(x,u_{t_\alpha})v + t_\alpha \int_\Omega \phi_1 v + \int_\Omega f_1 v.
$$

Com isso, concluímos que o problema (P_t) tem solução u_{t_α} no supremo. ■

1.5.2 Crescimento subcrítico do tipo Brezis-Turner

Nesta subseção, provaremos a existência de solução no supremo, no caso em que a não-linearidade g for assintoticamente polinomial, com o grau do polinômio limitado por $(N+1)/(N-1)$.

Teorema 1.33 *Suponhamos* $(g_0) - (g_3')$ *e* (g_4')*. Então, o problema* (P_t) *tem pelo menos uma solução no caso em que* $t = \alpha(f_1)$*.*

Nesta etapa será conveniente substituir a aplicação $g(x, s)$ por uma outra função $\overline{g}(x, s)$ tal que $\overline{g}(x, s) \geq 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$ e $\forall s \geq 0$.

Da condição (g_0), garantimos que

$$g(x, s) \geq \overline{\mu} s, \ \forall x \in \overline{\Omega} \text{ e } \forall s \geq s_0.$$

Seja $m = \min\{g(x, s); \ x \in \overline{\Omega} \text{ e } 0 \leq s \leq s_0\}$. Definindo a função $\overline{g}(x, s) = g(x, s) + |m|$, temos que esta satisfaz a propriedade desejada e ainda satisfaz as condições $(g_0) - (g_3')$ e (g_4'). Definamos agora $\bar{f}(x) = f(x) - |m|$. Observemos que o problema (P) pode ser escrito como

$$\begin{cases} -\Delta u &= \overline{g}(x, u) + \overline{f}(x) & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.64}$$

Assim, podemos assumir sem perda de generalidade que a função g, que aparece no problema (P), satisfaz a condição

$$g(x, s) \geq 0, \ \forall x \in \overline{\Omega} \text{ e } \forall s \geq 0. \tag{1.65}$$

Lema 1.34 *Suponhamos* (g_0)*. Então, para cada* $f_1 \in L^\infty(\Omega)$*, existe uma constante* $C > 0$*, independente da solução* u_n *de* (P_{t_n}) *tal que*

$$\left| \int_\Omega g(x, u_n^+)\phi_1 \right| \leq C, \tag{1.66}$$

para todo $t_n \in [t_\alpha - 1, t_\alpha)$*.*

Prova. Da definição de solução fraca para o problema (P_{t_n}), temos que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \phi_1 = \int_\Omega g(x, u_n)\phi_1 + t_n \int_\Omega \phi_1^2 + \int_\Omega f_1 \phi_1.$$

Como ϕ_1 é autofunção associada ao autovalor λ_1, então

$$\lambda_1 \int_\Omega u_n \phi_1 = \int_\Omega g(x, u_n)\phi_1 + t_n \int_\Omega \phi_1^2 + \int_\Omega f_1 \phi_1.$$

Utilizando das desigualdades obtidas no Lema 1.9, segue que

$$\begin{cases} (\underline{\mu} - \lambda_1) \displaystyle\int_\Omega u_n \phi_1 &\leq \displaystyle\int_\Omega c\phi_1 - t_n \int_\Omega \phi_1^2 + \int_\Omega f_1 \phi_1 \\ (\overline{\mu} - \lambda_1) \displaystyle\int_\Omega u_n \phi_1 &\leq \displaystyle\int_\Omega c\phi_1 - t_n \int_\Omega \phi_1^2 + \int_\Omega f_1 \phi_1, \end{cases}$$

onde $\underline{\mu} < \lambda_1 < \overline{\mu}$. O termo do lado direito, das desigualdades acima, é limitado, já que podemos limitar f_1 e ϕ_1 em Ω e $t_n \in [t_\alpha - 1, t_\alpha)$. Assim, temos que

$$\begin{cases} (\underline{\mu} - \lambda_1) \displaystyle\int_\Omega u_n \phi_1 & \leq & C \\ (\overline{\mu} - \lambda_1) \displaystyle\int_\Omega u_n \phi_1 & \leq & C. \end{cases}$$

Como $\underline{\mu} - \lambda_1 < 0$ e $\overline{\mu} - \lambda_1 > 0$, obtemos que

$$\int_\Omega u_n \phi_1 \geq C_1 \quad \text{e} \quad \int_\Omega u_n \phi_1 \leq C_2,$$

donde segue que

$$\left| \int_\Omega u_n \phi_1 \right| \leq C.$$

Desta última estimativa, concluímos que

$$\left| \int_\Omega g(x, u_n) \phi_1 \right| \leq C.$$

Considerando $\Omega_+ = \{x \in \Omega; u_n(x) \geq 0\}$ e $\Omega_-^* = \{x \in \Omega; u_n(x) < 0\}$, temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega g(x, u_n) \phi_1 \right| &= \left| \int_{\Omega_+} g(x, u_n) \phi_1 + \int_{\Omega_-^*} g(x, u_n) \phi_1 \right| \\ &\geq \left| \int_\Omega g(x, u_n^+) \phi_1 \right| - \left| \int_{\Omega_-^*} g(x, u_n^-) \phi_1 \right|, \end{aligned}$$

o que implica

$$\left| \int_\Omega g(x, u_n^+) \phi_1 \right| \leq C + \left| \int_{\Omega_-^*} g(x, u_n^-) \phi_1 \right|.$$

Do truncamento feito na função $g(x, s)$ no início do capítulo, juntamente com o fato de ser limitada num compacto, garantimos uma limitação para a mesma, no domínio Ω_-^*. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega g(x, u_n^+) \phi_1 \right| &\leq C + \int_{\Omega_-^*} |g(x, u_n^-)| |\phi_1| \\ &\leq C. \end{aligned}$$

■

Para demonstrarmos o lema a seguir, precisaremos recorrer à desigualdade de Hardy-Sobolev.

Desigualdade de Hardy-Sobolev. Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, ϕ_1 uma autofunção positiva associada ao primeiro autovalor do operador $-\Delta$ em Ω, $\tau \in [0,1]$ e $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1-\tau}{N}$. Então, $\frac{u}{\phi_1^\tau} \in L^q(\Omega)$ e existe $C > 0$ tal que

$$\left\| \frac{u}{\phi_1^\tau} \right\|_q \leq C \|\nabla u\|_2, \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Lema 1.35 *Suponhamos* (g_0) *e* (g_4'). *Então, para cada* $f_1 \in L^\infty(\Omega)$ *existe uma constante* $C > 0$, *independente da solução* u_n *de* (P_{t_n}), *tal que*

$$\int_\Omega |\nabla u_n^+|^2 \leq C, \tag{1.67}$$

para todo $t_n \in [t_\alpha - 1, t_\alpha)$.

Prova. Por ser solução de (P_{t_n}), temos que $u_n \in H_0^1(\Omega)$ e, portanto, $u_n^+ \in H_0^1(\Omega)$. Da definição de solução no sentido fraco, temos que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n^+ = \int_\Omega g(x, u_n) u_n^+ + t_n \int_\Omega \phi_1 u_n^+ + \int_\Omega f_1 u_n^+.$$

Escrevendo $u_n = u_n^+ + u_n^-$ no termo do lado esquerdo da igualdade, segue da linearidade do operador Δ, que

$$\int_\Omega |\nabla u_n^+|^2 = \int_\Omega g(x, u_n) u_n^+ + t_n \int_\Omega \phi_1 u_n^+ + \int_\Omega f_1 u_n^+. \tag{1.68}$$

Chamando $\Omega_+ = \{x \in \Omega; u_n \geq 0\}$ e $\Omega_-^* = \{x \in \Omega; u_n < 0\}$, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega g(x, u_n) u_n^+ &= \int_{\Omega_+} g(x, u_n) u_n^+ + \int_{\Omega_-^*} g(x, u_n) u_n^+ \\ &= \int_\Omega g(x, u_n^+) u_n^+ + \underbrace{\int_{\Omega_-^*} g(x, u_n) u_n^+}_{=0} \\ &= \int_\Omega g(x, u_n^+) u_n^+. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder nos dois últimos termos do lado esquerdo da igualdade (1.68), segue, da desigualdade de Poincaré, que

$$\begin{aligned} \left| t_n \int_\Omega \phi_1 u_n^+ + \int_\Omega f_1 u_n^+ \right| &\leq C \|u_n^+\|_2 + C \|u_n^+\|_2 \\ &\leq C \|\nabla u_n^+\|_2. \end{aligned} \tag{1.69}$$

Podemos escrever

$$\int_{\Omega} g(x,u_n^+)u_n^+ = \int_{\Omega_+} g(x,u_n^+)^{\beta}\phi_1^{\beta} g(x,u_n^+)^{1-\beta}\phi_1^{-\beta}u_n^+,$$

onde $\beta \in (0,1)$ será escolhido posteriormente. Novamente, segue, da desigualdade de Hölder, que

$$\int_{\Omega} g(x,u_n^+)u_n^+ \leq \left[\int_{\Omega_+} g(x,u_n^+)\phi_1\right]^{\beta} \left[\int_{\Omega_+} g(x,u_n^+)\frac{(u_n^+)^{\frac{1}{1-\beta}}}{\phi_1^{\frac{\beta}{1-\beta}}}\right]^{1-\beta}.$$

Observe que não estamos usando módulo, já que $g(x,s) \geq 0$, para todo $s \geq 0$ e todo $x \in \overline{\Omega}$.

Da estimativa obtida no Lema 1.9, temos que

$$\int_{\Omega} g(x,u_n^+)u_n^+ \ \leq \ C\left[\int_{\Omega_+} g(x,u_n^+)\frac{(u_n^+)^{\frac{1}{1-\beta}}}{\phi_1^{\frac{\beta}{1-\beta}}}\right]^{1-\beta}.$$

Agora, observemos que a condição (g_4') assumida no lema, junto com fato da aplicação g ser limitada num domínio compacto, implicam que, dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante $c_\varepsilon > 0$ tal que $g(x,s) \leq \varepsilon s^{\sigma} + c_\varepsilon$, para todo $s \geq 0$ e todo $x \in \overline{\Omega}$. Do fato que acabamos de citar e da última desigualdade, temos que

$$\int_{\Omega} g(x,u_n^+)u_n^+ \leq C\varepsilon^{1-\beta}\left[\int_{\Omega} \frac{(u_n^+)^{\sigma-\frac{1}{1-\beta}}}{\phi_1^{\frac{\beta}{1-\beta}}}\right]^{1-\beta} + C\left[\int_{\Omega} \frac{(u_n^+)^{\frac{1}{1-\beta}}}{\phi_1^{\frac{\beta}{1-\beta}}}\right]^{1-\beta}$$

Escolhendo $\beta = \frac{2}{N+1}$, de forma que $\tau + \frac{1}{1-\beta} = \frac{2}{1-\beta}$, a desigualdade acima nos conduz a

$$\int_{\Omega} g(x,u_n^+)u_n^+ \leq C\varepsilon^{1-\beta}\left\|\frac{u_n^+}{\phi_1^{\beta/2}}\right\|_{\frac{2}{1-\beta}}^{2} + C\left\|\frac{u_n^+}{\phi_1^{\beta}}\right\|_{\frac{1}{1-\beta}}^{1-\beta}. \tag{1.70}$$

Usando a desigualdade de Hardy-Sobolev com $\tau = \frac{\beta}{2}$, temos que

$$\left\|\frac{u_n^+}{\phi_1^{\beta/2}}\right\|_{p} \leq C\|\nabla u_n^+\|_2, \ \text{ onde } \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1-\beta/2}{N}, \ \text{ isto é, } p = \frac{2}{1-\beta}. \tag{1.71}$$

Novamente pela desigualdade de Hardy-Sobolev, agora com $\tau = \beta$, temos que

$$\left\|\frac{u_n^+}{\phi_1^{\beta/2}}\right\|_{p'} \leq C\|\nabla u_n^+\|_2, \ \text{ onde } \frac{1}{p'} = \frac{1}{2} + \frac{1-\beta}{N}, \tag{1.72}$$

de forma que $p' \leq \frac{1}{1-\beta}$.

Usando as estimativas (1.71) e (1.72) na desigualdade (1.70), segue que

$$\int_\Omega g(x, u_n^+)u_n^+ \leq C\varepsilon^{1-\beta}\|\nabla u_n^+\|_2^2 + C\|\nabla u_n^+\|_2. \tag{1.73}$$

Portanto, de (1.68), (1.69) e (1.73), inferimos que

$$(1 - C\varepsilon^{1-\beta})\|\nabla u_n^+\|_2^2 \leq C_0\|\nabla u_n^+\|_2$$

Basta tomarmos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, de forma que (1.67) seja satisfeita.

■

Finalmente, apresentaremos a prova do Teorema 1.33.

Prova. Dos Lemas 1.32 e 1.35, garantimos que

$$\|u_n^-\|_{L^\infty} \leq C \quad \text{e} \quad \|\nabla u_n^+\|_2 \leq C.$$

Da desigualdade de Poincaré e da imersão $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, obtemos que

$$\|u_n\|_{2^*} \leq C. \tag{1.74}$$

Como

$$\begin{aligned} \|u_n\| &\leq C\|g(x, u_n) + t\phi_1 + f_1\|_2 \\ &\leq C\|g(x, u_n)\|_2 + C, \end{aligned}$$

precisamos de uma limitação para $\|g(x, u_n)\|_2$, para podermos limitar u_n. Observemos que da condição (g_4'), em conjunto com a continuidade e o truncamento da aplicação g, temos que

$$|g(x, s)| \leq C + C|s|^\sigma, \quad \forall x \in \overline{\Omega} \text{ e } s \in \mathbb{R}. \tag{1.75}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|g(x, u_n)\|_2^2 &= \int_\Omega |g(x, u_n)|^2 \\ &\leq \int_\Omega (C + C|u_n|^\sigma)^2 \\ &\leq C + \int_\Omega |u_n|^{2\sigma}. \end{aligned}$$

Como $2\sigma < 2^*$, temos $L^{2^*} \hookrightarrow L^{2\sigma}$. Da estimativa (1.74), segue que

$$\|g(x, u_n)\|_2 \leq C,$$

e, portanto, $\|u_n\| \leq C$.

Seja $t_n \subset [t_\alpha - 1, t_\alpha)$, tal que $t_n \longrightarrow t_\alpha$. Como $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$ então $u_n \rightharpoonup u_{t_\alpha}$ em $H_0^1(\Omega)$, para algum $u_{t_\alpha} \in H_0^1(\Omega)$. Procedendo de forma análoga ao que fizemos na subseção anterior, mostremos que u_{t_α} é solução de (P_{t_α}).

Sabemos que a menos de subsequência, $u_n \longrightarrow u_{t_\alpha}$ q.t.p. em Ω e que existe uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq h(x) \in L^p(\Omega)$ q.t.p. em Ω.

Notemos ainda que

$$\begin{aligned} |g(x,u_n)v| &= |g(x,u_n)||v| \\ &\leq (C + C|u_n|^\sigma)|v|. \end{aligned}$$

Como Ω é um domínio limitado, vemos facilmente, pela desigualdade de Hölder, que $u_n^\sigma \in L^{\frac{2^*}{\sigma}}(\Omega)$, já que $\|u_n\|_{2^*} \leq C$. Como $2 < \frac{2^*}{\sigma}$, então $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2^*}{\sigma}}(\Omega)$ e, portanto, $(C + C|u_n|^\sigma)|v| \in L^1(\Omega)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$. Da convergência $u_n \longrightarrow u_{t_\alpha}$ q.t.p. em Ω, temos ao usar a continuidade na segunda variável de g, que

$$g(x,u_n)v \longrightarrow g(x,u_{t_\alpha})v, \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

donde segue, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\int_\Omega g(x,u_n)v \longrightarrow \int_\Omega g(x,u_{t_\alpha})v. \tag{1.76}$$

Obtidas as convergências necessárias, como u_n é solução do problema (P_{t_n}), concluímos que o problema (P_t) tem solução u_{t_α} no supremo.

■

1.5.3 Crescimento subcrítico do tipo Gidas-Spruck

Nosso objetivo, nesta subseção, é estender o resultado de existência de solução no supremo, no caso em que a não-linearidade g possui um crescimento subcrítico menos restritivo que o da subseção anterior. Isto será feito utilizando-se da estimativa a priori de Gidas-Spruck [16] dada no teorema abaixo.

Teorema 1.36 *Seja $u \in C^2(\overline{\Omega})$ uma solução positiva do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Suponhamos $f(x,u)$ *contínua em* $x \in \overline{\Omega}$ *e que, para algum* $1 < \sigma < 2^* - 1$, *temos*

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{g(x,s)}{s^\sigma} = h(x)$$

uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$. *Aqui* $h(x)$ *é uma função contínua e estritamente positiva em* $\overline{\Omega}$. *Então,*

$$u(x) \leq C,$$

onde C *depende somente de* σ *e* Ω, *e não da particular solução* u.

Teorema 1.37 *Suponhamos as hipóteses* $(g_0) - (g_3')$ *e* (g_4''). *Então o problema* (P_t) *tem pelo menos uma solução no caso em que* $t = \alpha(f_1)$.

