

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Estabilização da Equação de
Berger-Timoshenko como Limite Singular da
Estabilização Uniforme do Sistema de
Von-Kármán para Vigas

por

Pammella Queiroz de Souza

João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Estabilização da Equação de Berger-Timoshenko como Limite Singular da Estabilização Uniforme do Sistema de Von-Kármán para Vigas

por

Pammella Queiroz de Souza

sob orientação do

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do
Programa de Pós-Graduação em Matemática
- CCEN - UFPB, como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Matemática.

João Pessoa - PB

Agosto/2012

Estabilização da Equação de Berger-Timoshenko como Limite Singular da Estabilização Uniforme do Sistema de Von-Kármán para Vigas

por

Pammella Queiroz de Souza

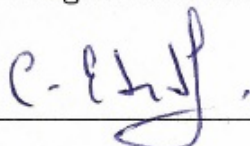
Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática
- CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

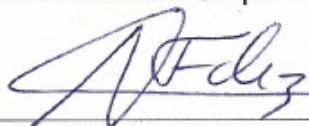
Aprovada por:



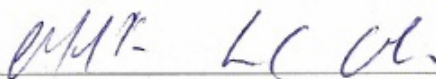
Prof. Dr. Fágner Dias Araruna - UFPB (Orientador)



Prof. Dr. Eduardo Esteban Cerpa Jeria - UTFSM - Chile



Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández - UFRJ



Prof. Dr. Milton de Lacerda Oliveira - UFPB (Suplente)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Agosto de 2012

S729e Souza, Pammella Queiroz de.

Estabilização da equação de Berger-Timoshenko como limite singular da estabilização uniforme do sistema de Von-Kármán para vigas / Pammella Queiroz de Souza. - João Pessoa: [s.n.], 2012.

84f.

Orientador: Fágner Dias Araruna.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Von Kármán . 3. Berger Timoshenko. 4. Estabilização uniforme.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pois sem seu amparo eu não poderia concretizar este objetivo.

Agradeço de forma especial ao amigo e professor Fágner Araruna, pela competente orientação, confiança, dedicação e pela disponibilidade em ajudar sempre com todo carinho.

Aos meus pais, Hadilson Anunciação e Maria de Fátima pelo constante incentivo ajudando a superar as minhas dificuldades e iluminando o caminho que Deus escolheu para mim.

Às minhas irmãs Pollyanna e Priscila que são meu alicerce e minha inspiração.

À Eduardo Esteban Cerpa Jeria, Adán José Corcho Fernández e Milton de lacerda Oliveira por prontamente aceitarem o convite de participarem da conclusão de mais esta estapa na minha jornada universitária.

À Cassiano Júnior (Zurêa), Deusimar Campos, João Edson (Little), Thayse Dias, Pedro Freire, Júnior Oliveira verdadeiros amigos cuja convivência e amizade serão inescutíveis.

Aos amigos e companheiros da UFPB: Guilherme, Reginaldo, David, Josenildo, Maurício pelas dúvidas esclarecidas, matemáticas ou computacionais, e pela agradável convivência. Em especial, agradeço a Yane, sempre tão amiga, tão meiga, ainda com a "distância" soube lidar com cada nova situação e compreender (me ensinar) como o carinho e afeto podem conquistar tantos sentimentos bons.

À minha irmãzinha Rosinângela, por tantas horas de estudos, tantas conversas, tantos sorrisos e presepadas, você é uma peça fundamental nessa minha vitória.

À Cecília e Gabriela, que foram especiais, cada uma com seu jeito, chegando e já

conquistando de vez minha atenção, carinho e amizade.

Ao meu namorado, Gustavo Araújo, pelas tentativas "frustradas" de ajudar no artigo, pela confiança no meu sucesso até mesmo quando eu duvidava, por ser tão presente na minha vida.

Aos professores da pós-graduação da UFPB: Antônio de Andrade, Elisandra Gloss, Bruno Henrique, Pedro Hinojosa, Carlos Bocker, Lizandro Challapa, Manassés Xavier pelos ensinamentos adquiridos durante o mestrado. Em especial ao Professor Uberlândio Severo, pela amizade, acolhimento e incentivo.

A Luciano dos Santos, Joselma Soares, Ana Alice Sobreira, Luiz Lima, Thiciany Matsudo, Carlos Eduardo, Roger Ruben e José Joelson por toda dedicação, competência, pelas valorosas contribuições a minha formação enquanto matemático e por apostarem tanto no meu sucesso.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

*Eu aprendi que posso ir além dos limites
que eu próprio me coloquei.*

William Shakespeare

Resumo

Consideramos a dinâmica unidimensional não linear do modelo de Von Kármán para vigas dependendo de um parâmetro $\varepsilon > 0$, e estudamos o seu comportamento assintótico para t grande, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Introduzindo mecanismos adequados de amortecimento, mostramos que a energia de soluções do correspondente modelo amortecido possui decaimento exponencial uniforme com respeito ao parâmetro ε . Afim de que seja verdadeiro, o mecanismo de amortecimento tem que ter a escala apropriada em relação a ε . No limite, quando $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos o modelo de Berger-Timoshenko para viga amortecida, bem como quando a energia tende exponencialmente para zero. Isso é feito tanto no caso de amortecimento interno e na fronteira.

Palavras-chave: Von Kármán; Berger Timoshenko, Estabilização Uniforme.

Abstract

We consider a dynamical one-dimensional nonlinear Von Kármán model for beams depending on the parameter $\varepsilon > 0$ and we study their asymptotic behavior for t large, when $\varepsilon \rightarrow 0$. Introducing appropriate damping mechanisms we show that the energy of solutions of the corresponding damped models decay exponential uniform with respect to the parameter ε . In order for this to be true the damping mechanism has to have the appropriate scale with respect to ε . In the limit as $\varepsilon \rightarrow 0$ we obtain damped Berger-Timoshenko beam model for which the energy tends exponentially to zero. This is done both in the case of internal and boundary damping .

Keywords: Von Kármán; Berger Timoshenko, Uniform Stabilization.

Sumário

Introdução	x
1 Notações e resultados	1
1.1 Espaços funcionais	1
1.2 Principais resultados utilizados	6
1.3 Teoria de semigrupos de operadores lineares	10
2 A equação da onda linear	17
3 Modelos de vigas: Amortecimento interno	22
3.1 Existência e unicidade de solução	23
3.2 Limite assintótico quando $\varepsilon \rightarrow 0$	32
3.3 Estabilização uniforme quando $\varepsilon \rightarrow 0$	38
3.4 Outras condições de fronteira	47
4 Modelos de vigas: Amortecimento na fronteira	50
4.1 Existência e unicidade de solução	50
4.2 Limite assintótico quando $\varepsilon \rightarrow 0$	53
4.3 Estabilização uniforme quando $\varepsilon \rightarrow 0$	55
5 Estudo das equações quando $\alpha = 0$	67
5.1 Limite assintótico: Amortecimento interno	67
5.2 Limite assintótico: Amortecimento na fronteira	70
Referências Bibliográficas	74

Introdução

Nos últimos anos, a estabilização de modelos matemáticos envolvendo estruturas flexíveis sujeitas a vibrações tem sido consideravelmente estimulada pelo número crescente de questões de interesse prático. Dentre esses modelos, podemos destacar aqueles relacionados à engenharia estrutural moderna, que requerem mecanismos de controle ativos para estabilizar estruturas intrinsecamente instáveis ou que possuem um amortecimento natural muito fraco, como por exemplo, os modelos que descrevem os deslocamentos de vigas e placas finas. Dentro desse mesmo contexto aplicado, os modelos acima mencionados ainda sugerem que se considere o efeito do calor atuando sobre toda a viga (ou placa) interagindo com os outros efeitos, o que nos leva a analisar a sensibilidade do material diante da variação de temperatura, ou seja, verificar se as variações de temperatura influenciarão as deformações do material em cada instante de tempo. Os modelos matemáticos que regem esse tipo de fenômeno são sistemas temporais hiperbólicos/parabólicos e, teoricamente, surge a questão de qual dos comportamentos, o parabólico ou o hiperbólico, vai determinar o perfil das soluções, como por exemplo, o comportamento assintótico, e qual das equações modificará o comportamento da outra.

Neste trabalho, mostramos a existência e unicidade de solução por meio da teoria de semigrupos. Essa teoria teve início em meados da década de 40 com os trabalhos de K. Yosida e E. Hille. Diversos outros matemáticos contribuíram para a consolidação da teoria, dentre eles, destacamos Lumer e Phillips. Uma das mais importantes aplicações de semigrupos de operadores ocorre na análise de problemas em equações diferenciais parciais. Essa teoria constitui uma forma elegante no trato dessas equações, em particular, sistemas de evolução. A principal forma de abordagem reside no fato de que, para alguns problemas, a solução para o problema de Cauchy abstrato associado ao problema em questão pode ser definida por semigrupo. Os Teoremas de Hille-Yosida e Lumer-Phillips

estabelecem condições para que isto ocorra.

Além disso, investigamos as propriedades de decaimento de soluções para vários modelos de vigas amortecidas. Recentemente, foi provado que o modelo de Berger-Timoshenko para vigas pode ser derivado como um limite singular do modelo de Von Kármán. Isso foi feito por Perla Menzala-Zuazua em [15] e [17], no caso conservativo e várias condições de fronteira. Aqui, a mesma análise é desenvolvida para os correspondentes de sistema amortecidos. Esse tipo de problema tem sido estudado tanto no caso em que o termo de amortecimento é "eficaz" no interior da viga quanto na fronteira. Nesse sentido, podemos mencionar, por exemplo, os trabalhos de Lagnese-Lengering [8] e Araruna-Braz e Silva-Zuazua [2].

É natural levantarmos a seguinte questão: Pode-se obter o amortecimento do modelo Berger-Timoshenko como um limite singular do modelo de Von Kármán de viga amortecida, de modo que as taxas de decaimento uniforme, permaneçam com um parâmetro singular tendendo a zero? De fato, a análise em [15] e [17] permite obtermos a convergência de soluções em intervalos de tempo limitados. No entanto, as propriedades de decaimento que temos em mente requer a análise de convergência quando o tempo t vai para infinito. Lembremos que o modelo de Berger-Timoshenko descreve uma vibração transversal de uma viga, enquanto que o sistema de Von Kármán também leva em conta as deformações longitudinais. Portanto, o problema está intimamente relacionado ao "eficiente" mecanismo de amortecimento que garante o decaimento uniforme de ambas as componentes, longitudinal e transversal, por meio de um processo de limite singular.

O problema que estamos analisando é apenas um exemplo de uma família inteira de problemas que surgem no contexto de "modelagem" de vibração. As conexões entre os vários modelos disponíveis para um dado problema mecânico pode ser muitas vezes descrito com precisão em termos matemáticos, por meio de uma análise singular "subjacente" do problema de perturbação. Nesse sentido, é interessante discutirmos o questionamento: Quais são os mecanismos de amortecimento que garantem o decaimento exponencial uniforme através do processo de limite singular? O problema pode ser fácil de resolver no contexto de equações parabólicas ou, mais geralmente, quando os modelos "básicos" tem uma natureza dissipativa intrínseca suficientemente forte. No entanto, muitas vezes, como é o caso nos exemplos que discutimos aqui, os modelos não são de natureza conservadora e o decaimento requer o uso dos mecanismos apropriados

de amortecimento na escala correta. Obviamente, para fins práticos, é desejável conseguir esta propriedade de decaimento uniforme com uma quantidade mínima de amortecimento tanto no que diz respeito ao seu apoio quanto na intensidade. Além disso, no contexto de sistemas acoplados (como é o caso do problema que estamos a tratar aqui, onde as vibrações longitudinais e transversais são acopladas) a fim de alcançar a propriedade de decaimento desejado, o mecanismo de amortecimento tem que ser concebido de uma forma apropriada no intuito de capturar todos os componentes do sistema. Por estas razões, a escolha certa de termos de amortecimento está longe de ser óbvia e requer uma análise cuidadosa, em cada caso particular.

A dependência da taxa de decaimento da quantidade de amortecimento é também sensível à possível presença de fenômenos "overdamping". Com efeito, é conhecido que, quando há um aumento na quantidade de amortecimento, além de um limite crítico, a taxa do decaimento pode decrescer, contrariando a primeira intuição. Portanto, a questão em consideração é ainda mais sutil, pois em uma primeira abordagem pode se pensar que o problema seria facilmente resolvido colocando uma quantidade suficientemente grande de amortecimento sob os sistemas em consideração. Porém, devido a esse fenômeno "overdamping", isto está longe da realidade.

A fim de tornar mais preciso o problema que temos em mente, vamos recordar essencialmente os trabalhos de Menzala-Zuazua em [15] e [17]. Nesses trabalhos, o seguinte sistema de Von Kármán para vibrações de vigas que ocupa o intervalo $(0, L)$ foi considerado

$$\begin{cases} \varepsilon v_{tt} - \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]_x = 0, & 0 < x < L, t > 0 \\ w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} - \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x = 0, & 0 < x < L, t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

sujeito a várias condições de contorno. Em (1) $w = w(x, t)$ representa a deformação transversal, $v = v(x, t)$ a longitudinal e $\varepsilon > 0$ é um parâmetro destinado a tender a zero. Com condições de fronteiras adequadas, o modelo (1) admite uma solução de energia finita $(v^\varepsilon, w^\varepsilon)$.

A energia do sistema dada por:

$$E_\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[w_t^2 + w_{xx}^2 + w_{xt}^2 + \varepsilon v_t^2 + \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 \right] dx, \quad (2)$$

tem caráter conservativo. Em [15] e [17] foi provado que, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e para condições de contorno apropriadas, a solução de (1) é tal que w^ε converge (em uma topologia adequada) para a solução do modelo de Berger-Timoshenko para vibrações transversais de vigas

$$w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} - \left(\frac{1}{2L} \int_0^L w_x^2 dx \right) w_{xx} = 0, \quad (3)$$

em que o "efeito" da componente longitudinal deu à integral não linear em (3). É importante notar que esse comportamento limite é muito sensível às condições de contorno. De fato, como mostrado em [17], para alguns casos, o limite w obedece a equação da viga linear

$$w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} = 0. \quad (4)$$

Há um termo muito natural para os modelos escalares da viga (3) e (4), a saber $w_t - w_{xxt}$. Assim, em vez de (3) e (4) podemos considerar os modelos amortecidos

$$w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} - \left(\frac{1}{2L} \int_0^L w_x^2 dx \right) w_{xx} + w_t - w_{xxt} = 0 \quad (5)$$

e

$$w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} + w_t - w_{xxt} = 0 \quad (6)$$

respectivamente. É bem conhecido que, com condições de contorno adequadas, a energia de soluções de (5) e (6) decai exponencialmente para zero quando $t \rightarrow \infty$. Portanto faz sentido pensar na seguinte questão: Qual é o mecanismo de amortecimento que devemos considerar em (1) de modo que, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, (1) recupera (5) ou (6) e tal que a energia de soluções do modelo amortecido corresponde ao decaimento exponencial uniforme (com respeito ao parâmetro ε)? Obviamente, um tal mecanismo amortecido tem também que amortecer a componente longitudinal v^ε do sistema (1). É então natural considerar sistemas da forma

$$\begin{cases} \varepsilon v_{tt} - \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]_x + \varepsilon^\alpha v_t = 0, & 0 < x < L, t > 0 \\ w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} - \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x + w_t - w_{xxt} = 0, & 0 < x < L, t > 0 \end{cases} \quad (7)$$

com $\alpha \geq 0$, em que a presença do termo $\varepsilon^\alpha v_t$ na primeira equação garante certa quantidade de amortecimento na componente longitudinal.

Esta dissertação foi realizada tomando como base os trabalhos de Perla Menzala-Pazoto-Zuazua [14], Perla Menzala-Zuazua [15] e Perla Menzala-Zuazua [17] e está organizada da seguinte forma:

No Capítulo 1 apresentamos os resultados clássicos que serão utilizados no desenvolvimento do trabalho.

No Capítulo 2 consideramos a equação da onda linear

$$\varepsilon u_{tt} - u_{xx} + \varepsilon^\alpha u_t = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (8)$$

onde os cálculos espectrais explícitos foram desenvolvidos de modo a obtermos a taxa de decaimento exponencial uniforme. A necessidade de escolher $0 \leq \alpha \leq 1$ aparece naturalmente nos cálculos.

No Capítulo 3, estudamos as propriedades fundamentais e assintóticas do sistema (7). Nesta finalidade, dividimos o capítulo em quatro seções. A primeira seção foi dedicada ao estudo da existência e unicidade de solução, onde fizemos uso da teoria de semigrupos de operadores lineares, que consiste em transformar o sistema (7) no problema equivalente de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U &= \mathcal{A}U + N(U) \\ U(0) &= U_0. \end{cases}$$

Daí, verificamos as condições impostas no Teorema de Hille-Yosida, com relação ao operador $\mathcal{A}$, de tal forma a considerá-lo um gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t>0}$ garantindo assim que

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)f(s, U(s))ds$$

representará a solução da equação de Cauchy. As segunda e terceira seções foram destinadas ao estudo assintótico do sistema, quando o parâmetro t tende ao infinito. Precisamente, na segunda seção, encontramos a equação de Berger-Timoshenko (3) como limite assintótico do sistema de Von-Kármán (7), quando t tende ao infinito, na topologia fraca. Na terceira seção mostramos ainda que, ao escolher $0 < \alpha \leq 1$, o decaimento exponencial uniforme da solução é garantido. Para isso, vamos utilizar o método que consiste em introduzir uma perturbação adequada de energia do sistema para o qual é capaz de

obter inequações diferenciais levando ao decaimento exponencial. No caso limite $\alpha = 0$ devemos ter que a taxa de decomposição é uniforme (com respeito a $\varepsilon \rightarrow 0$) para soluções com dados em bolas do espaço energia. Na quarta e última seção deste terceiro capítulo, dedicamos a fazer uma análise do sistema (7), agora com outras condições de fronteira.

No Capítulo 4 analisaremos o sistema (1) com amortecimento na fronteira, visto que este caso tem atraído muita atenção na última década. Em Lagnese-Leugering [8] um mecanismo de amortecimento para sistema da forma (1) (com $\varepsilon = 1$) foi introduzido e o decaimento exponencial de soluções foi provado. É bem conhecido que as soluções do modelo de Berger-Timoshenko (3) bem como para (4), com apropriados mecanismos de amortecimento na fronteira, decai exponencialmente. Portanto, é também natural investigar o comportamento da taxa de decaimento quando, $\varepsilon \rightarrow 0$, na presença de termos de amortecimento nas condições de contorno. Para isto, destinamos o Capítulo 4, que por sua vez está dividido em três seções. Na primeira seção, mostramos que o problema (1) está bem posto. A segunda seção está dedicada exclusivamente ao comportamento assintótico quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Finalmente, na terceira seção mostramos que a taxa de amortecimento uniforme decai exponencialmente (com $\varepsilon \rightarrow 0$) para solução de (1). No entanto, neste caso, o problema de derivação do limite assintótico (com $\varepsilon \rightarrow 0$) passa a ser regido pelas partes lineares da equação (3).

O Capítulo 5 é destinado à discussão do caso em que $\alpha = 0$, tanto no caso de amortecimento interno, quanto no caso em que temos um amortecimento de contorno. Usando argumentos semelhantes aos capítulos anteriores, mostramos que há um decaimento exponencial da energia, embora o sistema limite tenha algumas particularidades.

Capítulo 1

Notações e resultados

Neste capítulo fixaremos algumas notações e daremos definições e resultados essenciais à continuidade do trabalho.

1.1 Espaços funcionais

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e uma função contínua $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, define-se suporte de f , e denota-se por $\text{supp}(f)$, o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$. Assim, $\text{supp}(f)$ é um subconjunto fechado de Ω .

Uma n -upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é denominada de multi-índice e sua ordem é definida por $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Representa-se por D^α o operador de derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$, define-se $D^0 u = u$, para toda função u .

Por $C_0^\infty(\Omega)$ denota-se o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis definidas, e com suporte compacto, em Ω .

Um exemplo clássico de uma função de $C_0^\infty(\Omega)$ é dado por

Exemplo 1.1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto tal que $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$ compacta-*

mente contido em Ω . Consideremos $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}, & \text{se } \|x\| < 1 \\ 0, & \text{se } \|x\| \geq 1 \end{cases},$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ é a norma euclidiana de x . Temos que $f \in C^\infty(\Omega)$ e $\text{supp}(f) = \overline{B_1(0)}$ é compacto, isto é $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.1.1 Diz-se que uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando forem satisfeitas as seguintes condições:

- (i) Existe um compacto K de Ω tal que $\text{supp}(\varphi) \subset K$ e $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K , para todo multi-índice α .

Observação 1.1.1 É possível (ver Schwartz [20]) dotar $C_0^\infty(\Omega)$ com uma topologia de forma que a noção de convergência nessa topologia coincida com a dada pela Definição 1.1.1.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido da convergência acima definida, será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de Espaço das Funções Testes sobre Ω .

Uma distribuição (escalar) sobre Ω é todo funcional linear contínuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Mais precisamente, uma distribuição sobre Ω é um funcional $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$,
- (ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para φ , em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(T(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$, em $\mathbb{R}$.

É comum denotar o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi \rangle$.

O conjunto de todas as distribuições sobre Ω com as operações usuais é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Os seguintes exemplos de distribuições escalares desempenham um papel fundamental na teoria.

Exemplo 1.1.2 Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. O funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx,$$

é uma distribuição sobre Ω univocamente determinada por u (ver Medeiros-Miranda [11]). Por esta razão, identifica-se u à distribuição T_u por ela definida e, desta forma, $L^1_{loc}(\Omega)$ será identificado a uma parte (própria) de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo 1.1.3 Consideremos $0 \in \Omega$ e o funcional $\delta_0 : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Em [11], vê-se que δ_0 é uma distribuição sobre Ω . Além disso, mostra-se que δ_0 não é definido por uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$.

