Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência e Multiplicidade de Soluções Autossimilares para uma Equação do Calor

por

Gilson Mamede de Carvalho †

sob a orientação do

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com o apoio financeiro da Capes

Existência e Multiplicidade de Soluções Autossimilares para uma Equação do Calor

por

Gilson Mamede de Carvalho

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB

Prof. Dr. Marcelo Fernandes Furtado - UnB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Abril de 2012

Agradecimentos

- Gostaria primeiramente de agradecer a Deus por ter me acolhido e fortalecido em todos os momentos dessa caminhada e com seu amor incondicional me fez alcançar mais essa vitória.

- À minha mãe Lúcia, por toda dedicação e amor, e não seria demais dizer, a principal responsável pelo homem que me tornei.

- Ao meu pai, Geraldo (em memória), pelo exemplo de persistência e superação, pois em meio a tantas dificuldades sempre trabalhou para propiciar uma vida melhor para mim e meus irmãos.

- A minha noiva Janaína, por tanta compreensão, principalmente por todo carinho dedicado, sempre estando a me apoiar não importando qual fosse a minha decisão.

- A todos os meus familiares, em especial, aos meus irmãos Gerlânia e Gilmar, e ao meu padrasto Eduardo, pelos laços eternos de amizade que nos une.

- Ao meu orientador Dr. Uberlandio Batista Severo, por toda dedicação e paciência que acompanha minha carreira acadêmica desde quando fui seu aluno de iniciação científica. Assim, fica aqui meu obrigado pela grande contribuição à minha vida acadêmica e pessoal e, sobretudo, por ter o privilégio de usufruir da sua amizade.

- A todos os professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, pois, através dos seus ensinamentos, contribuíram de forma essencial para a minha formação. Em especial ao professor Everaldo Souto de Medeiros, por ser tão prestativo, mesmo eu não sendo um dos seus orientandos, e a professora Flávia Jerônimo por toda ajuda prestada aos alunos de graduação do curso de Matemática da UFPB.

- A todos os colegas que fizeram e/ou fazem parte do Projeto Milênio, o meu muito obrigado por fazerem deste tempo de estudo um momento tão agradável. Não poderia deixar de citar os meus amigos de graduação Suelen de Souza, Ricardo Pinheiro, Esteban Pereira, Ellen Patrícia, Rodrigo Clemente, Thiago José Machado, Diego Ferraz, Nacib Gurgel, Luan Diego, Ricardo Burity, Enieze Cardoso, Tuanny Maciel e Kelyane Abreu, aos quais agradeço cada momento compartilhado.

- Aos meus colegas de mestrado, em especial a Yane Lisley, Reginaldo Amaral e a Dayvid Geferson, que fazem parte também da minha vida extra acadêmica. Valeu todos os momentos inesquecíveis que passamos juntos.

- Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPB, pela oportunidade de continuar aprimorando meus conhecimentos e aprender outros novos.

- A CAPES, pelo incentivo financeiro, o qual me proporcionou condições materiais favoráveis para a construção deste trabalho.

- Enfim, a todos que colaboraram direta ou indiretamente para a realização e concretização deste sonho.

Resumo

Neste trabalho, obtemos resultados de existência, não existência e multiplicidade de soluções para a equação diferencial parcial elíptica

$$-\Delta u - \frac{1}{2}(x.\nabla u) + \varepsilon |u|^{p-1}u = \lambda u,\ \ x \in \mathbb{R}^N,$$

em que $N \geq 3$, $\varepsilon = \pm 1$, $\lambda > 0$ e $1 < p \leq (N+2)/(N-2)$. Tal equação é obtida quando procuramos soluções autossimilares para certas equações do calor não-lineares. Para a obtenção dos resultados principais, usamos métodos variacionais, mais precisamente, argumentos de minimização, Teorema dos Multiplicadores de Lagrange e resultados de regularidade elíptica.

Palavras-chave: Soluções autossimilares, equação do calor, métodos variacionais.

Abstract

In this work, we obtain existence, nonexistence and multiplicity of solutions for the elliptic partial differential equation

$$-\Delta u - \frac{1}{2}(x.\nabla u) + \varepsilon |u|^{p-1}u = \lambda u, \ \ x \in \mathbb{R}^N,$$

where $N \geq 3$, $\varepsilon = \pm 1$, $\lambda > 0$ and $1 < p \leq (N+2)/(N-2)$. Such equation is obtained when we look for self-similar solutions for certain nonlinear heat equations. To obtain the main results, we use variational methods, more precisely, minimization arguments, Lagrange multipliers theorem and elliptic regularity results.

Key words: Self-similar solutions, heat equation, variational methods.

Sumário

Notações

- Ω é um subconjunto aberto e suave do $\mathbb{R}^N$, podendo, inclusive, ser o próprio $\mathbb{R}^N$;
- $L^q(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \ \ \text{mensurável}; \int_\Omega |f|^q dx < +\infty\}$;
- $W^{m,q}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ D^\alpha f$ existe no sentido fraco, para todo $|\alpha| \leq m$, e pertence à $L^q(\Omega)\}$;
- $W^{m,q}_{loc}(\Omega) = \{f \in W^{m,q}(T),$ para todo compacto $T \subset \Omega\}$;
- $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$;
- $|\cdot|$ valor absoluto e norma euclidiana em $\mathbb{R}^N$;
- $C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f$ é contínua$\}$;
- $C^k(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ D^\alpha f$ existe e é contínua para todo $0 \leq |\alpha| \leq k\}$;
- $C^k_c(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega); f$ tem suporte compacto$\}$;
- B_R denota a bola aberta em $\mathbb{R}^N$ centrada na origem com raio R;
- $C^{k,\beta}(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega);\ |f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^\beta,\ \forall x, y \in \Omega\}$, para alguma constante c positiva;
- $C^{k,\beta}_{loc}(\Omega) = \{f \in C^{k,\beta}(T),$ para todo compacto $T \subset \Omega\}$;
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N); \|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty, \forall\, \alpha, \beta\}$. Este espaço será chamado de espaço das funções de decaimento rápido;
- w_N é o volume da esfera unitária de $\mathbb{R}^N$;
- $f = O(1)$ quando $\varepsilon \to 0$ significa que, para algum $C > 0$, tem-se $|f(\varepsilon)| \leq C$ para todo ε suficientemente próximo de 0;
- $f = o(1)$ quando $\varepsilon \to 0$ significa que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon) = 0$;
- $f = O(\varepsilon)$ quando $\varepsilon \to 0$ significa que, para algum $C > 0$, tem-se $|f(\varepsilon)| \leq C|\varepsilon|$ para todo ε suficientemente próximo de 0;
- $f = o(\varepsilon)$ quando $\varepsilon \to 0$ significa que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$;
- q.t.p. significa para quase todo ponto.

Introdução

Neste trabalho, estudamos questões relacionadas a existência, não-existência e multiplicidade de soluções para a equação diferencial parcial elíptica

$$-\Delta u - \frac{1}{2}(x.\nabla u) + \varepsilon|u|^{p-1}u = \lambda u, \;\; x \in \mathbb{R}^N, \tag{0.1}$$

onde $N \geq 3$, $\varepsilon = \pm 1$, λ é um número positivo e $1 < p \leq (N+2)/(N-2)$.

A motivação para se abordar (0.1) se origina da busca de soluções autossimilares da seguinte equação de evolução (equação do calor não-linear):

$$u_t - \Delta u + \varepsilon|u|^{p-1}u = 0 \quad \text{em} \;\; (0, +\infty) \times \mathbb{R}^N, \tag{0.2}$$

em que $p > 1$, $\varepsilon = \pm 1$ e N é um inteiro maior ou igual a 1. Observe que se u é uma solução para (0.2), então definindo

$$w(t, x) := u_\lambda(t, x) \equiv \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda^2 t, \lambda x), \;\; \text{para } \lambda > 0,$$

temos que u_λ também é uma solução para (0.2). De fato, notemos que

$$w_t = \lambda^{\frac{2}{p-1}+2} u_t \quad \text{e} \quad \Delta w = \lambda^{\frac{2}{p-1}+2} \Delta u,$$

e, portanto,

$$w_t - \Delta w + \varepsilon|w|^{p-1}w = \lambda^{\frac{2}{p-1}+2}(u_t - \Delta u + \varepsilon|u|^{p-1}u) = 0.$$

Assim, para todo $\lambda > 0$, temos que u_λ também é uma solução para (0.2). Logo, podemos definir uma família de soluções $(u_\lambda)_{\lambda>0}$ para a equação (0.2). Dizemos que u é uma solução autossimilar de (0.2) se $u_\lambda = u$ para todo $\lambda > 0$. Agora, se u é uma solução autossimiliar de (0.2) e denotando $f(x) = u(1, x)$, segue que

$$u(t, x) = t^{\frac{-1}{p-1}} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

e, desta forma, um cálculo simples mostra que f satisfaz a equação diferencial elíptica

$$-\Delta f - \frac{1}{2}(x.\nabla f) + \varepsilon|f|^{p-1}f = \lambda f \quad \text{em} \;\; \mathbb{R}^N, \tag{0.3}$$

com $\lambda = 1/(p-1)$. Reciprocamente, se f é uma solução da equação anterior, então definindo

$$u(t, x) = t^{\frac{-1}{p-1}} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \; (t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^N,$$

facilmente segue que u é uma solução autossimilar da equação do calor (0.2). Portanto, se encontrarmos uma solução não-trivial de (0.3), então obtemos uma solução autossimilar para a equação do calor acima.

Haraux e Weissler, em [8], consideraram o problema (0.3) com $\varepsilon = -1$ e, quando $1 + 2/N < p < (N+2)/(N-2)$, encontraram soluções esfericamente simétricas, isto é, $f(x) = g(|x|)$, onde $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfaz a equação

$$-g'' - \left(\frac{N-1}{r} + \frac{r}{2}\right) g' + g^p = \frac{1}{p-1} g \quad \text{em} \quad (0, +\infty).$$

Posteriormente, Brézis, Pelletier e Terman, em [3], consideraram o problema com $\varepsilon = 1$ e, usando técnicas de E.D.O., provaram a existência e unicidade de solução positiva para o problema

$$-g'' - \left(\frac{N-1}{r} + \frac{r}{2}\right) g' = g^p + \frac{1}{p-1} g \quad \text{com} \quad 1 < p < 1 + \frac{2}{N}.$$

Nosso trabalho está baseado no artigo de Escobedo e Kavian [5]. Estudamos o problema (0.3) utilizando métodos variacionais, ou seja, associamos um funcional energia ao problema e procuramos pontos críticos deste funcional que serão as soluções almejadas. Considerando a função $K(x) = e^{|x|^2/4}$, facilmente tem-se que a equação

$$-\text{div}(K(x)\nabla f) + \varepsilon K(x)|f|^{p-1} f = \lambda K(x) f \tag{0.4}$$

é equivalente à (0.3). Nosso propósito é estudar a equação anterior num espaço de funções conveniente, o qual estará imerso compactamente em certos espaços de Lebesgue com peso.

O nosso trabalho está dividido em quatro capítulos e um apêndice.

No *Capítulo 1*, primeiramente, trabalhamos com uma função peso geral dada por $K_\theta(x) = e^{\theta(x)}$, em que θ é uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo a seguinte condição no infinito:

$$\lim_{|x| \to +\infty} \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) = +\infty.$$

Nesta direção, mostramos que o espaço de Sobolev com peso $H^1(K_\theta)$ está imerso compactamente no espaço de Lebesgue com peso $L^2(K_\theta)$. Em seguida, considerando especificamente a função peso $K(x) = e^{|x|^2/4}$, ou seja, $\theta(x) = |x|^2/4$ (observa-se facilmente que θ satisfaz a condição no infinito mencionada anteriormente), conseguimos mostrar que $H^1(K)$ está imerso continuamente em $L^{2^*}(K)$ e compactamente em $L^q(K)$, com $2 \le q < 2^*$, em que $2^* := 2N/(N-2)$ é o expoente crítico de Sobolev. Tais espaços, mencionados acima, e suas respectivas normas estão definidos com detalhes no referido capítulo.

No *Capítulo 2*, fizemos uma análise do espectro do operador L definido por

$$Lu = -\frac{1}{K}\text{div}(K\nabla u) = -\Delta u + \frac{x.\nabla u}{2}$$

e, considerando o problema de autovalor

$$\begin{cases} Lu = \lambda u \\ u \in L^2(K), u \neq 0, \end{cases} \tag{0.5}$$

juntamente com o auxílio da Transformada de Fourier, descrevemos os autovalores $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deste problema, como também seus autoespaços associados. Além disso, calculamos a dimensão desses autoespaços.

De posse das informações obtidas nos Capítulos 1 e 2, obtivemos ferramentas suficientes para podermos estudar soluções para o problema (0.4).

O *Capítulo 3* foi destinado ao estudo do problema (0.4). Como foi dito antes, ultilizamos métodos variacionais, mais precisamente, soluções não triviais de (0.4) são obtidas como pontos críticos do funcional energia

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx + \frac{\varepsilon}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} K dx - \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K dx,$$

com u em um espaço de funções apropriado. Para utilizarmos os métodos variacionais clássicos, foram essenciais os resultados de imersões obtidos no Capítulo 1.

Primeiramente, estudamos o problema (0.4) com $\varepsilon = 1$ e observamos a existência e multiplicidade de soluções não triviais se $\lambda > \lambda_i$, para $i \in \mathbb{N}$, e $1 < p < 2^* - 1$ (potência subcrítica). Além disso, também verificamos que se $\lambda > \lambda_1$ (λ_1 é o primeiro autovalor associado ao problema (0.5)), as soluções obtidas são clássicas. Concluímos também que estas soluções e suas derivadas parciais primeiras possuem decaimento exponencial. Posteriomente, sob certas condições sobre p, mostramos a existência e unicidade de solução positiva para (0.4). Para o problema (0.4) com $\varepsilon = -1$, verificamos que se existe solução neste caso, então ela é de classe C^2.

No *Capítulo 4*, estudamos a existência de soluções positivas para o problema (0.4) com $\varepsilon = -1$ e $p = 2^* - 1 = (N+2)/(N-2)$ (potência crítica). Verificamos que este problema não admite solução se $\lambda \leq N/4$ ou $\lambda \geq N/2$. Além disso, utilizando argumentos clássicos de Brézis e Nirenberg [2], verificamos que (0.4) tem solução se $\lambda \in (N/4, N/2)$ quando $N \geq 4$ e se $\lambda \in (1, 3/2)$ quando $N = 3$. Observamos que não temos conclusões no caso em que $N = 3$ e $\lambda \in (3/4, 1]$.

Finalmente, no *Apêndice A* se encontram alguns resultados básicos (ou não) que foram necessários para um melhor entendimento desta dissertação.

Capítulo 1

Os Espaços de Lebesgue com Peso

Neste capítulo, estamos interessados em resultados de imersões nos espaços de Lebesgue com uma função peso, como também suas consequências. Na primeira parte, introduzimos as definições e ferramentas necessárias para obtermos tais resultados. Posteriormente, provamos os resultados de imersão, os quais são essenciais em nossos argumentos para obtenção de pontos críticos dos funcionais energia associados aos problemas em estudo.

1.1 Resultados Preliminares

Aqui, vamos considerar uma função $K_\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por

$$K_\theta(x) = e^{\theta(x)},$$

onde θ é uma função de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}_+$. Daqui por diante, chamaremos K_θ de função peso. Para obtermos os resultados desejados, pediremos que a função θ seja de classe $C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+)$ e satisfaça a seguinte condição no infinito:

$$\lim_{|x| \to +\infty} \left(\Delta\theta(x) + \frac{1}{2}|\nabla\theta(x)|^2 \right) = +\infty. \tag{1.1}$$

Exemplo 1.1 *Seja $\theta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$\theta(x) = \frac{|x|^2}{4}$$

é de classe $C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+)$ e satisfaz a condição (1.1).

Definamos os espaços de Lebesgue com peso por

$$L^p(K_\theta) = \left\{ u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \text{ mensurável}; \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p K_\theta dx < \infty \right\}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

e o correspondente espaço de Sobolev por

$$H^1(K_\theta) = \left\{ u \in L^2(K_\theta); \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K_\theta dx < \infty \right\}.$$

Lembramos que estamos identificando as funções que são iguais a menos de conjunto de medida (de Lebesgue) zero. De maneira análoga aos espaços de Lebesgue e Sobolev usuais, mostra-se que os espaços anteriores são de Banach com as normas dadas, respectivamente, por

$$\|u\|_{L^p(K_\theta)} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p K_\theta dx\right)^{\frac{1}{p}} \text{ e } \|u\|_{H^1(K_\theta)} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K_\theta dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K_\theta dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observação 1.2 *O espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H^1(K_\theta)$ com a norma dada acima. De fato, primeiro, seja $u \in H^1(K_\theta)$ com suporte $\mathcal{K} \equiv supp(u)$ compacto. Desde que $K_\theta \geq 1$ segue que $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e considerando (ρ_n) uma sequência regularizante em $\mathbb{R}^N$ (veja Brézis [1, pag. 108]), temos*

$$\phi_n = \rho_n * u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \phi_n \to u \quad em \quad L^2(\mathbb{R}^N) \quad e \quad \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} = \rho_n * \frac{\partial u}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad em \quad L^2(\mathbb{R}^N).$$

Tomemos um compacto $\mathcal{K}_1$ tal que $\mathcal{K} \cup supp(\phi_n) \subset \mathcal{K}_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\phi_n - u|^2 K_\theta dx = \int_{\mathcal{K}_1} |\phi_n - u|^2 K_\theta dx \leq \|K_\theta\|_{L^\infty(\mathcal{K}_1)} \int_{\mathcal{K}_1} |\phi_n - u|^2 dx$$

de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\phi_n - u|^2 K_\theta dx \to 0.$$

Além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi_n - \nabla u|^2 K_\theta dx \leq \|K_\theta\|_{L^\infty(\mathcal{K}_1)} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\mathcal{K}_1)} \to 0,$$

de onde obtemos

$$\|\phi_n - u\|_{H^1(K_\theta)} \to 0.$$

Agora, dada $u \in H^1(K_\theta)$ qualquer, seja $u_n(x) = M_n(x)u(x)$ onde $M_n(x) = M\left(\frac{x}{n}\right)$ e M é uma função de truncamento em $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ definida por

$$M(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_1 \\ 0, & x \in B_2^c, \end{cases}$$

com $0 \leq M \leq 1$. É claro que $u_n \in H^1(K_\theta)$ e tem suporte compacto. Além disso, $|u_n| \leq |u|$ e $u_n \to u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Logo,

$$|u_n - u|^2 K_\theta \leq 4u^2 K_\theta \in L^1(\mathbb{R}^N) \quad e \quad |u_n - u|^2 K_\theta \to 0 \quad q.t.p. \ em \ \mathbb{R}^N,$$

e daí pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^2 K_\theta dx \to 0.$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} = \frac{1}{n} \frac{\partial M}{\partial x_i} u + M_n \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

e, com isso,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 K_\theta dx \le 2\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{1}{n}\frac{\partial M}{\partial x_i}u\right|^2 K_\theta dx + 2\int_{\mathbb{R}^N}\left|M_n\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 K_\theta dx. \quad (1.2)$$

Desde que

$$\left|M_n\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 K_\theta \to 0 \quad q.t.p. \ em \ \mathbb{R}^N \quad e \quad \left|M_n\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 K_\theta \le 2\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 K_\theta \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

obtemos novamente pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left|M_n\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 K_\theta dx \to 0.$$

Resta mostrar que $\int_{\mathbb{R}^N}|\frac{1}{n}\frac{\partial M}{\partial x_i}u|^2 K_\theta dx \to 0$. *Observemos que*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{1}{n}\frac{\partial M}{\partial x_i}u\right|^2 K_\theta dx &= \int_{B_{2n}\setminus B_n}\left|\frac{1}{n}\frac{\partial M}{\partial x_i}u\right|^2 K_\theta dx \\ &\le \frac{C}{n^2}\int_{B_{2n}\setminus B_n}|u|^2 K_\theta dx \to 0 \quad quando \quad n\to\infty,\end{aligned}$$

pelo fato de $|u|^2K_\theta \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Das duas convergências obtidas anteriormente, por* (1.2), *segue, para* $i = 1,\ldots,N$, *que*

$$\left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(K_\theta)} \to 0$$

e, portanto,

$$\|u_n-u\|^2_{H^1(K_\theta)} = \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(K_\theta)} + \int_{\mathbb{R}^N}|u_n-u|^2K_\theta \to 0,$$

ou seja,

$$u_n \to u \quad em \quad H^1(K_\theta).$$

Observação 1.3 *O espaço* $H^1(K_\theta)$ *está imerso continuamente em* $H^1(\mathbb{R}^N)$. *De fato, se* $v \in H^1(K_\theta)$ *então* $|v|^2K_\theta \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $|\nabla v|^2K_\theta \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Como* $\theta \ge 0$ *tem-se* $|v|^2 < |v|^2K_\theta$ *em* $\mathbb{R}^N$, *donde* $|v|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Analogamente, concluímos que* $|\nabla v|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Assim,* $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \le \|u\|_{H^1(K_\theta)}$.

Mais adiante, veremos que $H^1(K_\theta)$ está imerso compactamente em $L^2(K_\theta)$, sendo este o resultado principal deste capítulo. Para isto, precisamos do auxílio de alguns lemas.

Lema 1.4 *Seja* $\theta \in C^2(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}_+)$ *satisfazendo (1.1). Então, para todo* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ *temos*

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|f|^2K_\theta(x)\left(\triangle\theta(x)+\frac{1}{2}|\nabla\theta(x)|^2\right)dx \le \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla f|^2K_\theta(x)dx.$$

Demonstração: Definamos $v(\theta(x)) = e^{\theta(x)/2}f(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$. Assim,

$$\nabla v(\theta(x)) = \frac{1}{2}e^{\frac{\theta(x)}{2}}\nabla\theta(x)f(x) + e^{\frac{\theta(x)}{2}}\nabla f(x).$$

Como

$$K_\theta^{\frac{1}{2}}(x)\nabla f(x) = e^{\frac{\theta(x)}{2}}\nabla f(x),$$

temos que

$$\begin{aligned}\nabla v - \frac{1}{2}v\nabla\theta &= \frac{1}{2}e^{\frac{\theta(x)}{2}}\nabla\theta(x)f(x) + e^{\frac{\theta(x)}{2}}\nabla f(x) - \frac{1}{2}e^{\frac{\theta(x)}{2}}\nabla\theta(x)f(x)\\ &= e^{\frac{\theta(x)}{2}}\nabla f(x).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}K_\theta|\nabla f|^2 &= (K_\theta^{\frac{1}{2}}\nabla f).(K_\theta^{\frac{1}{2}}\nabla f)\\ &= |\nabla v|^2 - \frac{1}{2}(2v\nabla v\nabla\theta) + \frac{1}{4}|v|^2|\nabla\theta|^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} K_\theta|\nabla f|^2dx = \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(2v\nabla v\nabla\theta)dx + \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{4}|v|^2|\nabla\theta|^2dx. \tag{1.3}$$

Por outro lado, usando integração por partes (Teorema A.10 do Apêndice A), obtemos

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}2v\nabla v\nabla\theta dx &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N\int_{\mathbb{R}^N}2v\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}dx\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial v^2}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}dx\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N\int_{\mathbb{R}^N}v^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i^2}dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}v^2\triangle\theta dx.\end{aligned}$$

Usando a igualdade anterior em (1.3), segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}K_\theta|\nabla f|^2dx &= \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}v^2\left(\triangle\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right)dx\\ &\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}v^2\left(\triangle\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|f|^2K_\theta\left(\triangle\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right)dx,\end{aligned}$$

o que prova o lema. ∎

Como consequência deste lema e da Observação 1.2, temos o seguinte resultado:

Lema 1.5 *Seja $\theta \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+)$ satisfazendo (1.1). Então, para todo $f \in H^1(K_\theta)$, temos*

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|^2 K_\theta dx.$$

Demonstração: Desde que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H^1(K_\theta)$, dado $f \in H^1(K_\theta)$, existe uma sequência $(f_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $f_n \to f$ em $H^1(K_\theta)$, de onde obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_n|^2 K_\theta dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 K_\theta dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f_n|^2 K_\theta dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|^2 K_\theta dx.$$

Pelo lema anterior, temos que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |f_n|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f_n|^2 K_\theta dx, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e usando a condição (1.1), existe $R > 0$ tal que

$$\Delta\theta(x) + \frac{1}{2}|\nabla\theta(x)|^2 > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N; \;\; |x| > R.$$

Escrevendo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |f_n|^2 K_\theta \left[\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right] dx &= \frac{1}{2}\int_{B_R} |f_n|^2 K_\theta \left[\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right] dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{|x|\geq R} |f_n|^2 K_\theta \left[\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right] dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f_n|^2 K_\theta dx,
\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_{B_R} |f_n|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) dx \\
&\quad + \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_{|x|\geq R} |f_n|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) dx \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f_n|^2 K_\theta dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|^2 K_\theta dx.
\end{aligned}$$

Desde que

$$|f_n(x)|^2 K_\theta(x) \left(\Delta\theta(x) + \frac{1}{2}|\nabla\theta(x)|^2\right) \geq 0, \quad \forall\, |x| \geq R,$$

pelo Lema de Fatou (Teorema A.13), obtemos

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_{|x|\geq R} |f_n|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) dx \geq \frac{1}{2}\int_{|x|\geq R} |f|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_{B_R} |f_n|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) dx + \frac{1}{2}\int_{|x|\geq R} |f|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) dx \\ \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|^2 K_\theta dx. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Por outro lado, como $|f_n|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right)$ é contínua, temos que existe $C > 0$ tal que

$$|f_n(x)|^2 K_\theta(x) \left|\Delta\theta(x) + \frac{1}{2}|\nabla\theta(x)|^2\right| \leq C, \quad \text{para todo } x \in B_R.$$

Como

$$|f_n|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) \to |f|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) \text{ q.t.p. em } B_R,$$

segue, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema A.12), que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{B_R} |f_n|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) dx = \int_{B_R} |f|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) dx.$$

Logo, por (1.4)

$$\frac{1}{2}\int_{B_R} |f|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) dx + \frac{1}{2}\int_{|x|\geq R} |f|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|^2 K_\theta dx,$$

de onde concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f|^2 K_\theta dx.$$

■

1.2 Resultados de Imersões e Consequências

De posse dos resultados da primeira seção, podemos mostrar o resultado mais importante deste capítulo, a imersão compacta de $H^1(K_\theta)$ em $L^2(K_\theta)$ onde θ é uma função em $C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+)$ que satisfaz a condição (1.1).