Prova. Seja u_n uma solução qualquer de (P_{t_n}). Sabemos pelo Lema 1.30 que $\|u_n^-\| \leq C$, $\forall t_n \in [t_\alpha - 1, t_\alpha)$. Precisamos de uma limitação semelhante para u_n^+. Uma vez que $u_n = u_n^+ + u_n^-$, temos

$$\begin{cases} -\Delta u_n^+ &= g(x, u_n^+ + u_n^-) + \Delta u_n^- + t_n \phi_1 + f_1 & \text{em } \Omega \\ u_n^+ &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Defina $f_n(x,s) = g(x, s + u_n^-) + \Delta u_n^- + t_n \phi_1 + f_1$. Mostremos que, da condição (g_4''), garantimos que as aplicações $f_n(x,s)$ satisfazem

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f_n(x,s)}{s^\sigma} = a(x), \tag{1.77}$$

uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$. De fato, como

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{\Delta u_n^-(x) + t_n \phi_1(x) + f_1(x)}{s^\sigma} = 0,$$

uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$, verificar (1.77) se resume apenas a mostrar que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{g(x, s + u_n^-(x))}{s^\sigma} = a(x), \tag{1.78}$$

uniformemente em $x \in \overline{\Omega}$.

Pela condição (g_4''), temos que dado $\varepsilon_1 > 0$ existe $s_1 >$ tal que

$$a(x) - \varepsilon_1 \leq \frac{g(x, u_n^-(x) + s)}{u_n^-(x) + s} \leq a(x) + \varepsilon_1, \tag{1.79}$$

sempre que $u_n(x) + s > s_0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$. E ainda, dado $\varepsilon_2 > 0$, existe $s_2 > 0$ tal que

$$1 - \varepsilon_2 \leq \frac{(u_n^-(x) + s)^\sigma}{s^\sigma} \leq 1 + \varepsilon_2, \quad \forall s > s_2 \text{ e } \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{1.80}$$

Por um lado, temos, por (1.79) e (1.80) que, dado $\varepsilon = C\varepsilon_2 + \varepsilon_1(1+\varepsilon_2)$ existe $s_0 = \max\{s_1, s_2\}$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{g(x, u_n^-(x)+s)}{s^\sigma} &\leq \frac{(a(x)+\varepsilon_1)(s+u_n^-(x))}{s^\sigma} \\ &\leq (a(x)+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) \\ &= a(x)+\varepsilon,\ \forall s > s_0,\ \forall x \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos que

$$\frac{g(x, s+u_n^-(x))}{s^\sigma} \geq a(x) - \varepsilon, \quad \forall s > s_0,\ \forall x \in \overline{\Omega}, \tag{1.81}$$

garantindo assim (1.78).

Logo, pelo Teorema 1.36, temos $u_n^+ \leq C$, o que nos garante que $\|u_n\|_{L^\infty} \leq C$, $\forall t_n \in [t_\alpha - 1, t_\alpha)$.

Como u_n é solução de (P_{t_n}), temos que

$$\begin{aligned} \|u_n\| &\leq C\|g(x,u_n) + t_n\phi_1 + f_1\|_2 \\ &\leq C_0, \end{aligned}$$

uma vez que g é contínua, $\|u_n\|_{L^\infty} \leq C$ e $t_n \in [t_\alpha - 1, t_\alpha)$. Portanto, raciocinando de forma análoga ao Teorema 1.33 concluímos que se $t_n \longrightarrow t_\alpha$ então $u_n \rightharpoonup u_{t_\alpha}$ onde u_{t_α} é uma solução para o problema (P_{t_α}).

■

Capítulo 2

A Conjectura de Lazer McKenna

Neste capítulo, apresentaremos uma conjectura sobre o número de soluções para problemas elípticos em que a não-linearidade f que aparece no problema satisfaz

$$\limsup_{s \to -\infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k < \liminf_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_{k+1}.$$

Dessa forma, estamos impondo que os limites acima cruzem k autovalores, diferentemente do Capítulo 1, onde exigimos interferência apenas com o primeiro autovalor.

Motivados por [20], Lazer-McKenna conjecturaram em [21] o resultado a seguir.

Conjectura 2.1 (Lazer-McKenna) *Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ e ϕ_1 a autofunção correspondente ao primeiro autovalor λ_1 do operador $-\Delta$ em Ω, com condição de fronteira Dirichlet. Sejam $v \in L^2(\Omega)$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tais que*

$$\limsup_{s \to -\infty} \frac{f(s)}{s} = \mu \quad e \quad \liminf_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s} = \nu.$$

Suponha que $\mu < \lambda_1 < \nu$ e que o intervalo (μ, ν) contenha pelo menos k autovalores (contando a multiplicidade). Então o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) + t\phi_1 - v & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem pelo menos $2k$ soluções para $t > 0$ suficientemente grande.

Na Seção 2.1, confirmaremos a veracidade da conjectura para o caso unidimensional, mostrando a existência de $2k$ soluções para a equação diferencial ordinária no caso em que o intervalo (μ, ν) possui k autovalores. Finalmente, na Seção 2.2, veremos porque a conjectura é falsa no caso multidimensional.

2.1 Caso unidimensional da Conjectura de Lazer-McKenna

A proposta desta seção é verificar a validade da conjectura no caso unidimensional. Para isso, tomamos $\Omega = (0, \pi)$, o que é conveniente, pois o problema

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, & \text{em } (0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

possui autovalores $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$. As soluções não-triviais de (2.1) correspondentes a cada autovalor λ_n são $\phi_n(x) = \text{sen}\,(nx)$. Como qualquer aberto conexo de $\mathbb{R}$ é um intervalo, o problema acima é tratado sem perda de generalidade.

Teorema 2.2 *Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que*

$$\limsup_{s \to -\infty} \frac{f(s)}{s} < 1 \ \ e \ \ n^2 < \lim_{s \to +\infty} f'(s) < (n+1)^2$$

para algum inteiro $n \geq 1$, fixo. Então para cada $h \in C([0, \pi])$, existe um número $t_1 = t_1(h)$ tal que para dado $t > t_1$ o problema

$$\begin{cases} u''(x) = -f(u(x)) + h(x) + t\text{sen}\, x, & x \in (0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

tem pelo menos $2n$ soluções.

A demonstração deste teorema será feita ao longo de toda a seção. Todos os resultados apresentados e demonstrados são auxiliares na demonstração, porém, alguns deles trazem informações interessantes por si só.

Definamos a aplicação $g(s) = f(s) - \lambda s$, onde $\lambda = \lim_{s \to +\infty} f'(s)$. Das hipóteses assumidas sobre a função f, segue que:

$(g_1)\quad g'(s) \longrightarrow 0,\ \dfrac{g(s)}{s} \longrightarrow 0$ quando $s \longrightarrow \infty$;

$(g_2)\quad \lambda + \limsup\limits_{s\to-\infty} \dfrac{g(s)}{s} < \lambda_1$.

Estabeleceremos agora um primeiro resultado que garante a existência de uma solução para o problema em questão.

Teorema 2.3 *Existe um número δ_0 tal que para cada $\delta \in (0, \delta_0]$ existe $\hat{t}(\delta) \in \mathbb{R}$ de forma que o problema*

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) + g(u(x)) &= t\mathrm{sen}\, x + h(x), \qquad x \in (0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) &= 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

possui uma única solução $Z_t(x)$ para cada $t \geq \hat{t}(\delta)$. Além disso, essa solução é tal que $\|Z_t - tX_0\|_{C^1} \leq t\delta$, com $X_0(x) = \dfrac{\mathrm{sen}\, x}{\lambda - 1}$, e $\|Z_t/t - X_0\|_{C^1} \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow \infty$.

Prova. Definindo $v(x) = t^{-1}u(x)$, $t > 0$, (2.3) se torna

$$\begin{cases} v'' + \lambda v + \dfrac{g(tv)}{t} &= \mathrm{sen}\, x + \dfrac{h(x)}{t}, \qquad x \in (0,\pi) \\ v(0) = v(\pi) &= 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Observemos que o problema (2.3) é uma perturbação do problema linear

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) &= \mathrm{sen}\, x, \qquad x \in (0,\pi) \\ y(0) = y(\pi) &= 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

que tem como solução $X_0(x) = \dfrac{\mathrm{sen}\, x}{\lambda - 1}$. Assim, o problema (2.4) é equivalente à equação integral

$$v(x) = X_0(x) - \int_0^\pi G(x,r)\left[\frac{h(r)}{t} - \frac{g(tv(r))}{t}\right] dr\ , \tag{2.6}$$

onde G é a função de Green para o problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y &= f, \qquad \text{em } (0,\pi) \\ y(0) = y(\pi) &= 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Escolhamos $\delta_0 > 0$ de forma que $\|v - X_0\|_{C^1} \leq \delta_0$ implique que $v(x) > 0$ com $x \in (0,\pi)$. Isso é possível, pois $X_0 > 0$ em $(0,\pi)$, $X_0'(0) > 0$ e $X_0'(\pi) < 0$.

Denotemos por $B_\delta(X_0)$ o conjuntos das funções em $C^1([0,\pi])$ que satisfazem $\|v - X_0\|_{C^1} \leq \delta$, para $0 < \delta \leq \delta_0$. Se I é um subintervalo compacto de $(0,\pi)$, então, pelo modo como δ_0 foi escolhido, existe $\alpha(I,\delta) > 0$, que independe de $v \in B_\delta(X_0)$, tal que

$$v(x) \ \geq \ \alpha(I,\delta), \ \forall x \in I, \ \forall v \in B_\delta(X_0). \tag{2.8}$$

Seja $v \in B_\delta(X_0)$. Definamos o operador $S_t : B_\delta(X_0) \longrightarrow C^1([0,\pi])$ por

$$(S_t v)(x) = X_0(x) - \int_0^\pi G(x,r)\left[\frac{h(r)}{t} - \frac{g(tv(r))}{t}\right] dr. \tag{2.9}$$

Vamos utilizar o Teorema de ponto fixo de Banach (ver Teorema A.12 no Apêncide A) para encontrar um ponto fixo para o operador S_t. Observe que tal ponto fixo satisfaz (2.6) e é a solução procurada. Notemos que, por ser fechado no espaço de Banach $C^1([0,\pi])$, $B_\delta(X_0)$ também é um espaço métrico completo. Mostremos inicialmente que o operador S_t é uma contração estrita, isto é,

$$\|S_t v_1 - S_t v_2\|_{C^1} \ \leq \ k\|v_1 - v_2\|_{C^1}, \quad \forall v_1, v_2 \in B_\delta(X_0), \tag{2.10}$$

com $0 < k < 1$.

Como $g'(s) \longrightarrow 0$ quando $s \longrightarrow \infty$ e g' é contínua, então g' é limitada em $[0,\infty)$ por alguma constante L_1. A continuidade de G e $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ em $[0,\pi]\times[0,\pi]$ garante a existência de L_2, uma constante que limita ambas as funções em $[0,\pi]\times[0,\pi]$.

Escolhamos $\varepsilon > 0$ de modo que $2\varepsilon < \pi$ e $2\varepsilon L_1 L_2 < \dfrac{1}{4}$. Como $g'(s) \longrightarrow 0$ quando $s \longrightarrow \infty$, então existe $t^*(\delta) > 0$, definida em $(0,\delta_0]$ tal que se $x \geq t^*(\delta)\cdot\alpha\left([\varepsilon,\pi-\varepsilon],\delta\right)$ então $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{4L_2\pi}$.

Sejam $v_1, v_2 \in B_\delta(X_0)$ e $t \geq t^*(\delta)$. Pelo Teorema do Valor Médio, temos que

$$|g(tv_1(x)) - g(tv_2(x))| = |g'(c)|\cdot|tv_1(x) - tv_2(x)|, \ \forall x \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon] \tag{2.11}$$

onde $c \in [tv_1(x), tv_2(x)]$. Por (2.8), temos que $v_1, v_2 \geq \alpha([\varepsilon,\pi-\varepsilon],\delta)$ e $x \in [\varepsilon,\pi-\varepsilon]$. Assim, como

$$c \ \geq \ tv_1(x) \ \geq \ t\cdot\alpha([\varepsilon,\pi-\varepsilon]) \ \geq \ t^*(\delta)\cdot\alpha([\varepsilon,\pi-\varepsilon],\delta),$$

obtemos, por (2.11), que $|g'(c)| \leq \dfrac{1}{4L_2\pi}$ e, consequentemente,

$$|g(tv_1(x)) - g(tv_2(x))| \ \leq \ \frac{1}{4L_2\pi}|tv_1(x) - tv_2(x)|. \tag{2.12}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
|S_tv_1(x) - S_tv_2(x)| &= \left| X_0(x) - \int_0^\pi G(x,r)\left[\frac{h(r)}{t} - \frac{g(tv_1(r))}{t}\right] dr \right.\\
&\quad \left. -X_0(x) + \int_0^\pi G(x,r)\left[\frac{h(r)}{t} - \frac{g(tv_2(r))}{t}\right] dr \right|\\
&= \left|\int_0^\pi G(x,r)\left[\frac{g(tv_1(r))}{t} - \frac{g(tv_2(r))}{t}\right] dr\right|\\
&\leq \int_0^\pi |G(x,r)|\frac{|g(tv_1(r)) - g(tv_2(r))|}{t} dr\\
&\leq \int_0^\varepsilon L_2L_1|v_1(r) - v_2(r)|dr\\
&\quad + \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} L_2\frac{1}{4L_2\pi}|v_1(r) - v_2(r)|dr\\
&\quad + \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} L_2L_1|v_1(r) - v_2(r)|dr\\
&\leq L_1L_2\varepsilon\|v_1 - v_2\|_{C^1} + \frac{1}{4}(\pi - 2\varepsilon)\|v_1 - v_2\|_{C^1} + L_1L_2\varepsilon\|v_1 - v_2\|_{C^1}\\
&\leq 2L_1L_2\varepsilon\|v_1 - v_2\|_{C^1} + \frac{1}{4}\|v_1 - v_2\|_{C^1}.
\end{aligned}
$$

Como $2\varepsilon L_1L_2 < \dfrac{1}{4}$, concluímos que

$$
|S_tv_1(x) - S_tv_2(x)| \;\leq\; \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|_{C^1},\ \forall x \in [0,\pi]. \tag{2.13}
$$

Ainda, temos que

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dx}(S_tv_1(x) - S_tv_2(x))\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\pi G(x,r)\left[\frac{g(tv_1(r))}{t} - \frac{g(tv_2(r))}{t}\right] dr\right|\\
&\leq \int_0^\pi \left|\frac{\partial}{\partial x}G(x,r)\right| \frac{|g(tv_1(r)) - g(tv_2(r))|}{t} dr.
\end{aligned}
$$

Prosseguindo de forma análoga ao caso anterior, obtemos que

$$
\left|\frac{d}{dx}(S_tv_1(x) - S_tv_2(x))\right| \;\leq\; \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|_{C^1},\ \forall x \in [0,\pi]
$$

e, portanto, que

$$
\|S_tv_1 - S_tv_2\|_{C^1} \;\leq\; \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|_{C^1},\ \forall v_1, v_2 \in B_\delta(X_0). \tag{2.14}
$$

Mostremos que S_t é tal que $S_t(B_\delta(X_0)) \subseteq B_\delta(X_0)$. De fato, observemos inicialmente que da condição (g_2), dado $\varepsilon_0 > 0$, existe um número $\widehat{t}(\delta) \geq t^*(\delta)$ tal que, podemos escolher $\gamma > 0$ de forma que

$$\begin{aligned} L_2 \int_0^\pi \left| \frac{g(tX_0(r))}{t} - \frac{h(r)}{t} \right| dr &= L_2 \int_0^\gamma \left| \frac{g(tX_0(r))}{t} - \frac{h(r)}{t} \right| dr \\ &\quad + L_2 \int_\gamma^{\pi-\gamma} \left| \left(\frac{g(tX_0(r))}{tX_0(r)} - \frac{h(r)}{tX_0(r)} \right) X_0(r) \right| dr \\ &\quad + L_2 \int_{\pi-\gamma}^\pi \left| \frac{g(tX_0(r))}{t} - \frac{h(r)}{t} \right| dr \\ &\leq \frac{\delta}{2}, \ \forall t \geq \widehat{t}(\delta). \end{aligned}$$

Logo,

$$L_2 \int_0^\pi \left| \frac{g(tX_0(r))}{t} - \frac{h(r)}{t} \right| dr \leq \frac{\delta}{2}, \ \forall t \geq \widehat{t}(\delta). \tag{2.15}$$

Assim, para $t \geq \widehat{t}(\delta)$, $x \in [0, \pi]$ e $v \in B_\delta(X_0)$, temos que

$$\begin{aligned} |S_t v(x) - X_0(x)| &= \left| \int_0^\pi G(x,r) \left[\frac{h(r) - g(tv(r))}{t} \right] dr \right| \\ &= \left| \int_0^\pi G(x,r) \left[\frac{h(r) - g(tX_0(r)) + g(tX_0(r)) - g(tv(r))}{t} \right] dr \right| \\ &\leq \int_0^\pi |G(x,r)| \frac{|h(r) - g(tX_0(r))|}{t} dr \\ &\quad + \int_0^\pi |G(x,r)| \frac{|g(tX_0(r)) - g(tv(r))|}{t} dr. \end{aligned}$$

Como obtemos anteriormente que

$$\int_0^\pi |G(x,r)| \frac{|g(tX_0(r)) - g(tv(r))|}{t} dr \ \leq \ \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_{C^1}, \tag{2.16}$$

segue por (2.15) e (2.16) que

$$|S_t v(x) - X_0(x)| \ \leq \ \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|_{C^1} \ \leq \ \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

De forma análoga ao caso anterior, obtemos que

$$\left| \frac{d}{dx} S_t v(x) - \frac{d}{dx} S_t v(x) \right| \ \leq \ \delta,$$

para $t \geq \widehat{t}(\delta)$ e $x \in [0, \pi]$. Portanto, $S_t(B_\delta(X_0)) \subseteq B_\delta(X_0)$ para $t \geq \widehat{t}(\delta)$.