Definição 1.1.2 Diz-se que uma sequência $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando a sequência numérica $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ convergir para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.1.3 Sejam T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada $D^\alpha T$ (no sentido das distribuições) de ordem $|\alpha|$ de T é o funcional definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 1.1.2 Decorre da Definição 1.1.3 que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens.

Observação 1.1.3 $D^\alpha T$ é uma distribuição sobre Ω , onde $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De fato, vê-se facilmente que $D^\alpha T$ é linear. Agora, para a continuidade, consideremos $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Assim, $|\langle D^\alpha T, \varphi_n \rangle - \langle D^\alpha T, \varphi \rangle| \leq |\langle T, D^\alpha \varphi_n - D^\alpha \varphi \rangle| \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Observação 1.1.4 Vê-se em Medeiros-Rivera [12] que a aplicação $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $T \mapsto D^\alpha T$ é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dado um número inteiro $m > 0$, por $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, representa-se o espaço de Sobolev de ordem m , sobre Ω , das (classes de) funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$. $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial, qualquer que seja $1 \leq p < \infty$.

Munido das normas

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|, \text{ quando } p = \infty,$$

os espaços de sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços de Banach (vide Medeiros-Rivera [12]).

Observação 1.1.5 Quando $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H^m(\Omega)$, o qual munido do produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

é um espaço de Hilbert.

Consideremos no nosso trabalho o subespaço de $H^1(0, L)$ definido por

$$V = \{u \in H^1(0, L); \quad u(0) = 0\}.$$

Em Medeiros-Miranda [11] demonstra-se que a norma do gradiente e a norma do $H^1(0, L)$ são equivalentes em V . Assim, consideraremos V munido do produto interno e norma dados respectivamente por

$$((u, v)) = (u_x, v_x), \quad \|u\|^2 = |u_x|^2,$$

onde $(\cdot, \cdot)$ e $|\cdot|$ denotam, respectivamente, o produto interno e a norma em $L^2(0, L)$.

Dado um espaço de Banach X , denotaremos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções u , definidas em $]0, T[$ com valores em X , que são

fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X^p$ é integrável a Lebesgue em $]0, T[$, com a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representa-se o espaço de Banach das (classes de) funções u , definidas em $]0, T[$ com valores em X , que são fortemente mensuráveis e $\|u(t)\|_X$ possui supremo essencial finito em $]0, T[$, com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in]0,T[} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

Observação 1.1.6 Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0, T; X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

Consideremos o espaço $L^p(0, T; X)$, $1 < p < \infty$, com X sendo Hilbert separável, então podemos fazer a seguinte identificação

$$[L^p(0, T; X)]' \approx L^q(0, T; X'),$$

onde $(1/p) + (1/q) = 1$. Quando $p = 1$, faremos a identificação

$$[L^1(0, T; X)]' \approx L^\infty(0, T; X').$$

Essas identificações encontram-se detalhadamente em Lions [10].

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em X é denominado de Espaço das Distribuições Vetoriais sobre $]0, T[$ com valores em X e denotado por $\mathcal{D}'(0, T; X)$.

Definição 1.1.4 Dada $S \in \mathcal{D}'(0, T; X)$, define-se a derivada de ordem n como sendo a distribuição vetorial sobre $]0, T[$ com valores em X dada por

$$\left\langle \frac{d^n S}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Exemplo 1.1.4 Dadas $u \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, e $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$ a aplicação $T_u : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$, definida por

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(t) \varphi(t) dt,$$

integral de Bochner em X , é linear e contínua no sentido da convergência de $\mathcal{D}(0, T)$, logo uma distribuição vetorial. A aplicação $u \mapsto T_u$ é injetiva, de modo que podemos identificar u com T_u e, neste sentido, temos $L^p(0, T; X) \subset \mathcal{D}'(0, T; X)$.

Consideremos o espaço

$$W^{m,p}(0, T; X) = \{u \in L^p(0, T; X); u^{(j)} \in L^p(0, T; X), j = 1, \dots, m\},$$

onde $u^{(j)}$ representa a j -ésima derivada de u no sentido das distribuições vetoriais. Equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^m \|u^{(j)}\|_{L^p(0,T;X)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$W^{m,p}(0, T; X)$ é um espaço de Banach (vide Adams [1]).

Observação 1.1.7 Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $W^{m,p}(0, T; X)$ será denotado por $H^m(0, T; X)$, o qual, munido do produto interno

$$(u, v)_{H^m(0,T;X)} = \sum_{j=0}^m (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(0,T;X)},$$

é um espaço de Hilbert. Denota-se por $H_0^m(0, T; X)$ o fecho, em $H^m(0, T; X)$, de $\mathcal{D}(0, T; X)$ e por $H^{-m}(0, T; X)$ o dual topológico de $H_0^m(0, T; X)$.

1.2 Principais resultados utilizados

Lema 1.2.1 (Imersão de Sobolev) Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.

(i) Se $n > 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in \left[1, \frac{2n}{n-2m}\right]$.

(ii) Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty[$.

(iii) Se $n = 1$ e $m \geq 1$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Aqui o símbolo $\hookrightarrow$ denota imersão contínua.

Prova: Ver Brezis [4].

Lema 1.2.2 (Rellich-Kondrachov) *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular.*

(i) Se $n > 2m$, então $H^m(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^p(\Omega)$, onde $p \in \left[1, \frac{2n}{n-2m}\right]$.

(ii) Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, +\infty[$.

(iii) Se $2m > n$ então $H^m(\Omega) \xhookrightarrow{c} C^k(\overline{\Omega})$, onde k é um inteiro não negativo tal que $k < m - (n/2) \leq k + 1$.

Aqui o símbolo $\xhookrightarrow{c}$ denota imersão compacta.

Prova: Ver Brezis [4].

Teorema 1.2.1 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) *O conjunto $\mathcal{B}_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ é compacto pela topologia fraca $^* \sigma(E', E)$, onde E é um espaço de Banach.*

Prova: Ver Brezis [4].

Lema 1.2.3 (Du Bois Raymond) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então*

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .

Prova: Ver Medeiros-Rivera [12].

Lema 1.2.4 (Desigualdade de Poincaré) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Se $u \in H^1_0(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (1.1)$$

Observação 1.2.1 *Para o caso unidimensional, ou seja, $\Omega = (a, b)$, a constante da desigualdade (1.1) é $C = b - a$.*

Prova: Ver Adams [1] ou Brezis [4].

Lema 1.2.5 (Desigualdade de Young) *Sejam a, b constantes positivas, $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Prova: Ver Brezis [4].

Lema 1.2.6 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Prova: Ver Brezis [4].

Teorema 1.2.2 (Teorema do Traço) *A aplicação linear*

$$u \mapsto (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u) = \left(u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial \nu_A} \Big|_{\Gamma}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu_A^{m-1}} \Big|_{\Gamma} \right)$$

de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ em $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p}, p}(\Gamma)$, prolonga-se, por continuidade, a uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva de $W^{m,p}(\Omega)$ em $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p}, p}(\Gamma)$.

Prova: Ver Lions [10]. ■

Observação 1.2.2 *Note que para o caso unidimensional, isto é, $\Omega = (\alpha, \beta)$, se $u \in H^m(\alpha, \beta)$, então pelo Lema 1.2.2, $u \in C^{m-1}([\alpha, \beta])$. Logo faz sentido definir a função u e suas derivadas na fronteira, que no caso será $\Gamma = \{\alpha, \beta\}$.*

Proposição 1.2.1 *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ bem regular. Então a aplicação*

$$v \mapsto \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}$$

define em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ uma norma equivalente à norma em $H^2(\Omega)$.

Prova: Ver Medeiros-Miranda [13]. ■

Definição 1.2.1 Uma forma bilinear $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ é dita

(i) Contínua se existe uma constante C tal que

$$|b(u, v)| \leq C|u||v| \quad \forall u, v \in H;$$

(ii) Coerciva se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$b(v, v) \geq \alpha|v|^2 \quad \forall v \in H.$$

Teorema 1.2.3 (Lax-Milgram) Seja H um espaço de Banach e $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Para toda $\varphi \in H'$ existe um único $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica, u se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \quad e \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Prova: Ver Brezis [4]. ■

Teorema 1.2.4 Sejam X e Y espaços de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$ e $\mu \in L^p(0, T, X)$, $\mu' \in L^p(0, T; Y)$, $1 \leq p \leq \infty$, então $\mu \in C^0([0, T]; Y)$.

Prova: Ver Brezis [4]. ■

Teorema 1.2.5 (Compacidade Aubin-Lions) Suponha $X \subset B \subset Y$ com imersão compacta $X \rightarrow B$ onde X, Y e B são espaços de Banach e $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq r \leq \infty$. Seja F limitado em $L^p(0, T, X) \cap W^{s,r}(0, T, Y)$, onde $s > 0$ se $r \geq p$ e onde $s > \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$ se $r \leq p$. Então F é relativamente compacto em $L^p(0, T, B)$ (e em $C(0, T, B)$ se $p = \infty$).

Prova: Ver Simon [19]. ■

Teorema 1.2.6 Sejam E um espaço de Banach, E' seu dual e (f_n) uma sucessão de E' . Se $f_n \rightarrow f$ fraco $*$ em $\sigma(E', E)$, então $\|f_n\| \leq C$ e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

Prova: Ver Brezis [4]. ■

Teorema 1.2.7 (Banach-Steinhaus) *Sejam E e F dois espaços de Banach. Seja (T_n) uma sucessão de operadores lineares contínuos de E em F tais que para cada $x \in E$, $T_n x$ converge quando $n \rightarrow \infty$ a um limite que denotamos por T_x . Então tem-se:*

$$(i) \sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty,$$

$$(ii) T \in \mathcal{L}(E, F),$$

$$(iii) \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Prova: Ver Brezis [4]. ■

Teorema 1.2.8 (Gauss-Green) *Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então $\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\Gamma} u \nu^i d\Gamma$ ($i = 1, 2, \dots, n$).*

Prova: Ver Brezis [4]. ■

Teorema 1.2.9 (Fórmulas de Green) (i) *Se $\gamma \in H^2(\Omega)$, então $\int_{\Omega} \nabla \gamma \cdot \nabla u dx = - \int_{\Omega} u \Delta \gamma dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} u ds$, $\forall u \in H^1(\Omega)$.*

(ii) *Se $u, \gamma \in H^2(\Omega)$, então $\int_{\Omega} u \Delta \gamma - \gamma \Delta u dx = \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} - \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$.*

Prova: Ver Brezis [4]. ■

1.3 Teoria de semigrupos de operadores lineares

O objetivo desta seção é resumir a Teoria de Semigrupo e apresentar algumas definições relevantes para este trabalho.

Definição 1.3.1 *Seja X um espaço de Banach e $L(X)$ um operador linear e limitado de X . Uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \rightarrow L(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se*

$$(i) S(0) = I, \text{ onde } I \text{ é o operador identidade de } L(X);$$

$$(ii) S(t+s) = S(t)S(s), \forall t, s \in \mathbb{R}^+.$$

Definição 1.3.2 Dizemos que o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é de classe C^0 , ou fortemente contínuo, se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \| (S(t) - I)x \| = 0, \quad \forall x \in X.$$

Definição 1.3.3 Dizemos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é contínuo se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \| S(t) - I \| = 0, \quad \forall x \in X.$$

Teorema 1.3.1 Se $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0 , então existem constantes $w \geq 0$ e $M \geq 1$, tais que

$$\| S(t) \| \leq M e^{wt}, \quad \forall t \geq 0$$

Prova: Ver Pazy [18]. ■

Corolário 1.3.1 Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 . Então, para cada $x \in X$, a aplicação

$$\begin{aligned} f_x : \mathbb{R}^+ &\rightarrow X \\ t &\rightarrow f_x(t) = S(t)x \end{aligned}$$

é contínua. Equivalentemente, para cada $x \in X$,

$$\lim_{t \rightarrow s} S(t)x = S(s)x, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+.$$

Prova: Ver Pazy [18]. ■

Definição 1.3.4 Seja $\mathcal{A}$, operador em X , um espaço de Banach. Denominaremos o conjunto resolvente de $\mathcal{A}$, o conjunto

$$\rho(\mathcal{A}) = \{ \lambda \in \mathbb{C}; \quad w \mapsto (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}w \in \mathcal{L}(X) \},$$

onde

$$\mathcal{L}(X) = \{ L : X \rightarrow X; \quad \text{é linear e contínuo} \}.$$

Definição 1.3.5 Denominaremos de espectro de $\mathcal{A}$ o conjunto

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A}).$$

Definição 1.3.6 Um semigrupo $S(t)$ em X , onde $0 \leq t < \infty$, é dito Semigrupo de Contrações, se

$$\|S(t)\| \leq 1 \text{ para todo } t \geq 0.$$

Definição 1.3.7 O operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \longrightarrow X$ definido por

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ existe} \right\}$$

e

$$\mathcal{A}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x, \forall x \in D(\mathcal{A})$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S .

Observação 1.3.1 Note que $\mathcal{A}$ é um operador linear e $D(\mathcal{A})$ é um subespaço de X .

Teorema 1.3.2 Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e $\mathcal{A}$ seu gerador infinitesimal. Então,

(i) Para todo $x \in X$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)x ds = S(t)x;$$

(ii) Para todo $x \in X$, $\int_0^t S(s)x ds \in D(\mathcal{A})$ e

$$\mathcal{A} \left(\int_0^t S(s)x ds \right) = S(t)x - x;$$

(iii) Para todo $x \in D(\mathcal{A})$, $S(t)x \in D(\mathcal{A})$ e

$$\frac{d}{dt} S(t)x = \mathcal{A}S(t)x = S(t)\mathcal{A}(x);$$

(iv) Para todo $x \in D(\mathcal{A})$,

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(\tau)\mathcal{A}(x)d\tau = \int_s^t \mathcal{A}S(\tau)(x)d\tau$$

Prova: Ver Pazy [18]. ■

Proposição 1.3.1 Um operador fechado com domínio denso é o gerador infinitesimal de, no máximo, um semigrupo de classe C_0 .

Prova: Ver Gomes [7]. ■

Teorema 1.3.3 *Se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 , então $\mathcal{A}$ é um operador linear fechado e $\overline{D(\mathcal{A})} = X$.*

Prova: Ver Pazy [18]. ■

Teorema 1.3.4 *Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ semigrupos de classe C_0 com geradores infinitesimais $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente. Então $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ se, e somente se, $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.*

Prova: Ver Pazy [18]. ■

Definição 1.3.8 *Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e $\mathcal{A}$ seu gerador infinitesimal. Colocando $\mathcal{A}_0 = I$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ e supondo que $\mathcal{A}_{k-1}$ esteja definido, vamos definir $\mathcal{A}_k$ por*

$$D(\mathcal{A}_k) = \{x \in D(\mathcal{A}_{k-1}) : \mathcal{A}_{k-1}x \in D(\mathcal{A})\},$$

$$\mathcal{A}_k x = \mathcal{A}(\mathcal{A}_{k-1}x), \forall x \in D(\mathcal{A}_k).$$

Proposição 1.3.2 *Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal. Se $D(\mathcal{A}_k)$ é o domínio do operador $\mathcal{A}_k$, então $\bigcap_k D(\mathcal{A}_k)$ é denso em X .*

Prova: Ver Pazy [18]. ■

Definição 1.3.9 *Seja X um espaço de Banach, X^* o dual de X e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre X e X^* . Para cada $x \in X$, definimos*

$$J(x) = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Pelo Teorema de Hanh-Banach, $J(x) \neq \emptyset, \forall x \in X$.

Definição 1.3.10 *Uma aplicação dualidade é uma aplicação $j : X \longrightarrow X^*$ tal que $j(x) \in J(x), \forall x \in X$, além disso*

$$\|j(x)\| = \|x\|.$$

Definição 1.3.11 Dizemos que o operador linear $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \longrightarrow X$ é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade, j

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}x, j(x) \rangle \leq 0, \forall x \in D(\mathcal{A}).$$

Se, além disso, existir $\lambda > 0$, tal que $\operatorname{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) = X$, então dizemos que $\mathcal{A}$ é m -dissipativo.

Observação 1.3.2 Se X é um espaço de Hilbert, então dizemos que $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$ é dissipativo se

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}x, x \rangle \leq 0, \forall x \in D(\mathcal{A}).$$

Definição 1.3.12 Dizemos que o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \longrightarrow X$ é maximal se $\operatorname{Im}(I + \mathcal{A}) = X$, isto é, para toda $f \in X$, existe $u \in D(\mathcal{A})$ tal que $(I + \mathcal{A})(u) = f$.

Teorema 1.3.5 (Hille-Yosida) Um operador linear $\mathcal{A}$, sobre um espaço de Banach X , é um gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações se, e somente se,

(i) $\mathcal{A}$ é fechado e $\overline{D(\mathcal{A})} = X$;

(ii) O conjunto resolvente $\rho(\mathcal{A})$ contém $\mathbb{R}^+$ e para todo $\lambda > 0$, temos

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Prova: Ver Pazy [18]. ■

Teorema 1.3.1 (Lumer-Phillips) Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{A}$ um operador linear com domínio denso em X .

(i) $\mathcal{A}$ é dissipativo e existe um número real $\lambda_0 > 0$ tal que $\operatorname{Im}(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$. Então, $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre X .

(ii) Se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre X . Então, $\operatorname{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) = X$ para todo $\lambda > 0$ e $\mathcal{A}$ dissipativo.

Prova: Ver Pazy [18]. ■

Corolário 1.3.2 *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear fechado, densamente definido tal que $D(\mathcal{A})$ e $\text{Im}(\mathcal{A})$ estão ambos num espaço de Banach X . Se $\mathcal{A}$ e seu operador dual $\mathcal{A}^*$ são ambos dissipativos, então $\mathcal{A}$ gera um semigrupo de contrações de classe C_0 .*

Prova: Ver Pazy [18]. ■

Teorema 1.3.6 *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear dissipativo em X . Se $\overline{D(\mathcal{A})} = X$ então, $\mathcal{A}$ é fechado.*

Prova: Ver Pazy [18]. ■

Teorema 1.3.7 *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear dissipativo, tal que $\text{Im}(I - \mathcal{A}) = X$. Então, se X é reflexivo, temos que $\overline{D(\mathcal{A})} = X$*

Prova: Ver Pazy [18]. ■

Consideremos o seguinte problema semilinear de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + \mathcal{A}u(t) = f(t, u(t)), & t > t_0, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $-\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, de classe C_0 , com domínio X , Banach, e $f : [t_0, T] \times X \rightarrow X$ é contínua em t e satisfaz a condição de Lipschitz em u .

Definição 1.3.13 *Uma função $u : [0; +\infty) \rightarrow X$ é uma solução clássica de (1.2) em $[0; +\infty)$ se u satisfaz (1.2) em $[0; +\infty)$ e se $u \in C(\mathbb{R}; D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X)$. A função $u \in C([0; T]; X)$, dada por*

$$u(t) = S(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^t S(t - s)f(s, u(s))ds$$

é chamada de mild solution ou solução generalizada de (1.2) em $[0; T]$.

Note que se $f \equiv 0$, então $u(t) = S(t)u_0$, onde $u_0 \in X$ é a mild solution de

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = \mathcal{A}u(t), & t > 0, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

Teorema 1.3.2 *Seja $f : [t_0, T] \times X \rightarrow X$ contínua em $t \in [t_0, T]$ e uniformemente Lipschitz em X . Se $-\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de classe C_0 , em X , então para todo $u_0 \in X$ o problema de valor inicial (1.2) possui uma única solução $u \in C([t_0, T]; X)$. Além disso, a função $u_0 \mapsto u$ é Lipschitz contínua de X em $C([t_0, T]; X)$.*

Prova: Ver Pazy [18]. ■

Corolário 1.3.3 *Se $\mathcal{A}$ e f satisfazem as condições do Teorema 1.3.2, então para toda $g \in C([t_0, T]; X)$ a equação integral*

$$u(t) = g(t) + \int_{t_0}^t T(t-s) f(s, u(s)) ds,$$

possui uma única solução $u \in C([t_0, T]; X)$.

Prova: Ver Pazy [18]. ■

A condição uniformemente Lipschitz sobre a função f no Teorema 1.3.2 assegura a existência de uma *mild solution* global (ou seja, definida em todo $[t_0, T]$) de (1.2). Se assumirmos que f satisfaz apenas uma condição Lipschitz local em u , uniformemente em t em intervalos limitados, ou seja, para cada $t' \geq 0$ e $c \geq 0$ constante existe uma constante $L(c, t')$ tal que

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L(c, t') \|u - v\|$$

para todo $u, v \in X$ com $\|u\| \leq c$, $\|v\| \leq c$, então temos a seguinte versão local do Teorema 1.3.2.

Teorema 1.3.3 *Seja $f : [t_0, \infty) \times X \rightarrow X$ contínua em t para $t \geq 0$, localmente Lipschitz em u e uniformemente contínua em t em intervalos limitados. Se $-\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$, $t \geq 0$ de classe C_0 , em X , então para todo $u_0 \in X$ existe $t_{\max} \leq \infty$ tal que o problema de valor inicial (1.2) possui uma única solução $u \in [0, t_{\max})$. Além disso, se $t_{\max} < \infty$ então*

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} \|u(t)\|_X = \infty.$$

Prova: Ver Pazy [18]. ■

Capítulo 2

A equação da onda linear

Neste capítulo estamos interessados em analisar um sistema associado à equação da onda amortecida com condições de fronteira de Dirichlet:

$$\begin{cases} \varepsilon u_{tt} - u_{xx} + \varepsilon^\alpha u_t = 0, & 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $\varepsilon > 0$ é um parâmetro pequeno, destinado a tender a zero.