Proposição 1.6 *Seja $\theta \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+)$ satisfazendo (1.1). Então, a imersão $H^1(K_\theta) \hookrightarrow L^2(K_\theta)$ é compacta.*

Demonstração: Seja $(u_n) \subset H^1(K_\theta)$ uma sequência limitada. Desde que $H^1(K_\theta)$ é um espaço de Hilbert, portanto reflexivo, então, a menos de subsequência, existe $u \in H^1(K_\theta)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H^1(K_\theta).$$

Queremos mostrar que $u_n \to u$ em $L^2(K_\theta)$. Desde que θ satisfaz (1.1), temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\Delta\theta(x) + \frac{1}{2}|\nabla\theta(x)|^2 > \frac{2}{\varepsilon} \quad \forall\ |x| > R.$$

Assim,

$$\int_{|x|>R} |u_n - u|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) dx > \frac{2}{\varepsilon} \int_{|x|>R} |u_n - u|^2 K_\theta dx.$$

Pelo lema anterior e como (u_n) é limitada em $H^1(K_\theta)$, temos

$$\int_{|x|>R} |u_n - u|^2 K_\theta dx \leq \varepsilon \int_{|x|>R} |\nabla(u_n - u)|^2 K_\theta dx \leq C\varepsilon.$$

Por outro lado, pelo Teorema A.4 do Apêndice A, sabemos que $H^1(B_R)$ está imerso compactamente em $L^2(B_R)$. Daí, $u_n \to u$ em $L^2(B_R)$. Como K_θ é contínua e $\overline{B_R}$ é compacto, tem-se

$$\int_{B_R} |u_n - u|^2 K_\theta dx \leq C_1 \int_{B_R} |u_n - u|^2 dx < \varepsilon,$$

para todo n maior que um certo $n_0 \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^2 K_\theta dx &= \int_{|x|>R} |u_n - u|^2 K_\theta dx + \int_{B_R} |u_n - u|^2 K_\theta dx \\ &\leq C_1\varepsilon + \varepsilon = (C_1 + 1)\varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $n > n_0$. Assim,

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^2(K_\theta),$$

o que prova que a imersão $H^1(K_\theta) \hookrightarrow L^2(K_\theta)$ é compacta. ■

Desta proposição, seguem dois resultados. O primeiro é uma versão da Desigualdade de Poincaré, que pode ser usado para mostrar de forma elementar que as normas $\|u\|_{H^1(K_\theta)}$ e $\|\nabla u\|_{L^2(K_\theta)}$ são equivalentes em $H^1(K_\theta)$.

Corolário 1.7 ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Seja $\theta \in C^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}_+)$ satisfazendo (1.1). Então, existe $\lambda = \lambda(\theta) > 0$ tal que*

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K_\theta dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K_\theta dx; \quad \forall\ u \in H^1(K_\theta).$$

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que a desigualdade acima não seja verdadeira. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in H^1(K_\theta)$ tal que

$$\frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 K_\theta dx > \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 K_\theta dx. \tag{1.5}$$

Definindo

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2(K_\theta)}},$$

temos

$$\nabla v_n = \frac{\nabla u_n}{\|u_n\|_{L^2(K_\theta)}} \quad \text{e} \quad \|v_n\|_{L^2(K_\theta)} = 1.$$

Voltando a (1.5), concluímos que

$$\|\nabla v_n\|_{L^2(K_\theta)} = \frac{\|\nabla u_n\|_{L^2(K_\theta)}}{\|u_n\|_{L^2(K_\theta)}} < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \|\nabla v_n\|_{L^2(K_\theta)} = 0.$$

Note que (v_n) é limitada em $H^1(K_\theta)$, pois

$$\|v_n\|_{H^1(K_\theta)} = \|v_n\|_{L^2(K_\theta)} + \|\nabla v_n\|_{L^2(K_\theta)} < 1 + 1 = 2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Logo, a menos de subsequência $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(K_\theta)$. Pela proposição anterior, $v_n \to v$ em $L^2(K_\theta)$. Assim, $\|v\|_{L^2(K_\theta)} = 1$, pois $\|v_n\|_{L^2(K_\theta)} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, da convergência fraca $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(K_\theta)$ e pela semicontinuidade da norma, temos

$$\|v\|^2_{H^1(K_\theta)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|v_n\|^2_{H^1(K_\theta)} \leq \limsup_{n\to\infty} \|v_n\|^2_{H^1(K_\theta)},$$

de onde segue que

$$\|v\|^2_{L^2(K_\theta)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(K_\theta)} \leq \limsup_{n\to\infty} \|v_n\|^2_{L^2(K_\theta)} + \limsup_{n\to\infty} \|\nabla v_n\|^2_{L^2(K_\theta)}.$$

Como $v_n \to v$ em $L^2(K_\theta)$, obtemos

$$0 \leq \|\nabla v\|_{L^2(K_\theta)} \leq \limsup_{n\to\infty} \|\nabla v_n\|_{L^2(K_\theta)} = \lim_{n\to\infty} \|\nabla v_n\|_{L^2(K_\theta)} = 0,$$

donde

$$\|\nabla v\|_{L^2(K_\theta)} = 0.$$

Desde que $\mathbb{R}^N$ é conexo, tem-se que $v(x) \equiv C$, onde $C \neq 0$, pois $\|v\|_{L^2(K_\theta)} = 1$. Logo,

$$1 = \|v\|_{L^2(K_\theta)} = C^2 \int_{\mathbb{R}^N} e^{\theta(x)} dx \geq C^2 \int_{\mathbb{R}^N} 1 dx = +\infty,$$

o que é uma contradição. Portanto, a desigualdade é verdadeira.

■

Corolário 1.8 *Seja $\theta \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+)$ satisfazendo (1.1). Para todo $q > 2$ e $\varepsilon > 0$, existem constantes $c = c(\varepsilon, q) > 0$ e $R > 0$ tais que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K_\theta dx \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K_\theta dx + c\|u\|^2_{L^q(B_R)},$$

para todo $u \in H^1(K_\theta) \cap L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Seja $u \in H^1(K_\theta) \bigcap L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Logo, pelo Lema 1.5, temos

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K_\theta dx.$$

Por outro lado, usando a condição (1.1), dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\Delta\theta(x) + \frac{1}{2}|\nabla\theta(x)|^2 > \frac{2}{\varepsilon},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$, com $|x| > R$. Escrevendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K_\theta dx = \int_{B_R} |u|^2 K_\theta dx + \int_{|x|>R} |u|^2 K_\theta dx,$$

e usando o Lema 1.5, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{|x|>R} \frac{2}{\varepsilon}|u|^2 K_\theta dx &\leq \frac{1}{2}\int_{|x|>R} |u|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) dx \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_{B_R} |u|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) dx \qquad (1.6) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K_\theta dx - \frac{1}{2}\int_{B_R} |u|^2 K_\theta \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K_\theta dx - \frac{m}{2}\int_{B_R} |u|^2 K_\theta dx, \end{aligned}$$

onde $m = \min\limits_{B_R}\left\{\Delta\theta + (1/2)|\nabla\theta|^2\right\}$. Por outro lado, pela desigualdade de Hölder (Teorema A.2 do Apêndice A),

$$\int_{B_R} |u|^2 K_\theta dx \leq \|u\|^2_{L^q(B_R)} \left(\int_{B_R} |K_\theta|^{\frac{q}{q-2}} dx\right)^{\frac{q-2}{q}} = \widetilde{c}(q)\|u\|^2_{L^q(B_R)}. \qquad (1.7)$$

Dessa forma, por (1.6) e (1.7), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K_\theta dx &= \int_{|x|>R} |u|^2 K_\theta dx + \int_{B_R} |u|^2 K_\theta dx \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K_\theta dx - \frac{\varepsilon m}{2}\int_{B_R} |u|^2 K_\theta dx + \int_{B_R} |u|^2 K_\theta dx \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K_\theta dx + \left(1 - \frac{\varepsilon m}{2}\right)\widetilde{c}(q)\|u\|^2_{L^q(B_R)} \\ &= \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K_\theta dx + c(\varepsilon, q)\|u\|^2_{L^q(B_R)}. \end{aligned}$$

■

A seguir, obtemos outras imersões que serão úteis no decorrer deste trabalho.

Proposição 1.9 *Sejam* $N \geq 1$, $\theta \in C^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}_+)$ *satisfazendo (1.1) e suponha que vale a condição*

$$\alpha|\nabla\theta(x)|^2 \leq \Delta\theta(x) + \frac{1}{2}|\nabla\theta(x)|^2,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ *e para algum* $\alpha > 0$. *Então,*
i) Se $N \geq 3$, *então* $H^1(K_\theta)$ *está imerso continuamente em* $L^{2^*}(K_{N\theta/(N-2)})$;
ii) Se $N = 2$, *então* $H^1(K_\theta)$ *está imerso continuamente em* $L^q(K_{q\theta/2})$, *para todo* $q \geq 2$;
iii) Se $N = 1$ *e* $u \in H^1(K_\theta)$, *então* $uK_{\theta/2} \in C^{0,1/2}(\mathbb{R}^N)$.

Para demonstrarmos esta proposição, precisamos do auxílio da seguinte afirmação:

Afirmação 1.10 *Se* $u \in H^1(K_\theta)$ *e existe* $\alpha > 0$ *tal que* $\alpha|\nabla\theta|^2 \leq \Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2$, *então* $uK_{\theta/2} \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Prova: Seja $u \in H^1(K_\theta)$. Então, $|u|^2K_\theta \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $|\nabla u|^2K_\theta \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$\left|uK_{\frac{\theta}{2}}\right|^2 = \left|ue^{\frac{\theta}{2}}\right|^2 = e^\theta|u|^2 = K_\theta|u|^2 \ \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Além disso,

$$\nabla\left(uK_{\frac{\theta}{2}}\right) = K_{\frac{\theta}{2}}\nabla u + \frac{\nabla\theta}{2}K_{\frac{\theta}{2}}u.$$

donde

$$\begin{aligned}\left|\nabla\big(uK_{\frac{\theta}{2}}\big)\right|^2 &\leq 2\left(\left|K_{\frac{\theta}{2}}\nabla u\right|^2 + \left|\frac{\nabla\theta}{2}K_{\frac{\theta}{2}}u\right|^2\right) = 2K_\theta|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}K_\theta|\nabla\theta|^2|u|^2 \\ &\leq 2K_\theta|\nabla u|^2 + \frac{1}{2\alpha}|u|^2K_\theta\left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(uK_{\frac{\theta}{2}}\right)\right|^2dx \leq \int_{\mathbb{R}^N}2K_\theta|\nabla u|^2dx + \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2\alpha}|u|^2K_\theta\left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2\right)dx$$

e usando o Lema 1.5 segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(uK_{\frac{\theta}{2}}\right)\right|^2dx \leq 2\int_{\mathbb{R}^N}K_\theta|\nabla u|^2dx + \frac{1}{2\alpha}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2K_\theta dx < \infty,$$

de onde concluímos

$$uK_{\frac{\theta}{2}} \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

■

Demonstração da Proposição 1.8:
$i)$ Sejam $N \geq 3$ e $u \in H^1(K_\theta)$. Então, pela afirmação anterior, $uK_{\theta/2} \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Pela desigualdade de Gagliado-Nirenberg-Sobolev, sabemos que $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N}K_{\frac{N\theta}{N-2}}|u|^{2^*} = \int_{\mathbb{R}^N}\left|uK_{\frac{\theta}{2}}\right|^{2^*} < \infty.$$

Portanto, $u \in L^{2^*}\left(K_{N\theta/(N-2)}\right)$.

ii) Sejam $N = 2$ e $u \in H^1(K_\theta)$. Então, como $H^1(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^q(\mathbb{R}^N)$, para todo $q \geq 2$, temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q K_{\frac{q\theta}{2}} dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|K_{\frac{\theta}{2}}\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = \|uK_{\frac{\theta}{2}}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\|uK_{\frac{\theta}{2}}\|_{H^1(K_\theta)},$$

onde C é uma constante positiva e temos o que queremos.

iii) Se $N = 1$ e $u \in H^1(K_\theta)$ então $uK_{\theta/2} \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Pela desigualdade de Morrey (Teorema A.8), temos $H^1(\mathbb{R}^N) \subset C^{0,1/2}(\mathbb{R}^N)$ donde $uK_{\theta/2} \in C^{0,1/2}(\mathbb{R}^N)$. ■

O fato de $\theta \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+)$ e satisfazer (1.1) é crucial para obtermos estes resultados de imersão. Mais adiante, fazendo uso do próximo lema, mostraremos que se $\theta(x) = |x|$, então a imersão $H^1(K_\theta) \subset L^2(K_\theta)$ não é compacta.

Lema 1.11 *Sejam $\Omega := B_1^c$ em $\mathbb{R}^N$, $G(x) := e^{|x|}|x|^{1-N}$ e definamos os espaços*

$$L^2_{rad}(\Omega, G) := \left\{u \in L^2(\Omega);\ u \text{ é esfericamente simétrica e } \int_\Omega |u|^2 G(x)dx < +\infty\right\}$$

e

$$H^1_{0,rad}(\Omega, G) := \left\{u \in L^2_{rad}(\Omega, G) \cap H^1_0(\Omega); \int_\Omega |\nabla u|^2 G(x)dx < \infty\right\},$$

com as seguintes normas

$$\|u\|_{L^2_{rad}(\Omega,G)} = \left(\int_\Omega |u|^2 G(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \text{ e } \|u\|_{H^1_{0,rad}(\Omega,G)} = \left(\int_\Omega |u|^2 G(x)dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 G(x)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

respectivamente. Então, a imersão $H^1_{0,rad}(\Omega, G) \subset L^2_{rad}(\Omega, G)$ não é compacta.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que a imersão $H^1_{0,rad}(\Omega, G) \subset L^2_{rad}(\Omega, G)$ seja compacta. Definamos o número

$$m = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 G(x)dx;\quad u \in H^1_{0,rad}(\Omega, G) \text{ e } \int_\Omega |u|^2 G(x)dx = 1\right\}$$

Dessa forma, existe $(u_n) \subset H^1_{0,rad}(\Omega, G)$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 G(x)dx \to m \quad \text{e} \quad \int_\Omega |u_n|^2 G(x)dx = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, (u_n) é limitada em $H^1_{0,rad}(\Omega, G)$ e portanto, a menos de subsequência, existe $v \in H^1_{0,rad}(\Omega, G)$ tal que $u_n \rightharpoonup v$ em $H^1_{0,rad}(\Omega, G)$. Como a imersão $H^1_{0,rad}(\Omega, G) \subset L^2_{rad}(\Omega, G)$ é compacta, $u_n \to v$ em $L^2_{rad}(\Omega, G)$. Logo,

$$1 = \int_\Omega |u_n|^2 G(x)dx \to \int_\Omega |v|^2 G(x)dx$$

donde temos que

$$\int_{\Omega} |v|^2 G(x) dx = 1.$$

Além disso,

$$\|v\|_{H^1_{0,rad}(\Omega,G)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{H^1_{0,rad}(\Omega,G)}$$

e, assim,

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 G(x) dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 G(x) dx = m.$$

Pela definição de m, segue que

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 G(x) dx = m,$$

isto é, o ínfimo, definido anteriormente, é atingido. Deste modo, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (Teorema A.9), existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(v).u = \lambda F'(v).u \ , \quad \forall\ u \in H^1_{0,rad}(\Omega, G),$$

onde

$$J(w) = \int_{\Omega} |\nabla w|^2 G(x) dx \ \text{ e } \ F(w) = \int_{\Omega} |w|^2 G(x) dx, \quad w \in H^1_{0,rad}(\Omega, G).$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned} J'(v).u &= \lim_{t\to 0} \frac{J(v+tu) - J(v)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\int_{\Omega} [|\nabla(v+tu)|^2 G(x) - |\nabla v|^2 G(x)] dx}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\int_{\Omega} G(x) t [2\nabla v \nabla u + t|\nabla u|^2] dx}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \int_{\Omega} G(x)[2\nabla v \nabla u + t|\nabla u|^2] dx \\ &= 2\int_{\Omega} \nabla v \nabla u G(x) dx. \end{aligned}$$

De maneira análoga, obtemos que

$$F'(v).u = 2\int_{\Omega} vuG(x) dx.$$

Logo,

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla u G(x) dx = \lambda \int_{\Omega} vuG(x) dx,$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} G(x) dx = \lambda \int_{\Omega} vuG(x) dx.$$

Usando integração por partes,

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\frac{\partial}{x_i}\left(\frac{\partial v}{x_i}G\right)udx=\lambda\int_{\Omega}vuG(x)dx$$

donde

$$-\int_{\Omega}\left[\Delta vG+\nabla v\nabla G\right]udx=\lambda\int_{\Omega}vuG(x)dx,\quad \forall\ u\in H^1_{0,rad}(\Omega,G).$$

Dessa forma,

$$-\Delta vG-\nabla v\nabla G=\lambda vG. \tag{1.8}$$

Agora, fazendo

$$r=|x|\quad \text{e}\quad v(x)=f(r)$$

temos

$$r_{x_i}=\frac{x_i}{r},\quad v_{x_i}=f'(r)\frac{x_i}{r}\ \text{ e }\ v_{x_ix_i}=f''(r)\frac{x_i^2}{r^2}+f'(r)\frac{r^2-x_i^2}{r^3}.$$

Deste modo,

$$\nabla v=f'(r)\frac{x}{r}\ \text{ e }\ \Delta v=f''(r)+f'(r)\frac{N-1}{r}.$$

Também temos que $G(x)=e^r r^{1-N}$. Logo,

$$\nabla G=[r^{-N}+(1-N)r^{-(N+1)}]e^r x$$

e voltando a (1.8), obtemos

$$-\left[f''(r)+f'(r)\frac{N-1}{r}\right]e^r r^{1-N}-\frac{f'(r)}{r}\left[r^{-N}+(1-N)r^{-(N+1)}\right]e^r x^2=\lambda f(r)e^r r^{1-N}$$

donde temos que

$$-f''(r)-f'(r)=\lambda f(r).$$

Por outro lado, como $v\in H^1_{0,rad}(\Omega,G)$, tem-se que $v(x)=0$, para todo x com $|x|=1$. Assim, $f(1)=0$ e desde que

$$\int_{\Omega}|v(x)|^2G(x)dx=1,$$

usando coordenadas polares, concluímos que

$$\int_1^{\infty}\left(\int_{S_{(x_0,r)}}|f(r)|^2e^r r^{1-N}dS\right)dr=1,$$

isto é,

$$w_N\int_1^{\infty}|f(r)|^2e^r dr=1.$$

Resumindo, f deve satisfazer:
a) $-f''(r)-f'(r)=\lambda f(r)$;
b) $f(1)=0$;
c) $w_N\int_1^{\infty}|f(r)|^2e^r dr=1$.

Do item a), obtemos a E.D.O. homogênea com coeficientes constantes

$$f''(r) + f'(r) + \lambda f(r) = 0.$$

Buscando uma solução do tipo $f(r) = e^{\alpha r}$, temos que $f'(r) = \alpha e^{\alpha r}$ e $f''(r) = \alpha^2 e^{\alpha r}$. Assim,

$$\alpha^2 e^{\alpha r} + \alpha e^{\alpha r} + \lambda e^{\alpha r} = 0,$$

de onde devemos ter

$$\alpha^2 + \alpha + \lambda = 0.$$

Se $\lambda = 1/4$, então o discriminante da equação quadrática acima é $\triangle = 0$, e a solução geral é dada por

$$f(r) = \big(C_1 r + C_2\big)e^{-r/2}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. Agora, desde que $f(1) = 0$, temos $C_2 = -C_1$ e, portanto, $f(r) = C_1\,(r-1)\,e^{-r/2}$. Usando a condição c), devemos ter

$$1 = w_N \int_1^\infty |f(r)|^2 e^r dr = w_N \int_1^\infty \big(r-1\big)^2 |C_1|^2 dr = +\infty,$$

o que é um absurdo. Logo, se $\lambda = 1/4$ a imersão não é compacta. Se $\lambda < 1/4$, então $\triangle = 1 - 4\lambda > 0$, e a solução geral é dada por

$$f(r) = C_1 e^{\alpha_1 r} + C_2 e^{\alpha_2 r}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. Como $f(1) = 0$, temos $C_2 = -C_1 e^{\sqrt{1-4\lambda}}$ e, portanto,

$$f(r) = C_1 e^{\alpha_1 r} - C_1 e^{\sqrt{1-4\lambda}} e^{\alpha_2 r} = C_1(1 - e^{\sqrt{1-4\lambda}})e^{(\alpha_1+\alpha_2)r}.$$

Logo,

$$|f(r)|^2 = C_1^2 \left(1 - e^{\sqrt{1-4\lambda}}\right)^2 e^{2(\alpha_1+\alpha_2)r}.$$

Usando a condição c) segue que

$$\begin{aligned} 1 &= w_N \int_1^\infty |f(r)|^2 e^r dr \\ &= w_N C_1^2 \left(1 - e^{\sqrt{1-4\lambda}}\right)^2 \int_1^\infty e^{(2\alpha_1+2\alpha_2+1)r} dr \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Logo, se $\lambda < 1/4$, a imersão não é compacta.
Resta-nos analisar o último caso. Se $\lambda > 1/4$ então $\triangle = 1 - 4\lambda < 0$, e a solução é dada da por

$$f(r) = C_1 e^{\frac{-r}{2}} cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda - 1}r}{2}\right) + C_2 e^{\frac{-r}{2}} sen\left(\frac{\sqrt{4\lambda - 1}r}{2}\right).$$

Como $f(1) = 0$, devemos ter

$$C_1 = -C_2 tg\left(\frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2}\right).$$

Então,

$$f(r) = -C_2 tg\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\right) e^{\frac{-r}{2}} cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}r}{2}\right) + C_2 e^{\frac{-r}{2}} sen\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}r}{2}\right).$$

Novamente, pela condição c), obtemos a seguinte contradição

$$1 = w_N \int_1^\infty |f(r)|^2 e^r dr = \infty.$$

Assim, se $\lambda > 1/4$, a imersão não é compacta. Portanto, a imersão $H^1_{0,rad}(\Omega, G) \hookrightarrow L^2_{rad}(\Omega, G)$ não é compacta. ■

Teorema 1.12 *A imersão $H^1(K_\theta) \hookrightarrow L^2(K_\theta)$ não é compacta quando $\theta(x) = |x|$.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que a imersão $H^1(K_\theta) \hookrightarrow L^2(K_\theta)$ seja compacta. Agora, considere (u_n) uma sequência em $H^1_0(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 G(x)dx \to \lambda \quad \text{e} \quad \int_\Omega |u_n|^2 G(x)dx = 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

em que Ω, λ e G são definidos como no lema anterior. Defina

$$v_n(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{1-N}{2}} u_n, & \text{se } x \in \Omega \\ 0, & \text{se } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Afirmamos que $v_n \in H^1(K_\theta)$. De fato,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^2 e^{|x|} dx = \int_\Omega |u_n|^2 |x|^{1-N} e^{|x|} dx = 1$$

e desde que

$$\nabla v_n(x) = \begin{cases} \frac{1-N}{2}|x|^{\frac{-N-1}{2}} u_n(x)x + \nabla u_n(x)|x|^{\frac{1-N}{2}}; & \text{se } x \in \Omega \\ 0; & \text{se } x \notin \Omega, \end{cases}$$

temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 e^{|x|} dx &= \int_\Omega \frac{(1-N)^2}{4} |x|^{-N-1} u_n^2 |x|^2 e^{|x|} dx + \int_\Omega (1-N)|x|^{-N} u_n \nabla u_n x e^{|x|} dx \\
&\quad + \int_\Omega |\nabla u_n|^2 |x|^{1-N} e^{|x|} dx \\
&\leq \frac{(1-N)^2}{4} \int_\Omega |u_n|^2 |x|^{1-N} e^{|x|} dx + \int_\Omega |x|^{1-N} |u_n| |\nabla u_n| e^{|x|} dx \\
&\quad + \int_\Omega |\nabla u_n|^2 |x|^{1-N} e^{|x|} dx \\
&= \frac{(1-N)^2}{4} \int_\Omega |u_n|^2 |x|^{1-N} e^{|x|} dx \\
&\quad + \int_\Omega (|x|^{\frac{1-N}{2}} |u_n| e^{|x|})(|x|^{\frac{1-N}{2}} |\nabla u_n| e^{|x|}) dx + \int_\Omega |\nabla u_n|^2 |x|^{1-N} e^{|x|} dx \\
&= \frac{(1-N)^2}{4} \int_\Omega |u_n|^2 |x|^{1-N} e^{|x|} dx \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |u_n|^2 |x|^{1-N} e^{|x|} dx + \int_\Omega |\nabla u_n|^2 |x|^{1-N} e^{|x|} dx\right) \\
&\quad + \int_\Omega |\nabla u_n|^2 |x|^{1-N} e^{|x|} dx < \infty,
\end{aligned}$$

o que mostra que $v_n \in H^1(K_\theta)$. Além disso, (v_n) é limitada em $H^1(K_\theta)$. Portanto, existe $v \in H^1(K_\theta)$ tal que, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(K_\theta)$. Como a imersão $H^1(K_\theta) \hookrightarrow L^2(K_\theta)$ é compacta,

$$v_n \to v \quad \text{em} \quad L^2(K_\theta).$$

Logo,

$$\int_\Omega |v_n - v|^2 e^{|x|} dx \to 0.$$

Agora, definindo $u(x) := v(x)|x|^{(N-1)/(2)}$, temos

$$\int_\Omega |u|^2 |x|^{1-N} e^{|x|} dx = \int_\Omega |v|^2 e^{|x|} dx < \infty.$$

Logo, $u \in L^2_{rad}(\Omega, G)$. Assim,

$$\int_\Omega |v_n - v|^2 e^{|x|} dx \to 0$$

donde

$$\int_\Omega |u_n - u|^2 |x|^{1-N} e^{|x|} dx \to 0,$$

mostrando que $u_n \to u$ em $L^2_{rad}(\Omega, G)$, o que é um absurdo, pois contradiz o fato da imersão $H^1_{0,rad}(\Omega, G) \hookrightarrow L^2_{rad}(\Omega, G)$ não ser compacta. Logo, a imersão $H^1(K_\theta) \hookrightarrow L^2(K_\theta)$ não é compacta, o que finaliza a prova. ∎