Pelo Teorema do Ponto fixo de Banach, para $t \geq \widehat{t}(\delta)$ existe uma única função $v_t \in B_\delta(X_0)$ tal que $S_t v_t = v_t$. Segue da mudança de variável realizada no início da demonstração, que uma solução para (2.3) é dada por $Z_t = T v_t$.

A última afirmação feita no Teorema 2.3, sobre a solução Z_t, decorre da unicidade da mesma.

■

Dada a equação diferencial

$$y''(x) + \lambda y(x) + g(y(x)) = t\text{sen}\, x + h(x),\ \forall x \in (0, \pi),$$

definamos $y(x) = u(x) + Z_t(x)$. Como $Z_t(x)$ é solução do problema (2.3), a equação anterior torna-se:

$$u'' + \lambda u + g(u + Z_t) - g(Z_t) = 0, \tag{2.17}$$

em $(0, \pi)$.

O Teorema 2.3 já nos dá a existência de uma solução para o problema (2.2). Vamos agora em busca das demais. Os próximos três lemas serão utilizados para determinar a existência das outras soluções do problema (2.2), garantindo assim a validade da conjectura.

Lema 2.4 *Existe uma constante t_0 tal que, para todo $t \geq t_0$, a equação (2.17) tem uma solução $U_0(x)$ satisfazendo*

$$U_0(0) = U_0(\pi) = 0;\ U_0'(0) < 0;\ U_0'(\pi) > 0 \quad e \quad U_0(x) < 0,\ \forall x \in [0, \pi].$$

Prova. Para demonstração do lema, usaremos o método de sub e supersolução visto no capítulo anterior, o qual é válido no caso unidimensional (ver [29]).

Como $n^2 < \lambda < (n+1)^2$ então λ não é autovalor de (2.1). Pela Alternativa de Fredholm (ver Teorema A.9 no Apêncide A), existe uma única função $\psi_1(x)$ solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \psi_1''(x) + \lambda\psi_1(x) & = & -1, & \forall x \in (0, \pi) \\ \psi(0) = \psi(\pi) & = & 0. & \end{array} \right. \tag{2.18}$$

Definindo $\psi_2(x) = \beta\psi_1(x) - \text{sen}\, x$, com $x \in (0, \pi)$ e β uma constante positiva a ser escolhida, mostremos que existe um número $t_0 > 0$ (t_0 dependendo de β) tal que, para $t \geq t_0$ a aplicação ψ_2 é uma supersolução do problema (2.17), com condição fronteira $\psi_2(0) = \psi_2(\pi) = 0$.

De fato, pelo Teorema 2.3, dado $\varepsilon > 0$, existe $t_0 > 0$ tal que

$$\|Z_t/t - X_0\|_{C^1} \ \leq\ \varepsilon,\ \forall t \geq t_0.$$

Tomemos ε de forma que $Z_t/t > 0$ em $(0, \pi)$. Como $t > 0$, então $Z_t > 0$ em $(0, \pi)$, para todo $t \geq t_0$. Sejam r_2 e M tais que $|\psi_2| \leq r_2$ em $[0, \pi]$ e $|g'(\xi)| \leq M$ em $[-r_2, \infty)$. Pelo Teorema do Valor Médio, temos que

$$|g(Z_t(x) + \psi_2(x)) - g(Z_t(x))| = |g'(c)||\psi_2(t)| \leq M|\psi_2(t)|,$$

onde $c \in [Z_t(x) + \psi_2(x), Z_t(x)] \subseteq [-r_2, \infty)$.

Como $\psi_2(0) = \psi_2(\pi) = 0$, então existe $\alpha > 0$ tal que $|\psi_2| \leq \dfrac{\beta}{2M}$, $\forall x \in [0, \alpha] \cup [\pi - \alpha, \pi]$. Consequentemente, para $t \geq t_0$ e $x \in [0, \alpha] \cup [\pi - \alpha, \pi]$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\psi_2''(x) + \lambda\psi_2(x) + g(Z_t(x) + \psi_2(x)) - g(Z_t(x)) \\
&= \beta\,[\psi_1''(x) + \lambda\psi_1(x)] + \operatorname{sen} x - \lambda \operatorname{sen} x + g(Z_t(x) + \psi_2(x)) - g(Z_t(x)) \\
&= \beta - (\lambda - 1)\operatorname{sen} x + g(Z_t(x) + \psi_2(x)) - g(Z_t(x)) \\
&\leq -\beta - (\lambda - 1) + M\left(\frac{\beta}{2M}\right) \leq 0. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Já em $[\alpha, \pi - \alpha]$, como $Z_t \longrightarrow +\infty$ uniformemente em $x \in [\alpha, \pi - \alpha]$ quando $t \to +\infty$ e $g'(\xi) \longrightarrow 0$ quando $\xi \longrightarrow +\infty$, tomemos t_0 suficientemente grande para que, pelo Teorema do Valor Médio concluamos que $|g(Z_t(x) - \psi_2(x)) - g(Z_t(x))| \leq \dfrac{\beta}{2}$ para $t \geq t_0$. Assim para $t \geq t_0$ e $x \in [\alpha, \pi - \alpha]$, temos

$$\begin{aligned}
&\psi_2''(x) + \lambda\psi_2(x) + g(Z_t(x) + \psi_2(x)) - g(Z_t(x)) \\
&= \beta - (\lambda - 1)\operatorname{sen} x + g(Z_t(x) + \psi_2(x)) - g(Z_t(x)) \\
&\leq -(\lambda - 1) - \beta + \frac{\beta}{2} \ \leq\ 0. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

Como $\psi_2(0) = \psi_2(\pi) = 0$, segue, de (2.19) e (2.20), que ψ_2 é supersolução do problema (2.17).

As condições (g_1) e (g_2) implicam a existência de constantes b_1 e $b_2 \geq 0$, com $0 < b_1 < 1$, tais que

$$g(s) + \lambda s \ \geq\ b_1 s - b_2, \ \forall s \in \mathbb{R}. \qquad (2.21)$$

Agora vamos construir uma subsolução para o problema (2.17). Seja ψ_3 solução única do problema

$$\begin{cases} \psi_3'' + b_1\psi_3 = b_2 + g(Z_t) + (\lambda - b_1)Z_t, & \text{em } (0, \pi) \\ \psi_3(0) = \psi_3(\pi) = 0, \end{cases} \qquad (2.22)$$

com $t \geq t_0$ fixado. Definamos $\psi_4(x) = \psi_3(x) - k\text{sen}\, x$, $\forall x \in [0, \pi]$, onde k é uma constante positiva, que será escolhida posteriormente.

Por (2.21), obtemos que

$$\begin{aligned}
&\psi_4''(x) + \lambda\psi_4(x) + g(\psi_4 + Z_t(x)) - g(Z_t(x)) \\
&= \psi_4''(x) + \lambda(\psi_4(x) + Z_t(x)) + g(\psi_4 + Z_t(x)) - g(Z_t(x)) - \lambda Z_t(x) \\
&\geq \psi_4''(x) + b_1(\psi_4(x) + Z_t(x)) - b_2 - g(Z_t(x)) - \lambda Z_t(x) \\
&= \psi_3''(x) + k\text{sen}\, x + b_1(\psi_3 - k\text{sen}\, x + Z_t(x)) - b_2 - g(Z_t(x)) - \lambda Z_t(x) \\
&= (1 - b_1)k\text{sen}\, x \ \geq \ 0,
\end{aligned}$$

para todo $x \in [0, \pi]$. Como $\psi_4(0) = \psi_4(\pi) = 0$, segue que ψ_4 é uma subsolução do problema (2.17).

Mostremos que podemos tomar $\beta > 0$ pequeno para que tenhamos $\psi_2(x) \equiv \beta\psi_1 - \text{sen}\, x < 0$, $\forall x \in [0, \pi]$.

Com efeito, definamos $F(x) = \beta\psi_1(x) - \text{sen}\, x$. Observemos que

- para $x = 0$, temos $F'(0) = \beta\psi_1'(0) - \cos(0) = \beta\psi_1'(0) - 1$,
- para $x = \pi$, temos $F'(\pi) = \beta\psi_1'(\pi) - \cos(\pi) = \beta\psi_1'(\pi) + 1$.

Para que ψ_1 seja estritamente negativa em $(0, \pi)$, precisamos que $F'(0) < 0$ e $F'(\pi) > 0$. Notemos, então, que quando $\psi_1'(0) \leq 0$ e $\psi_1'(\pi) \geq 0$, temos naturalmente essas condições sobre F'.

Nos casos em que $\psi_1'(0) > 0$ e/ou $\psi_1'(\pi) < 0$, basta tomarmos $0 < \beta \leq \min\left\{\dfrac{1}{\psi_1'(0)}, -\dfrac{1}{\psi_1'(\pi)}\right\}$.

Por um raciocínio análogo ao usado para mostrar que $\psi_2 < 0$, conseguimos uma constante $k > 0$ tal que $\psi_4(x) = \psi_3(x) - k\text{sen}\, x \leq \psi_2(x)$ para todo $x \in [0, \pi]$.

Como $\psi_4(x) \leq \psi_2(x)$, segue pelo método de sub e supersolução, a existência de solução U_0 do problema (2.17), com $U_0(0) = U_0(\pi) = 0$, tal que $\psi_4(x) \leq U_0(x) \leq \psi_2(x) < 0$ para $x \in (0, \pi)$. As condições $U_0'(0) < 0$ e $U_0'(\pi) > 0$ seguem do fato de $U_0(x)$ ter apenas zeros simples, isto é, os ponto nos quais a função se anula possuem suas respectivas derivadas diferente de zero.

$\blacksquare$

Lema 2.5 *Existe uma constante $t_1 \geq t_0$ tal que, para $t \geq t_1$, o problema (2.17) tem soluções v_1, v_2 e w definidas em $[0,\pi]$ tais que $v_1(0) = v_2(0) = w(\pi) = 0$, $v_1'(0) < 0$, $v_2'(0) > 0$, $w'(\pi) > 0$ e todas as três soluções tem n zeros simples no intervalo aberto $(0,\pi)$.*

Prova. Provaremos apenas a existência da solução $v_2(x)$. A demonstração da existência das soluções $v_1(x)$ e $w(x)$ são baseadas no mesmo tipo de argumento.

Como $n^2 < \lambda < (n+1)^2$, então a função $\varphi(x) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}x\right)$ possui exatamente n zeros simples em $(0,\pi)$. Portanto, existe um número $\varepsilon > 0$ tal que, se $U \in C^1([0,\pi])$ é tal que $U(0) = \varphi(0) = 0$, $U'(0) = \varphi'(0)$ e $\|\varphi - U\|_{C^1} \leq \varepsilon$, então U tem exatamente n zeros simples em $(0,\pi)$. Podemos supor que $\varepsilon < 1$.

Considere a seguinte a equação integral

$$\psi(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}(x-r)\right)[g(Z_t(r)+\psi(r)+\varphi(r)) - g(Z_t(r))]\right)dr, \tag{2.23}$$

com $\psi \in C^1([0,\pi])$.

Vamos calcular a derivada de ψ. Denotando

$$\theta_1(x,r) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}(x-r)\right)$$

e

$$\theta_2(r) = g(Z_t(r)+\psi(r)+\varphi(r)) - g(Z_t(r)),$$

temos que

$$\psi(x) \;=\; \int_0^t \theta_1(x,r)\theta_2(x)dr.$$

Fazendo a mudança de variável $y = r/x$, encontramos

$$\psi(x) \;=\; x\int_0^1 \theta_1(x,xy)\theta_2(xy)dy.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= \frac{1}{x}\psi(x) + t\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\theta_1(x,xy)\theta_2(xy)\right)dy \\
&= \frac{1}{x}\psi(x) + x\int_0^1 \left(\partial_1\theta_1(x,xy)\theta_2(xy) + \partial_2\theta_1(x,xy)\theta_2(xy)y + \theta_1(x,xy)\frac{d}{dx}\theta_2(xy)y\right)dy \\
&= \frac{1}{x}\int_0^x \theta_1(x,x)\theta_2(r)dr + \int_0^x \left(\frac{\partial\theta_1}{\partial x}(x,r)\theta_2(r) + \frac{\partial\theta_1}{\partial r}(x,r)\theta_2(r)\frac{r}{x} + \theta_1(x,r)\frac{d}{dr}(r)r\right)dr \\
&= \int_0^x \frac{\partial\theta_1}{\partial x}(x,r)\theta_2(r) + \frac{1}{x}\int_0^x \left(\theta_1(x,r)\theta_2(r) + \frac{\partial\theta_1}{\partial r}(x,r)\theta_2(r)r + \theta_1(x,r)\frac{\partial\theta_2}{\partial r}(r)r\right)dr
\end{aligned}$$

Denotando a segunda integral da igualdade obtida acima por I_2 e usando integração por partes, observemos que

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{x}\int_0^x \left(\theta_1(x,r)\theta_2(r) + r\frac{\partial}{\partial r}(\theta_1(x,r)\theta_2(r))\right) dr \\ &= \frac{1}{x}\left(\int_0^x \theta_1(x,r)\theta_2(r)dr + (r\theta_1(x,r)\theta_2(r))|_{r=0}^{r=x} - \int_0^x \theta_1(x,r)\theta_2(r)dr\right) \\ &= \theta_1(x,x)\theta_2(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde ∂_i, $i = 1, 2$, denota a derivada parcial com respeito a coordenada i. Portanto,

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \int_0^x \frac{\partial\theta_1}{\partial x}(x,r)\theta_2(r) \\ &= \int_0^x \cos\left(\sqrt{\lambda}(x-r)\right)[g(Z_t(r)+\psi(r)+\varphi(r)) - g(Z_t(r))]\, dr. \end{aligned}$$

Notemos que $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, $\psi \in C^2[0,\pi]$ e

$$\psi''(x) + \lambda\psi(x) + g(Z_t(x)+\varphi(x)+\psi(x)) - g(Z_t(x)) = 0. \tag{2.24}$$

Além disso, existe um número $t_1 \geq t_0$ tal que, para $t \geq t_1$, a equação (2.23) tem uma solução satisfazendo $\|\psi\|_{C^1} < \varepsilon$. De fato, como $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$, notemos que $v_2 = \varphi + \psi$ é solução de (2.17) que satisfaz $v_2(0) = 0$ e $v_2'(0) > 0$. Com efeito,

- $v_2'' + \lambda v_2 + g(v_2 + Z_t) - g(Z_t) = \varphi'' + \psi'' + \lambda(\varphi+\psi) + g(\varphi+\psi+Z_t) - g(Z_t)$
  $= (\varphi'' + \lambda\varphi) + \psi'' + \lambda\psi + g(\varphi+\psi+Z_t) - g(Z_t)$
  $= 0;$

- $v_2(0) = \varphi(0) + \psi(0) = 0;$

- $v_2'(0) = \varphi'(0) + \psi'(0) = \sqrt{\lambda}\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot 0\right) = \sqrt{\lambda} > 0.$

Sejam M tal que $|g'(x)| \leq M$, com $x \in [-2,\infty)$, e $\delta > 0$ um número tal que $2\delta < \pi$ e $4M\delta < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Como $g'(x) \longrightarrow 0$ quando $x \to \infty$, então existe um número $L_0 > X_0(x)$ tal que

$$|g'(x)| < \frac{\varepsilon}{6\pi} \text{ para } x \geq L_0. \tag{2.25}$$

Pelo Teorema 1, existe um número $t_1 \geq t_0$ tal que, para $t \geq t_1$, a solução $Z_t(x)$ satisfaz $Z_t(x) \geq X_0(x) + 2$ para todo $x \in [\delta, \pi-\delta]$. Se $|c| \leq 2$ e $t \geq t_1$, segue, pelo

Teorema do Valor Médio, que para todo $x \in [\delta, \pi - \delta]$,

$$\begin{aligned} |g(Z_t(x) + c) - g(Z_t(x)| &= |g'(\overline{c})| \cdot |c| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{6\pi}|c| \\ &= \frac{\varepsilon}{3\pi} \end{aligned} \tag{2.26}$$

onde $\overline{c} \in [Z_t(x) + c, Z_t(x)] \subseteq [X_0(x), +\infty)$.