Nosso objetivo é analisar os valores de $\alpha \geq 0$ para os quais, a taxa de decaimento de energia das soluções de (2.1), com $t \rightarrow \infty$, é uniforme, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

A energia do sistema (2.1) é dada por

$$E_\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\varepsilon u_t^2 + u_x^2] dx \quad (2.2)$$

e satisfaz

$$\frac{dE_\varepsilon}{dt}(t) = -\varepsilon^\alpha \int_0^\pi u_t^2 dx. \quad (2.3)$$

Calculemos agora o espectro de (2.1). Usando separação de variáveis, vamos considerar u escrita na forma $u = u(x, t) = e^{\lambda t} \text{sen}(kx)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Então, u é solução de (2.1) se, e somente se, λ resolve a equação quadrática

$$\varepsilon \lambda^2 + \varepsilon^\alpha \lambda + k^2 = 0. \quad (2.4)$$

Neste caso

$$\lambda = \frac{-\varepsilon^\alpha \pm \sqrt{\varepsilon^{2\alpha} - 4\varepsilon k^2}}{2\varepsilon} = -\frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^{2(\alpha-1)} - \frac{4k^2}{\varepsilon}}. \quad (2.5)$$

Quando $\varepsilon^{2(\alpha-1)} - \frac{4k^2}{\varepsilon} \leq 0$, a parte real do autovalor λ em (2.5) é $-\frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{2}$. Assim, a fim de obtermos uma taxa de decaimento uniforme, em relação a ε , é natural tomarmos $\alpha \leq 1$.

Quando $\varepsilon^{2(\alpha-1)} - \frac{4k^2}{\varepsilon} \geq 0$, o autovalor em (2.5) com parte real maior (e decaimento mais lento) corresponde a

$$\lambda_+ = -\frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^{2(\alpha-1)} - \frac{4k^2}{\varepsilon}}. \quad (2.6)$$

Por outro lado, observemos que

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{2k^2}{\varepsilon}}{\varepsilon^{\alpha-1} + \sqrt{\varepsilon^{2(\alpha-1)} - \frac{4k^2}{\varepsilon}}} &= \frac{-\frac{2k^2}{\varepsilon}}{\varepsilon^{\alpha-1} + \sqrt{\varepsilon^{2(\alpha-1)} - \frac{4k^2}{\varepsilon}}} \cdot \frac{\varepsilon^{\alpha-1} - \sqrt{\varepsilon^{2(\alpha-1)} - \frac{4k^2}{\varepsilon}}}{\varepsilon^{\alpha-1} - \sqrt{\varepsilon^{2(\alpha-1)} - \frac{4k^2}{\varepsilon}}} \\ &= \frac{\frac{-2k^2}{\varepsilon} \left(\varepsilon^{\alpha-1} - \sqrt{\varepsilon^{2(\alpha-1)} - \frac{4k^2}{\varepsilon}} \right)}{\frac{4k^2}{\varepsilon}} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\varepsilon^{\alpha-1} - \sqrt{\varepsilon^{2(\alpha-1)} - \frac{4k^2}{\varepsilon}} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Além disso, sendo $\varepsilon^{2(\alpha-1)} - \frac{4k^2}{\varepsilon} \geq 0$, temos

$$\varepsilon^{\alpha-1} + \sqrt{\varepsilon^{2(\alpha-1)} - \frac{4k^2}{\varepsilon}} \geq \varepsilon^{\alpha-1}.$$

Assim,

$$\frac{-\frac{2k^2}{\varepsilon}}{\varepsilon^{\alpha-1} + \sqrt{\varepsilon^{2(\alpha-1)} - \frac{4k^2}{\varepsilon}}} \leq -\frac{k^2}{\varepsilon^\alpha}. \quad (2.8)$$

Logo, de (2.6) - (2.8) segue que

$$\lambda_+ = -\frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^{2(\alpha-1)} - \frac{4k^2}{\varepsilon}} = \frac{-\frac{2k^2}{\varepsilon}}{\varepsilon^{\alpha-1} + \sqrt{\varepsilon^{2(\alpha-1)} - \frac{4k^2}{\varepsilon}}} \leq -\frac{2k^2}{\varepsilon^\alpha} \leq -\frac{2}{\varepsilon^\alpha},$$

que está de acordo com a taxa de decaimento uniforme quando $\alpha \geq 0$.

Consequentemente, é natural conjecturarmos que a energia de soluções de (2.1) decai exponencialmente para zero, quando $t \rightarrow \infty$, é uniforme quando $\varepsilon \rightarrow 0$, quando $0 \leq \alpha \leq 1$. Para mostrarmos que esse é realmente o caso, vamos utilizar o método de perturbação da energia E_ε para obtermos uma desigualdade diferencial, levando ao decaimento exponencial. Esta, será a principal ferramenta para analisarmos os modelos de vigas não lineares nas seções seguintes.

Definamos

$$F_\varepsilon(t) = \varepsilon \int_0^\pi uu_t dx. \quad (2.9)$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{dF_\varepsilon}{dt} &= \int_0^\pi \varepsilon u_{tt} u dx + \varepsilon \int_0^\pi u_t^2 dx = \int_0^\pi [u_{xx} - \varepsilon^\alpha u_t] u dx + \varepsilon \int_0^\pi u_t^2 dx \\ &= \int_0^\pi u_{xx} u dx - \int_0^\pi \varepsilon^\alpha uu_t dx + \varepsilon \int_0^\pi u_t^2 dx \\ &= -\int_0^\pi u_x^2 dx - \varepsilon^\alpha \int_0^\pi uu_t dx + \varepsilon \int_0^\pi u_t^2 dx. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dado $\delta > 0$, introduzamos a energia perturbada:

$$G_{\varepsilon,\delta}(t) = E_\varepsilon(t) + \delta F_\varepsilon(t). \quad (2.11)$$

De acordo com (2.3) e (2.10) segue que

$$\begin{aligned} \frac{dG_{\varepsilon,\delta}}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} E_\varepsilon(t) + \delta \frac{d}{dt} F_\varepsilon(t) \\ &= -\varepsilon^\alpha \int_0^\pi u_t^2 dx + \delta \left[\varepsilon \int_0^\pi u_t^2 dx - \int_0^\pi u_x^2 dx - \varepsilon^\alpha \int_0^\pi uu_t dx \right] \\ &= -\delta \int_0^\pi u_x^2 dx - (\varepsilon^\alpha - \delta\varepsilon) \int_0^\pi u_t^2 dx - \delta\varepsilon^\alpha \int_0^\pi uu_t dx. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ao usarmos as desigualdades de Young e Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}
-\delta\varepsilon^\alpha \int_0^\pi uu_t dx &\leq \delta\varepsilon^\alpha \left(\int_0^\pi |u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^\pi |u_t|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq \delta\varepsilon^\alpha \pi \left(\int_0^\pi |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^\pi |u_t|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{\delta}{2} \int_0^\pi u_x^2 dx + \frac{\delta\varepsilon^{2\alpha}\pi^2}{2} \int_0^\pi u_t^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Combinando (2.12) e (2.13) deduzimos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G_{\varepsilon,\delta}(t) &\leq -\delta \int_0^\pi u_x^2 dx - (\varepsilon^\alpha - \delta\varepsilon) \int_0^\pi u_t^2 dx + \frac{\delta}{2} \int_0^\pi u_x^2 dx + \frac{\delta\varepsilon^{2\alpha}\pi^2}{2} \int_0^\pi u_t^2 dx \\
&= -\frac{\delta}{2} \int_0^\pi u_x^2 dx - \left(\varepsilon^{\alpha-1} - \delta - \frac{\delta\varepsilon^{2\alpha-1}\pi^2}{2} \right) \varepsilon \int_0^\pi u_t^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Por outro lado, usando as desigualdades de Hölder, Poincaré e Young, obtemos

$$\begin{aligned}
|F_\varepsilon(t)| &\leq \varepsilon \int_0^\pi |uu_t| dx \leq \varepsilon \|u\| \|u_t\| \leq \varepsilon \sqrt{\pi} \|u_x\| \|u_t\| \\
&\leq \sqrt{\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{2} \int_0^\pi u_x^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\pi u_t^2 dx \right) \\
&= \sqrt{\pi\varepsilon} E_\varepsilon(t).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Dai

$$|G_{\varepsilon,\delta}(t) - E_\varepsilon(t)| = |E_\varepsilon(t) - \delta F_\varepsilon(t) - E_\varepsilon(t)| = \delta |F_\varepsilon(t)| \leq \delta \sqrt{\pi\varepsilon} E_\varepsilon(t). \tag{2.16}$$

Tendo em conta (2.14), a fim de garantirmos o decaimento uniforme da energia E_ε , é suficiente escolhermos $\delta = \delta(\varepsilon)$ satisfazendo:

- (a) $\delta\sqrt{\varepsilon} \rightarrow l < 1$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, de modo que, por (2.16), $G_{\varepsilon,\delta}$ e E_ε são uniformemente equivalentes quando $\varepsilon \rightarrow 0$.
- (b) $\delta \geq c_1 > 0$ e $\left(\varepsilon^{\alpha-1} - \delta - \frac{\delta\varepsilon^{2\alpha-1}\pi^2}{2} \right) \geq c_2 > 0$ então, de acordo com (2.14) é imediato obtermos

$$\frac{d}{dt}G_{\varepsilon,\delta}(t) \leq -\min(c_1, c_2)E_\varepsilon(t).$$

Primeiro, vamos verificar (b). A fim de obtermos $\left(\varepsilon^{\alpha-1} - \delta - \frac{\delta\varepsilon^{2\alpha-1}\pi^2}{2}\right) \geq c_2 > 0$ é suficiente escolhermos $\delta \leq \min\left\{\frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{4}, \frac{\varepsilon^{-\alpha}}{2}\right\}$ que, obviamente, é compatível com o fato de que $\delta \geq c_1 > 0$ para todo $0 \leq \alpha \leq 1$. Neste respeito notemos ainda que $\min\left\{\frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{4}, \frac{\varepsilon^{-\alpha}}{2}\right\}$ é constante quando $\varepsilon \rightarrow 0$ para $\alpha = 0, 1$, enquanto que ela tende para infinito quando $0 < \alpha < 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}G_{\varepsilon,\delta}(t) &\leq -\frac{\delta}{2} \int_0^\pi u_x^2 dx - c_2 \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\pi u_t^2 dx \\ &\leq -\frac{\min\{c_1, c_2\}}{2} \int_0^\pi u_x^2 dx - \min\{c_1, c_2\} \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\pi u_t^2 dx \\ &= -\min\{c_1, c_2\} \left[\frac{1}{2} \int_0^\pi u_x^2 dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\pi u_t^2 dx \right] \\ &= -\min\{c_1, c_2\} E_\varepsilon(t). \end{aligned}$$

Obviamente (a) é também compatível com a escolha anterior. No geral, é suficiente escolhermos

$$\delta \leq \min\left\{\frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{4}, \frac{\varepsilon^{-\alpha}}{2}, \frac{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}{2}\right\}$$

para garantir o decaimento exponencial uniforme, pois

$$\begin{aligned} |G_{\varepsilon,\delta}(t) - E_\varepsilon(t)| &\leq \delta \sqrt{\pi\varepsilon} E_\varepsilon \leq \delta \sqrt{\pi\varepsilon} E_\varepsilon(0) \\ &= \delta \sqrt{\pi\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \int_0^\pi (\varepsilon u_1^2 + u_{0x}^2) dx \right]. \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ e usando as convergências adequadas obtemos

$$|G_{\varepsilon,\delta}(t) - E_\varepsilon(t)| \rightarrow l \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\pi u_{0x}^2 dx \right].$$

Resumindo, vimos que, ao escolhermos $0 \leq \alpha \leq 1$ (quando $\varepsilon \rightarrow 0$), o decaimento exponencial uniforme das soluções da equação de onda amortecida (2.1) é garantida. Mostramos também como o método clássico de introdução de perturbações adequados da energia pode ser usada para provar tal resultado. Isto é de suma importância no contexto de problemas não lineares em que estes resultados não podem ser obtidos através da análise do espectro.

Capítulo 3

Modelos de vigas: Amortecimento interno

Neste capítulo estudaremos os modelos de viga do sistema de Von Kármán com condições de fronteira articuladas e na presença de amortecimento interno distribuído ao longo de toda viga.

A fim de obtermos o modelo de Berger-Timoshenko amortecido como limite singular quando $\varepsilon \rightarrow 0$, vamos supor que $\alpha > 0$. O caso $\alpha = 0$ será estudado no Capítulo 5 já que um modelo de limite diferente será obtido.

Assim, para qualquer $\varepsilon > 0$ e $0 < \alpha \leq 1$, temos

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon v_{tt} = \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]_x - \varepsilon^\alpha v_t, & 0 < x < L, t > 0 \\ w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} = \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x - w_t + w_{xxt}, & 0 < x < L, t > 0 \\ v(0, t) = v(L, t) = 0, & t > 0 \\ w(0, t) = w(L, t) = w_{xx}(0, t) = w_{xx}(L, t) = 0, & t > 0 \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), & 0 < x < L \\ w(x, 0) = w_0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1(x), & 0 < x < L. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Para isto, dividiremos o capítulo em quatro seções, onde na primeira seção estudaremos existência e unicidade de solução. Aqui também vamos considerar o caso $\alpha = 0$. As duas seções seguintes são destinadas à análise do limite assintótico e estabilização uniforme quando o parâmetro ε tende a zero com $0 < \alpha \leq 1$. Por fim, na ultima seção deste

capítulo, faremos uma análise do sistema com outras condições de fronteira.

No que segue, vamos usar c para denotar uma constante genérica positiva que pode variar de linha para linha (a menos que seja indicado de outra forma).

3.1 Existência e unicidade de solução

Consideremos o espaço

$$\mathcal{X} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times [H^2 \cap H_0^1(0, L)] \times H_0^1(0, L)$$

munido com a norma

$$\|(v, y, w, z)\|_{\mathcal{X}}^2 = \|v_x\|^2 + \varepsilon \|y\|^2 + \|w_{xx}\|^2 + \|z\|^2 + \|z_x\|^2,$$

para cada $(v, y, w, z) \in \mathcal{X}$, onde $\|\cdot\|$ denota a norma em $L^2(0, L)$. Denotaremos o produto interno em $\mathcal{X}$ por $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{X}}$.

O sistema (3.1) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} DU_t = \mathcal{A}U + N(U), \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $U = [v, y, w, z]^T$, com $y = v_t$ e $z = w_t$, $U_0 = [v_0, v_1, w_0, w_1]^T$,

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^4}{\partial x^4} & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$N(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ \left(\frac{1}{2}w_x^2\right)_x - \varepsilon^\alpha v_t \\ 0 \\ \left[\left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)w_x\right]_x - w_t + w_{xxt} \end{bmatrix}.$$

Definamos o operador

$$D^{-1}\mathcal{A} : \mathcal{D}(D^{-1}\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$$

por

$$D^{-1}\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \frac{\partial^4}{\partial x^4} & 0 \end{bmatrix}$$

com domínio

$$\mathcal{D}(D^{-1}\mathcal{A}) = [(H^2 \cap H_0^1)(0, L)] \times H_0^1(0, L) \times [(H^3 \cap H_0^2)(0, L)] \times [H^2 \cap H_0^1(0, L)]$$

Observemos que aqui, $\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}$ denota a inversa do operador

$$\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) : H_0^1(0, L) \rightarrow H^{-1}(0, L).$$

Teorema 3.1.1 *Seja $(v_0, v_1, w_0, w_1) \in \mathcal{X}$, então o problema (3.1) tem única solução (fraca) na classe*

$$(v, v_t, w, w_t) \in \mathcal{C}([0, \infty); \mathcal{X}).$$

Além disso, a energia total $E_\varepsilon(t)$ dada por

$$E_\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\varepsilon v_t^2 + w_t^2 + w_{xt}^2 + w_{xx}^2 + \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2\right)^2 \right] dx \quad (3.3)$$

obedece a lei de dissipação de energia

$$\frac{dE_\varepsilon(t)}{dt} = - \int_0^L [\varepsilon^\alpha v_t^2 + w_t^2 + w_{xt}^2] dx. \quad (3.4)$$

Prova: Olhemos para o sistema (3.1) na forma equivalente (3.2). Nosso objetivo é aplicar a Teoria de Semigrupo. Inicialmente, demonstremos que o operador $D^{-1}\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal do grupo das isometrias em $\mathcal{X}$.

- $D^{-1}\mathcal{A}$ é dissipativo. De fato, seja $U \in \mathcal{D}(D^{-1}\mathcal{A})$, então

$$\begin{aligned}
(D^{-1}\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{X}} &= \left(\begin{bmatrix} y \\ \varepsilon^{-1}v_{xx} \\ z \\ -\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)w_{xxxx} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v \\ y \\ w \\ z \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{X}} \\
&= \int_0^L y_x v_x dx + \int_0^L v_{xx} y dx + \int_0^L z_{xx} w_{xx} dx - \int_0^L \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} w_{xxxx} z dx \\
&\quad - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} w_{xxxx} \right] z_x dx \\
&= \int_0^L \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} w_{xxxx} z dx - \int_0^L \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} w_{xxxx} z dx \\
&\quad + \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} w_{xxxx} \right] z dx \\
&= \int_0^L z \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} w_{xxxx} dx \\
&\quad - \int_0^L z \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} w_{xxxx} dx \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para cada $U \in D(D^{-1}\mathcal{A})$.

- $D^{-1}\mathcal{A}$ é maximal. Com efeito, seja $F = (f, g, j, k)^T \in \mathcal{X}$ arbitrário, queremos encontrar um elemento $U = (v, y, w, z)^T \in \mathcal{D}(D^{-1}\mathcal{A})$ tal que

$$(I - D^{-1}\mathcal{A})U = F.$$

Isto é equivalente a encontrar $(v, y, w, z)^T \in \mathcal{D}(D^{-1}\mathcal{A})$ tal que

$$\begin{cases} v - y = f \\ y - \varepsilon^{-1}v_{xx} = g \\ w - z = j \\ z + \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} w_{xxxx} = k \end{cases} \quad (3.5)$$

Resolver o sistema (3.5) é equivalente a encontrarmos

$$\{v, w\} \in [H^2 \cap H_0^1](0, L) \times [H^3 \cap H_0^2](0, L)$$

tal que

$$\begin{cases} -v_{xx} + \varepsilon v = \varepsilon(f + g) \\ v(0, t) = v(L, t) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

e

$$\begin{cases} w_{xxxx} - w_{xx} + w = \theta \\ w(0, t) = w(L, t) = w_{xx}(0, t) = w_{xx}(L, t) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

onde $\theta = \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(k + j)$.

Analisemos agora os sistemas (3.6) e (3.7). Para o sistema (3.6) definamos a forma bilinear

$$\begin{aligned} a : H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, \xi) &\mapsto a(u, \xi) = \int_0^L u_x \xi_x dx + \int_0^L \varepsilon u \xi dx. \end{aligned}$$

Notemos que a é contínua e coerciva. De fato,

* a é contínua.

$$\begin{aligned} |a(u, \xi)| &= \left| \int_0^L u_x \xi_x dx + \int_0^L \varepsilon u \xi dx \right| \leq \int_0^L |u_x \xi_x| dx + \int_0^L \varepsilon |u \xi| dx \\ &\leq \|u_x\| \|\xi_x\| + \|u\| \|\xi\| \varepsilon \leq c \|u_x\| \|\xi_x\|. \end{aligned}$$

* a é coerciva.

$$a(u, u) = \int_0^L u_x^2 dx + \int_0^L \varepsilon u^2 dx \geq c \|u_x\|^2$$

Definamos agora a forma bilinear

$$\begin{aligned} \varphi : H_0^1(0, L) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\mapsto \varphi(\xi) = \int_0^L \varepsilon \gamma \xi dx \end{aligned}$$

com $\gamma = f + g$. Temos que φ é contínua. De fato,

$$\begin{aligned} |\varphi(\xi)| &= \left| \int_0^L \varepsilon \gamma \xi dx \right| \leq \varepsilon \int_0^L |\gamma \xi| dx \\ &\leq \varepsilon \|\gamma\| \|\xi\| \leq c \|\xi_x\| \end{aligned}$$

Logo, usando Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.2.3) podemos garantir a existência de um único $v \in H_0^1(0, L)$ tal que

$$a(v, \xi) = \varphi(\xi), \quad \forall \xi \in H_0^1(0, L),$$

isto é,

$$\int_0^L v_x \xi_x dx + \int_0^L \varepsilon v \xi dx = \int_0^L \varepsilon \gamma \xi dx,$$

o que mostra v ser solução de (3.6).

Analisando agora o sistema (3.7), temos a forma bilinear

$$\begin{aligned} b : (H^2 \cap H_0^1)(0, L) \times (H^2 \cap H_0^1)(0, L) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\rho, \sigma) &\mapsto b(\rho, \sigma) = \int_0^L \rho_{xx} \sigma_{xx} dx + \int_0^L \rho_x \sigma_x dx + \int_0^L \rho \sigma dx \end{aligned}$$

contínua e coerciva.

* b é cotínua.

$$\begin{aligned} |b(\rho, \sigma)| &= \left| \int_0^L \rho_{xx} \sigma_{xx} dx + \int_0^L \rho_x \sigma_x dx + \int_0^L \rho \sigma dx \right| \\ &\leq \int_0^L |\rho_{xx} \sigma_{xx}| dx + \int_0^L |\rho_x \sigma_x| dx + \int_0^L |\rho \sigma| dx \\ &\leq \|\rho_{xx}\| \|\sigma_{xx}\| + \|\rho_x\| \|\sigma_x\| + \|\rho\| \|\sigma\| \leq c \|\rho_{xx}\| \|\sigma_{xx}\| \end{aligned}$$

* b é coerciva.

$$b(\rho, \rho) = \int_0^L \rho_{xx}^2 dx + \int_0^L \rho_x^2 dx + \int_0^L \rho^2 dx \geq \|\rho_{xx}\|^2.$$

Vamos definir o funcional

$$\begin{aligned} \mu : (H^2 \cap H_0^1)(0, L) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \sigma &\mapsto \mu(\sigma) = \int_0^L \theta \sigma dx \end{aligned}$$

que é contínuo. De fato,

$$|\mu(\sigma)| = \left| \int_0^L \theta \sigma dx \right| \leq c \|\theta\| \|\sigma\| \leq c \|\theta\| \|\sigma_{xx}\|.$$

Novamente usando o Teorema de Lax-Milgram, obtemos w como única solução fraca do sistema (3.7). Isto implica que $D^{-1}\mathcal{A}$ é maximal e, portanto, $D^{-1}\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal se semigrupo de operadores em $\mathcal{X}$.