Observação 1.13 *A Proposição 1.6 nos diz que se $\theta \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+)$ e satisfaz a condição (1.1), então a imersão $H^1(K_\theta) \hookrightarrow L^2(K_\theta)$ é compacta. Logo, $\theta(x) = |x|$ não pode satisfazer uma dessas condições, pois, para $\theta(x) = |x|$, concluímos que a imersão $H^1(K_\theta) \hookrightarrow L^2(K_\theta)$ não é compacta. De fato, note que*

$$\theta_{x_i} = \frac{x_i}{|x|} \qquad e \qquad \theta_{x_i x_i} = \frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^2}$$

donde

$$\nabla\theta = \frac{x}{|x|} \qquad e \qquad \Delta\theta = \frac{N|x|^2 - |x|^2}{|x|^2} = N - 1.$$

Logo,

$$\Delta\theta + \frac{1}{2}|\Delta\theta|^2 = N - 1 + \frac{1}{2} = N - \frac{1}{2}$$

e, portanto,

$$\lim_{|x| \to \infty} \left(\Delta\theta + \frac{1}{2}|\Delta\theta|^2 \right) = N - \frac{1}{2} < \infty.$$

Proposição 1.14 *Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > -1$. Então, para toda $f \in C_0^1(0, +\infty)$ tem-se*

$$\int_0^{+\infty} |f(r)|^2 r^a dr \leq \frac{4}{(a+1)^2} \int_0^\infty |f'(r)|^2 r^{a+2} dr.$$

Demonstração: Observe, primeiramente, que

$$|f(r)|^2 = -\int_1^\infty \frac{d}{dt}|f(tr)|^2 dt = -2\int_1^\infty f(tr) r f'(tr) dt.$$

Assim, pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |f(r)|^2 r^a dr &= -2\int_0^\infty \int_1^\infty f(tr) r^{a+1} f'(tr) dt dr \\
&= -2\int_1^\infty \int_0^\infty f(tr) r^{a+1} f'(tr) dr dt.
\end{aligned}$$

Agora, fazendo a mudança de variável $y = tr$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |f(r)|^2 r^a dr &= -2\int_1^\infty \int_0^\infty f(y)(\frac{y}{t})^{a+1} f'(y)\frac{1}{t} dy dt \\
&= -2\int_1^\infty \frac{1}{t^{a+2}} dt \int_0^\infty f(y) y^{a+1} f'(y) dy \\
&= \frac{2}{a+1}\int_0^\infty f(y) y^{a+1} f'(y) dy.
\end{aligned}$$

Então,

$$\int_0^\infty |f(r)|^2 r^a dr \leq \frac{2}{a+1}\int_0^\infty |f(y)||y|^{a+1}|f'(y)| dy. \tag{1.9}$$

Além disso, note que $|f(y)||y|^{\frac{a}{2}} \in L^2(0,+\infty)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |f(y)|^2 |y|^a dy &= \int_0^R |f(y)|^2 |y|^a dy \quad (\text{pois } f \in C_c^1(0,+\infty)) \\
&\leq \|f\|_\infty^2 \int_0^R y^a dy \\
&= \|f\|_\infty^2 \frac{R^{a+1}}{a+1} < \infty.
\end{aligned}$$

De maneira análoga, mostra-se que $|f'(y)|y^{\frac{a}{2}+1} \in L^2(0,+\infty)$. Usando a desigualdade de Hölder e (1.9), temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |f(r)|^2 r^a dr &\leq \frac{2}{a+1}\int_0^\infty |f(y)| y^{\frac{a}{2}} y^{\frac{a}{2}+1} |f'(y)| dy \\
&\leq \frac{2}{a+1}\left(\int_0^\infty |f(y)|^2 y^a dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty |f'(y)|^2 y^{a+2} dy\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Podemos supor que $\int_0^\infty |f(r)|^2 r^a dr > 0$, pois no caso de $\int_0^\infty |f(r)|^2 r^a dr = 0$, a desigualdade é trivialmente satisfeita. Logo,

$$\frac{\displaystyle\int_0^\infty |f(r)|^2 r^a dr}{\left(\displaystyle\int_0^\infty |f(r)|^2 r^a dr\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{2}{a+1}\left(\int_0^\infty |f'(r)|^2 r^{a+2} dr\right)^{\frac{1}{2}},$$

donde
$$\int_0^\infty |f(r)|^2 r^a dr \leq \frac{4}{(a+1)^2}\int_0^\infty |f'(r)|^2 r^{a+2}dr,$$
finalizando a prova. ∎

Uma generalização da proposição anterior para funções de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}$ é obtida a seguir. Esta informação será usada para mostrarmos um resultado de não existência de solução no estudo do caso crítico, que será visto no Capítulo 4.

Corolário 1.15 ***(Desigualdade de Hardy)*** *Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > -N$. Então, para todo $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tem-se*
$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 |x|^a dx \leq \int_{S^{N-1}} \frac{4}{(a+N)^2}\int_0^\infty |y.\nabla u(ry)|^2 r^{a+N+1} dr dy.$$

Demonstração: Seja $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Definamos
$$\begin{aligned} f : (0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ r &\mapsto f(r) = u(ry) = u(x) \end{aligned}$$
onde $r = |x|$ e $x = ry$. Logo,
$$|f'(r)|^2 = |(\nabla u(ry).y)|^2 \leq |\nabla u(ry)|^2 |y|^2 = |\nabla u(ry)|^2.$$
Realizando um procedimento análogo ao que foi feito para provar a Proposição 1.14, podemos obter
$$\int_0^\infty |f(r)|^2 r^{N+a-1} dr \leq \frac{4}{(a+N)^2}\int_0^\infty |f'(r)|^2 r^{N+a+1} dr.$$
Assim, pelo teorema de Fubini, concluímos que
$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 |x|^a dx &= \int_0^\infty \int_{S^{N-1}} |f(r)|^2 r^{N+a-1} dy dr \\
&= \int_{S^{N-1}} \int_0^\infty |f(r)|^2 r^{N+a-1} dr dy \\
&\leq \int_{S^{N-1}} \frac{4}{(a+N)^2}\int_0^\infty |f'(r)|^2 r^{N+a+1} dr dy \\
&= \int_{S^{N-1}} \frac{4}{(a+N)^2}\int_0^\infty |(\nabla u(ry).y)|^2 r^{N+a+1} dr dy \\
&\leq \int_{S^{N-1}} \frac{4}{(a+N)^2}\int_0^\infty |\nabla u(x)|^2 r^{N+a} dr dy.
\end{aligned}$$
∎

Agora, veremos resultados de imersões para o caso particular de θ. Este peso será considerado nos capítulos que se seguem.

Proposição 1.16 *Seja $\theta(x) = |x|^2/4$. Então, a imersão $H^1(K) \hookrightarrow L^{2^*}(K)$ é contínua.*

Demonstração: Primeiramente, observe que $\theta \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}_+)$ e

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(\Delta\theta(x) + \frac{1}{2}|\nabla\theta(x)|^2\right) = \lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}\frac{|x|^2}{4}\right) = \infty,$$

isto é, θ satisfaz a condição (1.1). Além disso,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} K dx\right)^{\frac{1}{2^*}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |uK^{\frac{1}{2^*}}|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}},$$

e pela imersão contínua $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} K dx\right)^{\frac{1}{2^*}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(uK^{\frac{1}{2^*}})|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C_1\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K^{\frac{2}{2^*}} dx + C_2\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K^{\frac{2}{2^*}}|x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Como $2 < 2^*$ temos que $K^{\frac{2}{2^*}} < K$. Logo,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} K dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq C_1\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx + C_2\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K|x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pelo Lema 1.5,

$$\frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K|x|^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K\left(\frac{1}{2} + \frac{|x|^2}{8}\right) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} K dx\right)^{\frac{1}{2^*}} &\leq C_1\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx + C_3\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C_4\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u\|_{L^{2^*}(K)} \leq C_4\|u\|_{H^1(K)}.$$

Isto conclui a prova. ■

Daí, segue o seguinte resultado de imersão compacta:

Corolário 1.17 *Sejam $\theta(x) = |x|^2/4$. Então, a imersão $H^1(K) \hookrightarrow L^q(K)$ é compacta, para todo $2 \leq q < 2^*$.*

Demonstração: Pela Proposição 1.6, $H^1(K) \hookrightarrow L^2(K)$ compactamente e pela proposição anterior $H^1(K) \hookrightarrow L^{2^*}(K)$ continuamente. Assim, pela Desigualdade de Interpolação

$$\|u\|_{L^q(K)} \leq \|u\|^a_{L^2(K)}\|u\|^{1-a}_{L^{2^*}(K)} \quad \text{para toda } u \in H^1(K),$$

onde $1/q = a/2 + (1-a)/2^*$. Agora, seja $(u_n) \subset H^1(K)$ tal que (u_n) é limitada em $H^1(K)$. Então, a menos de subsequência, existe $u_0 \in H^1(K)$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $H^1(K)$

e pela Proposição 1.6, $u_n \to u_0$ em $L^2(K)$. Por outro lado, pela proposição anterior (u_n) é limitada em $L^{2^*}(K)$. Logo,

$$\|u_n - u_0\|_{L^q(K)} \leq \|u_n - u_0\|_{L^2(K)}^a \|u_n - u_0\|_{L^{2^*}(K)}^{1-a} \to 0,$$

quando $n \to +\infty$. Portanto, $H^1(K) \hookrightarrow L^q(K)$ compactamente para todo $2 \leq q < 2^*$, o que conclui a prova. ■

Capítulo 2

Análise Espectral do Operador L

A partir deste capítulo, trabalharemos com o peso específico $K(x) = e^{|x|^2/4}$, ou seja, $\theta(x) = |x|^2/4$. Como vimos anteriormente, θ é de classe de C^2 e satisfaz (1.1). Portanto, todos os resultados de imersões obtidos no Capítulo 1 são válidos para este peso.

2.1 O Operador L

Começaremos esta seção relembrando a seguinte definição:

Definição 2.1 *Sejam E, F espaços de Banach e $A : D(A) \subseteq E \to F$ um operador linear não limitado. Dizemos que um operador $A^* : D(A^*) \subseteq F^* \to E^*$ é um operador adjunto de A se satisfaz*

$$\langle v, Au \rangle_{F^*,F} = \langle A^*v, u \rangle_{E^*,E} \qquad \forall u \in E, \quad \forall v \in F^*.$$

Dizemos que o operador A é auto-adjunto se $D(A) = D(A^*)$ e $A = A^*$.

Definamos, agora, o operador

$$Lu = -\frac{1}{K}\nabla.(K\nabla u)$$

cujo domínio é $D(L) := \{u \in L^2(K); Lu \in L^2(K)\}$. Este operador possui algumas propriedades, conforme proposição a seguir.

Proposição 2.2 *L é um operador linear, não limitado e auto-adjunto.*

Demonstração: Se $u, v \in D(L)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} L(u + \lambda v) &= -\frac{1}{K}\nabla.[K\nabla(u + \lambda v)] \\ &= -\frac{1}{K}\nabla.(K\nabla u) - \lambda\frac{1}{K}\nabla.(K\nabla v) \\ &= Lu + \lambda Lv. \end{aligned}$$

Portanto, L é linear. Seja $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $u(x) = 1/(K^{\frac{1}{2}}(1 + |x|^2))$ e observe que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 K dx = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^2} < +\infty,$$

ou seja, $u \in L^2(K)$. Porém, $Lu \notin L^2(K)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
|Lu|^2 &= \frac{1}{16K(1+|x|^2)^2} + \frac{|x|^2}{32K(1+|x|^2)^2} + \frac{1}{K(1+|x|^2)^3} - \frac{4|x|^2}{K(1+|x|^2)^4} \\
&+ \frac{|x|^4}{256K(1+|x|^2)^2} + \frac{|x|^2}{4K(1+|x|^2)^3} - \frac{|x|^4}{K(1+|x|^2)^4} + \frac{4}{K(1+|x|^2)^4} \\
&- \frac{32|x|^2}{K(1+|x|^2)^5} + \frac{64|x|^4}{K(1+|x|^2)^6}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^3} |Lu|^2 K dx = c + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|x|^4}{256(1+|x|^2)^2} = +\infty.$$

Portanto, L é não limitado. Além disso, note que

$$
\begin{aligned}
Lu &= -\frac{1}{K}\nabla.(K\nabla u) \\
&= \left(-\frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., -\frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial x_N}\right).\left(K\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., K\frac{\partial u}{\partial x_N}\right) \\
&= -\frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(K\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - ... - \frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial x_N}\left(K\frac{\partial u}{\partial x_N}\right) \\
&= -\Delta u - \frac{1}{2}\left(x\nabla u\right); \quad \forall u \in D(L),
\end{aligned}
$$

e, como $1/2 + 1/2 = 1$ temos que $L^2(K) \simeq (L^2(K))^*$, portanto $D(L^*) \subset L^2(K)$. Assim, usando integração por partes, temos

$$
\begin{aligned}
\langle u, L^* v\rangle_{L^2(K)} &= \langle Lu, v\rangle_{L^2(K)} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \nabla.\left(K\nabla u\right) v dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} K\nabla u \nabla v dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} u\nabla.\left(K\nabla v\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u\left(-\frac{1}{K}\nabla.\left(K\nabla v\right)\right) K dx, \quad \forall u \in D(L) \text{ e } \forall v \in D(L^*).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$L^* v = -\frac{1}{K}\nabla.\left(K\nabla v\right).$$

Portanto, $L = L^*$ e $D(L) = D(L^*)$ e, desta forma, L é um operador auto-adjunto, o que finaliza a demonstração desta proposição.

■

Na seção, a seguir, analisaremos um problema de autovalor para o oporador L. Descreveremos seus autovalores, os autoespaços e a dimensão destes autoespaços.

2.2 Problemas Envolvendo o Operador L

Seja $f \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^2(K)$ e considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} Lu = f \\ u \in L^2(K). \end{cases} \tag{2.1}$$

Definição 2.3 *Uma solução clássica de (2.1) é uma função $u \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap L^2(K)$ que satisfaz (2.1) pontualmente.*

Sejam u uma solução clássica de (2.1) e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ qualquer. Assim, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (Lu)\varphi K dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\varphi K dx,$$

e pela definição de L

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \nabla.(K\nabla u)\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\varphi K dx.$$

Usando integração por partes, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi K dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\varphi K dx.$$

Desde que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H^1(K)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v K dx = \int_{\mathbb{R}^N} f v K dx \quad \text{para toda } \ v \in H^1(K). \tag{2.2}$$

Desta forma, dizemos que u é uma solução fraca de (2.1) se $u \in H^1(K)$ e satisfaz (2.2).

Observação 2.4 *É imediato verificar que se $u \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap L^2(K)$ satisfaz (2.2), então u é solução clássica de (2.1).*

Proposição 2.5 *Toda solução clássica de (2.1) é uma solução fraca de (2.1).*

Demonstração: Como já vimos toda solução clássica de (2.1) satisfaz (2.2). Portanto, resta-nos mostrar que $u \in H^1(K)$. Usando integração por partes e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u K dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} u \nabla.(K\nabla u) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} -\frac{1}{K}\nabla.(K\nabla u) u K dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (Lu) u K dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f K^{\frac{1}{2}} u K^{\frac{1}{2}} dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 K dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

■

No que segue mostraremos a existência e a unicidade de solução fraca para o problema (2.1).

Proposição 2.6 *Para cada $f \in L^2(K)$, o problema (2.1) tem uma única solução fraca.*

Demonstração: Para $u, v \in H^1(K)$, defina

$$a(u,v) := \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v K dx \quad \text{e} \quad \varphi(u) := \int_{\mathbb{R}^N} f u K dx.$$

Vamos mostrar que a e φ, definidas dessa forma, satisfazem as hipóteses do Teorema de Lax-Milgram (Teorema A.14 do Apêndice A). a é bilinear e simétrica, pois a é o produto interno em $H^1(K)$. Mostremos então que a é contínua. Temos

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v K dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| K^{\frac{1}{2}} |\nabla v| K^{\frac{1}{2}} dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 K dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|u\|_{H^1(K)} \|v\|_{H^1(K)}.
\end{aligned}$$

Para que a satisfaça as condições do Teorema de Lax-Milgran, resta-nos mostrar que a é coercivo, ou seja, existe $\alpha > 0$ tal que $|a(u,u)| \geq \alpha \|u\|^2_{H^1(K)}$, para todo u pertecente à $H^1(K)$. Isto é verdade, pois

$$\begin{aligned}
|a(u,u)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u K dx \right| \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx \\
&= \|u\|^2_{H^1(K)}.
\end{aligned}$$

Observe que φ é linear e contínua. De fato,

$$\varphi(u + \lambda v) = \int_{\mathbb{R}^N} (fuK + \lambda f v K) dx = \int_{\mathbb{R}^N} fuK dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f v K dx = \varphi(u) + \lambda \varphi(v),$$

e

$$\begin{aligned}
|\varphi(u)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f||u| K dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 K dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_{L^2(K)} \|u\|_{H^1(K)}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgran, existe uma única $u \in H^1(K)$ tal que

$$a(u,v) = \varphi(v)$$

para toda $v \in H^1(K)$, isto é, existe uma única $u \in H^1(K)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v K dx = \int_{\mathbb{R}^N} f v K dx.$$

para toda $v \in H^1(K)$, o que finaliza a prova. ■

De posse deste resultado, definamos operador

$$S : L^2(K) \to H^1(K) \;\text{ por }\; S(f) = u,$$

onde u é a única solução fraca de (2.1) para $f \in L^2(K)$.

Proposição 2.7 *O operador S acima tem as seguintes propriedades:*
1) *S é linear e contínuo;*
2) *Vendo S tomando valores em $L^2(K)$, podomos dizer que S é compacto (pois a imersão $H^1(K) \hookrightarrow L^2(K)$ é compacta);*
3) *S é simétrico em $L^2(K)$;*
4) *$\langle S(f), f\rangle_{L^2(K)} > 0$ para todo $f \in L^2(K) - \{0\}$;*
5) *S admite uma sequência (μ_n) de autovalores com $\mu_n \to 0$ e $L^2(K)$ possui uma base ortonormal completa formada de autovetores;*
6) *Os autovalores μ_n são positivos.*

Observe que estas propriedades são as mesmas do operador "inverso" de $-\Delta$, sendo suas demonstrações análogas. Para uma melhor ilustração, demonstraremos a primeira. As demais propriedades ficam a cargo do leitor.

Demonstração: 1) Sejam $f, g \in L^2(K)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ e observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(S(f)) \nabla v K dx = \int_{\mathbb{R}^N} f v K dx$$

e

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(S(g)) \nabla v K dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g v K dx$$

para toda $v \in H^1(K)$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla S(f) + \lambda \nabla S(g)] \nabla v K dx = \int_{\mathbb{R}^N} (f + \lambda g) v K dx = \int_{\mathbb{R}^N} f v K dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g v K dx$$

para toda $v \in H^1(K)$, isto é,

$$S(f + \lambda g) = S(f) + \lambda S(g).$$

Portanto, S é linear. Além disso, usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\|S(f)\|^2_{H^1(K)} &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla S(f)|^2 K dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla S(f).\nabla S(f) K dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f S(f) K dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 K\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |S(f)|^2 K dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_{L^2(K)} \|S(f)\|_{L^2(K)}.
\end{aligned}$$

Como a imersão $H^1(K) \hookrightarrow L^2(K)$ é contínua, então $\|S(f)\|_{L^2(K)} \leq C\|S(f)\|_{H^1(K)}$, de onde obtemos que

$$\|S(f)\|_{H^1(K)} \leq C\|f\|_{L^2(K)} \text{ para } f \neq 0.$$

Se $f = 0$ a desigualdade anterior é claramente satisfeita e portanto S é contínua. ■

Agora, considerando o problema de autovalor

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu = \lambda u \\ u \in L^2(K), u \neq 0, \end{array} \right. \tag{2.3}$$

temos o seguinte resultado:

Proposição 2.8 *Existe uma base ortonormal* $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $L^2(K)$ *e uma sequência* (λ_n) *de números positivos tal que* $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ...$ *e* $\lambda_n \to \infty$ *satisfazendo*

$$\left\{ \begin{array}{l} Lw_n = \lambda_n w_n \\ w_n \neq 0. \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Além disso, $w_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *para todo* n.

Demonstração: Observe primeiramente que u satisfaz (2.3) com $\lambda \neq 0$ se, e somente se, $S(u) = (1/\lambda)u$, o que nos diz que $\mu = 1/\lambda$ é autovalor de S. Pela propriedade 5) do operador S, existe uma sequência (μ_n) decrescente de autovalores de S tal que $\mu_n \to 0$. Logo, (λ_n) é crescente e

$$\lambda_n := \frac{1}{\mu_n} \to \infty.$$

Mostremos agora que $\lambda_1 > 0$. Para isto, note que

$$\langle Lu_1, u_1\rangle_{L^2(K)} = \langle \lambda_1 u_1, u_1\rangle_{L^2(K)} = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^2 K dx.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle Lu_1, u_1\rangle_{L^2(K)} &= -\int_{\mathbb{R}^N} \nabla.(K\nabla u_1)u_1 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} K\nabla u_1 \nabla u_1 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^2 K dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda_1 = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^2 K dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^2 K dx}.$$

Pela Desigualdade de Poincaré (Corolário 1.7), existe $\alpha > 0$ tal que

$$0 < \alpha \leq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^2 K dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^2 K dx} = \lambda_1.$$

Além disso, existe uma base ortonormal de $L^2(K)$ formada por autovetores de S, isto é,

$$S(w_n) = \mu_n w_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$Lw_n = \lambda_n w_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

O fato de $w_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, segue usando o conhecimento que $K \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, a estrutura do operador L e usando recursivamente resultados de regularidade elíptica. ■

Observação 2.9 *Se $u \in L^2(K)$, então para todo $m \geq 0$, $|\cdot|^m u \in L^2(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Seja $m \geq 0$ e defina

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{|x|^{2m}}{e^{\frac{|x|^2}{4}}} \end{aligned} .$$

Agora, considere

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ r &\mapsto g(r) = \frac{r^{2m}}{e^{\frac{r^2}{4}}} \end{aligned} .$$

e note que $g(r) \to 0$, quando $r \to +\infty$. Portanto, para $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que se $r > R$ tem-se $g(r) < \varepsilon$. Deste modo, para $|x| > R$, tem-se $f(x) < \varepsilon$, e isso nos diz que $f(x) \to 0$ quando $|x| \to +\infty$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{2m}|u(x)|^2 dx &= \int_{|x|\leq R} |x|^{2m}|u(x)|^2 dx + \int_{|x|>R} |x|^{2m}|u(x)|^2 dx \\ &\leq R^{2m} \int_{|x|\leq R} |u(x)|^2 dx + \varepsilon \int_{|x|>R} e^{\frac{|x|^2}{4}} |u(x)|^2 dx \\ &\leq R^{2m} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{|x|^2}{4}} |u(x)|^2 dx \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Portanto, $|\cdot|^m u \in L^2(\mathbb{R}^N)$. ■

O próximo teorema exibe os autovalores do problema (2.3), como também os autoespaços associados a estes autovalores. Além disso, calculamos as dimensões desses autoespaços.

Teorema 2.10 *Os autovalores de L são os números $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dados por*

$$\lambda_n = \frac{N+n-1}{2}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, o autoespaço associado a λ_n é

$$Nuc(L - \lambda_n I) = Span\{D^\beta \varphi;\ |\beta| = n-1\},$$

onde $\varphi(x) = e^{-|x|^2/4}$, $\beta \in \mathbb{N}^N$, $|\beta| = \beta_1 + ... + \beta_N$ e $D^\beta = \partial_1^{\beta_1}...\partial_N^{\beta_N}$. Além disso,

$$dimNuc(L - \lambda_n I) = \begin{pmatrix} N+n-2 \\ N-1 \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Estamos interessados em encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$Lu = \lambda u,$$

para alguma $u \in D(L)$, com $u \neq 0$. Isto é equivalente a dizer que

$$-\Delta u - \frac{1}{2} x.\nabla u = \lambda u, \tag{2.5}$$

para alguma $u \in D(L)$, com $u \neq 0$. Aplicando a Transformada de Fourier na equação (2.5) e usando suas propriedades (veja Apêndice A), obtemos

$$-\widehat{\Delta u} - \frac{1}{2} \widehat{x.\nabla u} = \lambda \widehat{u}. \tag{2.6}$$

Note também que

$$\widehat{\Delta u}(\xi) = \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(\xi) \right)^{\wedge} = \sum_{j=1}^{N} \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}}(\xi) = \sum_{j=1}^{N} (i\xi)^{\alpha_j} \widehat{u}(\xi),$$

onde $i^2 = -1$ e estamos usando novamente as propriedades da Transformada de Fourier que se encontram no Apêndice A. Além disso,

$$\widehat{x.\nabla u}(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \widehat{x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}}(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(x_j u) - u \right)^{\wedge} (\xi) = \sum_{j=1}^{N} (i\xi)^{\beta_j} (x_j u)^{\wedge}(\xi) - \sum_{j=1}^{N} \widehat{u}(\xi),$$

em que $\alpha_j = (0, ..., 0, 2, 0, ..., 0)$ e $\beta_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, com 2 e 1 na j-ésima posição respectivamente, onde estamos usando a notação $(x_1, ..., x_N)^{(\alpha_1, ..., \alpha_N)} = x_1^{\alpha_1} ... x_N^{\alpha_N}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} (2\pi)^{\frac{N}{2}} \partial_j \widehat{u}(\xi) &= \lim_{t \to 0} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix(\xi + te_j)} u(x) dx - \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} u(x) dx}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} u(x) \left(\frac{e^{-itx_j} - 1}{t} \right) dx. \end{aligned}$$

Além disso, note que

$$e^{-ix\xi} u(x) \left(\frac{e^{-itx_j} - 1}{t} \right) \leq e^{-ix\xi} u(x) \frac{1}{t} \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

donde, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned} (2\pi)^{\frac{N}{2}} \partial_j \widehat{u}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi} u(x)(-ix_j) dx \\ &= -i(x_j u)^{\wedge}(\xi)(2\pi)^{\frac{N}{2}} \end{aligned}$$

Portanto, chegamos que

$$\widehat{\Delta u}(\xi) = -|\xi|^2 \widehat{u}(\xi) \ \text{ e } \ \widehat{x.\nabla u}(\xi) = -\xi.\nabla \widehat{u}(\xi) - N \widehat{u}(\xi).$$

Substituindo estes valores na equação (2.6), obtemos

$$\xi.\nabla\widehat{u}(\xi) = \left(2\lambda - N - 2|\xi|^2\right)\widehat{u}(\xi). \tag{2.7}$$

Definindo

$$v(\xi) = e^{|\xi|^2}\widehat{u}(\xi)$$

temos que $v \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, pois $\widehat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\nabla v(\xi) = 2\xi e^{|\xi|^2}\widehat{u}(\xi) + e^{|\xi|^2}\nabla\widehat{u}(\xi).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \xi.\nabla v(\xi) &= 2|\xi|^2 e^{|\xi|^2}\widehat{u}(\xi) + e^{|\xi|^2}\left(\xi.\nabla\widehat{u}(\xi)\right) \\ &= 2|\xi|^2 v(\xi) + \left(2\lambda - N - 2|\xi|^2\right)v(\xi) \\ &= (2\lambda - N)v(\xi). \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema de Euler para funções homogêneas (Teorema A.22 do Apêndice A), temos que v é homogênea de grau $2\lambda - N$. Desde que $v \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, afirmamos que $2\lambda - N$ é um número inteiro e não negativo. De fato, como consequência do Teorema de Euler, temos que $v^{(n)}$ é uma função homogênea de grau $2\lambda - N - n$, ou seja, $v^{(n)}(tx) = t^{2\lambda - N - n}v^{(n)}(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos considerar duas situações:

Caso 1: $2\lambda - N < 0$. Neste caso, seja $x \in \mathbb{R}^N$ arbitrário, porém fixo e defina

$$\begin{aligned} &g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ &t \mapsto g(t) = v(tx) = \frac{1}{t^{N-2\lambda}}v(x). \end{aligned}$$

Logo, g não é diferenciável em $t = 0$ e, assim, v não seria diferenciável na origem, o que é uma contradição, pois $v \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Portanto, este caso não pode ocorrer.