Para $t \geq t_1$ fixado, definamos o operador $N_t : \mathcal{A} \longrightarrow C^1[0, \pi]$ por

$$(N_t\phi)(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \text{sen}\left(\sqrt{\lambda}(x - r)\right) \left(g(Z_t(r) + \varphi(r) + \phi(r)) - g(Z_t(r))\right) dr, \tag{2.27}$$

onde $\mathcal{A} = \{\phi \in C^1[0, \pi];\ \phi(0) = \phi'(0) = 0 \text{ e } \|\phi\|_1 \leq \varepsilon\}$. Notemos que $\mathcal{A}$ é um conjunto fechado, convexo e limitado na topologia C^1. Além disso, o operador N_t está bem definido, isto é, $N_t(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$. Com efeito, como $|\varphi(x) + \phi(x)| \leq |\varphi(x)| + |\phi(x)| \leq 1 + \varepsilon \leq 2$, temos por (2.26) e pelo Teorema do Valor Médio, que

$$\begin{aligned} |N_t\phi(x)| &= \int_0^\pi |g(Z_t(r) + \varphi(r) + \phi(r)) - g(Z_t(r))|dr \\ &\leq \int_0^\delta 2M dr + \int_\delta^{\pi-\delta} \frac{\varepsilon}{3\pi} dr + \int_{\pi-\delta}^\pi 2M dr \\ &\leq 4M\delta + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

O fato de que

$$(N_t\phi)'(x) = \int_0^x \cos\left(\lambda(x - r)\right) [g(Z_t(r) + \varphi(r) + \phi(r)) - g(Z_t(r))]dr,$$

implica, pelo mesmo raciocínio, que $|(N_t\phi)'(x)| \leq \dfrac{2\varepsilon}{3}$. Como $(N_t\phi)(0) = (N_t\phi)'(0) = 0$, segue que $N_t(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$.

Se $\phi \in \mathcal{A}$ e $U = N_t\phi$, então $U''(x) = -\lambda U(x) - g(Z_t(x) + \varphi(x) + \phi(x)) + g(Z_t(x))$. Logo $|U''(x)| \leq k$, $\forall x \in [0, \pi]$, onde k é uma constante que não depende de ϕ e, portanto, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli (ver Teorema A.11 no Apêndice A) temos que N_t é compacto. Como N_t é contínua, usamos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder (ver Teorema A.13 no Apêncide A) para garantir a existência $\psi \in \mathcal{A}$, onde $N_t\psi = \psi$ e, então, concluir que $\|\psi\|_{C^1} \leq \varepsilon$ e que ψ é solução de equação (2.23).

Sendo assim, pela forma como definimos a função v_2, temos que a mesma é solução para o problema (2.17) e $\|v_2-\varphi\|_{C^1} \leq \varepsilon$. Da última condição que garantimos sobre a solução v_2, concluímos que a mesma possui exatamente n zeros simples no intervalo aberto $(0,\pi)$.

A demonstração da existência das soluções v_1 e w seguem a mesma linha de raciocínio, onde consideramos ao invés da função $\varphi(x) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}x\right)$, as funções $-\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}x\right)$ e $\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}(x-\pi)\right)$, respectivamente.

■

Lema 2.6 *Dado $p \geq 0$ um inteiro, se para algum $t \geq t_1$, existe uma solução v de (2.17) satisfazendo a condição de fronteira $v(0) = v(\pi) = 0$ e possuindo exatamente p zeros simples em $(0,\pi)$ e, além disso, ainda existe outra solução y de (2.17) tal que*

$$y(0) = 0,\ \operatorname{sgn} y'(0) = \operatorname{sgn} v'(0) \ \textit{e } y \textit{ tem } q > p+1 \textit{ zeros em } (0,\pi), \tag{2.29}$$

então, para qualquer inteiro k com $p < k < q$ existe uma solução U de (2.17) que possui exatamente k zeros simples em $(0,\pi)$ e satisfaz $U(0) = U(\pi) = 0$, $\operatorname{sgn} U'(0) = \operatorname{sgn} y'(0)$. Se, em vez de (2.29), pedirmos que

$$y(\pi) = 0,\ \operatorname{sgn}\ y'(\pi) = \operatorname{sgn}\ v'(\pi), \tag{2.30}$$

então, existirá uma solução U de (2.17) com exatamente k zeros simples em $(0,\pi)$ satisfazendo $U(0) = U(\pi) = 0$ e $\operatorname{sgn} U'(\pi) = \operatorname{sgn} v'(\pi)$.

Prova. Inicialmente, mostremos que, para $t \geq t_1$ fixado, existe um número r_1 tal que qualquer solução $U(x)$ do problema

$$\begin{cases} U'' + \lambda U + g(Z_t + U) - g(Z_t) &= 0, \quad \text{em } (0,\pi) \\ U(0) = U(\pi) &= 0 \end{cases} \tag{2.31}$$

satisfaz $U(x) \geq r_1$ em $[0,\pi]$.

De fato, dada $U(x)$ solução de (2.31), segue, da desigualdade (2.21), que

$$\begin{aligned} U''(x) - \lambda Z_t(x) - g(Z_t(x)) &= -\lambda(Z_t(x) + U(x)) - g(Z_t(x) + U(x)) \\ &\leq -b_1(Z_t(x) + U(x)) + b_2, \end{aligned}$$

onde $b_1 < 1$, o que implica que

$$U''(x) + b_1 U(x) \leq (\lambda - b_1) Z_t(x) + b_2 + g(Z_t(x)), \ \forall x \in [0,\pi]. \tag{2.32}$$

Seja ψ uma solução única do problema

$$\begin{cases} \psi'' + b_1\psi &= (\lambda - b_1)Z_t + g(Z_t) + b_2, \quad \text{em } (0,\pi) \\ \psi(0) = \psi(\pi) &= 0. \end{cases} \tag{2.33}$$

Definindo $\psi_1(x) = U(x) - \psi(x)$, $\forall x \in [0,\pi]$, temos, por (2.33), que

$$U''(x) - \psi_1''(x) + b_1 U(x) - b_1\psi_1(t) = (\lambda - b_1)Z_t(x) + g(Z_t(x)) + b_2. \tag{2.34}$$

Pela desigualdade em (2.32), obtemos que

$$-\psi_1''(x) - b_1\psi_1(x) \geq 0. \tag{2.35}$$

Segue, pelo Princípio do Máximo, que $\psi_1(x) \geq 0$ em $[0,\pi]$. Assim,

$$U(x) = \psi_1(x) + \psi(x) \geq \psi(x) \geq \min_{[0,\pi]} \psi(x) \equiv r_1, \tag{2.36}$$

e, portanto, $U(t) \geq r_1$ em $[0,\pi]$.

Sejam v e y como nas hipóteses do lema. Uma vez que estas são soluções da equação (2.17), temos que ambas são contínuas, logo limitadas. Escolhamos então $r_2 < 0$ tal que $y(x), v(x) \geq r_2$ em $[0,\pi]$ e $r_2 \leq r_1$.

Definamos $F(x,U)$ para $(x,U) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}$ por

$$\begin{cases} F(x,U) &= \lambda(U + Z_t(x)) + g(U + Z_t(x)) - \lambda Z_t(x) + g(Z_t(x)) \quad \text{se } r_2 \leq U \\ F(x,U) &= b_1(U + Z_t(x)) - b_2 - \lambda Z_t(x) + g(Z_t(x)) + h(x) \quad \text{se } r_2 \geq U. \end{cases}$$

onde $h(x) = \lambda(r_2 + Z_t(x)) + g(r_2 + Z_t(x)) - [b_1(r_2 + Z_t(x)) - b_2]$. Da desigualdade (2.21) temos que $h(x) \geq 0$ em $[0,\pi]$.

Seja U uma solução para o problema

$$\begin{cases} U''(x) + F(t, U(x)) &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ U(0) = U(\pi) &= 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

Observemos que no caso em que $U(x) \geq r_2$ ou $U(x) \leq r_2$, obtemos que

$$U''(x) + b_1 U(x) \leq (\lambda - b_1)Z_t(x) - g(Z_t(x)) + b_2.$$

Por argumentos semelhantes aos que fizemos anteriormente, temos que $U(x) \geq r_1 \geq r_2$ em $[0, \pi]$. Assim, pela definição da função F, segue que

$$F(x, U) = \lambda U + g(U + Z_t) - g(Z_t)$$

e, portanto, qualquer solução do problema (2.37) é solução para (2.17), com condição de fronteira $u(0) = u(\pi) = 0$. Além disso, garantimos que as soluções y e v são soluções da equação diferencial $U'' + F(x, U) = 0$, pois $y(t), v(t) \geq r_2$.

Visto que $g(x)$ cresce linearmente quando $x \longrightarrow +\infty$, temos que a função F é contínua e satisfaz a condição de uniformemente Lipschitz com respeito a segunda variável. Isto resulta que, se $U(x, a)$ denota a solução do problema com valor inicial

$$\begin{cases} U''(x) + F(x, U(x)) &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ U(0, a) &= 0 \\ U'(0, a) &= a. \end{cases}$$

então $U(x, a)$ é definida e contínua em $(x, a) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}$.

Como $r_2 < 0$, segue pela definição da função F que $F(x, 0) \equiv 0$. Se U é solução não-trivial da equação diferencial $U'' + F(x, U) = 0$, os zeros da solução são todos simples, pois, se não fossem, teríamos que U seria solução do problema com valor inicial

$$\begin{cases} U''(x) + F(x, U(x)) &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ U(y) &= 0 \\ U'(y) &= 0. \end{cases}$$

Notemos que $\overline{U} \equiv 0$ é solução do problema acima, logo, pelo Teorema de Existência e Unicidade de solução, temos que $U \equiv 0$, o que é uma contradição.

Como $\operatorname{sgn} v'(0) = \operatorname{sgn} y'(0)$, temos que $v'(0) \cdot y'(0) > 0$. Se $\underline{a}$ está entre $y'(0)$ e $v'(0)$, então $U(x, \underline{a})$ é solução não-trivial da equação, pois, se não fosse, teríamos $\underline{a} = 0$, o que é um absurdo.

Seja k um inteiro, $p < k < q$. Denotemos $a_1 = v'(0)$ e $a_2 = y'(0)$, para que $U(t, a_1)$ tenha $p < k$ zeros simples em $(0, \pi)$ e $U(t, a_2)$ tenha $q > k$ zeros simples em $(0, \pi)$. Vamos assumir, sem perda de generalidade, $a_1 < a_2$.

Seja $A = \{a > a_1; U(x, a)$ tem pelo menos $k + 1$ zeros simples em $(0, \pi)\}$. Definindo $\bar{a} = \inf A$, temos que $a_1 < \bar{a} \leq a_2$. Como efeito, como $a_2 \in A$, segue da definição de ínfimo que $\bar{a} \leq a_2$. Vejamos agora que a igualdade $\bar{a} = a_1$ não pode ocorrer, pois, como $U(0, a_1) = 0$, $U'(0, a_1) \neq 0$ e $U(x, a_1)$ tem menos que $k+1$ zeros simples em $(0, \pi]$, temos pela continuidade de $U(x, a)$ e $U'(x, a)$ em a e x que, para a próximo de a_1, $U(x, a)$ teria menos $k + 1$ zeros simples em $(0, \pi]$.

Por um raciocínio análogo, temos que $U(x, \bar{a})$ deve ter pelo menos $k + 1$ zeros no intervalo $(0, \pi]$, pois caso $U(x, \bar{a})$ tivesse menos que $k + 1$ zeros em $(0, \pi]$ para $\underline{a}$ ligeiramente maior que a, teríamos $U(x, a)$ com menos de $k + 1$ zeros em $(0, \pi]$, o que contradiz a definição de ínfimo de $\overline{a}$.

Se $U(x, \bar{a})$ tem pelo menos que $k + 1$ zeros simples em $(0, \pi)$, então, para a ligeiramente menor que $\overline{a}$, de forma que $a_1 < a$, temos que $U(x, a)$ teria pelos menos $k + 1$ zeros simples em $(0, \pi)$, e assim, $a \in A$ e $a < \bar{a}$, contradizendo a definição de $\bar{a}$. Portanto, $U(x, \bar{a})$ tem exatamente k zeros simples em $(0, \pi)$ e $U(\pi, \overline{a}) = 0$. Como $U(x, \overline{a}) = 0$ e $\operatorname{sgn} U'(0, a) = \operatorname{sgn} y'(0)$, concluímos a primeira parte do lema. A prova da segunda parte do lema segue de forma análoga.

■

Temos agora desenvolvidos os argumentos necessários para enunciar e demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 2.7 *Existe um número t_1 tal que, para $t > t_1$, o problema (2.17) tem $2n - 1$ soluções distintas $U_0, U_1, ..., U_{n-1}, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1}$ tais que $U_j(0) = U_j(\pi) = 0$, para $j = 0, 1, ..., n - 1$ e $\theta_i(0) = \theta_i(\pi) = 0$, para $i = 1, 2, ..., n - 1$. Além disso, $U_j(x)$ e $\theta_i(x)$ tem de modo respectivo, exatamente j e i zeros simples em $(0, \pi)$, para $j = 0, 1, ..., n - 1$ e $i = 1, 2, ..., n - 1$, e se distinguem porque*

$$U_j'(0) < 0 \quad e \quad \theta_i'(0) > 0.$$

Prova. Pelos Lemas 2.4 e 2.5 garantimos, respectivamente, a existência das soluções U_0 e v_1 da equação diferencial (2.17), para $t \geq t_1 \geq t_0$. Do fato de $v_1(0) = U_0(0) = U_0(\pi) = 0$, $\operatorname{sgn} v_1'(0) = \operatorname{sgn} U_0'(0)$, U_0 não ter zeros simples em $(0, \pi)$ e v_1 ter n zeros simples em $(0, \pi)$, segue, pelo Lema 2.6, que, para cada inteiro j, com $1 \leq j \leq n - 1$, existe uma solução U_j de (2.17) tal que U_j tem exatamente j zeros simples no intervalo $(0, \pi)$. Além disso, segue também que $U_j(0) = U_j(\pi) = 0$ e $\operatorname{sgn}\ U_0'(0) = \operatorname{sgn}\ v_1'(0)$.

Seja w a solução de (2.17) obtida no Lema 2.5. Temos que $w(\pi) = 0$, $w'(\pi) > 0$ e $w(x)$ tem n zeros simples em $(0, \pi)$. Daí, e do fato de $U_0(0) = U_0(\pi) = 0$ e U_0 não ter zeros em $(0, \pi)$, segue, novamente pelo Lema 2.6, a existência de uma solução θ_1 de (2.17) que possui exatamente um zero simples em $(0, \pi)$ e satisfaz $\theta_1(0) = \theta_1(\pi) = 0$ e $\theta'(\pi) > 0$. Como θ_1 é uma solução não trivial com apenas um zero simples, temos que $\theta_1'(0) > 0$.

Apliquemos o Lema 2.6 às soluções θ_1 e $v_2(x)$, a última obtida pelo Lema 2.5. Como $v_2(0) = 0$, $v_2'(0) > 0$ e v_2 tem n zeros simples em $(0, \pi)$, seque, pelo Lema, 2.6 que se $n > 2$ então para cada inteiro i com $2 \leq i \leq n - 1$ existe uma solução $\theta_i(x)$ de (2.17) tal que $\theta_i(0) = \theta_i(\pi) = 0$, $\theta_i' > 0$ e que possui exatamente i zeros simples em $(0, \pi)$.

$\blacksquare$

Consequentemente, para $t > t_1$, Z_t, $Z_t + U_j$ para $j = 0, 1, ..., n-1$ e $Z_t + \theta_i$ para $i = 1, 2, ..., n-1$, são soluções de (2.2), ou seja, o problema (2.2) tem $2n$ soluções distintas. Dessa forma, concluímos a veracidade do Teorema 2.2.

2.2 Um Contra-exemplo para a Conjectura de Lazer-McKenna

Nesta seção, apresentaremos o exemplo encontrado por Dancer [9] para refutar a Conjectura de Lazer-McKenna. No decorrer desse processo, optamos por omitir a justificativa de alguns resultados, apenas citando a referência para os mesmos, uma vez que os argumentos lá contidos fogem do objetivo deste trabalho.

Sejam $\Omega = B_1$ em $\mathbb{R}^N$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua e de suporte compacto tal que $f(y) = \nu y^+ + \mu y^- + g(y) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Para termos $\mu < \lambda_1 < \nu$, vamos impor as seguintes condições sobre a função g:

$$\limsup_{s \to -\infty} \frac{g(s)}{s} = 0 \quad \text{e} \quad \liminf_{s \to +\infty} \frac{g(s)}{s} = 0.$$

Seja λ_2 o autovalor do operador $-\Delta$ em B_1 (com condição de fronteira Dirichlet) e w uma autofunção correspondente. Escolhendo ν ligeiramente maior que λ_2 e supondo que este tenha multiplicidade n, inferimos que o intervalo (μ, ν) contem $n + 1$ autovalores de $-\Delta$.

Segundo a conjectura de Lazer-McKenna deveríamos ter $2(n+1)$ soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta v = f(v) - t\phi_1 - w & \text{em } B_1 \\ v = 0 & \text{sobre } \partial B_1. \end{cases} \tag{2.38}$$

Contraditoriamente, mostraremos que esse problema tem apenas, e exatamente, 4 soluções.

Notemos que quando $n = 1$ não há contradição, mas sim uma confirmação de que, neste caso, a conjetura se mostra verdadeira.