Para garantirmos a existência de soluções locais do problema (3.1), resta provarmos que $D^{-1}\mathcal{N}$ é localmente Lipschitz em $\mathcal{X}$.

Claramente, se

$$U = [v, y, w, t]^T \text{ e } \tilde{U} = [\tilde{v}, \tilde{y}, \tilde{w}, \tilde{z}]^T$$

pertecem a $\mathcal{X}$, então

$$D^{-1}[N(U) - N(\tilde{U})] = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{2\varepsilon}[w_x^2 - \tilde{w}_x^2]_x - \varepsilon^{\alpha-1}(y - \tilde{y})$$

e

$$\beta = \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \left\{ \left[w_x \left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2 \right) - \tilde{w}_x \left(\tilde{v}_x + \frac{1}{2}\tilde{w}_x^2 \right) \right]_x - (z - \tilde{z}) + (w_{xxt} - \tilde{w}_{xxt}) \right\}.$$

Consequentemente,

$$\|D^{-1}[N(U) - N(\tilde{U})]\|_{\mathcal{X}}^2 = \|(0, \alpha, 0, \beta)\|^2 = \varepsilon\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + \|\beta_x\|^2.$$

Analisemos separadamente cada termos da expressão acima.

Primeiro, observemos que α pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2\varepsilon} [(w_x - \tilde{w}_x)(w_x + \tilde{w}_x)]_x - \varepsilon^{\alpha-1}(y - \tilde{y}) \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} [(w_{xx} - \tilde{w}_{xx})(w_x + \tilde{w}_x) + (w_x - \tilde{w}_x)(w_{xx} + \tilde{w}_{xx})] - \varepsilon^{\alpha-1}(y - \tilde{y}). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\|\alpha\|^2 &= \left\| \frac{1}{2\varepsilon} [(w_{xx} - \tilde{w}_{xx})(w_x + \tilde{w}_x) + (w_x - \tilde{w}_x)(w_{xx} + \tilde{w}_{xx})] - \varepsilon^{\alpha-1}(y - \tilde{y}) \right\|^2 \\
&\leq \left\| \frac{1}{2\varepsilon} (w_{xx} - \tilde{w}_{xx})(w_x + \tilde{w}_x) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{2\varepsilon} (w_x - \tilde{w}_x)(w_{xx} + \tilde{w}_{xx}) \right\|^2 + \|\varepsilon^{\alpha-1}(y - \tilde{y})\|^2 \\
&= \frac{1}{4\varepsilon^2} \left\{ \int_0^L [(w_{xx} - \tilde{w}_{xx})(w_x + \tilde{w}_x)]^2 dx \right. \\
&\quad \left. + \int_0^L [(w_x - \tilde{w}_x)(w_{xx} + \tilde{w}_{xx})]^2 dx \right\} + \varepsilon^{2(\alpha-1)} \|y - \tilde{y}\|^2 \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon^2} \{ \|w_x - \tilde{w}_x\|_\infty^2 (\|w_{xx}\| + \|\tilde{w}_{xx}\|)^2 \\
&\quad + \|w_{xx} - \tilde{w}_{xx}\|^2 (\|w_x\|_\infty + \|\tilde{w}_x\|_\infty)^2 \} + C\varepsilon^{2(\alpha-1)} \|y - \tilde{y}\|^2.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Usando a imersão $H^1(0, L) \hookrightarrow L^\infty(0, L)$, podemos observar que

- $\|w_x\|_\infty \leq c\|w_x\|_{H_0^1} = c\|w_{xx}\|$;
- $\|\tilde{w}_x\|_\infty \leq c\|\tilde{w}_x\|_{H_0^1} = c\|\tilde{w}_{xx}\|$;
- $\|w_x - \tilde{w}_x\|_\infty \leq c\|w_x - \tilde{w}_x\|_{H_0^1} = c\|(w - \tilde{w})_x\|_{H_0^1} = c\|(w - \tilde{w})_{xx}\|$.

Portanto,

$$\|\alpha\| \leq C \left(\|U\|_{\mathcal{X}} + \|\tilde{U}\|_{\mathcal{X}} \right) \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{X}}.$$

Agora, vamos estimar a norma de $\|\beta\|_{H^1(0,L)}$. A fim de simplificarmos os cálculos, façamos

$$\beta = \beta_1 + \beta_2$$

onde

$$\beta_1 = \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} \left[w_x \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) - \tilde{w}_x \left(\tilde{v}_x + \frac{1}{2} \tilde{w}_x^2 \right) \right]_x$$

$$\beta_2 = \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} [-(z - \tilde{z}) + (w_{xxt} - \tilde{w}_{xxt})]$$

Como o operador

$$\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} : L^2(0, L) \rightarrow H_0^1(0, L)$$

é limitado, então

$$\begin{aligned}\|\beta_1\|_{H^1} &= \left\| \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \left[w_x \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) - \tilde{w}_x \left(\tilde{v}_x + \frac{1}{2} \tilde{w}_x^2 \right) \right]_x \right\|_{H^1} \\ &\leq c \left\| w_x \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) - \tilde{w}_x \left(\tilde{v}_x + \frac{1}{2} \tilde{w}_x^2 \right) \right\|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Adicionando e subtraindo $(v_x + \frac{1}{2} w_x^2) \tilde{w}_x$ em (3.9) e usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned}\|\beta_1\|_{H^1} &\leq c \left\| w_x \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) - \tilde{w}_x \left(\tilde{v}_x + \frac{1}{2} \tilde{w}_x^2 \right) + \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) \tilde{w}_x - \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) \tilde{w}_x \right\| \\ &= c \left\| \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) (w_x - \tilde{w}_x) + \tilde{w}_x \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) - \left(\tilde{v}_x + \frac{1}{2} \tilde{w}_x^2 \right) \right] \right\| \\ &\leq c \left\| \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) (w_x - \tilde{w}_x) \right\| + c \left\| \tilde{w}_x \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) - \left(\tilde{v}_x + \frac{1}{2} \tilde{w}_x^2 \right) \right] \right\| \\ &= c \left(\int_0^L \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) (w_x - \tilde{w}_x) \right]^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad + c \left(\int_0^L \left\{ \tilde{w}_x \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) - \left(\tilde{v}_x + \frac{1}{2} \tilde{w}_x^2 \right) \right] \right\}^2 dx \right)^{1/2} \\ &= c \left(\int_0^L \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) (w_x - \tilde{w}_x) \right]^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad + c \left(\int_0^L \left\{ \tilde{w}_x \left[(v_x - \tilde{v}_x) + \frac{1}{2} (w_x^2 - \tilde{w}_x^2) \right] \right\}^2 dx \right)^{1/2} \\ &= c \left(\int_0^L \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) (w_x - \tilde{w}_x) \right]^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad + c \left(\int_0^L \left\{ \tilde{w}_x \left[(v_x - \tilde{v}_x) + \frac{1}{2} (w_x - \tilde{w}_x) (w_x + \tilde{w}_x) \right] \right\}^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq c \|w_x - \tilde{w}_x\|_\infty \left\| v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right\| \\ &\quad + c \|\tilde{w}_x\|_\infty \left\{ \|v_x - \tilde{v}_x\| + \frac{1}{2} \|w_x - \tilde{w}_x\|_\infty \|w_x + \tilde{w}_x\| \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Analisando os termos de (3.10) e usando a imersão $H^1(0, L) \hookrightarrow L^\infty(0, L)$ como nos termos de (3.8), temos

$$\bullet \quad \left\| v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right\| \leq \|v_x\| + \frac{1}{2} \|w_x^2\| \leq \|v_x\| + \frac{1}{2} \|w_{xx}\|^2.$$

- $\|w_x^2\|^2 = \int_0^L w_x^4 dx = \|w_x\|_{L^4(0,L)}^4 \leq c\|w_x\|_{H_0^1}^4 = c\|w_{xx}\|^4.$
- $\|w_x + \tilde{w}_x\| \leq \|w_x\| + \|\tilde{w}_x\|.$

Logo deduzimos que

$$\begin{aligned}
\|\beta_1\|_{H^1} &\leq c\|(w - \tilde{w})_{xx}\| \left(\|v_x\| + \frac{1}{2}\|w_{xx}\|^2 \right) \\
&\quad + c\|\tilde{w}_{xx}\| \left[\|(v - \tilde{v})_{xx}\| + \frac{1}{2}\|(w - \tilde{w})_{xx}\|(\|w_x\| + \|\tilde{w}_x\|) \right] \\
&\leq c\|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{X}} \left(\|v_x\| + \frac{1}{2}\|w_{xx}\|^2 \right) \\
&\quad + c\|\tilde{w}_{xx}\| \left[\|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{X}} + \frac{1}{2}\|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{X}}(\|w_x\| + \|\tilde{w}_x\|) \right] \\
&= c\|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{X}} \left[\|v_x\| + \frac{1}{2}\|w_{xx}\|^2 + c\|\tilde{w}_{xx}\| + \frac{c}{2}\|\tilde{w}_{xx}\|(\|w_x\| + \|\tilde{w}_x\|) \right] \\
&\leq c\|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{X}} \left[\|U\|_{\mathcal{X}} + c\|\tilde{U}\|_{\mathcal{X}} + \frac{c}{2}\|\tilde{U}\|_{\mathcal{X}}(\|U\|_{\mathcal{X}} + \|\tilde{U}\|_{\mathcal{X}}) \right] \\
&= c(\|U\|_{\mathcal{X}} + \|\tilde{U}\|_{\mathcal{X}})\|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{X}}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Um raciocínio análogo nos permite mostrar que

$$\|\beta_2\|_{H^1} \leq c(\|U\|_{\mathcal{X}} + \|\tilde{U}\|_{\mathcal{X}})\|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{X}}.$$

De fato, sendo o operador $\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}$ limitado de H^{-1} em H_0^1 , segue

$$\begin{aligned}
\|\beta_2\|_{H^1} &= \left\| \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} [-(z - \tilde{z}) + (w_{xxt} - \tilde{w}_{xxt})] \right\| \\
&\leq \left\| \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} [-(z - \tilde{z})] \right\| + \left\| \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (z_x - \tilde{z}_x) \right\| \\
&\leq c\|z - \tilde{z}\| + c_1\|z_x - \tilde{z}_x\| \\
&\leq c[\|z - \tilde{z}\| + \|z_x - \tilde{z}_x\|] \\
&\leq c(\|U\|_{\mathcal{X}} + \|\tilde{U}\|_{\mathcal{X}})\|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{X}}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Portanto, temos provado a existência e unicidade de solução do sistema (3.1).

Mostremos agora que (3.4) vale. De fato, multipliquemos (3.1)₁ por v_t e integremos

de 0 a L .

$$\varepsilon \int_0^L v_{tt} v_t dx = \int_0^L \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]_x v_t dx - \int_0^L \varepsilon^\alpha v_t^2 dx,$$

ou seja,

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{dt} \|v_t\|^2 = - \int_0^L \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right] v_{xt} dx - \int_0^L \varepsilon^\alpha v_t^2 dx. \quad (3.13)$$

Agora, multipliquemos (3.1)₂ por w_t e integremos de 0 a L . Assim

$$\begin{aligned} & \int_0^L w_{tt} w_t dx + \int_0^L w_{xxxx} w_t dx - \int_0^L w_{xxtt} w_t dx \\ &= \int_0^L \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x w_t dx - \int_0^L w_t^2 dx + \int_0^L w_{xxt} w_t dx. \end{aligned}$$

Fazendo integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|w_t\|^2 + \|w_{xx}\|^2 + \|w_{xt}\|^2] \\ &+ \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x w_{xt} dx + \int_0^L w_t^2 dx - \int_0^L w_{xt}^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Além disso,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]^2 dx = \int_0^L \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right] v_{xt} dx + \int_0^L \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right] w_x w_{xt} dx \quad (3.15)$$

Combinando (3.13), (3.14) e (3.15) segue

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|w_t\|^2 + \|w_{xx}\|^2 + \|w_{xt}\|^2 + \varepsilon \|v_t\|^2 + \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx \right] \\ &+ \int_0^L \varepsilon^\alpha v_t^2 dx + \int_0^L w_t^2 dx + \int_0^L w_{xt}^2 dx = 0, \end{aligned}$$

ou seja, a energia E_ε definida em (3.3) obedece a lei de dissipação (3.4). ■

3.2 Limite assintótico quando $\varepsilon \rightarrow 0$

Nesta seção estudaremos o limite assintótico da solução $\{v^\varepsilon, w^\varepsilon\}$ de (3.1) quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

A partir da lei de dissipação de energia (3.4) garantimos que fixado $(v_0, v_1, w_0, w_1) \in \mathcal{X}$,

temos

$$E_\varepsilon(t) \leq c$$

onde c independe de ε e, dessa forma, deduzimos que as sequências

$$\{\sqrt{\varepsilon}v_t^\varepsilon\}, \quad \left\{v_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon)^2\right\}, \quad \{w_t^\varepsilon\}, \quad \{w_{xt}^\varepsilon\}, \quad \{w_{xx}^\varepsilon\}$$

são limitadas em $L^\infty(0, +\infty; L^2(0, L))$ e

$$\{\varepsilon^{\alpha/2}v_t^\varepsilon\}, \quad \{w_t^\varepsilon\}, \quad \{w_{xt}^\varepsilon\}$$

são limitadas em $L^2(0, +\infty; L^2(0, L))$.

As limitações anteriores implicam que

$$\{w^\varepsilon\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, +\infty; [H^2 \cap H_0^1](0, L)) \quad (3.16)$$

e

$$\{v^\varepsilon\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, +\infty; H_0^1(0, L)). \quad (3.17)$$

Para justificar (3.17), basta observarmos que

$$\begin{aligned} \|v_x^\varepsilon\| &\leq \left\|v_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon)^2\right\| + \frac{1}{2}\|(w_x^\varepsilon)^2\| \leq \left\|v_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon)^2\right\| + \frac{1}{2}\|w_x^\varepsilon\|_{L^4(0,L)}^2 \\ &\leq \left\|v_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon)^2\right\| + \frac{1}{2}\|w_x^\varepsilon\|_{H_0^1(0,L)}^2 = \left\|v_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon)^2\right\| + c\|w_{xx}^\varepsilon\|^2 \leq c \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (Teorema 1.2.1), extraindo subsequências (ainda denotadas pelo índice ε , a fim de simplificarmos notações) deduzimos que existem $\xi = \xi(x, t)$, $\eta = \eta(x, t)$, $w = w(x, t)$ e $\rho = \rho(x, t)$ tais que

$$\sqrt{\varepsilon}v_t^\varepsilon \rightharpoonup \xi \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, +\infty; L^2(0, L)), \quad (3.18)$$

$$v_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon)^2 \rightharpoonup \eta \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, +\infty; L^2(0, L)), \quad (3.19)$$

$$w^\varepsilon \rightharpoonup w \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, +\infty; [H^2 \cap H_0^1](0, L)) \cap W^{1,\infty}(0, +\infty; H_0^1(0, L)) \quad (3.20)$$

e

$$v_x^\varepsilon \rightharpoonup \rho \text{ em } L^2((0, L) \times (0, T)), \quad (3.21)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Vamos identificar agora o limite nos termos não lineares de (3.1). Resta ainda identificarmos o limite fraco do termo não linear

$$\left[w_x^\varepsilon \left(v_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon)^2 \right) \right]_x,$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Para isto, observemos (3.16) e usemos o Teorema de Compacidade de Aubin-Lions (ver Teorema 1.2.5), para deduzirmos que, quando $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$w^\varepsilon \rightarrow w \text{ em } L^\infty(0, T, H^{2-\delta}(0, L)) \quad (3.22)$$

para algum $0 < \delta < 1$ e $T < \infty$. Combinando (3.19) e (3.22), segue que

$$w_x^\varepsilon \left[v_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon)^2 \right] \rightharpoonup w_x \eta \text{ em } L^2((0, L) \times (0, T)) \quad (3.23)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para qualquer $T < \infty$. O passo seguinte é identificar o limite fraco η em (3.19). Das convergências (3.21) e (3.22) deduzimos que

$$v_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon)^2 \rightharpoonup \rho + \frac{1}{2}(w_x)^2 \text{ em } L^2((0, L) \times (0, T)) \quad (3.24)$$

à qual, junto com (3.19), implica que

$$\eta = \rho + \frac{1}{2}w_x^2. \quad (3.25)$$

Afirmção η *independe de x .*

De fato, sendo $\alpha > 0$, segue de (3.17) a existência de uma subsequência, ainda denotada

da mesma forma, tal que

$$\varepsilon^\alpha v_t \rightharpoonup 0 \text{ em } H^{-1}(0, T, H_0^1(0, L)), \quad (3.26)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por outro lado, de (3.18)

$$\varepsilon v_{tt} \rightharpoonup 0 \text{ em } H^{-1}(0, T, L^2(0, L)), \quad (3.27)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. A partir da primeira equação de (3.1), (3.24), (3.26) e (3.27) segue que

$$\begin{aligned} \eta_x &= \left[\rho + \frac{1}{2} w_x^2 \right]_x = \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[v_x^\varepsilon + \frac{1}{2} (w_x^\varepsilon)^2 \right] \right\}_x \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[v_x^\varepsilon + \frac{1}{2} (w_x^\varepsilon)^2 \right]_x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon v_{tt}^\varepsilon + \varepsilon^\alpha v_t^\varepsilon] = 0, \end{aligned}$$

o que prova a afirmação.

Portanto, $\eta = \eta(t)$. Integrando a identidade (3.25) de $x = 0$ a $x = L$, obtemos

$$\eta(t)L = \int_0^L \eta(t) dx = \int_0^L \left[\rho + \frac{1}{2} w_x^2 \right] dx = \int_0^L \rho dx + \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 dx$$

pois $\int_0^L \rho dx = 0$. De fato,

$$\int_0^L \rho dx = \int_0^L \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_x^\varepsilon dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^L v_x^\varepsilon dx = 0$$

desde que $v^\varepsilon(0, t) = v^\varepsilon(L, t) = 0$. Por isso,

$$\eta w_x = \eta \frac{L}{2} w_x = \left(\frac{1}{2L} \int_0^L w_x^2 dx \right) w_x.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \left[w_x^\varepsilon \left(v_x^\varepsilon + \frac{1}{2} (w_x^\varepsilon)^2 \right) \right]_x &= w_{xx}^\varepsilon \left(v_x^\varepsilon + \frac{1}{2} (w_x^\varepsilon)^2 \right) + w_x^\varepsilon \left[v_x^\varepsilon + \frac{1}{2} (w_x^\varepsilon)^2 \right]_x \\ &\rightharpoonup w_{xx} \left(\rho + \frac{1}{2} w_x^2 \right) + w_x \left[\rho + \frac{1}{2} w_x^2 \right]_x = w_{xx} \eta + w_x \eta_x \\ &= w_{xx} \eta = \left(\frac{1}{2L} \int_0^L w_x^2 dx \right) w_{xx} \text{ em } L^2(0, T, H^{-1}(0, L)), \end{aligned}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$

Para concluirmos o nosso resultado, é suficiente identificarmos os dados iniciais do sistema limite.

Já sabemos, por (3.1)₆, que

$$w^\varepsilon(x, 0) = w_0(x), \quad 0 < x < L \quad \text{e} \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (3.28)$$

Por outro lado, segue por (3.16) e o Teorema de Aubin-Lions (Teorema 1.2.5) que

$$w^\varepsilon \rightarrow w \quad \text{em} \quad \mathcal{C}([0, T]; H^{2-\delta}(0, L)),$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ para algum $\delta > 0$ e $T < \infty$. Assim

$$w^\varepsilon(\cdot, 0) \rightarrow w(\cdot, 0), \quad \text{em} \quad H^{2-\delta}(0, L). \quad (3.29)$$

Combinando (3.28) e (3.29), temos $w(x, 0) = w_0(x)$, com $0 < x < L$.

A prova de que $w_t^\varepsilon(x, 0) = w_1(x)$, é feita de forma semelhante, visto que

$$w_t^\varepsilon(x, 0) = w_1(x), \quad 0 < x < L \quad \text{e} \quad 0 < \varepsilon < 1$$

e

$$w_t^\varepsilon \rightarrow w_t \quad \text{em} \quad \mathcal{C}([0, T], L^2(0, L)).$$

Para obtermos essa convergência usamos novamente o Teorema 1.2.5, desde que

$$\{w_t^\varepsilon\} \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)) \quad (3.30)$$

e

$$\{w_{tt}^\varepsilon\} \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0, T; L^2(0, L)). \quad (3.31)$$

A última limitação pode ser obtida usando a identidade (3.1)₂. De fato, temos

$$w_{tt} - w_{xxtt} = \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x - w_t + w_{xxt} - w_{xxxx},$$

o que implica

$$\left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) w_{tt} = - \left(w_{xxxx} + w_t - w_{xxt} - \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x \right)$$

e, por sua vez,

$$w_{tt} = - \left(1 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1} \left(w_{xxxx} + w_t - w_{xxt} - \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x \right).$$

Dessa forma, a limitação (3.31) segue devido às condições de contorno satisfeitas por w^ε e o fato que w^ε , w_t^ε e $(v_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon)^2) w_x^\varepsilon$ são limitadas em $L^\infty(0, T; [H^2 \cap H_0^1](0, L))$, $L^\infty(0, T; H_0^1(0, L))$ e $L^\infty(0, T, L^2(0, L))$, respectivamente.