Caso 2: $2\lambda - N \geq 0$ e $2\lambda - N \notin \mathbb{Z}$. Pelo fato do conjunto dos números inteiros ser ilimitado superiormente, temos que existe $n \in \mathbb{Z}$, com $n > 0$, tal que $0 < 2\lambda - N - n < 1$. Assim, para $x \in \mathbb{R}^N$ fixo, defina

$$\begin{aligned} &h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ &t \mapsto h(t) = v(tx) = \frac{1}{t^{n+N-2\lambda}}v(x). \end{aligned}$$

Observe que h não é diferenciável em $t = 0$ e, assim, $v^{(n)}$ não é diferenciável na origem, o que novamente é uma contradição, pois $v \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Portanto, este caso também não ocorre e nossa afirmação está provada.

Agora, seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $2\lambda - N = n$. Assim, temos

$$v(tx) = t^n v(x),$$

e derivando com respeito a t, segue que $v'(tx).x = nt^{n-1}v(x), \dots, v^{(n)}(tx).x^n = n!v(x)$ e

$$v^{(n+m)}(tx).x^{n+m} = 0, \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Em $t = 0$ tem-se

$$v(0) = 0, v'(0) = 0, ..., v^{(n-1)}(0) = 0, v^{(n)}(0) = n!v(x).$$

Daí, pelo fórmula de Taylor de v, devemos ter

$$v(x) = \frac{v^{(n)}(0)x^n}{n!},$$

o que nos diz que v é um polinômio homogêneo de grau $n = 2\lambda - N$. Escrevendo $2\lambda - N = m - 1$ temos que $\lambda = (N + m - 1)/2$ e $v(\xi)$ é um polinômio homogêneo de grau $m - 1$, com $m \in \mathbb{N}$. Como $v(\xi) = e^{|\xi|^2}\widehat{u}(\xi)$, pelas propriedades da Transformada de Fourier, tem-se que $\widehat{u}(\xi) = e^{-|\xi|^2}p_{m-1}(\xi)$ e, portanto, aplicando a Transformada de Fourier Inversa e usando novamente as propriedades, obtemos

$$u(x) = p_{m-1}(D)e^{-|x|^2},$$

onde p_{m-1} é um polinômio homogêneo de grau $m-1$ composto com o operador derivação D. Se $m = 1$, obtemos que o primeiro autovalor e a primeira autofunção do problema (2.3) são

$$\lambda_1 = \frac{N}{2} \quad \text{e} \quad \varphi_1(x) = e^{-|x|^2},$$

respectivamente. Se $m > 1$, temos que

$$u(x) = p_{m-1}(D)e^{-|x|^2} = D^\beta\varphi_1(x).$$

onde β é um multi-índice com $|\beta| = m - 1$ e $D^\beta\varphi_1(x)$ são as autofunções associadas ao autovalor λ_m. Deste modo, denotando

$$A_m = Span\{D^\beta\varphi_1; \text{ onde } |\beta| = m - 1\},$$

como sendo o autoestaço gerado pelas autofunções associadas ao autovalor λ_m, temos que a dimensão de A_m é justamente o número de derivadas parciais distintas de ordem $m-1$ que possui a função φ_1, o que é equivalente a encontrar a quantidade de soluções em $\mathbb{N}^N$ para a equação

$$\alpha_1 + ... + \alpha_N = m - 1 \qquad \left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial_N^{\alpha_N}}\right).$$

Usando o Teorema de Cauchy-Schwarz do Cálculo Clássico, podemos desprezar a ordem, isto é, só importa quantas vezes vamos derivar φ_1 com relação a cada uma das variáveis. Portanto, usando argumentos de permutação simples, concluímos que

$$dim A_m = \frac{(m-1+N-1)!}{(N-1)!(m-1)!} = \frac{(m+N-2)!}{(m-1)!(N-1)!} = \begin{pmatrix} m+N-2 \\ N-1 \end{pmatrix},$$

finalizando a demonstração do teorema. ∎

Capítulo 3

Multiplicidade de Soluções

3.1 O Problema Variacional

Neste capítulo, estamos interessados em encontrar soluções não-triviais para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \dfrac{1}{2}(x.\nabla u) + |u|^{p-1}u = \lambda u \\ u \in H^1(K) \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $\lambda > \lambda_i$, com $i \in \mathbb{N}$, e $1 < p < 2^* - 1$. Para este fim, usaremos métodos variacionais. Com este propósito, precisamos encontrar o funcional energia associado ao problema (3.1), e é isto que nos é fornecido no próximo resultado.

Proposição 3.1 *O funcional energia associado à (3.1) é dado por*

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx + \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} K dx - \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K dx, \tag{3.2}$$

onde $u \in H^1(K)$.

Demonstração: Sejam $u \in H^1(K)$ uma solução clássica de (3.1) e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Multiplicando (3.1) por φK e integrando em $\mathbb{R}^N$, temos

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \triangle u \varphi K dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (x.\nabla u)\varphi K dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u \varphi K dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} u \varphi K dx.$$

Logo, usando integração por partes,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi K dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u \varphi K dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} u \varphi K dx.$$

Usando a densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em $H^1(K)$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v K dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u v K dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} u v K dx,$$

para toda $v \in H^1(K)$, ou seja, u é uma solução fraca do problema (3.1). Para $u \in H^1(K)$, calculemos a derivada de Gateaux do funcional E dado acima. Se $\varphi \in H^1(K)$, temos

$$\begin{aligned} E'(u)\varphi &= \lim_{t\to 0} \frac{E(u+t\varphi) - E(u)}{t} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi K dx + \lim_{t\to 0} \frac{1}{(p+1)t}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u+t\varphi|^{p+1} - |u|^{p+1}\right) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} u \varphi K dx. \end{aligned}$$

Agora, considere

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto \psi(s) = |s|^{p+1}. \end{aligned}$$

Temos que

$$\psi'(s) = (p+1)|s|^p \frac{s}{|s|}.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Médio, para $|t| \leq 1$, existe v entre u e $u + t\varphi$ tal que

$$\psi(u + t\varphi) - \psi(u) = \psi'(v)(u + t\varphi - u) = \psi'(v)t\varphi.$$

Desta forma, observa-se que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{1}{(p+1)t} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u + t\varphi|^{p+1} - |u|^{p+1}\right) dx &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{(p+1)t} \int_{\mathbb{R}^N} (p+1)|v|^p \frac{v}{|v|} t\varphi K dx \\ &= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p-1} v\varphi K dx \end{aligned}$$

observando que $\lim\limits_{t\to 0} v = u$ e usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, tem-se

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{(p+1)t} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u + t\varphi|^{p+1} - |u|^{p+1}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u\varphi K dx.$$

Portanto,

$$E'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi K dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u\varphi K dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} u\varphi K dx,$$

o que mostra que os pontos críticos de E são exatamente as soluções fracas de (3.1). Assim, E é o funcional energia associado ao problema (3.1). ■

O funcional E claramente está bem definido em $H^1(K)$ e além disso, devido as duas próximas proposições vistas mais abaixo, também obtemos que E é um funcional de classe C^1 em $H^1(K)$.

Proposição 3.2 *Seja $2 \leq p \leq 2^*$. Então, o funcional*

$$\begin{aligned} \psi : H^1(K) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \psi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p K dx \end{aligned}$$

é de classe $C^1(H^1(K), \mathbb{R})$ e sua derivada é dada por

$$\psi'(u).v = p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2} uv K dx,$$

para todo $v \in H^1(K)$.

Demonstração: Defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(s) = |s|^p$ e observe que $g'(s) = p|s|^{p-2}s$. Então, pelo teorema do valor médio, dados $t \in (0, 1)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, existe $c \in (a, a + tb)$ tal que

$$g(a + tb) - g(a) = g'(c)tb.$$

Como $c \in (a, a+tb)$, temos que $c = a + t\alpha b$, para algum $\alpha \in (0,1)$. Logo,

$$g(a+tb) - g(a) = g'(a+t\alpha b)tb$$

e, assim,

$$\frac{g(a+tb)-g(a)}{t} = p|a+t\alpha b|^{p-2}(a+t\alpha b)b.$$

Agora, sejam $u, v \in H^1(K)$ e fixe $x \in \mathbb{R}^N$. Da equação anterior, temos

$$\begin{aligned} \frac{|g(u(x)+tv(x)) - g(u(x))|}{t} &= p|u(x)+t\alpha v(x)|^{p-1}|v(x)| \\ &\leq p(|u(x)|+|v(x)|)^{p-1}|v(x)|. \end{aligned}$$

Com isto, afirmamos que $p(|u|+|v|)^{p-1}|v| \in L^1(K)$. De fato, pela Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} p(|u(x)|+|v(x)|)^{p-1}|v(x)|K dx \\ &\leq p\left(\int_{\mathbb{R}^N} (|u(x)|+|v(x)|)^{(p-1)\frac{p}{p-1}} K dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^p K dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= p\,\||u|+|v|\|_{L^p(K)}^{p-1}\,\|v\|_{L^p(K)} < +\infty, \end{aligned}$$

pois u e v pertencem à $H^1(K)$ que está imerso continuamente em $L^q(K)$, para $2 \leq q \leq 2^*$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{g(u(x)+tv(x)) - g(u(x))}{t} K dx = p\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p-2}u(x)v(x)K dx.$$

Assim,

$$\psi'(u).v = p\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uvK dx,$$

para todo $v \in H^1(K)$. Além disso, $\psi'(u)$ é um funcional linear contínuo para cada $u \in H^1(K)$. A linearidade é imediata e, para $v \in H^1(K)$, segue que

$$|\psi'(u).v| \leq p\|u\|_{L^p(K)}^{p-1}\|v\|_{L^p(K)} \leq C_u\|v\|_{H^1(K)},$$

o que implica na continuidade de $\psi'(u)$. Agora, mostremos que $\psi' : H^1(K) \to (H^1(K))'$ é contínua. Seja $u_n \to u_0$ em $H^1(K)$. Como $H^1(K) \hookrightarrow L^p(K)$ continuamente, para $2 \leq p \leq 2^*$, temos que $u_n \to u_0$ em $L^p(K)$, para $2 \leq p \leq 2^*$. Desta forma, definamos

$$f(u) = |u|^{p-2}u$$

e vejamos que $f(u_n) \to f(u_0)$ em $L^{\frac{p}{p-1}}(K)$. Primeiramente observe que $f(u_n) \to f(u_0)$ em $L^{\frac{p}{p-1}}(K)$ se, e somente se, $f(u_n)K^{\frac{p-1}{p}} \to f(u_0)K^{\frac{p-1}{p}}$ em $L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$. Como $u_n \to u_0$ em $L^p(K)$, então $u_nK^{\frac{1}{p}} \to u_0K^{\frac{1}{p}}$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Logo, pelo Teorema 1.14, a menos de subsequência,

$$u_nK^{\frac{1}{p}} \to u_0K^{\frac{1}{p}} \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e existe $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|u_nK^{\frac{1}{p}}| \leq g.$$

Assim,

$$f(u_n)K^{\frac{p-1}{p}} \to f(u_0)K^{\frac{p-1}{p}} \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$\left|f(u_n)K^{\frac{p-1}{p}}\right|^{\frac{p}{p-1}} = |u_n K^{\frac{1}{p}}|^p \leq g^p \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f(u_n)|^{\frac{p}{p-1}} K = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to+\infty} |u_n|^p K = \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^p K = \int_{\mathbb{R}^N} |f(u_0)|^{\frac{p}{p-1}} K.$$

Desta forma, como dissemos $f(u_n) \to f(u_0)$ em $L^{\frac{p}{p-1}}(K)$. Usando a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
|\psi'(u_n).v - \psi'(u_0).v| &= p\left|\int_{\mathbb{R}^N} [f(u_n) - f(u_0)]vKdx\right| \\
&\leq p\int_{\mathbb{R}^N} |f(u_n) - f(u_0)|\,|v|Kdx \\
&\leq p\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(u_n) - f(u_0)|^{\frac{p}{p-1}}\, Kdx\right)^{\frac{p-1}{p}} \|v\|_{L^p(K)} \\
&\leq pC\|f(u_n) - f(u_0)\|^{p-1}_{L^p(K)}\|v\|_{H^1(K)} \\
&\leq pC\|f(u_n) - f(u_0)\|^{p-1}_{L^p(K)}
\end{aligned}$$

se $\|v\|_{H^1(K)} \leq 1$. Como $f(u_n) \to f(u_0)$ em $L^{\frac{p}{p-1}}(K)$ temos

$$\begin{aligned}
\|\psi'(u_n) - \psi'(u_0)\| &= \sup_{\|v\|_{H^1(K)}\leq 1} |\psi'(u_n)v - \psi'(u_0)v| \\
&\leq pC\|f(u_n) - f(u_0)\|^{p-1}_{L^p(K)} \to 0,
\end{aligned}$$

o que mostra que $\psi'(u_n) \to \psi'(u_0)$, ou seja, que ψ' é contínua. Portanto, $\psi \in C^1(H^1(K), \mathbb{R})$ e $\psi'(u)v = p\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-2}uvKdx$, o que finaliza a prova. ■

Proposição 3.3 *O funcional*

$$\begin{aligned}
&\varphi : H^1(K) \longrightarrow \mathbb{R} \\
&u \mapsto \varphi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 Kdx
\end{aligned}$$

é de classe $C^1(H^1(K), \mathbb{R})$ *e sua derivada é dada por*

$$\varphi'(u)v = 2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v Kdx$$

para todo $v \in H^1(K)$.

Demonstração: Dado $v \in H^1(K)$, temos

$$\begin{aligned}
\varphi'(u)v = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(u+tv)-\varphi(u)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u + t\nabla v|^2 K dx - \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 K dx}{t}\\
&= \lim_{t\to 0} 2\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u \nabla v K dx + t\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2 K dx\\
&= 2\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u\nabla v K dx.
\end{aligned}$$

A prova de que $\varphi'(u)$ é um funcional linear contínuo para cada $u \in H^1(K)$ é imediata. Mostremos que $\varphi' : H^1(K) \to (H^1(K))'$ é contínua. Para isto, seja $u_n \to u_0$ em $H^1(K)$. Então,

$$\begin{aligned}
|\varphi'(u_n)v - \varphi'(u_0)v| &= 2\left|\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u_n - \nabla u_0)\nabla v K dx\right|\\
&\leq 2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n - \nabla u_0||\nabla v| K dx\\
&\leq 2\|u_n - u_0\|_{H^1(K)},
\end{aligned}$$

se $\|v\|_{H^1(K)} \leq 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|\varphi'(u_n) - \varphi'(u_0)\| &= \sup_{\|v\|_{H^1(K)}\leq 1}|\varphi'(u_n)v - \varphi'(u_0)v|\\
&\leq 2\|u_n - u_0\|_{H^1(K)} \to 0,
\end{aligned}$$

o que mostra que $\varphi'(u_n) \to \varphi'(u_0)$, isto é, φ' é contínua, e isto finaliza a prova. ■

O resultado, a seguir, mostra que o funcional E satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale.

Proposição 3.4 *O funcional E satisfaz a condição de Palais-Smale, ou seja, dada $(u_n) \subseteq H^1(K)$ tal que $E(u_n) \to C_1$ e $E'(u_n) \to 0$, então, a menos de subsequência, (u_n) converge em $H^1(K)$.*

Prova: Relembremos que, pelo Corolário 1.8, temos que para todo $\varepsilon > 0$ e $q > 2$, existem $C > 0$ e $R > 0$ tais que

$$\lambda\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2 K dx \leq \varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 K dx + C\|u\|^2_{L^q(B_R)}.$$

Como

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 K dx + \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1} K dx - \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2 K dx,$$

para $\varepsilon = 1/2$ e $q = p+1$, temos

$$\begin{aligned}
E(u) &\geq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 K dx + \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1} K dx - \frac{C}{2}\left(\int_{B_R}|u|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}\\
&\geq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 K dx + \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1} K dx - \frac{C}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1} K dx\right)^{\frac{2}{p+1}}\\
&= \frac{1}{4}\|u\|^2_{H^1(K)} + \frac{1}{p+1}\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(K)} - \frac{C}{2}\|u\|^2_{L^{p+1}(K)}, \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

para toda $u \in H^1(K)$. Agora, defina

$$\begin{aligned} g : [0, +\infty) &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto g(t) = \frac{1}{p+1} t^{p+1} - \frac{C}{2} t^2. \end{aligned}$$

Claramente g é diferenciável e

$$g'(t) = t^p - Ct = t(t^{p-1} - C).$$

Desde que $p > 1$, temos que $g'(t) = 0$ se, e somente se, $t = 0$ ou $t = t_0 = C^{\frac{1}{p-1}}$, isto é, $t = 0$ e $t = t_0$ são os únicos pontos críticos de g. Note também que

$$g''(t) = pt^{p-1} - C, \quad g''(0) = -C < 0 \quad \text{e} \quad g''(t_0) = pC - C > 0.$$

Ou seja, t_0 é um ponto de mínimo local de g e como $\lim_{t\to+\infty} = +\infty$, temos que t_0 é ponto de mínimo absoluto de g. Logo, sendo $g(t_0) = C_1$, temos que $g(t) \geq C_1$, então

$$\frac{1}{p+1} \|u\|_{L^{p+1}(K)}^{p+1} - \frac{C}{2} \|u\|_{L^{p+1}(K)}^2 \geq C_1.$$

Logo, de (3.1), temos que

$$E(u) \geq \frac{1}{4} \|u\|_{H^1(K)}^2 + C_1, \tag{3.4}$$

para todo $u \in H^1(K)$. Sendo assim, seja $(u_n) \subseteq H^1(K)$ tal que $E(u_n) \to C_2$ e $E'(u_n) \to 0$. Afirmamos que (u_n) é limitada em $H^1(K)$. De fato, como $E(u_n) \to C_2$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|E(u_n)| \leq 1 + C_2, \quad \text{para todo } n > n_0.$$

Logo, de (3.1), temos que

$$\|u_n\|_{H^1(K)}^2 \leq 4 \max \{1 + C_2, E(u_1) - C_1, ..., E(u_{n_0}) - C_1\},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, (u_n) é limitada em $H^1(K)$. Portanto, existe uma subsequência (u_{n_j}) de (u_n) tal que $u_{n_j} \rightharpoonup u$ em $H^1(K)$. Usando novamente o fato de $H^1(K)$ está imerso compactamente em $L^q(K)$ para todo $2 \leq q < 2^*$, temos que $u_{n_j} \to u$ em $L^q(K)$, para todo $2 \leq q < 2^*$. Além disso, observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| |u_{n_j}|^{p-1} u_{n_j} \right|^{\frac{p+1}{p}} K dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_{n_j}|^{p+1} K dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} K dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left| |u|^{p-1} u \right|^{\frac{p+1}{p}} K dx,$$

ou seja, $|u_{n_j}|^{p-1} u_{n_j} \to |u|^{p-1} u$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(K)$. Por outro lado, pelo fato de $E'(u_{n_j}) \to 0$, temos que

$$E'(u_{n_j}).v \to 0, \quad \forall v \in H^1(K).$$

Assim,

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_{n_j} \nabla v K dx + \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{n_j}|^{p-1} u_{n_j} v K dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u_{n_j} v K dx \to 0,$$

para todo $v \in H^1(K)$. Logo, como $u_{n_j} \rightharpoonup u$ em $H^1(K)$, $u_{n_j} \to u$ em $L^{p+1}(K)$ e $u_{n_j} \to u$ em $L^2(K)$, temos que

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v K dx + \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} u v K dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u v K dx = 0,$$

para todo $v \in H^1(K)$. Portanto,

$$E'(u).v = 0, \quad \forall v \in H^1(K).$$

Dessa forma,

$$\left[E'(u_{n_j}) - E'(u)\right].(u_{n_j} - u) = E'(u_{n_j}).(u_{n_j} - u) - E'(u).(u_{n_j} - u) \to 0$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_{n_j} - u)|^2 K dx + \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_{n_j}|^{p-1}u_{n_j} - |u|^{p-1}u\right)(u_{n_j} - u) K dx \\ - \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u_{n_j} - u|^2 K dx \to 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Usando a desigualdade de Hölder e as convergências $|u_{n_j}|^{p-1}u_{n_j} \to |u|^{p-1}u$ em $L^{\frac{p+1}{p}}(K)$ e $u_{n_j} \to u$ em $L^2(K)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_{n_j}|^{p-1}u_{n_j} - |u|^{p-1}u\right)\left(u_{n_j} - u\right) K dx \to 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u_{n_j} - u|^2 K dx \to 0$$

Com isso, voltando a (3.5) temos

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_{n_j} - \nabla u|^2 K dx \to 0$$

Portanto, $u_{n_j} \to u$ em $H^1(K)$ e, assim, concluímos que E satisfaz a condição de Palais-Smale.

■

Até este momento, estamos enunciando e demonstrando resultados que nos ajudarão a mostrar a existência de soluções para o problema (3.1). Dando continuidade, abaixo segue mais um desses resultados.

Lema 3.5 *Para cada $i \in \mathbb{N}$ e $\lambda > \lambda_i$, definamos $C_i := \inf_{A \in \Gamma_i} \max_{u \in A} E(u)$, onde*

$$\Gamma_i := \left\{ \begin{array}{c} A \subset H^1(K) - \{0\};\ \textit{existe } h : S^{i-1} \to H^1(K) - \{0\} \textit{ satisfazendo,} \\ h \textit{ é ímpar, contínua e } h(S^{i-1}) = A \end{array} \right\}$$

e S^{i-1} é a esfera unitária i-dimensional. Seja $d_n(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} dim N(L - \lambda_j I)$. Então, para todo $i \in [1, d_n(\lambda)] \cap \mathbb{N}$ tem-se que $C_i \in \mathbb{R}$ e $C_i < 0$.

Demonstração: Como vimos na última proposição

$$\begin{aligned} E(u) &\geq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx + \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} K dx - C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} K dx\right)^{\frac{2}{p+1}} \\ &\geq \frac{1}{p+1}\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(K)} - C\|u\|^2_{L^{p+1}(K)}. \end{aligned}$$

Para o nosso propósito precisamos mostrar que existe $\widetilde{c} > 0$ tal que $E(u) \geq -\widetilde{c}$. Com este intuito, defina

$$\begin{aligned} g : [0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto g(t) &= \frac{1}{p+1} t^{p+1} - Ct^2. \end{aligned}$$

Pelo fato de $p > 1$ temos que $\lim_{t \to +\infty} g(t) = +\infty$. Note que $t_1 = 0$ e $t_2 = (C)^{\frac{1}{p-1}}$ são as duas únicas raízes de g e finalmente por $g'(t) = (p+1)t^p - 2Ct$, temos também que $t_1 = 0$ e $t_3 = (2C/(p+1))^{\frac{1}{p-1}}$ são os únicos pontos críticos de g e observando que $g'(t) < 0$ para $0 < t < t_3$ e $g'(t) > 0$ para $t > t_3$ segue que t_3 é o único ponto de mínimo absoluto de g. Além disso,

$$\begin{aligned} g(t_3) &= \left(\frac{2C}{p+1}\right)^{\frac{p+1}{p-1}} - C\left(\frac{2C}{p+1}\right)^{\frac{2}{p-1}} \\ &= \left(\frac{2C}{p+1}\right)^{\frac{2}{p-1}} \left[\frac{C - Cp}{p+1}\right] \\ &= -\widetilde{c} \leq 0, \end{aligned}$$

pois $p \geq 1$. Deste modo, para todo $m \in [1, d_i(\lambda)] \cap \mathbb{N}$, $C_m \geq -\widetilde{c}$. Desde que $i \in [1, d_i(\lambda)] \cap \mathbb{N}$, se $A \in \Gamma_i$, então $A = h(S^{i-1})$ é compacto e E atinge máximo $\widetilde{C}$ em A. Portanto,

$$-\widetilde{c} \leq C_i = \inf_{A \in \Gamma_i} \max_{u \in A} E(u) \leq \widetilde{C} < +\infty,$$

o que nos diz que $C_i \in \mathbb{R}$. Resta-nos mostrar que $C_i < 0$. Para isso, considere φ_j uma autofunção normalizada associada ao autovalor λ_j tal que $\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_j|^2 K dx = 1$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_j \varphi_l K dx = 0$ se $j \neq l$ e $1 \leq j, l \leq n$. Considere também o conjunto

$$A := \left\{ \sum_{j=1}^{i} \theta_j \varphi_j ; \ \sum_{j=1}^{i} \theta_j^2 = 1 \right\}.$$

Em seguida, definamos

$$\begin{aligned} f : S^{i-1} &\longrightarrow H^1(K) - \{0\} \\ x = (x_1, ..., x_i) \mapsto f(x) &= \sum_{j=1}^{i} x_j \varphi_j. \end{aligned}$$

Observa-se facilmente que f está bem definida e é contínua. Além disso, verifiquemos que f é injetiva, ímpar e $f(S^{i-1}) = A$.