Realizando as mudanças de variável $v(x) = tu(x)$ e $\varepsilon = t^{-1}$, para $t > 0$, o problema (2.38), torna-se:

$$\begin{cases} -\Delta u = \nu u^+ + \mu u^- + \varepsilon g(\varepsilon^{-1}u) - t\phi_1 - \varepsilon w & \text{em } B_1 \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_1. \end{cases} \tag{2.39}$$

Se a aplicação g for identicamente nula, construímos um exemplo semelhante ao contido em [8], que garantirá a existência de 4 soluções do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \nu u^+ + \mu u^- - t\phi_1 - \varepsilon w & \text{em } B_1 \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_1, \end{cases} \tag{2.40}$$

onde $\varepsilon > 0$ é pequeno. Dancer [9] mostra que o termo extra no problema (2.39) não interfere no argumento utilizado em [8] para a obtenção das soluções.

Como g é limitada em $\mathbb{R}$, o termo $\varepsilon g(\varepsilon^{-1}u) - \varepsilon w$ é pequeno em $L^2(B_1)$ uniformemente em u para ε suficientemente pequeno. Assim, qualquer solução de (2.39) para ε pequeno está próxima de uma solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \nu u^+ + \mu u^- - \phi_1 & \text{em } B_1 \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_1. \end{cases} \tag{2.41}$$

A proposição a seguir nos dá informações sobre as soluções do problema (2.41). A demonstração da mesma pode ser encontrada em [8].

Proposição 2.8 *Se $\nu < \lambda_1$ e $\lambda_2 < \mu < \lambda_3$, então (2.41) tem exatamente 2 soluções radialmente simétricas e exatamente uma órbita θ de soluções não-simétricas.*

Vide Apêndice A para definição de órbita de soluções e conceitos relacionados.

Na verdade, as soluções radialmente simétricas do problema (2.41) são $(\mu - \lambda_1)^{-1}\phi_1$ e $(\nu - \lambda_1)^{-1}\phi_1$, e é de fácil verificação que as mesmas são soluções do problema.

Por argumentos similares ao do Teorema 2.3 em [21], se ε é pequeno e positivo, então encontramos 2 soluções do problema (2.39), onde uma está próxima da solução positiva e outra da solução negativa do problema (2.41).

Para a busca de outras soluções para o problema (2.39), serão obtidas, a princípio, equações equivalentes ao mesmo. Inicialmente, observamos que o problema (2.39) pode ser escrito variacionalmente da seguinte forma

$$(I - F)u = \varepsilon\tilde{g}(u) - \tilde{\phi}_1 - \varepsilon\tilde{w}$$

onde $F : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ é tal que $\langle F(u), v\rangle = (\nu u^+ + \mu u^-, v)_2$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$; $\langle \tilde{g}, v\rangle = (g, v)_2$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ e $\tilde{\phi}_1$, $\tilde{w}$ são definidas de forma análoga a $\tilde{g}$. Como ϕ_1 e w são autofunções do operador $-\Delta$ em B_1, temos que $\tilde{\phi}_1$ e $\tilde{w}$ são múltiplos de ϕ_1 e w, respectivamente.

Em [8], Dancer verifica que os pontos próximos da órbita θ em $H_0^1(B_1)$ podem ser escritos de forma única como $m + r$, onde $m \in \theta$, r é pequeno e ortogonal a $\tilde{T}_m(\theta)$, o espaço tangente a θ em m. Dado $k \in \theta$, garante-se a existência de uma imersão $\varphi : G/G_k \to G$, em que elementos de $H_0^1(B_1)$ próximos a k podem ser unicamente escritos como $T_{\varphi(s)}(k + p)$, onde s está próximo do elemento trivial de G/G_k e p é pequeno e ortogonal a $\tilde{T}_k(\theta)$. Assim sendo, precisamos obter uma solução da forma $T_{\varphi(s)}(k + p)$, que satisfaça a equação

$$(I - F)(T_{\varphi(s)}(k + p)) = \varepsilon\tilde{g}(\varepsilon^{-1}T_{\varphi(s)}(k + p)) - \tilde{\phi}_1 - \varepsilon\tilde{w}. \tag{2.42}$$

Mostremos que as aplicações F e $\tilde{g}$ também são equivariantes. Com efeito, como a ação preserva produto interno, temos que

$$\langle T_h(Fu), v\rangle = \langle T_{h^{-1}}T_h(Fu), T_{h^{-1}}v\rangle = \langle Fu, T_{h^{-1}}v\rangle . \tag{2.43}$$

Da definição do funcional F, juntamente com o fato da ação G sobre o espaço $L^2(B_1)$

também preservar produto interno, segue que

$$\begin{aligned}\langle Fu, T_{h^{-1}}v\rangle &= \big(\nu u^+ + \mu u^-, T_{h^{-1}}v\big)_2 \\ &= \big(T_h(\nu u^+ + \mu u^-), T_h T_{h^{-1}}v\big)_2 \\ &= \big(\nu T_h u^+ + \mu T_h u^-), v\big)_2 .\end{aligned}$$

Pela definição da ação, temos que

$$T_h u^+(x) = u^+(h^{-1}x) = \max\{u(h^{-1}x), 0\} = \max\{T_h u(x), 0\} = (T_h u)^+,$$

e assim,

$$\langle Fu, T_{h^{-1}}v\rangle = \big(\nu (T_h u)^+ + \mu (T_h u)^-, v\big)_2 = \langle F(T_h u), v\rangle . \tag{2.44}$$

Por (2.43) e (2.44), concluímos que a aplicação F é equivariante.

De forma análoga a anterior, obtemos que

$$\langle T_h \tilde{g}(u), v\rangle = \langle \tilde{g}u, T_{h^{-1}}v\rangle . \tag{2.45}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\langle \tilde{g}(u), T_{h^{-1}}v\rangle &= (g(u), T_{h^{-1}}v)_2 \\ &= (T_h(gu), v)_2 \\ &= (g(T_h u), v)_2 \\ &= \langle \tilde{g}(T_h u), v\rangle ,\end{aligned}$$

confirma a equivariância de $\tilde{g}$.

Como as aplicações I, F e $\tilde{g}$ são equivariantes e $\tilde{\phi}_1 \in H^1_{0,\mathrm{rad}}$, então a equação (2.42) torna-se:

$$(I - F)(k + p) = \varepsilon \tilde{g}(\varepsilon^{-1}(k + p)) - \tilde{\phi}_1 - \varepsilon T_{(\varphi(s))^{-1}} \tilde{w}. \tag{2.46}$$

Agora, tome $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ pequeno e p_1, $p_2 \in H^1_0(\Omega)$ pequenos. Queremos mostrar que

$$\|\varepsilon \tilde{g}(\varepsilon^{-1}(q + p_1)) - \varepsilon \tilde{g}(\varepsilon^{-1}(q + p_2))\| \leq \delta \|p_1 - p_2\| \tag{2.47}$$

Notemos que, para tal, é suficiente provar que

$$\varepsilon \|g(\varepsilon^{-1}(k + p_1)) - g(\varepsilon^{-1}(k + p_1))\|_2 \leq \delta \|p_1 - p_2\|, \tag{2.48}$$

pois

$$\|\varepsilon\tilde{g}(\varepsilon^{-1}(k+p_1)) - \varepsilon\tilde{g}(\varepsilon^{-1}(k+p_2))\| \leq \frac{1}{\lambda_1}\|g(\varepsilon^{-1}(k+p_1)) - g(\varepsilon^{-1}(k+p_2))\|_2.$$

Com efeito, segue da definição da aplicação $\tilde{g}$, juntamente com a caracterização variacional do autovalor λ_1 e da aplicação da desigualdade de Hölder, que

$$\begin{aligned}
&\|\varepsilon\tilde{g}(\varepsilon^{-1}(k+p_1)) - \varepsilon\tilde{g}(\varepsilon^{-1}(k+p_2))\|^2 \\
&= \varepsilon\left(g(\varepsilon^{-1}(k+p_1)) - g(\varepsilon^{-1}(k+p_2)), \tilde{g}(\varepsilon^{-1}(k+p_1)) - \tilde{g}(\varepsilon^{-1}(k+p_2))\right)_2 \\
&\leq \varepsilon\|g(\varepsilon^{-1}(k+p_1)) - g(\varepsilon^{-1}(k+p_2))\|_2\|\tilde{g}(\varepsilon^{-1}(k+p_1)) - \tilde{g}(\varepsilon^{-1}(k+p_2))\|_2 \\
&\leq \varepsilon\|g(\varepsilon^{-1}(k+p_1)) - g(\varepsilon^{-1}(k+p_2))\|_2\frac{1}{\lambda_1}\|\tilde{g}(\varepsilon^{-1}(k+p_1)) - \tilde{g}(\varepsilon^{-1}(k+p_2))\|.
\end{aligned}$$

Para provarmos (2.48), notemos inicialmente que, dado γ, existe $\tau > 0$ tal que o conjunto $A = \{x \in B; |k(x) + p_1(x)| \leq \tau$ ou $|k(x) + p_2(x)| \leq \tau\}$ tem medida no máximo γ se p_1 e p_2 são pequenos em $H_0^1(B_1)$.

Se $x \notin A$ e $\varepsilon \leq \tau R^{-1}$, onde R é tal que $|g(x)| \leq R$, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que $g(\varepsilon^{-1}(k(x) + p_i(x))) = 0$ para $i = 1, 2$. Logo,

$$\begin{aligned}
&\|g(\varepsilon^{-1}(k(x)+p_1(x))) - g(\varepsilon^{-1}(k(x)+p_2(x)))\|_2 \\
&= \left[\int_A \left|g(\varepsilon^{-1}(k(x)+p_1(x))) - g(\varepsilon^{-1}(k(x)+p_2(x)))\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Denotando $L = \sup\{|g'(\xi)|; \xi \in \mathbb{R}$ e $\xi \neq 0\}$ e aplicando a desigualdade de Holder, temos que

$$\begin{aligned}
\|g(\varepsilon^{-1}(k(x)+p_1(x))) - g(\varepsilon^{-1}(k(x)+p_2(x)))\|_2 &\leq L\varepsilon^{-1}\|p_1 - p_2\|_{2,A} \\
&\leq L\varepsilon^{-1}|A|^{\frac{1}{2}-p^{-1}}\|p_1 - p_2\|_{p,A}.
\end{aligned}$$

Usando agora a imersão de Sobolev obtemos que

$$\|g(\varepsilon^{-1}(k(x)+p_1(x))) - g(\varepsilon^{-1}(k(x)+p_2(x)))\|_2 \leq \delta\varepsilon^{-1}\|p_1 - p_2\|,$$

e, portanto, (2.47) é satisfeita.

Assim, é possível provar que o problema

$$P_k[(I-F)(k+p) + \tilde{\phi}_1 + \varepsilon T_{(\phi(s))^{-1}}\tilde{z} - \varepsilon\tilde{g}(k+p)] = 0,$$

tem uma única solução $p = S(\varepsilon, s)$ em $\tilde{T}_k(\theta)^{\perp}$ para cada ε e s, onde P_k denota a projeção ortogonal sobre $\tilde{T}_k(\theta)^{\perp}$. Além disso, [8] ainda nos leva a obter que $\|S(\varepsilon, s)\| \leq C_1|\varepsilon|$ e

$$\|S(\varepsilon, s_1) - S(\varepsilon, s_2)\| \leq C_2 \varepsilon d(s_1, s_2) \tag{2.49}$$

para ε, s_1, s_2, s pequenos.

A equação (2.46) pode ser, então, reduzida para a forma

$$Q_k \Big[(I - F)(k + S(\varepsilon, s)) + \tilde{\phi}_1 + \varepsilon T_{(\varphi(s))^{-1}} \tilde{w} - \varepsilon \tilde{g}(\varepsilon^{-1}(k + S(\varepsilon, s))) \Big] = 0, \tag{2.50}$$

onde $Q_k = I - P_k$.

Em [8], Dancer verifica que $Q_k \tilde{\phi}_1 = 0$ e $Q_k(I - F'(k)) = 0$. Como F é estritamente diferenciável em k, temos, por (2.49), que

$$\begin{aligned} F(k + S(\varepsilon, s_1)) - F(k + S(\varepsilon, s_2)) &= F'(k)(S(\varepsilon, s_1) - S(\varepsilon, s_2)) \\ &\quad + o(1)\|S(\varepsilon, s_1) - S(\varepsilon, s_2)\| \\ &\leq F'(k)(S(\varepsilon, s_1) - S(\varepsilon, s_2)) + o(1)\varepsilon d(s_1, s_2). \end{aligned}$$

Dessa forma, da equação (2.50), segue que

$$Q_k T_{(\varphi(s))^{-1}} \tilde{w} + A(\varepsilon, s) - \varepsilon Q_k \tilde{g}(\varepsilon^{-1}(k + S(\varepsilon, s))) = 0. \tag{2.51}$$

Dividindo a equação anterior por $\varepsilon \neq 0$, obtemos que

$$Q_k T_{(\varphi(s))^{-1}} \tilde{w} + Re(\varepsilon, s) - Q_k \tilde{g}(\varepsilon^{-1}(k + S(\varepsilon, s))) = 0. \tag{2.52}$$

Por argumentos similares, utilizados na prova de (2.47), temos que $\tilde{g}(\varepsilon^{-1}(k + S(\varepsilon,)s))$ é pequeno em $H_0^1(B_1)$ se ε e s são pequenos. Além disso, por (2.47) e (2.49), o termo $\tilde{g}(\varepsilon^{-1}(k + S(\varepsilon,)s))$ é Lipschitz. Em vista desse fatos, observa-se que só poderão existir soluções perto de k se $Q_k \tilde{w} = 0$. Em seguida, prova-se a existência de exatamente dois pontos m_1 e m_2 em θ onde $Q_{m_i} \tilde{w} = 0$, $i = 1, 2$, e, portanto, a existência de exatamente duas soluções de (2.38) próximas à órbita θ.

Enfim, concluímos que o problema (2.38) possui apenas 4 soluções, independente do número de autovalores contidos no intervalo (μ, ν), com $n \geq 1$.

Capítulo 3

Multiplicidade de solução para problemas com interferência em autovalores de ordem superior

Neste capítulo, vamos discutir a existência e multiplicidade de solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= g(u) + f \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ é um aberto, limitado e suave, $f \in L^2(\Omega)$ e $g(u) = (u^+)^p + \lambda u$, com $1 < p < 2^* - 1$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Assuma $\lambda > \lambda_1$, com $\lambda \in (\lambda_j, \lambda_{j+1})$, para algum $j \in \mathbb{N}$.

Usando a decomposição $f = t\phi_1 + f_1$ com $\int_\Omega f_1\phi_1 = 0$, reescrevemos o problema (P) na forma parametrizada

$$\begin{cases} -\Delta u &= (u^+)^p + \lambda u + t\phi_1 + f_1 \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P_t}$$

Diferente do que vem sendo discutido nos capítulos anteriores, onde trabalhamos com problemas em que a não-linearidade g satisfazia a condição

$$\limsup_{s \to -\infty} \frac{g(s)}{s} < \lambda_1,$$

questionaremos, neste capítulo, a existência de solução para o problema (P_t) em que

$$\lambda_1 < \limsup_{s \to -\infty} \frac{g(s)}{s} = \lambda,$$

Nosso principal resultado é o seguinte:

Teorema 3.1 *Para cada* $f_1 \in C(\Omega)$ *com* $\displaystyle\int_\Omega f_1\phi_1 = 0$*, existe uma constante* $T = T(f_1)$ *tal que, para* $t > T$ *existe pelos menos duas soluções para o problema* (P_t)*.*

Destacamos que os resultados deste capítulo trazem uma abordagem diferente da que é utilizada no trabalho de Ruf-Srikanth [27], o qual nos baseamos. De fato, apresentamos uma demonstração bem mais simples da geometria de Linking associada ao problema. Tais argumentos são inspirados em [26].

Observação 3.2 *Apesar do problema em questão seguir a mesma ideia de cruzamento de autovalores, ainda não são conhecidos resultados de não existência ou sequer de existência de solução em um possível ínfimo dos t's tal que o problema* (P_t) *possui solução, uma vez que o cruzamento não se dá em* λ_1*.*

3.1 Existência de solução negativa

Nesta seção, provaremos a existência de uma solução negativa para o problema (P_t), com $t > T(f_1)$.

Proposição 3.3 *Nas condições do Teorema 3.1, existe* $T(f_1) = T$ *tal que, para* $t > T$ *existe uma solução negativa* ψ_t *para o problema* (P_t)*.*

Prova. Seja u_t solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + t\phi_1 + f_1 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Como λ não é autovalor do operador $-\Delta$, a existência e unicidade de solução para o problema acima fica garantida pela Alternativa de Fredholm (veja Teorema A.9 do Apêndice A). No caso em que u_t for uma solução negativa, temos que esta é uma solução para o problema (P_t), uma vez que o termo $((u_t)^+)^p = 0$.

Seja $\tilde{f}_1$ solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta h = \lambda h + f_1 & \text{em } \Omega \\ h = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Segue da Alternativa de Fredholm a existência e unicidade de solução para o problema acima. É fácil ver que $u_t = \dfrac{t}{\lambda_1 - \lambda}\phi_1 + \tilde{f}_1$ é solução do problema (3.1).