As convergências acima se mantêm ao longo de subsequências adequadas. No entanto, considerando que o limite em w foi identificado como única solução de

$$\begin{cases} w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxt} - \left(\frac{1}{2L} \int_0^L w_x^2 dx \right) w_{xx} + w_t - w_{xxt} = 0 & (0, L) \times (0, +\infty) \\ w(0, t) = w(L, t) = w_{xx}(0, t) = w_{xx}(L, t) = 0, & t > 0 \\ w(x, 0) = w_0(x), w_t(x, 0) = w_1(x), & 0 < x < L. \end{cases} \quad (3.32)$$

deduzimos que "toda a família" converge quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

A energia do sistema (3.32) pode ser obtida se multiplicarmos (3.32)₁ por w_t e integramos de 0 a L .

$$\begin{aligned} & \int_0^L w_{tt} w_t dx + \int_0^L w_{xxxx} w_t dx - \int_0^L w_{xxt} w_t dx \\ & - \int_0^L \left(\frac{1}{2L} \int_0^L w_x^2 dx \right) w_{xx} w_t dx + \int_0^L w_t^2 dx - \int_0^L w_{xxt} w_t dx = 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \int_0^L w_{tt} w_t dx + \int_0^L w_{xx} w_{xxt} dx + \int_0^L w_{xxt} w_{xt} dx \\ & + \int_0^L \left(\frac{1}{2L} \int_0^L w_x^2 dx \right) w_x w_{xt} dx + \int_0^L w_t^2 dx + \int_0^L w_{xt}^2 dx = 0, \end{aligned}$$

isto implica que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|w_t\|^2 + \|w_{xx}\|^2 + \|w_{xt}\|^2] + \int_0^L \left(\frac{1}{2L} \int_0^L w_x^2 dx \right) w_x w_{xt} dx + \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx = 0. \quad (3.33)$$

Por outro lado, observemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{8L} \left[\int_0^L w_x^2 dx \right]^2 &= \frac{1}{8L} 2 \left[\int_0^L w_x^2 dx \right] \left[\int_0^L 2w_x w_{xt} dx \right] \\ &= \frac{1}{2L} \left[\int_0^L w_x^2 dx \right] [w_x w_{xt} dx]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Desta forma, substituindo adequadamente (3.34) em (3.33), deduzimos que

$$E_\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [w_t^2 + w_{xx}^2 + w_{xt}^2] dx + \frac{1}{8L} \left[\int_0^L w_x^2 dx \right]^2 \quad (3.35)$$

e está de acordo com a lei de dissipação

$$\frac{d}{dt} E_\varepsilon(t) = - \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx. \quad (3.36)$$

É fácil vermos que em ambos (3.1) e (3.32), a energia decai exponencialmente à medida que $t \rightarrow \infty$. Nosso objetivo aqui é mostrar que, na verdade, a taxa de decaimento é uniforme (quando $\varepsilon \rightarrow 0$), desde que $0 < \alpha \leq 1$ e localmente uniforme quando $\alpha = 0$. Embora, como dissemos no início do capítulo, quando $\alpha = 0$ o limite é diferente quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Isto será analisado no Capítulo 5.

3.3 Estabilização uniforme quando $\varepsilon \rightarrow 0$

Estamos interessados agora em mostrar que há uma estabilização uniforme, quando ε tende a zero, na taxa de decaimento da energia do sistema de Von Kármán. Com esse objetivo, vamos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.3.1 *Seja $\{v, w\}$ a solução global do problema (3.1) com dados iniciais no espaço $\mathcal{X}$. Suponhamos que $0 \leq \alpha \leq 1$. Então, existem constantes positivas $c > 0$ e $\mu > 0$, tais que*

$$E_\varepsilon(t) \leq c E_\varepsilon(0) e^{-\frac{\mu}{1+\varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)} t}, \quad (3.37)$$

para todo $t > 0$ e $0 < \varepsilon < 1$.

Observação 3.3.1 Com o limite em (3.37), quando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos as seguintes taxas de decaimento para a energia do sistema de limite (3.32):

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Se } \alpha = 0: \quad E(t) &\leq ce^{-\frac{\mu}{1+E(0)}t}E(0), \text{ para todo } t > 0, \\ \bullet \text{ Se } \alpha > 0: \quad E(t) &\leq ce^{-\mu t}E(0), \text{ para todo } t > 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Obviamente, $(3.38)_2$ é melhor que $(3.38)_1$, uma vez que ela se mantém uniforme para todas as soluções e, $(3.38)_1$ é apenas uniforme sobre os conjuntos limitados no espaço energia. No entanto, como veremos no Capítulo 5, quando $\alpha = 0$, o sistema (3.32) não é limite. Notemos também que, para $\varepsilon > 0$, o decaimento estimado em (3.37) só é uniforme em conjuntos limitados de dados iniciais. Porém, quando $\alpha > 0$ e $\varepsilon \rightarrow 0$, a dependencia em que os dados são mais fracos, no limite, conseguimos a propriedade de decaimento $(3.38)_2$.

Prova do Teorema 3.3.1:

A fim de simplificarmos as notações, vamos escrever $w = w^\varepsilon$ e $v = v^\varepsilon$. A prova do teorema será dividida em três passos.

Passo 1. Vamos considerar o funcional

$$F_\varepsilon(t) = \varepsilon \int_0^L vv_t dx + \frac{1}{2} \int_0^L [ww_t + w_x w_{xt}] dx. \quad (3.39)$$

Usando as equações em (3.1) segue que

$$\begin{aligned} \frac{dF_\varepsilon(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\varepsilon \int_0^L vv_t dx + \frac{1}{2} \int_0^L [ww_t + w_x w_{xt}] dx \right] \\ &= \varepsilon \int_0^L [v_t^2 + vv_{tt}] dx + \frac{1}{2} \int_0^L [w_t^2 + ww_{tt} + w_{xt}^2 + w_x w_{xtt}] dx \\ &= \varepsilon \int_0^L v_t^2 dx + \varepsilon \int_0^L vv_{tt} dx + \frac{1}{2} \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx + \frac{1}{2} \int_0^L [ww_{tt} + w_x w_{xtt}] dx \end{aligned} \quad (3.40)$$

Substituindo as equações (3.1)₁ e (3.1)₂ em (3.40), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dF_\varepsilon(t)}{dt} &= \varepsilon \int_0^L v_t^2 dx + \int_0^L v \left(\left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]_x - \varepsilon^\alpha v_t \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ w \left[-w_{xxxx} + w_{xxtt} + \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x - w_t + w_{xxt} \right] + w_x w_{xtt} \right\} dx \\
&= \varepsilon \int_0^L v_t^2 dx + \int_0^L v \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]_x dx - \varepsilon^\alpha \int_0^L v v_t dx + \frac{1}{2} \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ w \left[-w_{xxxx} + \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x - w_t + w_{xxt} \right] + w w_{xxtt} + w_x w_{xtt} \right\} dx
\end{aligned}$$

Finalmente, integrando por partes a expressão acima

$$\begin{aligned}
\frac{dF_\varepsilon(t)}{dt} &= \varepsilon \int_0^L v_t^2 dx - \int_0^L v_x \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right] dx - \varepsilon^\alpha \int_0^L v v_t dx + \frac{1}{2} \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^L w w_{xxxx} dx + \frac{1}{2} \int_0^L w \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x dx + \frac{1}{2} \int_0^L w [w_{xxt} - w_t] dx \\
&= \varepsilon \int_0^L v_t^2 dx - \int_0^L \left[v_x^2 + \frac{1}{2} v_x w_x^2 \right] dx - \varepsilon^\alpha \int_0^L v v_t dx + \frac{1}{2} \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^L w_x w_{xxx} dx - \frac{1}{2} \int_0^L w_x \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L w [w_{xxt} - w_t] dx \\
&= \varepsilon \int_0^L v_t^2 dx - \int_0^L \left[v_x^2 + v_x w_x^2 + \frac{1}{4} w_x^4 \right] dx - \varepsilon^\alpha \int_0^L v v_t dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx - \frac{1}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L w [w_{xxt} - w_t] dx \\
&= \varepsilon \int_0^L v_t^2 dx - \int_0^L \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^L w_{xx}^2 + \frac{1}{2} \int_0^L w [w_{xxt} - w_t] dx - \varepsilon^\alpha \int_0^L v v_t dx
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^L w w_t dx \right| &\leq \int_0^L |w w_t| dx \leq \|w\| \|w_t\| \leq \sqrt{L} \|w_x\| \|w_t\| \\
&\leq L \|w_{xx}\| \|w_t\| \left(\frac{\eta}{\eta} \right)^{1/2} \leq \frac{L}{2} [\eta^{1/2} |w_{xx}|]^2 + \frac{L}{2} \left[\left(\frac{1}{\eta} \right)^{1/2} |w_t| \right]^2 \\
&= c \int_0^L \left[\eta w_{xx}^2 + \frac{1}{\eta} w_t^2 \right] dx
\end{aligned} \tag{3.42}$$

para todo $\eta > 0$, uma vez que, pela Proposição 1.2.1, $\|w_{xx}\|$ define uma norma em $[H^2 \cap H_0^1](0, L)$, que é equivalente à norma induzida por $H^2(0, L)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^L w w_{xxt} dx \right| &= \left| \int_0^L w_x w_{xt} dx \right| \leq \int_0^L |w_x w_{xt}| dx \\
 &\leq \|w_x\| \|w_{xt}\| \leq \sqrt{L} \|w_{xx}\| \|w_{xt}\| \left(\frac{\eta}{\eta} \right)^{1/2} \\
 &\leq \frac{\sqrt{L}}{2} [\sqrt{\eta} \|w_{xx}\|]^2 + \frac{\sqrt{L}}{2} \left[\sqrt{\frac{1}{\eta}} \|w_{xt}\| \right]^2 \\
 &= \frac{\sqrt{L}}{2} \int_0^L \left[\eta w_{xx}^2 + \frac{1}{\eta} w_{xt}^2 \right] dx
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

e

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^\alpha \left| \int_0^L v v_t dx \right| &\leq \varepsilon^\alpha \int_0^L |v v_t| dx \leq \varepsilon^\alpha \|v\| \|v_t\| \left(\frac{\eta}{\eta} \right)^{1/2} \\
 &\leq \varepsilon^\alpha \left\{ \frac{1}{2} [\sqrt{\eta} \|v\|]^2 + \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{1}{\eta}} \|v_t\| \right]^2 \right\} \\
 &= \frac{\varepsilon^\alpha \eta}{2} \int_0^L v^2 dx + \frac{\varepsilon^\alpha}{2\eta} \int_0^L v_t^2 dx.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Ainda temos que

$$\begin{aligned}
 \int_0^L v^2 dx &\leq L \int_0^L v_x^2 dx = L \int_0^L \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 - \frac{1}{2} w_x^2 \right]^2 dx \\
 &\leq L \int_0^L \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 + w_x^4 \right] dx \\
 &= L \int_0^L \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]^2 dx + c \int_0^L w_x^4 dx \\
 &= L \int_0^L \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]^2 dx + c \|w_x\|_{L^4(0,L)}^4 \\
 &\leq L \int_0^L \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]^2 dx + c \|w_x\|_{H_0^1(0,L)}^4 \\
 &= L \int_0^L \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]^2 dx + c \|w_{xx}\|^4 \\
 &= L \left\{ \int_0^L \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]^2 dx + \left(\int_0^L w_{xx}^2 dx \right)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L \left\{ \int_0^L \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]^2 dx + \left(\int_0^L w_{xx}^2 dx \right) \left(\int_0^L w_{xx}^2 dx \right) \right\} \\
&\leq L \left\{ \int_0^L \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]^2 dx + E(t) \int_0^L w_{xx}^2 dx \right\} \\
&\leq L \left\{ \int_0^L \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]^2 dx + E(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx \right\}. \tag{3.45}
\end{aligned}$$

Consequentemente, de (3.44) e (3.45), obtemos

$$\begin{aligned}
\varepsilon^\alpha \left| \int_0^L v v_t dx \right| &\leq \frac{\varepsilon^\alpha}{2\eta} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{\varepsilon^\alpha \eta}{2} \int_0^L v^2 dx \\
&\leq \frac{\varepsilon^\alpha}{2\eta} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{\varepsilon^\alpha \eta}{2} c \left[\int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx + E_\varepsilon(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx \right]. \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Passo 2. Seja $\delta > 0$, vamos definir $G_{\varepsilon, \delta}(t)$ por

$$G_{\varepsilon, \delta}(t) = E_\varepsilon(t) + \delta F_\varepsilon(t) \tag{3.47}$$

Combinando (3.4) e (3.41)-(3.46) obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} G_{\varepsilon, \delta}(t) &= \frac{d}{dt} [E_\varepsilon(t) + \delta F_\varepsilon(t)] = \frac{d}{dt} E_\varepsilon(t) + \delta \frac{d}{dt} F_\varepsilon(t) \\
&= - \int_0^L ([\varepsilon^\alpha v_t^2 + w_t^2 + w_{xt}^2]) dx + \delta \left\{ \varepsilon \int_0^L v_t^2 dx - \int_0^L \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]^2 dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx + \frac{1}{2} \int_0^L w [w_{xxt} - w_t] dx - \frac{1}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx - \varepsilon^\alpha \int_0^L v v_t dx \right\} \\
&\leq - \int_0^L ([\varepsilon^\alpha v_t^2 + w_t^2 + w_{xt}^2]) dx + \delta \varepsilon \int_0^L v_t^2 dx - \delta \int_0^L \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]^2 dx \\
&\quad + \frac{\delta}{2} \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx + \frac{\delta}{2} \left| \int_0^L w w_{xxt} dx \right| - \frac{\delta}{2} \left| \int_0^L w w_t dx \right| \\
&\quad - \frac{\delta}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx - \delta \left| \varepsilon^\alpha \int_0^L v v_t dx \right|.
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição de (3.42), (3.43) e (3.46) na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G_{\varepsilon,\delta}(t) &\leq -\varepsilon^\alpha \int_0^L v_t^2 dx - \int_0^L w_t^2 dx - \int_0^L w_{xt}^2 dx + \delta \varepsilon \int_0^L v_t^2 dx \\
&\quad - \delta \int_0^L \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]^2 dx + \frac{\delta}{2} \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx - \frac{\delta}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
&\quad + \frac{\delta}{2} c \int_0^L \left[\eta w_{xx}^2 + \frac{1}{\eta} w_t^2 \right] dx + \frac{\delta}{2} c \int_0^L \left[\eta w_{xx}^2 + \frac{1}{\eta} w_{xt}^2 \right] dx \\
&\quad + \delta \left\{ \frac{\varepsilon^\alpha}{2\eta} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{\varepsilon^\alpha \eta}{2} c \left[\int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx + E_\varepsilon(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx \right] \right\} \\
&= - \left(\varepsilon^\alpha - \delta \varepsilon - \delta \frac{\varepsilon^\alpha}{2\eta} \right) \int_0^L v_t^2 dx - \left(1 - \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} c \frac{1}{\eta} \right) \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx \\
&\quad - \left(\delta - \delta \frac{\varepsilon^\alpha \eta}{2} c \right) \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx - \left(\frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} \eta c - \delta \frac{\varepsilon^\alpha \eta}{2} c E_\varepsilon(0) \right) \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
&= - \left(\varepsilon^\alpha - \delta \varepsilon - \delta \frac{\varepsilon^\alpha}{2\eta} \right) \int_0^L v_t^2 dx - \left(1 - \delta \left(\frac{1}{2} + \frac{c}{2\eta} \right) \right) \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx \\
&\quad - \delta \left(1 - \frac{\varepsilon^\alpha \eta}{2} c \right) \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx - \frac{\delta}{2} (1 - \eta c - \varepsilon^\alpha \eta c E_\varepsilon(0)) \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
&\leq - \left(\varepsilon^{\alpha-1} - \delta - \delta \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{2\eta} \right) \varepsilon \int_0^L v_t^2 dx - \left(1 - \delta \frac{c}{\eta} \right) \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx \\
&\quad - \delta (1 - \varepsilon^\alpha \eta c) \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx \\
&\quad - \frac{\delta}{2} (1 - c\eta(1 - \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0))) \int_0^L w_{xx}^2 dx. \tag{3.48}
\end{aligned}$$

Consideremos η tal que

$$\eta = \frac{\lambda}{1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)}, \tag{3.49}$$

com $\lambda > 0$ (suficientemente pequeno e independente de ε e $E_\varepsilon(0)$).

Finalmente, substituindo (3.49) em (3.48) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G_{\varepsilon,\delta}(t) &\leq -\left(\varepsilon^{\alpha-1} - \delta - \delta \frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{\frac{2\lambda}{1+\varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)}}\right) \varepsilon \int_0^L v_t^2 dx - \left(1 - \delta \frac{c}{\frac{\lambda}{1+\varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)}}\right) \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx \\
&\quad - \delta \left(1 - \varepsilon^\alpha \frac{\lambda}{1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)} c\right) \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2\right)^2 dx \\
&\quad - \frac{\delta}{2} \left(1 - c \frac{\lambda}{1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)} (1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0))\right) \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
&= -\left(\varepsilon^{\alpha-1} - \delta - \delta \varepsilon^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)}{2\lambda}\right)\right) \varepsilon \int_0^L v_t^2 dx \\
&\quad - \left(1 - c\delta \left(\frac{1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)}{\lambda}\right)\right) \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx \\
&\quad - \delta \left(1 - c\varepsilon^\alpha \frac{\lambda}{1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)}\right) \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2\right)^2 dx \\
&\quad - \frac{\delta}{2} (1 - c\lambda) \int_0^L w_{xx}^2 dx. \tag{3.50}
\end{aligned}$$

Queremos impor condições adequadas em δ (e λ) de modo que os coeficientes do lado direito de (3.50) sejam todos menores ou iguais a $-\frac{\delta}{2}$.

Observemos que

$$\frac{1}{\eta} = \frac{1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)}{\lambda} \geq \frac{\varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)}{\lambda} \geq \varepsilon^\alpha 2c.$$

A última desigualdade segue do fato que $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno e independente de ε e $E_\varepsilon(0)$. Logo $\frac{E_\varepsilon(0)}{\lambda} \geq 2c$, c uma constante positiva. Logo,

$$\eta \leq (\varepsilon^\alpha 2c)^{-1}, \tag{3.51}$$

e, assim, podemos reescrever (3.50) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G_{\varepsilon,\delta}(t) &\leq -\left(\varepsilon^{\alpha-1} - \delta - \delta \varepsilon^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)}{2\lambda}\right)\right) \varepsilon \int_0^L v_t^2 dx \\
&\quad - \left(1 - c\delta \left(\frac{1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)}{\lambda}\right)\right) \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx \\
&\quad - \frac{\delta}{2} \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2\right)^2 dx - \frac{\delta}{2} (1 - c\lambda) \int_0^L w_{xx}^2 dx. \tag{3.52}
\end{aligned}$$

Agora, vamos impor restrições a δ de modo que

$$\frac{c}{\lambda}\delta(1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)) \leq \frac{1}{2} \quad (3.53)$$

e

$$\varepsilon^{\alpha-1} - \delta - \frac{1}{2\lambda}\delta(1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0))\varepsilon^{\alpha-1} \geq \frac{1}{2}. \quad (3.54)$$

Satisfeitas estas condições, deduzimos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}G_{\varepsilon,\delta}(t) &\leq -\frac{1}{2}\varepsilon \int_0^L v_t^2 dx - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx \\ &\quad - \frac{\delta}{2} \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)^2 dx - \frac{\delta}{2}(1 - c\lambda) \int_0^L w_{xx}^2 dx \\ &\leq -\min\{1, \delta\} \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L v_t^2 dx - \min\{1, \delta\} \frac{1}{2} \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx \\ &\quad - \min\{1, \delta\} \frac{1}{2} \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)^2 dx - \min\{1, \delta\} \frac{1}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx \\ &= -\min\{1, \delta\} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L \varepsilon v_t^2 + w_t^2 + w_{xt}^2 \left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)^2 w_{xx}^2 dx \right\} \\ &= -\min\{1, \delta\} E_\varepsilon(t). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Observemos ainda das desigualdades (3.53) e (3.54) que podemos obter uma estimativa para δ . Em outros termos, de (3.53), temos:

$$\frac{c}{\lambda}\delta(1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)) \leq \frac{1}{2},$$

ou seja,

$$\delta \leq \frac{\lambda}{2c(1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0))} = \frac{c}{1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)}.$$

Entretanto, usando a estimativa que já encontramos em (3.54), obtemos

$$\varepsilon^{\alpha-1} - \delta - \frac{1}{2\lambda}c\varepsilon^{\alpha-1} \geq \varepsilon^{\alpha-1} - \delta - \frac{1}{2\lambda}\delta(1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0))\varepsilon^{\alpha-1} \geq \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\delta \leq c\varepsilon^{\alpha-1}.$$

Assim, garantimos que as condições (3.53) e (3.54) se mantêm quando

$$\delta \leq c \min \left\{ \frac{1}{1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)}, \varepsilon^{\alpha-1} \right\} \quad (3.56)$$

com $c > 0$ suficientemente pequeno, independente de $0 < \varepsilon < 1$ e da solução. Observemos ainda que (3.55) mantém-se automaticamente se

$$\delta \leq \frac{c}{1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)} \quad (3.57)$$

com $c > 0$ pequeno, mas independente de $0 < \varepsilon < 1$ e da solução.