Sejam $x, y \in S^{i-1}$ tais que $f(x) = f(y)$, então $\sum_{j=1}^{i} (x_j - y_j)\varphi_j = 0$, integrando

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{j=1}^{i} (x_j - y_j)\varphi_j \right] dx = 0$$

e, assim, como $\{\varphi_1, ..., \varphi_i\}$ é um conjunto linearmente independente em $L^2(K)$ temos que $x_j = y_j$, para todo $j = 1, ..., i$. Consequentemente, $x = y$ e, assim, concluímos que f é injetiva. Também observe que

$$f(-x) = \sum_{j=1}^{i}(-x_j)\varphi_j = -\sum_{j=1}^{i} x_j\varphi_j = -f(x),$$

isto é, f é uma função ímpar. Resta-nos mostrar que $f(S^{i-1}) = A$. Se $y \in f(S^{i-1})$, então existe $x \in S^{i-1}$ tal que $f(x) = f(y)$, ou seja,

$$\sum_{j=1}^{i} x_j^2 = 1, \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{i} x_j\varphi_j = y.$$

Assim, por definição de A tem-se que $y \in A$. Por outro lado, se $z \in A$ então

$$z = \sum_{j=1}^{i}\theta_j\varphi_j, \quad \text{com} \sum_{j=1}^{i}\theta_j^2 = 1,$$

donde $\theta = (\theta_1, ..., \theta_i) \in S^{i-1}$ e, assim, $z = f(\theta)$, concluindo que $z \in f(S^{i-1})$. Finalmente, depois de todas estas conclusões sobre f, chegamos que $A \in \Gamma_i$. Analogamente também temos que

$$\varepsilon A = \left\{\varepsilon\sum_{j=1}^{i}\theta_j\varphi_j; \ \sum_{j=1}^{i}\theta_j^2 = 1\right\} \in \Gamma_i, \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Dessa forma, se $\varphi \in \varepsilon A$, ou seja, existe $\theta = (\theta_1, ..., \theta_i) \in S^{i-1}$ tal que $\varphi = \varepsilon\displaystyle\sum_{j=1}^{i}\theta_j\varphi_j$, então

$$\begin{aligned}
E(\varphi) &= \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\Big|\sum_{j=1}^{i}\theta_j\nabla\varphi_j\Big|^2 Kdx - \frac{\lambda\varepsilon^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\Big|\sum_{j=1}^{i}\theta_j\varphi_j\Big|^2 Kdx \\
&\quad + \frac{\varepsilon^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}\Big|\sum_{j=1}^{i}\theta_j\varphi_j\Big|^{p+1} Kdx \\
&\leq \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{j=1}^{i}\theta_j^2|\nabla\varphi_j|^2 Kdx - \frac{\lambda\varepsilon^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{j=1}^{i}\theta_j^2\varphi_j^2 Kdx \\
&\quad + \frac{\varepsilon^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}\Big|\sum_{j=1}^{i}\theta_j\varphi_j\Big|^{p+1} Kdx \\
&= \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{j=1}^{i}\theta_j^2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi_j|^2 Kdx - \frac{\lambda\varepsilon^2}{2}\sum_{j=1}^{i}\theta_j\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_j^2 Kdx \\
&\quad + \frac{\varepsilon^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}\Big|\sum_{j=1}^{i}\theta_j\varphi_j\Big|^{p+1} Kdx
\end{aligned}$$

Por outro lado, desde que $\varphi_j \in Nuc(L - \lambda_j I)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\nabla\varphi_j\nabla v Kdx = \lambda\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_j v Kdx, \quad \forall\, v \in H^1(K).$$

Tomando $v = \varphi_j$ segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_j|^2 K dx = \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_j^2 K dx = \lambda_j.$$

Por outro lado, se tomarmos $v = \varphi_l$, com $l \neq j$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_l K dx = \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_j \varphi_l K dx = 0.$$

Desta forma, como a imersão $H^1(K) \hookrightarrow L^{p+1}(K)$ é compacta, $\theta_j \varphi_j \in H^1(K)$ e desde que $\lambda_j < \lambda_i$ tem-se

$$\begin{aligned} E(\varphi) &\leq \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{j=1}^{i} \theta_j^2 \lambda_j - \frac{\lambda \varepsilon^2}{2} \sum_{j=1}^{i} \theta_j^2 + \frac{\varepsilon^{p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} \Big| \sum_{j=1}^{i} \theta_j \varphi_j \Big|^{p+1} K dx \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2}(\lambda_i - \lambda) + \varepsilon^{p+1} \frac{2^p}{p+1} \sum_{j=1}^{i} \int_{\mathbb{R}^N} |\theta_j \varphi_j|^{p+1} K dx \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2}(\lambda_i - \lambda) + \varepsilon^{p+1} C(i), \end{aligned}$$

onde

$$C(i) \geq \frac{2^p}{p+1} \sum_{j=1}^{i} \int_{\mathbb{R}^N} |\theta_j \varphi_j|^{p+1} K dx > 0.$$

Relembrando que $\lambda > \lambda_i$ e tomando

$$0 < \varepsilon < \left(\frac{(p+1)(\lambda - \lambda_i)}{2C(i)} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

vê-se facilmente que

$$\max_{\varphi \in \varepsilon A} E(\varphi) < \frac{\varepsilon^2}{2}(\lambda_i - \lambda) + \varepsilon^{p+1} C(i) < 0.$$

De onde concluímos que

$$C_i = \inf_{B \in \Gamma_i} \max_{u \in B} E(u) \leq \max_{\varphi \in \varepsilon A} E(\varphi) < 0.$$

■

3.2 Multiplicidade de Soluções para o Problema Variacional

Com os resultados obtidos na seção anterior, estamos em condições de demonstrar um resultado de multiplicidade de soluções.

Teorema 3.6 *Sejam $\lambda > \lambda_i$, $1 < p < (N+2)/(N-2)$ e $d_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{i} dimNuc(L - \lambda_j I)$. Então, existem, ao menos, $2d_i(\lambda)$ soluções não triviais para o problema (3.1).*

Demonstração: Sejam $u \in H^1(K)$ e C_i e Γ_i como no lema anterior. Sabemos que $E \in C^1(H^1(K), \mathbb{R})$ é um funcional par que satisfaz a condição de Palais-Smale com $E(u) \geq -c$, para todo $u \in H^1(K)$. Além disso, como vimos no lema anterior existe $A \in \Gamma_{d_i(\lambda)}$ tal que A é homeomorfo à $S^{d(\lambda)-1}$ por uma função h ímpar e

$$\sup_{u \in A} E(u) \leq E(0) = 0,$$

temos, pelo Teorema A.18 do Apêndice A, que E possui ao menos $d(\lambda)$ pares distintos de pontos críticos, consequentemente (3.1) possui ao menos $2d(\lambda)$ soluções distintas não triviais. ■

Observação 3.7 *Sejam $p > 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in L^2(K)$. Quanto a existência de solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u - \dfrac{x.\nabla u}{2} + |u|^{p-1}u - \lambda u = f \\ u \in H^1(K) \cap L^{p+1}(K) \end{cases} \tag{3.6}$$

temos:

Como fizemos para o problema (3.1), o funcional associado a (3.6) é dado por:

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx + \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} K dx - \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K dx - \int_{\mathbb{R}^N} fuK dx.$$

Usando o Corolário 1.8, a desigualdade de Hölder e a imersão de $H^1(K)$ em $L^2(K)$, verifica-se que

$$\begin{aligned} F(u) &\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx + \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} K dx - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx \\ &\quad - \frac{C_1}{2}\left(\int_{B_R} |u|^{p+1} dx\right)^{\frac{2}{p+1}} - \int_{\mathbb{R}^N} fuK dx \\ &\geq \frac{1}{4}\|u\|^2_{H^1(K)} + \frac{1}{p+1}\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(K)} - \frac{C_1}{2}\|u\|^2_{L^{p+1}(K)} - \|f\|_{L^2(K)}\|u\|_{L^2(K)} \\ &\geq \frac{1}{p+1}\|u\|^{p+1}_{L^{p+1}(K)} - \frac{C_1}{2}\|u\|^2_{L^{p+1}(K)} + \frac{1}{4}\|u\|^2_{H^1(K)} - C_2\|u\|_{H^1(K)}. \end{aligned}$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas. Definindo

$$\begin{aligned} g : [0, +\infty) \times [0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, s) &\mapsto g(t, s) = \tfrac{1}{p+1}t^{p+1} - \tfrac{C_1}{2}t^2 + \tfrac{1}{4}s^2 - C_2 s, \end{aligned}$$

vê-se claramente que g é diferenciável e $q = (C_1^{\frac{1}{p-1}}, 2C_2)$ é o único ponto de mínimo de g. Além disso,

$$\lim_{s \to +\infty} g(t, s) = \lim_{t \to +\infty} g(t, s) = \lim_{|(t,s)| \to +\infty} g(t, s) = +\infty,$$

o que nos diz que g é limitada inferiormente. Consequentemente, observa-se a seguinte condição no infinito sobre F

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} F(u) = +\infty,$$

onde $\|u\| = \|u\|_{H^1(K)} + \|u\|_{L^{p+1}(K)}$. Além de obtermos também que F é limitada inferiormente. Sendo assim, existe $(u_n) \subset H^1(K) \cap L^{p+1}(K)$ tal que

$$F(u_n) \to \inf_{v \in H^1(K) \cap L^{p+1}(K)} F(v).$$

Observe que (u_n) é limitada em $H^1(K) \cap L^{p+1}(K)$, pois se $\|u_n\| \to +\infty$ teríamos que $F(u_n) \to +\infty$, o que não pode acontecer pois $F(u_n)$ é convergente. Deste modo, a menos de subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(K) \cap L^{p+1}(K)$. Em particular, $u_n \rightharpoonup u$ em $H^1(K)$. Novamente usando a imersão compacta de $H^1(K)$ em $L^2(K)$, temos que $u_n \to u$ em $L^2(K)$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 K dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 K dx \quad e \int_{\mathbb{R}^N} f u_n K dx \to \int_{\mathbb{R}^N} f u K dx.$$

Além disso, defina

$$\begin{aligned} h : H^1(K) \cap L^{p+1}(K) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto h(v) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 K dx + \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p+1} K dx \end{aligned}$$

e note que, devido a norma ser fracamente semicontínua inferiormente, h é fracamente semicontínua inferiormente em $H^1(K) \cap L^{p+1}(K)$. Com isto, temos

$$\begin{aligned} \inf_{v \in H^1(K) \cap L^{p+1}(K)} F(v) \leq F(u) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx + \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} K dx \\ &\quad - \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K dx - \int_{\mathbb{R}^N} f u K dx \\ &\leq \liminf_{n \to +\infty} g(u_n) - \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 K dx + \int_{\mathbb{R}^N} f u_n K dx \right) \\ &= \lim_{n \to +\infty} F(u_n) \\ &= \inf_{v \in H^1(K) \cap L^{p+1}(K)} F(v) \end{aligned}$$

Logo, $\inf_{v \in H^1(K) \cap L^{p+1}(K)} F(v) = F(u)$, o que nos diz que u é um ponto crítico de F e, portanto, uma solução fraca de (3.6).

Observe que para o estudo deste problema não foi necessário impormos limitações em $p > 1$ e nem em $\lambda \in \mathbb{R}$. Mas, é bom notar que não conseguimos multiplicidade de solução para (3.6).

Voltando ao estudo do problema (3.1), a seguir, veremos um resultado que garante, sob certas condições, que se u satisfaz (3.1) então $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$, ou seja, u é uma solução clássica.

Teorema 3.8 *Sejam $1 < p < (N+2)/(N-2)$ e $\lambda > N/2$. Se $u \in H^1(K)$ satisfaz o problema (3.1), então $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e existem constantes $C > 0$ e $\beta > 0$ tais que*

$$|u(x)| \leq Ce^{-\beta|x|^2} \quad e$$

$$|Du(x)| \leq Ce^{-\beta|x|^2}.$$

Demonstração: Seja $w = e^{|x|^2/8}u$ e observe que

$$\begin{aligned}\nabla u &= -\frac{1}{4}e^{\frac{-|x|^2}{8}}xw + e^{-\frac{|x|^2}{8}}\nabla w \quad \text{e}\\ \Delta u &= \frac{1}{16}e^{\frac{-|x|^2}{8}}|x^2|w - \frac{N}{4}e^{\frac{-|x|^2}{8}}w - \frac{1}{2}e^{\frac{-|x|^2}{8}}x.\nabla w + e^{\frac{-|x|^2}{8}}\Delta w.\end{aligned}$$

Como $-\Delta u - (1/2)(x.\nabla u) + |u|^{p-1}u = \lambda u$, temos

$$-\Delta w + \left(\frac{N}{4} - \lambda + \frac{|x|^2}{16} + e^{\frac{-(p-1)|x|^2}{8}}|w|^{p-1}\right)w = 0. \tag{3.7}$$

Definindo

$$V(x) := \frac{N}{4} - \lambda + \frac{|x|^2}{16} + e^{\frac{-(p-1)|x|^2}{8}}|w|^{p-1},$$

então, de (3.7), temos que

$$-\Delta w = -V(x)w.$$

Agora, seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ e defina

$$\begin{aligned} g : \Omega \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x, w) &\mapsto g(x, w) = -V(x)w(x)\end{aligned}$$

g claramente é Carathéodory e

$$|g(x, w)| = |V(x)||w| \leq |V(x)||w| + |V(x)| = |V(x)|(1 + |w|).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |V(x)|^{\frac{2^*}{p-1}}dx &= \int_\Omega \left|\frac{N}{4} - \lambda + \frac{|x|^2}{16} + e^{\frac{-(p-1)|x|^2}{8}}|w(x)|^{p-1}\right|^{\frac{2^*}{p-1}} dx\\ &\leq 2^{\frac{2^*}{p-1}}\int_\Omega \left|\frac{N}{4} - \lambda + \frac{|x|^2}{16}\right|^{\frac{2^*}{p-1}} dx + 2^{\frac{2^*}{p-1}}\int_\Omega e^{\frac{-2^*|x|^2}{8}}|e^{\frac{|x|^2}{8}}u(x)|^{2^*}dx\\ &< \infty,\end{aligned}$$

pois, $H^1(K)$ está imerso contiuamente em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, deste modo u restrito à Ω pertence à $L^{2^*}(\Omega)$ e assim, $|V(x)| \in L^{\frac{2^*}{p-1}}(\Omega)$. Observe também que $N/2 < 2^*/(p-1)$ e daí $|V| \in L^{N/2}(\Omega)$, para todo domínio limitado Ω de $\mathbb{R}^N$. Portanto pelo teorema de Brézis-Kato, $w \in L^q_{loc}(\Omega)$, para todo $q < \infty$. Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |-V(x)w(x)|^q dx &= \int_\Omega \left|\frac{N}{4} - \lambda + \frac{|x|^2}{16} + e^{\frac{-(p-1)|x|^2}{8}}|w(x)|^{p-1}\right|^q |w(x)|^q dx\\ &\leq 2^q\int_\Omega \left|\frac{N}{4} - \lambda + \frac{|x|^2}{16}\right|^q dx + 2^q\int_\Omega e^{\frac{-(p-1)q|x|^2}{8}}|w(x)|^{pq}dx\\ &< \infty,\end{aligned}$$

pois $w \in L^s(\Omega)$, para todo $s < \infty$. Como

$$-\Delta w + w = -V(x)w + w \in L^q(\Omega),$$

por Agmon-Douglas-Nirenberg, $w \in W^{2,q}(\Omega)$, para todo Ω domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ e portanto, $w \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Tomando $q > N/2$, pois nessas condições temos que, $W^{2,q}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\Omega)$, e assim $w \in C^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, com $0 < \alpha < 1$. Além disso, pelo fato de $e^{[-(p-1)|x|^2/8]} \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, tem-se que $V \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, logo $(-Vw + w) \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ e assim, pelo Teorema de Schauder , $w \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, para todo domínio Ω do $\mathbb{R}^N$, o que nos diz que, $w \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Portanto, $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Para mostrarmos o decaimento exponencial de u, é suficiente mostrarmos que $w \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. De fato, pois se $w \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos

$$\|w\|_\infty \geq |w(x)| = e^{\frac{|x|^2}{8}}|u(x)|$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Logo,

$$|u(x)| \leq Ce^{-\beta|x|^2}$$

onde $C = \|w\|_\infty$ e $\beta = 1/8$. Portanto mostremos que $w \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Seja $M = \max\limits_{x \in B[0,R]} |w(x)|$, onde $R = 4\sqrt{\lambda - N/4}$ e defina

$$\varphi(x) = (w(x) - M)^+, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^N.$$

φ pertence à $H^1(\mathbb{R}^N)$, de fato, tomando $\gamma = 1/4$ temos que $\gamma|\nabla\theta|^2 \leq \Delta\theta + \frac{1}{2}|\nabla\theta|^2$, pelo fato de $u \in H^1(K)$ temos da afirmação (1.10), que $w = K_{\frac{\theta}{2}}u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x)|^2 dx &= \int_{|x|>R} |w(x) - M|^2 dx \\
&\leq 4\int_{|x|>R} |w(x)|^2 dx \\
&\leq 4\int_{\mathbb{R}^N} |w(x)|^2 dx \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

pois $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$. Logo, $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Agora, observando que

$$\nabla\varphi = \begin{cases} \nabla w & ; \text{ se } w(x) > M \\ 0 & ; \text{ se } w(x) \leq M \end{cases}$$

temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 dx < \infty.$$

Portanto, $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Dessa forma, multiplicando a equação (3.7) por φ e integrando sobre o $\mathbb{R}^N$ temos

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \Delta w(x)\varphi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^N} V(x)w(x)\varphi(x)dx.$$

Usando integração por partes e fato de φ ser identicamente nula dentro da bola de centro zero e raio R, temos

$$\int_{|x|>R} \nabla w(x)\nabla\varphi(x)dx = -\int_{|x|>R} V(x)w(x)\varphi(x)dx. \tag{3.8}$$

Também observa-se que
$$V(x) > \frac{N}{4} - \lambda + \frac{|x|^2}{16} > 0$$
para $|x| > R$. Sendo assim, suponha que exista $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $\varphi(x_0) > 0$, ou seja, $w(x_0) > M$, pelo fato de φ ser contínua, existe $r > 0$ tal que $\varphi(x) > 0$, para todo $x \in B(x_0, r)$, consequentemente $w(x) > M \geq 0$, para todo $x \in B(x_0, r)$, claramente $B_r(x_0) \subseteq B_R^c$, já que $\varphi \equiv 0$ em B_R. Voltando a equação (3.8) temos que

$$\begin{aligned}
\int_{|x|>R} |\nabla\varphi(x)|^2 dx &= \int_{|x|>R} \nabla w(x)\nabla\varphi(x)dx \\
&= -\int_{|x|>R} V(x)w(x)\varphi(x)dx \\
&\leq -\int_{B(x_0,r)} V(x)w(x)\varphi(x)dx \\
&< 0.
\end{aligned}$$

O que é um absurdo, pois $|\nabla\varphi(x)|^2 \geq 0$. Logo, $\varphi(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e, portanto, $w(x) \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Além disso, observe que se w satisfaz (3.7), $-w$ também satisfaz, assim definindo

$$\psi(x) := (-w(x) - M)^+, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

e fazendo o mesmo procedimento que foi feito com φ, obtemos que $\psi(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ deste modo, $-w(x) \leq M$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Portanto,$|w(x)| \leq M$, concluindo que $w \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Para terminarmos a demonstração deste teorema resta-nos mostrar o decaimento exponencial da derivada de u. para este fim observe que, como u satisfaz

$$-\Delta u - \frac{1}{2}(x.\nabla u) + |u|^{p-1}u = \lambda u$$

derivando ambos os lados da equação acima, podemos fazer isto porque já vimos que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$, temos

$$-\Delta(\nabla u) - \frac{1}{2}x.\nabla(\nabla u) + p|u|^{p-1}\nabla u - \frac{1}{2}\nabla u = \lambda\nabla u.$$

Sendo $v = \nabla u$ temos
$$-\Delta v - \frac{1}{2}x.\nabla v + p|u|^{p-1}v - \frac{1}{2}v = \lambda v.$$

Agora, definindo $\widetilde{w} = e^{\frac{|x|^2}{8}}v$ obtemos

$$-\Delta\widetilde{w} + \left(\frac{N}{4} - \lambda - \frac{1}{2} + \frac{|x|^2}{16} + p|u|^{p-1}\right)\widetilde{w} = 0$$

Assim, como fizemos para mostrarmos o decaimento exponencial da u, basta mostrarmos que $\widetilde{w} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e isto segue extamente como fizemos para mostrar que $w \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Portanto, $|Du| = |v| \leq Ce^{-\beta|x|^2}$.

■

3.3 Unicidade de Solução Positiva para o Problema Variacional

O Teorema 3.6 nos deu condições para garantirmos a existencia de solução para o problema (3.1), já o teorema (3.8) nos disse que sob certas condições essa solução é de classe $C^2(\mathbb{R}^N)$ e além disso tem um decaimento exponencial. Contudo, o nosso próximo teorema nos dará condições para mostrarmos, além da existência, a unicidade de solução positiva para o problema (3.1). Para demonstrarmos tal resultado precisaremos do próximo lema

Lema 3.9 *Sejam $a, b > 0$ e $p > 1$. Então,*

$$(a+b)^p \geq a^p + b^p.$$

Demonstração: Observe, primeiramente, que

$$(a+b)^p \geq a^p + b^p$$

se, e somente se,

$$\left(\frac{a}{b}+1\right)^p - \left(\frac{a}{b}\right)^p - 1 \geq 0.$$

Dessa forma, defina

$$\begin{aligned} f : [0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t) &= (t+1)^p - t^p - 1 \end{aligned}$$

e note que $f(0) = 0$. Além disso, f claramente é diferenciável com

$$f'(t) = p(t+1)^{p-1} - pt^{p-1}.$$

Como $t + 1 > t$ e $p - 1 > 0$ temos que $(t+1)^p > t^p$, daí concluimos que $f'(t) > 0$, para todo $t \in [0, +\infty)$, ou seja, f é crescente, por $f(0) = 0$ temos que $f(t) > 0$, para todo $t > 0$. Portanto,

$$\left(\frac{a}{b}+1\right)^p - \left(\frac{a}{b}\right)^p - 1 \geq 0,$$

donde temos que

$$(a+b)^p \geq a^p + b^p.$$

■

Observação 3.10 *Podemos provar também que se $a, b \geq 0$ e $s < 1$ então,*

$$(a+b)^s \leq a^s + b^s.$$

Teorema 3.11 *Sejam $1 < p < 1 + (2/N)$ e $\lambda > \lambda_1 = N/2$. Então, o problema (3.1) tem uma única solução positiva.*

Demonstração: O Teorema 3.6, nessas condições, já nos garantiu a existência de solução não trivial e o teorema 3.8 nos disse que essa solução é clássica. Sendo assim observando que $E(u) \to +\infty$, quando $|u| \to +\infty$, concluímos a existêcia de $u_0 \in H^1(K)$ tal que u_0 é um mínimo absoluto do funcional E. Deste modo, é fácil ver que $|u_0|$ também é um mínimo absoluto para E, em particular, é uma solução não negativa para o problema (3.1).