Precisamos encontrar o parâmetro t tais que a solução u_t do problema (3.1) seja negativa. Para tanto observemos que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\lambda_1 - \lambda}{t}u_t - \phi_1\right\|_{C^1} &= \left\|\frac{\lambda_1 - \lambda}{t}\tilde{f}_1\right\|_{C^1}\\ &= \frac{\lambda - \lambda_1}{|t|}\|\tilde{f}_1\|_{C^1}.\end{aligned}$$

Uma vez que tomamos a autofunção ϕ_1 tal que $\phi_1 > 0$ em Ω e $\dfrac{\partial\phi_1}{\partial\eta} < 0$ sobre $\partial\Omega$, existe $\varepsilon > 0$ tal que se

$$\left\|\frac{\lambda_1 - \lambda}{t}u_t - \phi_1\right\|_{C^1} < \varepsilon$$

então $\dfrac{\lambda_1 - \lambda}{t}u_t > 0$ em Ω. Tomemos $|t| > T$ de forma que $\dfrac{\lambda - \lambda_1}{|t|}\|\tilde{f}_1\|_{C^1} < \varepsilon$.

No caso em que $t > T$, como $\lambda_1 < \lambda$, temos que u_t é negativa, garantindo assim a existência de uma solução negativa para o problema (P_t), a qual denotaremos por ψ_t.

■

3.2 Multiplicidade de solução

Nesta seção, encontramos uma segunda solução para o problema (P_t) utilizando-se de um problema modificado com auxílio da solução negativa ψ_t, obtida na seção anterior.

Denote $v_t = w + \psi_t$. Observemos que w é solução do problema

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta w &=& \lambda w + ((w + \psi_t)^+)^p & \text{em } \Omega\\ w &=& 0 & \text{sobre } \partial\Omega\end{array}\right. \tag{3.2}$$

se, e somente, se v_t é solução de (P_t).

De fato, como $w = v_t - \psi_t$, temos

$$\begin{aligned}-\Delta v_t + \Delta\psi_t &= \lambda(v_t - \psi_t) + ((v_t - \psi_t + \psi_t)^+)^p\\ &= \lambda v_t - \lambda\psi_t + ((v_t)^+)^p.\end{aligned}$$

Sabendo que ψ_t é solução negativa de (P_t), temos $((\psi_t)^+)^p = 0$. Logo,

$$-\Delta v_t + \Delta \psi_t - t\phi_1 - f_1 = -\lambda \psi_t - ((\psi_t)^+)^p - t\phi_1 - f_1 + \lambda v_t + ((v_t)^+)^p.$$

Como ψ_t é solução de (P_t), concluímos que v_t também o é. Como o processo acima é completamente reversível, garantimos a equivalência.

Como $w \equiv 0$ é solução de (3.2), temos que a solução v_t corresponde à solução negativa de (P_t), na seção anterior. Portanto, devemos procurar solução não-trivial para (3.2), para assim garantirmos a existência de uma segunda solução para o problema (P_t).

Formulamos o problema (3.2) em uma estrutura variacional, considerando o seguinte funcional energia $I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por:

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega ((u+\psi_t)^+)^{p+1}, \ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Observemos inicialmente que sendo as condições do Teorema A.21 (ver Apêndice) satisfeitas, segue que I está bem definido e $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Além disso, temos

$$I'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \lambda \int_\Omega uv - \int_\Omega ((u+\psi_t)^+)^p v, \ \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Como $I(0) = 0$ e $I'(0)v = 0$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, procuramos por um valor crítico diferente do nulo. Para estabelecer a existência deste segundo valor crítico, utilizaremos da generalização do Teorema do Passo da Montanha devido à Rabinowitz [23].

Teorema 3.4 (Teorema de Linking) *Seja $E = W \oplus X$ um espaço de Banach, com $W \neq \{0\}$ um subespaço de dimensão finita e seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ uma aplicação satisfazendo a condição de Palais-Smale (PS). Se I satisfaz*

(i) existem constantes $\rho, \beta > 0$ tais que

$$I\big|_{\partial B_\rho \cap X} \geq \beta\ ;$$

(ii) existem $v \in \partial B_1 \cap X$, $R_1 > 0$ e $R_2 > \rho$ tais que

$$I\,|_{\partial Q} \leq 0,$$

onde $Q = (\bar{B}_{R_1} \cap W) \oplus \{sv; 0 \leq s \leq R_2\}$.

Então, I tem um ponto crítico $\bar{c} \geq \beta$. Além disso, $\bar{c}$ pode ser caracterizado por

$$\bar{c} = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in Q} I(h(u)),$$

onde $\Gamma = \{h \in C(Q, E); h(u) = u \ \forall u \in \partial Q\}$.

3.2.1 Condição de Palais-Smale (PS)

A seguir, mostramos que I satisfaz a condição de Palais-Smale (PS), (vide Definição 1.22).

Lema 3.5 *Qualquer sequência (PS) para o funcional I é limitada.*

Prova. Seja $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência (PS) para I. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left| I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n) u_n \right| &\leq |I(u_n)| + \frac{1}{2} \|I'(u_n)\|_{H^{-1}} \|u_n\| \\ &\leq M + \varepsilon \|u_n\|, \quad \forall n \geq n_0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Por outro lado, obtemos que

$$I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n) u_n = \frac{1}{2} \int_\Omega ((u_n + \psi_t)^+)^p u_n - \frac{1}{p+1} \int_\Omega ((u_n + \psi_t)^+)^{p+1}. \tag{3.4}$$

Como

$$\begin{aligned} \int_\Omega ((u_n + \psi_t)^+)^{p+1} &= \int_\Omega ((u_n + \psi_t)^+)^p (u_n + \psi_t)^+ \\ &= \int_\Omega ((u_n + \psi_t)^+)^p (u_n + \psi_t) - \underbrace{\int_\Omega ((u_n + \psi_t)^+)^p (u_n + \psi_t)^-}_{=0}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

segue que

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n) u_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_\Omega ((u_n + \psi_t)^+)^{p+1} - \frac{1}{2} \int_\Omega ((u_n + \psi_t)^+)^p \psi_t \\ &\geq C \int_\Omega ((u_n + \psi_t)^+)^{p+1}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde observamos que $\int_\Omega ((u_n + \psi_t)^+)^p \psi_t \leq 0$ e $C := \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) > 0$.

Relacionando as condições (3.3) e (3.6), obtemos que

$$C \int_\Omega \left((u_n + \psi_t)^+ \right)^{p+1} < M + \varepsilon \|u_n\|. \tag{3.7}$$

Raciocinando por absurdo, suponhamos que $\|u_n\| \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$.

Da estimativa (3.7), temos que

$$0 \leq \frac{1}{\|u_n\|^{1+\frac{1}{p}}} \int_\Omega [((u_n+\psi_t)^+)^p]^{1+\frac{1}{p}} < \frac{C_0 M}{\|u_n\|^{1+\frac{1}{p}}} + \frac{C_0 \varepsilon}{\|u_n\|^{\frac{1}{p}}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{3.8}$$

o que implica

$$\left\| \frac{((u_n+\psi_t)^+)^p}{\|u_n\|} \right\|_{1+\frac{1}{p}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.9}$$

Consideremos a sequência $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$. Como $\|v_n\| = 1$ temos que $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$, pois $H_0^1(\Omega)$ é Banach reflexivo. Pela imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, com $p \in [1, 2^*)$, temos que $v_n \longrightarrow v$ em $L^p(\Omega)$. Assim, pelo Teorema A.5 (ver Apêndice A), $v_n \longrightarrow v$ q.t.p. em Ω e, existe uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|v_n(x)| \leq h(x) \in L^p(\Omega)$ q.t.p.. As convergências obtidas acima ocorrem a menos de uma subsequência.

Analogamente ao que fizemos no Capítulo 1, verifiquemos que v é solução para o problema

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda v & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

Com efeito, como

$$\frac{I'(u_n)\phi}{\|u_n\|} = \int_\Omega \nabla v_n \nabla \phi - \lambda \int_\Omega v_n \phi - \int_\Omega \frac{((u_n+\psi_t)^+)^p \phi}{\|u_n\|}, \ \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

$I'(u_m) \longrightarrow 0$, $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$, $v_n \longrightarrow v$ em $L^2(\Omega)$ e $\|u_n\| \longrightarrow +\infty$, temos, aplicando o limite na igualdade acima, que

$$0 = \int_\Omega \nabla v \nabla \phi - \lambda \int_\Omega v\phi - \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \frac{((u_n+\psi_t)^+)^p \phi}{\|u_n\|} \tag{3.11}$$

A convergência da condição (3.9), nos garante que

$$\frac{((u_n+\psi_t)^+)^p \phi}{\|u_n\|} \longrightarrow 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

e existe $h \in L^{1+\frac{1}{p}}(\Omega)$ tal que

$$\left| \frac{((u_n+\psi_t)^+)^p \phi}{\|u_n\|} \right| \leq h(x)|\phi| \in L^1(\Omega), \text{ q.t.p..}$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lesbegue (ver Teorema A.2 no Apêndice A), temos que

$$\int_\Omega \frac{((u_n+\psi_t)^+)^p \phi}{\|u_n\|} \longrightarrow 0. \tag{3.12}$$

Portanto,

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \phi = \lambda \int_\Omega v\phi, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.13}$$

Logo, v é solução de (3.10).

Verifiquemos que $v \neq 0$. Com efeito, como

$$\frac{I(u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2}\|v_n\|^2 - \frac{\lambda}{2}\|v_n\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega \frac{((u_n+\psi_t)^+)^{p+1}}{\|u_n\|^2}, \tag{3.14}$$

$v_n \longrightarrow v$ em $L^2(\Omega)$ e segue da desigualdade (3.7) que

$$0 \leq \int_\Omega \frac{((u_n+\psi_t)^+)^{p+1}}{\|u_n\|^2} < \frac{C_0 M}{\|u_n\|^2} + \frac{C_0 \varepsilon}{\|u_n\|^2} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{3.15}$$

de onde temos, aplicando o limite em (3.14) quando $n \longrightarrow +\infty$, que

$$\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}\|v\|_2^2 = 0. \tag{3.16}$$

Logo, $\|v\|_2 \neq 0$ e, portanto, $v \neq 0$.

Concluímos então que v é uma solução não-trivial para o problema (3.10), e como λ não é autovalor, chegamos em uma contradição.

■

3.2.2 Condições geométricas e a demonstração do Teorema 3.1

Esta subseção está dedicada a provar que o funcional I possui as condições geométricas do Teorema de Linking.

Consideremos o seguinte espaço de dimensão finita $H_j = \text{span}\{\phi_1, \ldots, \phi_j\}$. Note que $H_0^1(\Omega) = H_j \oplus H_j^\perp$. No que segue, precisaremos recorrer a caracterização variacional dos autovalores, dada por:

$$\lambda_{j+1} = \inf_{u \in H_j^\perp} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega |u|^2} \quad \text{e} \quad \lambda_j = \sup_{u \in H_j} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega |u|^2}.$$

Lema 3.6 *Existe $v \in H_j^\perp \cap \partial B_1$ tal que $v(x) \geq -C$ para todo $x \in \Omega$ e $v \notin L^\infty(\Omega)$.*

Prova. Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u \notin L^\infty(\Omega)$. Tal u existe, pois $H_0^1(\Omega)$ não está imerso em $L^\infty(\Omega)$ em dimensão $N \geq 2$. Temos que $|u| \in H_0^1(\Omega)$ e $|u| \notin L^\infty(\Omega)$.

Sejam P_j e $P_j^\perp$ as projeções ortogonais de $H_0^1(\Omega)$ em H_j e $H_j^\perp$, respectivamente. Podemos escrever $|u| = P_j|u| + z$, onde $z = P_j^\perp|u|$. Note que $z \notin L^\infty(\Omega)$. De fato, se $z \in L^\infty(\Omega)$, teríamos que $|u| \in L^\infty(\Omega)$, já que funções que geram o espaço H_j são todas $C^\infty(\bar{\Omega})$, logo limitadas. Isto gera uma contradição. Observemos ainda que

$$z = |u| - P_j|u| \geq 0 - C = -C. \tag{3.17}$$

Denote $v = \dfrac{z}{\|z\|}$. Assim, $v \in H_j^\perp \cap \partial B_1$ e é limitada inferiormente, com $v \notin L^\infty(\Omega)$.

■

Os próximos dois lemas, provam que I satisfaz as condições geométricas do Teorema de Linking.

Lema 3.7 *Existem constantes $\rho, \beta > 0$ tais que*

$$I\Big|_{\partial B_\rho \cap H_j^\perp} \geq \beta.$$

Prova. Seja $u \in \partial B_\rho \cap H_j^\perp$. Pela caracterização variacional do autovalor λ_{j+1}, como $u \in H_j^\perp$ temos

$$\|u\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_{j+1}}\|u\|^2.$$

E ainda, como ψ_t é negativa, obtemos que $(u+\psi_t)^+ \leq |u|$. Logo,

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2}\|u\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega \left((u+\psi_t)^+\right)^{p+1} \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2\lambda_{j+1}}\|u\|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{j+1}}\right)\|u\|^2 - \frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}. \end{aligned}$$

Como $p \in (1, 2^*-1)$, segue da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, com $q \in [1, 2^*)$, que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{j+1}}\right)\|u\|^2 - C\|u\|^{p+1}.$$

Queremos encontrar $\rho > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{j+1}}\right)\rho^2 - C\rho^{p+1} > 0.$$

Como $p > 1$, reescrevemos a desigualdade acima

$$K\rho^2 - C\rho^2\rho^{p-1} > 0.$$

onde $K = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_{j+1}}\right) > 0$, já que $\lambda < \lambda_{j+1}$.

Seguem as seguintes equivalências

$$\rho^2(K - C\rho^{p-1}) > 0 \Longleftrightarrow K - C\rho^{p-1} > 0 \Longleftrightarrow \rho < \left(\frac{K}{C}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Logo,

$$\rho < \left(\frac{1}{2C}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{j+1}}\right)\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Tomemos então

$$\rho = \left(\frac{1}{4C}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{j+1}}\right)\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Portanto,

$$I(u) \geq \beta > 0,$$

onde $\beta = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_{j+1}}\right)\rho^2 - C\rho^{p+1}$.

$\blacksquare$

Lema 3.8 *Existem $v \in \partial B_1 \cap H_j^{\perp}$, $R_1 > 0$ e $R_2 > \rho$ tais que*

$$I\,|_{\partial Q} \leq 0,$$

onde $Q = (\bar{B}_{R_1} \cap H_j) \oplus \{sv; 0 \leq s \leq R_2\}$.

Prova. Tome v dado no Lema 3.6. Seguindo argumentos tradicionais, quebramos ∂Q em três diferentes conjuntos. Consideremos $\partial Q = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_2$, onde

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{w \in H_j; \|w\| \leq R_1\} \\ Q_2 &= \{w + sv; \|w\| = R_1 \text{ e } 0 < s < R_2\} \\ Q_3 &= \{w + R_2 v; \|w\| \leq R_1\}. \end{aligned}$$

Verifiquemos que o funcional $I\,|_{Q_i} \leq 0$, $i = 1, 2$ e 3.

- Em Q_1:

  Seja $w \in Q_1$. Como $w \in H_j$, segue da forma variacional do autovalor λ_j, que

$$\|w\|^2 \leq \lambda_j \|w\|_2^2. \tag{3.18}$$

Logo,

$$\begin{aligned} I(w) &= \frac{1}{2}\|w\|^2 - \frac{\lambda}{2}\|w\|_2^2 \underbrace{- \frac{1}{p+1}\int_\Omega ((w+\psi_t)^+)^{p+1}}_{\leq 0} \\ &\leq \frac{1}{2}(\lambda_j - \lambda)\|w\|_2^2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

É importante destacar, nesta etapa, que não temos dependência alguma da norma $H_0^1(\Omega)$ de w durante a demonstração, o que nos garante

$$I(w) \leq 0, \quad \forall w \in H_j.$$

- Em Q_2:

Façamos $R_2 = \varepsilon R_1$, com $\varepsilon > 0$ tal que $\left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_j} + \varepsilon^2\right) < 0$. Um elemento em Q_2 é então escrito na forma $w + s\varepsilon v$, com $0 < s < R_1$. Logo,

$$\begin{aligned} I(w+s\varepsilon v) &= \frac{1}{2}\|w+s\varepsilon v\|^2 - \frac{\lambda}{2}\|w+s\varepsilon v\|_2^2 \underbrace{- \frac{1}{p+1}\int_\Omega ((w+s\varepsilon v+\psi_t)^+)^{p+1}}_{\leq 0} \\ &\leq \frac{1}{2}\|w\|^2 - \frac{1}{2}s^2\varepsilon^2\|v\|^2 - \frac{\lambda}{2}\|w\|_2^2 - \frac{\lambda}{2}s^2\varepsilon^2\|v\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right) R_1^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 R_1^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j} + \varepsilon^2\right) R_1^2 \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

Observe que a desigualdade acima se dá para qualquer $R_1 > 0$.