Passo 3. Para obtermos o decaimento exponencial de E_ε usando (3.55), precisamos comparar E_ε e $G_{\varepsilon,\delta}$. Para fazer isso, usaremos (3.42), (3.43) e (3.46) para obtermos

$$\begin{aligned} |F_\varepsilon(t)| &= \left| \varepsilon \int_0^L v v_t dx + \frac{1}{2} \int_0^L (w w_t + w_x w_{xt}) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \left[\varepsilon^\alpha \left| \int_0^L v v_t dx \right| \right] + \frac{1}{2} \left| \int_0^L w w_t dx \right| + \frac{1}{2} \left| \int_0^L w_x w_{xt} dx \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\eta} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{\varepsilon\eta}{2} \left\{ c \left[\int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx + E_\varepsilon(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx \right] \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[c \int_0^L \left(\eta w_{xx}^2 + \frac{1}{\eta} w_t^2 \right) dx \right] + \frac{1}{2} \left[c \int_0^L \left(\eta w_{xx}^2 + \frac{1}{\eta} w_{xt}^2 \right) dx \right] \\ &= \frac{\varepsilon}{2\eta} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{\varepsilon\eta}{2} c \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx + \frac{\varepsilon\eta}{2} c E_\varepsilon(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx \\ &\quad + \frac{c}{2} \int_0^L \left(\eta w_{xx}^2 + \frac{1}{\eta} w_t^2 \right) dx + \frac{c}{2} \int_0^L \left(\eta w_{xx}^2 + \frac{1}{\eta} w_{xt}^2 \right) dx \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L \left\{ \frac{1}{\eta} v_t^2 dx + \eta c \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]^2 \right\} dx + \frac{c}{2\eta} \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx \\ &\quad + \left[\frac{\varepsilon\eta}{2} E_\varepsilon(0) + c\eta \right] \int_0^L w_{xx}^2 dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L \left\{ v_t^2 dx + c \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]^2 \right\} dx + \frac{c}{2} \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx \\ &\quad + \left[\frac{\varepsilon}{2} E_\varepsilon(0) + c \right] \int_0^L w_{xx}^2 dx \\ &\leq c[E_\varepsilon(t) + \varepsilon E_\varepsilon(t)] \leq c[E_\varepsilon(t) + \varepsilon E_\varepsilon^2(t)] \\ &= c[1 + \varepsilon E_\varepsilon(t)] E_\varepsilon(t) \leq c[1 + \varepsilon E_\varepsilon(0)] E_\varepsilon(t) \end{aligned} \quad (3.58)$$

com $c > 0$ independente de $0 < \varepsilon < 1$ e da solução. Consequentemente

$$|G_{\varepsilon,\delta}(t) - E_\varepsilon(t)| = \delta|F_\varepsilon(t)| \leq c\delta[1 + \varepsilon E_\varepsilon(0)]E_\varepsilon(t) \quad (3.59)$$

Então, com a escolha de δ como em (3.57) e tendo, se necessário, $c > 0$ pequeno, podemos garantir que

$$|G_{\varepsilon,\delta}(t) - E_\varepsilon(t)| \leq \frac{1}{2}E_\varepsilon(t). \quad (3.60)$$

Deste modo,

$$-\frac{1}{2}E_\varepsilon(t) \leq G_{\varepsilon,\delta}(t) - E_\varepsilon(t) \leq \frac{1}{2}E_\varepsilon(t),$$

isto é,

$$\frac{1}{2}E_\varepsilon(t) \leq G_{\varepsilon,\delta}(t) \leq \frac{3}{2}E_\varepsilon(t), \quad \forall t > 0. \quad (3.61)$$

Assim, multiplicando a última desigualdade e tendo em vista de (3.55), segue

$$\frac{d}{dt}G_{\varepsilon,\delta}(t) \leq -\frac{2}{3}\min\{1, \delta\}G_{\varepsilon,\delta}(t), \quad (3.62)$$

o que implica

$$\frac{d}{dt}(G_{\varepsilon,\delta}e^{ct}) \leq 0, \quad (3.63)$$

onde $c = \frac{2}{3}\min\{1, \delta\}$.

Integrando (3.63) de 0 a t e usando (3.61) deduzimos

$$\frac{1}{2}E_\varepsilon(t) \leq G_{\varepsilon,\delta}(t) \leq G_{\varepsilon,\delta}(0)e^{-ct} \leq \frac{3}{2}E_\varepsilon(0)e^{-ct},$$

o que, de acordo com a escolha de δ em (3.57), implica (3.37). ■

3.4 Outras condições de fronteira

Nesta seção, vamos considerar $\varepsilon > 0$ e analisar o comportamento assintótico, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, do modelo (3.1)₁-(3.1)₂ com condições de Neumann em v e extremidades fixas em

w , isto é,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon v_{tt} = \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]_x - \varepsilon^\alpha v_t, & 0 < x < L, t > 0 \\ w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} = \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x - w_t + w_{xxt}, & 0 < x < L, t > 0 \\ v_x(0, t) = v_x(L, t) = 0, & \forall t > 0 \\ w(0, t) = w(L, t) = w_x(0, t) = w_x(L, t) = 0, & \forall t > 0. \end{array} \right. \quad (3.64)$$

Como estamos interessados estudar o limite assintótico de $\{v^\varepsilon, w^\varepsilon\}$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, vamos utilizar o mesmo método descrito da Seção 3.2 deste capítulo e apenas apontaremos as medidas adicionais necessárias para este caso, devido às novas condições de contorno.

Devido à equação (3.4), obtemos limitação uniforme para a solução o que nos permite passar o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, como na seção anterior. Novamente, o cuidado aqui é determinar o limite fraco do termo não linear

$$\left[w_x^\varepsilon \left(v_x^\varepsilon + \frac{1}{2} (w_x^\varepsilon)^2 \right) \right]_x$$

Procedendo como na seção anterior segue que

$$w_x^\varepsilon \left[v_x^\varepsilon + \frac{1}{2} (w_x^\varepsilon)^2 \right] \rightharpoonup w_x \eta \text{ em } L^2((0, L) \times (0, T))$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e $\eta = \rho + \frac{1}{2} w_x^2$ independe de x . Desta forma, ainda vamos identificar por $\eta = \eta(t)$.

A fim de estudarmos o comportamento assintótico do problema (3.64), tomemos a derivada em relação a x de (3.64)₁, multipliquemos o resultado por $a(x) = \frac{1}{4} L^2 - (x - \frac{1}{2} L)^2$ e, por fim, integremos de 0 a L . Assim

$$\int_0^L \varepsilon v_{ttx}^\varepsilon a(x) dx - \int_0^L \left[v_x^\varepsilon + \frac{1}{2} (w_x^\varepsilon)^2 \right]_{xx} a(x) dx + \int_0^L \varepsilon^\alpha v_{tx}^\varepsilon a(x) dx = 0$$

Fazendo integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\varepsilon \frac{d^2}{dt^2} \int_0^L v_x^\varepsilon a(x) dx &= \int_0^L \left[v_x^\varepsilon + \frac{1}{2} (w_x^\varepsilon)^2 \right]_{xx} \left[\frac{1}{4} L^2 - \left(x - \frac{1}{2} L \right)^2 \right] dx - \varepsilon^\alpha \frac{d}{dt} \int_0^L v_x^\varepsilon a(x) dx \\
&= \int_0^L \left[v_x^\varepsilon + \frac{1}{2} (w_x^\varepsilon)^2 \right] [-x^2 + xL]_{xx} dx - \varepsilon^\alpha \frac{d}{dt} \int_0^L v_x^\varepsilon a(x) dx \\
&= -2 \int_0^L \left[v_x^\varepsilon + \frac{1}{2} (w_x^\varepsilon)^2 \right] dx - \varepsilon^\alpha \frac{d}{dt} \int_0^L v_x^\varepsilon a(x) dx.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Notemos que, quando fazemos integração por partes, não aparecem termos de fronteira já que $a = 0$ em $x = 0, L$ e também pelas condições de contorno (3.64) em v^ε e w^ε garantimos que $v_x^\varepsilon + \frac{1}{2} w_x^\varepsilon = 0$ em $x = 0, L$. Desde que $a \in L^2(0, L)$, passando ao limite em (3.65), quando $\varepsilon \rightarrow 0$, temos

$$\varepsilon \frac{d^2}{dt^2} \int_0^L v_x^\varepsilon a(x) dx \rightharpoonup -2L\eta(t) \tag{3.66}$$

Por outro lado, uma vez que $a \in L^2(0, L)$, segue

$$\int_0^L v_x^\varepsilon a(x) dx \rightharpoonup \int_0^L \rho(x) a(x) dx \text{ em } L^2(0, T).$$

Assim,

$$\varepsilon \frac{d^2}{dt^2} \int_0^L v_x^\varepsilon a(x) dx \rightarrow 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0, T), \tag{3.67}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Finalmente, de (3.66) e (3.67) e da unicidade do limite, deduzimos que

$$-2L\eta(t) = 0.$$

Consequentemente, em toda análise desta seção realizada sob a condição de contorno (3.64) possui uma taxa de decaimento de energia quando $0 < \alpha \leq 1$. No entanto, existe uma diferença com respeito ao caso anterior, uma vez que a equação limite agora é linear.

$$\begin{cases} w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} + w_t - w_{xxt} = 0, & 0 < x < L, \ t > 0 \\ w(0, t) = w(L, t) = w_x(0, t) = w_x(L, t) = 0, & t > 0 \\ w(x, 0) = w_0(x), \ w_t(x, 0) = w_1(x), & 0 < x < L. \end{cases}$$

Capítulo 4

Modelos de vigas: Amortecimento na fronteira

O objetivo deste capítulo é analisar o modelo de viga no caso em que a energia do sistema seja dissipativa por meio de mecanismos de amortecimento na fronteira.

Consideremos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon v_{tt} = \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]_x, & 0 < x < L, \ t > 0, \\ w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxt} = \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x, & 0 < x < L, \ t > 0, \\ v(0, t) = w(0, t) = w_x(0, t) = 0, & t > 0 \\ \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right] (L, t) = -\varepsilon^\alpha v_t(L, t), & t > 0, \\ w_{xx}(L, t) = -w_{xt}(L, t), & t > 0 \\ \left[w_{xxx} - w_{xtt} - \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right] (L, t) = w_t(L, t), & t > 0, \\ v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), & 0 < x < L, \\ w(x, 0) = w_0(x), w_t(x, 0) = w_1(x), & 0 < x < L. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

4.1 Existência e unicidade de solução

Vamos introduzir o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = V \times L^2(0, L) \times W \times V$$

onde

$$V = \{\varphi \in H^1(0, L) : \varphi(0) = 0\}, \quad W = \{\varphi \in L^2(0, L) : \varphi(0) = \varphi_x(0) = 0\}.$$

A norma em $\mathcal{H}$ é dada por

$$\|(v, y, w, z)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|v\|_{H^1(0, L)}^2 + \varepsilon \|y\|^2 + \|w_{xx}\|^2 + \|z\|_{H^1(0, L)}^2$$

para cada $(v, y, w, z) \in \mathcal{H}$.

No que diz respeito à existência de solução, consideremos o seguinte resultado:

Teorema 4.1.1 (*Solução Forte*) *Seja $(v_0, v_1, w_0, w_1) \in [H^2(0, L) \cap V] \times V \times [H^3(0, L) \cap W] \times W$ com $v_{0,x}(L) + \frac{1}{2}(w_{0,x}(L))^2 = -\varepsilon^\alpha v_1(L)$ e $w_{0,xx}(L) = w_{1,x}(L)$. Então, existe um único par $\{v, w\}$ que satisfaz*

$$\begin{aligned} v &\in L_{loc}^\infty(0, +\infty; H^2(0, L) \cap V), \quad v_t \in L_{loc}^\infty(0, +\infty; V) \\ w &\in L_{loc}^\infty(0, +\infty; H^3(0, L) \cap W), \quad w_t \in L_{loc}^\infty(0, +\infty; W) \end{aligned}$$

$$\varepsilon v_{tt} = \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]_x, \quad \text{com } (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty) \quad (4.2)$$

$$(w_{tt}, \phi) + (w_{xtt}, \phi_x) - (w_{xxx}, \phi_x) + w_t(L, t)\phi(L) = - \left(\left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right] w_x, \phi_x \right), \quad \forall \phi \in V \quad (4.3)$$

e as condições de fronteira

$$\left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right](L, t) = -\varepsilon^\alpha v_t(L, t) \quad \text{e} \quad w_{xx}(L, t) = -w_{xt}(L, t) \quad \text{onde } t > 0. \quad (4.4)$$

A prova do Teorema 4.1.1 pode ser vista no trabalho de Lagnese-Leugering [8], em que os autores escreveram o sistema (4.1) de forma que as condições não lineares de fronteira foram associadas a um operador contínuo e não linear. Dai, eles trataram a existência para (4.1) usando argumentos de monotonia juntamente com a Teoria de Semigrupo.

Como nosso enfoque é estudar as propriedades relativas aos limites assintóticos análogos ao que fizemos no Capítulo 3, omitiremos a demonstração do Teorema 4.1.1.

Observemos que soluções fortes não são soluções clássicas do sistema (4.1), pois a equação (4.3) e a segunda condição em (4.4) são fracamente satisfeitas em um sentido variacional.

Como em [8], diremos que $t \mapsto U(t) : [0; \infty) \rightarrow \mathcal{H}$ é uma solução fraca de (4.1), se houver uma sequência $U_n(t)$ de soluções fortes tais que $U_n \rightarrow U$ em $\mathcal{C}([0; T]; \mathcal{H})$ para cada $T > 0$. No que diz respeito a soluções fracas, tendo em conta que o conjunto

$$\vartheta = \left\{ (v_0, v_1, w_0, w_1) \in [H^2(0, L) \cap V] \times V \times [H^3(0, L) \cap W] \times W : \right. \\ \left. v_{0,x}(L) + \frac{1}{2}(w_{0,x}(L))^2 = -\varepsilon^\alpha v_1(L) \text{ e } w_{0,xx}(L) = w_{1,xx}(L) \right\}$$

é denso em $\mathcal{H}$ (ver [8]), segue o seguinte resultado:

Teorema 4.1.2 (*Solução fraca*) *Seja $(v_0, v_1, w_0, w_1) \in \mathcal{H}$. Então, o sistema (4.1) tem única solução fraca com*

$$\{v, v_t\} \in \mathcal{C}([0, \infty); V \times L^2(0, L)), \quad \{w, w_t\} \in \mathcal{C}([0, \infty); W \times V).$$

Além disso, a energia $E_\varepsilon(t)$ associada as soluções de (4.1) dada por

$$E_\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[w_t^2 + w_{xt}^2 + w_{xx}^2 + \varepsilon v_t^2 + \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 \right] dx$$

satisfaz

$$\frac{d}{dt} E_\varepsilon(t) = -\varepsilon^\alpha v_t^2(L, t) - w_{xt}^2(L, t) - w_t^2(L, t). \quad (4.5)$$

A igualdade (4.5) é obtida de forma inteiramente similar ao que fizemos na Seção 3.1. Além disso, veremos que a análise do decaimento exponencial da energia pode também ser realizada de forma análoga ao que foi feito no capítulo anterior. Por outro lado, mostraremos que o limite de soluções de (4.1) quando $\varepsilon \rightarrow 0$ é a solução do modelo de viga linear da equação de Berger-Timoshenko com condição de fronteira dissipativa quando $\alpha > 0$. O modelo de limite quando $\alpha = 0$ é de natureza diferente e será também discutido no Capítulo 5.

4.2 Limite assintótico quando $\varepsilon \rightarrow 0$

De acordo com a Seção 4.1, o problema (4.1) tem uma única solução de energia finita. Além disso, a energia é decrescente no tempo. Isto nos fornece limites uniformes para soluções $\{v^\varepsilon, w^\varepsilon\}$ o que nos permite passar ao limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ como na Seção 3.2. A única dificuldade é, mais uma vez, identificarmos o limite fraco do termo não linear. Temos que

$$w_x^\varepsilon \left(v_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon)^2 \right) \rightharpoonup \eta w_x \quad \text{em } L^2((0, L) \times (0, T))$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, onde

$$\eta = \rho + \frac{1}{2}w_x^2$$

e $\eta = \eta(t)$, já que independe de x . Multiplicando a primeira equação de (4.1) por $a(x) = \frac{x}{L}$ e integrando de 0 a L , obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L \varepsilon v_{tt}^\varepsilon a(x) dx &= \int_0^L \left[v_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon)^2 \right]_x a(x) dx \\ &= -\frac{1}{L} \int_0^L \left[v_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon)^2 \right] dx + \left(v_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon)^2 a(x) \right) (L, t) \\ &= -\varepsilon^\alpha v_t^\varepsilon(L, t) - \frac{1}{L} \int_0^L \left(v_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon)^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (4.6)$$

O lado esquerdo da equação acima tende a zero em $\mathcal{D}'(0, L)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Analisemos a convergência do lado direito de (4.6) quando $\varepsilon \rightarrow 0$

- Se $\alpha = 0$, teríamos apenas $v_t^\varepsilon(L, t)$ e nada poderíamos garantir sobre a convergência para zero do termo.
- Se $\alpha < 0$, o limite de $\varepsilon^\alpha v_t^\varepsilon(L, t)$ quando ε tende a zero, explode e, novamente, não podemos garantir a convergência adequada.
- Se $\alpha > 0$, temos que

$$-\varepsilon^\alpha v_t^\varepsilon(L, t) - \frac{1}{L} \int_0^L \left(v_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon)^2 \right) dx \rightarrow -\eta(t).$$

Portanto $\eta = 0$. Dessa forma, o limite de w^ε satisfaz

$$w \in L^\infty(0, T, W) \cap W^{1, \infty}(0, T, V)$$

e passando (4.3) ao limite, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$-\int_0^T (w_t, \phi_t) dt - \int_0^T (w_{xt}, \phi_{xt}) dt + \int_0^T (w_{xx} \phi_{xx}) dt + \int_0^T w_x(L, t) \phi_{xt}(L) dt - \int_0^T w(L, t) \phi_t(L) dt = 0,$$

para todo $\phi \in \mathcal{C}([0, T], W)$, tal que $\phi(x, 0) = \phi(x, T) = \phi_x(x, 0) = \phi_x(x, T) = 0$. Além disso, argumentando como no Seção 3.2 temos que

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1(x), \quad 0 < x < L.$$

Assim, $w \in L^\infty(0, T, W) \cap W^{1,\infty}(0, T, V)$ é solução fraca do seguinte problema:

$$\begin{cases} w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} = 0, & 0 < x < L, t > 0 \\ w(0, t) = w_x(0, t) = 0, & t > 0 \\ w_{xx}(L, t) = -w_{xt}(L, t), & t > 0 \\ (w_{xxx} - w_{xtt})(L, t) = w_t(L, t), & t > 0 \\ w(x, 0) = w_0(x), w_t(x, 0) = w_1(x), & 0 < x < L. \end{cases} \quad (4.7)$$

O operador associado ao sistema (4.7) é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações em $W \times V$ que denotaremos por $S(\cdot)$. Então, quando $\{w_0, w_1\} \in W \times V$, (4.7) tem uma única solução global fraca $S(t)\{w_0, w_1\} \in \mathcal{C}([0, \infty); W) \cap \mathcal{C}^1([0, \infty); V)$. Notemos que a solução que obtivemos no limite (4.7) não é, em princípio, contínua no tempo com valores em W e $\mathcal{C}^1$ com valores em V . Assim, a fim de concluirmos que a solução fraca obtido no limite é o solução semigrupo precisamos de mais um argumento.

O semigrupo $\{S(t)\}_{t>0}$ pode ser estendido a uma semigrupo das contrações $\{T(t)\}_{t>0}$ em $E = V \times L^2(0, L)$, onde $T(t)|_{W \times V} = S(t)$. Podemos ver que a solução já obtido no limite coincide com o que o semigrupo $\{T(t)\}_{t>0}$ fornece. Na verdade, utilizando a equação em (4.7) e a regularidade $L^\infty([0, +\infty; W) \cap W^{1,+\infty}([0, +\infty; V)$ temos que $w \in \mathcal{C}([0, +\infty; V) \cap \mathcal{C}^1([0, \infty); L^2(0, L))$ e que satisfaz a formulação fraca de (4.7) correspondendo às soluções dadas pelo semigrupo $\{T(t)\}_{t>0}$. Assim, $(w(t), w_t(t)) = T(t)(w_0, w_1)$. Uma vez que, (w_0, w_1) pertence a $W \times V$ e $\{T(t)\}_{t>0}$ é uma extensão do semigrupo original $\{S(t)\}_{t>0}$ deduzimos que $(w(t), w_t(t)) = S(t)(w_0, w_1)$ e, como consequência, obtemos $w \in \mathcal{C}([0, \infty); W) \cap \mathcal{C}^1([0, \infty); V)$.

Notemos que a energia de (4.7) dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2 + w_{xx}^2] dx,$$

satisfaz

$$\frac{d}{dt} E(t) = -w_t^2(L, t) - w_{xt}^2(L, t).$$

É bem conhecido que a energia de soluções de (4.7) tende exponencialmente uniformemente a zero quando t vai para infinito. Assim, é natural esperarmos que a energia de soluções de (4.1) tenda exponencialmente uniformemente para zero quando o parâmetro ε vai para zero. Analisemos isto na seção seguinte.

4.3 Estabilização uniforme quando $\varepsilon \rightarrow 0$

Nesta seção nos propomos a estudar a estabilização uniforme quando ε tende a zero. Para tanto, vamos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 4.3.1 *Seja $\{v, w\}$ solução global (fraca) do sistema (4.1) obtida no Teorema 4.1.2. Suponhamos que $0 \leq \alpha \leq 1$. Então existem constantes positivas $c, \mu > 0$ tais que*

$$E_\varepsilon(t) \leq cE_\varepsilon(0)e^{-\frac{\mu}{1+\varepsilon^\alpha E(0)}t}, \quad (4.8)$$

quando $t > 0$, para todo $0 < \varepsilon < 1$.

Observação 4.3.1 *Como uma consequência de (4.8), fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, podemos recuperar a propriedade de decaimento exponencial das soluções de (4.7).*

Prova do Teorema 4.3.1:

Provaremos (4.8) para soluções fortes uma vez que, por densidade, o resultado é válido para todas as soluções fracas.

Como antes, a fim de simplificarmos notações, vamos escrever $w = w^\varepsilon$, $v = v^\varepsilon$. Seja $\delta > 0$, consideremos a energia "perturbada" dada por

$$G_{\varepsilon, \delta}(t) = E_\varepsilon(t) + \delta F_\varepsilon(t)$$

e mostremos, como na Seção 3.3, que $G_{\varepsilon,\delta}$ desfruta das propriedades

$$c_1 E_\varepsilon(t) \leq G_{\varepsilon,\delta}(t) \leq c_2 E_\varepsilon(t) \quad (4.9)$$

e

$$\frac{d}{dt} G_{\varepsilon,\delta}(t) \leq -c_3 G_{\varepsilon,\delta}(t) \quad (4.10)$$

para constantes positivas c_1 , c_2 e c_3 , às quais serão explicitadas posteriormente.