Denotando $v = |u_0|$, afirmamos que v é positiva. De fato, suponhamos, por absurdo, que exista $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $v(x_0) = 0$. Então, fixando $R > 0$ de forma arbitrária e, considere $B_R(x_0)$. Além disso, como

$$-\Delta v - \frac{1}{2}(x.\nabla v) + |v|^{p-1}v = \lambda v \geq 0 \quad \text{em } B_R(x_0).$$

Então,

$$Tv \geq 0 \quad \text{em } B_R(x_0),$$

onde $Tu = -\Delta u - \frac{1}{2}(x.\nabla u) + c(x)u$ com $c(x) = |u(x)|^{p-1} \geq 0$. Observando que T é um operador diferencial elíptico com $c \geq 0$, pelo Princípio do Máximo Forte (veja Teorema A.19 do Apêndice A), v deve constante em $B_R(x_0)$ e, desde que $u(x_0) = 0$, temos que $u \equiv 0$ em $B_R(x_0)$. Como a bola foi arbitrária, então $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N$, o que é uma contradição. Logo, a solução é estritamente positiva em $\mathbb{R}^N$. Quanto a unicidade, suponha, por contradição, que existam u_1 e u_2 positivas satisfazendo o problema (3.1) com $u_1 \neq u_2$. Afirmamos que não existe w satisfazendo o problema (3.1) com $w \geq u_1$ e $w \geq u_2$. De fato, em primeiro lugar, como $u_1 \neq u_2$ temos que $w \neq u_1$ ou $w \neq u_2$, sem perda de generalidade podemos supor $w \neq u_1$. Assim

$$\begin{cases} Lw + w^p = \lambda w \\ Lu_1 + u_1^p = \lambda u_1 \end{cases}$$

Fazendo $(Lw + w^p = \lambda w)u_1K - (Lu_1 + u_1^p = \lambda u_1)wK$ e integrando sobre o $\mathbb{R}^N$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (Lw)u_1Kdx + \int_{\mathbb{R}^N} w^p u_1Kdx = \int_{\mathbb{R}^N} (Lu_1)wKdx + \int_{\mathbb{R}^N} u_1^p wKdx.$$

Usando integração por partes

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla u_1 Kdx + \int_{\mathbb{R}^N} w^p u_1Kdx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla u_1 Kdx + \int_{\mathbb{R}^N} u_1^p wKdx.$$

Logo, como $u_1, w > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{w^p}{w} u_1 wKdx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_1^p}{u_1} u_1 wKdx. \tag{3.9}$$

Por outro lado, como $w \geq u_1$ temos que $w^{p-1} \geq u_1^{p-1}$, pois $p > 1$, então $(w^p/w)u_1wK \geq (u_1^p/u_1)u_1wK$, usando o fato de $w \neq u_1$ e o Teorema 3.8, temos que $w, u_1 \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{w^p}{w} u_1 wKdx > \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u_1^p}{u_1} u_1 wKdx. \tag{3.10}$$

Das equações (3.9) e (3.10) obtemos uma contradição. Resta-nos mostrar, a partir de u_1 e u_2, a existência de uma tal w. Para isto, defina

$$w_0 = u_1 + u_2.$$

Como u_1 e u_2 são soluções de (3.1) temos que estes satisfazem

$$Lu_1 + u_1^p = \lambda u_1 \quad \text{e} \quad Lu_2 + u_2^p = \lambda u_2.$$

Somando estas duas equações temos

$$Lu_1 + Lu_2 + u_1^p + u_2^p = \lambda(u_1 + u_2).$$

Usando o lema anterior

$$L(u_1 + u_2) + (u_1 + u_2)^p \geq \lambda(u_1 + u_2).$$

Logo,

$$Lw_0 + w_0^p \geq \lambda w_0,$$

ou seja, w_0 é uma supersolução para (3.1). Sendo assim, considere o problema

$$Lu + |u|^{p-1}u = \lambda w_0. \tag{3.11}$$

Da mesma forma que obtemos solução para o problema na observação (3.7), encontramos solução para (3.11) e seguindo o mesmo raciocínio do teorema 3.8 para mostrar que as soluções de (3.1) são clássicas, mostramos que se $u \in H^1(K)$ satisfaz (3.11) então $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Seja w_1 tal solução, seguindo com este raciocínio, construimos uma sequência $(w_n) \subset H^1(K)$ tal que

$$Lw_{n+1} + |w_{n+1}|^{p-1}w_{n+1} = \lambda w_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{3.12}$$

Agora, observe que $w_n \geq 0$; para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Usaremos indução para mostrar esta afirmação. w_0 é claramente maior ou igual à zero, suponha que $w_1, ..., w_n$ também sejam e vejamos se $w_{n+1} \geq 0$. Suponha, por contradição, que exita $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $w_{n+1} < 0$, como w_{n+1} é contínua, existe $R > 0$ tal que se $x \in B(x_0, R)$ então $w_{n+1}(x) < 0$, sendo assim pela hipótese de indução temos

$$Lw_{n+1} + |w_{n+1}|^{p-1}w_{n+1} = \lambda w_n \geq 0,$$

Multiplicando a inequação acima por $(w_{n+1})K$ e integrando sobre $B(x_0, R)$ temos

$$\int_{B(x_0,R)} L(w_{n+1})w_{n+1}K dx \leq -\int_{B(x_0,R)} |w_{n+1}|^{p+1}K dx < 0.$$

Usando integração por partes temos que

$$\int_{B(x_0,R)} |\nabla w_{n+1}|^2 K dx < 0$$

O que é uma contradição, logo $w_{n+1} \geq 0$. Além disso, $w_n \leq w_{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Usaremos mais uma vez um argumento de indução para provar tal afirmação. Para $n = 1$, sabemos que

$$Lw_1 + w_1^p = \lambda w_0 \quad \text{e} \quad Lw_0 + w_0^p \geq w_0.$$

Subtraindo a segunda da primeira temos

$$L(w_0 - w_1) + w_0^p - w_1^p \geq 0.$$

Supondo, por absurdo, que exista $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $w_o(x_0) < w_1(x_0)$, deste modo, w_0 e w_1 são contínuas, exite $R > 0$ tal que $w_o(x) < w_1(x)$, para todo $x \in B(x_0, R)$. Multiplicando a inequação acima por $(w_0 - w_1)K$, integrando sobre $B(x_0, R)$ e usando o teorema de integração por partes temos que

$$\int_{B(x_0,R)} |\nabla(w_0 - w_1)|^2 K dx < 0,$$

o que é uma contradição. Portanto $w_1 \leq w_0$. Agora suponhamos que $w_n \leq w_{n-1} \leq ... \leq w_0$ e vejamos se $w_{n+1} \leq w_n$. Usando um argumento de contradição similar ao que foi usado logo acima chegamos que

$$\int_{B(x_0,R)} |\nabla(w_n - w_{n+1})|^2 K dx < 0$$

o que, novamente, é uma contradição. Logo, $w_{n+1} \leq w_n$. Com um argumento idêntico ao anterior mostramos também que $u_1, u_2 \leq w_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, fixando $x \in \mathbb{R}^N$ arbitrariamente, concluímos que $(w_n(x))$ é uma sequência real monótona limitada. Portanto, $w_n(x) \to w(x)$. Agora, para todo $n \in \mathbb{N}$, defina $v_n = e^{|x|^2/8} w_n$. Assim,

$$-\Delta v_{n+1} + V(x) v_{n+1} = \lambda v_n,$$

onde

$$V(x) = \frac{N}{4} + \frac{|x|^2}{16} + e^{\frac{-(p-1)|x|^2}{8}} |v_{n+1}|^{p-1}.$$

Considerando o problema

$$\begin{cases} -\Delta v_{n+1} + V(x) v_{n+1} = \lambda v_n, & \text{em } B_r \\ v_{n+1} = v_{n+1}, & \text{em } \partial B_r \end{cases};$$

onde B_r é uma bola com o raio r suficientemente grande. Como $w_n(x) \to w(x)$, temos que $v_n(x) \to v(x)$, com $v(x) = e^{|x|^2/8} w(x)$. Logo,

$$0 < u_1 e^{\frac{|x|^2}{8}} \leq v_n \leq w_0 e^{\frac{|x|^2}{8}} \leq C_1 = \max_{x \in B_r} w_0(x) e^{\frac{|x|^2}{8}};$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in B_r$. Assim, (v_n) é limitada em $L^\infty(B_r)$ e isto implica que (v_n) é limitada em $L^q(B_r)$, para todo $q \geq 1$. E mais, como $w_n \in C^2(B_r)$ tem-se também que $v_n \in C^2(B_r)$, então por Agmon-Douglas-Niremberg, $v_{n+1} \in W^{2,q}(B_r)$ e existe $C_2 > 0$ tal que

$$\|v_{n+1}\|_{W^{2,q}(B_r)} \leq C_2 \|v_n\|_{L^q(B_r)} < +\infty.$$

Logo, (v_n) é limitada em $W^{2,q}(B_r)$. Tomando q de tal forma que $N < q$ temos

$$v_n \in C^{2-[\frac{N}{q}]-1,\alpha}(B_r) = C^{1,\alpha}(B_r).$$

Sendo $\alpha = 1 - (N/2q)$, pois assim, $W^{2,q}(B_r) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(B_r)$ continuamente e assim existe $C_3 > 0$ tal que

$$\|v_n\|_{C^{1,\alpha}(B_r)} \leq C_3 \|v_n\|_{W^{2,q}(B_r)}$$

Temos que, $V v_n \in C^{1,\alpha}(B_r)$, então pelo teorema de Schauder $v_{n+1} \in C^{2,\alpha}(B_r)$ e existe $C_4 > 0$ tal que

$$\|v_{n+1}\|_{C^{2,\alpha}(B_r)} \leq C_4 \|v_n\|_{C^{0,\alpha}(B_r)} < +\infty.$$

Ou seja, (v_n) é limitada em $C^{2,\alpha}(B_r)$, e como $C^{2,\alpha}(B_r) \hookrightarrow C^2(B_r)$ compactamente temos que existe $\widetilde{v} \in C^2(B_r)$ tal que $v_n \longrightarrow \widetilde{v}$ em $C^2(B_r)$, e isto nos diz que

$$\|v_n - \widetilde{v}\|_\infty + \|\nabla v_n - \nabla \widetilde{v}\|_\infty + \|\nabla^2 v_n - \nabla^2 \widetilde{v}\|_\infty \longrightarrow 0,$$

donde temos que

$$\|v_n - \widetilde{v}\|_\infty \longrightarrow 0,$$

o que implica que (v_n) converge para $\widetilde{v}$ uniformemente e, consequentemente, pontualmente. Portanto, pela unicidade do limite, $v(x) = \widetilde{v}(x)$, para todo $x \in B_r$. Assim,

$$-\Delta v + Vv = \lambda v,$$

e, portanto,

$$-\Delta w - \frac{1}{2}x.\nabla w + w^p = \lambda w,$$

ou seja, w é uma solução positiva para (3.1) e $w \geq u_1, u_2$, gerando uma contradição, o que conclui a demonstração deste teorema. ∎

Capítulo 4

O Problema Crítico

4.1 Entendendo o Método

Brézis e Nirenberg, em [18], provaram que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u, & \text{em } \Omega \\ u > 0, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $p = (N+2)/(N-2)$, Ω é um domínio "starshaped" suave e limitado e $\lambda_1(\Omega)$ é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em Ω com condições de fronteira de Dirichlet, tem pelo menos uma solução para $0 < \lambda < \lambda_1(\Omega)$ quando $N \geq 4$ e não tem solução quando $\lambda \notin (0, \lambda_1(\Omega))$. No caso em que $N = 3$, mostraram que existe $\lambda^* > 0$ tal que (4.1) tem solução para $\lambda^* < \lambda < \lambda_1(\Omega)$. O argumento dos autores é baseado no fato de que

$$S_\lambda := \inf_{u \in H^1(\Omega)} \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \int_\Omega |u|^2; \ \int_\Omega |u|^{p+1} = 1 \right\}$$

é atingido sempre que $0 < S_\lambda < S_0 =: S$. Eles provaram que $S_\lambda \in (0, S)$, para $N \geq 4$ e $\lambda \in (0, \lambda_1(\Omega))$. Para isso, construiram uma sequência de funções $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) := \frac{\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 - \lambda \int_\Omega |u_\varepsilon|^2}{\|u_\varepsilon\|_{p+1}^2} < S$$

com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Estas funções u_ε são da forma:

$$u_\varepsilon(x) := \frac{\varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}},$$

onde $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ é uma função positiva fixada tal que $\varphi(x) = 1$ em alguma vizinhança de $0 \in \Omega$. Isto acontece porque a melhor constante de Sobolev $S := S_0$ é aproximada pelas funções testes $f_\varepsilon(x) = (\varepsilon + |x|^2)^{-(N-2)/2}$.

O nosso propósito neste capítulo é estabelecer condições suficientes para que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \dfrac{1}{2} x \nabla u = u^p + \lambda u, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ u > 0 \\ u \in H^1(K), \end{cases} \tag{4.2}$$

com $p = (N+2)/(N-2) = 2^* - 1$, tenha solução. A intensão é usar o método de Brézis e Nirenberg. Mas, neste caso, não sabemos nenhuma função teste aproximando o número

$$S(K) := \inf_{u \in H^1(K), u \neq 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} K\right)^{\frac{2}{2^*}}}.$$

Então, a idéia é comparar os números S e $S(K)$, S_λ e $S_\lambda(K)$, onde

$$S_\lambda(K) := \inf_{u \in H^1(K), u \neq 0} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K dx; \ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} K dx = 1 \right\}$$

e mostrar que, quando $N/4 < \lambda < N/2 = \lambda_1$, $S = S(K)$ e $S_\lambda(K) \geq S_\lambda$.

Para o caso $N \geq 4$, podemos mostrar que (4.2) tem uma solução quando $\lambda \in (N/4, N/2)$ e não tem solução quando $\lambda \notin (N/4, N/2)$. Para o caso $N = 3$, a situação é um pouco mais delicada, mas usando o mesmo tipo de argumentação, podemos mostrar que (4.2) tem uma solução para $\lambda \in (1, 3/2)$ e não tem solução quando $\lambda \leq 3/4$ ou quando $\lambda \geq 3/2$.

4.2 Resultados de Não Existência

Vejamos dois resultados de não existência de solução para o problema (4.2).

Teorema 4.1 *Sejam $N \geq 3$, $p = (N+2)/(N-2)$ e $\lambda \geq N/2$. Então, o problema (4.2) não possui solução positiva.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que exista $u > 0$ satisfazendo (4.2). Sabemos que

$$Lu = -\Delta u - \frac{1}{2} x.\nabla u = -\frac{1}{K} \nabla.(K \nabla u).$$

Assim, por (4.2) temos

$$-\nabla.(K\nabla u) = K|u|^{p-1}u + \lambda K u \tag{4.3}$$

Multiplicando (4.3) por φ_1 (primeira autofunção associada ao problema de autovalor) e integrando, obtemos

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \nabla.(K\nabla u)\varphi_1 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^{p-1}u + \lambda u\right) K\varphi_1 dx.$$

Usando integração por partes, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi_1 K dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^{p-1}u + \lambda u\right) K\varphi_1 dx. \tag{4.4}$$

Por outro lado, como φ_1 é a primeira autofunção associada ao problema de autovalor, temos

$$-\nabla.(K\nabla \varphi_1) = K\lambda_1 \varphi_1, \text{ em } \mathbb{R}^N. \tag{4.5}$$

Multiplicando (4.5) por u, integrando, aplicando o teorema de integração por partes e usando o fato de $\lambda_1 = N/2$, chegamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} K \nabla u \nabla \varphi_1 dx = \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} K u \varphi_1 dx. \tag{4.6}$$

Deste modo, por (4.4) e (4.6) temos que

$$0 < \int_{\mathbb{R}^N} K\varphi_1 |u|^{p-1} u dx = \left(\frac{N}{2} - \lambda\right) \int_{\mathbb{R}^N} K u \varphi_1 dx \leq 0,$$

pois $\lambda \geq N/2$ e $K, u, \varphi_1 > 0$, gerando assim uma contradição. Portanto, o problema (4.2) não tem solução se $\lambda \geq N/2$. ■

O próximo resultado de não existência é enunciado como segue:

Teorema 4.2 *Sejam $N \geq 3$, $p = (N+2)/(N-2)$ e $\lambda \leq N/4$. Seja também $u \in H^1(K)$ satisfazendo*

$$-\Delta u - \frac{1}{2} x.\nabla u = |u|^{p-1} u + \lambda u, \text{ em } \mathbb{R}^N. \tag{4.7}$$

Então, $u \equiv 0$.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que exista $u \in H^1(K)$, com $u \neq 0$ satisfazendo (4.7). Sendo assim, seja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ e

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1; & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0; & \text{se } |x| \geq 2, \end{cases}$$

com $|\nabla \varphi| \leq C$, onde C é uma constante positiva. Com isto, para todo $n \in \mathbb{N}$, defina

$$\varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Multiplicando (4.7) por $u\varphi_n$, obtemos

$$-(\Delta u) u \varphi_n - \frac{1}{2}(x \nabla u) u \varphi_n = |u|^{p+1} \varphi_n + \lambda |u|^2 \varphi_n$$

e integrando em $\mathbb{R}^N$, usando o teorema de integração por partes e o fato de $\nabla(u^2) = 2u\nabla u$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \varphi_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} u \nabla u \nabla \varphi_n dx - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u^2) x \varphi_n dx \\ = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^{p+1} + \lambda |u|^2\right) \varphi_n dx. \end{aligned} \tag{4.8}$$

É imediato ver que $\varphi_n \to g \equiv 1$ pontualmente em $\mathbb{R}^N$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \varphi_n dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^{p+1} + \lambda |u|^2\right) \varphi_n dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^{p+1} + \lambda |u|^2\right) dx.$$

Observando também que $\nabla \varphi_n(x) = (1/n) \nabla \varphi(x/n)$, pela desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} u \nabla u \nabla \varphi_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} 0 dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| |\nabla \varphi_n| |u| dx \\ &\leq \frac{C}{n} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| |u| dx \\ &\leq \frac{C}{n} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \to 0, \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$, pois $u \in H^1(K)$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\nabla u \nabla \varphi_n dx \to 0.$$

Fazendo uso de integração por partes mais uma vez, verificamos que

$$\begin{aligned} \left| -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla(u^2)] x \varphi_n dx \right| &= \left| \frac{N}{4} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 \varphi_n dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 x \nabla \varphi_n dx \right| \\ &\leq \frac{N}{4n} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u^2| \left| \frac{x}{n} \right| \left| \nabla \varphi_n \left(\frac{x}{n} \right) \right| dx. \end{aligned}$$

Assim, como $|x/n|\,|\nabla \varphi_n(x/n)| \leq C$ e, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ fixado, tem-se

$$\frac{x}{n} \nabla \varphi \left(\frac{x}{n} \right) \to 0,$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u^2| \left| \frac{x}{n} \right| \left| \nabla \varphi_n \left(\frac{x}{n} \right) \right| dx \to 0$$

e, portanto,

$$\left| -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u^2) x \varphi_n dx \right| \to 0$$

quando $n \to \infty$. Agora, fazendo $n \to \infty$ em (4.8) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{N}{4} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx. \tag{4.9}$$

Por outro lado, multiplicando (4.7) por $x_j \partial_j u \varphi_n$, integrando e usando integração por partes novamente, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (\partial_j u) x_j \varphi_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_j u|^2 \varphi_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi_n (\partial_j u) x_j dx \\ -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} x \nabla u (\partial_j u) x_j \varphi_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_j \left(\frac{|u|^{p+1}}{p+1} + \lambda \frac{|u|^2}{2} \right) x_j \varphi_n dx. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Mais uma vez usando integração por partes, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (\partial_j u) x_j \varphi_n dx = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \varphi_n dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 x_j \partial_j \varphi_n dx$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \partial_j \left(\frac{|u|^{p+1}}{p+1} + \lambda \frac{|u|^2}{2} \right) x_j \varphi_n dx = &- \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{|u|^{p+1}}{p+1} + \frac{\lambda}{2} |u|^2 \right) \varphi_n dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{|u|^{p+1}}{p+1} + \frac{\lambda}{2} |u|^2 \right) x_j \partial_j \varphi_n dx. \end{aligned}$$

Substituindo estas identidades na equação (4.10) e usando o Teorema da Convegência Dominada de Lebesgue como fizemos anteriormente, concluímos que

$$-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_j u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} (x \nabla u) x_j \partial_j u dx = - \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{|u|^{p+1}}{p+1} + \frac{\lambda}{2} |u|^2 \right) dx,$$

para todo $1 \leq j \leq N$. Logo,

$$\sum_{j=1}^{N}\left(-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx+\int_{\mathbb{R}^N}|\partial_j u|^2dx-\int_{\mathbb{R}^N}(x\nabla u)x_j\partial_j udx\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{N}\left[-\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{|u|^{p+1}}{p+1}+\frac{\lambda}{2}|u|^2\right)dx\right].$$

Assim,

$$\frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(x.\nabla u)^2dx=\frac{N}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}dx+\frac{N\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx. \quad (4.11)$$

A seguir, multiplicando (4.9) por $(N-2)/2$ e subtraindo (4.11), obtemos

$$\left(\frac{N-2}{2}-\frac{N}{p+1}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p+1}dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(x.\nabla u)^2dx=\left(\frac{N(N-2)}{8}+\lambda\right)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx.$$

Notando que

$$\frac{N-2}{2}-\frac{N}{p+1}=0,$$

tem-se

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(x.\nabla u)^2dx=\left(\frac{N(N-2)}{8}+\lambda\right)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx,$$

e desde que $u \neq 0$, pela desigualdade de Hardy, com $a = 0$, Corolário 1.15, temos

$$\frac{N^2}{8}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx<\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|x\nabla u|^2dx=\frac{N^2}{8}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx+\left(\lambda-\frac{N}{4}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx$$

o que nos diz que

$$\left(\lambda-\frac{N}{4}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx>0$$

e assim devemos ter $\lambda > N/4$, o que é uma contradição. Portanto, $u \equiv 0$. ■

4.3 Existência de Soluções para o Problema Crítico

Visto as condições necessárias em λ para que o problema (4.2) tenha solução, nosso propósito neste momento é mostrarmos que o problema (4.2) admite solução. Usaremos o método de Brézis e Nirenberg, esboçado na Secção 4.1, para determinar a existência de soluções. Nesta direção, para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $N \geq 3$, defina

$$S_\lambda(K) := \inf_{u\in H^1(K),\, u\neq 0} Q_\lambda(u) \quad (4.12)$$

em que

$$Q_\lambda(u) := \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2Kdx-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2Kdx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}Kdx\right)^{\frac{2}{2^*}}}.$$

O primeiro lema é o seguinte:

Lema 4.3 *Se $0 < S_\lambda(K) < S_0(K)$, então o ínfimo em (4.12) é atingido.*

Demonstração: Seja (u_j) uma sequência tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^{2^*} K dx = 1 \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N},$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 K dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^2 K dx \to S_\lambda(K).$$

Como $S_\lambda(K) < S_0(K)$, para j suficientemente grande, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 K dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^2 K dx < S_0(K). \tag{4.13}$$

Pela Desigualdade de Poincaré (Corolário 1.7), existe $\lambda_1(\theta) > 0$ tal que

$$\lambda_1(\theta) < \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K dx}$$

para todo $u \in H^1(K)$ com $u \neq 0$. Deste modo,

$$0 < \lambda_1(\theta) \leq \lambda_1 := \inf_{u \in H^1(K), u \neq 0} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K dx}.$$

Logo,

$$\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx,$$

para todo $u \in H^1(K)$. Utilizando a desigualdade acima em (4.13), obtemos

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 K dx < S_0(K). \tag{4.14}$$

Além disso, afirmamos que $\lambda_1 > \lambda$. De fato, por hipótese, temos que

$$0 < S_\lambda(K) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} K dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K dx, \tag{4.15}$$

para toda $u \in H^1(K)$, $u \neq 0$. Daí,

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K dx} \geq \lambda,$$

para toda $u \in H^1(K)$, $u \neq 0$, o que implica que $\lambda_1 \geq \lambda$. Agora, suponha que $\lambda_1 = \lambda$. Seja $(v_j) \subset H^1(K)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_j|^2 K dx \to \lambda, \quad \text{com} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |v_j|^2 K dx = 1, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Deste modo (v_j) é limitada em $H^1(K)$. Logo, a menos de subsequência, existe $v \in H^1(K)$ tal que $v_j \rightharpoonup v$ em $H^1(K)$ e, pela Proposição 1.6, $v_j \to v$ em $L^2(K)$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 K dx = 1.$$

Por outro lado,

$$\|v\|^2_{H^1(K)} \leq \liminf \|v_j\|^2_{H^1(K)} = \lambda,$$

donde conclui-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx = \lambda.$$

Tomando $u = v$ em (4.15), obtemos uma contradição. Assim, devemos ter $\lambda_1 > \lambda$ e a afirmação está provada. Por (4.14), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 K dx \leq \frac{S_0(K)}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}}.$$

Dessa forma, (u_j) é limitada em $H^1(K)$. Portanto, a menos de subsequência, $u_j \rightharpoonup u_0$ para alguma $u_0 \in H^1(K)$. Usando mais uma vez a Proposição 1.6, temos que $u_j \to u_0$ em $L^2(K)$. Logo,

$$u_j \to u_0 \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 K dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^2 K dx \to S_\lambda(K),$$

dado $0 < \varepsilon < S_0(K) - S_\lambda(K)$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $j > j_0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 K dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^2 K dx - S_\lambda(K) < \varepsilon$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^2 K dx &> \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 K dx - S_\lambda(K) - \varepsilon \\ &\geq S_0(K) - S_\lambda(K) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Daí, fazendo $j \to \infty$, segue que

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^2 K dx \geq S_0(K) - S_\lambda(K) - \varepsilon > 0,$$

o que nos diz que $u_0 \neq 0$. Agora, defina $w_j = u_j - u_0$. Deste modo, temos que $w_j \rightharpoonup 0$ em $H^1(K)$, $w_j \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e usando novamente que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_j|^2 K dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^2 K dx \to S_\lambda(K),$$

temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_j|^2 K dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla w_j \nabla u_0 K dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 K dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^2 K dx = S_\lambda(K) + o(1).$$

Como $w_j \rightharpoonup 0$ em $H^1(K)$ e $u_j \to u_0$ em $L^2(K)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_j|^2 K dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 K dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^2 K dx = S_\lambda(K) + o(1) \tag{4.16}$$

Além disso, pelo Lema de Brézis-Lieb (Lema A.17),

$$\begin{aligned} 1 = \|u_j\|_{L^{2^*}(K)}^{2^*} &= \|u_0 + w_j\|_{L^{2^*}(K)}^{2^*} \\ &= \|u_0\|_{L^{2^*}(K)}^{2^*} + \|w_j\|_{L^{2^*}(K)}^{2^*} + o(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{2^*} K dx + \int_{\mathbb{R}^N} |w_j|^{2^*} K dx + o(1). \end{aligned}$$

Assim,

$$1 = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} K dx + \int_{\mathbb{R}^N} |w_j|^{2^*} K dx + o(1) \right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Como $2/2^* < 1$, pela Observação 4.17, tem-se

$$1 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{2^*} K dx \right)^{\frac{2}{2^*}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |w_j|^{2^*} K dx \right)^{\frac{2}{2^*}} + o(1)$$

e desde que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |w_j|^{2^*} K dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{1}{S_0(K)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_j|^2 K dx,$$

temos

$$1 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{2^*} K dx \right)^{\frac{2}{2^*}} + \frac{1}{S_0(K)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_j|^2 K dx + o(1).$$

Multiplicando a desigualdade acima por $S_\lambda(K) > 0$, obtemos

$$S_\lambda(K) \leq S_\lambda(K) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{2^*} K dx \right)^{\frac{2}{2^*}} + \frac{S_\lambda(K)}{S_0(K)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_j|^2 K dx + o(1)$$

e, deste modo, voltando a equação (4.16), segue que

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{S_\lambda(K)}{S_0(K)}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_j|^2 K dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 K dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^2 K dx \\ \leq S_\lambda(K) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{2^*} K dx \right)^{\frac{2}{2^*}} + o(1). \end{aligned}$$

Como $1 - S_\lambda(K)/S_0(K) > 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 K dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^2 K dx \leq S_\lambda(K) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{2^*} K dx \right)^{\frac{2}{2^*}} + o(1).$$

Logo,

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 K dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^2 K dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{2^*} K dx \right)^{\frac{2}{2^*}}} \leq S_\lambda(K),$$

ou seja, $Q_\lambda(u_0) \leq S_\lambda(K)$. Mas $S_\lambda(K) = \inf_{u \in H^1(K), u \neq 0} Q_\lambda(u)$ e, portanto, devemos ter

$$Q_\lambda(u_0) = S_\lambda(K).$$

■

O próximo teorema fornece a existência de solução para o problema (4.2).