- Em Q_3:

Pelas escolhas de R_2 e ε, feitas no item anterior, um elemento em Q_3 é escrito da forma $w + R_1\varepsilon v$. Logo,

$$\begin{aligned}
I(w+R_1\varepsilon v) &= \frac{1}{2}\|w+R_1\varepsilon v\|^2-\frac{\lambda}{2}\|w+R_1\varepsilon v\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega((w+R_1\varepsilon v+\psi_t)^+)^{p+1}\\
&\leq \frac{1}{2}\|w\|^2 + \frac{1}{2}R_1^2\varepsilon^2 - \frac{\lambda}{2}\|w\|_2^2 \underbrace{- \frac{\lambda}{2}R_1^2\varepsilon^2\|v\|_2^2}_{\leq 0}\\
&\quad -\frac{1}{p+1}\int_\Omega((w+R_1\varepsilon v+\psi_t)^+)^{p+1}\\
&\leq \underbrace{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)R_1^2}_{\leq 0} + \frac{1}{2}R_1^2\varepsilon^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega((w+R_1\varepsilon v+\psi_t)^+)^{p+1}\\
&\leq \frac{1}{2}R_1^2\varepsilon^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega\left((w+R_1\varepsilon v+\psi_t)^+\right)^{p+1}\\
&= \frac{1}{2}R_1^2\varepsilon^2 - \frac{R_1^{p+1}}{p+1}\int_\Omega\left(\left(\frac{w}{R_1}+\varepsilon v+\frac{\psi_t}{R_1}\right)^+\right)^{p+1}.
\end{aligned}$$

Utilizaremos um lema técnico, que será demonstrado a seguir, no qual garante que

$$\int_\Omega\left(\left(\frac{w}{R}+\varepsilon v+\frac{\psi_t}{R}\right)^+\right)^{p+1} \geq C_\varepsilon, \tag{3.19}$$

onde $C_\varepsilon > 0$ não depende de $R \geq 1$ e de $w \in H_j \cap \partial B_R$.

Por (3.19), obtemos que

$$I(w+R_1\varepsilon v) \leq \frac{1}{2}R_1^2\varepsilon^2 - \frac{R_1^{p+1}}{p+1}C_\varepsilon,$$

para $R_1 \geq 1$. Basta tomarmos $R_1 > 0$ suficientemente grande, para concluirmos que $I(w+R_1\varepsilon v) \leq 0$. A escolha de R_1 também deve ser feita de forma que $R_2 = \varepsilon R_1$ seja estritamente maior que ρ.

■

Lema 3.9 *Dado $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que,* $\displaystyle\int_\Omega\left(\left(\frac{w}{R}+\varepsilon v+\frac{\psi_t}{R}\right)^+\right)^{p+1} \geq C_\varepsilon,$ *para todo $R \geq 1$ e todo $w \in H_j \cap \partial B_R$.*

Prova. Seja $w \in \bar{B}_R \cap H_j$, assim $\dfrac{w}{R} \in \bar{B}_1 \cap H_j$. Uma vez que a dimensão do espaço H_j é finita, temos que quaisquer normas neste espaço são equivalentes. Portanto, existe $C_j > 0$ tal que

$$\left\|\frac{w}{R}\right\|_{L^\infty} \leq C_j\left\|\frac{w}{R}\right\| \leq C_j. \tag{3.20}$$

Como $\psi_t \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ e $\psi_t < 0$, temos, para qualquer $R \geq 1$, que existe $C > 0$ tal que

$$\frac{\psi_t}{R} \geq \psi_t \geq -C. \tag{3.21}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\left(\frac{w}{R} + \varepsilon v + \frac{\psi_t}{R} \right)^+ \right)^{p+1} &\geq \int_\Omega ((-C_j + \varepsilon v - C)^+)^{p+1} \\
&= \varepsilon^{p+1} \int_\Omega \left(\left(v - \frac{C_j + C}{\varepsilon} \right)^+ \right)^{p+1}.
\end{aligned}$$

Como $v \notin L^\infty$ e é limitada inferiormente, existe $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ tal que $|\Omega_\varepsilon| > 0$ e $v(x) > \dfrac{2(C_j + C)}{\varepsilon}$, para todo $x \in \Omega_\varepsilon$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\left(\frac{w}{R} + \varepsilon v + \frac{\psi_t}{R} \right)^+ \right)^{p+1} &\geq \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\left(\frac{w}{R} + \varepsilon v + \frac{\psi_t}{R} \right)^+ \right)^{p+1} \\
&\geq \varepsilon^{p+1} \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\left(\frac{C_j + C}{\varepsilon} \right)^+ \right)^{p+1} \\
&= (C_j + C)^{p+1} |\Omega_\varepsilon|.
\end{aligned}$$

Logo, basta tomar $C_\varepsilon = (C_j + C)^{p+1} |\Omega_\varepsilon|$.

■

Uma vez que provamos que o funcional I satisfaz as condições geométricas e de compacidade exigidas no Teorema de Linking, temos portanto a existência de uma solução não-trivial para o problema (3.2), concluindo a demonstração do Teorema 3.1.

Apêndice A

Resultados Gerais

Resultados Básicos

Neste apêndice, enunciaremos alguns dos principais teoremas utilizados nas demonstrações deste trabalho.

Teorema A.1 ([22], Desigualdade do Valor Médio) *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *um caminho contínuo, diferenciável no intervalo aberto* (a, b)*. Se* $|f'(t)| \leq M$ *para todo* $t \in (a, b)$*, então*

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Resultados de Medida e Integração

Teorema A.2 ([3], Teorema 5.6 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)) *Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$ *tal que*

(i) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *q.t.p. em* Ω*;*

(ii) existe $g \in L^1(\Omega)$ *tal que, para todo* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *q.t.p. em* Ω*.*

Então, $f \in L^1(\Omega)$ *e* $\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$*. Consequentemente,*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n dx = \int_\Omega f dx.$$

Teorema A.3 ([7], Teorema 4.6 (Desigualdade de Hölder)) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p, q \leq +\infty$, tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Observação A.4 *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado e $f \in L^p(\Omega)$, então $f \in L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q \leq p$.*

Teorema A.5 ([7], Teorema 4.9) *Sejam (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tais que $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$. Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que*

(i) $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ *q.t.p. em* Ω;

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *q.t.p. em* Ω.

Resultados de Análise Funcional

Teorema A.6 ([17], Teorema 5.7 (Teorema da Representação de Riesz)) *Seja H um espaço de Hilbert munido do produto interno (x, y), com $x, y \in H$. Dado T um funcional linear e limitado em H, existe um único $z \in H$ tal que $T(x) = (x, z)$, para todo $x \in H$. Além disso, $\|T\| = \|z\|$, onde $\|z\| = (z, z)^{1/2}$.*

Teorema A.7 ([7], Teorema 3.18) *Se X é um espaço de Banach reflexivo e $\{x_n\}$ uma sequência limitada em X, então existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ que converge na topologia fraca de X.*

Definição A.8 *Dizemos que um operador $T : X \longrightarrow Y$ é compacto se $T(B)$ é relativamente compacto (isto é, $\overline{T(B)}$ é compacto) para qualquer $B \subset X$ limitado.*

Teorema A.9 ([7], Teorema 6.6 (Alternativa de Fredholm)) *Sejam E um espaço de Banach e $T : E \longrightarrow E$ um operador linear compacto. Então,*

1. *$N(I - T)$ possui dimensão finita;*

2. *$R(I - T)$ é fechado e $R(I - T) = N(I - T^*)^{\perp}$;*

3. $N(I - T) = \{0\} \iff R(I - T) = E$;

4. $dimN(I - T) = dimN(I - T^*)$.

onde T^* *é o operador adjunto de* T.

Definição A.10 *Seja* $T : X \longrightarrow X$ *linear e contínuo. Dizemos que* λ *é um autovalor de* T *se* $N(\lambda I - T) \neq \{0\}$, *no qual* $N(\lambda I - T)$ *é dito o autoespaço associado a* λ.

Teorema A.11 ([7], Teorema 4.25 (Arzelà-Ascoli)) *Sejam* X *um espaço métrico compacto e* $\mathcal{H}$ *um subconjunto limitado de* $C(X)$. *Suponha que* $\mathcal{H}$ *é uniformemente equicontínua, isto é,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } d(x_1, x_2) < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,\ \forall f \in \mathcal{H}.$$

Então, o fecho de $\mathcal{H}$ *é compacto.*

Teorema A.12 ([7] Teorema 5.7 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)) *Sejam* X *um espaço métrico completo não-vazio e* $F : X \longrightarrow X$ *uma contração estrita, isto é,*

$$d(Fx, Fx) \leq kd(x, y),\ \forall x, y \in X,\ \text{com } k < 1.$$

Então, F *tem um ponto fixo* $z = Fz$.

Teorema A.13 ([7], Teorema do Ponto Fixo de Schauder) *Sejam* C *um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Banach* E *e* $F : C \longrightarrow C$ *uma aplicação contínua, tal que,* $F(C) \subset K$, *onde* K *é um subconjunto compacto de* C. *Então* F *tem um ponto fixo em* C .

Resultados de Espaços de Sobolev

Teorema A.14 ([12], Teorem 5.6 (Desigualdade Geral de Sobolev)) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio aberto, com fronteira de classe* C^1. *Suponhamos* $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

(i) *Se* $k < \frac{N}{p}$, *então* $u \in L^q(\Omega)$ *e*

$$||u||_q \leq C||u||_{k,p},$$

onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$ *e* C *é uma constante que depende de* k, p, N *e* Ω.

(ii) Se $k > \frac{N}{p}$, *então* $u \in C^{k-\left[\frac{N}{p}\right]-1,\gamma}(\overline{\Omega})$ *e*

$$||u||_{C^{k-\left[\frac{N}{p}\right]-1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C||u||_{k,p},$$

onde

$$\gamma = \begin{cases} \left[\dfrac{N}{p}\right] + 1 - \dfrac{N}{p}, \textit{ se } \dfrac{N}{p} \textit{ não é um número inteiro} \\ \textit{qualquer número positivo} < 1, \textit{ se } \dfrac{N}{p} \textit{ é um número inteiro.} \end{cases}$$

e C *uma constante que depende de* k, p, N, γ *e* Ω.

Princípio do máximo e regularidade

Consideremos operadores elípticos L, tendo a forma

$$Lu = -\Delta u + a(x)u \tag{A.1}$$

onde $a \in L^\infty(\Omega)$. Os próximos resultados são válidos para operados mais gerais. No entanto, apresentaremos apenas o que será necessário ao nosso trabalho.

Teorema A.15 ([12], Princípio do máximo fraco, com $a \geq 0$) *Suponhamos que* L *é um operador elíptico dado por* (A.1), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é aberto, limitado e conexo,* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *e* $a \geq 0$ *em* Ω.

(i) Se $Lu \leq 0$ *em* Ω, *então*

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

(ii) Se $Lu \geq 0$ *em* Ω, *então*

$$\min_{\overline{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-.$$

Em particular, se $Lu = 0$ *em* Ω, *então*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Teorema A.16 ([12], Princípio do máximo forte, com $a \geq 0$) *Suponhamos que* L *é um operador elíptico dado por* (A.1), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *é aberto, limitado e conexo,* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *e* $a \geq 0$ *em* Ω.

(i) Se $Lu \leq 0$ *em* Ω *e* u *atinge um máximo não negativo em* $\overline{\Omega}$ *em um ponto interior, então* u *é constante em* Ω.

(ii) Se $Lu \geq 0$ *em* Ω *e* u *atinge um mínimo não positivo em* $\overline{\Omega}$ *em um ponto interior, então* u *é constante em* Ω.

Teorema A.17 ([17], Teorema 9.15) *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio de classe* $C^{1,1}$ *e* L *um operador estritamente elíptico dado por* $(A.1)$ *em* Ω. *Se* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$, *onde* $1 < p < \infty$, *então o problema de Dirichlet* $Lu = f$ *em* Ω, *com* $u - \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *tem uma única solução* $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

Lema A.18 ([17], Teorema 9.17) *Se* L *é um operador satisfazendo as hipóteses do Teorema A.17, então existe uma constante* C *(independente de* u*) tal que*

$$||u||_{2,p} \leq C||Lu||_p$$

para toda $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{2,p}(\Omega)$, *com* $1 < p < \infty$.

Teorema A.19 ([17], Teorema 9.19) *Se* u *uma solução* $W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ *do operador elíptico* $Lu = f$ *em um domínio* Ω, *onde os coeficientes de* L *pertencem* $C^{k-1,1}(\Omega)$, $(C^{k-1,\alpha}(\Omega))$, $f \in W^{k,q}_{loc}(\Omega)$, $(C^{k-1,\alpha}(\Omega))$, *com* $1 < p, q < \infty$, $k \geq 1$ *e* $0 < \alpha < 1$, *então* $u \in W^{k+2,q}_{loc}(\Omega)$, $(C^{k+1,\alpha}(\Omega))$. *Além disso, se* $\Omega \in C^{k+1,1}$, $(C^{k+1,\alpha})$, L *é estritamente elíptico em* Ω *com coeficientes em* $C^{k-1,1}(\overline{\Omega})$, $(C^{k-1,\alpha}(\overline{\Omega}))$, *e* $f \in W^{k,q}(\Omega)$, $(C^{k-1,\alpha}(\overline{\Omega}))$, *então* $u \in W^{k+2,q}(\Omega)$, $(C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega}))$.

Teorema A.20 ([5], Teorema 9.33 (Schauder)) *Se* Ω *é um domínio limitado e de classe* $C^{2,\alpha}$, *com* $0 < \alpha < 1$, *então, para toda* $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *existe uma única solução* $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *do problema*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u + u & = & f & \text{em } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{A.2}$$

Além disso, se Ω *é de classe* $C^{m+2,\alpha}$ *(*$m \geq 1$ *um número inteiro) e se* $f \in C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$, *temos*

$$u \in C^{m+2,\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ com } ||u||_{C^{m+2,\alpha}} \leq C||f||_{C^{m,\alpha}}.$$

Proposição A.21 ([24], Proposição B.10) *Seja p uma função satisfazendo as seguintes condições:*

(p_1) $p(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(p_2) *existem constantes $a_1, a_2 \geq 0$ tais que*

$$|p(x,\xi)| \leq a_1 + a_2|\xi|^s.$$

onde $0 \leq s < 2^* - 1$. Se $P(x,\xi) = \int_0^\xi p(x,t)dt$ e

$$I(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - P(x,u)\right) dx,$$

então $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$I'(u)\varphi = \int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi - p(x,u)\varphi)\, dx, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Além disso, $J(u) = \int_\Omega P(x,u(x))dx$ é fracamente contínuo e $J'(u)$ é compacto para cada $u \in H_0^1(\Omega)$.

Proposição A.22 ([24], Proposição B.35) *Sejam p satisfazendo as condições $(p_1) - (p_2)$ e I o operador definido como na Proposição A.21. Se $\{u_m\}$ é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$ tal que $I'(u_m) \longrightarrow 0$ quando $m \longrightarrow +\infty$, então $\{u_m\}$ possui uma subsequência convergente.*

Ação de um Grupo Topológico

Apresentaremos algumas definições e resultados necessários para um bom entendimento do Capítulo 2.

Definição A.23 *Um grupo topológico é um espaço topológico $(G, \tau, +)$, munido de uma operação "$+$"que torna G um grupo ("τ "denota a topologia de G), tal que:*

1. *A aplicação $+ : G \times G \longrightarrow G$ definida por $+(g,h) = g + h$ é contínua;*

2. *A função $I^{-1} : G \longrightarrow G$ definida por $I^{-1}(g) = g^{-1}$ é contínua.*

Denotaremos $O(N)$ o grupo de todas as transformações lineares ortogonais de $\mathbb{R}^N$. É possível verificar que $O(N)$ munido com a operação produto de matrizes é um grupo topológico, o qual é designado na literatura por grupo de rotações em R^N.

Definição A.24 *Uma ação de um grupo topológico G sobre um espaço vetorial normado E é uma aplicação contínua*

$$\begin{array}{rcl} \rho \ : \ G \times E & \longrightarrow & E \\ (g,u) & \longmapsto & \rho(g,u) = g \cdot u \end{array}$$

que satisfaz:

1. $1 \cdot u = u$ *para todo* $u \in E$;

2. $(g+h) \cdot u = g \cdot (h \cdot u)$, *para todos* $g, h \in G$ *e* $u \in E$;

3. $u \longrightarrow g \cdot u$ *é linear, para todo* $g \in G$.

Se $\|g \cdot u\| = \|u\|$ *para todo* $u \in E$, *a ação é dita isométrica.*

Exemplo A.25 *A aplicação*

$$\begin{array}{rcl} T \ : \ O(N) \times H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & H_0^1(\Omega) \\ (h,u) & \longmapsto & T(h,u) = T_h u \end{array}$$

onde definimos $T_h u = u(h^{-1}x)$, *é uma ação isométrica. Quando falarmos em ação de um grupo de* $O(N)$ *sobre o* $H_0^1(\Omega)$, *estaremos nos referindo a ação* T_h.

Antes de definirmos função radial, precisamos saber o conceito de conjunto radialmente simétrico. Um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é dito radialmente simétrico se é mensurável e satisfaz a propriedade:

$$\text{se} \ \ x_0 \in \Omega \ \ \text{e} \ \ |x| = |x_0| \ \ \text{então} \ \ x \in \Omega.$$

Uma bola e o $\mathbb{R}^N$ são exemplos de conjuntos radialmente simétricos.

Definição A.26 (Forma algébrica) *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um conjunto radialmente simétrico e* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Dizemos que* u *é uma função radialmente simétrica se, para cada transformação linear ortogonal* $A : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, *a igualdade* $u(Ax) = u(x)$ *q.t.p. em* Ω.