Neste caso, vamos considerar o funcional F_ε dado por

$$F_\varepsilon(t) = \int_0^L \left[x(\varepsilon v_x v_t + w_x w_t) + w_{xt}(x w_x)_x - \frac{5}{8}(w w_t + w_x w_{xt}) - \frac{\varepsilon}{4} v v_t \right] dx.$$

O primeiro passo para provar (4.9) e (4.10) é estimar a derivada temporal de $F_\varepsilon(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{dF_\varepsilon}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^L \left[x(\varepsilon v_x v_t + w_x w_t) + w_{xt}(x w_x)_x - \frac{5}{8}(w w_t + w_x w_{xt}) - \frac{\varepsilon}{4} v v_t \right] dx \\ &= \int_0^L x [\varepsilon v_{xt} v_t + \varepsilon v_x v_{tt} + w_{xt} w_t + w_x w_{tt}] dx \\ &\quad + \int_0^L [w_{xtt}(x w_x)_x + w_{xt}(x w_{xt})_x] dx - \frac{5}{8} \int_0^L [w_t^2 + w w_{tt}] dx \\ &\quad - \frac{5}{8} \int_0^L [w_{xt}^2 + w_x w_{xtt}] dx - \frac{\varepsilon}{4} \int_0^L [v_t^2 + v v_{tt}] dx. \end{aligned}$$

Integração por partes nos dá

$$\begin{aligned} &\int_0^L w_{xtt}(x w_x)_x dx - \frac{5}{8} \int_0^L w_x w_{xtt} dx \\ &= - \int_0^L w_{xxtt}(x w_x) dx + [w_{xtt}(x w_x)] \Big|_0^L + \frac{5}{8} \int_0^L w w_{xxtt} - \frac{5}{8} [w w_{xtt}] \Big|_0^L dx \\ &= w_{xtt}(L, t) [L w_x(L, t)] - \frac{5}{8} w(L, t) w_{xtt}(L, t) - \int_0^L w_{xxtt} \left[(x w_x) - \frac{5}{8} w \right] dx \\ &= w_{xtt}(L, t) \left[L w_x(L, t) - \frac{5}{8} w(L, t) \right] - \int_0^L w_{xxtt} \left[x w_x - \frac{5}{8} w \right] dx \quad (4.11) \end{aligned}$$

Agora, usando as equações do sistema (4.1) e substituindo εv_{tt} e w_{tt} , obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dF_\varepsilon}{dt}(t) &= \int_0^L \varepsilon v_{tt} \left(xv_x - \frac{1}{4}v \right) dx + \int_0^L w_{tt} \left[xw_x - \frac{5}{8}w \right] dx \\
&\quad + \varepsilon \int_0^L xv_{xt}v_t + \int_0^L xw_{xt}w_t dx + \int_0^L w_{xt}(xw_{xt})_x - \frac{5}{8} \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx \\
&\quad - \frac{\varepsilon}{4} \int_0^L v_t^2 dx + \int_0^L w_{xtt}(xw_x)_x dx - \frac{5}{8} \int_0^L w_x w_{xtt} dx \\
&= \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2 \right)_x \left(xv_x - \frac{1}{4}v \right) dx \\
&\quad + \int_0^L \left\{ \left[\left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2 \right) w_x \right]_x - w_{xxxx} + w_{xxtt} \right\} \left(xw_x - \frac{5}{8}w \right) dx \\
&\quad + \varepsilon \int_0^L xv_{xt}v_t + \int_0^L xw_{xt}w_t dx + \int_0^L w_{xt}(xw_{xt})_x - \frac{5}{8} \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx \\
&\quad - \frac{\varepsilon}{4} \int_0^L v_t^2 dx + w_{xtt}(L, t) \left[Lw_x(L, t) - \frac{5}{8}w(L, t) \right] \\
&\quad - \int_0^L w_{xxtt} \left(xw_x - \frac{5}{8}w \right) dx \\
&= \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2 \right)_x \left(xv_x - \frac{1}{4}v \right) dx \\
&\quad + \int_0^L \left\{ -w_{xxxx} + \left[\left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2 \right) w_x \right]_x \right\} \left(xw_x - \frac{5}{8}w \right) dx \\
&\quad + \varepsilon \int_0^L xv_{xt}v_t + \int_0^L xw_{xt}w_t dx + \int_0^L w_{xt}(xw_{xt})_x - \frac{5}{8} \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx \\
&\quad - \frac{\varepsilon}{4} \int_0^L v_t^2 dx + w_{xtt}(L, t) \left[Lw_x(L, t) - \frac{5}{8}w(L, t) \right]. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

As identidades seguintes (4.13)-(4.19) são dedicadas a estimar as integrais em (4.12).

Notemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2 \right)_x \left(xv_x - \frac{1}{4}v \right) dx \\
&= \left[v_x + \frac{1}{2}w_x^2 \right] (L, t) \left[Lv_x(L, t) - \frac{1}{4}v(L, t) \right] \\
&\quad - \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2 \right) \left(xv_{xx} + v_x - \frac{1}{4}v_x \right) dx \\
&= -\varepsilon v_t(L, t) \left[Lv_x(L, t) - \frac{1}{4}v(L, t) \right] - \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2 \right) \left(xv_{xx} - \frac{3}{4}v_x \right) dx \tag{4.13}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x \left(x w_x - \frac{5}{8} w \right) dx \\
&= \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right] \left(x w_x - \frac{5}{8} w \right) \Big|_0^L - \int_0^L \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right] \left(x w_x - \frac{5}{8} w \right)_x dx \\
&= \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) (L, t) w_x(L, t) \left[L w_x(L, t) - \frac{5}{8} w(L, t) \right] \\
&\quad - \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \left(x w_{xx} + \frac{3}{8} w_x \right) dx. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Somando (4.13) com (4.14) obtemos a identidade

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)_x \left(x v_x - \frac{1}{4} v \right) dx + \int_0^L \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x \left(x w_x - \frac{5}{8} w \right) dx \\
&= - \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) \left(x v_{xx} - \frac{3}{4} v_x \right) dx - \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \left(x w_{xx} + \frac{3}{8} w_x \right) dx \\
&\quad - \varepsilon^\alpha v_t(L, t) \left[L v_x(L, t) - \frac{1}{4} v(L, t) \right] \\
&\quad + \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) (L, t) w_x(L, t) \left[L w_x(L, t) - \frac{5}{8} w(L, t) \right] \\
&= - \int_0^L \frac{3}{4} \left[v_x^2 + v_x w_x^2 + \frac{1}{4} w_x^4 \right] \\
&\quad - \int_0^L \left[x v_x v_{xx} + \frac{1}{2} x v_{xx} w_x^2 + x v_x w_x w_{xx} + \frac{1}{2} x w_x^3 w_{xx} \right] \\
&\quad - \varepsilon^\alpha v_t(L, t) \left[L v_x(L, t) - \frac{1}{4} v(L, t) \right] \\
&\quad + \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) (L, t) w_x(L, t) \left[L w_x(L, t) - \frac{5}{8} w(L, t) \right] \\
&= - \frac{3}{4} \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L x \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 \right]_x dx \\
&\quad - \varepsilon^\alpha v_t(L, t) \left[L v_x(L, t) - \frac{1}{4} v(L, t) \right] \\
&\quad + \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) (L, t) w_x(L, t) \left[L w_x(L, t) - \frac{5}{8} w(L, t) \right].
\end{aligned}$$

Fazendo integração por partes, segue

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)_x \left(x v_x - \frac{1}{4} v \right) dx + \int_0^L \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x \left(x w_x - \frac{5}{8} w \right) dx \\
&= -\frac{3}{4} \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx - \frac{x}{2} \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 \Big|_0^L \\
&\quad - \varepsilon^\alpha v_t(L, t) \left[L v_x(L, t) - \frac{1}{4} v(L, t) \right] \\
&\quad + \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)(L, t) w_x(L, t) \left[L w_x(L, t) - \frac{5}{8} w(L, t) \right] \\
&\leq -\frac{1}{4} \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx - \frac{L}{2} \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)(L, t) - \varepsilon^\alpha v_t(L, t) \left[L v_x - \frac{1}{4} v(L, t) \right] \\
&\quad + \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)(L, t) w_x(L, t) \left[L w_x(L, t) - \frac{5}{8} w(L, t) \right] \\
&= -\frac{1}{4} \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx + \frac{L}{2} \varepsilon^\alpha v_t^2(L, t) - \varepsilon^\alpha v_t(L, t) \left[L v_x(L, t) - \frac{1}{4} v(L, t) \right] \\
&\quad + \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)(L, t) w_x(L, t) \left[L w_x(L, t) - \frac{5}{8} w(L, t) \right]. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
& - \int_0^L w_{xxxx} \left(x w_x - \frac{5}{8} w \right) dx \\
&= -w_{xxx}(L, t) \left[L w_x - \frac{5}{8} w \right](L, t) + \int_0^L w_{xxx} \left(x w_{xx} + \frac{3}{8} w_x \right) dx \\
&= -w_{xxx}(L, t) \left[L w_x - \frac{5}{8} w \right](L, t) + \frac{1}{2} \int_0^L x [(w_{xx})^2]_x dx + \frac{3}{8} \int_0^L w_x w_{xxx} dx \\
&= -w_{xxx}(L, t) \left[L w_x - \frac{5}{8} w \right](L, t) - \frac{1}{2} \int_0^L (w_{xx})^2 dx + \left[\frac{x}{2} (w_{xx}^2) \right] \Big|_0^L \\
&\quad - \frac{3}{8} \int_0^L (w_{xx})^2 dx + \frac{3}{8} (w_{xx} w_x) \Big|_0^L \\
&= -w_{xxx}(L, t) \left[L w_x - \frac{5}{8} w \right](L, t) + \frac{L}{2} w_{xt}^2(L, t) \\
&\quad + \frac{3}{8} w_{xx}(L, t) w_x(L, t) - \frac{7}{8} \int_0^L (w_{xx})^2 dx. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Para concluir esta etapa, vamos calcular mais três termos em (4.12). Primeiro

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \int_0^L x v_{xt} v_t dx &= \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L x [v_t^2]_x = \frac{\varepsilon}{2} [x v_t^2] \Big|_0^L - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L v_t^2 dx \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} L v_t^2(L, t) - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L v_t^2 dx \\
 &\leq \frac{\varepsilon^\alpha}{2} L v_t^2(L, t) - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L v_t^2 dx,
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

desde que $0 < \varepsilon < 1$ e $0 \leq \alpha \leq 1$.

Temos também

$$\begin{aligned}
 \int_0^L x w_{xt} w_t dx &= \frac{1}{2} \int_0^L x [w_t^2]_x = \frac{1}{2} [x w_t^2] \Big|_0^L - \frac{1}{2} \int_0^L w_t^2 dx \\
 &= \frac{L}{2} w_t^2(L, t) - \frac{1}{2} \int_0^L w_t^2 dx
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

e

$$\begin{aligned}
 \int_0^L w_{xt} (x w_{xt})_x dx &= \int_0^L [w_{xt}^2 + x w_{xt} (w_{xt})_x] \\
 &= \int_0^L w_{xt}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L x [w_{xt}^2]_x dx \\
 &= \int_0^L w_{xt}^2 dx + \frac{1}{2} [x w_{xt}^2] \Big|_0^L - \frac{1}{2} \int_0^L w_{xt}^2 dx \\
 &= \frac{L}{2} w_{xt}^2(L, t) + \frac{1}{2} \int_0^L w_{xt}^2 dx.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Substituindo (4.15)-(4.19) em (4.12), obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{dF_\varepsilon}{dt}(t) &\leq -\frac{1}{4} \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx + \frac{L}{2} \varepsilon^\alpha v_t^2(L, t) \\
 &\quad - \varepsilon^\alpha v_t(L, t) \left[L v_x(L, t) - \frac{1}{4} v(L, t) \right] \\
 &\quad + \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)(L, t) w_x(L, t) \left[L w_x(L, t) - \frac{5}{8} w(L, t) \right] \\
 &\quad - w_{xxx}(L, t) \left[L w_x(L, t) - \frac{5}{8} w(L, t) \right] \\
 &\quad + \frac{L}{2} w_{xt}^2(L, t) + \frac{3}{8} w_{xx}(L, t) w_x(L, t) - \frac{7}{8} \int_0^L w_{xx}^2 dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varepsilon^\alpha}{2} L v_t^2(L, t) - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L v_t^2 dx + \frac{L}{2} w_t^2(L, t) - \frac{1}{2} \int_0^L w_t^2 dx \\
& + \frac{L}{2} w_{xt}^2(L, t) + \frac{1}{2} \int_0^L w_{xt}^2 dx - \frac{5}{8} \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2] dx \\
& - \frac{\varepsilon}{4} \int_0^L v_t^2 dx + w_{xtt}(L, t) \left[L w_x(L, t) - \frac{5}{8} w(L, t) \right] \\
= & - \frac{1}{4} \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx - \frac{7}{8} \int_0^L w_{xx}^2 dx - \frac{3}{4} \varepsilon \int_0^L v_t^2 dx \\
& - \frac{1}{2} \int_0^L w_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L w_{xt}^2 dx - \frac{5}{8} \int_0^L w_t^2 dx - \frac{5}{8} \int_0^L w_{xt}^2 dx \\
& - \left(w_{xxx} - w_{xtt} - \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right) (L, t) \left(L w_x - \frac{5}{8} w \right) (L, t) \\
& - \varepsilon^\alpha v_t(L, t) \left(L v_x(L, t) - \frac{1}{4} v(L, t) \right) + \frac{L}{2} w_{xt}^2(L, t) + \frac{3}{8} w_{xx}(L, t) w_x(L, t) \\
& + L \varepsilon^\alpha v_t^2(L, t) + \frac{L}{2} w_t^2(L, t) + \frac{L}{2} w_{xt}^2(L, t). \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Vamos agora obter estimativas para os termos de fronteira em (4.20). Notemos inicialmente que (4.1)₆ implica em

$$\begin{aligned}
& \left| - \left(w_{xxx} - w_{xtt} - \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right) (L, t) \left(L w_x - \frac{5}{8} w \right) (L, t) \right| \\
& = \left| - w_t(L, t) \left(L w_x - \frac{5}{8} w \right) (L, t) \right| \\
& = |w_t(L, t)| \left| \left(L w_x - \frac{5}{8} w \right) (L, t) \right|. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Como $w \in H^2(0, L)$ e satisfaz as condições $w(0) = w_x(0) = 0$, então tomando $\theta = L w_x - \frac{5}{8} w$, temos $\theta \in V$. Assim, pelo Teorema do Traço (Teorema 1.2.2), segue que

$$\begin{aligned}
|\theta(L)| &= \left| L w_x(L, t) - \frac{5}{8} w(L, t) \right| \leq c \left\| L w_x - \frac{5}{8} w \right\|_{H^1(0, L)} \\
&\leq c [\|w_{xx}\| + \|w_x\|] \leq c \|w_{xx}\|. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Substituindo (4.22) em (4.21) temos:

$$\begin{aligned}
& \left| - \left(w_{xxx} - w_{xtt} - \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right) (L, t) \left(L w_x - \frac{5}{8} w \right) (L, t) \right| \\
& \leq c |w_t(L, t)| \|w_{xx}\| \leq \frac{c}{\eta} |w_t(L, t)|^2 + \eta c \int_0^L w_{xx}^2 dx \tag{4.23}
\end{aligned}$$

com $\eta > 0$ e c uma constante positiva.

Por (4.1)₅ e novamente usando o Teorema do Traço e a Desigualdade de Young, agora com $\theta = w_x \in V$, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{8} w_{xx}(L, t) w_x(L, t) \right| &= \frac{3}{8} |w_{xt}(L, t)| |w_x(L, t)| \leq c |w_{xt}(L, t)| \|w_{xx}\| \\ &\leq \frac{c}{\eta} |w_{xt}(L, t)|^2 + c\eta \int_0^L w_{xx}^2 dx. \end{aligned} \quad (4.24)$$

com $\eta > 0$.

Finalmente, temos

$$\begin{aligned} \varepsilon^\alpha v_t(L, t) \left[L v_x(L, t) - \frac{1}{4} v(L, t) \right] &\leq \varepsilon^\alpha L |v_t(L, t) v_x(L, t)| + \frac{\varepsilon^\alpha}{4} |v_t(L, t) v(L, t)| \\ &\leq \varepsilon^\alpha c \left[\frac{2}{\eta} v_t^2(L, t) + \eta v_x^2(L, t) + \eta \int_0^L v_x^2 dx \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

Encontremos estimativas para os dois últimos termos do membro direito de (4.25).

Observemos que

$$\begin{aligned} \left(v_x(L, t) + \frac{1}{2} w_x^2(L, t) \right)^2 &= v_x^2(L, t) + v_x(L, t) w_x^2(L, t) + \frac{1}{4} (w_x^2(L, t))^2 \\ &\geq v_x^2(L, t) - |v_x(L, t) w_x^2(L, t)| + \frac{1}{4} (w_x^2(L, t))^2 \\ &\geq v_x^2(L, t) - \frac{1}{2} v_x^2(L, t) - \frac{1}{2} w_x^4(L, t) + \frac{1}{4} w_x^4(L, t) \\ &= \frac{1}{2} v_x^2(L, t) - \frac{1}{4} w_x^4(L, t). \end{aligned}$$

Esta desigualdade combinada com as condições de fronteira quando $x = L$ em (4.1) nos dá

$$\begin{aligned} v_x^2(L, t) &\leq 2 \left[\left(v_x(L, t) + \frac{1}{2} w_x^2(L, t) \right)^2 + \frac{1}{4} w_x^4(L, t) \right] \\ &= 2 \left(v_x(L, t) + \frac{1}{2} w_x^2(L, t) \right)^2 + \frac{1}{2} w_x^4(L, t) \\ &= 2\varepsilon^{2\alpha} v_t^2(L, t) + \frac{1}{2} w_x^4(L, t). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Aplicando o Teorema do Traço para $\theta = w_x^4 \in H^1(0, L)$ e usando (4.5) segue

$$\begin{aligned}
 v_x^2(L, t) &\leq 2\varepsilon^{2\alpha} v_t^2(L, t) + \frac{1}{2} w_x^2(L, t) w_x^2(L, t) \\
 &\leq 2\varepsilon^{2\alpha} v_t^2(L, t) + cE_\varepsilon(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
 &\leq 2\varepsilon^\alpha v_t^2(L, t) + cE_\varepsilon(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx,
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

já que $0 \leq \varepsilon \leq 1$ e $\alpha > 0$. Agora, vamos limitar o termo $\int_0^L v_x^2$ em (4.25). Para isto,

$$\begin{aligned}
 \int_0^L v_x^2 dx &\leq 2 \int_0^L \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 + \frac{1}{4} w_x^4 \right] dx \\
 &= 2 \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx + c \|w_x\|_{L^4(0, L)}^4 \\
 &\leq 2 \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx + c \|w_x\|_{H_0^1(0, L)}^4 \\
 &= 2 \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx + c \|w_{xx}\|^4 \\
 &= 2 \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx + c \left(\int_0^L w_{xx}^2 dx \right)^{4/2} \\
 &= 2 \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx + c \left(\int_0^L w_{xx}^2 dx \right)^2 \\
 &= 2 \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx + c \left(\int_0^L w_{xx}^2 dx \right) \left(\int_0^L w_{xx}^2 dx \right) \\
 &\leq 2 \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx + cE(t) \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
 &\leq 2 \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx + cE(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx,
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

onde c é uma constante positiva.

Substituindo (4.27) e (4.28) em (4.25) obtemos

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^\alpha v_t(L, t) \left[Lv_x(L, t) - \frac{1}{4}v(L, t) \right] \\
& \leq \varepsilon^\alpha c \left[\frac{2}{\eta} v_t^2(L, t) + \eta \left(2\varepsilon^\alpha v_t^2(L, t) + cE_\varepsilon(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx \right) \right. \\
& \quad \left. + \eta \left(2 \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2 \right)^2 dx + cE(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx \right) \right] \\
& = 2\varepsilon^\alpha \left[\left(\frac{1}{\eta} + \eta\varepsilon^\alpha \right) v_t^2(L, t) + \eta \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2 \right)^2 dx + cE(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx \right] \quad (4.29)
\end{aligned}$$

Dessa forma, combinando (4.20)-(4.24) e (4.29) temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} F_\varepsilon(t) & \leq -\frac{1}{4} \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2 \right)^2 dx - \frac{7}{8} \int_0^L w_{xx}^2 dx - \frac{3}{4}\varepsilon \int_0^L v_t^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L w_t^2 dx \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_0^L w_{xt}^2 dx - \frac{5}{8} \int_0^L w_t^2 dx - \frac{5}{8} \int_0^L w_{xt}^2 dx \\
& \quad - \left(w_{xxx} - w_{xtt} - \left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2 \right) w_x \right) (L, t) \left(Lw_x - \frac{5}{8}w \right) (L, t) \\
& \quad - \varepsilon^\alpha v_t(L, t) \left[Lv_x(L, t) - \frac{1}{4}v(L, t) \right] + \frac{3}{8} w_{xx}(L, t) w_x(L, t) \\
& \quad + L\varepsilon^\alpha v_t^2(L, t) + \frac{L}{2} w_t^2(L, t) + Lw_{xt}^2(L, t) \\
& \leq -\frac{1}{4} \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2 \right)^2 dx - \frac{7}{8} \int_0^L w_{xx}^2 dx - \frac{3}{4}\varepsilon \int_0^L v_t^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L w_t^2 dx \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_0^L w_{xt}^2 dx - \frac{5}{8} \int_0^L w_t^2 dx - \frac{5}{8} \int_0^L w_{xt}^2 dx + \frac{c}{\eta} |w_t(L, t)|^2 + \eta c \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
& \quad + 2c\varepsilon^\alpha \left[\left(\frac{1}{\eta} + \eta\varepsilon^\alpha \right) v_t^2(L, t) + \eta \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2 \right)^2 dx + \eta cE_\varepsilon(0) \int_0^L w_{xx}^2 dx \right] \\
& \quad + \frac{c}{\eta} |w_{xt}(L, t)|^2 + c\eta \int_0^L w_{xx}^2 dx + L\varepsilon^\alpha v_t^2(L, t) + \frac{L}{2} w_t^2(L, t) + Lw_{xt}^2(L, t) \\
& = -\frac{3}{4}\varepsilon \int_0^L v_t^2 dx - \frac{9}{8} \int_0^L w_t^2 dx - \frac{1}{8} \int_0^L w_{xt}^2 dx \\
& \quad - \left(\frac{7}{8} - \eta c(1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)) \right) \int_0^L w_{xx}^2 dx - \left[\frac{1}{4} - \varepsilon^\alpha \eta c \right] \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2 \right)^2 dx \\
& \quad + \left[\frac{1}{\eta} + \frac{L}{2} \right] w_t^2(L, t) + \left[\frac{c}{\eta} + L \right] w_{xt}^2(L, t) + \left[\frac{1}{\eta} + \eta\varepsilon^\alpha + L \right] c\varepsilon^\alpha v_t^2(L, t). \quad (4.30)
\end{aligned}$$

Estimemos a derivada temporal de $G_{\varepsilon,\delta}$. Usando (4.5) obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G_{\varepsilon,\delta}(t) &\leq -\varepsilon^\alpha v_t^2(L, t) - w_{xt}^2(L, t) - w_t^2(L, t) + \delta \left\{ -\frac{3}{4}\varepsilon \int_0^L v_t^2 dx \right. \\
&\quad -\frac{9}{8} \int_0^L w_t^2 dx - \frac{1}{8} \int_0^L w_{xt}^2 dx - \left(\frac{7}{8} - \eta c(1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)) \right) \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
&\quad - \left[\frac{1}{4} - \varepsilon^\alpha \eta c \right] \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx + \left[\frac{c}{\eta} + \frac{L}{2} \right] w_t^2(L, t) \\
&\quad \left. + \left[\frac{c}{\eta} + L \right] w_{xt}^2(L, t) + \left[\frac{1}{\eta} + \eta \varepsilon^\alpha + L \right] c \varepsilon^\alpha v_t^2(L, t) \right\} \\
&= -\frac{3\delta}{4}\varepsilon \int_0^L v_t^2 dx - \frac{9\delta}{8} \int_0^L w_t^2 dx - \frac{\delta}{8} \int_0^L w_{xt}^2 dx \\
&\quad -\delta \left[\frac{7}{8} - \eta c(1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)) \right] \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
&\quad -\delta \left[\frac{1}{4} - \varepsilon^\alpha \eta c \right] \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx - \left[1 - \delta \left(\frac{c}{\eta} + \frac{L}{2} \right) \right] w_t^2(L, t) \\
&\quad - \left[1 - \delta \left(\frac{c}{\eta} + L \right) \right] w_{xt}^2(L, t) - \left[\varepsilon^\alpha - \varepsilon^\alpha \delta c \left(\frac{1}{\eta} + \eta \varepsilon^\alpha + L \right) \right] v_t^2(L, t)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

para alguma constante positiva c .