Teorema 4.4 *Suponha que exista $u_0 \in H^1(K)$, $u_0 \neq 0$, tal que $Q_\lambda(u_0) = S_\lambda(K)$. Então, existe uma solução para (4.2).*

Demonstração: Defina $F, G : H^1(K) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(u) := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 K dx \ , \ G(u) := \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} K dx$$

e

$$M := \left\{ w \in H^1(K); \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{2^*} K dx = 1 \right\}.$$

Pelos Lemas 3.2 e 3.3 temos que $F, G \in C^1(H^1(K), \mathbb{R})$. Assim, como podemos supor que $u_0 \in M$, pelo Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$F'(u_0).v = \mu G'(u_0).v,$$

para todo $v \in H^1(K)$. Então,

$$2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla v K dx - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} u_0 v K dx = 2^* \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{2^*-2} u_0 v K dx, \tag{4.17}$$

para todo $v \in H^1(K)$. Tomando $v = u_0$, obtemos

$$2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^2 K dx - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^2 K dx = 2^* \mu \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{2^*} K dx = 2^* \mu,$$

ou seja,

$$\mu = \frac{2}{2^*} F(u_0)$$

No Lema 4.3, vimos que $\lambda_1 > \lambda$. Daí, $F(u_0) > 0$ e, assim, concluímos que $\mu > 0$. Considerando $w = \mu^{\frac{1}{2^*-2}} u_0$, temos $u_0 = \mu^{\frac{-1}{2^*-2}} w$. Substituindo na equação (4.17), obtemos

$$2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_0 \nabla v K dx - 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} u_0 v K dx = 2F(u_0) \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{2^*-2} u_0 v K dx,$$

para todo $v \in H^1(K)$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla w \nabla v K dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} w v K dx = \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{2^*-2} w v K dx,$$

para todo $v \in H^1(K)$, isto é, w é uma solução fraca para

$$-\Delta u - \frac{1}{2} x . \nabla u = |u|^{2^*-2} u + \lambda u.$$

Como no Capítulo 3, w é uma solução clássica e não-negativa e aplicando o Princípio do Máximo forte, conclui-se que w é uma solução de (4.2). Isto finaliza a demonstração do teorema. ∎

De posse do teorema anterior e pelo Lema 4.3, para garantirmos a existência de solução para o problema (4.2) basta vermos sob que condições $0 < S_\lambda(K) < S(K) = S_0(K)$. Para este fim, obteremos os próximos resultados.

Lema 4.5 *Seja $N \geq 1$ e defina $\mathcal{H} := \left\{v \in H^1(K); |x|v \in L^2(\mathbb{R}^N)\right\}$. Então, se $uK^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{H}$ tem-se que $u \in H^1(K)$.*

Demonstração: Primeiramente, note que

$$\nabla(K^{\frac{1}{2}}u) = K^{\frac{1}{2}}\nabla u + \left(\frac{x}{4}\right)K^{\frac{1}{2}}u.$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 K dx = \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(K^{\frac{1}{2}}u)|^2 dx - 2\int_{\mathbb{R}^N}\nabla(K^{\frac{1}{2}}u)\frac{x}{4}K^{\frac{1}{2}}u dx + \int_{\mathbb{R}^N}\frac{|x|^2}{16}|u|^2 K dx$$

Como vimos na demonstração do Lema 1.5, temos

$$-2\int_{\mathbb{R}^N} v\nabla v\nabla\theta dx = \int_{\mathbb{R}^N} v^2\Delta\theta dx,$$

Tomando $v = K^{\frac{1}{2}}u$ e $\theta(x) = |x|^2/4$, obtemos

$$-2\int_{\mathbb{R}^N}\nabla(K^{\frac{1}{2}}u)\frac{x}{4}K^{\frac{1}{2}}u = \int_{\mathbb{R}^N}|u|^2 K\frac{N}{2}dx = \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2 K dx.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 K dx = \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(K^{\frac{1}{2}}u)|^2 + \frac{N}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2 K dx + \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^2|u|^2 K dx < +\infty,$$

pois $K^{\frac{1}{2}}u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $u \in L^2(K)$ e $|x|u \in L^2(K)$. Concluímos então que $u \in H^1(K)$. ∎

Lema 4.6 *Seja $N \geq 3$. Então,*

$$S(K) > S := \inf_{v \in H^1(\mathbb{R}^N), v \neq 0}\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2 dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|v|^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}.$$

Demonstração: Como vimos

$$S_0(K) = \inf_{u \in H^1(K), u \neq 0}\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 K dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}K dx\right)^{\frac{2}{2^*}}}.$$

Definindo, para cada $u \in H^1(K)$,

$$v := K^{\frac{1}{2}}u$$

temos que $v \in \mathcal{H}$. Usando novamente que

$$-2\int_{\mathbb{R}^N} v\nabla v\nabla\theta dx = \int_{\mathbb{R}^N} v^2\Delta\theta dx$$

e $\mathcal{H} \subseteq H^1(K)$, temos

$$\begin{aligned}
S(K) &= \inf_{u\in H^1(K),u\neq 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} K dx\right)^{\frac{2}{2^*}}} \\
&= \inf_{v\in\mathcal{H},v\neq 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla v - \left(\frac{x}{4}\right) v\right|^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*} K^{\frac{-2^*}{2}} K\right)^{\frac{2}{2^*}}} \\
&= \inf_{v\in\mathcal{H},v\neq 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx - 2\int_{\mathbb{R}^N} \dfrac{1}{4} x(\nabla v) v dx + \int_{\mathbb{R}^N} \dfrac{|x|^2}{16}|v|^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*} K^{\frac{-2}{N-2}}\right)^{\frac{2}{2^*}}} \\
&= \inf_{v\in\mathcal{H},v\neq 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{N}{4}\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dx + \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2|v|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*} K^{\frac{-2}{N-2}}\right)^{\frac{2}{2^*}}} \\
&\geq \inf_{v\in\mathcal{H},v\neq 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{N}{4}\int_{\mathbb{R}^N} |v|^2 dx + \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2|v|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}} \\
&\geq \inf_{v\in\mathcal{H},v\neq 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}} \\
&\geq S,
\end{aligned}$$

o que conclui a prova. ■

Teorema 4.7 *Seja $N \geq 4$ e $\lambda \in (N/4, N/2)$. Então,*

$$0 < S_\lambda(K) < S \leq S(K).$$

Demonstração: Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, com $\varphi(x) = 1$ se $|x| \leq 1$ e $\varphi(x) = 0$ se $|x| \geq 2$. Agora, para $\varepsilon > 0$, defina

$$v_\varepsilon(x) := \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} \quad \text{e} \quad u_\varepsilon(x) := K^{\frac{-1}{2}}\varphi(x)v_\varepsilon(x).$$

Assim, observe que

$$\nabla u_\varepsilon = \frac{-x}{4}K^{\frac{-1}{2}}\varphi v_\varepsilon + K^{\frac{-1}{2}}v_\varepsilon\nabla\varphi + K^{\frac{-1}{2}}\varphi\nabla v_\varepsilon.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^2 K dx =& \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{16}|x|^2 v_\varepsilon^2 - \frac{1}{2}x v_\varepsilon \nabla v_\varepsilon + |\nabla v_\varepsilon|^2\right)\varphi dx \\
&+ 2\int_{\mathbb{R}^N} \varphi\nabla\varphi\left(\nabla v_\varepsilon - \frac{1}{4}x v_\varepsilon\right) v_\varepsilon dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2 |v_\varepsilon|^2 dx \\
=& F_1 + F_2 + F_3,
\end{aligned}$$

onde

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{16}|x|^2 v_\varepsilon^2 - \frac{1}{2} x v_\varepsilon \nabla v_\varepsilon + |\nabla v_\varepsilon|^2 \right) \varphi dx, \\
F_2 &= 2\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \nabla \varphi \left(\nabla v_\varepsilon - \frac{1}{4} x v_\varepsilon \right) v_\varepsilon dx \quad \text{e} \\
F_3 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi|^2 |v_\varepsilon|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Além disso, note que $\nabla\varphi = 0$ se $|x| \leq 1$ ou se $|x| \geq 2$. Logo, se $\Omega = \overline{B_2} \setminus B_1$, temos

$$
F_2 + F_3 = 2\int_\Omega \varphi \nabla\varphi \left(\nabla v_\varepsilon - \frac{1}{4} x v_\varepsilon \right) v_\varepsilon dx + \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 |v_\varepsilon|^2 dx.
$$

Observando que

$$
\nabla v_\varepsilon(x) = \frac{-(N-2)x}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N}{2}}},
$$

temos

$$
\begin{aligned}
F_2 + F_3 =& 2\int_\Omega \varphi\nabla\varphi \left(\frac{-(N-2)x}{(\varepsilon+|x|^2)^{\frac{N}{2}}} - \frac{1}{4}\frac{x}{(\varepsilon+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} \right) \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} dx \\
&+ \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \left(\frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}} \right) dx.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
|F_2 + F_3| &\leq 2\int_\Omega \frac{(N-2)|\varphi||\nabla\varphi||x|}{(\varepsilon+|x|^2)^{\frac{N}{2}}(\varepsilon+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} dx + 2\int_\Omega \frac{|\varphi||\nabla\varphi||x|}{4(\varepsilon+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}(\varepsilon+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} dx \\
&\quad + \int_\Omega \frac{|\nabla\varphi|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}} dx \\
&\leq 2(N-2)\int_\Omega \frac{|\varphi||\nabla\varphi||x|}{|x|^{2N-2}} dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|\varphi||\nabla\varphi||x|}{|x|^{2N-4}} dx + 2\int_\Omega \frac{|\nabla\varphi|^2}{|x|^{2N-4}} dx \\
&= 2(N-2)\int_\Omega \frac{|\varphi||\nabla\varphi|}{|x|^{2N-1}} dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|\varphi||\nabla\varphi|}{|x|^{2N-3}} dx + 2\int_\Omega \frac{|\nabla\varphi|^2}{|x|^{2N-4}} dx \\
&< \infty,
\end{aligned}
$$

pois $N \geq 3$ e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Assim, $F_2 + F_3 = O(1)$. Por outro lado, para F_1, observe que

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2\varphi^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}} dx + \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2\varphi^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-1}} dx \\
&\quad + (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2\varphi^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx \\
&= I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned}
$$

onde

$$
I_1 = (N-2)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2\varphi^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx,
$$

$$I_2 = \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2\varphi^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-1}}dx \quad \text{e}$$

$$I_3 = \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2\varphi^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}}dx.$$

Desta forma, para I_1, temos

$$I_1 = (N-2)^2\int_{B_1} \frac{|x|^2\varphi^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N}}dx + (N-2)^2\int_{B_1^c} \frac{|x|^2\varphi^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N}}dx.$$

Como

$$\begin{aligned}(N-2)^2\int_{B_1^c} \frac{|x|^2\varphi^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N}}dx &\leq (N-2)^2\int_{\Omega} \frac{|x|^2\varphi^2}{|x|^{2N}}dx \\ &= (N-2)^2\int_{\Omega} \frac{dx}{|x|^{2N-2}} < \infty,\end{aligned}$$

tem-se

$$(N-2)^2\int_{B_1^c} \frac{|x|^2\varphi^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N}}dx = O(1).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(N-2)^2\int_{B_1} \frac{|x|^2\varphi^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N}}dx &= (N-2)^2\int_{B_1} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N}}dx \\ &= (N-2)^2\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N}}dx \\ &\quad -(N-2)^2\int_{B_1^c} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N}}dx \\ &= (N-2)^2\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N}}dx - O(1).\end{aligned}$$

e observando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N}}dx = \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(1+|x/\sqrt{\varepsilon}|^2)^{N}}dx$$

Além disso, note que $[|x|^2/(\varepsilon+|x|^2)^N]$ é integrável se, e somente se, $N \geq 3$. Deste modo, ultilizando a mudança de variável $y = (x/\varepsilon^{\frac{1}{2}})$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N}}dx = \varepsilon^{1-\frac{N}{2}}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^{N}}dx.$$

Então,

$$I_1 = (N-2)^2\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N}}dx = \varepsilon^{1-\frac{N}{2}}(A_1+O(1)); \quad \text{para } N \geq 3,$$

onde

$$A_1 = (N-2)^2\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^{N}}dx.$$

Com um procedimento análogo ao que fizemos com I_1, mostra-se que

$$I_2 = \varepsilon^{2-\frac{N}{2}}(A_2 + O(1)); \quad \text{para } N \geq 5,$$

com

$$A_2 = \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^{N-1}} dx$$

e

$$I_3 = \varepsilon^{3-\frac{N}{2}}(A_3 + O(1)); \quad \text{para } N \geq 7,$$

onde

$$A_3 = \frac{1}{16} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^{N-2}} dx.$$

Impomos estas limitações sobre N, pois, como fizemos para I_1, usamos o teorema de mudança de variável e, para I_2 e I_3, este resultado só pode ser ultilizado com estas restrições sobre N. Desta forma,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^2 K dx = \varepsilon^{1-\frac{N}{2}} \left(A_1 + \varepsilon A_2 + \varepsilon^2 A_3 + O(1)\right), \quad \text{se } N \geq 7.$$

Observe que a igualdade em I_3 acima só é válida para $N \geq 7$. Então, vejamos o que acontece com I_3 quando $N = 6$. Primeiramente, notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{16} \int_{|x|\leq 1} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^4} dx &= \frac{1}{16} \int_{|x|\leq 1} \frac{|x|^2 \varphi^2}{(\varepsilon+|x|^2)^4} dx \\
&\leq \frac{1}{16} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2 \varphi^2}{(\varepsilon+|x|^2)^4} dx \\
&= \frac{1}{16} \int_{|x|\leq 2} \frac{|x|^2 \varphi^2}{(\varepsilon+|x|^2)^4} dx \\
&\leq \frac{1}{16} \int_{|x|\leq 2} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^4} dx.
\end{aligned}$$

Além disso, para todo $R > 0$ dado, temos

$$\int_{|x|\leq R} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^4} dx = \int_0^R \left(\int_{S^5} \frac{r^2}{(\varepsilon+r^2)^4} dS \right) dr = w_5 \int_0^R \frac{r^7}{(\varepsilon+r^2)^4} dr.$$

Fazendo $s = \varepsilon + r^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\leq R} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^4} dx &= \frac{w_5}{2} \int_\varepsilon^{\varepsilon+R^2} \frac{(s-\varepsilon)^3}{s^4} ds = \frac{w_5}{2} \int_\varepsilon^{\varepsilon+R^2} \left[\frac{1}{s} - \frac{3\varepsilon}{s^2} + \frac{3\varepsilon^2}{s^3} - \frac{\varepsilon^3}{s^4} \right] ds \\
&= \frac{w_5}{2} \ln(s) \Big|_\varepsilon^{\varepsilon+R^2} + \frac{3\varepsilon w_5}{2} \frac{1}{s} \Big|_\varepsilon^{\varepsilon+R^2} - \frac{3\varepsilon w_5}{4} \frac{1}{s^2} \Big|_\varepsilon^{\varepsilon+R^2} + \frac{\varepsilon^3 w_5}{6} \frac{1}{s^3} \Big|_\varepsilon^{\varepsilon+R^2}.
\end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned}
\frac{3\varepsilon w_5}{2} \frac{1}{s} \Big|_\varepsilon^{\varepsilon+R^2} &= \frac{-3 w_5 R^2}{2(\varepsilon+R^2)} \\
&= \frac{-3}{2} w_5 < +\infty
\end{aligned}$$

e fazendo $\varepsilon \to 0$, concluímos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{3\varepsilon w_5}{2}\frac{1}{s} \,\Big|_{\varepsilon}^{\varepsilon+R^2} = \frac{-3}{2}w_5 = O(1) < +\infty.$$

De maneira análoga, mostra-se que

$$-\frac{3\varepsilon w_5}{4}\frac{1}{s^2} \,\Big|_{\varepsilon}^{\varepsilon+R^2} = O(1) \quad \text{e} \quad \frac{\varepsilon^3 w_5}{6}\frac{1}{s^3} \,\Big|_{\varepsilon}^{\varepsilon+R^2} = O(1).$$

Além disso,

$$\frac{w_5}{2}\ln(s) \,\Big|_{\varepsilon}^{\varepsilon+R^2} = \frac{w_5}{2}\ln(\varepsilon+R^2) - \frac{w_5}{2}\ln(\varepsilon).$$

Supondo $0 < \varepsilon < 1$, tem-se que $\ln(\varepsilon) < 0$ o que implica que $|\ln(\varepsilon)| = -\ln(\varepsilon)$. Logo,

$$\frac{w_5}{2}\ln(s) \,\Big|_{\varepsilon}^{\varepsilon+R^2} = O(1) + \frac{w_5}{2}|\ln(\varepsilon)|.$$

Dessa forma,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^2 K dx = \varepsilon^{-2}\left(A_1 + \varepsilon A_2 + \varepsilon^2 \frac{w_5}{3^2}|\ln(\varepsilon)| + O(1)\right), \qquad \text{para } N = 6.$$

Procedento da mesma forma para $\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^2 K dx$, temos

$$\begin{aligned}
\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^2 K dx &= \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}}dx \\
&= \lambda \int_{|x|\leq 1} \frac{\varphi^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}}dx + \lambda \int_{\Omega} \frac{\varphi^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}}dx,
\end{aligned}$$

em que $\Omega = B_2 - B_1$. Facilmente, observa-se que

$$\lambda \int_{\Omega} \frac{\varphi^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}}dx = O(1)$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\leq 1} \frac{\varphi^2}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}}dx &= \int_{|x|\leq 1} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}} - \int_{|x|>1} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}} + O(1).
\end{aligned}$$

Ultilizando o teorema de mudança de variável, vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-2}} = \varepsilon^{2-\frac{2}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{N-2}}, \qquad \text{para } N \geq 5.$$

Assim, concluímos que

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^2 K dx = \varepsilon^{2-\frac{2}{N}}\left(\lambda A_4 + O(1)\right); \quad \text{para } N \geq 5,$$

onde
$$A_4 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{N-2}}.$$
Fazendo o mesmo tipo de estimativa, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^{2^*} K dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi^{2^*} K^{\frac{-2}{N-2}}}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx \\
&= \int_{|x|\leq 1} \frac{K^{\frac{-2}{N-2}}}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx + \int_{\Omega} \frac{K^{\frac{-2}{N-2}} \varphi^{2^*}}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx \\
&= \int_{|x|\leq 1} \frac{K^{\frac{-2}{N-2}}}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx + O(1).
\end{aligned}$$

Ademais,

$$\int_{|x|\leq 1} \frac{K^{\frac{-2}{N-2}}}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx = \int_{|x|\leq 1} \frac{K^{\frac{-2}{N-2}} - 1}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx + \int_{|x|\leq 1} \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx.$$

Desde que

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\leq 1} \frac{K^{\frac{-2}{N-2}} - 1}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx &\leq \int_{|x|\leq 1} \frac{e^{\frac{-|x|^2}{2N-4}} - 1}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx \\
&\leq \int_{|x|\leq 1} \frac{e^{\frac{-|x|^2}{2N-4}} - 1}{(|x|^2)^N} dx \\
&= w_{N-1} \int_0^1 \frac{e^{\frac{-r}{2N-4}} - 1}{r} dr
\end{aligned}$$

e usando o teorema de mudança de variável com $s = r/(2N-4)$, temos

$$\int_{|x|\leq 1} \frac{K^{\frac{-2}{N-2}} - 1}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx \leq w_{N-1} \int_0^1 \frac{e^{-s} - 1}{s} ds.$$

Agora, defina $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$f(s) = \begin{cases} \dfrac{e^{-s}-1}{s} & ; \text{ se } s \neq 0 \\ -1 & ; \text{ se } s = 0. \end{cases}$$

Afirmamos que f é contínua. Basta mostrarmos que f é contínua em $s = 0$, pois f é claramente contínua para todo $s \neq 0$. Usando a regra de L'Hospital, segue que

$$\lim_{s\to 0} f(s) = \lim_{s\to 0} -e^{-s} = -1 = f(0).$$

Daí, definindo $g : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $g(s) = (e^{-s}-1)/s$ tem-se que $f = g$ q.t.p. em $[0,1]$ e

$$\int_0^1 g(s) ds = \int_0^1 f(s) ds < +\infty,$$

pois f é contínua no compacto $[0,1]$. Portanto,

$$\int_{|x|\leq 1} \frac{K^{\frac{-2}{N-2}}-1}{(\varepsilon+|x|^2)^N}dx = O(1).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_{|x|\leq 1} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^N} &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^N} - \int_{|x|>1} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^N}\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^N} - O(1).\end{aligned}$$

Usando o teorema da mudança de variável, do mesmo modo como foi feito anteriormente, chegamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^N} = \varepsilon^{\frac{-N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(1+|x|^2)^N}, \quad \text{para } N \geq 3.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^{2^*} K dx = \varepsilon^{\frac{-N}{2}} \left(A_0 + O(1)\right), \quad \text{para } N \geq 3$$

onde

$$A_0 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(1+|x|^2)^N}.$$

Daí,

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = \begin{cases} A_0^{-1+\frac{2}{N}} \left(A_1 + \varepsilon(A_2-\lambda A_4) + \varepsilon^2 A_3 + o(1)\right) & ; \text{ para } N \geq 7\\ A_0^{\frac{-2}{3}} \left(A_1 + \varepsilon(A_2-\lambda A_4) + \frac{1}{32} w_5 \varepsilon^2 \ln(\varepsilon) + o(1)\right) & ; \text{ para } N = 6.\end{cases}$$

Note que para $\lambda > N/4$ temos $A_2 < \lambda A_4$. De fato,

$$A_2 = \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2 dx}{(1+|x|^2)^{N-1}} = \frac{N-2}{2} w_{N-1} \int_0^\infty \frac{r^{N+1}dr}{(1+r^2)^{N-1}}$$

e integrando por partes, com $t = r^N$ e $ds = \dfrac{r}{(1+r^2)^{N-1}}dr$, obtemos

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{N}{4} w_{N-1} \int_0^\infty \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^{N-2}}dr\\ &< \lambda w_{N-1} \int_0^\infty \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^{N-2}}dr\\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{N-2}}\\ &= \lambda A_4.\end{aligned}$$

Assim, para $N \geq 7$,

$$\begin{aligned} Q_\lambda(u_\varepsilon) &= A_0^{-1+\frac{2}{N}} \left(A_1 + \varepsilon(A_2-\lambda A_4) + \varepsilon^2 A_3 + o(1)\right)\\ &< A_0^{-1+\frac{2}{N}} \left(A_1 + \varepsilon^2 A_3 + o(1)\right) \quad \text{(para } \varepsilon \text{ suficientemente pequeno)}\\ &\leq A_0^{-1+\frac{2}{N}} A_1.\end{aligned}$$

Para $N = 6$, com ε suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} Q_\lambda(u_\varepsilon) &= A_0^{\frac{-2}{3}}\left(A_1 + \varepsilon(A_2 - \lambda A_4)\frac{1}{32}w_5\varepsilon^2\ln(\varepsilon) + o(1)\right) \\ &< A_0^{\frac{-2}{3}}\left(A_1 + \frac{1}{32}w_5\varepsilon^2\ln(\varepsilon) + o(1)\right) \\ &\leq A_0^{\frac{-2}{3}}A_1. \end{aligned}$$

Assim, para $N \geq 6$, $\lambda > A_2/A_4$ e para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) < A_0^{-1+\frac{2}{N}}A_1.$$

Afirmação 4.8 $S = A_0^{-1+\frac{2}{N}}A_1$.