Definimos o espaço $H^1_{0,rad}(\Omega)$ por:

$$H^1_{0,rad}(\Omega) = \{u \in H_0^1(\Omega); T_h u(x) = u(x), \quad \forall x \in \Omega \text{ e } h \in O(N)\}.$$

Chamaremos as funções de $H^1_{0,rad}(\Omega)$ de funções radiais. O espaço $H^1_{0,rad}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert

Estabeleceremos a seguir algumas definições.

Definição A.27 *Dada uma ação de um grupo topológico G sobre um espaço vetorial normado E, a órbita de $u \in E$ é o conjunto $\{gu;\ g \in G\}$.*

Definição A.28 *Dada uma ação de um grupo topológico G sobre um espaço vetorial normado E, o estabilizador de $u \in E$ é o conjunto $G_u = \{g \in G;\ g(u) = u\}$.*

Definição A.29 *Dada uma ação de um grupo topológico G sobre um espaço vetorial normado E.*

1. *Um funcional $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é G-invariente se $F \circ g = g$, $\forall g \in G$.*

2. *Uma aplicação $F : E \longrightarrow E$ é equivariante se $F \circ g = g \circ F$, $\forall g \in G$.*

Apêndice B

Resultados Específicos

Neste apêndice, enunciaremos e demonstraremos alguns resultados específicos que foram usados nesta dissertação.

Teorema B.1 (Princípio do Máximo) *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $-\Delta u + c(x)u \leq 0$ em Ω e $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, onde $c(x) \geq c_0 > -\lambda_1$ para todo $x \in \Omega$, e $c \in L^\infty(\Omega)$. Se $u \not\equiv 0$, então $u < 0$ em Ω.*

Prova. Escolhamos um domínio Ω' tal que $\overline{\Omega} \subset \Omega'$ e λ_1' (o primeiro autovalor do $-\Delta$ com condição de Dirichlet em Ω') satisfaz $\lambda_1 > \lambda_1' > -c_0$. Tomemos $\phi' > 0$ autofunção correspondente ao autovalor λ_1' e definamos $v = \dfrac{u}{\phi'}$ em $\overline{\Omega}$. Assim,

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u}{\phi'}\right) = \frac{u_{x_i}\phi' - u\phi'_{x_i}}{(\phi')^2}.$$

Donde segue que

$$\begin{aligned}\nabla u \cdot \nabla \phi &= \frac{1}{(\phi')^2}\sum_{i=1}^{n}(u_{x_i}\phi' - u\phi'_{x_i})\phi'_{x_i} \\ &= \frac{1}{\phi'}\nabla u \nabla \phi' - \frac{v}{\phi'}|\nabla \phi'|^2,\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\nabla u \cdot \nabla \phi' = \phi' \nabla v \nabla \phi' + v|\nabla \phi'|^2. \tag{B.1}$$

Agora, derivando $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$, encontramos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u_{x_i}\phi' - u\phi'_{x_i}}{(\phi')^2}\right)\\
&= \frac{(u_{x_i}\phi' - u\phi'_{x_i})_{x_i}(\phi')^2 - (u_{x_i}\phi' - u\phi'_{x_i})2\phi'\phi'_{x_i}}{\phi'^4}\\
&= \frac{1}{(\phi')^2}\left(u_{x_ix_i}\phi' - u\phi'_{x_ix_i}\right) - \frac{2}{(\phi')^2}u_{x_i}\phi'_{x_i} + \frac{2}{(\phi')^3}u(\phi'_{x_i})^2,
\end{aligned}$$

o que implica pela igualdade (B.1) que

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \frac{1}{(\phi')^2}\left(\Delta u \cdot \phi' - u\Delta\phi'\right) - \frac{2}{(\phi')^2}\nabla u\nabla\phi' + \frac{2v}{(\phi')^2}|\nabla\phi'|^2\\
&= \frac{1}{(\phi')^2}\left(\Delta u \cdot \phi' - \lambda_1' u\phi'\right) - \frac{2}{\phi'}\nabla v\nabla\phi'\\
&= \frac{1}{\phi'}\Delta u + \lambda_1' v - \frac{2}{\phi'}\nabla v\nabla\phi'.
\end{aligned}$$

Por hipótese, obtemos que

$$-\Delta v - \frac{2}{\phi'}\nabla v\nabla\phi' + \lambda_1' v = \frac{1}{\phi'}\Delta u \leq \frac{1}{\phi'}\left(-c(x)u\right) = -c(x)v,$$

e assim, concluímos que

$$-\Delta v - \frac{2}{\phi'}\nabla\phi'\nabla v + \left(c(x) + \lambda_1'\right)v \leq 0.$$

Observemos que este é um operador elíptico tal que

$$-\frac{2}{\phi'}\phi'_{x_i} \in L^\infty(\Omega) \quad e \quad c(x) + \lambda_1' \geq 0 \in L^\infty(\Omega).$$

Logo, uma vez que $v \not\equiv 0$ e $v = 0$ sobre $\partial\Omega$, temos pelo Princípio do Máximo que $v < 0$ e, portanto, $u = v\phi < 0$.

■

Teorema B.2 (Princípio Varicional Ekeland) *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $\phi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional semicontínuo inferiormente e limitado inferiormente. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\overline{u} \in X$ tal que*

$$\phi(\overline{u}) \leq \inf_X \phi + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, dado $\lambda > 0$ existe $u_\lambda \in X$ tal que *(i)* $\phi(u_\lambda) \leq \phi(\underline{u})$,

(ii) $d(u_\lambda, \overline{u}) \leq \lambda$,

(iii) $\phi(u_\lambda) < \phi(u) + \dfrac{\varepsilon}{\lambda} d(u_\lambda, u), \ \forall u \neq u_\lambda$.

Prova. Denotemos $d_\lambda(x,y) = \left(\dfrac{1}{2\lambda}\right) d(x,y)$. Definamos em X um ordem parcial dada por

$$u \leq v \Leftrightarrow \phi(u) \leq \phi(v) - \varepsilon d_\lambda(u,v).$$

Seja $S_1 = \{u \in X; u \leq u_1\}$, onde $u_1 = \overline{u}$. Tomemos $u_2 \in S_1$ tal que

$$\phi(u_2) \leq \inf_{S_1} \phi + \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

Por iterações, obtemos uma sequência $\{S_n\}$ de subconjuntos de X, onde

$$S_n = \{u \in X; u \leq u_n\}, \text{ com } \phi(u_n) \leq \inf_{S_{n-1}} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

É fácil ver que $S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_n \supseteq \cdots$. De fato, se $u \in S_{n+1}$ então $u \leq u_{n+1}$, como $u_{n+1} \in S_n$ temos por transitividade que $u_{n+1} \leq u_n$, e assim, $u \in S_n$. Notemos ainda que cada S_n é um conjunto fechado. Seja $\{x_j\} \subset S_n$ com $x_j \to x \in X$. Pela definição do conjunto S_n, temos que

$$\phi(x_j) \leq \phi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(x_j, u_n).$$

o que implica que

$$\liminf_{j \to +\infty} \phi(x_j) \leq \phi(u_n) - \varepsilon \liminf_{j \to +\infty} d_\lambda(x_j, u_n).$$

Como ϕ é semicontínua inferiormente e $d_\lambda(\cdot, u_n)$ é contínua, temos que

$$\phi(x) \leq \liminf_{j \to +\infty} \leq \phi(u_n) - \varepsilon d_\lambda(x, u_n),$$

donde segue que $x \leq u_n$, e portanto, $x \in S_n$.

Verifiquemos agora o que acontece com o diâmetro desses subconjuntos S_n quando $n \to +\infty$. Seja $x \in S_n$, temos

$$\phi(x) \leq \inf_{S_{n-1}} \phi - \varepsilon d_\lambda(x, u_n).$$

Sabemos ainda que $x \in S_{n-1}$, então, uma vez que

$$\phi(u_n) \leq \inf_{S_{n-1}} \phi + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

obtemos que

$$\phi(x) \leq \inf_{S_{n-1}} \phi + \frac{\varepsilon}{2^n} - \varepsilon d_\lambda(x, u_n) \leq \phi(x) + \frac{\varepsilon}{2^n} - \varepsilon d_\lambda(x, u_n).$$

Logo,

$$\varepsilon d_\lambda(x, u_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n} \;\Rightarrow\; d_\lambda(x, u_n) \leq \frac{1}{2^n},\ \forall x \in S_n.$$

Sejam $x, y \in S_n$, como $u_n \in S_n$, temos

$$d_\lambda(x, y) \leq d_\lambda(x, u_n) + d_\lambda(u_n, y) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

e assim,

$$\frac{1}{2\lambda} d(x, y) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \;\Rightarrow\; d(x, y) \leq \frac{\lambda}{2^n}, \forall x, y \in S_n.$$

Concluímos, então, que $diam(S_n) \leq \dfrac{\lambda}{2^n}$. Daí, quando $n \to +\infty$, temos que

$$diam_{n\to+\infty}(S_n) \to 0.$$

Portanto,

$$\cap_n S_n = \{u_\lambda\}.$$

Vejamos agora que u_λ é o elemento desejado. Uma vez que $u_\lambda \in S_1$, temos que

$$\phi(u_\lambda) \leq \phi(\overline{u}) - \varepsilon d_\lambda(u, \overline{u}) \Rightarrow \phi(u_\lambda) \leq \phi(\overline{u}).$$

Notemos agora que,

$$d_\lambda(\overline{u}, u_n) \leq \sum_{j=1}^{n-1} d_\lambda(u_j, u_{j+1}) = \frac{1}{2\lambda} \sum_{j=1}^{n-1} d(u_j, u_{j+1}).$$

Como $u_j, u_{j+1} \in S_j$ e $diam(S_j) \leq \dfrac{\lambda}{2^j}$, obtemos que

$$d_\lambda(\overline{u}, u_n) \leq \frac{1}{2\lambda} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda}{2^j}.$$

Sabendo que $u_n \to u_\lambda$ quando $n \to +\infty$, temos que

$$d_\lambda(\overline{u}, u_\lambda) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow d(\overline{u}, u_\lambda) \leq \lambda.$$

Seja $u \in X$, tal que, $u \leq u_\lambda$, então, por transitividade temos que $u \in \cup_n S_n$. Assim teríamos que $u = u_\lambda$. Se $u \neq u_\lambda$ temos que $u \nleq u_\lambda$, então,

$$\phi(u) > \phi(u_\lambda) - \varepsilon d_\lambda(u, u_\lambda) \Rightarrow \phi(u_\lambda) < \phi(u) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(u, u_\lambda).$$

■

Teorema B.3 *Seja $\phi \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição (PS). Seja C um subconjunto fechado e convexo de H. Suponhamos $K \equiv I - \phi'$ aplicação de C em C e ϕ limitada inferiormente em C. Então existe $u_0 \in C$ tal que $\phi'(u_0) = 0$ e $\inf\limits_C \phi = \phi'(u_0)$.*

Prova. Pelo Teorema de Riesz como $H \simeq H'$ estamos identificando $\phi : H \to H'$ por $\phi : H \to H$. Como ϕ é contínua, temos que ϕ é semicontínua inferiormente, e assim, aplicando o Princípio Variacional de Ekelando, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $u_\varepsilon \in C$ tal que

$$\phi(u_\varepsilon) \leq \inf_C \phi + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \phi(u_\varepsilon) \leq \phi(u) + \varepsilon ||u_\varepsilon - u||, \forall u \in C,$$

com $u \neq u_\varepsilon$.
Uma vez que $K : C \to C$ e C é convexo, temos que, $Ku_\varepsilon \in C$ e

$$\begin{aligned} u &= (1-t)u_\varepsilon + tku_\varepsilon \in C \\ &= u_\varepsilon + t(Ku_\varepsilon - u_\varepsilon), \forall t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula de Taylor, obtemos que

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \phi(u_\varepsilon) + \langle \phi'(u_\varepsilon), t(Ku_\varepsilon - u_\varepsilon) \rangle + o(t||Ku_\varepsilon - u_\varepsilon||) \\ &\leq \phi(u) + \varepsilon ||u_\varepsilon - u|| + t\langle \phi'(u_\varepsilon), Ku_\varepsilon - u_\varepsilon \rangle + o(t||\phi'(u_\varepsilon)||) \\ &= \phi(u) + \varepsilon ||u_\varepsilon - u|| + t\langle \phi'(u_\varepsilon), \phi'(u_\varepsilon) \rangle + o(t||\phi'(u_\varepsilon)||). \end{aligned}$$

Assim,

$$t||\phi'(u_\varepsilon)||^2 \leq \varepsilon ||u_\varepsilon - u|| + o(t).$$

Se $t \neq 0$ e $t \to 0$, obtemos que

$$||\phi'(u_\varepsilon)||^2 \leq \varepsilon ||\phi'(u_\varepsilon)|| \Rightarrow ||\phi'(u_\varepsilon)|| \leq \varepsilon.$$

Tomemos então $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$. Para cada n temos que

$$\inf_C \phi \leq \phi(u_n) \leq \inf_C \phi + \frac{1}{n} \;\text{ e }\; ||\phi'(u_n)|| \leq \tfrac{1}{n}.,$$

e assim,

$$\phi(u_n) \to \inf_C \phi \;\text{ e }\; \phi'(u_n) \to 0.$$

Uma vez que ϕ satisfaz a condição (PS), existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ tal que $u_{n_k} \to u_0$. Como ϕ e ϕ' são aplicações contínuas, temos que u_0 satisfaz

$$\phi(u_0) = \inf_C \phi \;\text{ e }\; \phi'(u_0) = 0.$$

■

Referências Bibliográficas

[1] A. Ambrosetti, G. Prodi, *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces*, Ann. Math. Pura Appl., 93 (1972), 231-247.

[2] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Functional Analysis, 14 (1973), 349-381.

[3] R. G. Bartle, *Elements of Integration and Lebesgue Measuare*, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1995.

[4] M. S. Berger, E. Podolak, *On the solutions of a nonlinear Dirichlet problem*, Indiana Univ. Math. J., 24 (1975), 837-846.

[5] H. Brezis, L. Nirenberg, *H^1 versus C^1 local minimizers.* C.R Acad. Sci. Paris, t. Série I, (1993) 465-472.

[6] H. Brezis, R. E. L. Turner, *On a class of superlinear elliptic problems*, Comm. Partial Differential Equations, 2 (1977), 601-614.

[7] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2010.

[8] E. N. Dancer, *Counterexamples to some conjectures on the number of solutions of nonlinear equations*, Math. Annln 272 (1985), 421-440.

[9] E. N. Dancer, *A counterexample to the Lazer-McKenna conjecture*, Nonlinear Anal., 13 (1989), 19-21.

[10] E. N. Dancer, S. Yan, *On the superlinear Lazer-McKenna conjecture*, J. Differential Equations 210 (2005), 317-351.

[11] C. L. Dolph, *Nonlinear integral equations of the Hammerstein type*, Trans. Amer. Math. Soc., 66 (1949) 289-307.

[12] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in mathematics, American Mathematical Society, vol. 19, 1998.

[13] D. G. de Figueiredo, *Lectures on Boundary Value Problems of Ambrosetti-Prodi Type*, Atas do 12°. Seminário Brasileiro de Análise, São Paulo, 1980.

[14] D. G. de Figueiredo, S. Solimini, *A variational approach to superlinear elliptic problems*, Comm. in Partial Diff. Eq., 9 (1984), 699-717.

[15] D. G. de Figueiredo, *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 81. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[16] B. Gidas, J. Spruck, *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations 6 (1981) 883-901.

[17] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*. Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[18] H. Hofer, *Variational and topological methods in partial ordered Hilbert spaces*, Math. Ann., 261 (1982), 493-514.

[19] J. L. Kazdan, F. W. Warner, *Remarks on some quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math., XXVIII (1975), 567-597.

[20] A. C. Lazer, P. J. McKenna, *On the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem*, J. Math. Anal. Appl. 84 (1981), 282-294.

[21] A. C. Lazer, P. J. McKenna, *On a conjecture related to the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 95 (1983), 275-283.

[22] E. L. Lima, *Curso de análise vol.2*, 11 ed., Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2009.

[23] P. H. Rabinowitz, *Some critical point theorems and applications to semilinear elliptic partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 5 (1978), 215- 223.

[24] P. H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 65, AMS, Providence, RI, 1986.

[25] M. Ramos, *Teoremas de multiplicidade do tipo Ambrosetti-Prodi*, Textos e Notas 37, Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais das Universidades de Lisboa, Lisboa (1988).

[26] B. Ribeiro, *The Ambrosetti-Prodi problem for elliptic systems with Trudinger-Moser nonlinearities.* Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 55 (2012), 215-244.

[27] B. Ruf, P. N. Srikanth *Multiplicity results for superlinear elliptic problems with partial interference with the spectrum.* J. Math. Anal. Appl. 118 (1986), no. 1, 15-23.

[28] B. Ruf, P. N. Srikanth, *Multiplicity results for ODE's with nonhnearities crossing all but a finite number of eigenvalues*, Nonlinear Analysis TMA 10 (1986), 157-163.

[29] D. H. Sattinger, *Topics in Stabililty and Bifucartion Theory*, Lecture Notes in Mathematics, No. 309, Springer-Verlang, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[30] S. Solimini, *Some remarks on the number of solutions of some nonlinear elliptic equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal., Non Line´aire, 2 (1985) 143-156.