Agora, escolhamos η sob a condição

$$\eta = \frac{\lambda}{1 + \varepsilon^\alpha E(0)},$$

com $\lambda > 0$ (suficientemente pequeno mas independente de ε e $E(0)$) de modo que de (4.31) segue

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G_{\varepsilon,\delta}(t) &\leq -\frac{3\delta}{4}\varepsilon \int_0^L v_t^2 dx - \frac{9\delta}{8} \int_0^L w_t^2 dx - \frac{\delta}{8} \int_0^L w_{xt}^2 dx \\
&\quad -\delta \left[\frac{7}{8} - \lambda c \right] \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
&\quad -\frac{\delta}{2} \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 dx - \left[1 - \delta \left(\frac{c}{\eta} + \frac{L}{2} \right) \right] w_t^2(L, t) \\
&\quad - \left[1 - \delta \left(\frac{c}{\eta} + L \right) \right] w_{xt}^2(L, t) - \left[\varepsilon^\alpha - \varepsilon^\alpha \delta c \left(\frac{1}{\eta} + \eta \varepsilon^\alpha + L \right) \right] v_t^2(L, t)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Também podemos escolher $\delta > 0$ tal que

$$1 - \delta c \left[\frac{L}{2} + \frac{1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)}{\lambda} \right] \geq 0, \quad 1 - \delta c \left(L + \frac{c(1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0))}{\lambda} \right) \geq 0 \quad (4.33)$$

e

$$\varepsilon^\alpha - \varepsilon^\alpha \delta c \left(\frac{1 + \varepsilon^\alpha E(0)}{\lambda} + \frac{\varepsilon^\alpha \lambda}{1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)} + L \right) \geq 0. \quad (4.34)$$

Satisfeitas estas condições, em vista de (4.32), deduzimos que

$$\frac{d}{dt} G_{\varepsilon, \delta}(t) \leq -\frac{\delta}{4} E_\varepsilon(t) \quad (4.35)$$

Observemos que (4.33) e (4.34) se mantêm, se

$$\delta \leq \frac{c}{1 + \varepsilon^\alpha E_\varepsilon(0)},$$

com $c > 0$ independente de $0 < \varepsilon < 1$ e da solução. Além disso, procedendo como em (3.58) temos

$$|F_\varepsilon(t)| \leq c[E_\varepsilon(t) + \varepsilon E_\varepsilon(t)^2] \leq c[1 + \varepsilon E_\varepsilon(0)]E_\varepsilon(t)$$

Consequentemente,

$$|G_{\varepsilon, \delta}(t) - E_\varepsilon(t)| = \delta |F_\varepsilon(t)| \leq c\delta[1 + \varepsilon E_\varepsilon(0)]E_\varepsilon(t)$$

e, para c suficientemente pequeno,

$$|G_{\varepsilon, \delta}(t) - E_\varepsilon(t)| \leq \frac{1}{2} E_\varepsilon(t). \quad (4.36)$$

Assim, tendo em conta (4.35) e (4.36), obtemos (4.8) como queríamos. ■

Capítulo 5

Estudo das equações quando $\alpha = 0$

5.1 Limite assintótico: Amortecimento interno

Nesta seção nos propomos a estudar o sistema de Von Kármán para o caso $\alpha = 0$, ou seja, para cada $\varepsilon > 0$, consideremos

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon v_{tt} = \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]_x + v_t & 0 < x < L, \ t > 0 \\ w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} = \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x - w_t + w_{xxt}, & 0 < x < L, \ t > 0 \\ v(0, t) = v(L, t) = 0, & t > 0 \\ w(0, t) = w(L, t) = w_{xx}(0, t) = w_{xx}(L, t) = 0, & t > 0 \\ v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), & 0 < x < L \\ w(x, 0) = w_0(x), w_t(x, 0) = w_1(x), & 0 < x < L \end{array} \right. \quad (5.1)$$

A energia $E_\varepsilon(t)$ de (5.1) é dada por

$$E_\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \varepsilon v_t^2 + w_t^2 + w_{xt}^2 + w_{xx}^2 + \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 \right\} dx \quad (5.2)$$

e satisfaz a lei de dissipação

$$\frac{d}{dt} E_\varepsilon(t) = - \int_0^L [v_t^2 + w_t^2 + w_{xt}^2] dx. \quad (5.3)$$

Foi provado na Seção 3.1 que (5.1) possui única solução. Vamos agora analisar o limite assintótico, quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Devido a (5.3), sabemos que as seguintes sequências (em ε) permanecem limitadas em $L^\infty(0, +\infty, L^2(0, L))$:

$$\{\sqrt{\varepsilon}v_t^\varepsilon\}, \quad \left\{v_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon)^2\right\}, \quad \{w_t^\varepsilon\}, \quad \{w_{xt}^\varepsilon\}, \quad \{w_{xx}^\varepsilon\}.$$

Procedendo como na Seção 3.2, e extraíndo subsequências, podemos garantir que, quando $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$v^\varepsilon \rightharpoonup z \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(0, L)), \quad (5.4)$$

$$w^\varepsilon \rightharpoonup w \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; [H^2 \cap H_0^1](0, L)) \cap W^{1,\infty}(0, T; H_0^1(0, L)), \quad (5.5)$$

$$w^\varepsilon \rightarrow w \text{ em } L^\infty(0, T; H^{2-\delta}(0, L)), \quad (5.6)$$

$$\varepsilon v_{tt}^\varepsilon \rightharpoonup 0 \text{ em } H^{-1}(0, T; L^2(0, L)), \quad (5.7)$$

$$\left(v_x^\varepsilon + \frac{1}{2}(w_x^\varepsilon)^2\right) \rightharpoonup \eta \text{ em } L^2((0, L) \times (0, T)). \quad (5.8)$$

Analisemos cuidadosamente o limite fraco do termo não linear

$$\left[\left(v_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)w_x\right]_x.$$

Segue de (5.4) e (5.6) que

$$\eta = z_x + \frac{1}{2}w_x^2. \quad (5.9)$$

Assim, da primeira equação em (5.1), (5.7) e (5.9) segue

$$z_t = \left[z_x + \frac{1}{2}w_x^2\right]_x.$$

Dessa forma, o limite

$$(z, w) \in L^\infty(0, \infty, H_0^1(0, L)) \times [L^\infty(0, T, [H^2 \cap H_0^1](0, L)) \cap W^{1,\infty}(0, T, L^2(0, L))]$$

é uma solução fraca de

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_t = \left[z_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]_x, & 0 < x < L, \ t > 0 \\ w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} = \left[\left(z_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x - w_t + w_{xt}, & 0 < x < L, \ t > 0 \\ z(0, t) = z(L, t) = 0, & t > 0 \\ w(0, t) = w(L, t) = w_{xx}(0, t) = w_{xx}(L, t) = 0, & t > 0 \\ z(x, 0) = v_0(x) \\ w(x, 0) = w_0(x), \ w_t(x) = w_1(x), & 0 < x < L \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Notemos que no processo de limite, podemos manter o dado inicial v_0 para z , mas não para a sua velocidade z_t .

O sistema (5.10) é o acoplamento entre uma equação parabólica e uma equação hiperbólica de quarta ordem. Neste sentido, (5.10) é semelhante a um sistema termoelástico.

A energia total associada ao problema (5.10) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ w_t^2 + w_{xt}^2 + w_{xx}^2 + \left(z_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right)^2 \right\} dx$$

e satisfaz

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^L [z_t^2 + w_t^2 + w_{xt}^2] dx.$$

O problema (5.10) está bem posto no espaço de energia finita

$$\mathcal{Y} = [H^2 \cap H_0^1](0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L).$$

De acordo com o Teorema 3.3.1 e passando ao limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, a seguinte taxa de decaimento exponencial é obtida para as soluções de (5.10):

$$E(t) \leq cE(0)e^{-\frac{\mu}{1+E(0)}t},$$

para todo $t > 0$ onde c e μ são constantes positivas.

5.2 Limite assintótico: Amortecimento na fronteira

Consideremos agora o problema (4.1) quando $\alpha = 0$, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon v_{tt} = \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right]_x, & 0 < x < L, \ t > 0 \\ w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} = \left[\left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right]_x, & 0 < x < L, \ t > 0 \\ v(0, t) = w(0, t) = w_x(0, t) = 0, & t > 0 \\ \left[v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right] (L, t) = -v_t(L, t), & t > 0 \\ w_{xx}(L, t) = -w_{xt}(L, t), & t > 0 \\ \left[w_{xxx} - w_{xtt} - \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right] (L, t) = w_t(L, t), & t > 0 \\ v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), & 0 < x < L \\ w(x, 0) = w_0(x), w_t(x, 0) = w_1(x), & 0 < x < L. \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Para passarmos o limite quando ε tende a zero, temos que identificar o limite fraco do termo não linear

$$\left[w_x^\varepsilon \left(v_x^\varepsilon + \frac{1}{2} (w_x^\varepsilon)^2 \right) \right]_x.$$

Podemos garantir que

$$w^\varepsilon \rightarrow w \text{ em } L^\infty(0, T, H^{2-\delta}(0, L)) \quad (5.12)$$

$$v^\varepsilon \rightharpoonup v \text{ em } L^2(0, T, H^1(0, L)) \quad (5.13)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Logo, das convergências anteriores segue

$$w_x^\varepsilon \left(v_x^\varepsilon + \frac{1}{2} (w_x^\varepsilon)^2 \right) \rightharpoonup \eta w_x \text{ em } L^2((0, L) \times (0, T)),$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e

$$\eta = v_x + \frac{1}{2} w_x^2.$$

Seja $a(x) = \frac{x}{L}$, $0 < x < L$. Multiplicando a primeira equação de (5.11)₁ por $a(x)$ e

integrando no espaço, obtemos

$$\int_0^L \varepsilon v_{tt}^\varepsilon a(x) dx = \int_0^L \left[v_x^2 + \frac{1}{2} (w_x^\varepsilon)^2 \right]_x a(x) dx,$$

ou seja,

$$\varepsilon \frac{d^2}{dt^2} \int_0^L v^\varepsilon a(x) dx = \int_0^L \left[v_x^\varepsilon + \frac{1}{2} (w_x^\varepsilon)^2 \right]_x a(x) dx.$$

Fazendo integração por partes e usando as condições de fronteira, segue

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d^2}{dt^2} \int_0^L v^\varepsilon a(x) dx &= -\frac{1}{L} \int_0^L \left(v_x^\varepsilon + \frac{1}{2} (w_x^\varepsilon)^2 \right) dx + \left(v_x^\varepsilon + \frac{1}{2} (w_x^\varepsilon)^2 \right) (L, t) \\ &= -v_t^\varepsilon(L, t) - \frac{1}{L} v^\varepsilon(L, t) - \frac{1}{2L} \int_0^L (w_x^\varepsilon)^2 dx. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Devido à dissipação de energia, sabemos que $\{v_t^\varepsilon(L, t)\}$ é limitada em $L^2(0, +\infty)$. Portanto, podemos extrair uma subsequência de $v^\varepsilon(L, t)$ que converge fraco em $H_{loc}^1(0, \infty)$ (quando $\varepsilon \rightarrow 0$) para alguma função $\xi = \xi(t)$. Então da equação (5.14), ξ satisfaz

$$\xi_t + \frac{1}{L} \xi + \frac{1}{2L} \int_0^L w_x^2 dx = 0,$$

ou seja,

$$\xi_t + \frac{1}{L} \left[\xi + \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 dx \right] = 0.$$

Por outro lado, integrando η de 0 a L , obtemos

$$\int_0^L \eta(t) dx = \int_0^L \left(v_x + \frac{1}{2} w_x^2 \right) dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned} L\eta(t) &= \int_0^L v_x dx + \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 dx \\ &= v(L, t) + \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 dx \\ &= \xi(t) + \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 dx \end{aligned}$$

Além disso, desde que $\{v^\varepsilon(L, t)\}$ seja limitado em $H^1(0, T)$ segue, pelo Teorema 1.2.4, que $v^\varepsilon(L, t) \rightarrow \xi(t)$ em $\mathcal{C}([0, T])$ para qualquer $T > 0$ finito. Consequentemente, $\xi(0) =$

$v_0(L)$. Assim, o sistema (5.11) converge, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para

$$\left\{ \begin{array}{ll} \xi_t + \frac{1}{L} \left[\xi + \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 \right] dx = 0, & 0 < x < L, \ t > 0 \\ w_{tt} + w_{xxxx} - w_{xxtt} - \frac{1}{L} \left[\xi + \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 \right] w_{xx} = 0, & 0 < x < L, \ t > 0 \\ w(0, t) = w_x(0, t) = 0, & t > 0 \\ w_{xx}(L, t) = -w_{xt}(L, t), & t > 0 \\ \left[w_{xxx} - w_{xxt} - \frac{1}{L} \left(\xi(t) + \frac{1}{2} w_x^2 \right) w_x \right] (L, t) = w_t(L, t), & t > 0 \\ \xi(0) = v_0(x), & 0 < x < L \\ w(x, 0) = w_0(x), & 0 < x < L \end{array} \right. \quad (5.15)$$

A energia do sistema limite é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [w_t^2 + w_{xt}^2 + w_{xx}^2] + \frac{1}{2L} \left[\int_0^L \left(\xi + \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 dx \right) dx \right]^2 \quad (5.16)$$

que é limite natural das energias dos ε -sistemas.

Notemos ainda que

$$\frac{d}{dt} E(t) = -w_t^2(L, t) - w_{xt}^2(L, t) - \|\xi_t\|^2. \quad (5.17)$$

De fato, multipliquemos (5.15)₁ por ξ_t e integremos (no espaço) de 0 a L .

$$\int_0^L \xi_t^2 dx + \int_0^L \frac{1}{L} \left[\xi + \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 dx \right] \xi_t dx = 0 \quad (5.18)$$

Além disso, multipliquemos (5.15)₂ por w_t e integremos de 0 a L .

$$\int_0^L w_{tt} w_t dx + \int_0^L w_{xxxx} w_t dx - \int_0^L w_{xxtt} w_t dx - \int_0^L \frac{1}{L} \left[\xi + \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 dx \right] w_{xx} w_t = 0, \quad (5.19)$$

ou seja, fazendo integração por partes, temos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{1}{2} [|w_t|^2 + |w_{xx}|^2 + |w_{xt}|^2] + \left[w_{xxx} w_t \Big|_0^L \right] - \left[w_{xx} w_{xt} \Big|_0^L \right] - \left[w_{xxt} w_t \Big|_0^L \right] \\ & + \int_0^L \frac{1}{L} \left[\xi(t) + \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 dx \right] w_x w_{xt} - \left[\frac{1}{L} \left[\xi(t) + \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 dx \right] w_x w_t \Big|_0^L \right] = 0 \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} [|w_t|^2 + |w_{xx}|^2 + |w_{xt}|^2] + w_{xt}^2(L, t) + \int_0^L \frac{1}{L} \left[\xi(t) + \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 dx \right] w_x w_{xt} \\ + \left\{ w_{xxx} - w_{xtt} - \left[\frac{1}{L} \left(\xi(t) + \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 dx \right) w_x \right] \right\} (L, t) w_t(L, t) = 0 \end{aligned}$$

Usando as condições de contorno em (5.15), segue

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} [|w_t|^2 + |w_{xx}|^2 + |w_{xt}|^2] - w_t^2(L, t) + w_{xt}^2(L, t) + \int_0^L \frac{1}{L} \left[\xi(t) + \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 dx \right] w_x w_{xt} dx = 0. \quad (5.20)$$

Por outro lado, observemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2L} \left[\int_0^L \left(\xi(t) + \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 dx \right) dx \right]^2 \\ = \left[\frac{1}{2L} \cdot 2 \int_0^L \left(\xi(t) + \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 dx \right) dx \right] \left[\xi_t + \frac{1}{2} \int_0^L 2w_x w_{xt} dx \right] \\ = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\xi(t) + \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 dx \right) \xi_t dx + \frac{1}{L} \int_0^L \left(\xi(t) + \frac{1}{2} \int_0^L w_x^2 dx \right) w_x w_{xt} dx \quad (5.21) \end{aligned}$$

Combinando (5.18), (5.20) e (5.21) teremos (5.17).

Passando (5.17) ao limite, quando ε tende a zero, iremos obter as estimativas de decaimento exponencial uniforme como na Seção 4.3 para $\alpha = 0$. Além disso, podemos deduzir também que a energia E do sistema limite satisfaz

$$E(t) \leq cE(0)e^{-\frac{\mu}{1+E(0)}t},$$

para todo $t > 0$ onde c e μ são constantes positivas independentes da solução.

Referências Bibliográficas

- [1] ADAMS, R. A. *Sobolev Space*, Academic Press, London, (1975).
- [2] ARARUNA, F. D., BRAZ E SILVA, P. and ZUAZUA, Enrique, *Asymptotic limits and stabilization dor the 1D nonlinear Mindlin-Timoshenko*, J Syst Sci Complex 23 (2010): 414-430.
- [3] BIEZUNER, R. J., *Notas de Aula: Análise Funcional*, Instituto de Ciências Exatas - UFMG, 2009.
- [4] BREZIS, H. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Dunod, Paris, (1983).
- [5] CAZENAVE, T. and HARAUX, A., *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, Clarendon Press, Oxford (1998).
- [6] CODDINGTON, E. and LEVINSON, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGrall-Hill, New York, (1955).
- [7] GOMES, A. M., *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*, Instituto de Matemática-UFRJ, Rio de Janeiro, (1985).
- [8] LAGNESE, J. E., LEUGERING, G. *Uniform Stabilization of a nonlinear beam by nonlinear boundary feedback*, J. Differential Equations 91, (1991) 355-388.
- [9] LIONS, J. L., *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites Non-Linéaires*, Dunod, Paris, (1969).
- [10] LIONS, J. L. et E. Magenes, *Problèmes aux Limites Non Homogenes et Applications*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, vol. 1, (1968).

- [11] MEDEIROS L. A. e MIRANDA M. Milla, *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, vol. 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1989).
- [12] MEDEIROS, L. A. e RIVERA, P. H., *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos, vol. 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1977).
- [13] MEDEIROS, L. A. e MIRANDA, M. M., *Introdução aos espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Rio de Janeiro: UFRJ/IM (2011).
- [14] PERLA MENZALA, G., PAZOTO, A. F. and ZUAZUA, E., *Stabilization of Berger-Timoshenko's equation as limit of the uniform stabilization of the Von Kármán system of beams and plates*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. 36 (4) (2002) 657-691.
- [15] PERLA MENZALA, G. and ZUAZUA, E. *Timoshenko's beam equation as limit of a nonlinear one-dimensional von Kármán system*, Roy. Soc. Edinburg Sect. A 130 (2000) 855-875.
- [16] PERLA MENZALA, G. and ZUAZUA, E. *On a one-dimensional version of the dynamical Marguerre-Vlasov system*, Bol. Soc. Bras. Mat. (2001) 303-319.
- [17] PERLA MENZALA, G. and ZUAZUA, E. *The beam equation as a limit of 1-D nonlinear Von Kármán model*, Appl. Math. Lett. 12 (1999) 47-52.
- [18] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York (1983).
- [19] SIMON, J. *Compact sets in the space $L^p(0; T; B)$* , Ann. Mat. Pura Appl. (4) CXLVI (1987) 65-96.
- [20] SCHWARTZ, L. *Théorie des Distributions*, Hermann, (1966).
- [21] YOSIDA K. *Functional Analysis*, Springer Verlag, Berlin (1969).