Tomemos como válida esta afirmação por enquanto. Faremos sua prova mais adiante. Desta forma,

$$S_\lambda(K) = \inf_{u\in H^1(K),\ u\neq 0} Q_\lambda(u) \leq Q_\lambda(u_\varepsilon) < A_0^{-1+\frac{2}{N}}A_1 = S,$$

para todo, $N \geq 6$ e $\lambda > N/4$. Resta-nos estudar os casos quando $N = 5$ e $N = 4$. Para $N = 5$, basta analisarmos a expressão I_3. Deste modo,

$$\begin{aligned} I_3 = \frac{1}{16}\int_{|x|<1}\frac{|x|^2dx}{(\varepsilon+|x|^2)^3} &= \frac{1}{16}\int_{|x|<1}\frac{|x|^2\varphi^2dx}{(\varepsilon+|x|^2)^3} \leq \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|x|^2\varphi^2dx}{(\varepsilon+|x|^2)^3} \\ &= \frac{1}{16}\int_{|x|<2}\frac{|x|^2\varphi^2dx}{(\varepsilon+|x|^2)^3} \leq \frac{1}{16}\int_{|x|<1}\frac{|x|^2dx}{(\varepsilon+|x|^2)^3} \\ &= \frac{w_4}{16}\int_0^2\frac{r^6dr}{(\varepsilon+r^2)^3} < \infty, \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Logo,

$$I_3 = \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|x|^2\varphi^2dx}{(\varepsilon+|x|^2)^3} = O(1)$$

e, portanto,

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = A_0^{\frac{-3}{5}}\left(A_1 + \varepsilon(A_2 - \lambda A_4) + o(1)\right).$$

Daí, concluímos

$$S_\lambda(K) \leq Q_\lambda(u_\varepsilon) < A_0^{\frac{-3}{5}}A_1 = S$$

Para $N = 4$, precisaremos analisar as expressões I_3 e I_2, de maneira análoga como fizemos acima. No caso $N = 5$, chegamos que $I_3 = O(1)$. Por outro lado, para I_2, temos

$$I_2 = \int_{|x|<1}\frac{|x|^2dx}{(\varepsilon+|x|^2)^3} \leq \int_{\mathbb{R}^N}\frac{|x|^2\varphi^2dx}{(\varepsilon+|x|^2)^3} \leq \int_{|x|<2}\frac{|x|^2dx}{(\varepsilon+|x|^2)^3}.$$

Usando o teorema da mudança de variável, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{|x|<2}\frac{|x|^2dx}{(\varepsilon+|x|^2)^3} &= \varepsilon^{\frac{-3}{2}}\int_{|x|<2\varepsilon^{\frac{-1}{2}}}\frac{|x|^2dx}{(1+|x|^2)^3} = \varepsilon^{\frac{-3}{2}}w_3\int_0^{2\varepsilon^{\frac{-1}{2}}}\frac{r^5dr}{(1+r^2)^3} \\ &= \frac{2\varepsilon^{\frac{-1}{2}}}{2}\int_1^{4\varepsilon^{-1}+1}\frac{(s-1)^2ds}{s^3} = \frac{2\varepsilon^{\frac{-1}{2}}}{2}\ln(4\varepsilon^{-1}+1) + O(1). \end{aligned}$$

Logo,

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2\varphi^2 dx}{(\varepsilon+|x|^2)^3} = \frac{2\varepsilon^{\frac{-1}{2}}}{2}\ln(4\varepsilon^{-1}+1)+O(1).$$

Com o mesmo tipo de procedimento anterior, também chegamos que

$$\lambda\int_{\mathbb{R}^N}|u_\varepsilon|^2 K dx = \lambda\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\varphi^2 dx}{(\varepsilon+|x|^2)^2} = \frac{w_3}{2}\varepsilon^{\frac{-3}{2}}\ln(4\varepsilon^{-1}+1)+O(1).$$

Assim,

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = A_0^{\frac{-1}{2}}\left(A_1 + \frac{\varepsilon^{\frac{-1}{2}}w_3}{2}\ln(4\varepsilon^{-1}+1)(1-\lambda)+o(1)\right),$$

e para $\lambda > 1 = N/4$ e ε suficientemente pequeno, temos

$$S_\lambda(K) \leq Q_\lambda(u_\varepsilon) < A_0^{\frac{-3}{5}}A_1 = S$$

Portanto, para $\lambda \in (N/4, N/2)$ e $N \geq 4$, concluímos que

$$0 \leq S_\lambda(K) < S \leq S(K).$$

Provemos, agora, a Afirmação 4.8. Em Brézis e Nirenberg [2], o número S é atingido pela função

$$U(x) := \frac{C}{(1+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}},$$

onde C é uma constante positiva. Um cálculo simples mostra que

$$\nabla U(x) = \frac{-C(N-2)x}{(1+|x|^2)^{\frac{N}{2}}},$$

donde

$$S = \frac{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|U|^{2^*}dx\right)^{\frac{2}{2^*}}} = \frac{C^2(N-2)^2\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|x|^2 dx}{(1+|x|^2)^N}}{C^2\left(\frac{dx}{(1+|x|^2)^N}\right)^{\frac{2}{2^*}}} = \frac{A_1}{A_0^{\frac{2}{2^*}}}.$$

Desde que $2/2^* = 1-2/N$, temos

$$S = A_0^{1-\frac{2}{N}}A_1,$$

o que finaliza a prova da afirmação e do teorema. ∎

Resta-nos, agora, analisar o caso $N=3$. Para esta dimensão, não temos conclusões para λ no intervalo $(3/4, 1]$. Mas, para $\lambda \in (1, 3/2)$, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4.9 *Sejam $N=3$ e $\lambda \in (1, 3/2)$. Então,*

$$0 < S_\lambda(K) < S \leq S(K).$$

Demonstração: Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que φ é esfericamente simétrica. Para todo $\varepsilon > 0$, definamos

$$v_\varepsilon(x) := \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{e} \quad u_\varepsilon(x) := K^{\frac{-1}{2}}\varphi(x)v_\varepsilon(x).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^2 K dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla\varphi|^2 dx}{(\varepsilon + |x|^2)} + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2\varphi^2 dx}{(\varepsilon + |x|^2)^3} + \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2\varphi^2 dx}{(\varepsilon + |x|^2)} \\ &- \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{2\varphi\nabla\varphi x dx}{(\varepsilon + |x|^2)} + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{2|x|^2\varphi^2 dx}{(\varepsilon + |x|^2)^2} - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{2\varphi\nabla\varphi x dx}{(\varepsilon + |x|^2)^2}.\end{aligned}$$

Usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}^N} \frac{2\varphi\nabla\varphi x dx}{(\varepsilon + |x|^2)^2} &= -\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\nabla(\varphi^2) x dx}{(\varepsilon + |x|^2)^2} = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^2 \nabla\left(\frac{x}{(\varepsilon + |x|^2)^2}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^2 \left(\frac{3(\varepsilon + |x|^2)^2 - 2(\varepsilon + |x|^2)2xx}{(\varepsilon + |x|^2)^4}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{3\varphi^2}{(\varepsilon + |x|^2)^2} dx - 4\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi^2|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^3}\end{aligned}$$

e de maneira análoga também segue que

$$-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{2\varphi\nabla\varphi x dx}{(\varepsilon + |x|^2)} = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{3\varphi^2}{(\varepsilon + |x|^2)} dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi^2|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^2} dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^2 K dx = &\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla\varphi|^2 dx}{(\varepsilon + |x|^2)} + \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2\varphi^2 dx}{(\varepsilon + |x|^2)} + 3\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi^2}{(\varepsilon + |x|^2)^3} dx \\ &+ \frac{3}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi^2}{(\varepsilon + |x|^2)} dx.\end{aligned}$$

No entanto, fazendo a mudança de variável $y = \dfrac{x}{\varepsilon^{1/2}}$, observamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi(x)|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^3} dx = \frac{1}{\varepsilon^3}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi(x)|^2}{\left(1 + |\frac{x}{\varepsilon^{1/2}}|^2\right)} dx = \varepsilon^{\frac{-3}{2}}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi(\varepsilon^{\frac{1}{2}}x)|^2 dx}{(1 + |x|^2)^3}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^2 K dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla\varphi|^2 dx}{(\varepsilon + |x|^2)} + \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2\varphi^2 dx}{(\varepsilon + |x|^2)} + 3\varepsilon^{\frac{-1}{2}}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi(\varepsilon^{\frac{1}{2}}x)|^2 dx}{(1 + |x|^2)^3} \\ &+ \frac{3}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi^2}{(\varepsilon + |x|^2)} dx.\end{aligned}$$

Além disso,

$$3\varepsilon^{\frac{-1}{2}}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi(\varepsilon^{\frac{1}{2}}x)|^2 dx}{(1 + |x|^2)^3} = \varepsilon^{\frac{-1}{2}}A_1 + 3\varepsilon^{\frac{-1}{2}}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi(\varepsilon^{\frac{1}{2}}x)|^2 dx}{(1 + |x|^2)^3} - \varepsilon^{\frac{-1}{2}}A_1,$$

onde
$$A_1 = 3\int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(\varepsilon+|x|^2)^3}.$$
Assim,
$$3\varepsilon^{\frac{-1}{2}} \frac{|\varphi(\varepsilon^{\frac{1}{2}}x)|^2 dx}{(1+|x|^2)^3} = \varepsilon^{\frac{-1}{2}} A_1 + 3\varepsilon^4 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi(x)|^2 - 1}{(\varepsilon+|x|^2)^3} dx$$
donde
$$\begin{aligned}
3\varepsilon^4 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi(x)|^2-1}{(\varepsilon+|x|^2)^3}dx &= 3\varepsilon^4 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi(x)|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^3}dx - 3\varepsilon^4 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^3}dx \\
&= 3\varepsilon^4 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi(x)|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^3}dx - 3\varepsilon^{\frac{5}{2}} w_2 \int_0^\infty \frac{r^2dr}{(1+r^2)^2} \\
&= O(1) + o(1).
\end{aligned}$$
Note também que
$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla\varphi|^2 dx}{(\varepsilon+|x|^2)} &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla\varphi|^2 dx}{|x|^2} + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{|\nabla\varphi|^2}{(\varepsilon+|x|^2)} - \frac{|\nabla\varphi|^2}{|x|^2} \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla\varphi|^2 dx}{|x|^2} + o(1).
\end{aligned}$$
Realizando um procedimento análogo ao anterior, obtemos
$$\frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2\varphi^2 dx}{(\varepsilon+|x|^2)} = \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^2 dx + o(1) \quad \text{e} \quad \frac{3}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi^2}{(\varepsilon+|x|^2)}dx = \frac{3}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi^2}{+|x|^2}dx + o(1)$$
Desta forma, concluímos que
$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^2 K dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla\varphi|^2 dx}{|x|^2} + \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2 dx + \frac{3}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi^2}{|x|^2}dx + A_1\varepsilon^{\frac{-1}{2}} + O(1)$$
Por outro lado,
$$\lambda\int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon(x)|^2 K dx = \lambda\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi|^2}{(\varepsilon+|x|^2)}dx = \lambda\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi|^2}{(\varepsilon+|x|^2)}dx + o(1),$$
e ultilizando o mesmo argumento ao que usamos no caso $N \geq 4$, obtemos
$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^{2^*} K dx = \varepsilon^{\frac{-3}{2}} (A_0 + O(\varepsilon))$$
onde
$$A_0 = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{(1+|x|^2)^3}.$$
Finalmente, concluímos que
$$\begin{aligned}
Q_\lambda(u_\varepsilon) =& \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla\varphi|^2 dx}{|x|^2} + \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^2 dx + \frac{3}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi^2}{|x|^2}dx}{\varepsilon^{\frac{-1}{2}} (A_0 + O(\varepsilon))^{\frac{1}{3}}} \\
&+ \frac{\varepsilon^{\frac{-1}{2}} A_1 - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi|^2 dx}{|x|^2} + O(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{-1}{2}} (A_0 + O(\varepsilon))^{\frac{1}{3}}} \\
=& S + \varepsilon^{\frac{-1}{2}} A_0^{\frac{-1}{3}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla\varphi|^2 dx}{|x|^2} + \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^2 dx + \left(\frac{3}{4} - \lambda\right)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi^2}{|x|^2}dx \right] + O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Tomando $\varphi(x) = e^{-|x|^2/8}$, temos $\nabla\varphi(x) = (-1/2)e^{-|x|^2/8}x$ e usando coordenadas polares e integração por partes, chegamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla\varphi|^2 dx}{|x|^2} + \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^2 dx = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi|^2}{|x|^2} dx.$$

Assim,

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) = S + \varepsilon^{\frac{-1}{2}} A_0^{\frac{-1}{3}} \left[(1-\lambda)\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi^2}{|x|^2} dx\right] + O(\varepsilon).$$

Portanto, se $\lambda > 1$ temos, para ε suficientemente pequeno, que

$$Q_\lambda(u_\varepsilon) < S.$$

■

Como consequência dos teoremas 4.7 e 4.9, seguem os seguintes resultados:

Corolário 4.10 *Sejam $N \geq 3$ e $\lambda^* := \max\{1, N/4\}$. Então,*

$$S\|u\|^2_{L^{2^*}(K)} + \lambda^*\|u\|^2_{L^2(K)} \leq 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx;$$

para toda $u \in H^1(K)$.

Demonstração: Primeiramente, note que a desigualdade é claramente satisfeita se $u = 0$. Se $u \neq 0$, observe que

$$S\|u\|^2_{L^{2^*}(K)} \leq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx}{\|u\|^2_{L^{2^*}(K)}} \|u\|^2_{L^{2^*}(K)} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx. \tag{4.18}$$

Além disso, como $S_\lambda(K) > 0$ temos que

$$\lambda\|u\|^2_{L^2(K)} < \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx,$$

para $\lambda > N/4$, se $N \geq 4$ e para $\lambda > 1$, se $N = 3$. Logo,

$$\lambda^*\|u\|^2_{L^2(K)} < \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx. \tag{4.19}$$

Desta forma, somando as desigualdade (4.18) e (4.19), obtemos

$$S\|u\|^2_{L^{2^*}(K)} + \lambda^*\|u\|^2_{L^2(K)} \leq 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx.$$

■

Corolário 4.11 *Sejam $N \geq 3$ e $2 \leq q \leq 2^*$. Então, se $1/q = a/2 + (1-a)/2$, existe $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^q(K)} \leq C\|u\|^a_{L^2(K)} \|\nabla u\|^{1-a}_{L^2(K)}.$$

Demonstração: Pela desigualdade de interpolação,

$$\|u\|_{L^q(K)} \leq \|u\|_{L^2(K)}^a \|u\|_{L^{2^*}(K)}^{1-a},$$

para todo $2 \leq q \leq 2^*$. Pelo corolário anterior, vimos que

$$S\|u\|_{L^{2^*}(K)}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 K dx$$

e isto implica que

$$\|u\|_{L^{2^*}(K)} \leq \frac{1}{\sqrt{S}} \|\nabla u\|_{L^2(K)}.$$

Voltando a desigualdade de Interpolação, concluímos que

$$\|u\|_{L^q(K)} \leq C\|u\|_{L^2(K)}^a \|\nabla u\|_{L^2(K)}^{1-a},$$

com $C = \dfrac{1}{(\sqrt{S})^{1-a}}$. ■

Apêndice A

Alguns Resultados Auxiliares e Definições

Aqui, seguem alguns resultados importantes para uma melhor compreensão de todo este trabalho. Aconselhamos ao leitor tomar conhecimento destes antes de começar a ler esta dissertação. Em alguns resultados, indicamos uma referência onde pode ser encontrada a demonstração.

Teorema A.1 *(**Valor Médio de Lagrange**) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, onde $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Se f é diferenciável em (a, b), existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema A.2 *(**Desigualdade de Hölder**) Seja Ω um domínio de $\mathbb{R}^N$. Suponha que $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

([1], pag. 92)

Teorema A.3 *(**Desigualdade de Interpolação**) Seja $f \in L^p \cap L^q$, com $1 \leq p < q \leq +\infty$, então, $\in L^r$ para todo $p \leq r \leq q$ e ainda vale a seguinte desigualdade*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha} \|f\|_q^{1-\alpha},$$

onde $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ e $0 \leq \alpha \leq 1$.
([1], pag. 93)

Teorema A.4 *(**Rellich-Kondrachov**) Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1. Então, temos as seguintes imersões compactas:*

$$\begin{aligned}
&W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \textit{para todo } q \in [1, p^*), \ \textit{onde } \ 1/p^* = 1/p - 1/N, \ \textit{se } p < N;\\
&W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \textit{para todo } q \in [p, +\infty), \quad \textit{se } p = N;\\
&W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}), \quad \textit{se } p > N.
\end{aligned}$$

([1], pag. 285)

Teorema A.5 *Sejam X um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sequência limitada de elementos de X. Então, existem uma subsequência (x_{nj}) de (x_n) e $x \in X$ tais que*

$$x_{nj} \rightharpoonup x,$$

em particular, se $u_n \rightharpoonup u$, temos que

$$\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|.$$

([6], pag. 639)

Teorema A.6 ***(Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)*** *Assuma que $1 \leq p < N$. Então existe uma constante $C > 0$, dependendo apenas de p e N, tal que*

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

para toda $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$.
([6], pag. 263)

Teorema A.7 *Sejam Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira C^1, $1 \leq p < N$. Então, existe $C > 0$, dependendo apenas de p, N e Ω tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
([6], pag. 265)

Teorema A.8 ***(Desigualdade de Morrey)*** *Seja $N < p \leq \infty$. Então, existe uma constante $C > 0$, dependendo apenas de p e N tal que*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},$$

para toda $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$, onde $\alpha := 1 - \dfrac{N}{p}$.
([6], pag. 266)

Teorema A.9 ***(Multiplicadores de Lagrange)*** *Sejam X um espaço de Banach, F e G funções de classe $C^1(X, \mathbb{R})$, e $x_0 \in X$ um extremo local de F restrito ao conjunto*

$$M := \{x \in X;\ G(x) = G(x_0) = c\}.$$

Se $G'(x_0) \neq 0$, ou seja $G'(x_0)w \neq 0$ para algum $w \in X$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x_0) = \lambda G'(x_0),$$

ou seja,

$$F'(x_0)w = \lambda G'(x_0)w, \quad \text{para todo } w \in X.$$

Teorema A.10 ***(Integração por Partes)*** *Sejam Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$ e $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Então,*

$$\int_\Omega u_{x_i} v dx = -\int_\Omega u v_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u v \nu^i dS.$$

([6], pag. 628)

Teorema A.11 ***(Coordenadas Polares)*** *Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ contínua e integrável. Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(x_0,r)} f dS \right) dr$$

para todo $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Em particular,

$$\frac{d}{dr} \left(\int_{\partial B(x_0,r)} f dx \right) = \int_{\partial B(x_0,r)} f dS$$

para todo $r > 0$.
([6], pag. 628)

Teorema A.12 ***(Convergência Dominadada de Lebesgue)*** *Sejam Ω um conjunto e (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ satisfazendo*
(a) $f_n(x) \to f(x)$, q.t.p. em Ω,
(b) existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo n natural, $|f_n(x)| \leq g(x)$, q.t.p. em Ω.
Então, $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_1 \to 0$.
([1], pag. 90)

Lema A.13 ***(Fatou)*** *Sejam Ω um conjunto e (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ satisfazendo*
(a) para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 0$, q.t.p. em Ω,
(b) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n dx < +\infty$.

Para quase todo $x \in \Omega$, definamos $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leq +\infty$. Então, $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega f dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n dx.$$

([1], pag. 90)

Teorema A.14 ***(Lax-Milgram)*** *Sejam H um espaço de Hilbert e $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então, dada $\varphi \in H'$, existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \varphi(v), \quad \text{para todo } v \in H.$$

Além disso, se a for simétrico, então

$$J(u) = \min_{v\in H} J(v),$$

onde $J(v) = \dfrac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)$.
([1], pag. 140)

Teorema A.15 ***(Brézis-Kato)*** *Sejam Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Carathéodory tal que, para quase todo $x \in \Omega$,*

$$|g(x,u)| \leq a(x)(1 + |u|),$$

para alguma função $a \in L^{N/2}_{loc}(\Omega)$. Seja também $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ uma solução de

$$-\Delta u = g(x,u) \quad \text{em } \Omega.$$

Então, $u \in L^q_{loc}(\Omega)$, para todo $q < +\infty$. Se $u \in H^1_0(\Omega)$ e $a \in L^{N/2}(\Omega)$, então $u \in L^q(\Omega)$, para todo $q < +\infty$.

Teorema A.16 *(**Agmon-Douglas-Nirenberg**) Suponha que Ω é de classe C^2 com fronteira limitada. Seja $1 < p < +\infty$, então para todo $f \in L^p(\Omega)$, então existe uma única solução $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ da equação*

$$-\Delta u + u = f, \quad \text{em } \Omega.$$

Além do mais, se Ω é de classe C^{m+2} e se $f \in W^{m,p}(\Omega)$, então existe $C > 0$ tal que

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega) \quad e \quad \|u\|_{W^{m+2,p}} \leq C\|u\|_{W^{m,p}}.$$

([1], pag. 316)

Lema A.17 *(**Brézis-Lieb**) Seja (f_n) uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$ tal que $f_n \to f$ q.t.p. Então, $f \in L^p(\Omega)$ e*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega [|f_n|^p - |f_n - f|^p]dx = \int_\Omega |f|^p dx.$$

Teorema A.18 *Sejam X um espaço de Banach e $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional par, limitado inferiormente e satisfazendo a condição de Palais-smale. Suponha que $F(0) = 0$ e que exista um conjunto $B \subset X$ tal que B é homeomorfo à S^{j-1} por uma função ímpar tal que $\sup_{x\in B} F(x) < 0$. Então, F possui ao menos j pares distintos de pontos críticos. ([13], pag. 53).*

Teorema A.19 *(**Princípio do Máximo Forte**) Seja T um operador diferencial parcial da forma*

$$Tu = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

onde as funções a_{ij}, b_i e c são contínuas e o operador T satisfaz a condição de elipticidade

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq C|\xi|^2, \text{ para alguma constante } C > 0.$$

Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $c \geq 0$ em Ω. Suponha que Ω seja conexo. Temos:

1. *Se $Tu \leq 0$ em Ω e u atinge um máximo não negativo em um ponto interior de $\overline{\Omega}$, então u é constante em Ω.*

2. *Se $Tu \geq 0$ em Ω e u atinge um mínimo não positivo em um ponto interior de $\overline{\Omega}$, então u é constante em Ω.*

([6], pag. 333)

Teorema A.20 *Sejam (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tais que*

$$\|f_n - f\|_p \to 0.$$

Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) de (f_n) e uma função $h \in L^p$ tais que
(a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω;
(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e q.t.p. em Ω.

([1], pag. 94)

Definição A.21 *Dizemos que $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é homogênea de grau p se*

$$f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda \geq 0$.

Teorema A.22 ***(Teorema de Euler para Funções Homogêneas)*** *Se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e homogênea de grau p, então*

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = pf(x),$$

onde $x = (x_1, ..., x_N)$.

Demonstração: Como f é homogênea de grau p, para todo $\lambda \geq 0$, temos

$$f(\lambda x_1, ..., \lambda x_N) = \lambda^p f(x_1, ..., x_N) \tag{A.1}$$

Agora, observe que, sendo $y = \lambda x$, ou seja, $y_i = \lambda x_i$ para $i = 1, ..., N$, temos, usando a regra da cadeia, que

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(y) = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial (\lambda x_i)}(\lambda x) x_i.$$

Dessa forma, derivando a equação (A.1) com relação a λ, obtemos

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial (\lambda x_i)}(\lambda x) x_i = p\lambda^{p-1} f(x).$$

Tomando $\lambda = 1$, segue o resultado desejado.

∎

Na próxima seção, faremos um estudo breve sobre a Transformada de Fourier, ferramenta fundamental no Capítulo 2 para obtermos informações sobre os autovalres do problema (2.3). Deixaremos as demonstrações dos resultados, exceto do Teorema A.24, a cargo do leitor e todas podem ser encontradas no Capítulo 9 de [9].

A.1 A Transformada de Fourier

Seja f uma função em $L^1(\mathbb{R}^N)$. A Transformada de Fourier de f é definida pela função $\widehat{f} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{\frac{-N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\xi . x} dx, \tag{A.2}$$

onde $\xi.x$ representa o produto interno em $\mathbb{R}^N$.

Teorema A.23 *A Transformada de Fourier, acima definida, é uma função contínua, limitada e satisfaz a desigualdade*

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq (2\pi)^{\frac{-N}{2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Dadas $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, a convolução de f e g é a função definida por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

A convolução de funções mensuráveis tem as seguintes propriedades algébricas:

1) $f * g = g * f$;
2) $\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$;
3) $(f * g) * h = f * (g * h)$;
4) $f * (g + h) = f * g + f * h$.

A relação entre a convolução e a Transformada de Fourier é dada pela expressão

$$(f * g)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi), \ \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Definimos o espaço de Schwarz como o conjunto das funções $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ tais que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty,$$

para todo par de multi-índices α e β. Na literatura, este espaço é chamado de *Espaço das Funções de Decaimento Rápido* e denotado por $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Pode-se mostrar que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Desta forma, podemos obter uma relação entre a derivada e a Transformada de Fourier, dada pelo resultado a seguir.

Teorema A.24 *Suponha que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Então, $\widehat{f} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ e vale que*

$$(-i)^{|\alpha|}(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = \xi^\alpha \widehat{f}(\xi)$$

e

$$(-i)^{|\alpha|}(x^\alpha f)^\wedge(\xi) = (\partial^\alpha \widehat{f})(\xi).$$

O resultado acima é de extrema importância para sabermos inverter a Transformada de Fourier, por isso apresentaremos um esboço de sua demonstração.

Demonstração: Note que $f^{(\alpha)} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, para todo multi-índice α. Agora, usando o teorema de integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^\wedge(\xi) &= (2\pi)^{\frac{-N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial f}{\partial x_i} e^{-i\xi x} dx \\ &= (2\pi)^{\frac{-N}{2}} i\xi \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= i\xi \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Integrando por partes $|\alpha|$ vezes, chegamos que

$$(-i)^{|\alpha|}(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = \xi^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

De maneira análoga, mostra-se que

$$(-i)^{|\alpha|}(x^\alpha f)^\wedge(\xi) = (\partial^\alpha \widehat{f})(\xi).$$

■

Teorema A.25 *Seja $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Então,*

$$f(x) = (2\pi)^{\frac{-N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi) e^{ix.\xi} d\xi, \ x \in \mathbb{R}^N.$$

De posse desta informação, podemos definir a transformada inversa como sendo

$$\check{f}(x) = (2\pi)^{\frac{-N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi) e^{ix\xi} d\xi,$$

para toda $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Referências Bibliográficas

[1] **H. Brézis**, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Rutgers University (2010).

[2] **H. Brézis** & **L. Nirenberg**, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents,* Communs pure and appl. Math. XXXVI (1983).

[3] **H. Brézis, L. Pelletier** & **D. Terman**, *A very singular solution of the heat equation with absorption.* University P. & M. Curie. Laboratoire d'Analyse Numérique, publication N° 84015.

[4] **F. Catrina, M. Furtado** & **M. Montenegro,** *Positive solutions for nonlinear elliptic equations with fast increasing weights,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 137 (2007), no. 6, 1157-1178.

[5] **M. Escobedo** & **O. Kavian**, *Variational Problems related to Self-Similar Solutions of the Heat Equation.* Nonlinear Anal. 11 (1987), no. 10, 1103-1133.

[6] **L. C. Evans**, *Partial Differential Equations*, Rhode Island: American Math. Society (1999).

[7] **D. Gilbarg** & **N. S. Trudinger**, Elliptic Partial Diferential Equations of Second Order, Springer-Verlag, Berlin, (1984).

[8] **A. Haraux** & **F. Weissler**, *Nonuniqueness for asemilinear initial value problem.* Idiana University. Math. J. 31, 167-189 (1982).

[9] **R. Iório** & **V. Iório**, *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*, Projeto Euclides [Euclid Project], 17. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1988.

[10] **O. Kavian**, *Introduction à la Théorie des Points Critiques*, Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], 13. Springer-Verlag, Paris, 1993.

[11] **S. Kesavan**, *Topics in Functional Analysis and Applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[12] **L. A. Medeiros** & **M. M. Miranda**, *Iniciação aos Problemas Elíticos Não Homogêneos,* Apostila Espaço de Sobolev, UFRJ,(2000).

[13] **P. H. Rabinowitz**, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Diferential Equations* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[14] **V. D. Radulescu** *Qualitative Analysis of Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations.* Contemporary Mathematics and Its Applications, 6. Hindawi Publishing Corporation, New York, 2008.

[15] **H. L. Royden** Real Analysis, Macmillan, New York (1968).

[16] **W. Rudin**, Funcional Analysis, Mc Graw-Hill, New York (1973).

[17] **M. Spivak**, *Calculus on Manifolds*, Benjamim, New York, 1965.

[18] **M. Willem**, *Minimax Theorems*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlim, (1996).